

























**ЗАПИСКИ**  
**ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ**  
ПО  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНЮ.**

---

**ТОМЪ XXII.**

(СЪ 4 ТАБЛИЦАМИ).

---

**MÉMOIRES**  
DE  
**L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES**  
DE  
**ST.-PÉTERSBOURG.**

---

**CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.**

---

VIII<sup>o</sup> SÉRIE.

**TOME XXII.**

(AVEC 4 PLANCHES).

---

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.  
С.-Петербургъ, Май 1908. Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ*.

Типографія Императорской Академіи Наукъ. (Вас. Остр., 9 лин., № 12).

## СОДЕРЖАНИЕ XXII ТОМА. — TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXII.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою \*, является переводомъ оригинальнаго заглавія статьи.  
Le titre désigné par un astérisque \* présente la traduction du titre original du mémoire.

- |   |  |
|---|--|
| <p>№ 1. *Князь <b>Б. Голицынъ</b> и <b>Ю. Вилипъ</b>. Спектроскопическія изслѣдованія. Третье сообщеніе. О свойствахъ нѣкоторыхъ линий лучеиспусканія паровъ ртути. 1907. I—106 стр.</p> <p>№ 2. <b>В. В. Лепешкинъ</b>. Изслѣдованія надъ осмотическими свойствами и тургоромъ растительныхъ клѣтокъ. 1907. IV—137 стр.</p> <p>№ 3. <b>П. Ваннари</b>. Продолжительность солнечнаго сіянія въ Россіи (Съ 3 таблицами). 1907. III—33 стр.</p> <p>№ 4. *<b>Н. Книповичъ</b>. Ихтиологическія изслѣдованія въ Ледовитомъ океанѣ. II. Gymnelis и Enchelyopus s. Zoarces. (Съ 8 рис. и одной картой въ текстѣ). 1908. I—40 стр.</p> <p>№ 5. *<b>А. Ляпуновъ</b>. Задача-минимумъ въ вопросѣ объ устойчивости формъ равновѣсія вращающейся жидкости. 1908. III—140 стр.</p> <p>№ 6. <b>Е. В. Оппоконъ</b>. Многолѣтнія колебанія расхода нѣкоторыхъ сѣверо-американскихъ рѣкъ. 1908. I—11 стр.</p> <p>№ 7. <b>В. Гондзиковичъ</b>. Къ гистологіи кровеносной системы у Arachnoidea. (Съ 1 табл. и 7 рис. въ текстѣ). 1908. I—31—1 стр.</p> | <p>№ 1. Fürst <b>B. Galitzin</b> und <b>J. Wilip</b>. Spectroscopische Untersuchungen. Dritte Mittheilung. Ueber die Eigenschaften einiger Emissionslinien des Quecksilberdampfes. 1907. I—106 pages.</p> <p>№ 2. *<b>V. V. Lepechkin</b>. Recherches sur l'osmose et la turgescence des cellules et des tissus végétaux. 1907. IV—137 pages.</p> <p>№ 3. *<b>P. Vannari</b>. La durée de l'insolation en Russie. (Avec 3 planches). 1907. II—33 pages.</p> <p>№ 4. <b>N. Knipowitsch</b>. Ichthyologische Untersuchungen im Eismeer. II. Gymnelis und Enchelyopus s. Zoarces. (Mit 8 Figuren und einer Karte im Text). 1908. I—40 pages.</p> <p>№ 5. *<b>A. Liapounoff</b> (Liapunov). Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation. 1908. III—140 pages.</p> <p>№ 6. *<b>E. Oppokon</b>. Variations périodiques de longue durée du débit et des précipités atmosphériques dans les bassins de quelques rivières de l'Amérique de Nord. 1908. I—11 pages.</p> <p>№ 7. *<b>V. Gondzikevitz</b>. Zur Histologie des Blutgefäßsystems bei Arachnoideen. (Avec 1 planche et 7 dessins en texte). 1908. I—31—1 pages.</p> |
|---|--|



№ 8. \***Р. Егерманъ**. Движеніе кометной матеріи по гиперболическимъ путямъ. 1908. III + 80 стр.

№ 9. **А. Марковъ**. Распространеніе предѣльныхъ теоремъ исчисления вѣроятностей на сумму величинъ, связанныхъ въ цѣпь. 1908. I + 29 стр.

№ 10. **К. Н. Давыдовъ**. Наблюденія надъ регенерацией у Enteropneusta. 1908. I + 120 стр.

№ 8. **R. Jaegermann**. Die Bewegung der Kometenschweifmaterie auf hyperbolischen Bahnen. 1908. III + 80 pages.

№ 9. \***A. Markoff**. L'extension des theoremes limites du calcul des probabilités à la somme des valeurs liées en chaîne. 1908. I + 29 pages.

№ 10. \***K. Davidoff**. Etudes sur la régénération des Enteropneusta. 1908. I + 120 pages.



8 JUN. 1916

4+7

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG.**

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 1.**

**Volume XXII. № 1.**

# SPECTROSCOPISCHE UNTERSUCHUNGEN.

DRITTE MITTHEILUNG.

UEBER DIE EIGENSCHAFTEN EINIGER EMISSIONSLINIEN  
DES QUECKSILBERDAMPFES.

Von

**Fürst B. Galitzin und J. Wilip.**

*(Vorgelegt am 17. Mai 1906.)*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1907. ST-PÉTERSBOURG.**





**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 1.**

**Volume XXII. № 1.**

---

# SPECTROSCOPISCHE UNTERSUCHUNGEN.

DRITTE MITTHEILUNG.

## UEBER DIE EIGENSCHAFTEN EINIGER EMISSIONSLINIEN DES QUECKSILBERDAMPFES.

Von

**Fürst B. Galitzin und J. Wilip.**

*(Vorgelegt am 17. Mai 1906.)*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1907. ST.-PÉTERSBOURG.**

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.  
St.-Petersburg, December 1907. S. v. OLDENBURG, Beständiger Sekretär.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.  
Wass.-Ostr., 9. Linie, № 13.

## EINLEITUNG.

---

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung bestand darin, die Eigenschaften einiger Emissionslinien im Funkenspectrum des Quecksilberdampfes einem näheren Studium zu unterziehen.

In unserem früheren Aufsatz «Spectroscopische Untersuchungen. Zweite Mittheilung»<sup>1)</sup> haben wir das Emissionsspectrum des Bromdampfes unter verschiedenen Bedingungen studiert, aber damals stand uns nur ein grosses Rowland'sches Diffractionsgitter zur Verfügung, deshalb schien es uns sehr wünschenswerth ähnliche Versuche mit Instrumenten von viel grösserem Dispersionsvermögen und Auflösungskraft anzustellen, die die feinsten Details der Linien zu erkennen ermöglichen und den etwaigen Einfluss der verschiedensten Factoren auf das Aussehen der Linien zu studieren gestatten. Zu diesem Zweck haben wir das neulich von dem Physikalischen Laboratorium der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg angeschaffte grosse Michelson'sche Stufenspectroscop in Verwendung gebracht. Die Theorie dieses höchst schätzbaren und empfindlichen Instruments, nebst Beschreibung verschiedener Anwendungsmethoden, Fehlerquellen u. s. w. ist von einem von uns schon früher gearbeitet worden.<sup>2)</sup>

Das Stufenspectroscop ist zum Zweck ähnlicher Untersuchungen insofern von grosser Bequemlichkeit, da es gestattet, bestimmte Spectrallinien auszuwählen und den Einfluss verschiedener Factoren, wie Druck, Entladungsart etc., auf das Aussehen dieser Linien direct zu studieren. Solche planmässige und systematisch durchgeführte Versuche scheinen unserer Meinung nach höchst wünschenswerth zu sein, da sie eventuell eine gewisse Aufklärung der complicierten Molekularvorgänge beim Leuchten der Dämpfe und sie begleitenden Spectralerscheinungen nach sich ziehen können, was uns wiederum zu einer näheren Kenntniss der Eigenschaften der kleinsten Theile der Materie bringen würde.

---

1) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. VIII sér., T. XIX, № 9 (1906).

2) Man siehe: Fürst B. Galitzin. «Zur Theorie des Stufenspectroscops.» Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. V sér., T. XXIII, №№ 1 et 2, p. 67 (1905).



Unsere Aufgabe war eben die, einen kleinen Beitrag in dieser Richtung zu liefern.

Als Versuchskörper haben wir den Quecksilberdampf gewählt und unsere Untersuchungen nur auf die vier stärksten Emissionslinien desselben beschränkt, nämlich: die indigo-blaue ( $\lambda = 4358,24 \text{ \AA. E.}$ )<sup>1)</sup>, grüne ( $\lambda = 5460,95$ ), erste gelbe ( $\lambda = 5769,82$ ) und zweite gelbe ( $\lambda = 5790,92$ ). Alle diese vier Linien besitzen sogenannte Trabanten oder Begleiter, deren Lage (resp. Wellenlänge) als Ergänzung früherer Bestimmungen anderer Forscher auf diesem Gebiet von uns von neuem gemessen wurde. Dabei haben wir uns wiederum nur auf die wichtigsten, am leichtesten auftretenden Begleiter beschränkt und keine erschöpfende Beschreibung der Eigenschaften der einzelnen Linien in's Auge gefasst. Diese Begleiter waren uns insofern von Wichtigkeit, um bei der Beschreibung der eingetretenen Aenderungen in dem Aussehen der Linien von diesen Begleitern Rechenschaft zu tragen, so wie auch in einigen Fällen nach der Lage derselben das Dispersionsvermögen des Apparates für gewisse Einstellungen des Echelons zu bestimmen.

Der Hauptzweck dieser ganzen Untersuchung war, ein näheres Studium über den Einfluss des Druckes des leuchtenden Quecksilberdampfes auf das Aussehen und die Breite der erwähnten vier Emissionslinien anzustellen und zwar unter Berücksichtigung der unmittelbaren electrischen Vorgänge im leuchtenden Geisslerrohr selbst, wie Stromstärke und Potentialdifferenz an den Electroden.

Bei unseren ersten Versuchen stand der enge leuchtende Kanal der Funkenstrecke parallel zum Spalt des Hilfspectroscops des Stufenspectroscops. Um die Lichtstärke im Spectrum zu vermehren und dadurch die nöthigen Expositionszeiten zu verkürzen, haben wir ein besonderes Geisslerrohr construiert, wo der leuchtende Kanal horizontal und zwar senkrecht zum Spalt zu stehen kam, wo also die leuchtende Funkenstrecke gegen den Spalt gerichtet war. Die Lichtstärke ergab sich in der That grösser, aber dabei sind wir, zuerst bei der grünen Linie, auf eine sehr eigenthümliche Erscheinung gestossen. Die grüne Linie erschien nicht mehr als eine einzige Linie, sondern aus zwei Ästen bestehend, die nach oben und unten allmählig in eine einzige Linie zusammenflossen, so dass eine Art Schleife entstand, deren grösste Breite der Axe des leuchtenden Rohres entsprach. Von dieser interessanten Erscheinung ist in der Sitzung der physikalischen-mathematischen Abtheilung der Akademie der Wissenschaften am 11/24 Januar 1906 Mittheilung gemacht worden, wo zugleich auch eine eventuelle Erklärung der Erscheinung vorgeschlagen wurde. Eine ähnliche Schleife haben wir später auch bei der indigo-blauen Linie beobachtet, dagegen haben wir bei den beiden gelben Linien in keinem einzigen Fall eine solche Schleife constatieren können.

Erst nach Ausführung einiger dieser Versuche haben wir von der neuen, sehr interessanten Abhandlung von Janicki «Feinere Zerlegung der Spectrallinien von Quecksilber

---

1) Die Wellenlängen sind nach unseren früheren Bestimmungen angeführt. Man siehe «Spectroscopische Untersuchungen» Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. VIII série, T. XVII, № 6, p. 15 (1906) und «Zur Theorie des Stufenspectroscops.» L. c. p. 88.

etc.»<sup>1)</sup> Kenntniss genommen. Janicki hat ebenfalls mit Hilfe eines grossen Stufenspectroscops dieselbe Erscheinung bei der grünen Quecksilberlinie beobachtet, wobei er dieselbe auf eine Umkehrung der Linie zurückführt.

Um diese Erscheinung möglichst aufzuklären und die Entstehung, Form, Breite der Schleife etc. in ihrer Abhängigkeit vom Dampfdruck, Stromstärke, Potentialdifferenz, Länge des leuchtenden Kanals festzustellen, haben wir eine grosse Reihe specieller Versuche vorgenommen, die weiter unten mitgetheilt werden mögen.

Die meisten unserer Beobachtungen sind auf photographischem Wege erhalten, aber es sind auch dabei zur Kontrolle mehrmals visuelle Messungen hinzugefügt worden.

Bei Gelegenheit dieser Versuche ist eine grosse Anzahl electricischer Messungen an leuchtenden Geissleröhren ausgeführt worden, aus denen die Abhängigkeit des Widerstandes des leuchtenden Quecksilberdampfes vom Druck, Stromstärke etc. sich unmittelbar ableiten lässt.

## § 1.

### Versuchsanordnung.

Die zu diesen Spectraluntersuchungen benutzten Geissleröhren, die von sehr verschiedener Form und von verschiedensten Dimensionen waren, wurden theils im Laboratorium selbst angefertigt, theils von der Firma Goetze in Leipzig bezogen. Für höhere Temperaturen und Drucke wurde ein Geisslerrohr aus Quarzglas von der Firma W. C. Heräus in Hanau geliefert.

Bei unseren Versuchen war es notwendig, eine solche Anordnung zu treffen, dass in jedem beliebigen Moment der Druck des Quecksilberdampfes im Geisslerrohr gemessen werden konnte.

Die Feststellung dieses für spectroscopische Untersuchungen so wichtigen Elements wäre für Grössen, die unter einer Atmosphäre blieben, am einfachsten mit Hilfe eines offenen Manometers oder eines geschlossenen Vakuummanometers zu bewerkstelligen, wo alle complicirten Rechnungen fortfallen. Berücksichtigt man aber den Umstand, dass eine längere Form des Rohres beim Experimentieren höchst störend sein kann, so erkennt man, warum wir, ohne auf die etwas umständlichen Rechnungen Rücksicht zu nehmen, ein geschlossenes Luftmanometer verwendet haben, um desto mehr, da es uns bei diesen Versuchen gar nicht auf sehr genaue Druckbestimmungen ankam. Zudem lag es in unserer Absicht, die Quecksilberlinien auch bei höheren Drucken als einer Atmosphäre zu studieren.

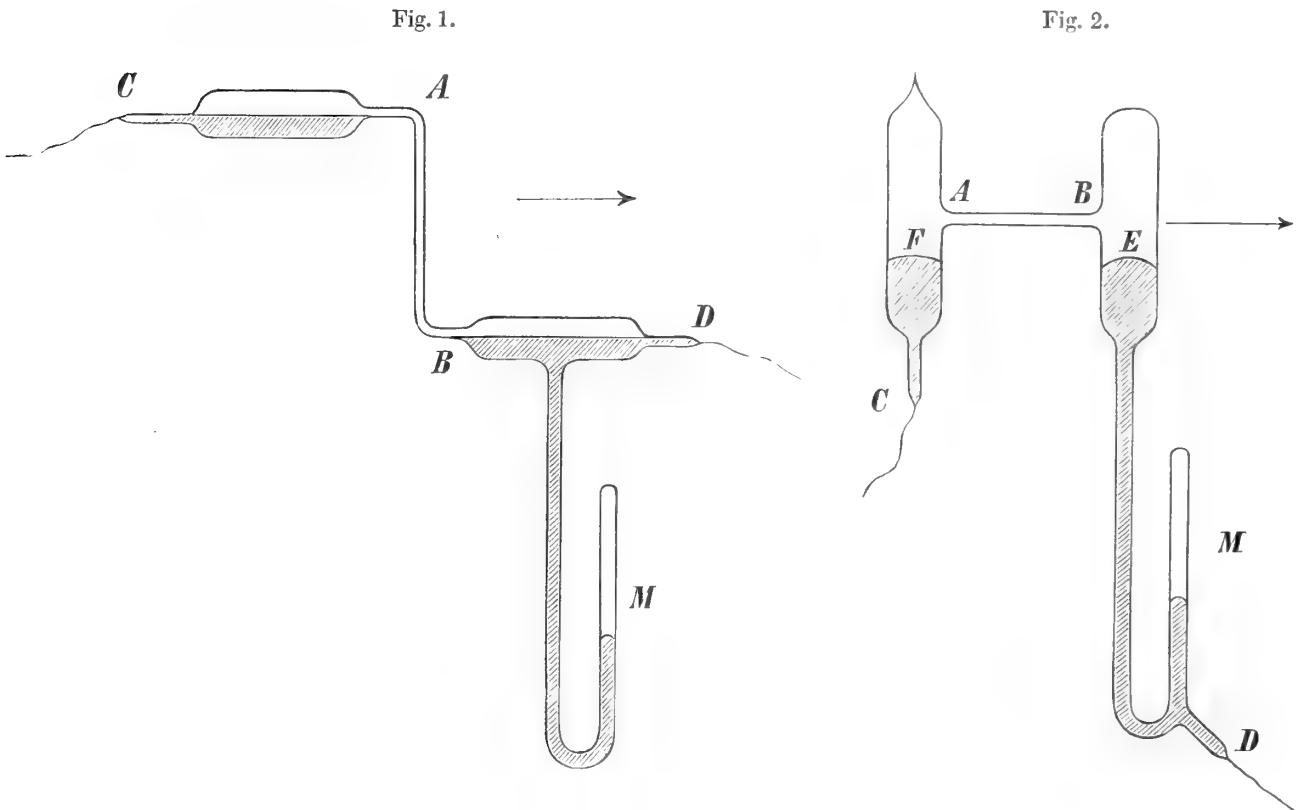
Im Allgemeinen ist über die Construction der Geissleröhren folgendes zu sagen. Der schmale Theil derselben wurde dermaassen breit gewählt, dass die Nähe der inneren Rohr-

1) Annalen der Physik. Bd. 19, p. 36 (1906).

wände keine störenden Verbreiterungen der Linien hervorbringen konnte.<sup>1)</sup> Als Electroden diente flüssiges Quecksilber selbst, welches in den breiten Endtheilen seine Oberfläche hatte. Von diesen Reservoiren führte je eine dünnere, ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Röhre zu den Elektrodenenden, die dünne, in Glas geschmolzene Platindrähte bildeten. Die eine von diesen Quecksilberleitungen diente zugleich als ein Schenkel des Manometers.

Um jede mögliche Loslösung des Glases vom Platin unschädlich zu machen, wurden bei einigen Röhren die Einschmelzstellen der Platindrähte mit Quecksilberverschlüssen versehen.

Die folgende Fig. 1 giebt eine schematische Ansicht eines solchen Geisslerrohres bei vertical stehender Funkenstrecke und die Fig. 2 eine solche, wo die Funkenstrecke horizontal war, also ein Geisslerrohr für gerade Durchsicht.



Diese Zeichnungen bedürfen keiner weiteren Erklärung.

1) Man siehe unseren Aufsatz «Spectroscopische Untersuchungen. Zweite Mittheilung.» Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. VIII sér., T. XIX, № 9, p. 32 (1906).



Die Behandlung dieser Geissleröhren war folgende.

Nachdem sie sorgfältig gewaschen und getrocknet waren, wurde durch mehrfache Destillation gereinigtes Quecksilber hineingefüllt, das Rohr an eine Quecksilberluftpumpe angeschmolzen und die Luft ausgepumpt. Darauf wurde es mittelst eines Bunsenbrenners vorsichtig erhitzt, die zwischen der Glaswand und dem Quecksilber sich bildenden Luftblasen herausgetrieben und mit der Pumpe entfernt. Nach zwei- bis dreimaliger Wiederholung dieses Verfahrens gelang es auf diese Weise meistens die sichtbaren Gasblasen zu entfernen. Fernerhin liess man einen kräftigen Funken des Inductoriums so lange durchschlagen, bis beim Pumpen die zu entfernenden Luftblasen verschwindend klein geworden waren. Nach einem stundenlangen Wirken des Inductoriums unter öfterem Commutieren des Stromes war dieses gewöhnlich erreicht, und man konnte sicher sein, dass keine störenden Gastheile mehr in der Röhre vorhanden waren. Als Zeichen dafür, dass genügende Leere erreicht war, galt der Umstand, dass nach dem Abkühlenlassen des Rohres der Funke im Beginn gar nicht durchschlagen wollte und erst nach erfolgter Vorerwärmung ein Leuchten begann. Schieden sich aber trotzdem noch mit der Pumpe zu constatierende Bläschen aus, so musste das Arbeiten mit dem Inductorium länger fortgesetzt werden. Nach erfolgter Entleerung des Rohres wurde dasselbe von der Luftpumpe abgeschmolzen.

Den Druck, der dann noch im Rohre blieb und nur der Tension des Quecksilberdampfes bei Zimmertemperatur entsprach, setzte man gleich Null und nach ihm bestimmte man die Constante des Manometers.

Zur Druckmessung selbst, d. h. zur Bestimmung der Länge der Quecksilbersäule und des Luftvolumens beim Manometer, diente ein Kathetometer, welches eine directe Ablesungsgenauigkeit bis auf  $0,02 \frac{m}{m}$  gestattete. Das Thermometer beim Manometer war ein geprüftes. Nach Beendigung der Versuche wurde jedes Manometerrohr durch Auswägung mit Quecksilber calibriert.

Um den Druck im Geisslerrohr beliebig variieren zu können und nach Belieben möglichst constant zu halten, musste dasselbe in einem Thermostaten eingeschlossen werden. Ein Thermostat mit gut isolierender Flüssigkeit würde in diesem Fall, was Temperaturconstanz anbetrifft, am geeignetsten sein. Bei Versuchen mit Geissleröhren, durch die man einen verhältnissmässig starken Strom hindurchschickt, ist aber eine grosse Temperaturgleichheit kaum erforderlich, da der hindurchschlagende Funke selbst eine Temperaturerhöhung bedingt. Ausserdem kommt noch dazu der Umstand, dass die eine der Elektroden bei der Entladung sich mehr erwärmt als die andere, so dass wir über die wahren inneren Temperaturverhältnisse des Rohres immer im Ungewissen bleiben. Aus dem Grunde begnügte man sich mit einem bequem herzustellenden und leicht zu handhabenden Luftthermostaten, der elektrisch geheizt und aus Asbest und Gyps jedesmal der Grösse und Form des Geisslerrohres entsprechend um das Rohr selbst hergestellt wurde.

Man schnitt aus Asbest ein Häuschen, zog dieses über das Rohr, so dass die dünneren Elektrodenröhren nebst dem Manometer draussen blieben, und umwickelte es mit einem

dünnen Platinband, welches zur Heizung mittelst eines electrischen Stromes diente.<sup>1)</sup> Als äusserster Schutz kamen dann noch mehrere Schichten Asbest.

Durch Gyps wurde dem ganzen System die nöthige Starrheit verliehen und zur Beobachtung, so wie zum Ablesen der oberen Quecksilberkuppe bei den Druckbestimmungen, wurden mit Hilfe von Gyps kleine Glimmerfenster angebracht.

Ein Thermoelement, dessen Löthstelle in der Nähe der äusseren Wand des engen Theils des Geisslerrohrs sich befand, gestattete die mittlere Temperatur des Luftbades mit Hilfe eines speciell dazu geachteten Galvanometers abzulesen. Diese Temperatur entsprach nicht dem Dampfdrucke des Quecksilbers, da der mittlere Theil des Rohres sich durch die Entladungen um Beträchtliches erwärmt, während sich an den inneren Electroden bei den Quecksilberkuppen in den breiteren Röhren kühlere Stellen befinden. Ausserdem scheint der Funken selbst eine Druckerhöhung hervorzubringen, die möglicherweise nicht allein eine Folge der erhöhten Dampftemperatur ist.

Bei Drucken, die unter einer Atmosphäre blieben, waren Röhren aus gewöhnlichem Glase zu verwerthen, bei höheren Drucken aber leitet der Quecksilberdampf schon ziemlich schlecht den Funken, während das Glas bei diesen Temperaturen schon ein ziemlich guter Leiter der Elektrizität geworden ist, so dass ein eigentliches Leuchten des Quecksilberdampfes gar nicht oder nur kurze Zeit zustande kommt. Daher war man genöthigt, für höhere Drucke ein Rohr aus Quarz zu verwenden. Dieses liess die Beobachtungen noch bis fast  $2\frac{1}{2}$  Atmosphären Dampfdruck fortsetzen, wobei der Quecksilberdampf noch immer zum Leuchten gebracht werden konnte.

Röhren, die für gerade Durchsicht hergestellt waren, projecierte man, wenn es erforderlich war, die leuchtende Funkenstrecke in verticaler Stellung zu handhaben, mit Hilfe von totalreflectierenden Prismen auf den Spalt des Hilfsspectroscops. Die Beleuchtung des Spaltes geschah immer in der Weise, dass man mittelst einer Linse den Lichtfaden des Geisslerrohrs auf ihn concentrirte.

Die Art und Weise der Benutzung des Stufenspectroscops für solche und ähnliche Beobachtungen, seine Messgenauigkeit etc. ist von einem von uns in dem Aufsatz «Zur Theorie des Stufenspectroscops»<sup>2)</sup> ausführlich beschrieben; wir brauchen also nicht auf diese Frage hier weiter einzugehen und begnügen uns damit auf jene Abhandlung zu verweisen. Es möge hier nur erwähnt werden, dass, um eine möglichst constaute Temperatur beim Stufenspectroscop zu erhalten, dasselbe nebst Hilfsspectroscop in einem besonderen Kasten eingeschlossen wurde. Das Reservoir eines empfindlichen in  $\frac{1}{50}^{\circ}$  C. getheilten Thermometers befand sich in der unmittelbaren Nähe des Echelons selbst. Während der Beobachtungen wurde dieses Thermometer abgelesen, wobei die Temperatur beim Echelon sich wirklich als

---

1) Dieser Strom wurde direkt von der Centrale der Akademie der Wissenschaften geliefert. Der maximale angewandte Heizstrom betrug 15 Amp.

2) L. c.

sehr constant erwies. Erst bei längeren Expositionszeiten traten kleine Aenderungen der Temperatur auf, die meistens nur einige Hundertstel Grad Celsius ausmachten.

Die Breite des Spaltes beim Collimatorrohr des Stufenspectroscops wurde so eng wie nur möglich gewählt, sodass gerade noch das Lichtquantum im Stufenspectroscop selbst ausreichte. Die Linien ergaben sich in der That bei niedrigen Drucken des Quecksilberdampfes von ausserordentlicher Schärfe und Schönheit.

Die Expositionszeiten wurden bei den späteren Beobachtungen zwischen ziemlich weiten Grenzen variiert, um bei der Verwerthung der Platten von allen secundären Einflüssen möglichst Rechenschaft tragen zu können.

Die Dispersion des Echelons bei den verschiedenen photographischen Platten und visuellen Beobachtungen wurde entweder nach der Entfernung beider Hauptlinien, oder, wenn nur eine Hauptlinie im Gesichtsfelde war, nach der Entfernung eines Begleiters von derselben ermittelt.

Die Ausmessung der Platten geschah unter einem Mikroskop mit verschiebbarem Tischchen, wobei die Schraubenhöhe des Mikrometers  $\frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{m}}$  betrug. Die zugehörige Trommel war in 100 Theile getheilt. Die Bruchtheile einer Theilung wurden geschätzt.

Eine ganz ähnliche Schraube mit Trommel befand sich am Ocularmikrometer für visuelle Beobachtungen.

Bei der Ausmessung der photographischen Platten wurde jede Einstellung des Fadenkreuzes des Mikrosops auf eine Linie oder einen Rand derselben mindestens drei Mal wiederholt und aus den so erhaltenen Ablesungen das Mittel genommen. Bei visuellen Beobachtungen war die Anzahl der einzelnen Einstellungen grösser.

Es muss aber bemerkt werden, dass bei höheren Drucken die genaue Einstellung des Fadenkreuzes auf einen Linienrand im Allgemeinen sehr erschwert wird, da die Linien einen sehr verwaschenen Charakter annehmen, wobei eine allmähliche Abstufung der Helligkeit eintritt. Es ist in einigen Fällen ziemlich schwer zu sagen, wo sich eigentlich der Rand der Linie befindet, trotzdem haben wir bei der Ausmessung der Platten immer versucht die Grenzen des eigentlichen Kernes der Linien festzustellen, ohne von dieser allmählichen Abstufung Rechenschaft zu tragen. Für den violetten Rand ist dies in den meisten Fällen einfacher, da derselbe gewöhnlich viel schärfer aussieht, als der rothe, welcher bei Druck-erhöhung zuweilen ein höchst verschwommenes Aussehen annimmt.

Bei denjenigen Linien, wo die Begleiter dicht an der Hauptlinie liegen, sind wiederum genaue Messungen bei höheren Drucken, die eine Verbreiterung der Linien hervorrufen, sehr mühsam, da eine solche verbreiterte Linie sich schwer von den anliegenden Begleitern trennen lässt.

Als photographische Platten wurden fast ausschliesslich Ilford's Rapid-Isochrom Platten verwendet, die mit Rodinal entwickelt wurden.

Um die elektrischen Elemente während der Entladung im Geisslerrohr feststellen zu können, mussten in den Stromkreis verschiedene elektrische Messapparate eingeführt werden.

Zur Messung der Wechselströme diente ein Kohlrausch'sches Elektrodynamometer, welches durch Auswählen einer geeigneten Dicke des Aufhängefadens der inneren Spule auf die passendste Empfindlichkeit gebracht wurde. Ausserdem befand sich im Stromkreise ein Siemens'sches Galvanometer, das zur Regulierung der Ausschläge mit einem variierbaren Shunt versehen wurde und zur Beobachtung von gewöhnlichen direkten Strömen diente<sup>1)</sup>.

Alle beide, sowohl das Elektrodynamometer, als auch das Galvanometer, wurden vorher nach einem Milliamperemeter der Firma Hartmann & Braun geaicht.

Zur Messung des Potentialgradienten zwischen den Elektroden des Rohres benutzte man ein grösseres Thomson'sches Quadrantelektrometer mit doppelten verstellbaren Quadrantenpaaren. Dieses Instrument war für gewöhnlich zur Messung von kleineren Potentialdifferenzen eingerichtet, wurde aber durch Weiterstellen der Quadrantenpaare von der Nadel und durch eine breitere bifilare Aufhängung für unseren Messbereich verwerthbar gemacht. Die Aichung dieses Elektrometers geschah mit Hilfe einer bekannten Anzahl von Accumulatoren, deren Spannung zudem noch mittelst eines Voltmeters bestimmt wurde.

Den Strom lieferte für gewöhnlich ein Inductorium von ca. 30 cm. Funkenlänge mit 8 Akkumulatoren und einem Quecksilberstrahl-Motorunterbrecher, der von der 100-Volt Batterie der Centrale der Akademie betrieben wurde und ein Zählwerk für Unterbrechungszahl pro Secunde trug, welches nach einem Secundenzähler mit einem Tourenzähler verglichen, gute Uebereinstimmung zeigte.

In seltensten Fällen wurde auch ein direkter Strom durch das Geisslerrohr geschickt, welcher von einer Hochspannungsbatterie von 512 kleinen Akkumulatoren stammte, die im hiesigen Physikalischen Laboratorium selbst hergestellt war. Bei diesem direkten Strom erwiesen sich meistentheils das im Stromkreis sich befindende Galvanometer und Elektrodynamometer als zu empfindlich, da als Ballastwiderstand nur die secundäre Spule des Inductoriums hineingeführt wurde (Widerstand ca. 32000 Ohm).

Um in diesen Fällen die Stromstärke feststellen zu können, wurde das früher erwähnte Milliamperemeter in den Stromkreis gefügt, welches dann direkt die Stromstärke anzeigte.

Auf der folgenden Figur 3 ist die Aufstellung der Apparate skizziert.

Es bedeuten dort:

- R* — das Geisslerrohr im Thermostaten,
- E* — das Quadrantelektrometer,
- D* — das Elektrodynamometer,
- G* — das Galvanometer,

---

1) Auch beim Durchschicken von Wechselströmen durch das Geisslerrohr blieb noch, wie wir weiter sehen werden, ein direkter Strom nach (Unipolare Leitung).

- I* — das Funkeninductorium,  
*U* — den Unterbrecher,  
*B* — die Akkumulatoren zum Betreiben des Funkeninductoriums,  
*W* — einen Rheostaten,  
*A* — ein Amperemeter zur Messung der mittleren primären Stromstärke,  
*H* — die Hochspannungsbatterie,  
*M* — das Milliampereometer,  
*T* — das Galvanometer für das Thermoelement,  
*L* — eine Linse und  
*S* — das Stufenspectroscop.

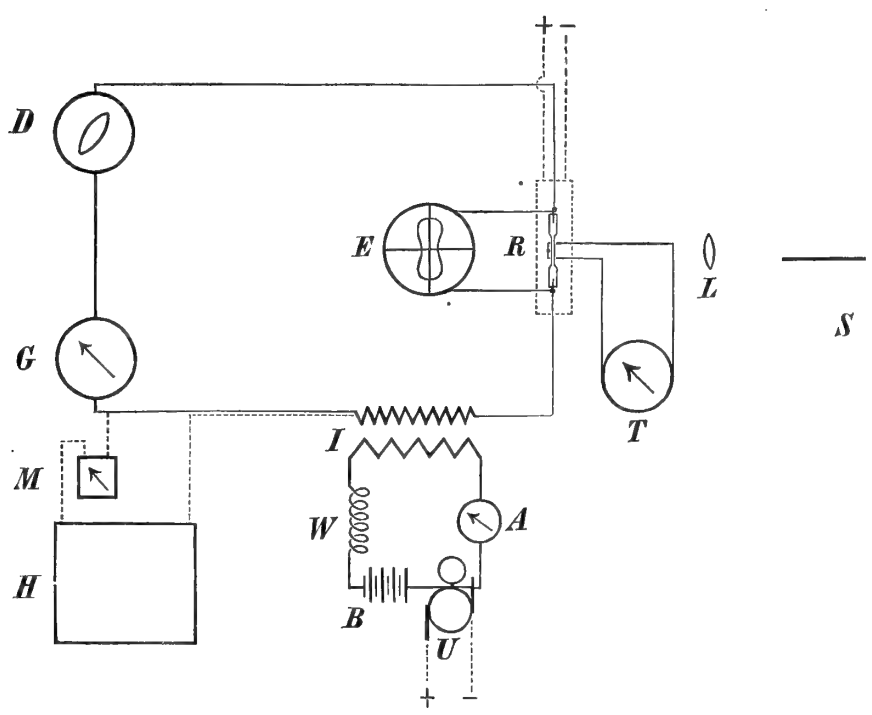


Fig. 3.

Mit + und — sind die Leitungen von der Centrale bezeichnet.

Der Gang der Versuche selbst war folgender.

Nachdem der Heizstrom für den Thermostaten einige Zeit gewirkt hatte und man nach den Angaben des Thermoelements auf ein stationäres Temperaturgleichgewicht schliessen konnte, schaltete man das Inductorium, resp. die Hochspannungsbatterie ein und liess dieselben einige Zeit in Thätigkeit. Die Angaben des Thermoelements wurden dann etwas grösser, besonders bei stärkeren Strömen; auch am Manometer war eine recht merkliche Druckzunahme zu erkennen. Man schritt zum Photographieren, resp. zur visuellen Ausmessung

der Linien erst dann, wenn das Quecksilber im Manometerrohr seinen Stand nicht merklich änderte.

Bei kurzen Expositionszeiten notierte man entweder vor, oder nach dem Exponieren die Angaben aller Messapparate; bei längeren Intervallen geschah dies zwei Mal, sowohl zum Beginn, als auch zum Schluss des Exponierens, und aus den so erhaltenen Zahlen wurde das entsprechende Mittel genommen.

## § 2.

### Die Trabanten der Quecksilberlinien.

Um die Lage, resp. Wellenlänge der Trabanten der vier erwähnten Quecksilberlinien zu bestimmen, wurde eine Anzahl Aufnahmen mit dem Stufenspectroscop gemacht und zwar in Spectren verschiedener Ordnung, wobei als Lichtquelle entweder ein Geissler'sches Rohr, oder eine Arons'sche Quecksilberbogenlampe verwendet wurde.

Bei diesen Versuchen wurde von der zweiten Methode der Anwendung des Stufenspectroscops Gebrauch gemacht<sup>1)</sup>, wo also zwei Streifen benachbarter Ordnung auf gleiche Helligkeit eingestellt wurden, und dabei die Entfernung derselben und die der Begleiter von einem der beiden Streifen unter dem Mikroskop gemessen. Alle Aufnahmen wurden auf der Seite der grösseren Dispersion erhalten, wo also der Winkel  $\theta_i$  zwischen dem einfallenden Strahlenbündel und der Echelonnormale negativ war, wobei wir unter  $i$  die Ordnung des entsprechenden Spectrums (unabhängig vom Vorzeichen) verstehen werden<sup>2)</sup>.

Die Entfernung beider Streifen entspricht für jede Linie einer bestimmten Wellenlängendifferenz  $\Delta\lambda$ , welche für jede Ordnung denselben Werth behält.

Die Art und Weise, wie  $\Delta\lambda$  sich bestimmen lässt, ist in dem eben erwähnten Aufsatz «Zur Theorie des Stufenspectroscops» ausführlich beschrieben. Dort sind auch die Werthe von  $\Delta\lambda$  für die grüne und zweite gelbe Linie angegeben. Die Werthe von  $\Delta\lambda$  für die beiden übrigen Linien lassen sich ohne Schwierigkeit nach der dort angegebenen Methode berechnen.

Wir erhalten somit folgende Werthe:

Linie.	$\lambda$	$\Delta\lambda$ <sup>3)</sup>
Indigo-blaue . .	4358,24 Ä. E.	0,2859 Ä. E.
Grüne . . . . .	5460,95 »	0,4766 »
I gelbe . . . . .	5769,82 »	0,5389 »
II gelbe . . . . .	5790,92 »	0,5432 »

1) Siehe «Zur Theorie des Stufenspectroscops», l. c. p. 83.

2) Z. B. entspricht für die grüne Linie die erste Ordnung ungefähr einem Winkel  $\theta_i = \theta_{-1}$  von  $-0^\circ 35'$ .

3) Unabhängig vom Vorzeichen.



Unsere Messungen bezogen sich nur auf die Differenz der Wellenlängen der Begleiter und der Hauptlinie.

Bei diesen Messungen kann bekanntlich zuweilen eine gewisse Unbestimmtheit herrschen, speciell für diejenigen Begleiter, welche nicht weit von der Mitte der entsprechenden zwei Hauptstreifen liegen. Man wird zuweilen im Zweifel sein, zu welchem von diesen beiden Hauptstreifen der entsprechende Begleiter gehört, d. h. ob seine Wellenlänge grösser oder kleiner, als die der Hauptlinie ist. Diese Frage lässt sich nur durch entsprechende Aufnahmen im Diffractionsspektrum eines Rowland'schen Gitters entscheiden und zwar bei solch hoher Dispersion, dass die Begleiter sich noch erkennen lassen. Durch solche Kontrollaufnahmen ist die richtige Lage der folgenden Begleiter, von denen einige ziemlich weit von den Hauptstreifen entfernt sind, festgestellt worden:

Indigo-blaue Linie.	Beide Hauptbegleiter $B_1$ und $B_2$ <sup>1)</sup>
Grüne Linie.	Hauptbegleiter $B_0$ .
II gelbe Linie.	Die Begleiter $B_1$ , $B_2$ und $B_3$ .

Was die übrigen Begleiter anbelangt, so sind sie zu demjenigen Hauptstreifen gezählt worden, welchem sie am nächsten liegen und haben je nach der Seite, auf welcher sie sich befinden, eine grössere oder kleinere Wellenlänge als die Hauptlinie zugetheilt erhalten.

Es mag nochmals erwähnt werden, dass wir uns bei diesen Versuchen und Messungen nur auf die am leichtesten auftretenden Begleiter beschränkt haben.

II gelbe Linie.

$$\lambda = 5790,92.$$

Sechs Begleiter  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ , deren relative Lage zwischen den beiden Hauptstreifen  $n_1$  und  $n_2$  sich aus der Zeichnung auf der Figur 4 erkennen lässt.

Der hellste Begleiter ist  $B_1$ ; nach ihm folgt  $B_2$  und alsdann  $B_3$ .

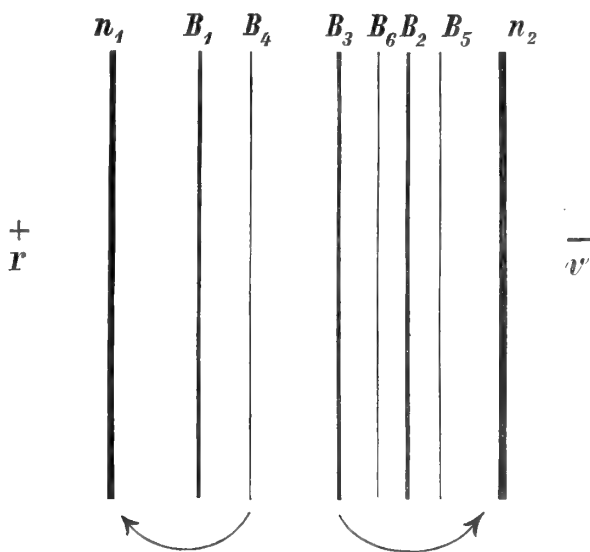


Fig. 4.

1) Wegen der Bezeichnung der Begleiter siehe weiter unten.

$B_4$ ,  $B_5$  und  $B_6$  sind sehr schwach.

Zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie  $n_1$ , wie auch zwischen  $B_2$  und  $n_2$ , befindet sich ein schwacher heller Hintergrund.

$B_6$  ist sehr undeutlich und erscheint als Rand des Hintergrundes um  $B_2$ .

In der folgenden Tabelle I sind die Werthe  $\delta\lambda$  der Differenzen der Wellenlängen der Trabanten und der Hauptlinie zusammengestellt. Dieselben sind nach drei getrennten Platten bestimmt worden. Aus der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von  $\delta\lambda$  lässt sich ein Urtheil über die Genauigkeit der Bestimmungen gewinnen.

Alle Zahlen sind in Ä. E. angegeben.

Tabelle I.  
II gelbe Linie.

Lichtquelle.	Ordnung des Spectrums.	$\delta\lambda$					
		$B_1$	$B_4$	$B_3$	$B_6$	$B_2$	$B_5$
Geisslerrohr Platte № 14	I	-0,120	-0,190	+0,225	+0,169	+0,131	+0,080
Arons'sche Lampe	V	-0,121	-0,189	+0,228	+0,169	+0,134	+0,090
„	II	-0,121	—	+0,230	—	+0,132	+0,088
Mittelwerthe . . .		-0,121	-0,190	+0,228	+0,169	+0,132	+0,086

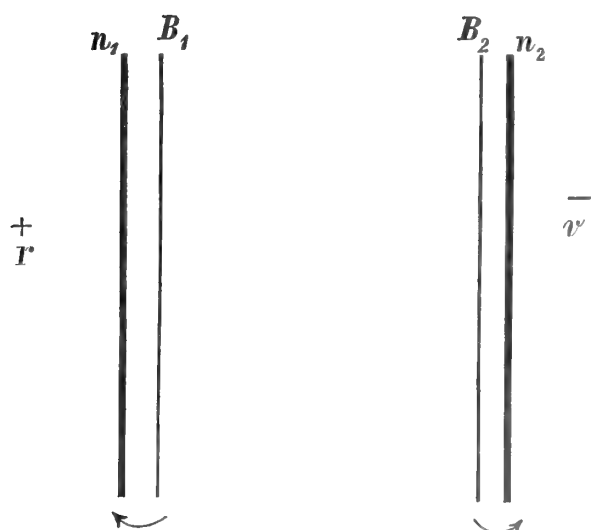


Fig. 5.

I gelbe Linie.

$$\lambda = 5769,82.$$

Zwei Begleiter  $B_1$  und  $B_2$ . Siehe die Fig. 5.

$B_1$  ist scharf,  $B_2$  dagegen etwas verwaschen. Zwischen  $B_2$  und der Hauptlinie befindet sich ein Hintergrund.

Die Lage dieser Begleiter ist nur nach einer, aber sehr scharfen Platte bestimmt worden und zwar bei einer Arons'schen Lampe als Belichtungsquelle und im Spectrum fünfter Ordnung.

Es ergab sich:

I gelbe Linie.

Begleiter.	$\delta\lambda$ .
$B_1$	— 0,049 Ä. E.
$B_2$	+ 0,042 »

Grüne Linie.

$\lambda = 5460,95.$

Sechs Trabanten  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  und  $B_5$ . Siehe die Fig. 6.

Da die grüne und weiter folgende indigo-blaue Linie im Quecksilberspectrum besondere interessante Eigenschaften besitzen, so ist die Lage ihrer Begleiter nach einer grösseren Anzahl von Platten bestimmt worden.

Der hellste Begleiter ist  $B_0$ , nach ihm folgen  $B_1$  und  $B_2$ .  $B_4$  ist sehr schwach. Zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie befindet sich ein schwacher heller Hintergrund, worauf  $B_5$  als äusserst schwacher Trabant sich noch erkennen lässt. Man siehe die Fig. 6.

Die entsprechenden Werthe von  $\delta\lambda$  sind in der folgenden Tabelle II zusammengestellt.

Tabelle II.  
Grüne Linie.

Lichtquelle.	Ordnung des Spectrums.	$\delta\lambda$					
		$B_5$	$B_1$	$B_4$	$B_0$	$B_3$	$B_2$
Arons'sche Lampe	I	—	—0,068	—	—0,236	+0,130	+0,085
Geisslerrohr Platte № 6	I	—	—0,067	—0,097	—0,239	+0,125	+0,082
Arons'sche Lampe	V	—0,047	—0,070	—0,102	—0,236	+0,129	+0,084
„	III	—	—0,064	—0,098	—0,235	+0,130	+0,087
„	III	—	—0,066	—0,097	—0,234	+0,130	+0,086
„	III	—	—0,069	—0,098	—0,236	+0,129	+0,086
„	III	—0,047	—0,069	—0,102	—0,239	+0,127	+0,082
Mittelwerthe . . .		—0,047	—0,068	—0,099	—0,236	+0,129	+0,085

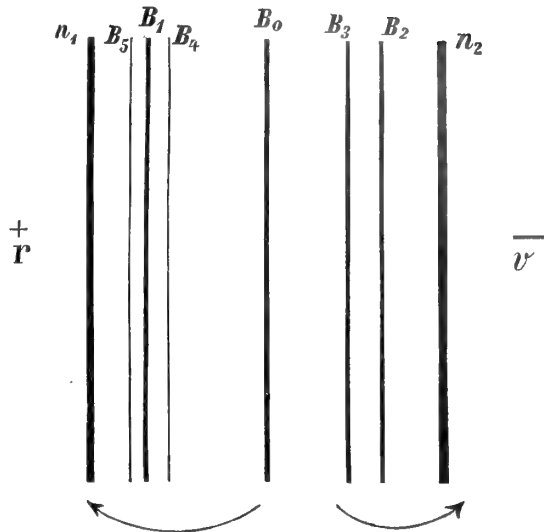


Fig. 6.

## Indigo-blaue Linie.

$$\lambda = 4358,24.$$

Vier Begleiter  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  und  $B_4$ . Siehe die Fig. 7.

$B_1$  und  $B_2$  sind sehr intensive Trabanten. Ihre relative Lage in Bezug auf die Hauptlinie ist mit Hilfe einer Aufnahme im Diffractionsgitter festgestellt worden, wie dies auch früher erwähnt wurde.

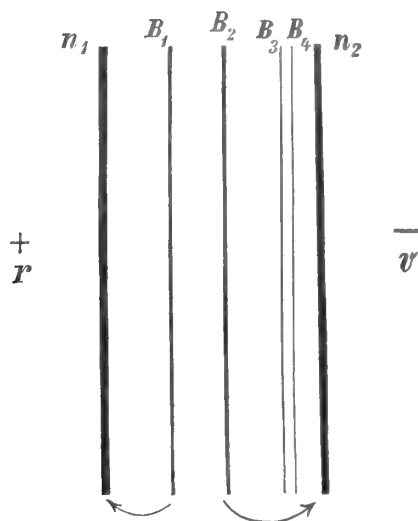


Fig. 7.

Zwischen  $B_3$  und der Hauptlinie  $n_2$  befindet sich ein heller Hintergrund, auf welchem  $B_4$  hervortritt.

Der Begleiter  $B_2$  erscheint zuweilen doppelt und aus zwei nahen Linien  $B_2'$  und  $B_2''$  bestehend. Auf einigen Platten ist die Lage dieser beiden Componenten direct bestimmt worden, auf anderen dagegen, wo diese Zerlegung nicht so deutlich auftrat, wurde nur die Lage der scheinbaren Mitte dieses Begleiters  $B_2$  bestimmt.

Bei dem Begleiter  $B_1$  kann man ebenfalls eine Verdoppelung vermuthen, aber die Erscheinung ist sehr undeutlich, infolgedessen begnügte man sich nur mit der Bestimmung der Mitte dieser Linie  $B_1$ .

Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf die Hauptlinie, aber, da diese scheinbare Verdoppelung sehr undeutlich war, so wurden die Entfernungen der Begleiter nur von der scheinbaren Mitte der Hauptlinie gemessen.

Alle Aufnahmen erfolgten mit Hilfe einer Arons'schen Lampe. Die entsprechenden Zahlenwerthe sind in der folgenden Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III.  
Indigo-blaue Linie.

Lichtquelle.	Ordnung des Spectrums.	$\delta\lambda$					
		$B_1$	$B_2'$	$B_2$	$B_2''$	$B_3$	$B_4$
Arons'sche Lampe.	III	-0,089	+0,131	—	—	+0,053	—
	III	-0,090	—	+0,127	—	+0,053	+0,026
	III	-0,092	—	+0,126	—	+0,052	+0,029
	III	-0,092	+0,132	—	+0,118	+0,053	+0,026
	III	-0,091	—	+0,126	—	+0,054	+0,029
	V	-0,095	—	+0,125	—	+0,053	+0,027
	I	-0,092	—	+0,125	—	+0,053	—
	III	-0,093	—	+0,126	—	+0,053	+0,027
	V	-0,093	+0,130	—	+0,119	+0,053	+0,027
	VII	-0,094	+0,132	—	+0,116	+0,054	+0,027
Mittelwerthe . . .		-0,092	+0,131	+0,126	+0,118	+0,053	+0,027

Der Mittelwerth von  $\delta\lambda$  für  $B_2'$  und  $B_2''$  ist gleich  $+0,124$ , was fast identisch mit dem directen Werth von  $\delta\lambda$  für  $B_2$ , nämlich  $+0,126$ , ausfällt.

Die Uebereinstimmung in den einzelnen Werthen von  $\delta\lambda$  in den vorigen Tabellen ist im Allgemeinen eine sehr befriedigende, so dass man wohl annehmen darf, dass in den meisten Fällen die  $\delta\lambda$  bis auf  $0,002$ — $0,003$  Å. E. richtig sind.

Wir sehen auch, dass die Lage der Trabanten unabhängig ist von der Art der Lichtquelle, da ein Geisslerrohr und eine Arons'sche Bogenlampe fast identische Werthe von  $\delta\lambda$  liefern. In dieser Hinsicht ist die relative Lage der Begleiter in Bezug auf die Hauptlinie sehr constant.

Alle diese Aufnahmen beziehen sich auf einen verhältnissmässig niedrigen Druck des Quecksilberdampfes. Mit wachsendem Druck treten Veränderungen in der relativen Helligkeit der Begleiter auf, sie werden auch immer mehr verwaschen und vereinigen sich schliesslich mit dem immer stärker werdenden Hintergrund. Die Beschreibung der verschiedenen Veränderungen der Begleiter im Aussehen, die mit wachsendem Drucke auftreten, ist im nächsten Paragraphen zu finden.

Wollen wir jetzt unsere Zahlenangaben über die Werthe von  $\delta\lambda$  mit denjenigen von Janicki<sup>1)</sup>, ebenfalls mit einem Stufenspectroscop erhaltenen, zum Vergleich zusammenstellen. Ausserdem wollen wir noch die von Gehrcke und Baeyer<sup>2)</sup> nach der Methode der Interferenzpunkte erhaltenen Werthe, so wie auch die früheren Zahlenangaben nach der Methode der «versilberten Luftplatte» von Fabry und Perot<sup>3)</sup> hinzufügen. Zugleich wollen wir auch die vor Kurzem erschienenen neuen Zahlenangaben von O. v. Baeyer mitberücksichtigen<sup>4)</sup>. Andere Literaturangaben befinden sich in der früher erwähnten Abhandlung von Janicki.

## II gelbe Linie.

$$\lambda = 5790,92.$$

	$B_1$	$B_4$	$B_3$	$B_6$	$B_2$	$B_5$
Janicki . . . . .	-0,119	-0,187	+0,230	+0,168	+0,132	+0,084
Galitzin und Wilip. . . . .	-0,121	-0,190	+0,228	+0,169	+0,132	+0,086
Gehrcke und v. Baeyer	-0,128	-0,202	+0,241	—	+0,143	—
Perot und Fabry . . . . .	-0,131	—	—	—	—	—
v. Baeyer . . . . .	-0,127	-0,19...	+0,237	—	+0,139	—

Janicki führt noch die Componente  $\delta\lambda = -0,251$  an.

## I gelbe Linie.

$$\lambda = 5769,82.$$

	$B_1$	$B_2$
Janicki . . . . .	-0,050	+0,046
Galitzin und Wilip. . . . .	-0,049	+0,042
Gehrcke und v. Baeyer . . . . .	-0,056	+0,047
Perot und Fabry . . . . .	—	+0,048
v. Baeyer . . . . .	-0,050	+0,046

Janicki führt noch drei andere schwache Begleiter an ( $\delta\lambda = -0,113$ ;  $\delta\lambda = +0,087$  und  $\delta\lambda = +0,120$ ); bei anderen Beobachtern fehlen dieselben.

---

1) Annalen der Physik. Bd. 19, p. 36 (1906).  
 2) Annalen der Physik. Bd. 20, p. 269 (1906). Dort, wo mehrere Zahlenangaben für denselben Begleiter sich befinden, haben wir das Mittel genommen.  
 3) Annales de Chimie et Physique (7) T. 16, p. 115 (1899) und Astrophys. Journal. T. 15, p. 218 (1902).  
 4) Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. IX Jahrg., № 4, p. 84 (1907).



## Grüne Linie.

$$\lambda = 5460,95.$$

	$B_5$	$B_1$	$B_4$	$B_0$	$B_3$	$B_2$
Janicki . . . . .	—	—0,066	—0,099	—0,232	+0,133	+0,088
Galitzin und Wilip . . .	—0,047	—0,068	—0,099	—0,236	+0,129	+0,085
Gehreke und v. Baeyer	—	—0,066	—0,111	—0,241	+0,134	+0,087
Perot und Fabry . . . .	—	—0,052	—0,076	—0,224	+0,136	+0,082
v. Baeyer . . . . .	—0,051	—0,072	—0,107	—0,250	+0,132	+0,087

Der Begleiter  $B_5$  fehlt bei Janicki und anderen; er wird nur noch von v. Baeyer gegeben; dagegen führen Perot und Fabry noch den Begleiter  $\delta\lambda = +0,008$  an. Den von Perot und Fabry gegebenen Werth  $\delta\lambda = -0,052$  haben wir dem Trabanten  $B_1$  zugewiesen, da ihre Zahlenangaben im Allgemeinen kleiner ausfallen und sie aller Wahrscheinlichkeit nach den Begleiter  $B_1$  und nicht den äusserst schwachen Trabanten  $B_5$  gesehen haben.

Janicki meint noch, dass  $\delta\lambda$  für  $B_0$  wohl  $+0,244$  sein mag. Nach unseren Kontrollversuchen mit einem Diffractionsgitter ist das sicher nicht der Fall.

v. Baeyer giebt noch zwei andere Trabanten an ( $\delta\lambda = -0,025$  und  $\delta\lambda = +0,222$ ).

## Indigo-blaue Linie.

$$\lambda = 4358,24.$$

	$B_1$	$B_2'$	$B_2$	$B_2''$	$B_3$	$B_4$
Janicki . . . . .	—0,097	+0,121	—	+0,105	+0,043	+0,020
Galitzin und Wilip . . .	—0,092	+0,131	+0,126	+0,118	+0,053	+0,027
Gehreke und v. Baeyer	—0,108	—	(+0,115)	—	+0,048	+0,025
v. Baeyer . . . . .	—0,103	—	+0,126	—	+0,049	+0,021 — +0,030

Zahlenangaben von Perot und Fabry fehlen.

Janicki führt noch drei Begleiter an:  $\delta\lambda = -0,023$ ;  $\delta\lambda = -0,052$  und  $\delta\lambda = -0,112$ . Gehreke und v. Baeyer geben noch folgende Begleiter (Mittelwerthe):  $\delta\lambda = -0,171$ ;  $-0,117$ ;  $-0,019$  und  $+0,204$ , und v. Baeyer:  $\delta\lambda = -0,175$ ;  $-0,118$ ;  $-0,048$ ;  $-0,018$  und  $+0,204$ .

Die Uebereinstimmung zwischen den von Janicki und von uns für die beiden gelben und die grüne Linie erhaltenen Resultate ist eine ganz befriedigende.

Erst für die indigo-blaue Linie treten gewisse, wenn auch nicht zu sehr bedeutende Abweichungen auf. Bei Janicki sind die positiven Werthe von  $\delta\lambda$  alle kleiner, als bei uns. Dies mag wohl daran liegen, dass Janicki die Hauptlinie als eine getheilte sah und die Linie  $\delta\lambda = -0,023$  als eine besondere Componente auffasste, während wir die Hauptlinie

als eine einzige Linie angenommen haben und die Componente  $\delta\lambda = -0,023$  nicht besonders bestimmen konnten, da sie nicht genügend scharf auf der Platte auftrat.

Der Begleiter  $\delta\lambda = -0,112$  bei Janicki mag wohl eine der beiden Componenten von  $B_1$  sein, die wir ebenfalls als doppelt vermuthen.

Die Zahlenangaben von Gehrcke und v. Baeyer, wie auch die von Perot und Fabry und v. Baeyer sind für die II gelbe Linie etwas grösser als bei Janicki und uns. Bei der I gelben Linie ist die Uebereinstimmung wiederum eine sehr befriedigende.

Bei der grünen Linie stimmen die Werthe von Gehrcke und v. Baeyer im Allgemeinen besser mit unseren und denen von Janicki überein, als die von Perot und Fabry.

Es muss aber doch bemerkt werden, dass wir hier die *Mittelwerthe* von Gehrcke und v. Baeyer angeführt haben; in der That aber weichen die einzelnen Werthe von  $\delta\lambda$  bei diesen Autoren für einige Begleiter ziemlich stark von einander ab. So ist z. B. der maximale Unterschied in den einzelnen Werthen von  $\delta\lambda$  für  $B_3$  0,015 und für  $B_1$  und  $B_4$  sogar 0,017 Å. E.

Für die indigo-blaue Linie führen Gehrcke und v. Baeyer den Begleiter  $\delta\lambda = +0,115$  (Mittelwerth) an, und, da sie nur eine einzige Zahl in dieser Gegend angeben, so haben wir diesen Begleiter mit  $B_2$  identificiert.

Es sind für die indigo-blaue Linie noch andere Unsicherheiten vorhanden, auf die auch Gehrcke und v. Baeyer hinweisen<sup>1)</sup> und welche weitere Untersuchungen unzweifelhaft aufklären werden.

Eine kritische Zusammenstellung der Resultate anderer Beobachter findet sich bei Janicki wiedergegeben<sup>2)</sup>, deshalb können wir uns hier damit begnügen auf diese Abhandlung von Janicki zu verweisen.

### § 3.

## Erste Beobachtungsreihe.

### Einfluss des Druckes auf das Aussehen und die Breite der Spectrallinien.

Diese Versuche wurden mit verschiedenen Glasröhren (N<sup>o</sup>s I, II, III und IV) von der Form der Fig. 1 ausgeführt, wo also die leuchtende Funkenstrecke parallel zum Spalt war. Mit dem Rohr N<sup>o</sup> I wurden nur Vorversuche vorgenommen; da es bald platzte, so wurde es durch das Rohr N<sup>o</sup> II ersetzt.

Die Dimensionen der Röhren N<sup>o</sup>s II, III und IV waren die folgenden:

	Länge des engen Canals (AB).	Innerer Durchmesser desselben.
Rohr N <sup>o</sup> s II, III und IV . . . . .	ca. 50 $\frac{m}{m}$	2,2 $\frac{m}{m}$

1) L. c. p. 280.

2) L. c.

Directe elektrische Messungen an den Geisslerrohren selbst wurden bei dieser Beobachtungsreihe nicht ausgeführt.

Die Beobachtungen bezogen sich auf die grüne und die beiden gelben Quecksilberlinien.

Zuerst werden wir die Ergebnisse der einzelnen photographischen Aufnahmen, so wie die visuellen Ausmessungen, der Reihe nach anführen, um den Einfluss einer Druckerhöhung nur auf das *Aussehen* der Linien klar zu legen und alsdann schon die Zahlenangaben nach dem entsprechenden Dampfdruck des Quecksilbers in besonderen Tabellen ordnen.

Die Unterbrechungszahl  $n$  am Inductorium war möglichst constant gehalten. Im Mittel betrug  $n$  etwa 84.

Zu Orientierungszwecken bei der Herstellung der späteren Tabellen wollen wir jeder einzelnen Aufnahme eine laufende Nummer  $N$  begeben. Unter  $N_1$  wollen wir die laufende Nummer der visuellen Bestimmungen verstehen.

Es soll nun im Folgenden bedeuten:

$i_1$  — die mittlere Stromstärke im primären Stromkreise des Inductoriums in Ampèren,

$i_2$  — die Stärke des Heizstromes des Thermostaten ebenfalls in Ampèren,

$T$  — die Temperatur im Thermostaten nach dem Thermoelement,

$S$  — die Ordnungszahl des entsprechenden Spectrums,

$p$  — den Druck des Quecksilberdampfes in  $\frac{m}{m}$ ,

$\Delta$  — die Breite der entsprechenden Spectrallinien nach den photographischen Aufnahmen,

$\Delta_1$  — die Breite der Linien nach den visuellen Ausmessungen.

$\Delta$  und  $\Delta_1$  sind immer in Ängström'schen Einheiten angegeben.

Bei allen Aufnahmen sind die entsprechenden Expositionszeiten (Ex.-Z.) in Minuten beigefügt.

## Rohr № II.

### Platte № 4.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ).

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
1	3,4 Amp.	5,0 Amp.	142° C.	I	25 <sup>m</sup>	3 $\frac{m}{m}$	0,054 Ä. E.
2	3,4 »	9,8 »	395 »	I	3	242 »	0,076

Bei  $p = 242 \frac{m}{m}$  sind die Trabanten  $B_0$  und  $B_2$  sehr erweitert.  $B_1$  ist fast verschwunden in einem intensiven hellen Hintergrund. Um  $B_2$  liegt ein kontinuierlicher Hintergrund. Der violette Rand der Hauptlinie ist ziemlich scharf; mindestens ist die Uebergangsstelle zum Hintergrund deutlich zu sehen. Der rothe Rand ist weniger scharf.

Unter denselben Bedingungen sind auch visuelle Messungen vorgenommen.

$N_1$	$p$	$\Delta_1$
1	$2 \text{ m/m}$	0,038
2	242 »	0,064

### Platte № 5.

Grüne Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
3	3,4	5,0	$143^\circ$	I	10	$2 \text{ m/m}$	0,058
4	3,5	9,7	190	I	3	204 »	(0,055)

Bei niedrigem Druck ist die Platte gut ausexponiert.

Die Begleiter  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , und  $B_3$  sind sehr deutlich, obgleich sie etwas verwaschen aussehen. Zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie, so wie auch zwischen  $B_3$  und  $B_2$  und zwischen  $B_2$  und der Hauptlinie liegt ein schwacher Hintergrund. Der viol. Rand der Hauptlinie ist sehr scharf, der rothe dagegen etwas verwaschen.

Beim höheren Druck ist die Platte nicht lang genug ausexponiert, so dass  $B_0$  kaum zu sehen ist, daher ist  $\Delta$  unsicher.

Die visuellen Messungen unter denselben Bedingungen haben ergeben

$N_1$	$p$	$\Delta_1$
3	$2 \text{ m/m}$	0,045
4	204 »	0,069

Die beiden Werthe von  $\Delta_1$  sind Mittelwerthe aus je 10 einzelnen Messungen.

### Platte № 6.

Grüne Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
5	3,5	5,1	$145^\circ$	I	Gut ausexponiert.	$2 \text{ m/m}$	0,052

Diese Platte ist viel besser ausexponiert, als die Platten №№ 4 und 5 und trotzdem ist der Werth von  $\Delta$  für  $p = 2 \text{ m/m}$  mit dem vorigen sehr ähnlich.

Die Begleiter sind sehr deutlich; auch  $B_4$  ist zu erkennen.

Visuelle Messungen ergaben

$N_1$	$p$	$\Delta_1$
5	$2 \text{ m/m}$	0,053

Bei höherer Temperatur konnte die entsprechende Aufnahme nicht gemacht werden, da das Rohr durchgeschlagen wurde.

Es wurde daher ein neues Rohr № III angefertigt.

## Rohr № III.

Die Platte № 7 für einen verhältnissmässig sehr hohen Druck von  $501 \frac{m}{m}$  für die grüne Linie bei einer Expositionsdauer von  $6^m$  und bei  $i_1 = 2,8$  Amp. war nicht genügend ausexponiert.

Visuell betrachtet erschienen beide Hauptlinien sehr verbreitert; die Begleiter waren kaum noch zu unterscheiden, da ein heller Hintergrund sich von einer Hauptlinie zur anderen hinzog.

## Platte № 8.

## Grüne Linie.

<i>N</i>	$i_1$	$i_2$	<i>T</i>	<i>S</i>	Ex.-Z.	<i>p</i>	$\Delta$
6	2,7	5,0	199°	I	80	$13 \frac{m}{m}$	0,050
7	2,8	9,0	373	I	20	199 »	0,068

Bei  $p = 13 \frac{m}{m}$  scheinen die Begleiter schon etwas verbreitert zu sein. Die Ränder der Hauptlinie sind scharf.

Bei  $p = 199 \frac{m}{m}$  tritt  $B_1$  nicht mehr hervor; es bleibt nur ein heller Hintergrund übrig, welcher sich an die benachbarte Hauptlinie anschmiegt. Die Verbreiterung von  $B_0$  ist deutlich zu erkennen.  $B_2$  ist kaum als Begleiter zu sehen. Er ist verbreitert und um ihn liegt ein heller Hintergrund, welcher sich bis zu der entsprechenden Hauptlinie erstreckt.

## Platte № 9.

## Grüne Linie.

<i>N</i>	$i_1$	$i_2$	<i>T</i>	<i>S</i>	Ex.-Z.	<i>p</i>	$\Delta$
8	2,8	5,0	184°	I	100	$9 \frac{m}{m}$	0,048
9	2,8	9,0	363	I	15	205 »	0,057

Die Expositionsdauer in beiden Fällen war richtig ausgewählt.

Bei  $9 \frac{m}{m}$  Druck ist der violette Rand der Hauptlinie schärfer, als der rothe. Bei  $p = 205 \frac{m}{m}$  ist der violette Rand etwas verwaschen, aber weniger als der rothe.  $B_1$  ist so verbreitert, dass er nicht mehr als Begleiter auftritt; es bleibt nur ein heller Hintergrund in seiner Nähe übrig.  $B_0$  ist verbreitert und verwaschen.  $B_2$  ist noch als breiter und verwaschener Begleiter zu erkennen, dagegen  $B_3$  nicht. Um  $B_2$  liegt ein Hintergrund, der sich bis zu der benachbarten Hauptlinie erstreckt.

Bei der folgenden Aufnahme Platte № 10 wurde das Rohr wiederum durchgeschlagen und daher ein neues Rohr № IV gefertigt. Der Thermostat wurde ebenfalls umgebaut und zwar etwas geräumiger gemacht.

## Rohr № IV.

## Platte № 11.

## Grüne Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
10	2,8	8,3	162°	I	13	3 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,051
11	2,8	12	380	I	3	286 »	0,066

Beide Aufnahmen sind besser ausexponiert, als auf der Platte № 9.

$B_2$  und  $B_3$  erscheinen als getrennte Begleiter, ohne von einem hellen Hintergrund umgeben zu sein. Spuren von  $B_4$  sind ebenfalls zu erkennen. Zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie liegt ein schwacher Hintergrund.

Bei  $p = 286^m/m$  sind die Hauptlinien verwaschen. Der rothe Rand ist sehr undeutlich, der violette dagegen schärfer.  $B_0$  und  $B_2$  sind sehr verwaschen.  $B_1$  ist verschwunden; es ist nur ein heller Hintergrund nachgeblieben. Um  $B_2$  befindet sich ein Hintergrund, welcher sich bis zur benachbarten Hauptlinie erstreckt.

## Visuelle Messungen.

## Grüne Linie.

$N_1$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	$p$	$\Delta_1$
6	2,8	7,6	167°	I	5 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,034
7	2,8	11,7	395	I	357 »	0,060

Beim höheren Druck sind die Linien sehr hell, aber verbreitert und verwaschen. Zwischen beiden Hauptlinien liegt ein schwacher heller Hintergrund. Der Begleiter  $B_1$  hat sich fast mit der Hauptlinie vereinigt.

Die nächstfolgenden Aufnahmen beziehen sich auf die II gelbe Linie ( $\lambda = 5791$ ).

## Platte № 14.

## II gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
12	3,1	4,9	90	I	150 <sup>m</sup>	1 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,048
13	3,1	9,0	230	I	150	13	0,059

Schon bei 13<sup>m</sup>/<sub>m</sub> Druck sind die Hauptlinien verbreitert und ihre Ränder unscharf, besonders der rothe Rand. Die Begleiter sind verwaschen.  $B_1$  ist noch als Begleiter zu erkennen, obgleich er sehr verbreitert ist.  $B_3$  verliert fast gänzlich den Charakter eines Trab-



ten. Zwischen den Hauptlinien erstreckt sich ein continuierlicher heller Hintergrund; zwischen  $B_1$  und der benachbarten Hauptlinie  $n_1$  ist er am intensivsten (siehe die Fig. 4), dann folgt der Theil zwischen  $B_2$  und  $n_2$ . Am durchsichtigsten ist der Hintergrund zwischen  $B_1$  und  $B_3$ , aber jedenfalls tritt Licht überall auf.

### Platte № 15.

#### II gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
14	3,1	7,5	170°	I	90 <sup>m</sup>	4 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,041
15	3,1	11,0	339	I	90	157	Total verwaschen

Bei 4<sup>m</sup>/<sub>m</sub> Druck treten die Begleiter  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  sehr deutlich auf, aber etwas verbreitert. Ein continuierlicher Hintergrund zwischen den Hauptlinien  $n_1$  und  $n_2$  ist noch nicht zu ersehen. Zwischen  $B_1$  und  $n_1$  liegt jedoch ein schwacher Hintergrund.

Bei  $p = 157$ <sup>m</sup>/<sub>m</sub> ist alles schon total verschwommen. Nicht nur die Begleiter, sondern auch die Hauptlinien sind nicht mehr getrennt zu erkennen. Man sieht nur ein continuierliches helles Band, welches gegen  $n_1$  am intensivsten ist.

Die Hauptlinien verbreitern sich auch nach auswärts.

Diese Aufnahme ist sehr charakteristisch.

### Platte № 16.

#### II gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
16	3,1	4,9	96°	I	90 <sup>m</sup>	2 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,044
17	3,1	9,0	232	I	90	13	0,056

Diese Platte ist ganz ähnlich der Platte № 14. Hier ist aber die Expositionszeit etwa um die Hälfte ( $\frac{2}{5}$ ) kleiner; deshalb ergaben sich auch die Werthe von  $\Delta$  ein wenig kleiner, als auf der Platte № 14, aber der Unterschied ist ziemlich unbedeutend. Wir sehen also, dass die Expositionszeiten zwischen ziemlich weiten Grenzen variiert werden können, ohne eine bedeutende Aenderung von  $\Delta$  nach sich zu ziehen. Wenigstens bei der Untersuchung der Aenderung von  $\Delta$  mit dem Druck ist die Auswahl der richtigen Expositionszeit von nicht so grossem Belang.

Wegen der kürzeren Expositionszeit ist auf der Platte № 16  $B_1$  bei  $p = 13$ <sup>m</sup>/<sub>m</sub> nicht mehr als getrennter Begleiter zu erkennen. Zwischen  $n_1$  und  $n_2$  liegt bei diesem Druck ebenfalls ein continuierlicher Hintergrund mit denselben Schattierungen, wie auf der Platte № 14, aber wegen der kleineren Expositionszeit sind die Uebergänge in den Schattierungen nicht so deutlich.

## Platte № 17.

II gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
18	3,1	8,3	189°	I	90 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,045
19	3,1	10,0	283	I	90	46	Verwaschen

Bei 5<sup>m</sup>/<sub>m</sub> Druck sind  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  noch als Begleiter zu erkennen, obgleich sie sehr verbreitert sind. Ein Hintergrund liegt nur zwischen  $B_1$  und  $n_1$ .

Bei  $p = 46$  ist schon alles verschwommen. Zwischen  $n_1$  und  $n_2$  liegt ein kontinuierlicher Hintergrund. In der Mitte ist er am wenigsten lichtstark; am intensivsten gegen  $n_1$  zu. Bei  $B_1$  tritt eine sprunghafte Aenderung in der Intensität des Hintergrundes auf.

Auf dem schwächsten Theil des Hintergrundes zwischen  $n_1$  und  $n_2$  treten ganz besondere, eigenthümliche, wenn auch sehr schwach gekennzeichnete Streifen auf.

## Platte № 19.

II gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
20	3,0	9,0	223°	I	60 <sup>m</sup>	11	0,056
21	3,1	9,5	249	I	60	21	0,062
22	3,0	9,1	230	I	60	13	0,058
23	3,1	9,8	273	I	60	38	Undeutlich

Bei  $p = 11$ <sup>m</sup>/<sub>m</sub> ist die Aufnahme schwach. Im Allgemeinen derselbe Charakter wie auf der Platte № 14 bei  $p = 13$ <sup>m</sup>/<sub>m</sub>.

Bei 21<sup>m</sup>/<sub>m</sub> Druck treten die Trabanten nicht mehr auf. Zwischen  $n_1$  und  $n_2$  liegt ein kontinuierlicher Hintergrund — am intensivsten zwischen  $B_1$  und  $n_1$ , am schwächsten zwischen  $B_1$  und  $B_3$ . Die Hauptlinien treten noch deutlich auf.

Bei 13<sup>m</sup>/<sub>m</sub> Druck sind die Begleiter  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  sehr schwach angedeutet. Zwischen  $n_1$  und  $n_2$  liegt schon ein kontinuierlicher Hintergrund, mit den drei früher erwähnten Intensitätsunterschieden.

Bei 38<sup>m</sup>/<sub>m</sub> Druck ist der Hintergrund mehr homogen. Die Hauptlinien sind sehr verbreitert.

$B_2$  und  $B_3$  sind noch zu sehen.  $B_1$  fällt fast zusammen mit  $n_1$ , was die genaue Ausmessung von  $\Delta$  unmöglich macht.

Zwischen  $n_1$  und  $n_2$  treten wiederum die früher erwähnten charakteristischen Streifen auf. Die Bestimmung ihrer Lage ist durch die Undeutlichkeit der Hauptlinien sehr erschwert.

## Platte № 20.

## II gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
24	3,1	7,5	164°	Min. d. Ablenk.	30 <sup>m</sup>	3 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,041
25	3,1	9,5	257	»	30	23	—
26	3,1	9,0	220	»	30	10	0,049
27	3,1	10,0	286	»	30	50	0,156
28	3,0	10,9	343	»	30	169	—
29	3,1	12,0	420	»	30	451	0,224

Bei  $p = 3^m/m$  ist die Hauptlinie ziemlich scharf.  $B_1$  steht gesondert.

Bei  $p = 23^m/m$  ist die Hauptlinie höchst verwaschen mit sehr unscharfen Rändern. Der Begleiter  $B_1$  ist als solcher verschwunden; es zieht sich nur ein Hintergrund bis zu der Hauptlinie hin. Eine genauere Bestimmung von  $\Delta$  ist unmöglich.

Bei  $p = 10^m/m$  ist die Hauptlinie etwas verbreitert. Die Ränder fangen an unscharf zu werden.

Bei  $p = 50^m/m$  ist die Hauptlinie höchst verbreitert.  $B_1$  ist nicht zu sehen. Eine allmähliche Abstufung geht sehr weit nach rechts und links. Die Bestimmung von  $\Delta$  ist sehr angenähert.

Bei  $p = 169^m/m$  hat die Linie ein sehr unregelmässiges Aussehen, wahrscheinlich in Folge der Tropfenbildung von Quecksilber an den inneren Rohrwänden.

Bei  $p = 451^m/m$  ist die Linie so verbreitert und verwaschen, dass es fast unmöglich ist die Grenzen des Kernes der Linie festzustellen. Die ganze verschwommene Linie hat eine ziemlich gleichmässige Intensität, aber gegen die Ränder treten Abstufungen in der Helligkeit auf.

Die gemessene Breite  $\Delta$  ist nur als ganz angenähert zu betrachten. Es lag uns nur vor, die Grössenordnung der Verbreiterung bei diesem Druck festzustellen.

## Visuelle Messungen.

## Grüne Linie.

$N_1$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	$p$	$\Delta_1$
8	3,2	4,9	94°	Min. d. Ablenk.	3 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,041
9	3,2	7,5	164	»	3	0,046
10	3,2	9,0	232	»	12	0,049
11	3,1	10,0	276	»	35	0,054
12	3,0	11,0	340	»	143	0,065
13	3,1	12,0	420	»	412	0,072

Beim höchsten Druck sind die Ränder unscharf.

## Platte № 22.

I gelbe Linie.

 $(\lambda = 5770)$ .

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
30	3,0	9,0	236°	I	60 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,066
31	3,2	10,0	288	I	—	51	0,105

Bei  $p = 14^m/m$  ist die Linie schon verwaschen mit sehr unscharfen Rändern. Die beiden nahestehenden Begleiter  $B_1$  und  $B_2$  (siehe die Fig. 5) sind mit der Hauptlinie vereinigt.  $\Delta$  bedeutet die Breite des dunklen Theils der eigentlichen Hauptlinie. Zwischen den beiden Hauptlinien  $n_1$  und  $n_2$  liegt kein heller Hintergrund.

Bei  $p = 51^m/m$  sind beide Hauptlinien schon total verschwommen. Zwischen ihnen liegt ein intensiver Hintergrund, welcher nur ein wenig schwächer ist, als die Hauptlinien selbst. Das entsprechende  $\Delta$  ist nur höchst angenähert.

Zwischen den beiden Hauptlinien sind 4 scheinbar aequidistante Streifen sichtbar, die sehr ähnlich Interferenzstreifen aussehen. Es wurde versucht, ihre relativen Entfernungen nachzumessen. Die entsprechenden Zahlendata befinden sich weiter unten.

## Visuelle Messungen.

II gelbe Linie.

$N_1$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	$p$	$\Delta_1$
14	3,1	7,5	164°	Min. d. Ablenk.	3 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,028
15	3,2	8,3	207	»	7	0,042
16	3,1	9,0	230	»	12	0,068
17	3,1	9,5	262	»	28	0,128
18	3,1	9,9	282	»	41	0,172

Bei  $p = 41^m/m$  scheint die Linie, wegen eines sehr dünnen dunklen Streifens in der Mitte derselben, verdoppelt zu sein.

## Platte № 23.

I gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
32	3,2	9,1	241°	I	75 <sup>m</sup>	17 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,081
33	3,1	9,9	280	I	45	37	0,080
34	3,1	9,6	265	I	60	31	0,084
35	3,1	10,7	332	I	45	125	Verwaschen

Bei  $p = 17^m/m$  sind die Hauptlinien schon sehr verschwommen. Zwischen ihnen liegt schon ein schwacher Hintergrund.

Bei  $p = 37^m/m$  liegt schon zwischen  $n_1$  und  $n_2$  ein continuierlicher Hintergrund, welcher aber nicht so intensiv aussieht, wie auf der Platte № 22, erstens weil  $p$  kleiner ist (früher war  $p = 51^m/m$ ) und zweitens weil die Expositionsdauer auf  $1/4$  verkürzt wurde.

Die Ränder der Linien sind sehr unscharf. Die Trabanten  $B_1$  und  $B_2$  sind nicht getrennt zu sehen.

Bei  $p = 31^m/m$  ist das Aussehen der Platte ganz ähnlich, wie bei  $p = 37^m/m$ , aber der Hintergrund ist weniger intensiv. Eine genaue Bestimmung von  $\Delta$  bei diesen Drucken ist sehr schwer.

Bei  $p = 125^m/m$  ist alles schon total verschwommen. Zwischen den Hauptlinien liegt ein continuierlicher Hintergrund, der ebenso intensiv ist, wie die Hauptlinien selbst; infolgedessen lassen sich dieselben von dem Hintergrund gar nicht mehr trennen.

Bei  $p = 37$  und  $125^m/m$  treten wiederum die früher erwähnten eigenthümlichen Streifen auf. Ueber ihre relative Lage siehe weiter unten.

### Platte № 24.

#### I gelbe Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$	$\Delta'$
36	3,2	7,5	162°	Min. d. Ablenk.	40 <sup>m</sup>	3 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,069	0,109
37	3,2	9,4	254	»	25	19	0,068	0,202
38	3,1	9,1	239	»	25	15	0,070	0,194
39	3,1	9,9	286	»	20	49	0,088	0,355
40	3,0	11,0	343	»	20	158	—	0,646
41	3,1	11,9	420	»	20	448	—	—

Bei  $p = 3^m/m$  sind die nebenbei stehenden Begleiter  $B_1$  und  $B_2$  schon durch einen Hintergrund mit der Hauptlinie verbunden; die Ränder dieser Hauptlinie treten auf diesem Hintergrund ziemlich scharf auf. Die Werthe von  $\Delta$  in der vorigen Tabelle entsprechen eben der Breite der eigentlichen Hauptlinie. Zum Vergleich sind nebenbei die Werthe von  $\Delta'$  angegeben. Dieselben entsprechen der Breite vom äusseren Rand des Begleiters  $B_1$  bis zum äusseren Rand von  $B_2$ , die schwache Abstufung an den Rändern mit einbegriffen.

Bei  $p = 15$  und  $19^m/m$  ist die Hauptlinie schon sehr verwaschen. Bei  $p = 49^m/m$  sind die Ränder sehr unscharf. Die eigenthümlichen Streifen fangen an sichtbar zu werden.

Bei  $p = 158^m/m$  ist die Hauptlinie so verwaschen, dass ihre Breite nicht mehr gemessen werden konnte. Spuren der Streifen sind immer noch sichtbar.

Bei  $p = 448^m/m$  ist alles vollkommen verwaschen und gleich intensiv; nur eine schwache Abstufung an den Rändern.

Die normale Entfernung der Mitten der Begleiter  $B_1$  und  $B_2$  beträgt, wie wir früher gesehen haben, 0,091 Ä. E. (siehe Seite 13). Die Entfernung der äusseren Ränder derselben ist etwas grösser; bei  $p = 3^m/m$  ist nämlich  $\Delta' = 0,109$  Ä. E. Diese Entfernung wächst sehr rasch mit wachsendem Druck und bei  $p = 158^m/m$  hat sich  $\Delta'$  fast um sechs Mal vergrössert; bei diesem Druck lassen sich die Begleiter von der Hauptlinie gar nicht mehr trennen.

### Platte № 26.

#### Grüne Linie.

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
42	3,1	5,0	91°	Min. d. Ablenk.	12 <sup>m</sup>	8 <sup>m/m</sup>	0,064
43	—	9,0	229	»	6 (nicht ausexp.)	26	(0,055)
44	—	7,5	171	»	7 <sup>1/2</sup>	17	0,067
45	—	10,0	278	»	4	53	0,069
46	—	11,0	300	»	1	168	0,079
47	—	12,0	415	»	3/4	452	0,095 (angenähert).

Bei  $p = 8^m/m$  ein Hintergrund zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie.  $B_3$  nicht sichtbar.

Bei  $p = 17^m/m$  derselbe Charakter, wie bei  $8^m/m$ . Die Ränder sind sehr scharf.

Bei  $p = 53^m/m$  fangen die Ränder an unscharf zu werden. Zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie ist der Hintergrund mehr intensiv. Zwischen  $B_2$  und der Hauptlinie liegt ebenfalls ein schwacher Hintergrund. Ausserhalb  $B_1$  und  $B_2$  ist die Platte vollkommen durchsichtig.

Bei  $p = 168^m/m$  sind die früher erwähnten beiden Hintergründe schon sehr intensiv. Die Hauptlinie ist merklich verbreitert.  $B_1$  tritt nicht mehr als getrennter Begleiter auf.

Bei  $p = 452^m/m$  ist die Linie noch mehr verbreitert. Die nebenstehenden Trabanten sind schon verschwunden. Wegen des anliegenden Hintergrundes ist die Breite der eigentlichen Hauptlinie schwer genau zu bestimmen.

### Platte № 28.

#### Grüne Linie

$N$	$i_1$	$i_2$	$T$	$S$	Ex.-Z.	$p$	$\Delta$
48	3,2	9,0	244°	I	12 <sup>m</sup> (nicht ausexponiert)	36 <sup>m/m</sup>	0,045
49	—	12,5	455	I	6	786	0,064 (sehr angenähert)

Bei  $p = 36^m/m$  ist die Linie ziemlich scharf. Die Aufnahme ist schwach; die Expositionszeit scheint nicht genügend gross gewesen zu sein.

Bei  $p = 786^m/m$  ist die Linie total verschwommen und schliesst sich unmittelbar auf beiden Seiten an den nebenstehenden Hintergrund an.  $B_1$  und  $B_2$  sind mit dem Hintergrunde vereinigt.

Bei noch grösserem Druck, wie die Versuche es gezeigt haben, leuchtet der enge Theil des Rohres nicht mehr. Die Ursache davon könnte, entweder eine zu starke Erhöhung des Leitungs-

widerstandes der Quecksilberdämpfe bei solchen hohen Drucken sein, oder, dass die Glasrohrwände bei diesen hohen Temperaturen selbst die Electricität ziemlich gut leiten.

Es empfiehlt sich also im Folgenden, Röhren mit kleinerer Elektrodendistanz in Anwendung zu bringen.

Aus den Angaben dieser ersten Beobachtungsreihe lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen.

Zuerst ist zu bemerken, dass von einer genauen Uebereinstimmung zwischen den Werthen von  $\Delta$  und  $\Delta_1$  für dieselben Druckverhältnisse und bei gleichen Werthen von  $i_1$  nicht die Rede sein kann, da  $\Delta$  nach der photographischen Methode und  $\Delta_1$  direkt visuell bestimmt wurde, und, da die Lichtstrahlen verschieden auf eine photographische Platte und auf das menschliche Auge wirken, so kann auch die nach diesen zwei Methoden bestimmte Breite der Linien nicht identisch ausfallen. Dieser Umstand ist jedoch nicht von Belang, da es uns nicht auf den absoluten Werth von  $\Delta$  ankommt, sondern auf die Aenderung desselben mit wachsendem Druck.

Dann ist zweitens zu berücksichtigen, dass bei höheren Drucken eine genaue Bestimmung von  $\Delta$ , wegen des verschwommenen Charakters der Linien, im hohen Maasse erschwert wird. Diese Messungen bei grösseren Drucken können also auf keine grosse Genauigkeit Anspruch erheben; sie haben nur den Zweck den allgemeinen Charakter der Verbreiterung der Linien festzustellen.

Mit wachsendem Drucke breiten sich die Hauptlinien aus. Die Trabanten werden auch breiter. Zwischen einigen Begleitern und der Hauptlinie, so wie auch zwischen den Begleitern selbst tritt allmählig ein heller Hintergrund auf, der immer stärker wird und schliesslich den ganzen Raum zwischen den beiden Hauptlinien benachbarter Ordnung ausfüllt, wobei die Linien und ihre Begleiter nicht mehr getrennt zu sehen sind und das ganze Bild einen höchst verschwommenen, bandenartigen Charakter annimmt.

Mit wachsendem Drucke nimmt die Schärfe der Linien ab, wobei der violette Rand schärfer, als der rothe aussieht.

Von diesen drei untersuchten Linien ist allerdings die grüne Linie am stabilsten, d. h. am wenigsten durch eine Druckerhöhung beeinflusst, während bei den beiden gelben eine verhältnissmässig kleine Druckerhöhung schon eine ganz merkliche Verbreiterung hervorruft.

Die charakteristischen Eigenschaften dieser drei Linien lassen sich folgendermaassen kurz zusammenfassen.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ).

Bei  $p = 3^m/m$  im Allgemeinen kein Hintergrund; nur ein schwacher zwischen  $B_1$  und der *H.L.* (Hauptlinie).

Bei Druckerhöhung tritt der Hintergrund zuerst zwischen  $B_2$  und der *H.L.* auf.



Bei  $p = 53^m/m$  fangen die Ränder der  $H. L.$  an unscharf zu werden.

Bei  $p = 168^m/m$  tritt  $B_1$  nicht mehr als getrennter Begleiter hervor.

Bei  $p = 268^m/m$  ist  $B_2$  noch als breiter Begleiter zu erkennen.

Bei  $p = 412^m/m$  sind die Hauptlinien noch sehr gut zu sehen, aber ihre Ränder werden unscharf.

Bei  $p = 501^m/m$  ist die  $H. L.$  noch zu unterscheiden. Die Begleiter sind kaum zu sehen. Intensiver Hintergrund zwischen den  $H. L.$ .

Bei  $p = 768^m/m$  alles schon total verschwommen.

II gelbe Linie ( $\lambda = 5791$ ).

Sehr unstabil.

Bei  $p = 4^m/m$  kein continuierlicher Hintergrund zwischen den  $H. L.$  benachbarter Ordnung.

Bei  $p = 13^m/m$  sind die  $H. L.$  schon verbreitert, mit unscharfen Rändern. Die Begleiter sind verwaschen. Hintergrund zwischen den  $H. L.$  vorhanden.

Bei  $p = 23^m/m$  die  $H. L.$  höchst verwaschen.

Bei  $p = 38^m/m$  treten eigenthümliche Streifen auf.

Bei  $p = 46^m/m$  alles schon verschwommen. Continuierlicher intensiver Hintergrund zwischen den  $H. L.$ . Streifen sichtbar.

Bei  $p = 157^m/m$  alles total verschwommen.

I gelbe Linie ( $\lambda = 5770$ ).

Sehr unstabil.

Bei  $p = 3^m/m$  die Ränder der  $H. L.$  ziemlich scharf.

Bei  $p = 14^m/m$   $H. L.$  schon verwaschen. Ränder unscharf.  $B_1$  und  $B_2$  durch einen Hintergrund mit der  $H. L.$  verbunden. Ausserhalb  $B_1$  und  $B_2$  kein Hintergrund.

Bei  $p = 17^m/m$  schwacher Hintergrund zwischen den  $H. L.$ .

Bei  $p = 37^m/m$  Streifen sichtbar.

Bei  $p = 51^m/m$   $H. L.$  schon total verschwommen. Intensiver Hintergrund zwischen den  $H. L.$ . Streifen sichtbar.

Bei  $p = 125^m/m$  alles total verschwommen. Streifen.

Es erschien uns nun wünschenswerth, die Abhängigkeit der Linienbreite vom Druck in eine mathematische Form zu kleiden. Wegen des schnellen Anwachsens von  $\Delta$  mit der Drucksteigerung haben wir dazu folgende empirische Formel angewandt:

$$\Delta = \Delta_0 e^{\alpha p}, \dots \dots \dots (1)$$

die für sehr grosse Werthe von  $p$  auf ein continuierliches Spectrum führen würde, was eben für die Plausibilität der Formel spricht.

$\Delta_0$  bedeutet die Linienbreite bei äusserst kleinen Drucken; auf ihren absoluten Werth kommt es nicht an.

$\alpha$  kann als Maass der Stabilität der Linien angesehen werden. Je kleiner  $\alpha$  ist, desto weniger wird die entsprechende Linie von einer Druckerhöhung beeinflusst.

Für die Durchführung dieser Rechnungen, haben wir das früher angegebene Beobachtungsmaterial in der Weise gruppiert, dass für die benachbarten Werthe von  $p$  das Mittel aus den entsprechenden  $\Delta$  gebildet wurde. Damit erhielten wir paarweise Werthe von  $\Delta$  und  $p$ , die zur Berechnung von  $\Delta_0$  und  $\alpha$  verwendet wurden.

Es ist dabei zu bemerken, dass für die grüne Linie die mittlere Stromstärke  $i_1$  im primären Stromkreise des Inductoriums nicht immer dieselbe war und zwischen 2,7 und 3,5 Amp. variierte, aber, da die Stromstärke, wenigstens zwischen diesen Grenzen, keinen sehr grossen Einfluss auf die Breite der Linien ausübt, so können wir wohl von diesem Umstand absehen und die weiter angegebenen Zahlenwerthe einfach der mittleren Stromstärke  $i_1 = 3,1$  Amp. zuordnen.

In den weiter unten folgenden Tabellen sind nun in der ersten Colonne die laufenden Nummern der einzelnen Aufnahmen, für welche die Mittelwerthe von  $p$  und  $\Delta$  gebildet wurden, angegeben; die zweite und dritte geben die zugehörigen Werthe von  $p$  und  $\Delta$ , und die vierte und fünfte die aus ihnen berechneten Werthe von  $\Delta_0$  und  $\alpha$ .

Alle  $\Delta$  und  $\Delta_0$  sind in Ä. E. angegeben.

Grüne Linie.

Photographisch.

Tabelle IV.

$N$	$p$	$\Delta$	$\Delta_0$ <sup>1)</sup>	$\alpha$
6, 8, 10	$8 \frac{m}{m}$	0,050 Ä. E.	—	—
7, 9, 11		0,064	0,050	0,0011
42, 44, 45	26	0,067	—	—
46		0,079	0,065	0,0012
47		0,095	0,066	0,0008 <sup>2)</sup>
1, 3, 5	2	0,055	—	—
2		0,076	0,055	0,0013

Im Mittel:

$$\Delta_0 = 0,059$$

$$\alpha = 0,0011$$

<sup>1)</sup> Die Werthe von  $\Delta_0$  sind auf eine Einheit der dritten Decimale abgerundet worden.

<sup>2)</sup> Aus dem ersten und dritten Werth von  $p$  und  $\Delta$ .

Visuel.

Tabelle V.

$N_1$	$p$	$\Delta$	$\Delta_0$	$\alpha$
6 } $i_1 = 2,8 \text{ A.}$	$5 \text{ }^m/m$	0,034	—	—
7 }	357	0,060	0,034	0,0016
8, 9, 10, 11 } $i_1 = 3,1$	13	0,048	—	—
12 }	143	0,065	0,047	0,0023
13 }	412	0,072	0,047	0,0010
1, 3, 5 } $i_1 = 3,4$	2	0,045	—	—
2, 4 }	223	0,067	0,045	0,0018

Im Mittel:

$$\Delta_0 = 0,043$$

$$\alpha = 0,0017$$

II gelbe Linie.

Photographisch.

Tabelle VI.

$N$	$p$	$\Delta$	$\Delta_0$	$\alpha$
12, 14, 16, 18, 24	$3 \text{ }^m/m$	0,044	—	—
13, 17, 20, 21, 22, 26	13	0,057	0,041	0,026
27	50	0,156	0,041	0,027

Im Mittel:

$$\Delta_0 = 0,041$$

$$\alpha = 0,027$$

Visuel.

Tabelle VII.

$N_1$	$p$	$\Delta$	$\Delta_0$	$\alpha$
14, 15, 16	$7 \text{ }^m/m$	0,046	—	—
17	28	0,128	0,033	0,049
18	172	0,172	0,035	0,039

Im Mittel:

$$\Delta_0 = 0,034$$

$$\alpha = 0,044$$

I gelbe Linie.

Photographisch.

Tabelle VIII.

$N$	$p$	$\Delta$	$\Delta_0$	$\alpha$
30, 32, 36, 37, 38	$14 \text{ }^m/m$	0,071	—	—
33, 34	34	0,082	0,064	0,0072
31, 39	50	0,096	0,063	0,0084

Im Mittel:

$$\Delta_0 = 0,064$$

$$\alpha = 0,0078$$

Visuelle Messungen an der I gelben Linie wurden nicht vorgenommen, weil die Begleiter  $B_1$  und  $B_2$  so dicht an der Hauptlinie stehen, dass man bei visuellen Messungen, speciell bei höheren Drucken, sehr leicht bezüglich der wahren Breite der eigentlichen Hauptlinie getäuscht werden kann.

Die Werthe von  $\alpha$  in den vorigen Tabellen drücken die relative Stabilität der einzelnen Quecksilberlinien in sehr anschaulicher Weise aus.

Die gelben Linien, speciell aber die II-te, erweisen sich als höchst empfindlich gegen eine Drucksteigerung.

Die Uebereinstimmung zwischen den einzelnen Werthen von  $\alpha$  für die grüne Linie bei den photographischen und visuellen Messungen kann als eine ganz gute bezeichnet werden, insbesondere, wenn man bedenkt, mit welchen Schwierigkeiten die Ausmessungen der Breite der Linien bei höheren Drucken verknüpft sind.

Bei der II-ten gelben Linie ist die Uebereinstimmung weniger befriedigend.

Bilden wir für jede Linie das Gesamtmittel aus allen einzelnen Werthen von  $\alpha$ , so erhalten wir:

	$\lambda$	$\alpha$
Grüne Linie	5461	0,0014
I gelbe »	5770	0,0078
II » »	5791	0,035

Für die II gelbe Linie ist  $\alpha$  25 Mal grösser, als für die grüne, und da  $\alpha$  einen Exponenten bedeutet, so sieht man sofort ein, wie viel das eigentlich ausmacht.

Wollen wir zum Schluss die Lage der eigenthümlichen Streifen, die bei der I-ten gelben Linie bei gewissen Drucken auftauchen, etwas näher besprechen.

Eine genaue Bestimmung der Lage dieser Streifen ist ganz ausgeschlossen, erstens, weil sie sehr undeutlich sind und zweitens, weil bei denjenigen Drucken, bei welchen diese Streifen auftreten, die Hauptlinien einen so verwaschenen Charakter besitzen, dass es sehr schwer ist festzustellen, wo eigentlich die Mitte der Hauptlinie, von der aus die Entfernungen gemessen werden sollen, sich befindet.

Trotzdem haben wir einige solche Messungen für die I gelbe Linie ( $\lambda = 5770$ ) vorgenommen. Dieselben sind weiter unten angegeben.

Die Anzahl dieser Streifen ist gleich 4; wollen wir sie resp. durch  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_4$  bezeichnen. Sie scheinen alle aequidistant zu sein, wodurch sie wie Interferenzstreifen aussehen, und tauchen schon bei  $37^m/m$  Druck auf.

Die Entfernung der Hauptlinien benachbarter Ordnung für die I gelbe Linie ist

$$\Delta\lambda = 0,539 \text{ \AA. E.}$$

Unter  $\partial\lambda$  wollen wir die Entfernung zwischen zwei benachbarten Streifen oder zwischen den äusseren Streifen und den Hauptlinien verstehen.  $\partial\lambda$  ist in  $\text{\AA. E.}$  angegeben.

$N$	$p$	H. L.	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	H. L.
33	$37^m/m$	$\partial\lambda \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$	0,116	0,108	0,132	0,100	0,083
31	51		0,100	0,131	0,116	0,108	0,084
35	125		0,096	0,120	0,107	0,099	0,116
Im Mittel:			0,104	0,120	0,118	0,102	0,094

Die Streifen  $C_1$  und  $C_4$  können nicht die Trabanten  $B_1$  und  $B_2$  sein, da für  $B_1$   $\delta\lambda = -0,049$  Å. E. und für  $B_2$   $\delta\lambda = +0,042$  ist, also mehr als zwei Mal kleiner, als die entsprechenden Werthe von  $\partial\lambda$ . Aehnliche Streifen haben wir auch bei der II-ten gelben Linie bei  $p = 38^m/m$  und  $p = 46^m/m$  wahrgenommen, aber sie waren so schwach ausgebildet, dass ihre Lage nicht festgestellt werden konnte.

Ueber die Ursache der Entstehung dieser Streifen bei solchen Drucken, wo die betreffende Linie ein höchst verschwommenes Aussehen annimmt, können wir fürs Erste nichts sagen. Möglicherweise ist dies eine besondere Spectralerscheinung, etwa eine Umkehrung der Linien, aber vielleicht auch nur eine specielle Eigenschaft des Stufenspectroscops.

Janicki <sup>1)</sup> hat ebenfalls solche Streifen bei den beiden gelben und der grünen Linie beobachtet. Für die indigo-blaue Linie ( $\lambda = 4358$ ) thut Janicki von diesen Streifen keine Erwähnung.

Später haben wir diese Streifen ebenfalls bei der grünen, so wie auch bei der indigo-blauen Linie gesehen und gemessen, aber sie traten bei diesen beiden Linien, die viel stabiler als die gelben Linien sind, erst bei beträchtlichen Drucken des Quecksilberdampfes auf ( $p > 1300^m/m$ ).

Die entsprechenden Zahlendata sind in einem späteren Paragraphen (§ 7) zu finden.

#### § 4.

### Zweite Beobachtungsreihe.

Bei diesen Versuchen haben wir ein Rohr von der Form der Fig. 2 benutzt und die Funkenstrecke senkrecht zum Spalt und gegen denselben gerichtet.

Der Zweck dieser Einrichtung war, eine grössere Lichtstärke zu erzielen und dadurch die Expositionsdauer bei den photographischen Aufnahmen zu verkürzen. Aber bei dieser Anordnung sind wir, wie in der Einleitung zu dieser Abhandlung schon erwähnt wurde, bei der grünen und später bei der indigo-blauen Linie auf die eigenthümliche Erscheinung einer Verdoppelung dieser Linien in der Form einer Schleife gestossen, und es lag uns daran, zuerst die Entstehung und die Dimensionen dieser Schleife unter verschiedenen Bedingungen näher zu untersuchen. Dabei haben wir nicht nur den Druck, sondern auch die electrischen Verhältnisse am leuchtenden Geisslerrohr, wie mittlere Stromstärke im leuchtenden Kanal und Potentialdifferenz an den Electroden, zwischen möglichst weiten Grenzen zu variieren versucht.

<sup>1)</sup> Ann. der Physik. Bd. 19, p. 36 (1906). Bei der ersten gelben Linie hat er jedoch fünf Streifen gesehen.

Diese electricischen Messungen wurden nicht, wie bei späteren Beobachtungen, gleichzeitig mit den photographischen Aufnahmen, sondern nach Beendigung dieser ganzen zweiten Beobachtungsreihe, ausgeführt, aber, da bei jeder Aufnahme der Druck des Quecksilberdampfes, wie auch die mittlere Stromstärke im primären Stromkreise des Inductoriums notiert wurde, so konnte man jedem einzelnen Versuch die entsprechenden electricischen Data zuordnen..

Diese electricischen Messungen sollen erst im nächsten Paragraphen beschrieben werden.

Als Ergänzung dieser Versuche haben wir auch mehrere Aufnahmen mit demselben Rohr und zwar unter verschiedenen Bedingungen gemacht, wo der leuchtende Kanal, mittelst eines darüber stehenden totalreflectierenden Prismas, parallel auf den Spalt projeciirt wurde. In diesem Fall wurde keine Schleifenbildung beobachtet, da es selbstverständlich darauf ankommt, wie der leuchtende Kanal zum Spalt steht, in diesem Falle aber ganz analoge Bedingungen waren, wie, unter welchen die erste Beobachtungsreihe ausgeführt wurde.

Die meisten Versuche wurden auf photographischem Wege erhalten, aber es ist auch zur Kontrolle eine Anzahl visueller Messungen angestellt worden.

Die Aufnahmen geschahen in Spektren verschiedener Ordnung und in dem Fall, wo zwei Hauptlinien im Gesichtsfelde zu sehen waren, wurde die entsprechende Dispersion nach dem bekannten Werth von  $\Delta\lambda$  ermittelt; dagegen, wo nur eine Hauptlinie zu sehen war, z. B. in der Minimumstellung des Echelons, oder zwischen dem II und III, IV und V Spectrum u. s. w., nach dem bekannten Werth von  $\delta\lambda$  für den am deutlichsten erscheinenden Trabanten.

Die Expositionsdauer bei einzelnen Aufnahmen wurde zuweilen zwischen ziemlich weiten Grenzen variiert, wobei gewöhnlich jede Platte mehrere Aufnahmen enthielt.

Die Unterbrechungszahl  $n$  am Inductorium während dieser Beobachtungsreihe wurde möglichst constant gehalten und betrug im Mittel 82.

Die Form der schleifenartigen Verdoppelung der grünen und indigoblauen Linie, wenn diese Schleife schön ausgebildet ist, ist auf der Fig. 8 zu sehen.

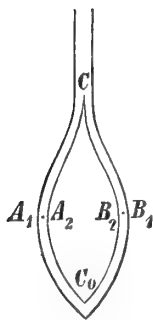


Fig. 8.

Im oberen Theile hat die Linie ihr gewöhnliches Aussehen; dieser Theil entspricht dem Theil des Funkens, welcher von der Oeffnung des engen Rohres ( $B$  auf der Fig. 2) bis zur Quecksilberkuppe  $E$  im breiteren Rohr läuft. An einem gewissen Punkt  $C$  fängt die Linie an sich zu verdoppeln, wobei zwei getrennte Äste entstehen, welche dann zusammenfließen, wodurch eine Art Schleife entsteht. Die Mitte dieser Schleife entspricht der Axe des engen Rohres. Weiter unten findet sich keine Verlängerung der Linie, da der Funke von  $B$  (auf der Fig. 2) aus nur nach einer Richtung nach  $E$  sich ausdehnt.

Die innere und äussere Breite der Schleife, so wie auch die Breite der einzelnen Äste derselben, hängen unmittelbar von den Versuchsbedingungen ab.

Wollen wir nun folgende Bezeichnungen einführen:

$\delta\lambda_a$  ist die grösste Entfernung der Mitte des linken Astes  $A_1 A_2$  von der Axe der Schleife  $CC_0$ . (Siehe die Figur 8).

$\delta\lambda_b$  ist die entsprechende Grösse für den rechten Ast  $B_1 B_2$ .

Die Breite jedes Astes in der Mitte der Schleife sei resp. durch  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  bezeichnet.

$$\begin{aligned}\Delta_a &= A_2 - A_1 \\ \Delta_b &= B_1 - B_2.\end{aligned}$$

Die innere Breite der eigentlichen Schleife  $A_2 B_2$  sei  $\Delta''$ .

Die äussere » » » » »  $A_1 B_1$  »  $\Delta'$ .

Dann ergibt sich, wie leicht einzusehen ist,

$$\delta\lambda_a + \delta\lambda_b = \frac{\Delta' + \Delta''}{2}$$

Bei den ersten Beobachtungen wurden  $\delta\lambda_a$  und  $\delta\lambda_b$  getrennt gemessen, aber, da es sich herausstellte, dass die Schleife im Allgemeinen symmetrisch in Bezug auf die Axe  $CC_0$  sich ausbildet, begnügte man sich im Weiteren nur mit der Bestimmung der Summe  $\delta\lambda_a + \delta\lambda_b$ , woraus sich  $\delta\lambda = \frac{\delta\lambda_a + \delta\lambda_b}{2}$  unmittelbar ergibt, die eigentlich die charakteristischste Grösse bei dieser Erscheinung ist.

Bei höheren Drucken sind diese Ausmessungen ziemlich schwer auszuführen, da das Innere der Schleife, wegen der Verbreiterung der Linien, immer heller und heller wird, und es ist dann sehr schwer und in einigen Fällen ganz unmöglich die inneren Grenzen der Linienäste festzustellen. In diesen Fällen begnügte man sich nur mit der Ausmessung von  $\Delta'$ .

Ein Commutieren der Richtung des primären Stromes im Inductorium beeinflusst die Erscheinung durchaus nicht.

Bei den Trabanten ist die eigentliche Schleifenbildung niemals beobachtet worden, aber dieselben nehmen gegenüber dem engen horizontalen leuchtenden Theile des Rohrs eine eiförmige Gestalt an, als ob die entsprechende Schleife gänzlich von einem hellen Hintergrunde ausgefüllt wäre. Möglicherweise ist dieser letzte Umstand theilweise eine optische Täuschung, die durch die grössere Helligkeit des mittleren Theiles der Begleiter bedingt ist.



Beim ersten Anlassen des Stromes bildet sich die Schleife nicht momentan; es müssen erst einige Secunden verlaufen, bis die Schleife sich schön ausgebildet hat.

Bei einigen Drucken und Stromstärken ist die Erscheinung sehr scharf und ausgeprägt und sieht bei der grossen Lichtstärke des Stufenspectroscops besonders schön aus.

Unter gewissen Bedingungen ist die Schleife so breit, dass die äusseren Ränder der Äste in ihrem mittleren Theil ganz nah an die nebenstehenden Trabanten, die fast geradlinig bleiben, anrücken.

Eine Verengung der Spaltbreite am Collimator des Echelons ändert den Charakter der Erscheinung nicht; nur wird die Lichtstärke entsprechend geringer.

Die Dimensionen des benutzten Rohres waren die folgenden. (Siehe die Fig. 2).

Die Länge des leuchtenden engen Rohres  $AB = 46 \frac{m}{m}$ ; der innere Durchmesser desselben  $d = 2,0 \frac{m}{m}$ ; die Länge der Funkenstrecke von der Röhrenöffnung bis zur Quecksilberkuppe  $AF = BE$  etwa gleich  $28 \frac{m}{m}$ .

In den folgenden Tabellen ist nun das erhaltene Beobachtungsmaterial zusammengestellt. Wir haben dasselbe nicht etwa in der Reihenfolge der erhaltenen Aufnahmen, sondern systematisch nach der mittleren Stromstärke  $i_1$  im primären Stromkreise und dem Quecksilberdampfdrucke  $p$  gruppiert

Die Angabe von  $i_2$ , Stärke des Heizstromes, und  $T$ , mittlere Temperatur im Thermostaten, haben wir unterlassen.

In den folgenden Tabellen IX bis XIII sind nun die Resultate dieser Beobachtungsreihe für die grüne und indigo-blaue Linie zusammengestellt. Sie sind in Ängström'schen Einheiten angegeben.

Tabelle IX.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Ordnung des Spectr.	Exp.- Zeit.	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
45	0,8Amp.	II-III	30 <sup>m</sup>	2 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,020Ä.E.	0,017Ä.E.	0,027Ä.E.	0,022Ä.E.	0,013Ä.E.	0,061Ä.E.	0,019Ä.E.	Überexponiert.
39 u. 39'	0,8	IV-V	10	24	30	26					28	
—	0,8	II-III	8	23	25	23					24	
—	0,8	II-III	10	23	27	25					26	
55	0,8	II-III	1	33			26	26	16	67	21	
—	0,8	II-III	2	33			26	26	18	71	22	
44	0,7	IV-V	10	36	25	33	25	25	33	84	29	
—	0,7	II-III	6	36	31	26	24	25	32	82	28	
43	0,8	IV-V	10	48	33	31	26	28	37	91	32	} Etwas überexponiert. (* ) Unsicher.
—	0,8	II-III	6	48	25	33	33	28	27 (*)	88	29	
41	0,8	IV-V	15	53	28	33					31	
—	0,8	II-III	8	53	38	32					35	
45	2,0	II-III	15	3	19	18	27	23	11	61	18	
29	1,9	III	10	24	26							
39 u. 39'	2,0	IV-V	6	25	29	30					30	
—	2,0	IV-V	8	25	27	32					29	
—	2,0	II-III	5	24	33	29					31	
—	2,0	II-III	5	24	34	29					31	
44	2,0	IV-V	5	33	33	37	35	29	38	102	35	
—	2,0	II-III	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	33	36	38	29	36	41	106	37	
43	2,0	IV-V	4	47	40	34	27	29	46	102	37	
—	2,0	II-III	2	47	38	41	26	38	47	110	39	
41	2,0	IV-V	8	54	41	37	—	—	—	—	39	
—	2,0	II-III	4	54	46	37	—	—	—	—	41	
34	2,7	I	10	3	21	22					22	
—	2,7	I	—	3	23	21					22	
35	2,7	I	10	6	26	17					21	
30	2,6	III	6	11	20	26					23	
—	2,6	III	10	11	26	18					22	
—	2,6	III	10	11	23	20					22	
36 u. 36'	2,7	I	10	14	26	33					30	
—	2,7	I	10	14	31	28					30	
—	2,7	I	10	14	30	27					28	
—	2,7	I	10	14	25	34					30	
—	2,7	I	10	14	36	27					31	
—	2,7	I	10	14	30	31					31	
31	2,7	III	2	47	38	40					39	
—	2,7	III	2	47	43	37					40	
—	2,7	III	4	47	38	35					37	
—	2,7	III	4	47	39	39					39	
—	2,7	III	6	47	42	40					41	
—	2,7	III	6	47	36	40					38	

Platte.	$i_1$	Ordnung des Spectr.	Exp.- Zeit.	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
37	2,7 Amp.	I	4 <sup>m</sup>	51 <sup>m/m</sup>	0,038Ä.E.	0,038Ä.E.					0,038Ä.E.	
—	2,7	I	4	51	34	44					39	
—	2,7	I	2	51	43	44					43	
—	2,7	I	2	51	37	44					40	
—	2,7	Minim.	1	51	47	40					44	
—	2,7	Minim.	1	51	50	40					45	
38	2,7	I	1	171	54	38					46	
—	2,7	I	1	171	51	45					48	Mittlerer Druck.
—	2,7	I	2	171	54	40					47	
—	2,7	I	2	171	50	35					42	
—	2,7	Minim.	1/2	171	63	49					56	
30	3,4	III	4	13	22	33					28	
—	3,4	III	4	13	22	32					27	
—	3,4	III	6	13	23	23					23	
—	3,4	III	6	13	22	27					24	
33	3,5	Minim.	1/3	25	35	43					39	
—	3,6	III	1 1/2	29	34	35					34	
—	3,6	III	1 1/2	29	39	35					37	
29	3,3	III	5	30	32	51					42	
—	3,3	III	5	30	31	45					38	
—	3,3	III	4	30	29	56					43	
—	3,3	III	4	30	24	53					38	
32	3,5	III	2	34	31	33					32	
—	3,5	III	2	34	37	35					36	
—	3,5	VII	5	34	29	38					34	
—	3,5	VII	5	34	36	33					35	
—	3,5	Minim.	1/2	34	39	37					38	
31	3,4	III	2	48	43	43					43	
—	3,4	III	2	48	51	40					45	
—	3,4	III	3	48	41	40					41	
—	3,4	III	3	48	45	41					43	
45	4,0	II-III	8	4	19	24	0,023	0,022	0,021	0,065	22	
39 u. 39'	4,0	IV-V	4	24	30	35					32	
—	4,0	IV-V	5 1/2	24	37	33					35	
—	4,0	II-III	3	24	30	34					32	
—	4,0	II-III	3	24	32	37					35	
44	4,0	IV-V	3	36	31	42	22	32	45	99	36	
—	4,0	II-III	1 1/2	36	40	36	24	38	45	106	38	
43	4,0	IV-V	2	50	38	42	23	26	55	104	40	
—	4,0	II-III	1	50	37	39	22	32	49	103	38	
41	4,0	IV-V	4	55	41	36					39	
—	4,0	II-III	2	55	45	42					44	
55	5,6	II-III	0,3	32			31	36	40	107	37	
56	5,6	II-III	0,3	640			61	47	50	158	52	

Tabelle X.

Grüne Linie. Visuel. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

$i_1$	Ordnung des Spectr.	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
0,8A.	II-III	$11^m/m$	0,025	0,023	0,035	0,027	0,017	0,079	0,024	
0,8	II-III	17	27	24	32	21	25	77	25	
0,8	II-III	33	—	—	34	29	22	85	27	
0,7	IV-V	36	31	22	34	26	23	83	27	
0,7	II-III	36	31	22	37	26	21	84	26	
0,8	IV-V	48	36	33	38	38	31	107	34	
0,8	II-III	48	35	29	42	31	27	99	32	
0,8	IV-V	56	31	27	39	24	26	89	29	
0,8	II-III	56	33	29	39	20	32	91	31	
2,0	II-III	5	25	27	—	—	—	—	26	
2,0	II-III	10	27	23	31	22	23	76	25	
2,0	IV-V	18	28	27	34	22	27	83	27	
2,0	II-III	18	27	27	33	20	27	80	27	
2,0	IV-V	33	31	25	30	22	31	83	28	
2,0	II-III	33	31	21	32	15	29	76	26	
2,0	IV-V	47	42	31	35	32	40	106	36	
2,0	II-III	47	38	30	39	29	34	103	34	
2,0	IV-V	55	39	27	36	27	34	97	33	
2,0	II-III	55	45	27	41	25	39	105	36	
4,0	II-III	7	27	29	—	—	—	—	28	
4,0	II-III	10	31	22	34	22	25	81	26	
4,0	IV-V	17	32	24	31	23	29	83	28	
4,0	II-III	17	33	26	33	21	32	86	29	
4,0	IV-V	36	38	27	31	21	39	92	33	
4,0	II-III	36	39	19	33	16	33	82	29	
4,0	IV-V	50	48	29	43	25	43	111	38	
4,0	II-III	50	43	30	46	30	35	111	37	
4,0	IV-V	58	36	32	39	25	36	100	34	
4,0	II-III	58	40	28	40	21	37	98	34	

Tabelle XI.

Indigo-blaue Linie ( $\lambda = 4358$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Ordnung des Spectr.	Exp.- Zeit.	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
40	0,8 A.	II-III	5 <sup>m</sup>	17 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,025	0,020	—	—	—	—	0,022	
—	0,8	IV-V	8	18	21	22	—	—	—	—	22	
55	0,8	II-III	4	33	—	—	0,020	0,025	0,018	0,063	20	
—	0,8	II-III	8	33	—	—	24	27	15	66	20	
42	0,8	IV-V	8	55	23	24	—	—	—	—	23	
—	0,8	II-III	5	55	25	30	—	—	—	—	27	
45	2,0	II-III	8	3	22	13	—	—	—	—	18	
40	2,0	IV-V	5	17	26	21	—	—	—	—	23	
—	2,0	II-III	3	18	32	24	—	—	—	—	28	
42	2,0	IV-V	5	55	31	28	—	—	—	—	29	
—	2,0	II-III	3	55	29	32	—	—	—	—	31	
34	2,7	I	5	3	21	21	—	—	—	—	21	
—	2,7	I	5	3	21	21	—	—	—	—	21	
35	2,7	I	4	5	25	21	—	—	—	—	23	
36 u. 36'	2,7	I	3	15	19	28	—	—	—	—	24	
—	2,7	I	3	15	20	20	—	—	—	—	20	
—	2,7	I	3	15	20	26	—	—	—	—	23	
—	2,7	I	3	15	23	20	—	—	—	—	21	
—	2,7	I	3	15	27	26	—	—	—	—	26	
—	2,7	I	3	15	25	26	—	—	—	—	26	
37	2,7	I	2	54	28	27	—	—	—	—	28	
—	2,7	I	4	54	29	28	—	—	—	—	28	
—	2,7	Minim.	1	54	38	28	—	—	—	—	33	
38	2,7	Minim.	1/2	180	28	33	—	—	—	—	31	
45	4,0	II-III	5	4	21	15	—	—	—	—	18	
40	4,0	IV-V	3	18	23	23	—	—	—	—	23	
—	4,0	II-III	1 1/2	18 (?)	30	29	—	—	—	—	30	
42	4,0	IV-V	3	55	32	32	—	—	—	—	32	
—	4,0	II-III	1 1/2	55	28	34	—	—	—	—	31	
55	5,6	II-III	0,8	32	—	—	26	23	29	79	27	
—	5,6	II-III	1,3	32	—	—	25	25	35	86	30	

Tabelle XII.

Grüne Linie. Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Ordnung des Spectrums.	Exp.- Zeit.	$p$	$\Delta'$	Bemerkungen.
48	0,8 A.	II-III	15 <sup>m</sup>	3 <sup>m/m</sup>	0,024 Ä.E.	
—	0,8	II-III	25	3	26	
48	0,8	II-III	10	12	30	
—	0,8	"	16	12	30	
53	0,8	II-III	3 <sup>1/2</sup>	30	32	
—	0,8	"	5	30	35	
49	0,8	"	7	35	35	} Violetter Rand schärfer.
—	0,8	"	12	35	40	
49	0,8	II-III	8	125	46	Ziemlich schwach.
51	0,9	II-III	4	237	53	
—	0,9	"	5	237	50	
—	0,9	"	7	237	50	
54	0,9	II-III	2	358	48	Schwach.
—	0,9	"	3	358	55	
48	2,0	II-III	6	.4	27	
—	"	"	9	4	27	
48	2,0	II-III	5	12	30	
—	"	"	8	12	32	
49	2,0	II-III	3 <sup>1/2</sup>	35	40	
—	"	"	5	35	41	
49	2,0	II-III	2 <sup>1/2</sup>	125	42	
—	"	"	3 <sup>1/2</sup>	125	47	Etwas verwaschen.
51	2,0	II-III	2	243	58	
—	"	"	2 <sup>1/2</sup>	243	60	
—	"	"	3	243	60	
52	2,0	II-III	1 <sup>1/2</sup>	499	76	
—	"	II-III	2 <sup>1/2</sup>	499	70	
—	"	II	4	499	74	
48	4,0	II-III	3	6	29	
—	"	"	5	6	31	
48	4,0	II-III	2 <sup>1/2</sup>	12	29	Undeutlich. Rother Rand verwaschen.
—	"	"	4	12	35	
49	4,0	II-III	2	33	35	Undeutlich.
—	"	"	3	33	47	
49	4,0	II-III	1 <sup>1/2</sup>	124	52	
—	"	"	2 <sup>1/2</sup>	124	63	Sehr stark exponiert. Begleiter $B_2$ sichtbar.
51	4,0	II-III	1 <sup>1/2</sup>	242	58	Undeutlich.
—	"	"	1	242	61	
—	"	"	1 <sup>1/2</sup>	242	64	
52	4,0	II-III	1 <sup>1/2</sup>	510	72	Rother Rand sehr undeutlich.
—	"	II	3	510	77	
53	5,6	II-III	1 <sup>1/2</sup>	33	36	
—	"	"	3 <sup>1/4</sup>	33	39	
54	5,6	II-III	1 <sup>1/4</sup>	355	59	
—	"	"	1 <sup>1/2</sup>	355	68	
—	"	"	3 <sup>1/4</sup>	355	71	

Tabelle XIII.

Indigo-blaue Linie. Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Ordnung des Spectrums.	Exp.- Zeit.	$p$	$\Delta'$	Bemerkungen.
46	0,8 A.	II-III	$5^m$	$3^m/m$	0.018 Ä.E.	
—	"	"	10	3	17	
46	0,8	II-III	4	12	21	
—	"	"	8	12	22	
47	0,8	II-III	$3\frac{1}{2}$	29	20	} Unbedeutender Einfluss der Expositions-Zeit.
—	"	"	6	29	20	
53	0,8	II-III	$3\frac{1}{2}$	30	20	
—	"	"	5	30	21	
—	"	"	10	30	24	
—	"	"	15	30	26	
47	0,8	II-III	3	127	26	Schwach.
51	0,9	II-III	3	237	41	
54	0,9	II-III	7	358	45	Ränder verwaschen.
—	"	"	9	358	40	
46	2,0	II-III	3	3	21	
—	"	"	6	3	22	
46	2,0	II-III	$2\frac{1}{2}$	12	24	
—	"	"	5	12	24	
47	2,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	29	21	
—	"	"	3	29	23	
47	2,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	118	35	Rother Rand verwaschen.
51	2,0	II-III	2	243	54	Rother Rand verwaschen.
—	"	"	3	243	59	
52	2,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	499	64	
—	"	II	5	499	53	
46	4,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	4	22	
—	"	"	3	4	23	
46	4,0	II-III	$1\frac{1}{4}$	13	25	
—	"	"	$2\frac{1}{4}$	13	24	
47	4,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	31	22	
—	"	"	1	31	26	
47	4,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	122	34	
—	"	"	1	122	38	
51	4,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	242	70	Schwach, undeutlich und sehr verwaschen.
52	4,0	II-III	$1\frac{1}{2}$	510	74	Violetter Rand verhältnissmässig scharf.
—	"	II-III	2	510	77	
—	"	II	4	510	67	
53	5,6	II-III	2	33	35	} Rother Rand sehr verwaschen; viol. R. scharf. } Die Abstufung erstreckt sich noch weiter z. Roth.
—	"	"	3	33	37	
54	5,6	II-III	2	355	54	} Rother R. sehr verwaschen. Diese Zahlen ent- } sprechen dem eigentl. Linienkern. Die Breite bis } zu d. Grenz d. Abstuf. beträgt ind. Fall 0,088 Ä.E.
—	"	"	3	355	52	

Eine nähere Betrachtung der Zahlen dieser Tabellen lässt sofort erkennen, dass die Ordnung des Spektrums, in welcher die Beobachtungen angestellt wurden, so wie auch die Expositionsdauer bei den photographischen Aufnahmen im Allgemeinen einen geringen Einfluss auf die zu messenden Grössen ausüben. Schwankungen in den einzelnen Zahlen werden wohl meistens durch Versuchsfehler bei diesen ziemlich schwierigen Messungen bedingt. Da aber die Anzahl der einzelnen Bestimmungen eine ziemlich grosse war, so lassen sich wohl vertrauenswürdige Mittelwerthe bilden, die die Abhängigkeit der verschiedenen gemessenen Grössen von  $i_1$  und  $p$  in deutlicher Weise angeben.

Diese Mittelwerthe sind nun in den folgenden Tabellen XIV bis XIX zusammengestellt, wobei wir für nahestehende Werthe von  $p$  gemeinsame Mittelwerthe gebildet haben. Die Zahlen sind auf 0,001 Ä. E. abgerundet worden.

Die getrennte Messung von  $\delta\lambda_a$  und  $\delta\lambda_b$  ist zuweilen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft, da die innere Grenze der Schleifenäste unter Umständen, wegen des verwaschenen Aussehens der Linien, speciell bei höheren Drucken, sehr schwer sich feststellen lässt. Wenn zwei Linien auf der Platte zu sehen waren, so wurden öfters beide ausgemessen. Jede Zahl bei visuellen Messungen bildet das Mittel aus mehreren einzelnen Einstellungen.

Die visuellen Messungen sind als weniger genau zu betrachten; sie dienten nur zur Kontrolle, um den allgemeinen Charakter der verschiedenen Erscheinungen zu bestätigen. Bei der indigo-blauen Linie wurden überhaupt keine visuellen Messungen vorgenommen, erstens weil sie, visuell betrachtet, schwächer aussieht, als die grüne und dann, weil die dicht nebenbeistehenden Trabanten keine genaue Messung der Linienbreite zuliessen.

Bei höheren Drucken verlieren überhaupt diese Messungen an Genauigkeit; einige Zahlen sind dabei, wegen des verschwommenen Charakters der Linien, ziemlich unsicher, aber wir haben, um jede Willkür auszuschliessen, alle Zahlenangaben in Betracht gezogen und Gesamtmittelwerthe gebildet.

Es muss aber ausdrücklich betont werden, dass alle Messungen sich immer auf die Grenze des eigentlichen Linienkerns beziehen, ohne der nebenbei sichtbaren Abstufung Rechenschaft zu tragen, ganz ähnlich dem, wie es bei der ersten Beobachtungsreihe der Fall war.

Bei grösseren Werthen von  $p$  sind die Messungen für kleine Werthe von  $i_1$  zuweilen ganz unmöglich, da die Linien zu schwach ausgebildet sind.

Wollen wir nun zu einer genaueren Betrachtung der Tabellen XIV bis XIX übergehen, wo die verschiedenen Mittelwerthe zusammengestellt sind.



Tabelle XIV.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

$i_1$	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$
0,8 A.	$2^{m/m}$	0,020 Ä.E.	0,017 Ä.E.	0,027 Ä.E.	0,022 Ä.E.	0,013 Ä.E.	0,061 Ä.E.	0,019 Ä.E.
	23	27	25	—	—	—	—	26
	35	28	29	25	25	25	76	25
	51	31	32	30	28	32	90	32
2,0	3	19	18	27	23	11	61	18
	24	30	30	—	—	—	—	30
	33	35	37	32	33	40	104	36
	50	41	37	26	33	47	106	39
2,7	4	23	20	—	—	—	—	22
	13	27	27	—	—	—	—	27
	49	40	40	—	—	—	—	40
	171	54	41	—	—	—	—	48
3,4	13	22	29	—	—	—	—	26
	31	33	41	—	—	—	—	37
	48	45	41	—	—	—	—	43
4,0	4	19	24	23	22	21	65	22
	24	32	35	—	—	—	—	34
	36	35	39	23	35	45	103	37
	53	40	40	23	29	52	104	40
5,6	32	—	—	31	36	40	107	37
	640	—	—	61	47	50	158	52

Tabelle XV.

Grüne Linie. Visuel. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

$i_1$	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$
0,8 A.	$14^{m/m}$	0,026	0,024	0,034	0,024	0,021	0,078	0,025
	35	31	22	35	27	22	84	27
	52	34	30	40	28	29	97	32
2,0	13	27	26	33	21	26	80	26
	33	31	23	31	18	30	79	27
	51	41	29	38	28	37	103	35
4,0	13	31	25	33	22	29	83	28
	36	39	23	32	19	36	87	31
	54	42	30	42	25	38	105	36

Tabelle XVI.

Indigo-blaue Linie ( $\lambda=4358$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

$i_1$	$p$	$\delta\lambda_a$	$\delta\lambda_b$	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$
0,8 A.	$18^{m/m}$	0,023	0,021	—	—	—	—	0,022
	33	—	—	0,022	0,026	0,017	0,065	20
	55	24	27	—	—	—	—	25
2,0	3	22	13	—	—	—	—	18
	18	29	22	—	—	—	—	25
	55	30	30	—	—	—	—	30
2,7	4	22	21	—	—	—	—	22
	15	22	24	—	—	—	—	23
	54	32	28	—	—	—	—	30
	180	28	33	—	—	—	—	31
4,0	4	21	15	—	—	—	—	18
	18	27	26	—	—	—	—	27
	55	30	33	—	—	—	—	31
5,6	32	—	—	26	24	32	82	29

Tabelle XVII.

Grüne Linie. Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

$i_1$	$p$	$\Delta'$
0,8 Amp.	$3^{m/m}$	0,025 Ä. E.
	12	30
	32	36
	125	46
	237	51
	358	52
2,0	4	27
	12	31
	35	40
	125	44
	243	59
4,0	499	73
	6	30
	12	32
	33	41
	124	57
5,6	242	61
	510	75
	33	38
	355	66

Tabelle XVIII.  
Grüne Linie. Visuel. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

$i_1$	$r'$	$\Delta'$
0,8 Amp.	$3''_{100}$	0,029 Ä. E.
	12	33
	32	48
	125	58
	237	63
	358	69
2,0	4	30
	12	36
	35	52
	125	62
	243	65
	499	78
4,0	6	36
	12	45
	33	58
	124	63
	242	66
	510	78
5,6	33	64
	355	71

NB. Bei hohen Drucken ist die Bestimmung von  $\Delta'$  sehr schwer, da der Funken unregelmässig überspringt und die Ränder der Linie unscharf sind.

Tabelle XIX.  
Indigo-blaue Linie. Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

$i_1$	$r'$	$\Delta'$
0,8 Amp.	$3''_{100}$	0,017 Ä. E.
	12	22
	30	22
	127	26
	237	41
	358	42
2,0	3	22
	12	24
	29	22
	118	35
	243	57
	499	59
4,0	4	22
	13	25
	31	24
	122	36
	242	70
	510	73
5,6	33	36
	355	53

Die Tabellen XIV, XV und XVI lassen erkennen, dass im Allgemeinen unter gleichen Bedingungen die Werthe von  $\delta\lambda_a$  und  $\delta\lambda_b$  für die grüne und indigo-blaue Linie sich wenig von einander unterscheiden, speciell bei den photographischen Messungen. Bei den visuellen Messungen für die grüne Linie ist die Uebereinstimmung eine viel weniger befriedigende; es scheint sogar, dass immer  $\delta\lambda_a > \delta\lambda_b$  wird. Da aber diese visuellen Messungen viel ungenauer sind und ausserdem beide Linienäste nicht dasselbe Aussehen haben, so kann wohl ein Unterschied zwischen  $\delta\lambda_a$  und  $\delta\lambda_b$  von einer unrichtigen Bestimmung der Symmetrieaxe der Schleife herrühren. Auf Grund der genaueren photographischen Ausmessungen ist man wohl berechtigt, innerhalb der Beobachtungsfehler,  $\delta\lambda_a = \delta\lambda_b$  anzunehmen, nämlich, dass die Schleife sich symmetrisch nach beiden Seiten ausdehnt. Infolgedessen brauchen wir  $\delta\lambda_a$  und  $\delta\lambda_b$  nicht gesondert zu berücksichtigen und können uns daher nur mit der Betrachtung des Mittelwerthes  $\delta\lambda = \frac{\delta\lambda_a + \delta\lambda_b}{2}$  begnügen.

Tabelle XIV zeigt, dass für die grüne Linie bei demselben  $i_1$   $\delta\lambda$  mit  $p$  wächst. Von  $p$  sehr klein bis  $p$  gleich etwa  $50 \frac{m}{m}$  vermehrt sich  $\delta\lambda$  ungefähr um das Doppelte.

Für dasselbe  $p$  wächst  $\delta\lambda$  im Allgemeinen etwas mit wachsender mittlerer Stromstärke  $i_1$ , aber die Abhängigkeit von  $\delta\lambda$  von  $i_1$  ist weniger ausgeprägt, als die Abhängigkeit von  $p$ ; sogar für kleine Werthe von  $p$  bleibt  $\delta\lambda$  mit wachsender Stromstärke  $i_1$  fast unveränderlich.

Eine weitere, recht beträchtliche Zunahme von  $p$  (bis  $640 \frac{m}{m}$ ) zieht eine verhältnissmässig kleine Vermehrung von  $\delta\lambda$  nach sich.

Die visuellen Beobachtungen für die grüne Linie (Tabelle XV) stimmen sehr gut mit den photographischen Messungen von  $\delta\lambda$  überein und bestätigen denselben Gang von  $\delta\lambda$  mit wachsendem  $p$  und  $i_1$ .

Die indigo-blaue Linie (Tab. XVI) weist dieselben Eigenschaften in Bezug auf  $\delta\lambda$ , wie die grüne Linie, auf. Sogar weichen die absoluten Werthe von  $\delta\lambda$  für beide Linien nicht sehr viel von einander ab, nur ist  $\delta\lambda$  für die indigo-blaue Linie im Allgemeinen ein wenig kleiner. Es scheint also, als ob beide Linien in dieser Hinsicht ganz verwandt wären.

Was nun  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  anbetrifft, so sieht man, dass sie nach der Tabelle XIV für die grüne Linie sich wenig von einander unterscheiden. Wegen der Schwierigkeit,  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  genau auszumessen, ist der Gang dieser Grössen gar nicht ausgeprägt, es lässt sich aber allerdings ein Zuwachs von  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  mit wachsendem  $p$  vermuthen.

Bei den entsprechenden visuellen Messungen (Tab. XV) ist der Gang dieser Grössen mit wachsendem  $p$  deutlicher zu ersehen, aber dabei ist  $\Delta_a$  durchaus grösser als  $\Delta_b$ . Ob dies wirklich so ist, kann einstweilen nicht mit Sicherheit entschieden werden, da die visuellen Messungen überhaupt weniger genau sind, und ausserdem beide Äste nicht dasselbe Aussehen haben, so dass bei der Ausmessung ihrer Breite sehr leicht ein Fehler begangen werden kann.

Nach den photographischen Messungen für die grüne, so wie auch für die indigo-blaue

Linie (Tab. XVI) würde man viel eher auf eine Gleichheit von  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  schliessen dürfen.

Was nun  $\Delta''$  und  $\Delta'$  anbelangt, so lässt sich aus dem vorhandenen Beobachtungsmaterial auf einen Zuwachs dieser Grössen mit wachsendem  $p$  und  $i_1$  schliessen.

Wenden wir uns jetzt zu den folgenden drei Tabellen XVII, XVIII und XIX, wo die leuchtende Funkenstrecke parallel auf den Spalt projicirt wurde.

Die Breite  $\Delta'$  der eigentlichen Linie wächst nicht nur mit wachsendem Drucke  $p$ , sondern auch mit wachsender Stromstärke  $i_1$ , wobei die photographischen und visuellen Messungen für die grüne Linie in ihren allgemeinen Zügen ein identisches Resultat ergeben.

Hierbei ist folgendes zu bemerken. Vergleicht man diese Werthe von  $\Delta'(\parallel)$  mit den entsprechenden Werthen von  $\Delta'(\perp)$ , so wie auch mit  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$ , wenn also die leuchtende Funkenstrecke direct auf den Spalt gerichtet war, so sieht man sofort, dass  $\Delta'(\perp)$  etwa 2—2,5 Mal grösser als  $\Delta'(\parallel)$  ausfällt, und zwar weicht  $\Delta'(\parallel)$  nicht zu sehr von den entsprechenden Werthen von  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  ab.

Diese Thatsache ist von besonderer Bedeutung für die Erklärung der Erscheinung dieser schleifenartigen Verdoppelung der grünen und indigo-blauen Linie.

Beim ersten Ansehen der Erscheinung denkt man sofort an eine Umkehrung der Linien; so hat auch Janicki <sup>1)</sup> diese Verdoppelung erklärt. Bei einer näheren Betrachtung bietet diese Erklärungsweise jedoch grosse Schwierigkeiten. Hätte man es mit einer Umkehrung bei einer verhältnissmässig dicken leuchtenden Gasschicht wirklich zu thun, so wäre zu erwarten gewesen, dass bei quer stehender Funkenstrecke die Linienbreite  $\Delta'$  bei denselben Werthen von  $p$  und  $i_1$  dieselbe bliebe, als wenn die Funkenstrecke parallel zum Spalt war und dass in dieser hellen Linie ein dunkler Streifen auftauchte. In der That aber ist  $\Delta'(\perp)$  mehr als zwei Mal grösser als  $\Delta'(\parallel)$ , und ausserdem unterscheidet sich  $\Delta'(\parallel)$  wenig von  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$ . Es scheint dagegen, als ob die Linie wirklich in zwei gleich breite Componenten zerlegt wäre, wobei eine Componente nach rechts, die andere nach links verschoben ist. Ausserdem ist es schwer, die eigenthümliche Form dieser Schleife, die aus zwei zusammenfliessenden Ästen besteht, auf eine Umkehrung der Linien zurückzuführen.

Man wäre vielleicht geneigt, anzunehmen, dass bei quer stehender Funkenstrecke  $\Delta'$  wegen der grösseren Lichtstärke grösser ausfällt, aber diese Annahme ist ebenfalls unzutreffend, da die Expositionsdauer so gewählt wurde, dass man möglichst gleich intensive Bilder bekam. Ausserdem sahen wir, dass die Dauer der Exposition einen sehr kleinen Einfluss auf die Breite des eigentlichen Linienkernes ausübt. Wenn dem auch so wäre, so könnte eine grössere Lichthelligkeit keineswegs eine Zerlegung der Linie in zwei besondere Aeste erklären, um desto weniger, da bei parallel stehender Funkenstrecke die Helligkeit doch eine ziemlich grosse war, was aus den nöthigen, verhältnissmässig kleinen Expositionsdauern der photographischen Aufnahmen folgt.

<sup>1)</sup> L. c.

Merkwürdig ist auch, dass die beiden gelben Linien in keinem einzigen Fall eine ähnliche Verdoppelung erwiesen haben.

Auf die Frage der Erklärung dieser eigenthümlichen Verdoppelung der grünen und indigo-blauen Linie werden wir weiter nochmals zurückkommen, hier sei nur darauf hingedeutet, welche Schwierigkeiten die Zurückführung der Erscheinung auf eine Umkehrung der Linien darbietet.

Wollen wir jetzt zum Schluss die Abhängigkeit von  $\Delta'$  (wir werden jetzt einfach  $\Delta$  schreiben) vom Drucke  $p$  bei  $\parallel$  stehender Funkenstrecke und zwar bei verschiedenen mittleren Stromstärken  $i_1$  näher untersuchen und wollen wir dieser Untersuchung dieselbe Formel wie früher, nämlich

$$\Delta = \Delta_0 e^{\alpha p},$$

zu Grunde legen.

Die Berechnung von  $\alpha$  und  $\Delta_0$  ist auf Grund der Zahlen der Tabellen XVII, XVIII und XIX ausgeführt worden, wobei, da für jede Stromstärke im Allgemeinen mehrere einzelne Messungen vorlagen, um jede Willkür auszuschliessen, die entsprechenden Werthe von  $\alpha$  und  $\Delta_0$  nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden.

#### Grüne Linie. Photographisch.

$i_1$	$\Delta_0$	$\alpha$	Im Mittel.
0,8 Amp.	0,030 Ä. E.	0,0019	} $\alpha = 0,0018$
2,0	0,033	0,0018	
4,0	0,036	0,0017	
5,6	0,036	0,0017	

#### Grüne Linie. Visuel.

$i_1$	$\Delta_0$	$\alpha$	Im Mittel.
0,8 Amp.	0,036 Ä. E.	0,0022	} $\alpha = 0,0016$
2,0	0,040	0,0015	
4,0	0,047	0,0012	

#### Indigo-blaue Linie. Photographisch.

$i_1$	$\Delta_0$	$\alpha$	Im Mittel.
0,8 Amp.	0,020	0,0024	} $\alpha = 0,0024$
2,0	0,024	0,0022	
4,0	0,025	0,0025	
5,6	(0,035)	(0,0012)	

Für  $i_1 = 5,6$  sind die visuellen Messungen zu ungenau, um aus ihnen einen richtigen Werth von  $\alpha$  berechnen zu können. Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch theilweise auf den entsprechenden Werth von  $\alpha$  für die indigo-blaue Linie.

Sieht man von diesen letzten Zahlen ab, so ergibt sich im Allgemeinen eine genügend befriedigende Uebereinstimmung, insbesondere, wenn man bedenkt, dass die visuellen Messungen überhaupt viel weniger genau sind.

Es scheint, als ob  $\Delta_0$  mit wachsender Stromstärke ein klein wenig wächst; dies mag wohl eine Folge der höheren Temperatur sein. Was nun  $\alpha$  anbelangt, so scheint es von der Stromstärke unabhängig zu sein, wobei die mittleren Werthe von  $\alpha$  für die grüne Linie bei den photographischen und visuellen Messungen sehr gut mit einander übereinstimmen.

Bei der ersten Beobachtungsreihe ergab sich im Mittel  $\alpha = 0,0014$ .

Die Uebereinstimmung ist also eine recht befriedigende <sup>1)</sup>.

Der Werth von  $\alpha$  für die indigo-blaue Linie unterscheidet sich wenig von dem entsprechenden Werth für die grüne Linie, während die beiden gelben Linien, wie wir es früher gesehen haben, in viel höherem Maass vom Druck beeinflusst sind.

Es lässt sich also schliessen, dass, sowohl in Bezug auf die Schleifenbildung, als auch in Bezug auf die Verbreiterung durch Druck, die grüne und indigo-blaue Linie des Quecksilberdampfes einer und derselben Gattung von Linien angehören.

## § 5.

### Electrische Messungen am leuchtenden Geisslerrohr.

Als Ergänzung der oben besprochenen Beobachtungen haben wir eine Anzahl electrischer Messungen an dem leuchtenden Geisslerrohr, mit welchem die zweite Beobachtungsreihe ausgeführt wurde, angestellt.

Es wurde dabei das Quadrat der Potentialdifferenz  $(V_1 - V_2)^2$  an den Quecksilber-electroden, so wie auch das Quadrat der mittleren Stromstärke  $J^2$  (mit Hilfe eines Electrodynamometers) bestimmt. Da die Beobachtungen ausserdem ergaben, dass beim Durchschicken eines Wechselstromes vom secundären Stromkreis des Inductoriums durch den leuchtenden Quecksilberdampf noch ein Strom von constanter Richtung zurückbleibt (unipolare Leitung), so wurde im Stromkreise der leuchtenden Funkenstrecke noch ein Galvanometer eingeschaltet, welches die Stärke  $j$  dieses constanten Reststromes zu messen gestattete. Alle Messapparate wurden selbstverständlich vorher sorgfältig geaicht.

Das Rohr hatte die Form der Figur 2.

Die Dimensionen desselben sind schon früher angegeben worden.

---

<sup>1)</sup> Der innere Durchmesser des engen Röhrentheiles war bei beiden Beobachtungsreihen auch fast identisch.

Es war nämlich:

Länge des engen leuchtenden Kanals $AB$ . . . . .	$46^m/m$
Innerer Durchmesser desselben $d$ . . . . .	$2,0$ »
Die Entfernungen $AF$ und $BE$ bis zu den Quecksilberkuppen . .	$28$ »

Die elektrischen Verhältnisse in einem leuchtenden Geisslerrohr sind äusserst compliciert und sie lassen sich sehr schwer in ihren Einzelheiten verfolgen.

Das Ohm'sche Gesetz verliert bekanntlich vollständig seine Gültigkeit und ausserdem ist das Potentialgefälle in der Nähe der Electroden ein ganz anderes als im engen Theil des leuchtenden Kanals. Die Zerspaltung der neutralen Atome in Electrone und positive Restatome, die durch ihre Bewegung die electricchen Ladungen fortführen, ist die Ursache der Stromleitung in leuchtenden Gasen.

Es kam uns gar nicht darauf an, diese complicierten Vorgänge einem näheren Studium zu unterziehen, sondern nur die mittleren electricchen Verhältnisse in einem leuchtenden Geisslerrohr in ihren allgemeinen Zügen experimentell zu verfolgen und die erhaltenen Zahlenangaben alsdann tabellarisch darzulegen.

Ist nun  $\pm (V_1 - V_2)$  und  $\pm J$  aus den Beobachtungen bekannt, so lässt sich der positive Quotient  $R_m = \left(\frac{V_1 - V_2}{J}\right)$  bilden.  $R_m$  kann, auf dem Standpunkt des Ohm'schen Gesetzes, gewissermaassen als der mittlere electricche Widerstand zwischen den Electroden unter den gegebenen Bedingungen aufgefasst werden. Es schien uns vom Interesse, die Abhängigkeit von  $R_m$  von der mittleren Stromstärke  $J$ , dem Druck des Quecksilberdampfes  $p$ , Dimensionen des Rohres (siehe die späteren Beobachtungen im folgenden Paragraphen) u. s. w. etwas näher experimentell zu verfolgen.

Dabei ist freilich zu beachten, dass  $R_m$  von dem Selbstinductionscoefficienten desjenigen Stromkreises, welcher zwischen den Electroden sich befindet, abhängig ist; da aber die leuchtende Funkenstrecke im Allgemeinen sehr kurz war, so kann von diesem Umstand, wenigstens in erster Annäherung, abgesehen werden. Wir werden in der That weiter sehen, dass eine Aenderung der Unterbrechungszahl  $n$  im Inductorium fast gar nicht den Werth von  $R_m$  beeinflusst.

Es muss noch auf einen anderen Punkt aufmerksam gemacht werden.

Unter normalen Bedingungen dürfte beim Durchschicken eines Wechselstromes durch einen electricchen Leiter kein constanter Strom zurückbleiben. Da aber ein solcher thatsächlich vorhanden ist, so lässt sich daraus schliessen, dass der Durchgang der Electricität in einer bestimmten Richtung, entweder von  $A$  nach  $B$ , oder von  $B$  nach  $A$  (Fig. 2), bevorzugt ist.

Man müsste also freilich, wenn man von einem mittleren Widerstand redet, zwei verschiedene mittlere Widerstände unterscheiden,  $R_{AB}$  und  $R_{BA}$ , so dass der gemessene Werth von  $R_m$  gewissermaassen wiederum einen mittleren Werth zwischen  $R_{AB}$  und  $R_{BA}$  darstellt.



Die Beobachtungen ergaben ausserdem, dass  $R_m$  nicht nur vom Drucke  $p$  abhängig ist, sondern auch von der Stellung des Commutators im primären Stromkreise des Inductoriums.

Ist der Commutator zum Beobachter zu  $\downarrow$  gerichtet (erste Lage), so befindet sich bei  $F$  (siehe die Fig. 2) die Anode; wenn er dagegen die entgegengesetzte Stellung  $\uparrow$  annimmt (zweite Lage), so ist bei  $F$  die Kathode.

Diese Eintheilung in Anode und Kathode ist so zu verstehen. Ersetzt man das Geisslerrohr durch ein Crookes'sches, resp. Röntgen'sches Rohr, so wird bei der ersten Stellung des Commutators bei  $F$  die Anode und bei der zweiten die Kathode sich befinden.

Da also der Werth von  $R_m$  von der Stellung des Commutators als abhängig sich erwies, so wurden infolgedessen die electricischen Messungen am leuchtenden Geisslerrohr immer bei beiden Stellungen des Commutators ausgeführt.

Bevor wir zu den eigentlichen electricischen Messungen am leuchtenden Quecksilberdampfe übergangen, haben wir zuerst einige Kontrollversuche an einer Wassersäule angestellt.

Das Geisslerrohr wurde durch ein geradliniges Rohr von etwa 1,5 cm. lichter Weite, welches mit reinem Wasser gefüllt war, ersetzt und durch dasselbe der Wechselstrom des Inductoriums hindurchgeschickt.

Es wurde  $J^2$  und  $(V_1 - V_2)^2$  direct gemessen und aus den erhaltenen Werthen  $R_m = \left( \frac{V_1 - V_2}{J^2} \right)$  berechnet.

Dabei wurde die mittlere Stromstärke  $i_1$  im primären Stromkreise des Inductoriums, die Anzahl der Unterbrechungen pro Secunde  $n$ , so wie auch die Länge  $L$  der Wassersäule zwischen den Electroden variiert.

Es wurde zugleich der Widerstand  $R$  der Wassersäule zwischen den Electroden auch direct gemessen, um  $R$  mit dem berechneten Werth von  $R_m$  vergleichen zu können.

Dabei ist freilich zu beachten, dass der Widerstand einer Wassersäule sich ziemlich rasch mit der Zeit und mit anderen möglichen Bedingungen ändert, so können diese Beobachtungen selbstverständlich auf keine grosse Genauigkeit Anspruch erheben.

Sie waren uns nur insofern von Belang, um zu sehen, ob man auf diese Weise wirklich auf einen annähernd richtigen Werth des Widerstandes kommt, da bei electricischen Messungen an leuchtenden Dämpfen, wo alles so unstabil ist, von recht genauen und festen Zahlenangaben gar nicht die Rede sein kann. Der allgemeine Charakter der Erscheinung ist nur vom Belang.

Bei diesen Beobachtungen mit einer Wassersäule haben wir in keinem einzigen Fall einen zurückbleibenden constanten Strom  $j$  nachweisen können.

Die Resultate dieser Messungen sind in der folgenden Tabelle XX zusammengestellt, wobei die Stromstärke in Milliampere und die Potentialdifferenz in Volts angegeben ist.

Tabelle XX.

$i_1$	$n$	$L$	$\pm J$	$\pm (V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$R \cdot 10^{-3}$
0,8 Amp.	81	7,1 cm.	1,3 M. A.	458 V.	364 $\Omega$	306 $\Omega$
2,0	81	—	2,7	825	311	296
2,0	53	—	2,6	801	314	296
3,4	81	—	5,9	1509	257	252
0,8	81	14,7	1,1	716	630	555
1,9	81	—	2,3	1308	571	565
1,9	54	—	2,1	1260	603	565
0,8	81	21,6	1,0	868	870	810
1,7	81	—	2,0	—	—	800
0,8	81	26,6	0,9	1004	1078	1000

Die Zahlen dieser Tabelle lehren uns, dass die Uebereinstimmung zwischen dem direct gemessenen Werth von  $R$  und  $R_m$  eine genügende ist. Es scheint nur, als ob  $R$  ein wenig kleiner als  $R_m$  ausfällt, aber das war auch a priori zu erwarten.

Dies berechtigt also die Anwendung der eben besprochenen Methode zur Bestimmung von  $R_m$  bei leuchtenden Dämpfen.

Eine Abhängigkeit von  $R_m$  von der mittleren Stromstärke  $J$  lässt sich nicht mit Sicherheit feststellen, da der Widerstand  $R$  der Wassersäule sich ziemlich rasch mit der Zeit ändert, und die scheinbare Abnahme von  $R_m$  mit wachsendem  $J$  könnte wohl auf diese secundäre Ursache zurückgeführt werden. Eine Aenderung der Unterbrechungszahl  $n$  beeinflusst den Werth von  $R_m$  ganz unwesentlich.

Man dürfte also aus diesen Zahlen schliessen, dass für eine Wassersäule das Ohm'sche Gesetz beim Durchschicken von Wechselströmen im Grossen und Ganzen seine Gültigkeit behält.

Ganz anders verhält sich aber die Sache bei einem leuchtenden Geisslerrohr.

Die entsprechenden Zahlenangaben nebst einigen Bemerkungen sind in den folgenden Tabellen XXI bis XXVI niedergelegt. Der constante Strom  $j$  ist ebenfalls in Milliampere angegeben, wobei das positive Vorzeichen bei  $j$  bedeutet, dass der Strom  $j$  von  $F$  nach  $E$  (siehe die Fig. 2) gerichtet ist.

Der Dampfdruck des Quecksilbers variierte dabei von 4 bis 120 Millimeter. Zu noch grösseren Drucken gelang es uns nicht hinaufzugehen, da das Rohr, welches schon früher sehr viel in Anspruch genommen war, unbrauchbar wurde.

Tabelle XXI. 1)

$i_1$	$n$	Commutator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Bemerkungen.	
0,8A.	81	↓	$4^m/m$	1,3 M.A.	730 V.	579 $\Omega$	+0,4 M.A.	Am Anfang ist $j > 0$ ; alsdann vermindert es sich, geht durch Null u. wird negativ. Wenn man jetzt $i_1$ vermindert, so bleibt $j$ negativ.	
—	—	↑	—	1,2	661	556	-0,9		
2,0	81	↓	4	3,5	689	200	+0,2		
—	—	↑	—	4,0	645	160	-2,8		
4,0	81	↓	4	8,7	544	63	-3,7		
—	—	↑	—	9,8	515	53	-7,9		
0,8	81	↓	5	1,3	741	593	+0,5		
—	—	↑	—	1,3	687	533	-0,5		
2,0	81	↓	5	3,7	672	183	+1,9		$j$ wird allmählig kleiner.
—	—	↑	—	3,9	632	161	-2,1		
4,0	81	↓	5	7,8	568	73	+1,0		$j$ ändert sein Vorzeichen.
—	—	↓	—	9,5	566	60	-5,2		
—	—	↑	—	—	—	—	—		
0,8	81	↓	5	1,4	717	548	+0,3		$j$ sehr constant.
—	—	↑	—	1,4	710	547	-0,5		
2,0	81	↓	5	3,4	660	225	+1,6		$j$ sehr unconstant. Nach 4 Minuten $j=0$ . Dann wird $j$ negativ. Nach 12 Min. $j$ bleibt ziemlich constant. $j$ viel constanter.
—	—	↑	—	3,5	647	215	-1,8		
4,0	81	↓	5	7,1	604	118	+1,4		
—	—	↓	—	7,6		112	-3,3		
—	—	↑	—	8,9	572	96	-5,3		

1) Beobachtungen an drei verschiedenen Tagen.

Tabelle XXII.

$i_1$	$n$	Commutator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Bemerkungen.	
0,8A.	81	↓	$8^m/m$	1,4 M.A.	748 V.	527 $\Omega$	+0,2 M.A.	$j$ sehr constant.	
—	—	↑	—	1,3	712	531	-0,5		
2,0	81	↓	9	3,4	720	213	+1,5		
—	—	↑	—	3,4	693	204	-1,9		
—	55	↓	—	3,2	694	217	+1,2		
—	—	↑	—	3,2	669	212	-1,5		
4,0	81	↓	14	7,0	648	92	+1,2		$j$ ziemlich constant. Aendert nicht mehr sein Vorzeichen mit der Zeit.
—	—	↑	—	7,5	646	86	-2,5		
—	56	↓	—	7,2	631	87	+1,9		
—	—	↑	—	7,7	641	83	-3,3		
—	55	↑	—	—	—	—	—		

Tabelle XXIII.

$i_1$	$n$	Com- muta- tor.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1-V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Bemerkungen.
0,8A.	81	↓	$16^{m/m}$	1,4 M.A.	774 V.	553 $\Omega$	+0,2 M.A.	$j$ sehr constant.  Der absolute Werth von $j$ vermehrt sich mit der Zeit.
—	81	↑	—	1,3	760	589	-0,4	
—	58	↓	—	1,3	726	572	+0,04	
—	58	↑	—	1,3	712	565	-0,1	
2,0	81	↓	17	3,2	682	213	+1,4	
—	—	↑	—	3,3	687	207	-1,7	
—	60	↓	—	3,1	673	216	+1,1	
—	59	↑	—	3,2	645	202	-1,5	
4,0	81	↓	24	7,0	625	90	+0,9	
—	—	↑	—	7,5	652	87	-2,7	
—	60	↓	—	7,2	642	90	+1,6	
—	—	↑	—	7,8	674	86	-3,8	

Tabelle XXIV.

$i_1$	$n$	Com- muta- tor.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1-V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Bemerkungen.
0,8A.	81	↓	$25^{m/m}$	1,3 M.A.	791 V.	604 $\Omega$	+0,1 M.A.	$j$ höchst constant.
—	—	↑	—	1,3	762	600	-0,4	
2,0	81	↓	28	3,2	709	225	+1,2	$j$ unconstant. Schwankungen. Der absolute Werth von $j$ vermehrt sich mit der Zeit.
—	—	↑	—	3,3	693	209	-1,7	
4,0	81	↓	35	7,0	659	94	+1,1	
—	—	↑	—	7,7	683	88	-3,1	

Tabelle XXV.

$i_1$	$n$	Com- muta- tor.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1-V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Bemerkungen.
0,8A.	82	↓	$46^{m/m}$	1,3 M.A.	843 V.	659 $\Omega$	+0,1 M.A.	$j$ sehr constant.
—	—	↑	—	1,2	827	678	-0,3	
2,0	81	↓	53	3,1	763	244	+1,3	$j$ unconstant.
—	—	↑	—	3,3	752	231	-1,6	
4,0	81	↓	62	7,3	734	101	+2,4	
—	—	↑	—	8,1	725	89	-4,2	

Tabelle XXVI. 1)

$i_1$	$n$	Com- muta- tor.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Bemerkungen.
0,8A.	81	↓	81 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	1,0 M.A.	1107 V.	1096 Ω	+0,2 M.A.	$j$ sehr constant. $j$ ausserordentlich constant.
—	—	↑	—	1,1	983	910	-0,4	
2,0	81	↓	87	3,6	841	231	+1,6	$j$ sehr constant.
—	—	↑	—	3,9	769	198	-2,1	
4,0	81	↓	100	8,9	819	92	+5,2	$j$ ändert bei d. $i_1$ sein Vorzeichen nicht, wie bei kleinen Drucken u. bleibt zieml. const. Der absolute Werth von $j$ wird mit der Zeit kleiner.
—	—	↑	—	8,9	713	80	-5,8	
—	—	↑						
—	—	↑						
0,8	81	↓	87	1,3	921	731	+0,1	$j$ sehr constant.
—	—	↑	—	1,3	888	699	-0,2	
—	57	↓	—	1,1	826	751	+0,1	$j$ ausserordentlich constant.
—	—	↑	—	1,1	817	743	-0,2	
2,0	81	↓	100	3,5	877	248	+1,6	
—	—	↑	—	3,8	771	202	-2,0	
—	59	↓	—	3,4	860	251	+1,3	
—	—	↑	—	3,6	746	207	-1,7	
4,0	81	↓	120	8,7	864	100	+4,9	$j$ wächst mit der Zeit.
—	—	↓						
—	—	↑	—	9,0	823	92	-5,5	Der absolute Werth von $j$ vermindert sich mit der Zeit.
—	—	↑						
—	58	↓	—	8,8	858	97	+5,4	
—	—	↑	—	9,1	790	87	-5,2	

1) Beobachtungen an zwei verschiedenen Tagen.

Aus diesen Tabellen lassen sich manche Schlüsse ziehen.

Zunächst erkennt man aus den Tabellen XXI und XXVI, dass die Beobachtungen, welche an verschiedenen Tagen ausgeführt sind und welche etwa gleichen Drucken entsprechen, im Allgemeinen eine befriedigende Uebereinstimmung aufweisen, infolgedessen lässt sich schliessen, dass man, obgleich die electrischen Verhältnisse in einem leuchtenden Geisslerrohr von sehr unstabiler Natur sind, insbesondere, was die Richtung und Grösse des constanten Stromes  $j$  anbetrifft, doch unter gleichen äusseren Bedingungen annähernd gleiche Werthe von  $R_m$  und  $j$  bekommt.

Weiter sehen wir, dass der Widerstand eines leuchtenden Geisslerrohres enorm gross ist und dass bei der ↓ Stellung des Commutators die Werthe von  $R_m$  bei demselben Werth von  $J$  fast immer grösser, als bei der ↑ Stellung ausfallen. Wir werden also die Zahlen für diese beiden Lagen des Commutators besonders betrachten müssen.

Das Erste, was ins Auge fällt, ist die sehr rasche Abnahme von  $R_m$  mit wachsendem  $J$ , so dass, trotz der grösseren Stromstärke, die Potentialdifferenz an den Elektroden mit wachsendem  $J$  kleiner wird.

Die Zahlen der vorigen Tabellen lehren uns, dass für denselben Druck in allererster Annäherung  $R_m$  umgekehrt proportional zu  $J$  ist.

Genauer lässt sich der Gang von  $R_m$  mit  $J$  durch folgende Formel darstellen:

$$R_m = \frac{A}{J} - a, \dots \dots \dots (2)$$

wo  $A$  und  $a$  zwei Constanten bedeuten.

Hieraus ergibt sich

$$V_1 - V_2 = A - aJ. \dots \dots \dots (3).$$

Diese Formel ist so zu deuten, dass mit wachsendem  $J$  die Potentialdifferenz an den Elektroden abnimmt. Diese Abnahme wird wahrscheinlich durch die Auflagerung von Atomionen an den entsprechenden Elektroden verursacht, was eine Art entgegengesetzter Polarisationskraft hervorruft, und es ist à priori zu erwarten, wenn man die inneren Vorgänge in einem leitenden Gas in Erwägung zieht, dass diese Abnahme direct proportional zu  $J$  sein muss.

Dies hat sich auch in der That ergeben.

In der folgenden Tabelle XXVII sind nun die nach den Zahlen der vorigen Tabellen berechneten Werthe von  $A$  und  $a$  zusammengestellt, wobei  $A$  und  $a$  sich auf die erste Lage ( $\downarrow$ ) des Commutators und  $A_1$  und  $a_1$  auf die zweite Lage ( $\uparrow$ ) desselben beziehen. Dabei sind für nahe liegende Werthe von  $p$  Mittelwerthe gebildet worden.

Diese Constanten sind nach dem kleinsten und grössten Werth von  $J$  berechnet worden. Diese Rechnungen können selbstverständlich auf keine grosse Genauigkeit Anspruch erheben, da erstens die electricen Verhältnisse in einem leuchtenden Geisslerrohr ziemlich grossen Schwankungen unterworfen sind und zweitens, weil die verschiedenen Werthe von  $J$  nicht immer (speciell für höhere Drucke) demselben Werth von  $p$  entsprechen. Trotzdem ergibt sich, wie Controllrechnungen es gezeigt haben, eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen dem nach der Formel (2) berechneten Werth von  $R_m$  für den mittleren Werth der Stromstärke  $J$  und dem direct beobachteten. Die Zahlen der folgenden Tabelle entsprechen der Unterbrechungszahl  $n = 81$ .

Tabelle XXVII.

$p$	$A$	$a \cdot 10^{-3}$	$A_1$	$a_1 \cdot 10^{-3}$
$5^n/m$	761	12	708	17
10	773	18	726	11
19	811	27	783	17
29	821	23	778	12
54	867	18	845	15
96	1041	23	964	24
Im Mittel		20	Im Mittel 16	

Aus den Zahlen dieser Tabelle lässt sich ohne Zweifel folgern, dass  $A$  und  $A_1$  mit wachsendem  $p$  zunehmen. Die Schwankungen von  $a$  und  $a_1$  haben einen ziemlich unregelmässigen Charakter und sind allem Anschein nach auf Versuchsfehler zurückzuführen. Ist dies der Fall, so sind  $a$  und  $a_1$  als unabhängig vom Drucke anzusehen, wobei noch die Mittelwerthe von  $a$  und  $a_1$  ziemlich nah an einander liegen. Dieses Resultat wäre freilich voraussehen, da  $a$  und  $a_1$  wahrscheinlich durch die Capacität der Electroden bedingt sind.

Dann bedeutet die Zunahme von  $A$  und  $A_1$  mit wachsendem  $p$  eine entsprechende Zunahme des Widerstandes des Rohres im Sinne des Ohm'schen Gesetzes, so wie auch der Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  bei demselben Werth von  $J$ .

$A_1$  ist durchaus kleiner als  $A$ , d. h., wenn die Anode sich bei  $E$  (siehe die Fig. 2) befindet, so ist der Durchgang des electricen Stromes erleichtert.

Es scheint also, als ob eine secundäre Ursache vorhanden wäre, welche den Stromdurchgang von  $E$  nach  $F$  (siehe die Fig. 2) leichter machte, als in der umgekehrten Richtung. Diese secundäre Ursache mag wohl, wie wir es auch später sehen werden, in einer etwaigen Destillation des Quecksilbers von einer etwas wärmeren Quecksilberelektrode zu der anderen sein.

Betrachten wir die Stärke und Richtung des Reststromes  $j$ , so sehen wir, dass der absolute Werth von  $j$  bei der zweiten Lage des Commutators fast immer grösser ausfällt, was in vollem Einklang mit dem oben Gesagten steht. Ausserdem ist in diesem Fall der Werth von  $j$  viel constanter, während bei der ersten Lage des Commutators, speciell für grössere Werthe von  $J$  und kleine Werthe von  $p$ ,  $j$  sehr unstabil ist und sogar sein Vorzeichen ändert, indem  $j$  aus positiven Werthen in negative übergeht. Für grössere Werthe von  $p$  macht sich diese secundäre Wirkung nicht so geltend und  $j$  bleibt viel constanter. Es ist auch wohl

anzunehmen, dass, je grösser der Dampfdruck ist, desto schwerer eine etwaige Destillation vonstatten gehen kann. Mit wachsendem  $J$ , d. h. mit Abnahme von  $R_m$ , nimmt der absolute Werth von  $j$  zu.

Eine Aenderung der Unterbrechungszahl  $n$  von etwa 58 auf 81 hat keine grosse Bedeutung, es nimmt nur  $V_1 - V_2$  mit wachsendem  $n$  etwas zu, was auch a priori zu erwarten war.

## § 6.

### Dritte Beobachtungsreihe.

Bei der zweiten Beobachtungsreihe war die Länge der leuchtenden Funkenstrecke gleich  $46^m/m$ .

Um nun den Einfluss der Länge dieser leuchtenden Strecke auf die Ausbildung der Schleife näher zu studieren, wurde die Funkenstrecke ( $AB$  auf der Fig. 2) jetzt etwa auf  $22^m/m$  verkürzt. Der innere Durchmesser  $d$  des Rohres blieb derselbe und zwar war  $d = 2,0^m/m$ .

Die Entfernungen der Röhrenöffnungen bis zu den entsprechenden Quecksilberkuppen  $AF = BE$  waren in diesem Fall etwas grösser und etwa gleich  $50^m/m$ , sodass die totale Entfernung von Elektrode zur Elektrode etwa  $122^m/m$  betrug. Bei der zweiten Beobachtungsreihe war diese gesammte Strecke gleich  $102^m/m$ .

Die Beobachtungen erstreckten sich nur auf die grüne Quecksilberlinie ( $\lambda = 5461$ ) und nur bei der senkrechten Stellung des Rohres gegen den Spalt, wie dies auf der Fig. 2 angedeutet ist. Die Beobachtungen selber wurden bei verschiedenen mittleren Stromstärken des primären Stromes im Inductorium und bei verschiedenen Drucken ausgeführt; zugleich wurden die entsprechenden elektrischen Data notiert. Alle diese Zahlenangaben sind in der folgenden Tabelle XXVIII wiedergegeben. Was nun die Bedeutung der einzelnen Buchstaben anbelangt, so möge auf die früheren Tabellen hingewiesen werden.

Die Zahlen sind für etwa gleiche mittlere Stromstärken  $i_1$  und nach wachsenden Drucken geordnet. Alle Data entsprechen einer mittleren Unterbrechungszahl  $n = 81$  pro Secunde.



## Tabelle XXVIII.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke 1 zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Commutator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp. Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
58	0,8 Amp.	↓	5 <sup>m</sup> /m	1,1 M. A.	1026 V.	941 $\Omega$	+0,1 M. A.	{ II — —	10 <sup>m</sup> 20 20	— — —	— — —	— — —	0,036 30 31	— — —	
58	0,8	↓	24	1,4	1412	1023	+0,4	{ II —	10 10	— —	— —	— —	34 36	— —	
	—	↑	24	1,4	1226	882	-0,2	{ — —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	
59	0,8	↓	83	1,3	>1583	>1181	+0,2	{ II — —	6 12 12	— — —	— — —	— — —	42 52 50	— — —	
	—	↑	83	—	—	—	0	{ — —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	
58	1,8	↓	8	3,0	1042	352	+1,5	{ II — —	6 6 9	— — —	— — —	— — —	37 33 39	— — —	
	—	↑	8	2,8	1112	397	-0,9	{ — —	9 9	— —	— —	— —	38 38	— —	
58	1,7	↓	31	3,3	1335	410	+1,9	{ II — —	3 3 6	— — —	— — —	— — —	47 46 53	— — —	
	—	↑	31	3,3	1087	331	-1,5	{ — —	6 6	— —	— —	— —	50 50	— —	
59	1,7	↓	92	3,4	} Funken am Elektrometer.		+1,9	{ II —	3 6	— —	— —	— —	70 67	— —	Verdoppelung sichtbar.
	—	↑	92	3,2			-1,5	{ — —	6 6	— —	— —	— —	— —	63 63	
60	1,6	↓	160	2,4	} Funken am Elektrometer.		+1,1	{ II —	4 6	— —	— —	— —	63 61	— —	
	—	↑	160	2,0			-0,8	{ — —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
58	3,8	↓	13	8,0	937	118	+4,1	{ II — —	3 3 5	— — —	— — —	— — —	54 52 55	— — —	
	—	↑	13	8,1	1021	127	-4,1	{ — —	5 5	— —	— —	— —	56 56	— —	
61	3,8	↓	26	8,8	951	108	+5,9	{ II —	4 4	0,029 29	0,026 31	0,017 16	71 76	0,022 23	
	—	↑	26	7,8	663	85	-3,3	{ — —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	
58	3,7	↓	47	8,8	1109	125	+5,8	{ II —	3 3	29 30	30 —	16 —	76 78	23 —	
	—	↑	47	8,9	1103	124	-5,5	{ — —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	
59	3,6	↓	117	8,7	} Funken am Elektrometer.		+5,5	{ II — —	2 <sup>1/2</sup> 2 <sup>1/2</sup> 2	33 — 37	38 — 42	25 — 29	95 92 107	30 — 34	
	—	↑	117	8,4			-5,2	{ — —	2 2	36 34	39 39	109 109	37 37	— —	
60	3,6	↓	205	8,0	} Funken am Elektrometer.		+5,2	{ II — —	1 <sup>1/2</sup> 2 2 <sup>1/2</sup>	— — —	— — —	— — —	105 99 98	— — —	} Die Verdoppelung ist vorhanden, ab wegen d. Verschommenheit der Linie tritt dieselbe nicht besonders deutlich hervor
	—	↑	205	7,6			-4,7	{ — —	2 <sup>1/2</sup> 2 <sup>1/2</sup>	— —	— —	— —	— —	97 97	
59	3,5	↓	432	7,4	} Funken am Elektrometer.		—	{ II —	1 1	— —	— —	— —	116 116	— —	Sehr verwaschen.

Der Widerstand dieses Rohres ergab sich grösser, als der des früheren, und die Schleifenbildung trat erst nur bei grösseren Stromstärken hervor. Die Linien waren wohl nach beiden Seiten gewölbt, aber zwischen den Linienästen war in den meisten Fällen kein dunkler Raum zu sehen, sodass nur die totale äussere Breite der Linie  $\Delta'$  gemessen werden konnte. Erst für grössere Stromstärken konnten  $\delta\lambda$ ,  $\Delta_a$ ,  $\Delta_b$  und  $\Delta''$  bestimmt werden. Bei grösseren Drucken und Stromstärken war die Potentialdifferenz an den Elektroden dermaassen gross, dass sie nicht mehr mit unserem Elektrometer gemessen werden konnte, da zwischen den Quadranten Funken überzuspringen angingen.

Aus den Zahlen dieser Tabelle lässt sich sofort folgern, dass die Aenderung der Expositionsdauer zwischen ziemlich weiten Grenzen im Allgemeinen einen sehr geringen Einfluss auf die zu messenden Grössen hat. Durch Aenderung der Expositionszeit werden die Linien mehr oder weniger deutlich, aber die Breite derselben bleibt fast unveränderlich.

Die Breiten der Linienäste ( $\Delta_a$  und  $\Delta_b$ ) können als gleich angenommen werden.

Die äussere Breite  $\Delta'$  wird mit wachsendem Drucke und Stromstärke immer grösser.  $\delta\lambda$  nimmt ebenfalls mit wachsendem Drucke zu.

Vergleicht man diese Werthe von  $\Delta'$  und  $\delta\lambda$  mit denjenigen, welche der zweiten Beobachtungsreihe entsprechen (Tabelle XIV), so erkennt man, dass in diesem Falle  $\Delta'$  und  $\delta\lambda$  kleiner ausfallen. Dies mag erstens davon herrühren, dass die leuchtende Funkenstrecke jetzt kürzer war, aber auch zweitens, weil der Gesamtwiderstand des Rohres, wegen der grösseren Entfernung der Elektroden, grösser als früher sich ergab<sup>1)</sup>. Dieser grössere Widerstand hindert augenscheinlich die Ausbildung der Schleife.

Aus diesem Grunde wurde das Beobachtungsrohr umgemacht und zwar Quecksilber in den weiteren verticalen Schenkeln zugegossen, sodass die Quecksilberkuppen ganz nah an den Oeffnungen des engen horizontalen Rohres  $AB$  zu stehen kamen. Die Länge dieser leuchtenden Funkenstrecke  $AB$  betrug jetzt  $18\frac{m}{m}$ ; der innere Durchmesser  $d$  war wiederum  $2,0\frac{m}{m}$ .

In diesem Fall ergab sich der mittlere Widerstand  $R_m$ <sup>2)</sup> bedeutend kleiner und, obgleich die leuchtende Funkenstrecke etwa dieselbe Länge hatte und sogar etwas kürzer war ( $18\frac{m}{m}$  statt  $22\frac{m}{m}$ ), trat die schleifenartige Verdoppelung der Linie viel deutlicher hervor. Die entsprechenden Zahlenangaben, nebst electricischen Messungen, sind in der folgenden Tabelle XXIX zusammengestellt.

1) Man vergleiche die electricischen Messungen bei der zweiten Beobachtungsreihe.

2) Siehe die folgende Tabelle XXIX.

Tabelle XXIX.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Commutator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp.-Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
62	0,8 Amp.	↓	4 <sup>m/m</sup>	1,6 M. A.	473 V.	301 $\Omega$	+0,8 M. A.	{ III —	30 <sup>m</sup>	—	—	—	0,048	—	} Verdoppelung un- sichtbar.
	—	↑	4	1,6	548	354	+0,1		30	—	—	—	47	—	
63	0,8	↓	74	1,8	515	291	+1,2	{ III — — —	6	—	—	—	78	—	} Die Verdoppelung ist vorhanden, aber sie tritt nicht besond. deutlich hervor.
	—	↑	74	1,7	398	241	-0,9		6	—	—	—	80	—	
									10	—	—	—	84	—	
									10	—	—	—	90	—	
62	2,0	↓	4	3,5	632	179	+1,9	{ III —	20	—	—	—	47	—	} Verdoppelung un- sichtbar.
	—	↑	4	3,3	432	130	Variabel.		20	—	—	—	48	—	
63	2,0	↓	80	4,0	546	138	+2,5	{ III —	5	0,035	0,034	0,018	87	0,026	
	—	↑	80	3,7	387	104	-2,3		5	31	33	24	88	28	
62	3,9	↓	15	8,3	561	67	+4,4	{ III —	10	22	21	17	60	19	
	—	↑	15	8,7	797	92	+1,9 (!)		10	23	19	17	59	19	
63	4,1	↓	96	{ 7,4 9,6	{ 337 646	{ 46 67	{ +1,1 +7,3	{ III —	2 <sup>1/2</sup>	33	32	36	101	34	} Alle elektr. Data ha- bensich plötzl. ver- grössert. Möglich- weise der Einfluss von Quecksilber- tropfen.
	—	↑	96	{ 7,6 327	{ 43 43	{ -1,3 —	2 <sup>1/2</sup>		36	33	29	97	31		
63	0,8	↓	4	1,4	673	474	+0,3								
	—	↑	4	1,4	597	430	-0,1								
	2,0	↓	5	3,4	478	140	+1,6								
—	↑	5	3,2	473	150	+0,8 (!)									
	3,9	↓	6	7,4	460	62	+2,2								
—	↑	6	7,3	438	60	+1,2 (!)									

Die Aufnahmen wurden nicht genügend ausexponiert.

Ein Vergleich der Zahlen der Tabellen XXVIII und XXIX zeigt, dass bei derselben mittleren Stromstärke  $J$  (oder  $i_1$ ), die Potentialdifferenz an den Elektroden, so wie auch der mittlere Widerstand  $R_m$ , in jetzigem Falle bedeutend kleiner ausfallen.

Für kleinere Werthe von  $J$  ist in diesem Fall  $\Delta'$  grösser als früher, für grössere dagegen ist der Unterschied in den Werthen von  $\Delta'$  ganz unbedeutend.

$\Delta'$  und  $\delta\lambda$  nehmen mit wachsendem  $p$  und  $J$  zu.

$\Delta_a$  ist ebenfalls gleich  $\Delta_b$ .

Bei diesem Rohr mit kleinerem Widerstand tritt die Schleife schon bei kleineren Stromstärken zum Vorschein.

Um die vorliegende Frage noch weiter aufzuklären, wurde noch ein drittes Rohr gefertigt, wo die Länge der leuchtenden Funkenstrecke etwa bis  $6\frac{m}{m}$  verkürzt wurde. Die Queksilberkuppen befanden sich, wie beim zweiten Rohr, ganz dicht an den Röhrenöffnungen des Rohres *AB*. Dieses letztere hatte keinen gleichmässigen Querschnitt; im engsten Theil desselben war  $d = 1,2\frac{m}{m}$ .

Trotz der erheblichen Kürze der Funkenstrecke ( $6\frac{m}{m}$ ) war die Schleife noch ganz deutlich sichtbar; speciell bei visueller Betrachtung ergab sich dieselbe sehr schön ausgebildet. Die photographischen Aufnahmen hatten jedoch einen verwaschenen Charakter, so dass  $\delta\lambda$  nicht gemessen werden konnte und man sich nur mit der Ausmessung von  $\Delta'$  begnügte.

Die entsprechenden Zahlen sind in der Tabelle XXX angegeben.

Tabelle XXX.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Communtator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp.-Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
64 u. 65	0,9 Amp.	↓	$7\frac{m}{m}$	1,8 M.A.	462 V.	262 $\Omega$	+0,5 M.A.	{ III	20 <sup>m</sup>	—	—	—	0,037	—	
		↑	7	1,6	507	313	-0,5	{ —	20	—	—	—	38	—	
65	0,9	↓	106	1,5	683	446	+0,7	{ III	6	—	—	—	62	—	
		↑	106	1,4	683	481	-0,6	{ —	6	—	—	—	61	—	
64	0,9	↓	134	1,7	648	386	+1,0	{ III	8	—	—	—	59	—	
		↑	134	1,5	626	409	-0,8	{ —	8	—	—	—	67	—	
64 u. 65	1,9	↓	9	3,6	510	141	+1,8	{ III	10	—	—	—	48	—	
		↑	9	3,6	547	151	-1,7	{ —	10	—	—	—	50	—	
65	1,7	↓	131	3,4	563	168	+2,1	{ III	3	—	—	—	60	—	
		↑	131	3,2	594	188	-2,0	{ —	3	—	—	—	61	—	
64	2,0	↓	146	4,1	516	126	+2,5	{ III	5	—	—	—	69	—	} Ränder unscharf.
		↑	146	4,0	605	152	-2,5	{ —	5	—	—	—	67	—	
64 u. 65	3,9	↓	10	7,5	356	48	+1,0	{ III	5	—	—	—	56	—	
		↑	10	7,4	376	51	-0,3	{ —	5	—	—	—	55	—	
65	3,4	↓	148	8,3	617	75	+5,7	{ III	1	—	—	—	75	—	
		↑	148	6,5	428	66	-1,4	{ —	1	—	—	—	76	—	
64	3,9	↓	170	7,5	428	57	+1,5	{ III	2	—	—	—	92	—	} Ueberexponiert. Spuren einer Verdoppelung sichtbar.
		↑	170	7,6	385	51	-1,4	{ —	2	—	—	—	88	—	

In diesem Falle nähern sich die Werthe von  $\Delta'$  für dieselben Werthe von  $J$  und  $p$  denjenigen der Tabelle XXVIII trotz dem grossen Unterschiede in den Werthen von  $V_1 - V_2$  und  $R_m$ .

Dieses alles lässt sich fürs Erste kurz so zusammenfassen, dass die Ausbildung der Schleife durch folgende Umstände begünstigt wird: 1) Verkleinerung des mittleren Gesamtwiderstandes des Rohres, 2) Verlängerung der leuchtenden Funkenstrecke, 3) Vermehrung des Druckes, 4) Vermehrung der mittleren Stromstärke.

Aber auch bei ganz kurzen leuchtenden Funkenstrecken, wo also die Dicke der leuchtenden Schicht sehr klein ist, tritt eine Verdoppelung der grünen Linie mit Schleifenbildung noch recht deutlich hervor.

Eine Aufnahme mit den beiden gelben Linien bei  $p = 26 \frac{m}{m}$ ,  $i_1 = 3,8$  Amp.,  $J = 8,8$  M. A.,  $R_m \cdot 10^{-3} = 108 \Omega$  (Platte № 61) ergab durchaus keine Verdoppelung. Die äusseren Ränder der Linien waren auch nicht gewölbt, wie bei der grünen Linie, und sahen fast geradlinig aus.

Wollen wir zum Schluss die electricischen Messungen an diesen drei Röhren einer kurzen Besprechung unterziehen.

Die Tabelle XXVIII lehrt uns, dass für dieselbe mittlere Stromstärke  $J$  und für dieselbe Stellung des Commutators ( $V_1 - V_2$ ) und  $R_m$  im Allgemeinen mit wachsendem Drucke  $p$  zunehmen. Für denselben Druck nimmt ( $V_1 - V_2$ ) ein wenig und  $R_m$  sehr erheblich mit wachsendem  $J$  ab. Dies alles ist in voller Uebereinstimmung mit den früher besprochenen electricischen Messungen.

Bei der zweiten Stellung des Commutators ( $\downarrow$ ), wo also die Anode sich bei  $E$  befindet (siehe die Fig. 2), scheint  $R_m$  etwas kleiner zu sein. Der Reststrom  $j$  bei beiden Stellungen des Commutators hat im Allgemeinen, seiner absoluten Grösse nach, ungefähr denselben Werth, speciell für grössere Werthe von  $p$ , wo also eine etwaige Destillation des Quecksilbers sich weniger geltend machen kann. Die Richtung dieses Stromes hängt unmittelbar von der Lage des Commutators ab: bei der ersten Lage geht der Reststrom von  $A$  nach  $B$  und bei der zweiten in entgegengesetzter Richtung.

Für denselben Werth von  $J$  ist  $j$  fast unabhängig vom Druck, dagegen für denselben Druck nimmt  $j$  mit  $J$  zugleich zu.

Die Zahlen der Tabelle XXIX, welche dem Fall entsprechen, wo die Quecksilberkuppen dicht an den Oeffnungen des Rohres  $AB$  sich befanden, haben durchaus keinen so regelmässigen Gang. Es trat sogar in einem Fall eine plötzliche Vermehrung aller electricischen Grössen ein.

$R_m$  nimmt ohne Zweifel mit wachsendem  $J$  ab, aber seine Abhängigkeit vom Druck ist nicht so ausgeprägt. Die Werthe von  $j$  weisen auch Eigenthümlichkeiten auf. Nämlich, bei der zweiten Lage des Commutators war früher  $j$  immer negativ, jetzt aber kommen

Fälle vor, wo  $j$  nicht nur sehr variabel, sondern sogar positiv wird. Es scheint also, als ob eine Ursache vorhanden wäre, welche den Stromgang von  $B$  nach  $A$  verhinderte, und es ergab sich in der That, wie directe Beobachtungen mit einem Kathetometer es gezeigt haben, eine ziemlich starke Destillation des Quecksilbers von  $F$  nach  $E$ , also in der Richtung von  $A$  nach  $B$ . Eine solche Destillation hat augenscheinlich einen ziemlich erheblichen Einfluss auf die verschiedenen electricen Data.

Die absoluten Werthe von  $R_m$  sind unter denselben Bedingungen beim zweiten Rohr erheblich kleiner, als beim ersten, was auch a priori zu erwarten war.

Was nun die electricen Messungen am dritten, ganz kurzen Rohr anbelangt (siehe die Tabelle XXX), so ergibt sich, dass die Widerstände beider Röhren nicht so sehr von einander abweichen, obgleich in diesem Fall die leuchtende Funkenstrecke etwa 3 Mal kürzer war, als beim zweiten Rohr. Freilich sind die Querschnittsverhältnisse beider Röhren nicht ganz identisch, was aber beachtenswerth bleibt, ist der Umstand, dass eine so kurze leuchtende Funkenstrecke von etwa  $6 \frac{m}{m}$  Länge doch einen so enorm grossen Widerstand besitzt.

Für dieselbe Stromstärke  $J$  nehmen ( $V_1 - V_2$ ) und  $R_m$  mit wachsendem Drucke ebenfalls zu, aber nach den Zahlen dieser Tabelle scheinbar nur bis zu einer gewissen Grenze, um bei weiterer Drucksteigerung etwas abzunehmen; freilich ist dieser Vorgang nicht sehr deutlich ausgeprägt. Der Reststrom  $j$  ändert seine Richtung mit Umlegung des Commutators, wobei die absoluten Werthe von  $j$  bei beiden Lagen des Commutators in den meisten Fällen ziemlich gleich ausfallen.

## § 7.

**Vierte Beobachtungsreihe mit einem Quarzrohr.**

Um die Verbreiterung der Quecksilberlinien, sowie die Ausbildung der schleifenartigen Verdoppelung derselben bei noch höheren Temperaturen, folglich bei höheren Drucken, verfolgen zu können, wurde eine Reihe von Beobachtungen mit einem besonderen Quarzrohr angestellt, welches speciell von der Firma Heraeus in Hanau verfertigt wurde. Das Rohr hatte die Form desjenigen der Fig. 2, nur waren die nach unten gehenden engen Ansatzstücke offen. Dieselben wurden mit Hülfe von Gyps und Quecksilberschlüssen mit gewöhnlichen Glasröhren verbunden, in welchen die Platinelektroden eingeschmolzen waren. Einer von diesen Schenkeln wurde in üblicher Weise mit einem geschlossenen Luftmanometer versehen. Die Elektroden, sowie das Manometer, tauchten in Gefäße mit Wasser, um an den Verbundstellen zwischen Quarz und Glas eine niedrige Temperatur zu erhalten.

Die Länge der leuchtenden Funkenstrecke  $AB$  (siehe die Fig. 2) betrug  $55^m/m$ , der innere Durchmesser desselben etwa  $1,5 - 2,0^m/m$ , der innere Durchmesser der verticalen breiten Schenkel  $1,5$  cm. und die Entfernung der Quecksilberkuppen  $F$  und  $E$  von den Röhrenöffnungen  $A$  und  $B$  bei einer Serie von Beobachtungen (Serie A) etwa  $2$  cm. und bei einer anderen (Serie B) etwa  $\frac{3}{4}$  cm.

Die Aufnahmen erfolgten bei einer Lage des Rohres, wo  $AB$  gegen den Spalt gerichtet war. Als Ergänzung wurde noch dazu eine Anzahl von Aufnahmen erhalten, wo die leuchtende Funkenstrecke mittelst eines darüber stehenden total reflectierenden Prismas parallel auf den Spalt projiciert wurde.

Die Serie A bezog sich auf die grüne und indigo-blaue Linie, während bei der Serie B nur die grüne Linie untersucht wurde.

Bei diesen Aufnahmen wurden zugleich auch die entsprechenden electricen Data notiert.

Die entsprechenden Zahlenangaben sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Sie entsprechen einer mittleren Unterbrechungszahl  $n = 83$  pro Secunde. Alle Zahlen für die Wellenlängen sind, wie früher, auf eine Einheit der dritten Decimale abgerundet worden.

## Serie A.

Tabelle XXXI.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Commutator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1-V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp.-Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
66	0,8 A.	↓	6 <sup>m/m</sup>	1,6 M. A.	444 V.	276 Ω	-0,3 M. A.	{ IV-V	20 <sup>m</sup>	0,025	0,023	0,014	0,062	0,019	
	—	↑	6	1,6	397	241	-0,8	{ —							
67 u. 67'	0,8	↓	24	1,4	577	415	+0,2	{ IV-V	4	27	—	—	77	—	
	—	↑	24	1,3	547	411	-0,5	{ —	5	31	28	15	75	23	
68	0,8	↓	138	1,4	1492	1074	+0,3	{ IV-V	2	—	—	—	62	—	Nicht ausexponiert. Nur Anschwellung zu sehen.
	—	↑	138	1,4	1511	1049	-0,3	{ —	5	—	—	—	58	—	
66	1,7	↓	8	3,5	467	134	-1,2	{ IV-V	9	33	24	17	74	23	
	—	↑	8	3,2	428	132	-1,9	{ —							
67 u. 67'	1,8	↓	32	2,9	501	175	+0,6	{ IV-V	2	28	31	37	97	34	{ Sehr deutl. Schleife. } Lauter getrennte Aufnahmen.
	—	↑	32	3,2	523	166	-1,7	{ —	2	33	28	32	93	30	
								{ —	2	34	30	29	93	31	
68	2,0	↓	149	3,6	1059	297	+2,0	{ IV-V	2	—	—	—	97	—	{ Undeutlich. Spuren einer Schleife; im Inneren derselben Licht.
	—	↑	149	3,5	910	264	-1,7	{ —							
69	1,7	↓	360	3,1	} Funken am Elektrometer.		+1,4	{ IV-V	2	—	—	—	91	—	{ Unsicher, wegen Undeutlichkeit.
	—	↑	360	3,1			-1,3	{ —	3	—	—	—	82	—	
66	3,8	↓	9	7,4	483	66	-2,2	{ IV-V	4	26	27	26	79	26	
	—	↑	9	7,7	441	57	-2,3	{ —							
67 u. 67'	3,5	↓	37	6,1	481	79	-0,5	{ IV-V	1	30	25	39	94	33	} Getrennte Aufnahmen.
	—	↑	37	7,0	520	74	-3,0	{ —	1	29	31	37	97	33	
68	3,7	↓	202	8,9	1101	124	+5,7	{ IV-V	1	46	42	48	136	46	Ziemlich undeutlich.
	—	↑	202	8,8	854	97	-4,4	{ —							
69	3,6	↓	450	8,3	1379	167	+5,3	{ IV-V	2	—	—	—	131	—	{ Sehr verwaschen; die Linie rückt an d. näheren Begleiter an. In d. Mitte d. Linie, dort, wo d. Schleife zu erwarten war, ist die Linie weniger intensiv.
	—	↑	450	8,2	Funken am Elektrometer.		-4,7	{ —							



Die folgende Tabelle XXXII giebt die entsprechenden Werthe für die indigo-blaue Linie. Da beide Linien auf den photographischen Platten nach einander photographiert wurden, so sind die entsprechenden electricischen Data dieselben, wie bei der grünen Linie. Infolgedessen begnügen wir uns hier nur mit der Anführung von  $\pm J$ .

Tabelle XXXII.

Indigo-blaue Linie ( $\lambda=4358$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$p$	$\pm J$	Ordnung des Spectr.	Exp.- Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
66	$6\frac{m}{m}$	1,6 M.A.	IV-V	$25^m$	—	—	—	0,044	—	
67 u. 67'	24	1,4	IV-V —	6	0,024	0,022	0,019	64	0,021	
				9	22	21	22	65	22	
68	138	1,4	IV-V	9	—	—	—	45	—	
66	8	3,5	IV-V	11	18	20	12	50	16	Undeutlich.
67 u. 67'	32	2,9	IV-V —	3	28	27	26	80	26	Undeutlich.
				5	25	27	26	78	26	
68	149	3,6	IV-V	5	} Verwaschen und mit den nahe stehenden Begleitern vereinigt. Die Ränder der eigentlichen Linie lassen sich nicht feststellen. Schleife unsichtbar.					
69	360	3,1	IV-V	5						
66	9	7,4	IV-V	5	17	20	14	51	16	
67 u. 67'	37	6,1	IV-V —	$1\frac{1}{2}$	25	33	31	90	30	
				2	30	27	29	86	29	
68	202	8,9	IV-V	2	} Verwaschen und mit den nahe stehenden Begleitern vereinigt. Die Ränder der eigentlichen Linie lassen sich nicht feststellen. Schleife unsichtbar.					
69	450	8,3	IV-V	3						

Die zwei folgenden Tabellen XXXIII und XXXIV entsprechen dem Fall, wo die Funkenstrecke parallel auf den Spalt projectiert wurde.

Tabelle XXXIII.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Comman- tator.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1-V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp.- Zeit.	$\Delta'$	Bemerkungen.
70 u. 70'	0,8 A.	↓	$5^m/m$	1,6 M.A.	545 V.	349 $\Omega$	-0,5 M.A.	{ IV-V — —	$10^m$ 20 12	0,032 35 25	
	—	↑	5	1,6	470	301	-0,8				
71 u. 71'	0,8	↓	33	1,5	548	356	0	{ IV-V — —	$6^{1/2}$ 3 6	39 34 40	
	—	↑	33	1,5	516	333	-0,6				
72	0,8	↓	146	1,6	914	590	+0,3	IV-V	4	51	
	—	↑	146	1,5	1059	725	0				
70 u. 70'	1,9	↓	7	3,4	576	172	-1,5	{ IV-V — —	6 9 6	34 37 29	
	—	↑	7	3,7	509	139	-2,0				
71 u. 71'	1,7	↓	34	2,6	511	199	-0,2	{ IV-V — —	3 2 4	49 37 43	
	—	↑	34	3,1	548	177	-1,6				
72	1,9	↓	164	3,6	854	240	+2,0	IV-V	2	57	
	—	↑	164	3,4	921	269	-1,6				
72	1,9	↓	496	3,0	Funken am Elektrometer.		+1,2 -0,9	IV-V	2	77	Rother Rand undeutlich. Abstufung.
	—	↑	496	3,0							
70 u. 70'	3,8	↓	14	7,4	522	70	-2,6	{ IV-V — —	3 5 2	39 46 31	
	—	↑	14	8,0	491	62	-3,3				
71 u. 71'	3,4	↓	49	6,0	497	83	-0,8	{ IV-V — —	1 1 2	50 40 48	
	—	↑	49	6,8	517	76	-3,0				
72 u. 73	3,7	↓	205	8,5	873	102	+4,8	{ IV-V V V	$3/4$ 5 5	66 68 61	
	—	↑	205	7,8	815	105	-4,9				
72 u. 73	3,5	↓	599	8,1	Funken am Elektrometer.		+5,1 -4,8	{ IV-V V V V	1 4 4 5 5	83 81 83 68 70	Der Begleiter $B_0$ kaum sichtbar. An- dere Begleiter sind schon mit dem hellen Hintergrund vereinigt.
	—	↑	599	8,4							
74	3,1	↓	1305	6,7	Funken am Elektrometer.		+4,2 -4,0	{ II II I-II I	5 5 6 3	93 80 66 71	Die Linie ist verdoppelt. Herumschwache Streifen. Die Hauptlinie vereinigt sich fast mit den neben stehenden Begleitern.
	—	↑	1305	6,7							
73	3,1	↓	1390	6,4	Funken am Elektrometer.		+3,9 -3,7	{ V V II I-II V	5 5 3 2 5	91 84 64 96 101	(!)
	—	↑	1390	6,4							
75	2,9	↓	1860	—	—	—	—	{ II II	$3^{1/2}$ $3^{1/2}$	74 108	Rother Rand sehr unscharf; violetter Rand noch ziemlich deutlich.

Tabelle XXXIV.

Indigo-blaue Linie ( $\lambda = 4358$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

Platte.	$p$	$\pm J$	Ordnung des Spectrums.	Exp.-Zeit.	$\Delta'$	Bemerkungen.
70 u. 70'	$5^m/m$	1,6 M. A.	{ IV-V —	$30^m$ 45	0,024 21	
71 u. 71'	33	1,5	{ IV-V —	25 18	28 23	
72	146	1,6	IV-V	16	42	Undeutliche Ränder.
70 u. 70'	7	3,4	{ IV-V — —	9 13 21	23 25 22	
71 u. 71'	34	2,6	{ IV-V — —	9 6 12	34 23 27	
72	164	3,6	IV-V	7	46	
72	496	3,0	IV-V	5	55	Rother Rand sehr undeutlich.
70 u. 70'	14	7,4	{ IV-V — —	5 8 8	28 27 26	
71 u. 71'	49	6,0	{ IV-V — —	4 3 5	39 32 33	
72 u. 73	205	8,5	{ IV-V V V	3 20 20	50 57 49	
72 u. 73	599	8,1	{ IV-V V V	$21\frac{1}{2}$ 20 20	66 61 53	Rother Rand sehr undeutlich.
73	1390	6,4	V	20	57	Rother Rand sehr undeutlich. Messungen sehr unsicher.

## Serie B.

Bei dieser Serie wurde nur die grüne Linie photographiert. Bei der Tabelle XXXV war die Funkenstrecke  $\perp$  und bei der Tabelle XXXVI parallel zum Spalt.

Tabelle XXXV.

Grüne Linie, ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Comm.-faktor.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp.-Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
76	0,8 A.	↓	7 <sup>m/m</sup>	1,7 M.A.	474 V.	279 Ω	-0,8 M.A.	{ IV-V	5 <sup>m</sup>	0,021	0,021	0,019	0,061	0,020	
	—	↑	7	1,6	440	273	-0,8	{ —	10	20	20	25	65	22	
77	0,8	↓	40	1,7	436	264	+0,5	{ IV-V	2	31	22	36	90	31	
	—	↑	40	1,7	497	296	-0,8	{ —	5	34	29	30	92	30	
76	2,0	↓	8	3,4	484	144	-1,3	{ IV-V	2	25	24	24	73	24	Sehr schwache Platte. Sehr deutliche Schleife.
	—	↑	8	3,7	473	128	-2,0	{ —	4	26	26	20	71	23	
77	2,0	↓	45	3,3	427	131	+0,9	{ IV-V	1	39	35	30	105	34	Etwas undeutlich.
	—	↑	45	3,5	432	125	-1,4	{ —	2	35	33	38	106	36	
78	1,9	↓	294	3,2	} Funken am Elektrometer.		+1,6	{ IV-V	1	—	—	—	63	—	} Schleife unsichtbar. Ränder sehr unscharf.
	—	↑	294	3,0			-1,6	{ —	2	—	—	—	58	—	
76	3,8	↓	12	7,4	476	64	-1,5	{ IV-V	1	27	26	23	77	25	
	—	↑	12	7,6	483	64	-2,3	{ —	2	25	28	29	83	28	
77	3,8	↓	61	7,1	497	70	+0,5	{ IV-V	1/2	38	34	47	119	41	
	—	↑	61	7,6	447	59	-1,7	{ —	1	35	33	43	111	38	
78	3,3	↓	352	8,0	} Funken am Elektrometer.		+5,2	{ IV-V	1	—	—	—	67	—	
	—	↑	352	8,6			-5,5	{ —	2	—	—	—	58	—	

Tabelle XXXVI.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\parallel$  zum Spalt.

Platte.	$p$	$\pm J$	Ordnung des Spectrums.	Exp.-Zeit.	$\Delta'$	Bemerkungen.
79	$7'''/m$	1,7 M. A.	{ IV-V —	$8'''$ 15	0,029 29	Viol. Rand viel schärfer als der rothe.
80	40	1,7	{ IV-V —	4 7	34 39	
79	8	3,4	{ IV-V — —	3 6 10	31 35 40	Schwache Aufnahme.
80	45	3,3	{ IV-V —	2 4	38 38	
81	294 (ungefähr)	3,2	{ IV-V — —	1 2 4	47 47 46	Schwach.
79	12	7,4	{ IV-V — —	1 2 4	35 39 46	
80	61	7,1	{ IV-V — —	$3\frac{3}{4}$ $11\frac{1}{2}$ $21\frac{1}{2}$	40 42 43	Schwach.
81	352	8,0	{ IV-V —	$11\frac{1}{2}$ $21\frac{1}{2}$	50 53	

Wollen wir nun die Zahlen dieser Tabelle etwas näher betrachten.

Erstens lässt sich schliessen, dass eine Aenderung der Expositionsdauer zwischen ziemlich weiten Grenzen im Allgemeinen die Breite der zu messenden Grössen wenig beeinflusst. Die Abweichungen der einzelnen Zahlen von einander werden wohl meistens durch die unvermeidlichen Versuchsfehler bei diesen Messungen verursacht.

Die Breiten  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  beider Linienäste können als gleich angesehen werden, wobei  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$ , so wie auch  $\Delta''$  mit wachsendem Druck  $p$  und wachsender mittlerer Stromstärke  $J$  allmählig zunehmen.

Die Verschiebung  $\delta\lambda$  der Mitte beider Linienäste von der Symmetrieaxe der Schleife nimmt ebenfalls mit wachsendem Drucke und Stromstärke zu, aber für kleine Werthe von  $p$  ist die Abhängigkeit von  $J$  gar nicht ausgeprägt. Für die höchsten Drucke haben die Linien ein solches verwaschenes Aussehen, dass  $\delta\lambda$  nicht mehr gemessen werden konnte. Vergleicht man die Werthe von  $\delta\lambda$  aus den Tabellen XXXI, XXXII und XXXV mit den früher gefundenen aus den Tabellen XIV und XVI, so ergibt sich im Allgemeinen eine recht befriedigende Uebereinstimmung zwischen den einzelnen Zahlen. Dieselbe Bemerkung bezieht sich ebenfalls auch auf die Werthe von  $\Delta'$ .

Diese Grösse nimmt unzweifelhaft mit wachsender Stromstärke zu. Was nun die Abhängigkeit von  $\Delta'$  vom Drucke  $p$  (bei  $\perp$  Lage des Geisslerrohrs) anbelangt, so nimmt  $\Delta'$  am Anfang mit wachsendem Drucke zu. Bei den höchsten Drucken scheint  $\Delta'$  wiederum etwas kleiner zu werden; ob das wirklich der Fall ist, oder ob diese scheinbare Abnahme von  $\Delta'$  bei sehr hohen Drucken nur eine Folge der Ungenauigkeit der Messungen ist, wo die Ränder der Linienäste sehr unscharf sind und sogar zuweilen mit den nebenstehenden Begleitern sich vereinigen, mag einstweilen unentschieden bleiben. Die zweite Vermuthung scheint jedoch eine viel plausiblere zu sein.

Vergleichen wir noch die Werthe von  $\Delta'$  bei  $\perp$  und  $\parallel$  Lage der Funkenstrecke zum Spalt, so sehen wir, dass im ersten Falle  $\Delta'$  bei niedrigen Drucken für die grüne Linie etwa zwei Mal grösser ausfällt; bei der indigo-blauen Linie ist dieses Verhältniss noch grösser. Erst für höhere Drucke wird das Verhältniss  $\frac{\Delta'_{\perp}}{\Delta'_{\parallel}}$  kleiner.

Erwägt man noch dabei, dass die Linienbreite  $\Delta'$  bei der parallelen Lage der Funkenstrecke in den meisten Fällen nur ein wenig breiter als  $\Delta_a$  und  $\Delta_b$  ausfällt, so wird man wohl geneigt sein anzunehmen, dass die Schleifenbildung bei senkrechter Lage der Funkenstrecke nicht auf eine etwaige Umkehrung der Linie zurückzuführen ist, sondern, dass wir hier mit einer wirklichen Trennung der Linie in zwei getrennte und zugleich nach beiden Seiten verschobene Äste zu thun haben. Erst bei sehr hohen Drucken wird die eigentliche Verbreiterung der Linie so gross, dass diese Trennung nicht mehr zum Vorschein kommt, und es ergibt sich in der That, dass bei sehr hohen Drucken (etwa  $p > 1300^m/m$ ) die grüne und indigo-blaue Linie denselben Charakter annehmen, wie die gelben Linien bei viel niedrigeren Drucken. Es bilden sich noch dabei bei paralleler Lage der Funkenstrecke auf dem nebenliegenden Hintergrund die eigenthümlichen, scheinbar aequidistanten Streifen, von welchen bei den gelben Linien schon früher die Rede war. Auf diese Frage werden wir gleich nochmals zurückkommen.

Wollen wir jetzt die Zahlen der Tabellen XXXIII, XXXIV und XXXVI benutzen, um die Abhängigkeit der Linienbreite (bei paralleler Lage der Funkenstrecke) vom Drucke  $p$  auszurechnen. Dabei wollen wir wie früher dieselbe Formel

$$\Delta = \Delta_0 e^{\alpha p}$$

zu Grunde legen<sup>1)</sup> und  $\Delta_0$  und  $\alpha$  aus den entsprechenden Zahlenangaben nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen. Die Werthe von  $\Delta'$  für hohe Drucke ( $p > 205^m/m$ ) wollen wir wegen ihrer Unsicherheit ganz ausser Acht lassen.

Es ergeben sich nun folgende Zahlenwerthe:

Grüne Linie.

$i_1$	$\Delta_0$	$\alpha$	Im Mittel
0,8 Amp.	0,031 Ä. E.	0,0036	} $\alpha = 0,0031$
1,9	0,034	0,0032	
3,7	0,038	0,0026	

Indigo-blaue Linie.

$i_1$	$\Delta_0$	$\alpha$	Im Mittel
0,8 Amp.	0,023 Ä. E.	0,0043	} $\alpha = 0,0043$
1,8	0,020	0,0053	
3,6	0,028	0,0032	

Wir sehen, dass auch hier  $\Delta_0$  mit wachsender Stromstärke etwas zunimmt.

Was nun  $\alpha$  anbelangt, so sind die hier berechneten Werthe, welche, wegen der Ungenauigkeit solcher Messungen nur als erste Annäherung zu betrachten sind, durchaus grösser, als bei der ersten und zweiten Beobachtungsreihe. Die Länge des leuchtenden Kanals war in allen Fällen ungefähr dieselbe, aber bei dieser letzten Beobachtungsreihe war der innere Durchmesser des engen Kanales kleiner. Nun haben wir aber früher gezeigt<sup>2)</sup>, dass unter gewissen Bedingungen eine Verjüngerung des leuchtenden Kanals die Verbreiterung der Linien begünstigt; infolgedessen war in diesem Fall ein grösserer Werth von  $\alpha$  auch a priori zu erwarten.

Bei sehr hohen Drucken ( $p > 1300^m/m$ ) und bei paralleler Lage der Funkenstrecke zum Spalt weisen die grüne und indigo-blaue Linie dieselben eigenthümlichen, fast aequidistanten Streifen auf, die bei der ersten gelben Linie ( $\lambda = 5770$ ) schon bei verhältnissmässig niedrigen Drucken ( $p = 37^m/m - 125^m/m$ ) zum Vorschein traten<sup>3)</sup>.

Stellt man nämlich das Echelon in die zweite Hauptlage, wo also zwei Linien benachbarter Ordnung gleich intensiv aussehen, so wird bei hohen Drucken der ganze Raum zwischen diesen zwei Hauptlinien durch einen intensiven hellen Hintergrund ausgefüllt, auf

1) Wir schreiben wiederum  $\Delta$  statt  $\Delta'$ .

2) Siehe. «Spectroscopische Untersuchungen. Zweite Mittheilung». Mémoires de l'Académie Imp. des Sc. de St.-Pétersbourg. VIII Série. Vol. XIX № 9. § 7.

3) Siehe den Schluss des § 3.

welchem die erwähnten Streifen sich kennzeichnen. Die Erscheinung ist durchaus sehr schwach und gar nicht ausgeprägt, infolgedessen kann man keine genauen Messungen durchführen. Trotzdem haben wir, wie bei der ersten gelben Linie, die Entfernung benachbarter Streifen von einander und von den Hauptlinien zu messen versucht.

Die entsprechenden Zahlenangaben mögen weiter folgen.

Diese Messungen sind noch durch den Umstand erschwert, dass bei diesen hohen Drucken die Hauptlinie selbst verdoppelt zu sein scheint. Es bildet sich nämlich in der Mitte der Hauptlinie ein sehr schmaler dunkler Streifen, welcher derselben den Charakter einer Doppellinie verleiht. Eine ähnliche Verdoppelung haben wir auch bei der zweiten gelben Linie ( $\lambda = 5791$ ) bei  $p = 41^m/m$  wahrgenommen<sup>1)</sup>.

Bei Ausmessung der Platten für die indigo-blaue Linie haben wir die Hauptlinie als eine einzige aufgefasst, während bei der grünen in einigen Fällen auch beide Componenten derselben, die wir durch  $a_1$  und  $a_2$  bezeichnen wollen, in Betracht gezogen wurden.

Die mittlere Stromstärke im primären Stromkreis des Inductoriums war bei diesen Aufnahmen etwa 3 Amp.

#### Indigo-blaue Linie.

Ordnung des Spectrums	Platte 73	H. L.	—	$C_1$	—	$C_2$	—	$C_3$	—	H. L.		
V	$p = 1390^m/m$	$\partial\lambda$ {	0,081	0,051	0,066	0,088						
	Platte 74	H. L.	—	$C_1$	—	$C_2$	—	$C_3$	—	$C_4$	—	H. L.
II	$p = 1305^m/m$	$\partial\lambda$ {	0,055	0,060	0,057	0,061	0,053					

Merkwürdigerweise haben wir in einem Fall drei Streifen, im anderen dagegen vier Streifen wahrgenommen. Vielleicht ist im zweiten Falle  $C_4$  nur eine Componente der Hauptlinie. Janicki thut in seiner Abhandlung (l. c.) von diesen Streifen bei der indigo-blauen Linie keine Erwähnung.

Die Lage dieser Streifen entspricht im Allgemeinen nicht der der Trabanten der indigo-blauen Linie.

1) Siehe § 3. Visuelle Messungen.



## Grüne Linie.

Ordnung des Spectrums	Platte		H. L.	—	C <sub>1</sub>	—	C <sub>2</sub>	—	C <sub>3</sub>	—	H. L.	
V	73	$p = 1390^m/m$	$\partial\lambda$ {	0,134		0,102		0,106		0,134		
	74			H. L.	—	C <sub>1</sub>	—	C <sub>2</sub>	—	C <sub>3</sub>	—	$\overbrace{a_1 \text{ — } a_2}^{\text{H. L.}}$
II		$p = 1305$	$\partial\lambda$ {	0,091		0,112		0,110		0,095		—
	74			H. L.	—	C <sub>1</sub>	—	C <sub>2</sub>	—	C <sub>3</sub>	—	$\overbrace{a_1 \text{ — } a_2}^{\text{H. L.}}$
I		$p = 1305$	$\partial\lambda$ {	0,081		0,098		0,112		0,095		0,080
	74			$\overbrace{a_1 \text{ — } a_2}^{\text{H. L.}}$	—	C <sub>1</sub>	—	C <sub>2</sub>	—	C <sub>3</sub>		
I — II		$p = 1305$	$\partial\lambda$ {	0,089		0,087		0,095		0,115		
	75			H. L.	—	C <sub>1</sub>	—	C <sub>2</sub>	—	C <sub>3</sub>	—	H. L.
II		$p = 1860$	$\partial\lambda$ {	0,113		0,132		0,131		0,100		

Bei der grünen Linie haben wir eigentlich nur drei Streifen sehen können; Janicki dagegen spricht von 5 Streifen. Möglicherweise hat er die Componente jeder Hauptlinie als einen besonderen Streifen aufgefasst.

Diese Messungen der Lage der Streifen müssen nur als rohe Annäherung betrachtet werden, hauptsächlich, weil die Erscheinung sehr schwach ausgebildet ist. Das wichtigste dabei, was hervorzuheben ist, bleibt, dass nämlich diese Streifen höchst wahrscheinlich nichts mit den eigentlichen Trabanten der Linien zu thun haben. In Hinsicht dieser Streifenbildung und Verdoppelung der Hauptlinie bei hohen Drucken, weisen die grüne und indigo-blaue Linie dieselben Eigenthümlichkeiten auf, wie die gelben<sup>1)</sup>, da aber die beiden ersten Linien viel widerstandsfähiger gegen eine Druckänderung als die gelben sind, so tritt die Erscheinung bei denselben nur bei beträchtlichen Drucken zum Vorschein, während bei den gelben dieselbe schon bei verhältnissmässig niedrigen Drucken zu erkennen ist.

Bezüglich des Aussehens der grünen und indigo-blauen Linie bei sehr hohen Drucken und paralleler Lage der Funkenstrecke zum Spalt möge noch Folgendes bemerkt werden. Dies ist theilweise eine Ergänzung dessen, was in § 3 über das Aussehen der Linien bei verschiedenen Drucken gesagt worden ist.

1) Eine Verdoppelung wurde eigentlich nur an der zweiten gelben Linie ( $\lambda = 5791$ ) direct beobachtet.

## Grüne Linie.

Bei  $p = 205^m/m$  und  $i_1 = 3,7$  Amp. sind die Trabanten  $B_0$  und  $B_2$  noch deutlich zu sehen, aber sie sind sehr verbreitert.  $B_4$  ist noch zu erkennen,  $B_3$  dagegen nur höchst schwach angedeutet. Um  $B_2$  und zwischen  $B_4$  und der H. L. liegt ein heller Hintergrund.

Die Ränder der H. L. sind verhältnissmässig scharf.

Bei  $p = 599^m/m$  und  $i_1 = 3,5$  Amp. sind die Begleiter  $B_0$  und  $B_2$  kaum noch sichtbar, speciell  $B_0$ . Die anderen Begleiter sind schon mit dem allmählig heller werdenden Hintergrunde vereinigt.

Die Ränder der Hauptlinie sind verhältnissmässig gut markiert.

Bei  $p = 1390^m/m$  und  $i_1 = 3,1$  Amp. sind keine Trabanten mehr zu sehen. Zwischen den Hauptlinien liegt ein heller Hintergrund, der nicht besonders intensiv ist, aber nach den Hauptlinien zu immer stärker wird.

Die Ränder der H. L. vereinigen sich durch sehr intensive Abstufung mit den nebenbei stehenden Begleitern.

Auftauchen der aequidistanten Streifen.

Bei  $p = 1860^m/m$  und  $i_1 = 2,9$  Amp. rother Rand sehr unscharf, der vilotte dagegen verhältnissmässig scharf begrenzt.

Keine Trabanten zu sehen.

## Indigo-blaue Linie.

Bei  $p = 205^m/m$  und  $i_1 = 3,7$  Amp. sind die Trabanten  $B_1$  und  $B_2$  noch sehr deutlich, aber verbreitert.

Zwischen den Hauptlinien liegt ein nicht sehr intensiver Hintergrund.

Bei  $p = 599^m/m$  und  $i_1 = 3,5$  Amp. die Ränder der Hauptlinien sind sehr undeutlich und vereinigen sich mit den nebenbei stehenden Begleitern  $B_3$  und  $B_4$  durch eine allmählig an Intensität abnehmende Abstufung.

Die Trabanten  $B_1$  und  $B_2$  sind sehr schwach und verbreitert. Um sie liegt ein heller, wenn auch nicht sehr intensiver Hintergrund. Derselbe ist etwas stärker zwischen  $B_1$  und der Hauptlinie.

Bei  $p = 1390^m/m$  und  $i_1 = 3,1$  Amp. sind alle Trabanten schon verschwunden. Zwischen den Hauptlinien zieht sich ein heller Hintergrund hin, welcher in der Mitte zwischen denselben am wenigsten lichtstark ist.

Die Ränder der Hauptlinie sind sehr undeutlich.

Auftauchen der aequidistanten Streifen.

Wenden wir uns jetzt zu den Ergebnissen der electricischen Messungen bei diesen Beobachtungsreihen mit einem Quarzrohr.

Diese Zahlen haben keinen sehr regelmässigen Gang, da die electricen Data in einem leuchtenden Geisslerrohr von sehr unstabiler Natur sind, trotzdem haben wir versucht, dieselbe Formel (2) wie früher, nämlich,

$$R_m = \frac{A}{J} - a$$

anzuwenden. Die Werthe von  $A$  und  $a$  haben wir aus zwei Paaren zusammengehöriger Werthe von  $R_m$  und  $J$  berechnet. Die nach diesen Werthen von  $A$  und  $a$  berechneten dritten Werthe von  $R_m$  (für jeden Druck sind drei Werthe von  $J$  gemessen worden) ergaben im Allgemeinen eine befriedigende Uebereinstimmung mit dem direct aus den Beobachtungen abgeleiteten Werth von  $R_m$  (aus  $J$  und  $V_1 - V_2$ ).

Die Serien A und B haben wir besonders behandelt und dabei noch die Werthe der Constanten  $A$  und  $a$  für beide Stellungen des Commutators ebenfalls besonders berechnet. Für die zweite Lage des Commutators (↑) mögen sie durch  $A_1$  und  $a_1$  bezeichnet werden.

Für nahe stehende Drucke haben wir dabei Mittelwerthe gebildet.

Für grössere Druckwerthe fehlen überhaupt die Zahlenangaben, da am Electrometer Funken übersprangen, was eine Ermittlung des mittleren Gesamtwiderstandes  $R_m$  unmöglich machte.

Für kleinere Werthe von  $p$  weisen dagegen die electricen Data ziemlich bedeutende Schwankungen auf, infolgedessen ist dadurch die Berechnung von  $A$  und  $a$  durchaus sehr erschwert.

Ueberhaupt müssen diese Berechnungen nur als ganz rohe Annäherung betrachtet werden, welche nur den Zweck haben, den allgemeinen Charakter der Erscheinung etwas klar zu legen.

Es ergaben sich nun folgende Resultate.

### Serie A.

Tabelle XXXVII.

$p$	$A$	$a \cdot 10^{-3}$	$A_1$	$a_1 \cdot 10^{-3}$
$8^{m/m}$	538	5	471	1
35	587	16	551	5
167	1248	30	1384	66

## Serie B.

Tabelle XXXVIII.

$p$	$A$	$a \cdot 10^{-3}$	$A_1$	$a_1 \cdot 10^{-3}$
$9^{m}/m$	491	2	464	-3
49	446 (!)	6	511	8

Sieht man von dem Werth  $A = 446$  (Serie B), der ganz sicher unrichtig ist, ab, so lässt sich wohl schliessen, dass  $A$  und  $A_1$ , d. h. auch der mittlere Widerstand der leuchtenden Dampfsäule (bei derselben Stromstärke  $J$ ) mit wachsendem Drucke zunimmt und zwar am Anfang langsam und dann sehr rasch.

Bei der Serie B sind die Werthe von  $A$  und  $A_1$  kleiner, als bei der Serie A, was auch a priori zu erwarten war, da die Entfernung zwischen den Elektroden kleiner war.

$a$  und  $a_1$  scheinen mit wachsendem Druck zuzunehmen, während aus den Zahlen der Tabelle XXVII sich auf eine ziemliche Constanz dieser Werthe schliessen liess. Wegen der Unsicherheit dieser Messungen lässt sich darüber nichts Näheres sagen.

Weiter sehen wir, dass bei der zweiten Stellung des Commutators ( $\uparrow$ )  $A_1$  meistens etwas kleiner als  $A$  ausfällt, aber der Unterschied ist im Allgemeinen ziemlich unbedeutend.

Betrachtet man die Werthe des Reststromes  $j$  aus den Tabellen XXXI, XXXIII und XXXV, so sieht man, dass für grössere Werthe von  $p$   $j$  sein Vorzeichen mit Umlegung des Commutators ändert, wobei in diesem Falle die absoluten Werthe von  $j$  ziemlich gleich ausfallen, während für kleine Werthe von  $p$  die Richtung von  $j$  von der Lage des Commutators unabhängig ist. Es scheint also, dass hier ebenfalls eine secundäre Ursache vorhanden war, welche den Durchgang des Stromes in einer Richtung begünstigte. Dies mag wohl von einer etwaigen Destillation des Quecksilbers von einer Elektrode zur anderen abhängen, die bei kleinen Drucken sich am meisten geltend machen würde. Directe Beobachtungen der Lage einer der beiden Quecksilberkuppen haben in der That erwiesen, dass eine solche Destillation wirklich vorhanden war.

Für denselben Druck  $p$  wächst  $j$  mit wachsender mittlerer Stromstärke  $J$ ; für dieselbe Stromstärke  $J$  ist die Abhängigkeit von  $j$  vom Drucke  $p$  sehr wenig ausgeprägt. Für kleine Werthe von  $J$  scheint  $j$  in allererster Annäherung vom Drucke ziemlich unabhängig zu sein.

## § 8.

**Beobachtungen mit einem dünnen Glasdiaphragma.**

Um die schleifenartige Verdoppelung der grünen Quecksilberlinie bei ganz kurzer leuchtender Funkenstrecke studieren zu können, um dadurch gewisse Anhaltspunkte dafür zu gewinnen, ob die Erscheinung wirklich auf eine Umkehrung der Linie zurückzuführen sei, haben wir eine besondere Geissleröhre aus Glas construiren lassen, welche in der Mitte ein Diaphragma mit einer sehr kleinen Oeffnung enthielt. Dieses Rohr ist auf der Fig. 9 abgebildet.

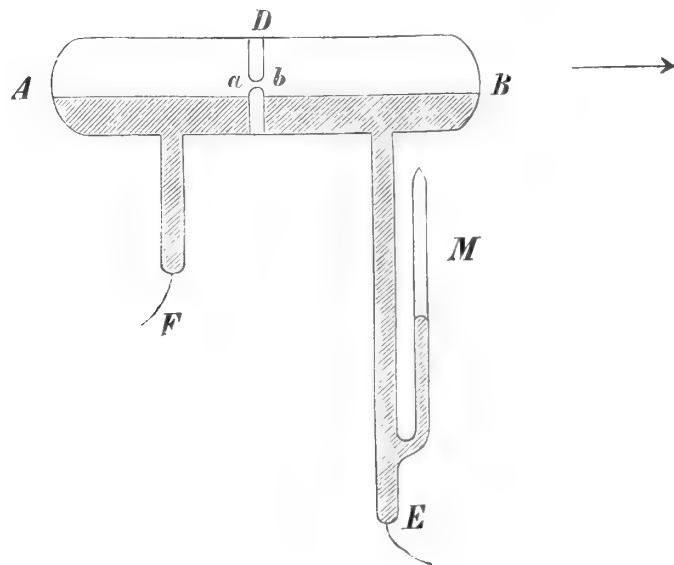


Fig. 9.

*D* ist das erwähnte Diaphragma, dessen Dicke nur  $3^{\text{m}}/_{\text{m}}$  betrug. *ab* ist die kleine Oeffnung in der Mitte des Diaphragmas. Die Breite derselben in ihrem engsten Theil war etwa gleich  $1^{\text{m}}/_{\text{m}}$ . *E* und *F* sind die Elektroden. *M* das Manometer. Das Rohr wurde zum Theil mit reinem Quecksilber gefüllt (schraffirter Theil) und dann in üblicher Weise sorgfältig ausgepumpt.

Auf diese Weise wurde die leuchtende Funkenstrecke auf eine sehr kleine Länge reduziert, wodurch auch die Dicke der leuchtenden Schicht, welche auf den Spalt projicirt wurde, ebenfalls sehr klein war. Das Rohr wurde in derselben Weise, wie früher, in einen Thermostaten eingepackt und gegen den Spalt gerichtet.

Die Beobachtungen ergaben, dass, trotz der sehr kleinen Dicke der leuchtenden Dampfschicht, bei gewissen Drucken eine recht deutliche schleifenartige Verdoppelung der Linie zu erkennen war.

Bei einem mittleren Druck von  $30 - 46 \frac{m}{m}$  liess sich die Trennung der Linie in zwei Aeste ganz gut sehen, während bei kleinen und grossen Drucken diese Trennung auf den photographischen Platten nicht mehr hervortrat, obgleich die Linie immer dort ihre eigenthümliche eiförmige Gestalt annahm.

Die entsprechenden Zahlendata sind in der folgenden Tabelle XXXIX nebst den Resultaten der entsprechenden electricischen Messungen zusammengestellt <sup>1)</sup>.

Die Unterbrechungszahl pro Secunde  $n$  betrug dabei im Mittel etwa 83.

Tabelle XXXIX.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Photographisch. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

Platte.	$i_1$	Commu- faktor.	$p$	$\pm J$	$\pm(V_1 - V_2)$	$R_m \cdot 10^{-3}$	$j$	Ordnung des Spectr.	Exp- Zeit.	$\Delta_a$	$\Delta_b$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\delta\lambda$	Bemerkungen.
83	0,8A.	↓	5 <sup>m/m</sup>	1,6 M.A.	466 V.	282 Ω	+0,7 M.A.	{ IV-V	7 <sup>m</sup>	—	—	—	0,026	—	
	—	↑	5	1,5	499	324	+0,1	{ —	12	—	—	—	28	—	
82	0,8	↓	30	1,8	289	156	+1,1	{ IV-V	4	—	—	—	58	—	Die Schleife ist vorhanden, aber die inneren Ränder sind un- deutlich. Die äusseren Ränder sind sehr scharf.
	—	↑	30	1,8	337	182	+1,1	{ —	7 12	—	—	—	62 64	—	
83	2,0	↓	5	3,5	535	152	+1,6	{ IV-V	4	—	—	—	29	—	
	—	↑	5	3,1	529	172	+0,1	{ —	6	—	—	—	25	—	
82	2,1	↓	36	4,0	283	71	+2,1	{ IV-V	2	0,027	0,024	0,013	64	0,019	
	—	↑	36	3,6	383	106	+1,8	{ —	4 6	25 29	26 19	17 19	68 67	21 21	
84 u. 84'	2,0	↓	311	3,9	501	128	+2,4	{ IV-V	3	—	—	—	65	—	Alles sehr verbreitert und ver- waschen. Schleife unsichtbar. Ränder sehr undeutlich.
	—	↑	311	3,7	706	191	+2,7	{ —	1	—	—	—	76	—	
83	3,8	↓	9	7,3	525	72	+1,6	{ IV-V	2	—	—	—	35	—	Rother Rand sehr unscharf.
	—	↑	9	7,1	537	76	+0,4	{ —	3	—	—	—	39	—	
82	4,1	↓	46	7,9	302	38	+2,4	{ IV-V	1	23	22	15	60	19	Die Trennung der Linie in zwei Aeste lässt sich noch erkennen dort, wo die Linie anfängt gerad- linig zu werden, was dem Theil der Funkenstrecke entspricht, welcher v. d. Diaphragmaöffn. zur Quecksilberkuppe geht. Sehr angenähert.
	—	↑	46	7,6	289	38	+1,3	{ —	2 3 <sup>1/2</sup> 3	25 34 31	25 24 27	14 11 12	64 69 70	20 20 21	
84 u. 84'	3,8	↓	342	9,6	594	62	+6,7	{ IV-V	2	—	—	—	101	—	
	—	↑	342	9,1	706	78	-5,4	{ —	1/2 1	—	—	—	86 91	—	

1) Wegen der Bedeutung der verschiedenen Bezeichnungen siehe die früheren Tabellen.

Aus dieser Tabelle lassen sich folgende Schlüsse ziehen.

Erstens sieht man wiederum, wie früher, dass eine Aenderung der Expositionsdauer einen ganz unwesentlichen Einfluss auf die zu messenden Grössen hat, was für diese ganze Untersuchung insofern von Bedeutung ist, dass die beobachteten Verbreiterungen der Linien etc. nicht auf eine secundäre, rein photographische Wirkung zurückzuführen sind, sondern dass wir hier wirklich mit einer reellen physikalischen Erscheinung zu thun haben.

Zweitens kann man ebenfalls, wie früher,  $\Delta_a = \Delta_b$  annehmen.

$\Delta'$  nimmt mit wachsendem Drucke  $p$  und wachsender mittlerer Stromstärke  $J$  zu.

Vergleicht man die Werthe von  $\Delta'$  aus dieser Tabelle mit den entsprechenden Werthen von  $\Delta'$  aus der Tabelle XXXI, so sieht man, dass jetzt, wo die leuchtende Schicht recht dünn war,  $\Delta'$  durchaus kleiner ausfällt. Für kleine Werthe von  $p$  ist der Unterschied recht beträchtlich, für grössere dagegen gleichen sich diese Unterschiede etwas aus. Dieses Resultat war auch a priori zu erwarten, da, wie wir es früher bei unseren Versuchen über das Emissionsspektrum des Bromdampfes gezeigt haben<sup>1)</sup>, eine Vergrösserung der Elektrodendistanz bei gleichen anderen äusseren Bedingungen eine entsprechende Verbreiterung der Linien nach sich zieht.

Das allerwesentlichste ist aber, dass auch bei einer solchen dünnen leuchtenden Schicht eine Zerspaltung der Linie in zwei Aeste doch zustande kommt. Vergleicht man dabei die Werthe von  $\delta\lambda$  aus den Tabellen XXXIX und XXXI, so sieht man, dass im jetzigen Falle dieselben etwa  $\frac{2}{3}$  derjenigen für das lange Quarzrohr ausmachen, also immer noch ganz beträchtlich sind.

Es mag jedoch auffallend erscheinen, warum die Schleife nur für die mittleren Drucke deutlich hervortritt, während sie für kleine und grosse Drucke auf den photographischen Platten nicht zu erkennen war. Vergleicht man aber die Werthe des mittleren Widerstandes  $R_m$  mit einander, so sieht man sofort, dass gerade für die mittleren Drucke  $R_m$  am kleinsten ist, was eventuell so zu deuten wäre, dass eine Verminderung des mittleren Widerstandes der leuchtenden Funkenstrecke die Schleifenbildung begünstigt.

Wollen wir jetzt noch die Resultate der electricischen Messungen kurz besprechen.

Das Erste, was hierbei auffällt, ist, dass trotz der Kürze der leuchtenden Funkenstrecke ihr Widerstand doch so enorm gross ist. Man hätte wohl viel kleinere Werthe von  $R_m$  erwarten können, als für das lange Quarzrohr, aber die Zahlen der Tabellen XXXIX und XXXI zeigen, dass dies keineswegs der Fall ist.

Weiter ist die Abhängigkeit der Potentialdifferenz ( $V_1 - V_2$ ) an den Elektroden und des mittleren Widerstandes  $R_m$  vom Druck eine andere, als bei einem langen Rohr. Während dort diese Grössen mit wachsendem Drucke allmählig zunehmen, gehen hier dieselben für bestimmte mittlere Drucke durch ein Minimum hindurch.

---

1) «Spectroscopische Untersuchungen». Zweite Mittheilung. Mémoires de l'Acad. Imp. des Sc. de St.-Petersbourg. Vol. XIX. № 9. § 10. (1906).

Für denselben Druck ändert sich  $V_1 - V_2$  wenig mit  $J$ , während  $R_m$  mit wachsendem  $J$  rasch abnimmt.

Für die zweite Lage des Commutators ( $\uparrow$ ), bei welcher bei diesem Rohr die Anode sich bei  $B$  befindet, ist der mittlere Widerstand grösser, als bei der ersten ( $\downarrow$ ). Es scheint also, als ob wiederum eine Ursache vorhanden wäre, welche den Stromdurchgang von  $A$  nach  $B$  (siehe die Fig. 9) begünstigt. Wir sehen auch in der That, dass, mit Ausnahme der letzten Zahl für  $j$  in der Tabelle XXXIX, welche dem grössten Druck entspricht und wo also der Einfluss secundärer Ursachen wahrscheinlich sich am wenigsten geltend machen kann, alle Werthe für den Reststrom  $j$  positiv ausfallen, d. h. der constante Reststrom immer von  $A$  nach  $B$  gerichtet ist.

Nach Beendigung dieser Versuche wurde mit demselben Rohr für die grüne Linie eine neue Versuchsreihe vorgenommen, indem ein constanter Strom von einer 1000 Volt Accumulatorenatterie durch die Geissleröhre hindurchgeschickt wurde.

Der Charakter der Erscheinung blieb durchaus derselbe,—die Linie zerspaltete sich wiederum in zwei Aeste,—aber die Schleife und überhaupt die ganze Erscheinung war viel schärfer ausgeprägt und schöner ausgebildet, als wenn man Wechselströme benutzte. Die Ursache dafür mag wohl die grössere Stromstärke in diesem Fall sein. Nicht nur die Schleife war sehr deutlich zu sehen, aber auch die Linie in demjenigen Theil der Funkenstrecke, welche von der Diaphragmaöffnung zur Quecksilberkuppe ging, ergab sich ebenfalls als verzweigt, wobei diese beiden Aeste allmählig in eine einzige Linie zusammenflossen; es bildete sich also an dieser Stelle eine Art spitzen Winkels.

Der Stromkreis enthielt noch als Widerstand die Windungen der secundären Spule des Inductoriums (etwa 32000  $\Omega$ . Widerstand). Diese fügte man hinein, um den totalen Widerstand des Stromkreises möglichst denselben zu behalten, wie bei den früheren Beobachtungen mit dem Wechselstrom; ausserdem war es in manchen Fällen nöthig am Anfang Wechselströme zu benutzen, um das Geisslerrohr zu erregen und für einen constanten Strom leuchtfähig zu machen. Ist das Leuchten der Röhre einmal eingeleitet, so wird dasselbe schon weiter durch einen constanten Strom unterhalten.

Die Beobachtungen haben ausserdem gezeigt, dass bei fortgesetztem Leuchten des Dampfes die Stärke dieses das Leuchten unterhaltenden, constanten Stromes  $j$  allmählig bis zu einer bestimmten Grenze zunimmt, d. h. der Widerstand der leuchtenden Funkenstrecke allmählig kleiner wird.

#### I. Versuch.

Die ganze Accumulatorenatterie eingeschaltet. Positiver Pol  $E$  (siehe die Fig. 9).

Dampfdruck etwa 50—60  $\frac{m}{m}$ .

Vor Beginn des Leuchtens Potentialdifferenz an den Electroden 999 Volt; diese entspricht der Spannung der Batterie selbst. Nach Beginn des Leuchtens Potentialdifferenz an den Electroden ( $E - F$ ) 316 V. Galvanometer und Electrodynamometer weit aus der Scala.



Am Anfang musste man Wechselströme benutzen, um das Leuchten hervorzurufen, aber nachdem das Rohr einige Zeit geleuchtet hatte, konnte man schon das Leuchten mit Hilfe eines constanten Stromes allein hervorrufen. Schaltete man die Accumulatorenatterie aus und dann wieder ein, so begann das Rohr sofort zu leuchten.

Das Geisslerrohr leuchtete sehr hell und die Schleife war sehr schön ausgebildet.

## II. Versuch.

Dieselben Bedingungen wie im vorigen Fall, nur war jetzt der positive Pol bei  $F$ .

Potentialdifferenz an den Electroden 245 V.

Galvanometer und Electrodynamometer aus der Scala.

Verzweigung der Linie noch deutlicher und schöner.

## III. Versuch.

Ganze Accumulatorenatterie. Positiver Pol bei  $F$ . Dampfdruck etwa  $5-7^m/m$ .

Die Stromstärke wurde nach dem Galvanometer und zur Controlle auch nach dem Electrodynamometer gemessen. Da der Widerstand in diesen Fall viel grösser war, so blieben die Ausschläge beider Instrumente innerhalb der entsprechenden Scala.

Es ergab sich:

$J$	3,5 M. A.	4,2 M. A.	5,6 M. A.
$j$	3,2	3,9	5,1
$V_1 - V_2$	875 V.	854	823
$R_m 10^{-3}$	247 $\Omega$ .	205 $\Omega$ .	148 $\Omega$

Die nicht vollständige Uebereinstimmung der Werthe vom  $J$  und  $j$  erklärt sich wahrscheinlich dadurch, dass beide Instrumente nicht gleichzeitig, sondern nach einander abgelesen wurden.

Wir sehen also, dass bei fortgesetztem Leuchten des Rohres die Stromstärke allmählig zu- und der Widerstand allmählig abnimmt.

Bei den zwei ersten Stromstärken ( $J = 3,5$  und  $4,2$  M. A.) tritt die Zerspaltung der Linie noch nicht ein, aber bei  $J = 5,6$  M. A. ist schon eine sehr schöne Schleife zu sehen, wobei die Zerspaltung der Linie scheinbar plötzlich auftrat.

Mit der Zeit nahm die Stromstärke immer weiter zu und die Ausschläge wurden schon ausserhalb der Scala, wobei die Potentialdifferenz an den Electroden auf 365 Volt herabsank.

## IV Versuch.

Dieselben Bedingungen, wie im vorigen Falle, nur war jetzt der positive Pol bei  $E$ .

Der Strom ging früher so lange in entgegengesetzter Richtung durch, dass man das Rohr jetzt überhaupt nicht mehr mit einem constanten Strom in der Richtung von  $E$  nach  $F$  zum Leuchten bringen konnte, auch wenn man zuerst durch dasselbe Wechselströme

durchschickte. Bei der Wirkung des Inductoriums ist ein schwaches Leuchten zu sehen, aber durch einen constanten Strom von  $E$  nach  $F$  wird dasselbe gar nicht mehr unterhalten.

Es sei noch bemerkt, dass der dritte Versuch ausgeführt wurde, nachdem das Rohr vorher einer höheren Temperatur ausgesetzt war, daher leitete es vielleicht besser den Strom.

Auch in diesem Fall (IV Versuch), wenn man das Rohr etwas erhitzte und dadurch also den Dampfdruck vermehrte, konnte man schliesslich ein Leuchten desselben durch einen constanten Strom erzwingen, wenn man zuerst das Inductorium ins Spiel setzte.

#### V. Versuch.

Ganze Accumulatorenatterie. Positiver Pol bei  $E$ .

Dampfdruck ungefähr  $300\frac{m}{m}$ .

Ausschläge des Galvanometers und Electrodynamometers ausserhalb der Scala.

Potentialdifferenz an den Electroden 465 V.

Um das Leuchten bei constantem Strom zu erzielen, wurden zuerst Wechselströme benutzt.

Die Linie sah sehr breit und verwaschen aus, aber die Schleife war noch zu erkennen.

#### VI. Versuch.

Dieselben Bedingungen, wie im vorigen Falle, nur war der positive Pol bei  $F$ .

Potentialdifferenz 497 V.

In diesem Fall konnte man das Rohr zum Leuchten bringen, ohne Anwendung von Wechselströmen. Wir sehen also, dass die Quecksilberdämpfe sich viel leichter zum Leuchten bringen lassen, wenn der constante Strom die Richtung von  $F$  nach  $E$  hat. Man vergleiche, was früher über den Durchgang des Stromes bei beiden Stellungen des Commutators am Inductorium gesagt worden ist.

Das Aussehen der grünen Quecksilberlinie war dasselbe, wie beim V-ten Versuch.

#### VII. Versuch.

Da früher in den meisten Fällen der durch das Rohr gehende Strom zu stark war, um durch das Galvanometer und Electrodynamometer gemessen zu werden, so wurde im Stromkreis ein specielles Milliamperemeter eingeschaltet.

Der Versuch war ausgeführt, indem zuerst die ganze Accumulatorenatterie eingeschaltet war und alsdann wiederholt, wo nur die Hälfte derselben benutzt wurde. Im ersten Fall war die Spannungsdifferenz an den Electroden  $E-F$ , wenn das Rohr nicht leuchtete, 986 Volt, im zweiten dagegen 497 V.

Der positive Pol war bei  $F$ .

Ganze Batterie.

$$j = 20,2 \text{ M. A.}$$

$$V_1 - V_2 = 218 \text{ V.}$$

$$R_m 10^{-3} = 11 \Omega$$

$$p = 41^{\text{m/m}}$$

Hälfte der Batterie.

$$j = 2,8 \text{ M. A.} \quad 8,1 \text{ M. A.}$$

$$V_1 - V_2 = 416 \text{ V.} \quad 221 \text{ V.}$$

$$R_m 10^{-3} = 151 \Omega \quad 27 \Omega$$

$$p = 23^{\text{m/m}} \quad 25^{\text{m/m}}$$

Wir sehen also, dass mit der Zeit  $j$  stark zu- und  $R_m$  dagegen abnimmt.

Für  $j = 20,2 \text{ M. A.}$  ist der Widerstand dieser sehr dünnen leuchtenden Schicht immer noch sehr beträchtlich und zwar gleich  $11000 \Omega$ .

Die Werthe von  $R_m$  für dieselben Strom- und Druckverhältnisse sind für einen constanten Strom etwa von derselben Grössenordnung, wie für Wechselströme. (Man vergleiche die Zahlen der Tabelle XXXIX).

Die Linie ist verhältnissmässig sehr hell.

Directe Ablesungen bei diesem Versuch haben gezeigt, dass die Destillation (Uebertragung) des Quecksilbers in der Richtung von  $F$  nach  $E$  vonstatten ging.

Commutierte man die Stromrichtung, so konnte man das Rohr zum Leuchten bringen, nur wenn man zuerst das Inductorium ins Spiel setzte.

VIII Versuch.

Ganze Batterie. Positiver Pol bei  $F$ .

$$j = 17,2 \text{ M. A.}$$

$$V_1 - V_2 = 271 \text{ V.}$$

$$R_m 10^{-3} = 16 \Omega$$

$$p = 129^{\text{m/m}}$$

Die Linie ist verhältnissmässig sehr hell.

Bei diesem Druck ( $p = 129^{\text{m/m}}$ ) konnte man mit der Hälfte der Batterie das Rohr überhaupt nicht zum Leuchten bringen, während bei dem VII-ten Versuch, wo der Dampfdruck viel geringer war, sich dieses wohl erzielen liess.

Commutierte man die Stromrichtung (bei Einschaltung der ganzen Batterie), so ging der Strom nicht mehr durch, auch wenn man zuerst das Inductorium ins Spiel setzte.

## IX Versuch.

Wiederholung des Versuches VII an einem anderen Tage.

Ganze Batterie; positiver Pol bei  $F$ .

Visuell betrachtet ist die Linie und Schleife ausserordentlich hell, scharf und deutlich. Die Schleife hat sich fast momentan gebildet, nachdem das Rohr vorher einige Secunden geleuchtet hat.

Bei diesem günstigen Druck konnte man das Rohr zum Leuchten bringen, ohne vorher Wechselströme zu benutzen, auch in dem Falle, wenn man die Stromrichtung commutierte (vielleicht auch, weil der Strom vorher nicht zu lange von  $F$  nach  $E$  durchgeschickt wurde).

Das Leuchten des Rohres war merkwürdig gleichmässig und ruhig.

Schaltete man für ein kurzes Zeitintervall den um das Rohr spiralförmig gehenden Heizstrom ( $i_2 = 9,1$  Amp.) aus, so war keine Aenderung im Aussehen der Schleife zu bemerken, was ein directer Beweis ist, dass diese eigenthümliche Verdoppelung der Linie nicht auf einen magnetischen Zeeman-Effekt zurückzuführen ist.

Allgemeine Bemerkungen zu diesen Versuchen mit einem constanten Strom.

Die Schleifenbildung ist am deutlichsten, für einen gewissen mittleren Dampfdruck und je grösser die Stromstärke ist.

Für einen constanten Strom ist die Erscheinung reiner und schärfer als für Wechselströme.

Die Erscheinung ist besser ausgeprägt, wenn der Strom von  $F$  nach  $E$  gerichtet ist. Dies mag wohl eine Folge einer etwaigen Destillation des Quecksilbers sein.

Mit der Zeit nimmt die Stromstärke und Breite der Schleife allmählig zu; der Widerstand nimmt ab.

Commutiert man die Stromrichtung, so müssen, um das Leuchten des Rohres hervorzurufen, in den meisten Fällen zuerst Wechselströme durchgeschickt werden. Aendert man die Stromrichtung nicht, sondern schaltet nur nach einiger Zeit die Accumulatorenatterie aus, so fängt, bei Wiedereinschaltung der Batterie, das Rohr sofort an zu leuchten. Wechselströme sind also dabei überflüssig.

Die Schleifenbildung erfolgt öfters fast momentan, wobei zugleich die Stromstärke plötzlich zunimmt.

Zum Schluss wurden Versuche angestellt mit einem neuen Rohr mit Diaphragma von der Form des der Fig. 9, bei dem aber die Dicke des Diaphragmas noch kleiner war. Bei diesem Rohr betrug die Dicke  $ab$   $1,5^m/m$  und der Durchmesser der Oeffnung ca.  $1,0^m/m$ . Die leuchtende Schicht hatte also eine ganz minimale Dicke.

Die Beobachtungen erfolgten im II—III Spektrum und bei einem constanten Strom

von der ganzen Accumulatorenatterie. Bei Benutzung der Hälfte der Batterie ging der Strom überhaupt nicht mehr durch. Der positive Pol befand sich bei  $F$ .

Trotz der minimalen Dicke der leuchtenden Schicht war die Schleife, wenn man das Spektrum visuel betrachtete, noch ganz deutlich zu erkennen.

Die totale Breite der grünen Quecksilberlinie  $\Delta'$ , zwischen den äusseren Rändern der beiden Linienäste, wurde mit Hülfe des Ocularmicrometers am Stufenspectroscop direct gemessen. Jede weiter folgende Zahl für  $\Delta'$  bildet das Mittel aus 5 einzelnen Bestimmungen.

Tabelle XL.

Grüne Linie ( $\lambda = 5461$ ). Visuel. Funkenstrecke  $\perp$  zum Spalt.

$j$	$p$	$\Delta'$
13,1 M. A.	74 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	0,059 Ä. E.
	191	0,082
14,5	45	0,064
	83	0,072

Wir sehen also, dass die totale Breite der Linie, wenn die Funkenstrecke, mag dieselbe auch noch so kurz sein, gegen den Spalt gerichtet ist, noch eine ziemlich beträchtliche ist.

Das allerwesentlichste dabei ist, dass auch bei einer Dicke der leuchtenden Schicht von nur 1,5<sup>m</sup>/<sub>m</sub>, wenn die Funkenstrecke gegen den Spalt gerichtet ist, eine Zerspaltung der Linie mit zugehöriger Schleifenbildung immer noch zustande kommt.

Aus der Gesamtheit der mitgetheilten Thatsachen würde man wohl geneigt sein anzunehmen, dass aller Wahrscheinlichkeit nach diese eigenthümliche Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Quecksilberlinie nicht auf eine Selbstumkehrung zurückzuführen ist.

## § 9.

**Beobachtungen mit einem Rohr mit flachem Querschnitt.**

Die früher mitgetheilten Beobachtungen haben gezeigt, dass, wenn die Richtung des durch das Geisslersche Rohr gehenden Stromes senkrecht zum Spalt ist, d. h. gegen denselben oder von demselben gerichtet ist, eine Zerspaltung der grünen Linie auftritt, mag die Dicke der leuchtenden Schicht auch noch so dünn sein. Diese Thatsache würde gegen die Annahme einer Selbstumkehrung sprechen.

Um jedoch diese Frage besser aufzuklären, schien es uns sehr wünschenswerth, noch einen besonderen Versuch, eine Art experimentum crucis anzustellen, bei welchem die Stromrichtung parallel zum Spalt wäre, wo aber zugleich die Dicke der leuchtenden Schicht nicht kleiner und sogar, wenn möglich, grösser wäre, als bei dem Diaphragmaversuch, wo die Richtung des Stromes senkrecht zur Spaltfläche war.

Zu diesem Zweck haben wir ein besonderes Geisslerrohr construieren lassen, welches die Form der der Fig. 2 hatte, wo aber der enge Theil desselben  $AB$  einen flachen Querschnitt besass, nach der Art eines Thermometerrohres. Die Form dieses Querschnittes ist aus den Figuren 10 und 11 zu ersehen.

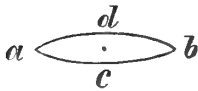


Fig. 10.

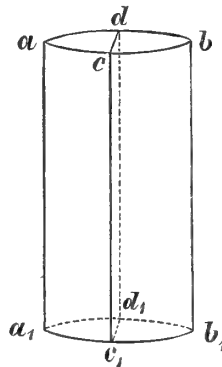


Fig. 11.

Die Dimensionen des Rohres waren die folgenden:

$$ab = 5,0 \text{ m.}$$

$$cd = 0,6 \text{ m.}$$

$$AB = 10 \text{ m.} \text{ (Siehe die Fig. 2).}$$

Die Entfernung der Röhrenöffnungen  $A$  und  $B$  bis zur Mitte der entsprechenden Quecksilberkuppe etwa  $10 \text{ m.}$

Obgleich diese Röhre die Form derjenigen hatte, welche zur Querdurchsicht gedient haben, wurde dieselbe nicht zu diesem Zweck benutzt, sondern es wurde mit Hilfe von total

reflectierenden Prismen die Funkenstrecke  $AB$  parallel auf den Spalt projectiert, in der Weise, dass die Stromrichtung parallel dem Spalt zu stehen kam.

Wir hofften am Anfang eine leuchtende Schicht von  $5^m/m$  Breite zu bekommen, aber dies gelang uns nie.

Die leuchtende Funkenstrecke erfüllte niemals den ganzen Querschnitt  $ab$  des Rohres. Unter den günstigsten Druckverhältnissen gelang es uns die Schichtdicke nur auf etwa  $2^m/m$  zu bringen, aber für unseren Zweck erwies sich diese Dicke als genügend. Zum Erzielen des Leuchtens haben wir Wechselströme benutzt (grössere Länge der Funkenstrecke).

Wenn der Rohrquerschnitt  $abb_1a_1$  (siehe die Fig. 11) gegen den Spalt gerichtet war, so war bei einer Schichtdicke von  $2^m/m$  keine Spur von Zerspaltung der grünen Linie zu erkennen, wie dies bei einer noch kleineren Schichtdicke ( $1,5^m/m$ ) bei einer zum Spalt senkrechten Stromrichtung der Fall war. Die Linie hatte überhaupt ein ganz anderes Aussehen.

Diese Thatsache ist von besonderer Bedeutung, da sie direct gegen die Annahme einer Selbstumkehrung spricht.

Man würde noch vielleicht geneigt sein, anzunehmen, dass bei Vermehrung der Schichtdicke, wenn die Richtung des Stromes parallel zum Spalt ist, eine Zerspaltung der Linie doch auftreten würde. Diese Zerspaltung würde allerdings, wie dies in allen den früher besprochenen Fällen war, von einer entsprechenden Verbreiterung der ganzen Linie ( $\Delta'$ ) begleitet sein.

Um dies zu entscheiden, haben wir noch folgenden Versuch angestellt.

Im II—III Spektrum haben wir die Linienbreite  $\Delta'$  mit dem Ocularmicrometer gemessen, einmal, wenn der Querschnitt  $abb_1a_1$  gegen den Spalt gerichtet war (Schichtdicke  $2,0^m/m$ ) und zweitens, wenn dies für den Querschnitt  $cd d_1 c_1$  der Fall war (Schichtdicke  $0,6^m/m$ ).

Im ersten Fall war die Dicke der leuchtenden Schicht mehr als 3 Mal grösser als im zweiten Fall und, hätte die Dicke der leuchtenden Schicht beim Parallellaufen des Stromes zum Spalt einen merklichen Einfluss auf die Breite der entsprechenden Spectrallinie, so würde dies ohne Zweifel sich aus diesen Messungen herausgestellt haben.

Die Messungen erfolgten bei einem Druck des Quecksilberdampfes von  $47^m/m$ . Die mittlere Stromstärke im primären Stromkreise des Inductoriums  $i_1$  betrug dabei 3,7 Amp. und die Anzahl der Unterbrechungen pro Secunde  $n = 83$ .

Jeder Werth von  $\Delta'$  bildet das Mittel aus 10 einzelnen Bestimmungen.

Es ergab sich nun:

I Fall	Schichtdicke	$2,0^m/m$	$\Delta' = 0,0506$ Ä. E.
II Fall	Schichtdicke	$0,6$ »	$\Delta' = 0,0494$ »

Der Unterschied zwischen den gemessenen Werthen von  $\Delta'$  beträgt nur etwa 0,001 Ä. E., eine Grösse, die allerdings innerhalb der noch zulässigen Beobachtungsfehler liegt.

Wir sehen also, dass innerhalb der hier vorgekommenen Bedingungen unserer Versuche eine Vermehrung der Schichtdicke nicht von einer entsprechenden Verbreiterung der Linie begleitet wird.

Diese unseren letzten Versuche bestätigen also unsere früher mehrmals ausgesprochene Vermuthung, dass die eigenthümliche Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Linie im Spectrum des Quecksilberdampfes, wenn die Stromrichtung mit der Normale zur Spaltfläche zusammenfällt, nicht auf eine Selbstumkehrung der Linien zurückzuführen sei.

Wie ist aber diese Zerspaltung zu erklären?

Ist es nicht eine Selbstumkehrung, so mag das wohl eine Folge einer Art anomaler Dispersion (nach Julius) sein.

Diese Erklärungsweise scheint jedoch mit grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein. Erstens, ist es ziemlich schwer einzusehen, wie unter der grossen Mannigfaltigkeit der hier besprochenen Versuchsbedingungen diese etwaige anomale Dispersion sich geltend machen wird und zweitens, ist die bewiesene Regelmässigkeit und sogar Gesetzmässigkeit der Erscheinung schwerlich mit einer anomalen Erscheinung, wie die anomale Dispersion, in Einklang zu bringen.

Ist also die Erscheinung nicht eine Folge einer Selbstumkehrung und der Wirkung anomal dispergierender leuchtender Schichten, so wird man wohl zugeben, dass die plausibelste Erklärung der wahrgenommenen Zerspaltung der Linien in einer Art Doppler-Effekt zu suchen ist.

Diese Erklärungsweise, obgleich sie sich, so zu sagen, unmittelbar aufdrängt und allerdings sehr verlockend ist, bietet gewisse Schwierigkeiten, um das gesammte von uns geschaffene Beobachtungsmaterial mit dem Doppler'schen Princip in Einklang zu bringen.

Würde sich jedoch schliesslich herausstellen, dass die Zerspaltung der Linien wirklich ein Doppler-Effekt ist, so könnte dies eventuell zu interessanten Schlüssen bezüglich des inneren Mechanismus des Leuchtens der Dämpfe führen.

## § 10.

### Theoretische Ueberlegungen.

In diesem Schlussparagrafen unserer Abhandlung wollen wir nun die von uns untersuchte eigenthümliche Schleifenbildung bei der grünen und indigo-blauen Linie des Quecksilberdampfes vom Standpunkte des Doppler'schen Principis aus etwas näher betrachten.

Die weiter folgenden Ueberlegungen sind selbstverständlich hypothetischer Natur, aber sie finden meistentheils für sich einen Beleg in den beobachteten Thatsachen.



Die Träger der Linienpektra sind bekanntlich nach den neueren Untersuchungen die positiven Atomionen eines ionisierten Gases oder Dampfes.

Wenn eine electriche Entladung durch ein Geisslerrohr vonstatten geht, so wird das entsprechende Gas theilweise ionisiert, d. h. die neutralen Atome verlieren ein oder mehrere Electronen und werden dadurch leuchtfähig gemacht.

Denken wir uns nun ein Quecksilberatom, welches  $\nu$  Electronen verloren hat und sei dasselbe der Träger der grünen ( $\lambda = 5461$ ) und indigo-blauen ( $\lambda = 4358$ ) Linie des Quecksilberdampfes, die nach den Untersuchungen von Stark<sup>1)</sup> und nach unseren Beobachtungen über die Verbreiterung dieser Linien durch Druck sicher einer und derselben Serie angehören. Bedeutet nun  $\epsilon$  die electriche Ladung eines Electrons, so enthält also das zurückbleibende Atomion eine positive Ladung  $\nu\epsilon$  und es wird durch die an Ort und Stelle herrschende electriche Kraft  $F$  in Bewegung versetzt, wodurch eine Art Doppler-Effekt entstehen muss.

Beim Durchschicken eines von einem Inductorium herstammenden electriche Wechselstromes durch das Geisslerrohr ändert  $F$  fortwährend seine Richtung. Ist nun die Axe des leuchtenden Kanals gegen den Spalt gerichtet, so muss dadurch eine Verdoppelung der entsprechenden Linie eintreten.

Die lineare Geschwindigkeit dieses bewegten positiven Atomions muss ein Maximum sein in der Axe des leuchtenden Kanals. Gegen die Röhrenwände muss diese Geschwindigkeit nach den bekannten Reibungsgesetzen allmählig abnehmen und an den inneren Röhrenwänden selbst, wenn der äussere Reibungscoefficient unendlich gross ist, gleich Null ausfallen.

Dieses Verhalten der Geschwindigkeit würde uns also die eigenthümliche Form der Linie erklären, die aus zwei nach oben und unten zusammenfliessenden Aesten besteht, wobei auf der dem oberen Theile des Rohres entsprechenden Seite diese Aeste sich scharf kreuzen, auf der anderen dagegen dieselben allmählig zusammenlaufen und eine Verdoppelung der Linie noch unterhalb des horizontalen Kanals zu erkennen ist. An dieser Stelle wird nämlich der nach der vorderen, unten sich befindenden Elektrode laufende Funken gegen die Horizontale mehr und mehr geneigt und es wird sich nur eine allmählig abnehmende Projection der linearen Geschwindigkeit im Spectroscop geltend machen.

Dass beim Durchschicken eines constanten Stromes von einer Accumulatorenatterie durch das Geisslerrohr dieselbe Art aus zwei Aesten bestehender Schleife entsteht, bietet keine besondere Schwierigkeit, da auch in diesem Fall die Entladung eine oscillatorische sein kann.

In qualitativer Hinsicht lässt sich also die Entstehung und eigenthümliche Form der Schleife durch das Doppler-Princip in ziemlich ungezwungener Weise erklären.

---

1) Nachr. von der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Heft 5, p. 459 (1905).

Das ist aber ungenügend. Man müsste die Erscheinung auch quantitativ verfolgen und verschiedene Criteria aufsuchen, die die ausgesprochene Hypothese bekräftigen.

Von solchen Kriterien können wir drei anführen.

#### Erstes Criterium.

Steht man auf dem Boden des Doppler'schen Princip's, so lässt sich aus der beobachteten Verschiebung  $\delta\lambda$  der Linienäste von der Axe der Schleife die entsprechende lineare Geschwindigkeit  $v$  der positiven Atomionen berechnen.

Es wird nämlich

$$v = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \cdot V, \dots\dots\dots (4)$$

wo  $V$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Andererseits kann man  $v$  aus den zur Zeit herrschenden electricischen Daten berechnen.

Aus der Uebereinstimmung der auf zwei ganz verschiedenen Wegen berechneten Werthe von  $v$  lässt sich ein Criterium für die Zulässigkeit der aufgestellten Hypothese gewinnen.

Eine Berechnung von  $v$  aus den electricischen Daten kann nicht streng durchgeführt werden. Dies ist aber auch gar nicht nöthig. Es handelt sich nur darum, zu sehen, ob man auf diesem Wege für  $v$  Werthe von derselben Grössenordnung bekommt, wie durch directe spectroscopische Beobachtungen.

Die das Atomion treibende electricische Kraft  $F$  lässt sich in erster Annäherung durch die Potentialdifferenz an den Enden des leuchtenden engen Kanals ausdrücken. Freilich ist diese Potentialdifferenz nicht bekannt, da direct nur die Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  an den Quecksilberelectroden gemessen wurde, da aber, wie unsere Versuche gezeigt haben, ganz kurze, enge, leuchtende Funkenstrecken, wenn man sich auf den Standpunkt des Ohm'schen Gesetzes stellt, einen enorm grossen Widerstand besitzen, so wird das Potentialgefälle hauptsächlich in dem engen leuchtenden Kanal stattfinden. Bedeute nun  $D$  die Länge dieses engen leuchtenden Kanals, so können wir in erster Annäherung  $F$  folgendermaassen ausdrücken.

$$F = \frac{V_1 - V_2}{D} \dots\dots\dots (5)$$

$F$  ist die äussere electricische Kraft, welche das Atomion in Bewegung versetzt.

Ausserdem kann noch eine innere treibende Kraft  $F_i$  vorhanden sein<sup>1)</sup>. Denkt man sich nämlich eine Schaar von Electronen und positiven Atomionen, die, wenn ein Strom durch den leuchtenden Dampf hindurchgeht, gegen einander sich bewegen, so lässt sich wohl sofort erkennen, dass das betrachtete bewegliche Atomion noch unter der Wirkung einer inneren treibenden Kraft  $F_i$  stehen muss.

1) Man vergleiche. Stark. Die Electricität in Gasen, pp. 291 und 355. Leipzig (1902).

Die Berechnung von  $F_i$  bietet manche Schwierigkeiten dar und erfordert eine Anhäufung von Hypothesen. Eines aber kann man sagen:  $F_i$  muss unbedingt mit wachsendem Drucke des Dampfes und mit wachsender Ionisation zunehmen.

Für sehr kleine Drucke kann man wohl in erster Annäherung von  $F_i$  absehen und nur die Wirkung der äusseren treibenden Kraft  $F$  in Betracht ziehen.

Da wir die Geschwindigkeit  $v$  für ein in der Röhrenaxe sich bewegendes Atomion berechnen wollen, so können wir zur Vereinfachung von der inneren Reibung des Quecksilberdampfes ebenfalls absehen.

Der kleinste Druck  $p$ , bei welchem die halbe Spaltenbreite  $\delta\lambda$  gemessen wurde (grüne Linie), war gleich  $2 \frac{m}{m}$ . (Siehe die Tabelle XIV). In diesem Fall war auch die mittlere Stromstärke am geringsten, folglich war auch die Ionisation und daher  $F_i$  am kleinsten.

Nach den Zahlen der Tabelle XXI ergibt sich, für  $p = 5 \frac{m}{m}$  und für die kleinste mittlere Stromstärke,  $V_1 - V_2$  im Mittel gleich 729 Volt.

Für  $p = 8 \frac{m}{m}$  wird nach der Tabelle XXII  $V_1 - V_2$  unter derselben Strombedingung gleich 748 Volt.

Für  $p = 2 \frac{m}{m}$  können wir also  $V_1 - V_2$  gleich 710 Volt annehmen.

Die Länge des leuchtenden Kanals  $D$  betrug in diesem Fall  $46 \frac{m}{m}$ .

Daraus ergibt sich

$$F = \frac{V_1 - V_2}{D} = \frac{710}{4,6} \cdot 10^8 = 154 \cdot 10^8 \text{ C. G. S.}$$

Um die von dieser treibenden Kraft verursachte Geschwindigkeit  $v$  berechnen zu können, muss man noch die Strecke kennen, auf welcher diese Kraft wirkt. Für dieselbe wollen wir die mittlere freie Weglänge  $l$  einsetzen. Bedeute noch  $\mu$  die Masse des bewegten Atomions, so ergibt sich bekanntlich für die gesuchte Geschwindigkeit  $v$  folgender Ausdruck:

$$v = \sqrt{2v \frac{e}{\mu} \cdot F \cdot l} \dots \dots \dots (6)$$

Für ein Wasserstoffatomion kann man  $\frac{e}{\mu}$  gleich  $9,5 \cdot 10^3$  setzen<sup>1)</sup>.

Da das Atomgewicht des Quecksilbers 199,8 beträgt, so können wir für Quecksilberdampf annehmen.

$$\frac{e}{\mu} = 48.$$

Wollen wir nun die mittlere freie Weglänge des Quecksilberdampfes  $l$  für  $p = 2 \frac{m}{m}$  berechnen. Diesem Druck entspricht nach den Tabellen von Landolt und Börnstein eine Temperatur  $t$  von etwa  $130^\circ \text{ C}^2)$ .

1) Man vergleiche Stark. Der Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen und die Spektre der positiven Atomionen. Nachr. von der Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Heft 5, p. 459 (1905).

Auch Stark. Bedingungen für die photographische Beobachtung des Doppler-Effekts bei Kanalstrahlen. Phys. Zeitschr. 8 Jahrg. № 12, p. 397.

2) Im Versuchsrohr war ein Ueberschuss vom flüssigen Quecksilber immer vorhanden.

Zu diesem Zweck können wir die Formeln der kinetischen Gastheorie für die innere Reibung der Gase in Anwendung bringen, da für den Quecksilberdampf Reibungsversuche von S. Koch vorliegen<sup>1)</sup>.

Wir führen diese Rechnungen aus für den normalen Zustand eines Gases, d. h. wenn kein electricer Strom hindurchgeht. Ist aber ein Stromgang vorhanden, so können selbstverständlich die Verhältnisse sich ein wenig anders gestalten.

Setzen wir nun, wie üblich, voraus, dass alle Theilchen dieselbe mittlere Geschwindigkeit  $u$  besitzen und bedeute  $\rho$  die Masse der Volumeneinheit und  $\eta$  den Reibungscoefficienten, so ist bekanntlich

$$\eta = \frac{1}{3} \rho u l \dots \dots \dots (7)$$

und

$$p = \frac{1}{3} \rho u^2 \dots \dots \dots (8)$$

Durch Elimination von  $u$  finden wir

$$l = \sqrt{3} \frac{\eta}{\sqrt{p\rho}} \dots \dots \dots (9)$$

Um  $l$  in Centimetern anzugeben, muss der Druck  $p = 2^{\text{m/m}}$  in Dynen pro Quadratzentimeter ausgedrückt werden. Also

$$p = \frac{2}{760} \cdot 1033.981 = 2667 \frac{\text{Dynen}}{\text{Cent.}}$$

Dann wird

$$l = 0,0335 \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \dots \dots \dots (10)$$

Die theoretische Dampfdichte  $\delta$  des Quecksilbers inbezug auf Luft ist gleich

$$\frac{199,8}{2.14,44} = 6,92.$$

Es ergibt sich also für  $\rho$  unter den gegebenen Temperatur- und Druckverhältnissen

$$\rho = 0,001293 \cdot 6,92 \frac{2}{760} \cdot \frac{273}{273 + 130} = 0,04160.$$

Bringt man diesen Werth von  $\rho$  in die frühere Formel (10) ein, so ergibt sich

$$l = 8,38 \cdot \eta.$$

Nun ist nach den Angaben von Koch, freilich für das Temperaturintervall 270—380° C.,

$$\eta = 0,000162 \left( \frac{T}{273} \right)^{1,60} \text{ C. G. S.}$$

1) Wied. Ann. Bd. 19. p. 857 (1883).

Setzen wir hierin  $T = 403$ , so wird  $\eta = 0,0_3 302$  und schliesslich

$$l = 0,00253 \text{ cm.}$$

Bringen wir nun diese Werthe von  $F$ ,  $\frac{\epsilon}{\mu}$  und  $l$  in die Formel (6) ein, so wird

$$v = \sqrt{v \cdot 374 \cdot 10^7} \text{ cm.,}$$

oder, wenn  $v$  in Kilometern pro Secunde ausgedrückt werden soll,

$$v = \sqrt{0,374 \cdot v} \text{ km.}$$

Nach den Untersuchungen von Stark, Hermann und Kinoshita<sup>1)</sup> ist Grund vorhanden anzunehmen, dass die Atomionen des Quecksilbers, die die grüne und indigo-blaue Linie emittieren, zweiwerthig sind.

Setzen wir dementsprechend  $\nu = 2$ , so ergibt sich endgültig

$$v = \underline{0,86 \text{ km.}}$$

Nun haben die directen spectroscopischen Beobachtungen der Zerspaltung der grünen Linie ( $\lambda = 5461$ ) für  $p = 2 \frac{m}{m}$  ergeben (Tabelle XIV)

$$\delta\lambda = 0,019 \text{ \AA. E.}$$

Daraus ergibt sich auf Grund der Formel (4)

$$v = \underline{1,04 \text{ km.}}$$

Die Uebereinstimmung mit dem eben auf einem ganz anderen Wege gefundenen Werth von  $v$  ist eine ganz unerwartet gute.

#### Zweites Criterium.

Da die grüne ( $\lambda = 5461$ ) und indigo-blaue Linie ( $\lambda = 4358$ ) des Quecksilberdampfes einer und derselben Serie angehören, so ist wohl anzunehmen, dass sie denselben Träger haben. Ist nun die beobachtete Zerspaltung dieser beiden Linien wirklich die Folge eines Doppler-Effekts, so müssen die auf Grund der gemessenen Schleifendimensionen ( $\delta\lambda$ ) abgeleiteten Geschwindigkeiten des entsprechenden Atomions für beide Linien innerhalb der noch zulässigen Beobachtungsfehler identisch ausfallen.

In der folgenden Tabelle XLI sind nun für nahe liegende und nicht zu grosse Werthe von  $p$ <sup>2)</sup> die aus der halben Schleifenbreite  $\delta\lambda$  für beide Linien nach den Zahlenangaben der Tabellen XIV, XVI, XXXI und XXXII nach der Formel (4) abgeleiteten Geschwindigkeiten  $v$  nebeneinander zusammengestellt. Ausserdem sind dabei die mittlere Stromstärke im primären Stromkreis  $i_1$  und die mittlere Stromstärke  $J$  im Geisslerrohr selbst, wenn dieselbe direct gemessen wurde, angegeben.

Die letzte Colonne enthält die Werthe von

$$\Delta v = v_{gr.} - v_{ind. bl.}$$

1) Ann. d. Phys. Bd. 21, p. 462 (1906).

2) Für grosse Werthe von  $p$  sind, wie früher öfters betont wurde, die Ausmessungen sehr ungenau.

d. h. die Differenz der aus der Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Linie abgeleiteten Geschwindigkeit des gemeinsamen Atomions.

Tabelle XLI.

$i_1$	Linie.	$J$	$p$	$\delta\lambda$	$v$	$\Delta v$	Bemerkungen.
0,8 Amp.	Grüne	1,4 M. A.	23 <sup>m</sup> /m	0,026 Ä.E.	1,43 klm./sec.	-0,08 klm./sec.	Aus den Tabellen XIV und XVI. Länge des leuchtenden Kanals 46 <sup>m</sup> /m. Innerer Durchmesser des leuchtenden Kanals 2,0 <sup>m</sup> /m.
	Ind.-bl.	1,4	18	22	1,51		
	Grüne	1,3	35	25	1,37	-0,01	
	Ind.-bl.	1,3	33	20	1,38		
	Grüne	1,3	51	32	1,76	+0,04	
	Ind.-bl.	1,3	55	25	1,72		
2,0	Grüne	3,5	3	18	0,99	-0,25	
	Ind.-bl.	3,5	3	18	1,24		
	Grüne	3,2	24	30	1,65	-0,07	
	Ind.-bl.	3,2	18	25	1,72		
	Grüne	3,1	50	39	2,14	+0,08	
	Ind.-bl.	3,1	55	30	2,06		
2,7	Grüne	—	4	22	1,21	-0,30	
	Ind.-bl.	—	4	22	1,51		
	Grüne	—	13	27	1,48	-0,10	
	Ind.-bl.	—	15	23	1,58		
	Grüne	—	49	40	2,20	-0,14	
	Ind.-bl.	—	54	30	2,06		
4,0	Grüne	7,9	4	22	1,21	-0,03	
	Ind.-bl.	7,9	4	18	1,24		
	Grüne	7,0	24	34	1,87	+0,01	
	Ind.-bl.	7,0	18	27	1,86		
	Grüne	7,3	53	40	2,20	+0,07	
	Ind.-bl.	7,3	55	31	2,13		
5,6	Grüne	—	32	37	2,03	+0,03	
	Ind.-bl.	—	32	29	2,00		
0,8	Grüne	1,4	24	23	1,26	-0,19	
	Ind.-bl.	1,4	24	21	1,45		
1,8	Grüne	3,5	8	23	1,26	+0,16	
	Ind.-bl.	3,5	8	16	1,10		
	Grüne	2,9	32	32	1,76	-0,03	
	Ind.-bl.	2,9	32	26	1,79		
3,7	Grüne	7,4	9	26	1,43	+0,33	
	Ind.-bl.	7,4	9	16	1,10		
	Grüne	6,1	37	33	1,81	-0,25	
	Ind.-bl.	6,1	37	30	2,06		

Betrachtet man die Zahlen dieser Tabelle, so wird man wohl zugeben, dass in Anbetracht der möglichen Schwankungen in den electrischen Verhältnissen bei Gasentladungen und der noch zulässigen Fehler in der Ausmessung der Werthe von  $\delta\lambda$  die Uebereinstimmung der aus der Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Linie abgeleiteten Geschwindigkeiten  $v$  im allgemeinen als eine ganz befriedigende bezeichnet werden kann. Die Differenzen  $\Delta v$  sind theilweise positiv, theilweise negativ<sup>1)</sup> und sind höchst wahrscheinlich nur auf Versuchsfehler zurückzuführen.

Ein Fehler von nur 0,001 Ä. E. in dem gemessenen Werth von  $\delta\lambda$  würde ja für die indigo-blaue Linie schon einen Fehler von 0,07 klm./sec. in dem entsprechenden Werth von  $v$  bedingen.

### Drittes Criterium.

Befinden sich nun die positiven Atomionen in Bewegung mit der Geschwindigkeit, welche aus der Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Linie unter Anwendung des Doppler'schen Principis sich ergeben hat, so muss diese Bewegung, nebst der Fortführung der entsprechenden negativen Theilchen, die Ursache der electrischen Stromleitung im Quecksilberdampf sein.

Bedeute nun  $n$  die Anzahl der Atomionen in einem Cubikcentimeter Quecksilberdampf,  $v_1$  die Geschwindigkeit der negativen Theilchen und  $q$  den Querschnitt des leuchtenden Kanals, so kann man unter Annahme der Zweiwerthigkeit der positiven Quecksilberatomionen, die mittlere Stromstärke im leuchtenden Geisslerrohr folgendermaassen ausdrücken:

$$J = 2\varepsilon \cdot n v \left[ 1 + \frac{v_1}{v} \right] q \dots \dots \dots (11)$$

$\varepsilon$  ist die bekannte electrische Ladung eines Elektrons. Nach Stark<sup>2)</sup> ist

$$\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-20} \text{ abs. el.-magn. Einh.}$$

Das Verhältniss der Geschwindigkeiten der negativen und positiven Theilchen ist öfters bestimmt worden. Nach Stark<sup>3)</sup> kann man  $\frac{v_1}{v} = 1,2$  setzen. Ob dieses Verhältniss auch in diesem Fall gültig ist, möge dahingestellt bleiben, wir wollen aber als erste Annäherung diesen Werth annehmen.

$q$  und  $v$  sind bekannt.

Wäre also  $n$ , welches die Ionisation des Gases charakterisiert, ebenfalls bekannt, so könnte man die mittlere Stromstärke  $J$  nach der vorigen Formel (11) berechnen und mit dem direct beobachteten Werth von  $J$  vergleichen.

1) Das arithmetische Mittel aller  $\Delta v$  ist gleich  $-0,04$  klm./sec.

2) Die Electricität in Gasen. p. 265. Leipzig (1902).

3) L. c. p. 261.

Da jedoch  $n$  nicht gegeben ist, so muss man einen Rückweg einschlagen.

Auf Grund der gemessenen Werthe von  $J$  kann man rückwärts  $n$  für verschiedene Werthe von  $p$  und  $J$  berechnen.

Nun ist  $n$  nach anderen Versuchen der Grössenordnung nach bekannt. Es ist nämlich  $n = 10^{12}$ . Würde also der aus der Formel (11), bei Zugrundelegung der aus dem Doppler'schen Princip abgeleiteten Geschwindigkeiten  $v$ , sich ergebende Werth von  $n$  von derselben Grössenordnung ausfallen, so würde dies allerdings dafür sprechen, dass die beobachtete Zerspaltung der beiden erwähnten Quecksilberlinien wirklich die Folge eines Doppler-Effekts ist.

Wollen wir nun  $n$  für verschiedene Werthe von  $p$  und  $J$  berechnen. Dazu müssen wir die entsprechenden Werthe von  $v$  kennen.

Dazu haben wir nach den Zahlen der Tabellen XIV, XVI, XXXI, XXXII und XXXV für nahe liegende Werthe von  $p$  und für drei Mittelwerthe von  $J$ , nämlich 1,4, 3,3 und 7,3 M. A., Mittelwerthe von  $p$  und  $v$  gebildet und dieselben graphisch auf ein Coordinatennetz aufgetragen. Aus den so erhaltenen drei Curven haben wir durch graphische Interpolation die folgenden in der Tabelle XLII angegebenen Werthe von  $v$  für verschiedene Werthe von  $p$  erhalten.

Tabelle XLII.

$J$ in M. A.	1,4	3,3	7,3
$p$	$v$ klm./sec.		
$5^{m/m}$	1,08	1,18	1,26
10	1,16	1,31	1,45
20	1,31	1,55	1,75
30	1,46	1,75	1,94
40	1,59	1,92	2,08
50	1,71	2,06	2,18

$J$  ist in Milliampere gegeben. Um dieselbe in abs. el.-magn. Einheiten auszudrücken, muss man  $J$  in der Formel (11) mit dem Factor  $10^{-4}$  multiplicieren.

Der innere Durchmesser des leuchtenden Kanals kann im Mittel gleich  $2^{m/m}$  angenommen werden. Dann ist

$$q = 0,0314 \text{ cm.}$$



Setzen wir nun die gegebenen Werthe von  $\epsilon$ ,  $\frac{v_1}{v}$  und  $q$  in die Formel (11) ein und wollen wir dabei  $v$  immer in Kilometern pro Secunde ausdrücken, so ergibt sich

$$n = 5,17 \cdot 10^{11} \frac{J \text{ M. A.}}{v \text{ km./sec.}} \dots \dots \dots (12)$$

Nach dieser Formel sind nun die den verschiedenen Werthen von  $J$  und  $p$  entsprechenden Werthe von  $n$  berechnet und in der folgenden Tabelle XLIII zusammengestellt.

Tabelle XLIII.

$J$ in M. A.	1,4	3,3	7,3
$p$	$n$		
$5^{n/n}$	$0,67 \cdot 10^{12}$	$1,45 \cdot 10^{12}$	$3,00 \cdot 10^{12}$
10	0,62 —	1,30 —	2,60 —
20	0,55 —	1,10 —	2,16 —
30	0,50 —	0,98 —	1,95 —
40	0,46 —	0,89 —	1,81 —
50	0,42 —	0,83 —	1,73 —

Wir sehen aus dieser Tabelle, dass bei Zugrundelegung der früher besprochenen Annahmen,  $n$  sich gerade von der Grössenordnung  $10^{12}$  ergibt, in voller Uebereinstimmung mit anderen Untersuchungen.

Stark gibt<sup>1)</sup> für die obere Grenze von  $n$  die Zahl  $2,7 \cdot 10^{12}$ . Unter den bei uns vorgekommenen Bedingungen ist  $n_{\text{max.}} = 3,0 \cdot 10^{12}$ .<sup>2)</sup>

Die Tabelle XLIII zeigt ausserdem, dass  $n$  fast proportional mit  $J$  wächst. Freilich ist die Abhängigkeit von  $n$  von  $J$  nicht eine ganz lineare, sondern es nimmt der Proportionalitätsfactor mit wachsendem  $J$  einwenig ab, aber diese Abnahme ist ziemlich unbedeutend.

Setzen wir nämlich

$$n = C \cdot J \cdot 10^{12},$$

so lässt sich  $C$  auf Grund der vorigen Zahlen für verschiedene Fälle leicht berechnen.

Die entsprechenden Zahlen sind in der folgenden Tabelle XLIV niedergelegt.

1) Die Electricität in Gasen. L. c. p. 266.

2) Hätte man zur Bestimmung des Verhältnisses  $\frac{v_1}{v}$  die Annahme zu Grunde gelegt, dass die kinetische Energie der positiven und negativen Theilchen dieselbe ist, so würde  $\frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{m}{m_1}}$  sein, wo  $m_1$  die Masse eines Elektrons bedeutet. Da nun  $\frac{\epsilon}{m} = 48$  und  $\frac{\epsilon}{m_1} = 1,87 \cdot 10^7$  ist, so ergibt sich  $\frac{v_1}{v} = 624$ . Bei dieser Annahme würden die Werthe von  $n$  in der vorigen Tabelle 284 Mal kleiner ausfallen.

Tabelle XLIV.

$J$ in M. A.	1,4	3,3	7,3
$p$	$C$		
$5^m/m$	0,48	0,44	0,41
10	0,44	0,39	0,36
20	0,39	0,33	0,30
30	0,36	0,30	0,27
40	0,33	0,27	0,25
50	0,30	0,25	0,24

Für dieselbe Stromstärke  $J$  nimmt die Ionisation ( $n$ ) mit wachsendem Drucke ab.

Auf diesen Umstand hat schon Stark<sup>1)</sup> aufmerksam gemacht. Er erklärt dieses durch die Annahme, dass bei höheren Drucken die Wiedervereinigung der getrennten Theilchen mit Ladungen von verschiedenem Vorzeichen begünstigt wird.

Die Zahlen der Tabelle XLII zeigen ausserdem, dass die Geschwindigkeit  $v$  der positiven Atomionen mit wachsenden  $J$  und  $p$  zunimmt. Diese Thatsache würde zu dem Schluss führen, dass für grössere Druckwerthe und Stromstärken die innere treibende Kraft  $F_i$  eine sehr wesentliche Rolle spielt.

Die hier durchgeführten Rechnungen, inbezug auf die drei aufgestellten Kriterien, bekräftigen also auch in quantitativer Hinsicht unsere vorläufige Annahme, dass die von uns beobachtete Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Linie wirklich als ein Doppler-Effekt zu betrachten ist.

Dass diese Zerspaltung bei den beiden gelben Linien sich nicht geltend gemacht hat, mag wohl darin seinen Grund haben, dass diese beiden Linien, wie unsere Untersuchungen es gezeigt haben, ausserordentlich empfindlich gegen eine Drucksteigerung sind, insofern es möglich, dass ihre Zerspaltung durch die grosse Breite der Linien selbst maskiert wird.

Es ist auch denkbar, dass der Träger der beiden gelben Linien anders beschaffen ist und ihm eine viel kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeit zukommt, die durch die uns zur Verfügung stehenden Hilfsmittel nicht nachgewiesen werden konnte.

Ist nun die hier ausgesprochene Vermuthung über die Ursache der schleifenartigen Verdoppelung bei den zwei erwähnten Linien des Quecksilberdampfes als richtig zu betrach-

1) L. c. p. 269.

ten, so drängt sich eine weitere verallgemeinerte Vermuthung über die Ursache des Leuchtens der Gase und Dämpfe auf.

Es ist eine bekannte Thatsache<sup>1)</sup>, dass, wenn Gase und Dämpfe in einem Geisslerrohr durch electriche Entladungen zum Leuchten gebracht sind, ihre mittlere Temperatur verhältnissmässig ganz niedrig ausfallen kann. Nun hat andererseits King<sup>2)</sup> experimentell gezeigt, dass man durch Erhöhung der Temperatur allein Metalldämpfe zur Emission ihres Linienspektrums veranlassen kann. Ein solches Leuchten kann jedoch nur bei sehr hohen Temperaturen stattfinden, wenn schon eine gewisse Ionisation eingetreten ist, und die positiven Atomionen eine genügend grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhalten haben.

Diese Thatsachen führen direct zu der Vermuthung, dass die Wirkung einer electriche Entladung in einem zum Leuchten gebrachten Geisslerrohr nicht nur darin besteht, das entsprechende Gas zu ionisieren, sondern auch den positiven Atomionen die nöthige Geschwindigkeit zu ertheilen, bei welcher sie anfangen merklich leuchtfähig zu werden.

Auf Grund dieser Hypothese wäre also die Lichtemission der positiven Atomionen nur eine Folge ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, bei welcher eine gewisse Reaktion des Aethers oder anderer materieller Theilchen sich geltend macht<sup>3)</sup> und welche in einer entsprechenden Lichtemission sich äussern würde.

Bedeute nun  $I$  die Intensität der Lichtemission, so wäre also  $I$  nur eine Function von  $v$ :

$$I = f(v).$$

Es gäbe also auf Grund dieser Annahme nur «bewegte Intensität» und das, was Stark «ruhende Intensität» nennt, wäre auch eigentlich ebenfalls nur «bewegte Intensität», aber bei verhältnissmässig kleinen Geschwindigkeiten.

Nach dieser Hypothese muss ein positives Atomion, um merklich leuchtfähig zu werden, schon eine gewisse Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen. Nach unseren spectroscopischen Untersuchungen sollen eben die electriche Entladungen diese ertheilen. Die Atomionen erhalten dabei die nöthige Geschwindigkeit, trotzdem bleibt die mittlere Temperatur des Gases verhältnissmässig niedrig, da die Anzahl ionisierter Theilchen in einem Cubikcentimeter Gas oder Dampf nur einen geringen Bruchtheil der Anzahl aller in demselben Volumen enthaltenen Atome bildet. Nach den Berechnungen von Planck und Drude ist in der That die Gesamtzahl der Atome in einem Cubikcentimeter bei atmosphärischem Druck und bei 0° C. von der Grössenordnung  $10^{19}$ , während  $n$  von der Grössenordnung  $10^{12}$  sich ergeben hat.

Nun haben unsere Beobachtungen über die Zerspaltung der grünen und indigo-blauen Linie des Quecksilberdampfes gezeigt, dass die Geschwindigkeit des zum Leuchten gebrachten Atomions je nach den Versuchsbedingungen etwa 1—2 Kilometer pro Secunde beträgt.

1) Man vergleiche z. B. unsere Abhandlung «Spectroscopische Untersuchungen». Zweite Mittheilung. Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VIII Sér. Vol. XIX. № 9. § 3 (1906).

2) Ann. d. Phys. Bd. 16. p. 360 (1905).

3) Man vergleiche Stark. «Zur Diskussion über den Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen». Phys. Zeitschr. 8 Jahrg. № 3, p. 79.

Wollte man aber eine solche mittlere Geschwindigkeit  $v$  von 1 klm./sec. durch einen rein thermischen Vorgang hervorrufen, so müsste schon nach der kinetischen Gastheorie die Temperatur des Quecksilberdampfes bis auf  $7760^{\circ}\text{C}$ . gesteigert werden<sup>1)</sup>. Bei dieser hohen Temperatur müssten dann die Quecksilberdämpfe das entsprechende Linienspektrum emittieren. Dieser Controllversuch ist aber leider nicht ausführbar.

Dass die schnelle Translationsbewegung der Atomionen wirklich die Ursache ihrer Lichtemission sein kann, hat Stark auch durch directe Versuche bestätigt<sup>2)</sup> und den Begriff «bewegte Intensität» eingeführt. Allein aber soll diese Art Emission nur bei ungemein grossen Geschwindigkeiten, wie dieselben in den Kanalstrahlen vorkommen, zum Vorschein treten. Für die sogenannte «ruhende Intensität» hat Stark die Vermuthung ausgesprochen, dass der Ursprung derselben in einer Deformation eines positiven Atomions durch Stoss zu suchen sei. Nach der früher angeführten speciellen Deutung unserer Versuche soll aber dies auch «bewegte Intensität» sein.

Hier stossen wir aber auf eine ziemlich grosse Schwierigkeit.

Nach Stark's Versuchen ist die Lichtemission  $I$  für die bewegte Intensität wirklich eine Function von  $v$ , wobei  $I$  zugleich mit  $v$  wächst. Aber zwischen der bewegten (für sehr grosse Werthe von  $v$ ) und ruhenden Intensität befindet sich eine ziemlich ausgedehnte Lücke, wo keine merkliche Emission stattfindet.

Wie wäre diese Thatsache mit unserer Hypothese in Einklang zu bringen?

Dazu wäre erforderlich, dass die Function  $I = f(v)$  für bestimmte Werthe von  $v$  klein wäre und durch ein Minimum hindurchginge. Das wäre allerdings wohl denkbar, wenn das entsprechende Atomion eine gestreckte Form hätte, möglicherweise lässt sich aber dieser scheinbare Widerspruch in viel einfacherer Weise erklären.

Stark nimmt nämlich an, dass die Lücke zwischen ruhender und bewegter Intensität bei seinen photographischen Aufnahmen des Spektrums der Kanalstrahlen durch die geringe Lichtemission der bewegten Intensität für kleinere Werthe von  $v$  bedingt sei. Es kann aber dafür eine andere Erklärung gegeben werden. Es mag wohl sein, dass die positiven Atomionen mit entsprechenden kleineren Geschwindigkeiten garnicht oder nur in geringer Anzahl in dem Kanalstrahlenraum vorhanden sind.

In der That werden die in dem Kathodenraum gegen die negativ geladene durchlöcherter Kathode sich bewegenden positiven Atomionen von der Kathode angezogen. Es ist dann wohl denkbar, dass in der Nähe der Kathodenlöcher diese Anziehung sich so stark geltend macht, dass die mit kleineren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten begabten Atomionen von ihren geradlinigen Bahnen dermaassen abgelenkt werden, dass sie nicht mehr durch die Kathoden-

1) Berechnet nach der Formel

$$v = 0,485 \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{T}{273}} \frac{\text{klm.}}{\text{sec.}}$$

2) Siehe Stark, Ueber die Lichtemission der Kanalstrahlen im Wasserstoff. Ann. d. Ph. (4) Bd. 21, p. 401 (1906).

löcher hindurchgehen können und einfach auf die Kathode stossen. Nur die am schnellsten sich bewegenden Theilchen, die ein ziemlich grosses Potentialgefälle durchlaufen haben, werden frei durchgelassen und den entsprechenden Doppler-Effekt im Kanalstrahlenraum hervorrufen. Ausserdem können andere Theilchen, welche aus der unmittelbaren Nähe der Kathodenlöcher herstammen und welchen die kleinsten Geschwindigkeiten zukommen, ebenfalls in den Kanalstrahlenraum eintreten. Dann würden in demselben nur Theilchen mit sehr grossen und sehr kleinen Geschwindigkeiten vorhanden sein; die ersten würden dann die bewegte und die anderen die sogenannte «ruhende» Intensität bedingen. Ist diese Erklärungsweise richtig, so würde dadurch der Widerspruch mit unserer Hypothese, nämlich dass die Ursache der Lichtemission immer die Translationsbewegung der positiven Atomionen ist, aufgehoben.

Alle die in diesem Paragraphen angeführten theoretischen Ueberlegungen sind selbstverständlich nur als Vermuthungen aufzufassen, die jedoch eine gewisse Plausibilität für sich haben. Die Frage wird dadurch nicht erschöpft.

Es mag wohl sein, dass andere viel bessere Erklärungen für die eigenthümliche schleifenartige Verdoppelung der beiden Quecksilberlinien gegeben werden können.

Bis nicht weitere Versuche an anderen Linien und anderen Stoffen diese Frage genügend aufgeklärt haben, wäre es verfrüht hier auf weitere Einzelheiten einzugehen.



PRESENTED  
18 JUN. 1916





Цѣна: 1 руб. 40 к.; Prix: 3 Mk.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и Н. Л. Риннера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петербур., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Ключина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Ниммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Лозанъ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kymmell à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

8 JUN. 1916

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG.**

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 2.**

**Volume XXII. № 2.**

ИЗСЛѢДОВАНІЯ

**НАДЪ ОСМОТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

И

**ТУРГОРОМЪ РАСТИТЕЛЬНЫХЪ КЛѢТОКЪ.**

**В. В. Лепешкинъ.**

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 31 января 1907 года).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1907. ST.-PÉTERSBOURG.**





**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**  
**MÉMOIRES**  
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG.  
**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 2.**

**Volume XXII. № 2.**

---

ИЗСЛѢДОВАНІЯ  
**НАДЪ ОСМОТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**  
И  
**ТУРГОРОМЪ РАСТИТЕЛЬНЫХЪ КЛѢТОКЪ.**

**В. В. Лепешкинъ.**

---

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 31 января 1907 года).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1907. ST.-PÉTERSBOURG.**

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.  
С.-Петербургъ, Декабрь 1907. Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Олденбургъ*.

ТИПОГРАФІА ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.  
Вас. Остр., 9 лин., № 12.

# СОДЕРЖАНІЕ.

	СТРАНИЦЫ.
Предисловіе . . . . .	1
<b>Гл. I. Тургорное давленіе и его слагающія.</b>	
А. Краткій историческій очеркъ . . . . .	3
В. Терминологія . . . . .	4
С. Осмотическое давленіе клітчного сока и окружающаго раствора . . . . .	7
1. Вліяніе проницаемости плазматической перепонки для растворенныхъ веществъ на осмотическое давленіе клітчного сока и окружающаго раствора . . . . .	8
2. Вліяніе проницаемости плазмы и оболочекъ клітокъ для воды на осмотическое давленіе клітчного сока и особенности осмотической системы тканей растеній . . . . .	17
3. Осмотическое давленіе клітокъ, богатыхъ плазматическимъ содержимымъ . . . . .	20
D. Центральное давленіе . . . . .	22
E. Давленіе разбуханія . . . . .	27
F. Тургорное давленіе въ кліткахъ съ многочисленными вакуолями . . . . .	29
Выводы главы I . . . . .	29
<b>Гл. II. Методы опредѣленія тургорнаго давленія и его слагающихъ въ кліткахъ съ вакуолями.</b>	
А. Центральное давленіе . . . . .	31
В. Осмотическое давленіе наружнаго раствора . . . . .	32
1. Опредѣленіе проницаемости плазматической перепонки для веществъ наружнаго раствора . . . . .	34
2. Опредѣленіе фактора проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ наружной жидкости, при помощи изотоническихъ коэффициентовъ . . . . .	37
3. Вліяніе слабого и сильнаго плазмолыза на проницаемость плазматической перепонки . . . . .	43
С. Осмотическое давленіе клітчного сока . . . . .	49
1. Плазмолитическій методъ . . . . .	50
2. Кріоскопическій методъ . . . . .	53
3. Аналитическій методъ . . . . .	54
4. Механическіе методы . . . . .	55
D. Особенности опредѣленія проницаемости плазматической перепонки клітокъ листовыхъ сочлененій . . . . .	61
1. Причина паденія концентраціи клітчного сока сочлененій . . . . .	61
2. Опредѣленіе величины проницаемости плазматической перепонки клітокъ сочлененій для веществъ, растворенныхъ въ ихъ соку . . . . .	72
Выводы главы II . . . . .	73

<b>Гл. III. Измѣненія тургорнаго давленія и его ближайшія причины.</b>	
А. Общее состояніе вопроса въ настоящее время . . . . .	75
В. Вліяніе свѣта на тургорное давленіе листовыхъ сочлененій и его ближайшія причины . . . . .	81
1. Теоретическое предположеніе о причинѣ измѣненія тургорнаго давленія сочлененій . . . . .	85
2. Примѣненіе аналитическаго метода къ выясненію причинъ измѣненія тургорнаго давленія сочлененій . . . . .	86
3. Примѣненіе метода уменьшенія концентраціи клѣточного сока сочлененій . . . . .	87
4. Примѣненіе метода изотоническихъ коэффициентовъ . . . . .	92
С. Причина движенія листьевъ при измѣненіи освѣщенія . . . . .	97
D. Причина обратныхъ сонныхъ движеній листьевъ . . . . .	109
E. Вліяніе свѣта на тургорное давленіе клѣтокъ эпидермиса <i>Tradescantia discolor</i> и <i>Spirogyra</i> . . . . .	115
Выводы главы III . . . . .	123
Дополненіе . . . . .	125
Литература разбираемыхъ вопросовъ . . . . .	132

---

## ПРЕДИСЛОВІЕ.

---

Предлагаемая работа посвящается разработкѣ двухъ, какъ извѣстно, тѣсно сопрягающихся между собою вопросовъ объ осмотическихъ свойствахъ и тургорѣ растительной клѣтки. Хотя эти вопросы настолько близки, что существованіе одного изъ нихъ влечетъ также и возникновеніе другого, однако каждый изъ нихъ лежитъ въ основаніи двухъ различныхъ отдѣловъ физиологіи. Эти отдѣлы, какъ мы знаемъ, посвящены съ одной стороны изученію питанія растенія, съ другой — изученію его роста.

Такъ какъ растительная клѣтка по большей части всю свою жизнь обречена проводить окруженною плотной оболочкой, то понятно почему всѣ существующія теоріи ея роста ограничиваются пока толкованіемъ причины роста клѣточной оболочки. Здѣсь то тургоръ, какъ причина вызывающая растяженіе послѣдней, и послужилъ канвой для обоснованія Саксъ-де-Фризовскаго механическаго объясненія роста клѣтки и тканей. Если въ послѣдствіи это объясненіе и подверглось значительнымъ нападкамъ главнымъ образомъ со стороны Пфеффера, то все-же понятіе о тургорѣ, какъ объ извѣстной «формальной» причинѣ роста, никѣмъ никогда не оспаривалось. Просматривая однако всѣ накопившіяся въ теченіе послѣдняго полвѣка работы, стремящіяся выяснитъ механику роста клѣточной оболочки, нельзя не согласиться съ тѣмъ, что роль тургора въ этомъ процессѣ остается пока по крайней мѣрѣ не совсѣмъ ясной.

Прежде чѣмъ разбираться однако въ отношеніяхъ, существующихъ между ростомъ и тургоромъ, мнѣ представлялось необходимымъ болѣе подробно изучить само явленіе тургора растительной клѣтки и вліяніе на него различныхъ внутреннихъ и внѣшнихъ факторовъ; ниже мы узнаемъ, какъ недостаточенъ накопленный до сихъ поръ опытный матеріалъ для полученія полной картины этого явленія. Безъ полного же разъясненія явленія тургора и вліянія на него различныхъ факторовъ нельзя и думать о какомъ-нибудь опредѣленномъ разрѣшеніи вопроса объ участіи его въ ростѣ клѣтки.

Такъ какъ явленіе тургора неразрывно связано съ осмотическими свойствами клѣтки, то необходимость изученія перваго вызываетъ также и необходимость изслѣдованія послѣднихъ независимо отъ важности этого изслѣдованія для развитія нашего ученія о питаніи растеній. Только разрѣшивъ эти вопросы, насколько это представлялось возможнымъ, я могъ на основаніи полученныхъ данныхъ съ увѣренностью взяться за изслѣдованіе участія тургора въ различныхъ видахъ роста растеній <sup>1)</sup>.

---

---

1) Одно предварительное сообщеніе о полученныхъ при этомъ результатахъ мнѣ удалось уже напечатать (Beihefte zum Botanischen Centralblatt, 1907). | Болѣе же подробное описаніе всѣхъ моихъ опытовъ въ этомъ направленіи я намѣреваюсь опубликовать въ недалекомъ будущемъ.

## ГЛАВА I.

### Тургорное давленіе и его слагающія.

#### А. Краткій историческій очеркъ.

Самымъ первымъ изслѣдователямъ жизненныхъ отправленій растений, повидимому, было уже извѣстно, что тургесценція (la turgescence) растений зависитъ отъ накопленія въ ихъ тканяхъ избытка воды, выходящаго изъ растенія послѣ его смерти. Что этотъ избытокъ воды выходитъ изъ растенія также подъ вліяніемъ растворовъ солей не сопровождаемая смертью послѣдняго было показано впервые Дютроше (Dutrochet, p. 228). Послѣдній нашелъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что чѣмъ концентрированнѣе растворъ соли, въ который погружаются части растенія, тѣмъ большая потеря наблюдается въ ихъ тургесценціи. Однако, причина, удерживающая избыточную воду въ растеніи, оставалась еще долгое время не выясненной.

Только вначалѣ шестидесятихъ годовъ прошлаго столѣтія тургесценціи растений вновь было посвящено нѣсколько работъ. Хотя сокращеніе плазматическаго мѣшка, т. е. отставаніе плазмы отъ клѣточныхъ стѣнокъ при погруженіи срѣзовъ въ соляные растворы было описано еще Прингсгеймомъ (1854 г.) (Pringsheim, p. 12), но связь этого явленія съ тургесценціей уясняется, повидимому, впервые только Негели (Nägeli, I, p. 21). Судя по его описаніямъ названному автору были вполне ясны какъ причина тургесценціи, такъ и то обстоятельство, что при отставаніи плазмы отъ стѣнокъ осмотическая сила окружающаго раствора должна быть одинакова съ осмотической силой клѣточного сока. Послѣднее явленіе, названное позднѣе де-Фризомъ (de-Vries, II) плазмолизомъ, а также вообще многія особенности явленія осмоса въ живыхъ клѣткахъ получили себѣ однако удовлетворительное объясненіе лишь съ появленіемъ работы Траубе (Traube), посвященной изученію осмотическихъ свойствъ такъ называемыхъ осадочныхъ перепонокъ. Опыты Траубе въ послѣдствіи были развиты и дополнены Пфефферомъ (Pfeffer, II и IV), окончательно установившимъ причину тургора и объяснившимъ, какъ извѣстно, многія явленія, касающіяся осмотическаго давленія и обмѣна веществъ въ клѣткахъ.



Названнымъ изслѣдователемъ впервые было показано, какой неожиданно большой величины можетъ достигать внутреннее (осмотическое) давленіе въ клѣткахъ (Pfeffer, III, p. 111), и логически доказано, что это давленіе не зависить отъ свойствъ полупроницаемой перепонки, если не происходитъ экзосмоса растворенныхъ веществъ. Только установленіе послѣдняго положенія позволило точно опредѣлять во всякомъ частномъ случаѣ осмотическое давленіе въ клѣткахъ на основаніи данныхъ, полученныхъ изъ опытовъ надъ осадочными перепонками.

Съ появленіемъ работы Пфеффера осмотическое давленіе и тургоръ клѣтки сдѣлались почти синонимами, а въ новѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы встрѣчаемся даже перѣдко съ замѣной словъ «концентрація клѣточного сока» словами «тургоръ клѣтокъ» (см. напр. работу Copeland). Въ одной изъ своихъ послѣдующихъ работъ, Пфефферъ (Pfeffer, IX, p. 292 и слѣд.) окончательно установилъ «осмотическую систему клѣтки» въ такомъ видѣ, какъ это принимается обыкновенно современными изслѣдователями. Въ этой работѣ названный ученый показалъ, что давленіе, оказываемое содержимымъ клѣтки на ея стѣнки зависить не исключительно отъ осмотическаго давленія клѣточного сока, это давленіе слагается изъ трехъ величинъ: 1) осмотическаго давленія клѣточного сока, 2) такъ называемаго центрального давленія, происходящаго вслѣдствіе притяженія между собою частичекъ жидкой плазмы и направленнаго къ центру вакуоли, и наконецъ 3) давленія, образующагося вслѣдствіе разбуханія плазмы (Quellungsdruck). Два послѣднія давленія достигаютъ, по мнѣнію Пфеффера, весьма ощутительныхъ величинъ въ клѣткахъ съ богатымъ плазматическимъ содержимымъ. При отсутствіи же или малости вакуолей внутреннее давленіе въ клѣткѣ почти цѣликомъ состоитъ изъ давленія разбуханія. Насколько приведенное мнѣніе Пфеффера вѣрно мы узнаемъ въ отдѣлахъ, посвященныхъ специально слагающимъ внутренне-клеточнаго давленія. Здѣсь же я упомяну еще о важномъ заключеніи, къ которому приходитъ Пфефферъ въ той-же работѣ. Осмотическое давленіе веществъ, находящихся въ плазмѣ, какъ съ убѣдительностью доказываетъ авторъ, не можетъ вліять на тургоръ клѣтки, если въ послѣдней присутствуютъ вакуоли.

Послѣдней работой Пфеффера завершаются всѣ долголѣтнія изслѣдованія надъ раскрытіемъ причины тургесценціи растенія. Тѣмъ не менѣе, какъ мы увидимъ въ этой главѣ, наше современное представленіе о внутреклеточномъ давленіи нельзя считать во всякомъ случаѣ совершеннымъ.

## В. Терминологія.

Прежде чѣмъ приступить къ описанію своихъ опытовъ и соображеній мнѣ представлялось необходимымъ во избѣжаніе какой-либо неясности разъ на всегда установить названія, входящія въ кругъ понятія о тургорѣ растенія. Дѣло въ томъ, что благодаря расширившемуся кругу изслѣдованія увеличилось также число понятій, необходимыхъ для вѣрной передачи и описанія явленія; если раньше пользовались однимъ словомъ для обозначенія

нѣсколькихъ на нашъ взглядъ различныхъ явленій, то примѣненіе въ послѣдствіи старыхъ выраженій къ новымъ понятіямъ естественно должно было повести къ недоразумѣніямъ. Первые изслѣдователи пользовались напр. словами тургесценція (*la turgescence, die Turgeszenz* и т. п.) и тургоръ (*Turgor*) для обозначенія вообще извѣстнаго натяженія тканей растенія (напр. Dutrochet, Nägeli, Hofmeister и др.), позднѣе этими словами стали однако обозначать два различныя понятія. Подъ тургоромъ стали подразумѣвать «гидростатическое давленіе, оказываемое впитанной эндосмотическимъ путемъ водой на клѣточные стѣнки» (Sachs I, 1873, p. 686), тогда какъ тургесценціей начали называть «внутреннее натяженіе и наружную крѣпость» тканей (см. напр. учебникъ Van-Thighem'a, а также работы Pantanelli — p. 316 и Kolkwitz'a — p. 37). Кромѣ того послѣ установленія Пфефферомъ слагающихъ внутрисклѣточного давленія большинство авторовъ стало пользоваться по предложенію названнаго ученаго словомъ тургоръ для обозначенія всего давленія, оказываемаго содержимымъ клѣтки на ея стѣнки (Pfeffer X. Anm. p. 215; IX p. 297; XII p. 117; Pantanelli, p. 316 и др.). Однако это расчлененіе понятія сдѣлалось по всей вѣроятности не всѣмъ извѣстно; нѣкоторые авторы даже въ новѣйшее время вновь смѣшиваютъ тургоръ съ тургесценціей (напр. Aubert; van-Russelberghe I, p. 21, Hegler и др.), съ другой стороны иногда называютъ тургоромъ осмотическое давленіе соотвѣтствующее извѣстной концентраціи клѣточного сока (Copeland, Wortmann I, p. 264, Pantanelli, p. 316, 328, таб. XIV). Вполнѣ естественно, если описанное смѣшеніе понятій приводятъ иногда къ недоразумѣніямъ (напр. см. Kolkwitz, p. 37)<sup>1)</sup> и заставляетъ нѣкоторыхъ авторовъ изобрѣтать даже новыя названія (v. Russelberghe, I, p. 37 — 39).

Во избѣжаніе дальнѣйшей путаницы необходимо установить точную и вполнѣ определенную терминологию для понятій, входящихъ въ кругъ изучаемаго явленія. Подобно тому какъ это дѣлается въ физикѣ я предлагаю сохранить прежнія названія тургора или тургесценціи (*d. Turgor, d. Turgeszenz, l. turgescence*) для обозначенія извѣстнаго явленія натяженія тканей и клѣтокъ подъ вліяніемъ внутрисклѣточного давленія (напр. какъ въ физикѣ сохранены названія тяжести, магнетизма, электричества и т. п.), для обозначенія же *величинъ* пользоваться слѣдующими болѣе точными названіями.

1) Все давленіе, оказываемое содержимымъ клѣтки на единицу поверхности ея стѣнки, будемъ называть всегда **тургорнымъ давленіемъ** и выражать его въ атмосферахъ (т. е. въ единицѣ, равной 1033 граммъ на 1 кв. см.)<sup>2)</sup>. Это давленіе слагается по мнѣнію Пфеф-

1) Для иллюстраціи привожу здѣсь путаницу понятій, которую находимъ напр. въ работѣ Пантанелли. Послѣдній въ одномъ мѣстѣ своей работы говоритъ, что тургоръ (*Turgordruck*) клѣтки растетъ вмѣстѣ съ увяданіемъ (т. е. обезвоживаніемъ) растенія (Pantanelli, p. 316), при чемъ поясняетъ на той-же страницѣ, что тургоромъ (*Turgor*) должно считать все давленіе содержимаго клѣтки на стѣнки (*Gesammtsraupung*).

2) Соотвѣтствующее нѣмецкое названіе я предлагаю: *der Turgordruck*, французское — *la pression de la turgescence*.

Въ послѣднее время для измѣренія осмотическихъ давленій была предложена новая единица мприадинъ, равная  $\frac{1}{100}$  атмосферы (Ergera III). Эта единица кажется мнѣ однако совершенно излишней, въ виду новаго названія вводимого вмѣстѣ съ ней въ физику и соединенной съ этимъ путаницы.

фера изъ трехъ величинъ: осмотического давленія, соотвѣтствующаго концентраціи клѣточного сока, центрального давленія и давленія отъ разбуханія плазмы. Къ этимъ тремъ величинамъ присоединяется очевидно четвертая: осмотическое давленіе раствора, окружающаго клѣтку и насыщающаго ея оболочку. Величина тургорнаго давленія равна такимъ образомъ алгебраической суммѣ всѣхъ перечисленныхъ величинъ, причемъ осмотическое давленіе клѣточного сока входитъ въ нее со знакомъ «+», осмотическая сила окружающаго раствора и центральное давленіе со знаками «—», что касается давленія разбуханія, которое, по мнѣнію Пфеффера (Pfeffer IX р. 292), направлено въ сторону противоположную осмотическому давленію, то о немъ будетъ рѣчь ниже.

Такимъ образомъ мы будемъ говорить только о *величинѣ тургорнаго давленія* въ клѣткахъ данной ткани, а ни въ какомъ случаѣ не о величинѣ тургора данной ткани. Въ дальнѣйшемъ слова «тургоръ уменьшается, тургоръ увеличивается» нужно окончательно оставить и можно только говорить объ увеличеніи или уменьшеніи тургорнаго давленія клѣтокъ даннаго растенія или ткани.

2) *Отношеніе упругаго удлинненія оболочекъ клѣтокъ подъ вліяніемъ тургорнаго давленія* по какому-нибудь опредѣленному направленію *къ длинѣ* этихъ оболочекъ въ томъ-же направленію *при отсутствіи тургорнаго давленія* будемъ всегда называть **тургорнымъ натяженіемъ** по данному направленію данной клѣтки, ткани или органа. Такимъ образомъ если  $L$  есть нѣкоторая длина оболочки клѣтокъ по какому-нибудь направленію при имѣющемся тургорномъ давленіи и  $L_0$  — длина ея при отсутствіи тургорнаго давленія, то тургорное натяженіе этой оболочки есть  $\frac{L - L_0}{L_0}$ . Такъ какъ при  $L_0 = 1$  тургорное натяженіе равно  $L - L_0$ , то послѣднее есть вмѣстѣ съ тѣмъ удлинненіе единицы длины оболочки подъ вліяніемъ тургорнаго давленія по данному направленію.

Такимъ образомъ въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить только о *величинѣ тургорнаго натяженія* клѣтки, ткани и органа по данному направленію, а ни въ какомъ случаѣ ни о величинѣ тургесценціи, напряженія тканей и т. п.

Двумя приведенными величинами явленіе тургора опредѣляется вполне. Зная ихъ, мы имѣемъ полное представленіе объ явленіи тургесценціи данной клѣтки, ткани или органа.

Не трудно видѣть, что тургорное натяженіе есть извѣстная функція тургорнаго давленія при условіи неизмѣнности механическихъ свойствъ оболочки. Въ противномъ случаѣ тургорное натяженіе зависитъ понятно и отъ послѣднихъ. Такимъ образомъ при данныхъ механическихъ свойствахъ оболочки обѣ величины взаимно опредѣляются. Зная одну, мы будемъ въ состояніи найти и другую. Вмѣстѣ съ тѣмъ только при совмѣстномъ существованіи обѣихъ величинъ явленіе тургора дѣлается возможнымъ. Если-бы напр. оболочка клѣтокъ какой нибудь ткани была настолько крѣпка и неупруга, что не испытывала никакого растяженія подъ вліяніемъ тургорнаго давленія, то о тургорѣ или тургесценціи этой ткани не могло бы быть и рѣчи: ея крѣпость не зависѣла-бы отъ тургорнаго давленія. Такимъ же образомъ если-бы въ клѣткахъ ткани тургорное давленіе отсутствовало, но

оболочки ихъ были натянуты подъ вліяніемъ постороннихъ причинъ, то о тургорѣ или тургесценціи этой ткани также не могло-бы быть рѣчи. Тургорное натяженіе къ сожальнію не можетъ быть изслѣдовано въ этой работѣ; я долженъ пока ограничиться только тургорнымъ давленіемъ. Обратимся прежде всего къ разсмотрѣнію упомянутыхъ выше слагаемыхъ тургорнаго давленія въ отдѣльности.

### С. Осмотическое давленіе клѣточного сока и окружающаго раствора.

Осмотическое давленіе клѣточного сока входитъ, какъ мы видѣли, въ число слагающихъ тургорнаго давленія, при этомъ въ большинствѣ случаевъ составляетъ его главную часть, а слѣдовательно имѣетъ и наибольшее значеніе. Что-же касается другого слагающаго этого давленія, поставленнаго въ заголовкѣ параграфа, то оно, какъ извѣстно, можетъ быть весьма различно. Съ одной стороны величина его ничтожна у одноклѣтныхъ и нитчатчатокъ, живущихъ въ прѣсной водѣ, съ другой стороны она можетъ достигать весьма солидныхъ размѣровъ у растеній солончаковыхъ почвъ и морскихъ водорослей. Оба эти слагающія тургорнаго давленія, какъ имѣющія одинаковую природу, удобнѣе всего разсмотрѣть параллельно, что мы и сдѣлаемъ.

Осмотическое давленіе, какъ извѣстно, зависитъ прежде всего отъ концентраціи раствора и температуры. Говорить о родѣ этой зависимости, а также о поправкахъ, которыя должны быть введены въ нее благодаря электролитической диссоціаціи и пр., мнѣ представляется здѣсь излишнимъ въ виду общеизвѣстности вопроса; поэтому я позволю себѣ только сослаться на учебники и на нѣкоторыя изъ послѣднихъ работъ въ области тургорнаго давленія (см. напр. Russelberghe, I, p. 32; II, p. 206; Lepeschkin, I и II). Мнѣ кажется необходимымъ остановиться однако на разборѣ зависимости осмотическаго давленія отъ проницаемости перепонки для растворенныхъ веществъ, а также на нѣкоторыхъ частностяхъ, какъ напр. на случаѣ клѣтки съ большимъ плазматическимъ содержаниемъ, на особенностяхъ осмотической системы тканей растеній, гдѣ клѣтки могутъ получать необходимую для осмотическаго давленія воду лишь отъ сосѣднихъ съ ними клѣтокъ и т. п. <sup>1)</sup> Всѣ перечисленные вопросы насколько мнѣ извѣстно еще очень мало

1) Кауфлеръ (F. Kaufler, Zeitschrift f. phys. Chemie, 1903 Bd. 43 p. 686) пытался въ послѣднее время найти математическую зависимость осмотическаго давленія отъ кривизны поверхности жидкости. Согласно его заключеніямъ въ клѣткѣ изъ целлюлозы для осмотическаго равновѣсія съ наружнымъ растворомъ долженъ присутствовать нѣкоторый избытокъ концентрацій, достигающій по вычисленіямъ автора въ волокнѣ хлопка для анилиновой краски съ молекулярнымъ вѣсомъ 600 до 1,2% (p. 693). Не вдаваясь въ подробную критику доказательствъ автора, замѣчу

лишь, что, допуская вліянія кривизны поверхности жидкости на осмотическое давленіе въ смыслѣ автора мы признаемъ существованіе *perpetuum mobile*.

Дѣйствительно вообразимъ себѣ клѣтку изъ целлюлозы, имѣющую одну стѣнку выпуклую, а другую вогнутую (т. е. въ разрѣзѣ имѣющую видъ серпа). Внутри клѣтки за выпуклой стѣнкой долженъ по Кауфлеру присутствовать всегда избытокъ вещества надъ наружнымъ растворомъ, тогда какъ за вогнутой стѣнкой въ клѣткѣ жидкость будетъ менѣе концентрированная, чѣмъ снаружи. Такимъ образомъ въ

обращали на себя вниманіе физиологовъ, не смотря на ихъ далеко непослѣднее значеніе въ ученіи о тургорѣ клѣтокъ.

1. Вліяніе проницаемости плазматической перепонки для растворенныхъ веществъ на осмотическое давленіе клѣточного сока и наружнаго раствора.

Какъ было упомянуто въ краткомъ историческомъ очеркѣ, Пфефферъ показалъ, что свойство перепонки не вліяетъ на осмотическое давленіе, если не происходитъ экзосмоса раствореннаго вещества, т. е. при абсолютной полупроницаемости перепонки. Въ дѣйствительности же такихъ перепонокъ, какъ показали позднѣйшія изслѣдованія, не существуетъ. Поэтому и въ опытахъ Пфеффера (Pfeffer, IV) осмотическое давленіе при различныхъ осадочныхъ перепонкахъ получалось различнымъ и въ сущности достигало своей теоретической величины только при веществахъ мало проницаемыхъ черезъ перепонки, какъ напр. сахаръ, гумми-арабикъ и т. п., тогда какъ извѣстное соотношеніе, существующее между осмотическимъ давленіемъ, концентраціей, температурой и т. п., оказывалось совершенно непрѣмнымъ къ другимъ веществамъ. Въ послѣдствіи Тамманъ (Tammann, II) доказалъ, что такой результатъ опытовъ Пфеффера зависилъ исключительно отъ проницаемости осадочныхъ перепонокъ для веществъ растворенныхъ. При этомъ послѣдняя оказалась для изслѣдованныхъ имъ солей настолько значительной, что не было ничего удивительнаго въ томъ, что осмотическое давленіе въ опытахъ Пфеффера иногда составляло только 75% — 50% его теоретической величины.

Однако проницаемость живой плазматической перепонки, повидимому, не такъ велика какъ осадочной, иначе де-Фризу (de-Vries, VI) не удалось-бы установить его изотоническихъ коэффициентовъ при помощи плазмолиза, такъ какъ величина послѣднихъ, какъ извѣстно, очень близко подходитъ къ теоретической. Основываясь поэтому на данныхъ де-Фриза, Пфефферъ приходитъ къ заключенію, что «измѣненія плазматической перепонки не могутъ производить сколько-нибудь значительныхъ колебаній давленія въ живой клѣткѣ» (Pfeffer, IX, p. 304). Это заключеніе Пфеффера настолько укоренилось въ умахъ физиологовъ, что послѣдніе рѣшались иногда лучше допускать какія-нибудь таинственныя силы (Пантанелли) или же совсѣмъ отказываться отъ объясненія явленія (Гильбургъ), чѣмъ находиться въ противорѣчій съ такимъ авторитетомъ, какъ Пфефферъ (см. гл. III). Такъ какъ исключенія не представляетъ и плазмоллизированная клѣтка, то послѣдній вполне послѣдовательно заключаетъ далѣе, что «объемъ плазмоллизированнаго протопласта остается при измѣненіяхъ температуры неизмѣннымъ». Послѣднее положеніе одинъ изъ учениковъ Пфеффера Риссельбергъ (Rysselberghe II) пытался даже подкрѣпить опытомъ, наблюдая объемъ плазмоллизированнаго протопласта клѣтокъ листового эпидермиса *Tradescantia discolor* при измѣненіи температуры съ 0° до 10°С. (l. c. p. 216). Такъ какъ названный объемъ оставался при этомъ безъ измѣненія, то Риссельбергъ считаетъ

---

слѣдствіи дифузіи обѣихъ жидкостей будетъ вѣчно | стѣнку къ вогнутой и токъ воды черезъ вогнутую къ  
поддерживаться токъ вещества черезъ выпуклую | выпуклой.

вышеприведенный взглядъ Пфеффера доказаннымъ. Однако мои изслѣдованія надъ *Pilobolus* показали, что проницаемость плазматического мѣшка для растворенныхъ веществъ подъ вліяніемъ различныхъ внѣшнихъ воздѣйствій можетъ, измѣняясь въ ту или другую сторону, сильно отражаться на тургорномъ давленіи клѣтки (Лепешкинъ, стр. 11—24). Въ этомъ случаѣ названная проницаемость впрочемъ достигаетъ въ особенности значительной величины. Въ настоящее время у насъ не имѣется пока данныхъ для сужденія о томъ насколько сильно отражается проницаемость плазматической перепонки <sup>1)</sup> для веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, на осмотическомъ давленіи послѣдняго въ обыкновенныхъ случаяхъ.

*Опыты Риссельберга нельзя считать во всякомъ случаѣ доказательными.* Дѣло въ томъ, что эти опыты производились надъ клѣтками эпидермиса *Tradescantia*, сильно сплюснутыми въ направленіи оптической оси микроскопа; благодаря послѣднему обстоятельству форма плазмолизированнаго протопласта этихъ клѣтокъ иногда очень неправильна, несмотря на то, что въ микроскопѣ представляется почти шарообразной. Трудно поручиться въ томъ, что измѣненіе объема протопласта въ опытахъ Риссельберга не происходило за счетъ увеличенія горизонтальныхъ сѣченій этого протопласта съ верхней и нижней стѣнками клѣтки, въ то время какъ оптическое (наибольшее) сѣченіе оставалось неизмѣненнымъ. Такимъ образомъ клѣтки *Tradescantia* являются не подходящимъ объектомъ для наблюденія измѣненій объема плазмолизированнаго протопласта. Мнѣ представлялось поэтому желательнымъ провѣрить опыты Риссельберга надъ другими объектами, допускающими болѣе точное установленіе объема протопласта и его измѣненій.

Объектомъ, болѣе пригоднымъ для этой цѣли, оказалась *Spigoguga*. Плазмолизированный протопластъ цилиндрическихъ клѣтокъ послѣдней по истеченіи нѣкотораго времени всегда плотно прижимается къ боковымъ стѣнкамъ; измѣненіе его объема можетъ происходить такимъ образомъ только въ продольномъ направленіи; а такъ какъ клѣтки можно выбирать для наблюденія длинными (насколько это позволяетъ понятно поле зрѣнія микроскопа), то можно подмѣтить при большихъ увеличеніяхъ уже измѣненіе объема протопласта на 0,1—0,3%.

Прежде чѣмъ приступить къ описанію опытовъ, разберемъ теоретически, какихъ измѣненій объема плазмолизированнаго протопласта слѣдуетъ ожидать при перемѣнѣ осмотическихъ свойствъ плазматической перепонки.

Зависимость осмотического давленія отъ проницаемости перепонки, какъ было показано въ моихъ опубликованныхъ уже работахъ (Лепешкинъ, р. 29 *Lepeschkin* II р. 427 и III, р. 598), можетъ быть выражена формулой:  $P = P_0 (1 - \mu)$ , гдѣ  $P_0$  осмотическое давленіе въ предположеніи абсолютной непроницаемости перепонки для растворенныхъ веществъ,  $P$  — дѣйствительное осмотическое давленіе и  $\mu$  — величина пропорціональная

1) Въ дальнѣйшемъ я буду пользоваться словами | плазмы, отдѣляющаго вакуолю отъ наружной жид-  
«плазматическая перепонка» въ смыслѣ всего слоя | кости или клѣточной стѣнки.

проницаемости перепонки т. е. отношенію  $\frac{p}{c}$ , гдѣ  $p$  — количество граммовъ вещества, экзосмирующаго въ одну секунду черезъ одинъ кв. сант. поверхности перепонки и  $c$  — концентрація раствора, изъ котораго происходитъ осмозъ. Величину  $\mu$  мы условимся въ дальнѣйшемъ называть факторомъ проницаемости. Такъ какъ  $P_0$  по формуламъ Вантъ Гоффа и Арреніуса равно  $RCT [1 + (n - 1)\alpha]$ , гдѣ  $R$  — газовая постоянная,  $C$  — концентрація раствора <sup>1)</sup>,  $T$  абсолютная температура,  $\alpha$  — степень электролитической диссоціаціи и  $n$  — число іоновъ, на которые распадается растворенное вещество, то:  $P = RCT [1 + (n - 1)\alpha] (1 - \mu)$ .

Если мы обозначимъ факторъ проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ соку, черезъ  $\mu$ , факторъ проницаемости ея для плазмолизирующаго вещества черезъ  $\mu_0$ , концентрацію кліточного сока послѣ того какъ фигура плазмолиза установилась черезъ  $C$ , концентрацію плазмолизирующаго раствора черезъ  $C_0$  и коэффициенты электролитической диссоціаціи перваго и втораго черезъ  $i$  и  $i_0$ , должно быть справедливо слѣдующее равенство:

$$I. \dots\dots\dots c (1 - \mu) i = c_0 (1 - \mu_0) i_0.$$

Мы можемъ вообразить себѣ (по отношенію къ изслѣдуемому вопросу) три случая плазмолиза. Во первыхъ, когда проницаемость плазматическаго мѣшка для плазмолизирующаго вещества меньше проницаемости его для веществъ, растворенныхъ въ кліточномъ соку (здѣсь подразумѣвается понятно средняя проницаемость всѣхъ содержащихся въ немъ осмотически дѣйствующихъ веществъ); во вторыхъ, когда обѣ проницаемости одинаковы, и наконецъ въ третьихъ, когда первая больше послѣдней.

Для перваго случая плазмолиза  $\mu > \mu_0$ , для втораго:  $\mu = \mu_0$  и для третьаго:  $\mu < \mu_0$ .

Предположимъ, что подъ вліяніемъ измѣненія температуры проницаемость плазматическаго мѣшка увеличивается въ  $m$  разъ, гдѣ  $m \geq 1$ . Изслѣдованія Риссельбергомъ (Rysselberghe, II) показали, что проницаемость плазматической перепонки измѣняется съ температурой одинаково для веществъ разнообразнаго химическаго состава. Мы можемъ предположить, слѣдовательно, что она измѣняется одинаково также для веществъ кліточного сока и плазмолизирующаго вещества. Такимъ образомъ  $\mu$  и  $\mu_0$  должны превратиться въ нашемъ случаѣ въ  $\mu m$  и  $\mu_0 m$  и равенство перейдетъ въ слѣдующее неравенство:

$$II. \dots\dots\dots c (1 - \mu m) i \geq c_0 (1 - \mu_0 m) i_0.$$

1) Мы будемъ, какъ это обыкновенно дѣлается, | раствора (Nernst, II Aufl., p. 350). Гдѣ подъ  $C$  будетъ  
подъ величиною концентраціи  $C$  подразумѣвать число | разумѣтся другая величина, тамъ будетъ оговорено  
граммъ-молекулъ вещества, находящихся въ литрѣ | особо.

Изъ равенства I имѣемъ:

$$\text{III} \dots \dots \dots c = \frac{c_0(1 - \mu_0) i_0}{(1 - \mu) i}.$$

Вставивъ въ неравенство II вмѣсто  $c$  его величину изъ III имѣемъ:

$$\frac{c_0(1 - \mu_0)(1 - \mu t)}{1 - \mu} \geq c_0(1 - \mu_0 t) \text{ или:}$$

$$\text{(IV)} \dots \dots \dots \mu(1 - t) \geq \mu_0(1 - t).$$

Если  $t < 1$ , то изъ (IV) имѣемъ:  $\mu \geq \mu_0 \dots \dots \text{(V)}$ .

Если  $t > 1$ , то изъ (IV) имѣемъ:  $\mu \leq \mu_0 \dots \dots \text{(VI)}$ .

Сравнивая неравенства (V) и (VI) съ неравенствомъ (II) приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ:

I. Если проницаемость плазматического мѣшка повышается (т. е.  $t > 1$ ), то:

1) объемъ плазмолизированнаго протопласта увеличивается при  $\mu < \mu_0$ , т. е. когда вещества, находящіяся въ клѣточномъ соку, меньше проникаютъ черезъ плазму чѣмъ вещество плазмолизирующее.

2) объемъ плазмолизированнаго протопласта уменьшается при  $\mu > \mu_0$ , т. е. когда вещества, находящіяся въ соку, больше сильно проникаютъ чѣмъ плазмолизирующее вещество.

II. Если проницаемость плазматического мѣшка уменьшается (т. е.  $t < 1$ ) то:

1) объемъ плазмолизированнаго протопласта увеличивается при  $\mu > \mu_0$ , т. е. когда вещества, растворенныя въ соку, больше сильно проникаютъ черезъ плазму, чѣмъ плазмолизирующее вещество.

2) объемъ плазмолизированнаго протопласта уменьшается при  $\mu < \mu_0$ , т. е. когда вещества сока меньше проникаютъ черезъ плазму, чѣмъ плазмолизирующее вещество.

III. Объемъ плазмолизированнаго протопласта при измѣненіи проницаемости плазматического мѣшка остается безъ перемѣны, если послѣдняя какъ для веществъ, находящихся въ соку такъ и въ наружной жидкости одинаковы ( $\mu = \mu_0$ ).

Разсматривая кривую, данную Риссельбергомъ (Rysselberghe, II, p. 190, 217 и 218) для измѣненія проницаемости плазмолизированнаго плазматического мѣшка при измѣненіи температуры, видимъ, что увеличеніе проницаемости происходитъ главнымъ образомъ при переходѣ отъ  $0^\circ$  къ  $20^\circ$ , при дальнѣйшемъ же увеличеніи температуры послѣдняя растетъ очень слабо. Поэтому наибольшее измѣненіе объема протопласта можно ожидать главнымъ образомъ при охлажденіи клѣтки.

Въ приведенныхъ ниже опытахъ плазмолизирующими веществами служили тростниковый сахаръ и глицеринъ. Проницаемость плазматического мѣшка для перваго изъ этихъ



веществъ, какъ извѣстно, настолько ничтожна, что приравняется обыкновенно нулю, тогда какъ проницаемость для глицерина наоборотъ больше проницаемостей какихъ-либо другихъ веществъ (de-Vries, IX). Проницаемость плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ соку, будетъ поэтому занимать среднее мѣсто между двумя названными проницаемостями. Такимъ образомъ при плазмолизѣ сахаромъ мы должны наблюдать уменьшеніе объема протопласта при увеличеніи температуры и наоборотъ (см. стр. 11: I, 2 и II, 1), тогда какъ при плазмолизѣ глицериномъ нужно ждать увеличеніе объема протопласта при увеличеніи температуры и наоборотъ (см. I, 1 и II, 2).

До сихъ поръ мы предполагали, что измѣненіе температуры вліяетъ только на проницаемость плазматическаго мѣшка, на самомъ дѣлѣ она вліяетъ также и на степень электролитической диссоціаціи  $\alpha$  въ выраженіи для  $P$  на стр. 10; хотя это вліяніе и незначительно (при увеличеніи температуры на  $1^\circ \text{C}$ .  $\alpha$  измѣняется на  $0,03\%$ — $0,1\%$  своей величины, см. Arrhenius, p. 99 и 100), однако его нельзя игнорировать совершенно въ особенности въ нашемъ случаѣ, гдѣ плазмолизирующей жидкостью является растворъ неэлектролита. Не зная качественнаго состава веществъ, растворенныхъ въ соку, нельзя понятно точно вычислить величину названнаго вліянія и даже навѣрное сказать будетъ-ли величина  $\alpha$  съ увеличеніемъ температуры уменьшаться или увеличиваться, однако максимальную величину ошибки при установленіи измѣненія объема протопласта вслѣдствіе измѣненія температуры можно приблизительно установить. Наибольшее измѣненіе при нагреваніи съ  $18^\circ \text{C}$ . до  $52^\circ \text{C}$ . претерпѣваетъ степень диссоціаціи  $KCl$  (Arrhenius. l. c.), при чемъ происходитъ уменьшеніе послѣдней почти на  $3\%$ . Въ моихъ опытахъ измѣненіе температуры не превышало  $20^\circ \text{C}$ ., т. е. максимальное измѣненіе  $\alpha$  могло быть около  $1,7\%$ , максимальное же уменьшеніе величины  $[1 + (n - 1)\alpha]$  было-бы около  $1\%$ , если-бы клѣточный сокъ содержалъ въ растворѣ только  $KCl$ . Но въ клѣточномъ соку спирогиры преобладаютъ, повидимому, органическія соединенія, являющіеся продуктами ассимиляціи, показывающія увеличеніе  $\alpha$  при повышеіи температуры; такимъ образомъ при установленіи объема протопласта максимальная ошибка въ слѣдствіи измѣненія степени электролитической диссоціаціи клѣточного сока во всякомъ случаѣ меньше  $1\%$  и можетъ сдѣлаться совершенно ничтожной, благодаря присутствію въ послѣднемъ не электролитовъ.

Обратимся теперь къ опытнымъ даннымъ.

Объектами въ моихъ опытахъ служили 3 точно не опредѣленные виды спирогиры.

Перемена температуры достигалась при помощи стеклянной водяной бани (съ постояннымъ притокомъ и оттокомъ нагрѣтой или охлажденной воды), прочно прикрѣпленной къ подвижному столику микроскопа. Короткое предметное стекло вкладывалось въ глубокую стеклянную чашку, вставлявшуюся въ баню; и прилѣплялось къ ея дну воскомъ или сургучомъ. Послѣ опусканія трубы микроскопа промежутки между послѣдней и чашкой закладывались толстымъ слоемъ ваты. Температура какъ въ водяной бани такъ и во внутренней чашкѣ опредѣлялась одновременно короткими термометрами (разница показаній была

обыкновенно въ 1°). Во избѣжаніе заслоненія объекта конденсаціонной водой (напр. при охлажденіи) я пользовался водной имерсіонной системой.

Предварительный опытъ показалъ, что окончательная фигура плазмолиза (т. е. окончательныя очертанія плазмолизированнаго протопласта) устанавливается при комнатной температурѣ обыкновенно въ  $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$  часа, если плазмолизъ не очень силенъ (напр. если объемъ плазмолизированнаго протопласта составляетъ около  $\frac{3}{4}$  неплазмолизированнаго). Во избѣжаніе какихъ-либо ошибокъ въ этомъ отношеніи въ моихъ опытахъ зарисовывалась обыкновенно фигура плазмолиза черезъ 2 часа послѣ перенесенія объекта въ плазмолизирующій растворъ. Между покровнымъ и предметными стеклами, чтобы не раздавить объектъ, помѣщалось нѣсколько стеклянныхъ волосковъ. Зарисовываніе производилось при помощи рисовальнаго окуляра Лейца, причемъ какъ самъ окуляръ, такъ труба микроскопа и рисовальный столикъ прочно закрѣплялись въ одномъ положеніи. При установленіи измѣненія объема протопласта въ опытахъ, гдѣ плазмолизъ производился глицериномъ, принималось во вниманіе увеличеніе этого объема въ слѣдствіи эндосмоса глицерина въ клѣточный сокъ при температурѣ опыта, опредѣлявшееся предварительнымъ наблюденіемъ.

Если препаратъ оставался до начала наблюденія болѣе долгое время въ плазмолизирующемъ растворѣ, то объ этомъ каждый разъ упоминается при описаніи опытовъ. Слѣдующіе опыты относятся къ одному изъ 3-хъ видовъ спирогиры. Аналогичные опыты съ двумя другими видами привели къ болѣе или менѣе тѣмъ-же результатамъ; мнѣ представляется поэтому излишнимъ приводить ихъ здѣсь.

## О П Ы Т Ы.

I. Водоросль культивировалась долгое время на слабомъ разсѣянномъ свѣту. Хлорофилловая лента ярко-зеленая, крахмала мало.

A. *Плазмолизирующая жидкость*: 16% растворъ тростниковаго сахара.

*Оп. 1.* Одновременно наблюдаются 5 клѣтокъ. Температура увеличена съ 22° С° (комнатн.) до 55° С. Измѣненія объема не замѣтно. При 65° С. наступаетъ быстрое уменьшеніе объема протопласта и смерть клѣтокъ.

*Оп. 2.* Наблюдаются одновременно 5 клѣтокъ. а) Температура повышается съ 0° (таяющій лёдъ втеченіе 5 часовъ) до 25° С. Объемъ протопластовъ всѣхъ клѣтокъ уменьшается на 0,5 — 1%; б) Температура повижена до 2° С. Объемъ во всѣхъ клѣткахъ вновь увеличивается до прежней величины; в) Температура увеличена вторично до 25° С. Наблюдается снова уменьшеніе объема д) Температура увеличена до 55° С. Измѣненія нѣтъ. При 60° С. (черезъ 2—4 минуты) — быстрое уменьшеніе объема протопласта и смерть клѣтокъ.

*Оп. 3.* Препарат приготовленъ за 40 ч. до опыта. Наблюдаются одновременно 8 клѣтокъ. а) Температура съ 16° С. повышается до 30° С. Только въ одной изъ нихъ — небольшое сокращеніе объема протопласта (ок. 1,8%). б) Температура увеличивается до 36° С.

Во всѣхъ клѣткахъ — уменьшеніе объема (3 — 5%). с) Температура понижена до 10° С — снова увеличеніе объема до первоначальной величины. Черезъ  $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$  часа всѣ клѣтки умерли, причемъ наблюдалось сильное уменьшеніе въ объемѣ протопластовъ.

*Оп. 4.* Наблюдаются 5 клѣтокъ одновременно. а) Температура понижена съ 25° С. до 2° С. Водоросль остается при 2° С. втеченіе 1½ часа. Объемъ протопласта во всѣхъ клѣткахъ увеличивается на 0,6 — 1,2%. б) Температура вновь повышается до 25° С. — уменьшеніе объема до первоначальной величины.

*Оп. 5.* Наблюдаются 4 клѣтки одновременно. Температура съ 17° С. понижается до 2° С. Незначительное увеличеніе объема протопласта.

*Оп. 6.* Наблюдаются одновременно 5 клѣтокъ. а) Температура повышается съ 0° (тающій ледъ втеченіе 5 часовъ) до 20° С. — незначительное уменьшеніе объема протопласта; б) Температура вновь понижается до 2° С. — почти востановленіе объема.

*Оп. 7.* Наблюдаются 8 клѣтокъ одновременно. а) Температура съ 20° С. увеличивается до 38° С. Измѣненіе объема протопласта незамѣтно. б) Температура поднимается до 55° С. — нѣтъ измѣненія объема. Въ одной клѣткѣ объемъ увеличился почти на 15%. с) Температура уменьшена до 20° С. — уменьшеніе объема почти до первоначальной величины и смерть клѣтки.

*В. Плазмолизирующая жидкость: разбавленный глицеринъ (4%).*

*Оп. 8.* Наблюдаются 9 клѣтокъ одновременно. а) Температура съ 0° (тающій ледъ втеченіе 5 час.) повышается до 20° С. (10 минутъ) — во всѣхъ клѣткахъ объемъ протопласта увеличивается на 3 — 5%. б) Температура вновь понижается до 2° С — во всѣхъ клѣткахъ сокращеніе объема почти до первоначальной величины.

*Оп. 9.* Наблюдаются 5 клѣтокъ одновременно. а) Температура съ 22° С. понижается до 2° С. (причемъ водоросль остается при этой температурѣ 1 ч.). — во всѣхъ клѣткахъ объемъ протопласта уменьшается на 2 — 5%. б) Температура вновь поднимается до 22° С. — объемъ увеличивается до первоначальной величины, а въ нѣкоторыхъ клѣткахъ и до величины, большей первоначальной.

*Оп. 10.* Наблюдаются одновременно 4 клѣтки. а) Температура съ 20° С. повышается до 35° С. — объемъ протопласта увеличивается на 1 — 1,4%. б) Температура повышается до 55° С. — дальнѣйшее увеличеніе объема. с) Послѣ пребыванія втеченіе 5 минутъ при 62° С. наступаетъ быстрое увеличеніе объема протопласта и смерть клѣтокъ. (Въ нѣкоторыхъ клѣткахъ — полное расхожденіе плазмолиза).

*11.* Наблюдаются одновременно 6 клѣтокъ. а) Температура съ 20° С. понижается до 2° С. (при чемъ водоросль остается при этой температурѣ около часу) — во всѣхъ клѣткахъ уменьшеніе объема протопласта на 2 — 6%. б) Температура вновь поднимается до 20° С. — полное востановленіе.

II. Водоросль культивировалась долгое время (все лѣто) въ открытомъ, солнечномъ и мелкомъ бассейнѣ. Хлорофиллъ слабо зеленый (желтоватый). Большое скопленіе крахмала.

*А. Плазмолизъ 18% сахаромъ.*

Оп. 12. При измѣненіи температуры съ  $23^{\circ}$  С. до  $0^{\circ}$  и обратно, объемъ протопласта остается безъ измѣненія. (Наблюдались 10 клѣтокъ).

В. Плазмолизъ 4,8% глицериномъ.

Оп. 13. Наблюдается 10 клѣтокъ одновременно. При охлажденіи съ  $21^{\circ}$  С. до  $0^{\circ}$ — $1^{\circ}$  С. наблюдаются уменьшеніе объема на 2—3%, при нагрѣваніи объемъ возрастаетъ.

Приведенные примѣры показываютъ, что объемъ плазмолизированнаго протопласта въ большинствѣ случаевъ измѣняется при перемѣнѣ температуры. При этомъ, какъ и слѣдовало ожидать, наибольшее измѣненіе объема наблюдается въ предѣлахъ отъ  $0^{\circ}$  до  $20^{\circ}$  С. (оп. 2, 4, 6, 8, 9, 11), тогда какъ поднятіе температуры выше  $20^{\circ}$  С. обыкновенно сравнительно мало вліяетъ на объемъ протопласта (оп. 10) или же совершенно его не измѣняетъ (оп. 1, 2 d, 7). Сравнивая полученные результаты съ теоретическими соображеніями, приведенными на стр. 11, видимъ, что послѣднія вполне подтверждаются опытомъ. При плазмолизѣ глицериномъ наблюдается увеличеніе объема протопласта послѣ повышенія температуры (оп. 8, 9, 10, 11, 13); при плазмолизѣ же сахаромъ происходитъ въ этомъ случаѣ уменьшеніе объема (оп. 2, 4, 5, 6).

Въ опытахъ съ плазмолизомъ глицериномъ результатъ не измѣняется электролитической диссоціаціей. Результаты же опытовъ съ плазмолизомъ сахаромъ затемняются послѣдней и приводятъ даже къ тому, что измѣненія объема плазмолизированнаго протопласта при измѣненіи температуры не наблюдаются вовсе (оп. 1, 7, 12) или очень незначительны (оп. 5, 6). Какъ разъ тамъ, гдѣ въ клѣточномъ соку нужно предполагать присутствіе большого количества органическихъ веществъ (оп. 12), даже значительное измѣненіе температуры ( $0^{\circ}$ — $23^{\circ}$  С.) не оказываетъ вліянія на объемъ плазмолизированнаго протопласта. Органическія соли и кислоты (напр. щевелевая) при повышеніи температуры показываютъ увеличеніе степени диссоціаціи ( $\alpha$ ), поэтому при повышеніи температуры осмотическое давленіе сока должно увеличиваться. Наоборотъ увеличеніе температуры, повышая проницаемость плазматического мѣшка, производитъ уменьшеніе объема протопласта. Оба противоположныя вліянія уничтожаютъ другъ друга, благодаря чему измѣненія объема плазмолизированнаго протопласта при измѣненіи температуры не наблюдаются.

Въ опытѣ 3, гдѣ водоросль была положена въ сахаръ за 40 ч. до наблюденія, повышеніе температуры съ  $16^{\circ}$  С. до  $36^{\circ}$  С. вызвало уменьшенія объема на 3—5%. Такое большое измѣненіе объема въ другихъ опытахъ наблюдалось только при плазмолизѣ глицериномъ подъ вліяніемъ охлажденія до  $2^{\circ}$  С. (оп. 9 и 11). Поэтому мы имѣемъ здѣсь дѣло съ ненормальнымъ повышеніемъ проницаемости плазматического мѣшка, вслѣдствіе черезчуръ долгаго плазмолиза (см. de-Vries, VIII, p. 536). Что плазма клѣтокъ въ опытѣ 3 не была нормальна, показываетъ и смерть послѣднихъ послѣ охлажденія (въ другихъ случаяхъ ничего подобнаго никогда не замѣчалось). Тотъ-же признакъ указываетъ также на ненормальность отмѣченной клѣтки въ оп. 7, гдѣ наблюдалось увеличеніе объема на 15% при повышеніи температуры до  $55^{\circ}$  С.

\*

Въ согласіи съ высказанными выше теоретическими соображеніями находится также фактъ сильнаго увеличенія объема протопласта, плазмолизированнаго глицериномъ, и сильное уменьшеніе его, при плазмолизѣ сахаромъ, послѣ смерти клѣтокъ (оп. 10, 1, 2 и 3).

Приведенные опыты убѣждаютъ насъ такимъ образомъ въ томъ, что *измѣненіе проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку и наружной жидкости, вопреки мнѣнію Пфедффера, неизбѣжно вліяетъ на осмотическое, а слѣдовательно и тургорное давленіе клѣтокъ* даже съ обыкновенною проницаемостью плазматическаго мѣшка.

Попытаемся теперь составить себѣ представленіе о величинѣ этого вліянія. Чѣмъ больше  $\mu$  въ выраженіи для осмотическаго давленія:  $P = CTR [1 + (n - 1) \alpha] (1 - \mu)$ , тѣмъ больше измѣняется послѣднее при измѣненіи проницаемости; поэтому для оцѣнки вліянія измѣненія проницаемости плазматическаго мѣшка на осмотическое давленіе окружающаго раствора и клѣточного сока необходимо составить себѣ хотя-бы приблизительное представленіе о величинѣ  $\mu$  для веществъ, растворенныхъ въ названныхъ жидкостяхъ.

Въ главѣ II будетъ показано какимъ образомъ мы имѣемъ возможность вычислить величину фактора проницаемости для плазмолизирующаго вещества и въ частности для глицерина. Эта величина въ примѣненіи къ клѣткамъ спирогиры оказалась приблизительно равной  $\frac{1}{8}$ . Что же касается величины  $\mu$  для веществъ клѣточного сока, то ее нетрудно приблизительно вычислить на основаніи выше описанныхъ опытовъ.

По изслѣдованіямъ Риссельберга (Rysselberghe, II, p. 190), охлажденіе съ  $20^\circ$  до  $2^\circ$  С. вызываетъ уменьшеніе проницаемости плазматической перепонки, а слѣдовательно и ея фактора почти въ 6 разъ; принимая во вниманіе, что при такомъ же охлажденіи объемъ протопласта спирогиры, плазмолизированнаго глицериномъ, уменьшается въ среднемъ на 4% (вліяніе температуры на электролитическую диссоціацію пренебрегается), можно написать слѣдующія уравненія для опредѣленія фактора проницаемости плазматической перепонки спирогиры  $\mu$ :

$$\text{VI.} \dots R. 293 c (1 - \mu) i = R. 293 c_0 \left(1 - \frac{1}{8}\right) i_0$$

$$\text{VII.} \dots R. 275 c \left(1 - \frac{\mu}{6}\right) i 1,04 = R. 275 c_0 \left(1 - \frac{1}{48}\right) i_0.$$

Раздѣливъ VII на VI имѣемъ:  $\mu = 0,08$ .

Если предположить, что электролитическая диссоціація измѣняетъ объемъ плазмолизированнаго протопласта даже на 1% въ ту или другую сторону, то для  $\mu$  будемъ имѣть величины 0,07 или 0,09. Такимъ образомъ осмотическое давленіе клѣточного сока спирогиры, благодаря проницаемости плазматическаго мѣшка для растворенныхъ веществъ, почти на 8% меньше своей теоретической величины. Еще значительнѣе, какъ мы видѣли, вліяніе проницаемости на осмотическое давленіе наружнаго раствора глицерина. Если принять во вниманіе, что проницаемость подъ вліяніемъ различныхъ причинъ можетъ

сильно увеличиваться (см. ниже), то *игнорированіе вліянія* ея на осмотическое давленіе *клеточнаго сока и окружающаго раствора*, какъ это дѣлалось до сихъ поръ по примѣру Пфеффера, покажется намъ по крайней мѣрѣ *непростительной ошибкой*.

2. Вліяніе проницаемости плазмы и оболочекъ клѣтокъ для воды на осмотическое давленіе клеточнаго сока и особенности осмотической системы тканей растеній.

Какъ было уже упомянуто выше Пфефферъ логическимъ путемъ показалъ, что «осмотическое давленіе не зависитъ отъ состава и толщины перепонки, если не происходитъ экзосмоса растворенныхъ веществъ» (Pfeffer, IX, p. 303). Однако послѣдній всегда совершается въ большей или меньшей степени; поэтому разужденіемъ Пфеффера (т. е. ссылкой на *perpetuum mobile*) нельзя къ сожалѣнію воспользоваться для доказательства независимости осмотическаго давленія отъ проницаемости перепонки для воды. Что послѣдняя не вліяетъ однако на величину осмотическаго давленія, видно изъ слѣдующаго соображенія.

Осмотическое давленіе можно разсматривать «какъ результатъ всасыванія и обратной фильтраціи воды изъ клѣтки» (Nägeli, p. 373, Pfeffer, XV p. 126). Въ моментъ достиженія въ клѣткѣ максимальнаго давленія, отвѣчающаго теоретической величинѣ, скорость всасыванія дѣлается равной скорости обратной фильтраціи воды. При измѣненіи проницаемости перепонки для воды скорости обѣихъ движеній вслѣдствіе равенства ихъ измѣняются одинаково; такимъ образомъ, не смотря на измѣненіе проницаемости, равновѣсіе не нарушается и давленіе въ клѣткѣ остается тѣмъ-же. Слѣдовательно величина проницаемости перепонки для воды не отражается на осмотическомъ давленіи<sup>1)</sup>. Если максимальная величина осмотическаго давленія не зависитъ отъ величины проницаемости перепонки для воды, то нельзя того-же сказать разумѣется о давленіи, имѣющемся въ клѣткѣ въ промежуточные моменты, когда всасываніе еще больше фильтраціи. Величина такого давленія черезъ опредѣленный промежутокъ времени, протекшій послѣ начала всасыванія, должна непремѣнно зависѣть также отъ проницаемости перепонки для воды, потому что чѣмъ больше эта проницаемость, тѣмъ лучше идетъ всасываніе и тѣмъ скорѣе растетъ осмотическое давленіе<sup>2)</sup>. Не трудно видѣть поэтому, что видимое осмотическое давленіе будетъ зависѣть также и отъ проницаемости для воды клѣточной оболочки.

Только что сказанное имѣетъ значеніе главнымъ образомъ въ примѣненіи къ тканямъ растеній, находящимся иногда въ значительномъ отдаленіи отъ мѣста всасыванія воды.

1) Предполагается понятно, что проницаемость перепонки какъ въ ту такъ и въ другую сторону одинакова (Pfeffer, IX, p. 303) или по крайней мѣрѣ измѣняется одинаково; иначе осмотическое давленіе зависить отъ проницаемости перепонки для воды.

2) Хотя осмотическимъ давленіемъ называютъ теперь максимальное давленіе, образуемое въ клѣткѣ, но такого давленія въ дѣйствительности не получалъ и Пфефферъ, т. е. окончательную величину давленія

ему приходилось въ виду медленности всасыванія вычислять на основаніи скорости поднятія мениска въ трубкѣ (Pfeffer, IV). Поэтому можно всякое давленіе, образуемое въ клѣткѣ назвать осмотическимъ. Мы будемъ однако называть только окончательную величину осмотическаго давленія этимъ именемъ, промежуточную же, растущую его величину будемъ называть *видимымъ осмотическимъ давленіемъ*.

По мѣрѣ того, какъ въ клѣткахъ меристемы образуются осмотически дѣйствующія вещества, въ нихъ начинается, какъ извѣстно, скопляться вода въ видѣ все увеличивающихся вакуолей; прежде чѣмъ достигнуть этихъ клѣтокъ вода неизбѣжно должна пройти рядъ промежуточныхъ тканей. Вслѣдствіе этого *осмотическое давленіе* въ сосущихъ воду клѣткахъ *не можетъ* ни въ какомъ случаѣ *тотчасъ достигнуть теоретической величины, отвѣчающей концентраціи ихъ сока, температурѣ* и т. д. и чѣмъ меньше *проницаемость* промежуточныхъ тканей *для воды* тѣмъ медленнѣе эта окончательная величина будетъ достигнута.

На значеніе для видимаго осмотическаго давленія проницаемости промежуточныхъ тканей для воды указывалъ еще Краббе (Krabbe), ошибочно принимая однако, что и максимальная величина осмотическаго давленія зависитъ «отъ тренія при прохожденіи воды» (р. 488). Онъ предполагалъ, что «для преодоленія этого тренія требуется сила опредѣленной величины и, если осмотическая сила меньше этой величины, то всасываніе вообще не можетъ происходить»; благодаря этому «осмотическое давленіе, по его мнѣнію, не можетъ никогда достигнуть своей максимальной вышины» (р. 488—489). Краббе ставитъ и опыты для доказательства возможности уравниванія части осмотическаго давленія треніемъ при всасываніи. Что мысль Краббе не примѣнима къ полупроницаемымъ перепонкамъ, а слѣдовательно въ частности и къ плазматической перепонкѣ слѣдуетъ изъ опытовъ Пфедфера (Pfeffer, IV, р. 71), показавшихъ, что, какъ бы мало не было давленіе производимое на воду, оно всегда производитъ фильтрацію послѣдней черезъ перепонку, т. е., другими словами, давленіе, уравнивающееся треніемъ, не можетъ существовать. Подобное же было найдено опытнымъ путемъ также для различныхъ перепонокъ, употребляющихся при діализѣ. Другого результата трудно было и ждать, такъ какъ внутреннее треніе возникаетъ только въ слѣдствіе фильтраціи и съ прекращеніемъ послѣдней также прекращается. Что же касается опытовъ Краббе (р. 491—495), то они доказываютъ только, что требуется извѣстное время для поднятія осмотическаго давленія въ ткани до надлежащей высоты. Впрочемъ даже самъ авторъ считаетъ сомнительнымъ, что втеченіе 2—3 дней (такъ долго продолжались его опыты при 0°—5° С.) можно было достигнуть «абсолютнаго прекращенія движенія воды» (р. 496) т. е. максимальной величины осмотическаго давленія. Опыты Краббе во всякомъ случаѣ показали, что для достиженія равновѣсія необходимо значительное время и что, повышая проницаемость перепонокъ (какъ плазматическихъ такъ и клѣточныхъ стѣнокъ) для воды увеличеніемъ температуры, можно значительно ускорить процессъ всасыванія (р. 493—495), а слѣдовательно и достигнуть повышенія видимаго осмотическаго давленія, соответствующаго опредѣленному моменту протекшему послѣ начала всасыванія.

Такъ какъ при хорошемъ ростѣ образованіе клѣтокъ меристемы и осмотическихъ веществъ въ нихъ идетъ непрерывно и иногда очень быстро, то можно навѣрное сказать, что въ частяхъ ближайшихъ къ конусу наростанія всегда имѣются клѣтки, видимое осмотическое давленіе которыхъ не соответвуетъ концентраціи ихъ сока температурѣ и про-

нищаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ, при чемъ такое давленіе должно зависѣть также отъ проницаемости для воды какъ плазматической перепонки, такъ и оболочки клѣтокъ.

Видимое осмотическое давленіе, меньшее соотвѣтствующаго концентраціи сока и т. д., образуется также очевидно во всѣхъ клѣткахъ, гдѣ хотя-бы временно испареніе съ поверхности было больше осмотического всасыванія воды. Если такое усиленное испареніе продолжается болѣе или менѣе продолжительное время, то видимое осмотическое давленіе въ клѣткѣ, уменьшаясь постепенно, можетъ совершенно исчезнуть, не смотря на то, что концентрація сока ея увеличивается и соприкосновеніе съ водою продолжается. Такъ какъ быстрота обратнаго возстановленія максимальной величины осмотического давленія зависить главнымъ образомъ отъ скорости осмотического всасыванія, то проницаемость перепонки для воды и здѣсь играетъ важную роль въ установленіи видимаго давленія въ клѣткѣ.

Чѣмъ меньше путь, проходимый водой отъ мѣста всасыванія, тѣмъ меньше, понятно, вліяетъ проницаемость для воды на высоту осмотического давленія въ клѣткахъ. Это вліяніе дѣлается наконецъ ничтожнымъ у одноклѣтныхъ и нитчатокъ, живущихъ въ водѣ.

Мы только что видѣли, что въ растущихъ тканяхъ растенія или при увяданіи видимое осмотическое давленіе клѣточного сока можетъ быть меньше величины, отвѣчающей данной концентраціи послѣдняго, температурѣ и т. д. Однако и въ тургесцирующихъ тканяхъ, прекратившихъ свой ростъ, видимое осмотическое давленіе клѣточного сока можетъ не отвѣчать его дѣйствительной величины. Послѣднее напр. имѣетъ мѣсто при измѣненіяхъ величинъ, вліяющихъ на осмотическое давленіе, т. е. температуры, концентраціи клѣточного сока и т. д. Видимое осмотическое давленіе не можетъ измѣниться моментально: для установленія новаго осмотического равновѣсія требуется извѣстное время, иногда очень значительное. Для возстановленія осмотического равновѣсія послѣ переменъ температуры даже въ случаѣ спирогиры требуется 5—10 минутъ (см. гл. III). Въ опытахъ же Краббе, какъ мы видѣли, это давленіе не устанавливалось даже въ 2—3 дня. Если измѣненія величинъ, вліяющихъ на осмотическое давленіе, совершается черезъ меньшіе промежутки времени, чѣмъ того требуетъ установленіе осмотического равновѣсія, а послѣднее часто имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности, то видимое осмотическое давленіе клѣточного сока тканей никогда не будетъ отвѣчать имѣющимся условіямъ. Это необходимо постоянно имѣть въ виду при изученіи вліянія различныхъ внѣшнихъ факторовъ на тургорное давленіе и ростъ высшихъ растеній.

Кромѣ только что сказаннаго, осмотическая система тканей растеній имѣетъ еще ту особенность, что главная масса клѣтокъ послѣднихъ не соприкасается непосредственно съ окружающимъ растеніе растворомъ, а получаетъ необходимую воду изъ ксилемы или наружнаго раствора при посредствѣ цѣлаго ряда передаточныхъ клѣтокъ. Въ этомъ случаѣ окружающимъ растворомъ клѣтокъ не будетъ наружный растворъ, въ который погружено растеніе, или находящійся въ ксилемѣ. Имъ будетъ очевидно растворъ, насыщающій обо-



лочку клѣтокъ. А такъ какъ плазматическая перепонка послѣднихъ болѣе или менѣе пропиаема для веществъ клѣточного сока, то растворъ, насыщающій стѣнки клѣтокъ, будетъ содержать въ себѣ послѣ установленія подвижного осмотического равновѣсія больше осмотически дѣйствующихъ веществъ чѣмъ жидкость, содержащаяся въ ксилемѣ или наружномъ растворѣ. Такимъ образомъ тургорное давленіе клѣтокъ будетъ ниже чѣмъ то, которое соотвѣтствуетъ концентраціи ихъ сока и раствору въ ксилемѣ или снаружи растенія. Въ частномъ случаѣ величина этого давленія будетъ зависѣть отъ проницаемости плазматической перепонки, состава клѣточного сока, величины межклетнниковъ и т. п.

### 3. Осмотическое давленіе клѣтокъ богатыхъ плазматическимъ содержимымъ.

Еще Пфефферъ указалъ на то, что осмотическое давленіе не необходимо связано съ существованіемъ вакуолей (Pfeffer, XII, p. 33). Дѣйствительно мы можемъ вообразить себѣ въ клѣткѣ и безъ вакуолей присутствіе извѣстнаго осмотического давленія, доставляемаго веществами, растворенными въ водѣ, насыщающей плазму. Подобное давленіе можетъ существовать очевидно и въ плазмѣ, содержащей вакуоли; однако въ послѣднемъ случаѣ оно не имѣетъ значенія для тургорнаго давленія, такъ какъ направлено какъ къ периферіи клѣтки, такъ и къ центру вакуоли (Pfeffer, IX, p. 293). Миѣ придется возвратиться еще разъ къ этому вопросу въ отдѣлѣ давленія разбуханія, теперь же я остановлюсь на осмотическомъ давленіи плазмы клѣтокъ, не содержащихъ вакуолей.

Прежде всего такое давленіе можетъ образоваться *только въ разбухающихъ желатинозныхъ частяхъ протопласта* т. е. главнымъ образомъ въ метоплазмѣ, потому что жидкія его части не смѣшиваются съ водой и при соприкосновеніи съ послѣднею въ нихъ не можетъ образоваться никакого осмотического давленія безъ вакуолей, какъ и во всякой подобной жидкости. Дѣло въ томъ, что осмотическое давленіе можетъ возникнуть лишь въ растворѣ, отдѣленномъ полупроницаемой перепонкой, отъ того-же самаго растворителя. Если, напр. въ бензолѣ растворено какое-нибудь вещество, то въ немъ возникнетъ осмотическое давленіе лишь при соприкосновеніи съ бензоломъ, а ни въ какомъ случаѣ не при соприкосновеніи съ водою: осмотическое давленіе обусловливается вхожденіемъ растворителя въ ту среду, гдѣ развивается давленіе (Ostwald, p. 661, 673). Такимъ образомъ въ протоплазменномъ растворѣ какихъ-нибудь веществъ не можетъ возникнуть осмотического давленія при соприкосновеніи съ водой и мы можемъ говорить только о давленіи желатинозныхъ частей плазмы, сдерживающихъ воду и растворенныя въ ней вещества механически. Что-бы судить объ этомъ давленіи, обратимся сначала къ разсмотрѣнію осмотического давленія въ различныхъ искусственныхъ студняхъ.

Вопросъ объ осмотическомъ давленіи въ студняхъ еще не былъ до сихъ поръ никѣмъ затронутъ. Извѣстно только, что диффузія совершается въ нихъ почти также, какъ въ водѣ (Ostwald, p. 687); отсюда можно заключить, что и осмотическое давленіе будетъ какъ здѣсь, такъ и тамъ одинаково. Нельзя однако на основаніи этого факта предсказать будетъ-ли произведеніе изъ давленія на объемъ, занимаемый раствореннымъ веществомъ въ студени, величиной постоянной, какъ въ водѣ. Вопросъ усложняется кромѣ того и тѣмъ,

что одновременно съ осмотическимъ давленіемъ въ студняхъ, не насыщенныхъ водой, существуетъ давленіе разбуханія (Quellungsdruck). Въ работѣ, посвященной осмотическимъ свойствамъ плазмы, Пфефферъ говоритъ, между прочемъ, что у насъ въ настоящее время нѣтъ средства опредѣлять эти давленія въ протоплазмѣ отдѣльно. Такъ какъ явленіе разбуханія происходитъ вслѣдствіе притяженія воды нерастворимыми частями, а осмотическое давленіе вызывается притяженіемъ воды растворенными веществами, то по мнѣнію названнаго ученаго между обоими явленіями нельзя провести болѣе рѣзкую границу, чѣмъ между растворомъ и нерастворомъ. (Pfeffer, IX, p. 294). Ниже мы рассмотримъ въ отдѣльности давленіе разбуханія, теперь же я ограничусь замѣчаніемъ, что послѣднее можетъ образоваться лишь въ студени, не насыщенной водой, послѣ же насыщенія ею студени давленіе разбуханія исчезаетъ; такъ, напр. по изслѣдованіямъ Гофмейстера (Hofmeister, F., p. 211—212) желатинная студень, содержащая на 1 ч. сухого вещества 9,37 ч. воды не разбухаетъ больше въ водѣ, слѣдовательно и не можетъ оказать никакого давленія. Въ противоположность этому растворовъ, «насыщенныхъ» водой не существуетъ: какъ бы не была мала концентрація раствора, его можно вновь разбавить водой. Поэтому даже самые слабые растворы должны имѣть свое осмотическое давленіе. Давленіе разбуханія можно было-бы, слѣдовательно, исключить, взявъ студень, насыщенную водой. Однако давленіе разбуханія въ водѣ и растворахъ различно, поэтому непосредственное измѣреніе этого давленія невозможно, приходится прибѣгать къ косвенному опредѣленію.

Проще всего можно опредѣлить осмотическое давленіе въ студени, основываясь на томъ положеніи, что растворенное вещество диффундируетъ всегда въ сторону меньшаго осмотическаго давленія и растворы того-же самаго вещества, между которыми не совершается диффузіи, изотоничны. Если студень, помѣстить, такимъ образомъ, въ растворъ какого-нибудь вещества, то можно послѣ установленія диффузионнаго равновѣсія, опредѣливъ содержаніе этого вещества какъ въ студени такъ и въ растворѣ, установить изотоническія концентраціи растворовъ этого вещества въ водѣ и студени.

Подобныя изслѣдованія были произведены Гофмейстеромъ (l. c., p. 218), хотя и съ другою цѣлю. По даннымъ названнаго автора, содержаніе соли въ жидкости, пропитывающей желатину (т. е. въ нѣкоторомъ объемѣ студени минусъ объемъ сухой желатины), при достаточно долгомъ пребываніи ея въ растворѣ одинаково съ содержаніемъ соли въ послѣднемъ (т. е. въ такомъ же его объемѣ). Такимъ образомъ желатинная студень представляетъ изъ себя какъ бы губку, напитанную водой или растворомъ. Чѣмъ больше объемъ разбухающей основы желатинной студени, тѣмъ большее осмотическое давленіе можетъ развиваться въ ней при одинаковомъ процентномъ содержаніи раствореннаго вещества въ извѣстномъ ея объемѣ т. е., другими словами, чѣмъ выше содержаніе желатины въ студени тѣмъ большей осмотической силой обладаетъ послѣдняя.

Примѣняя только что приведенный выводъ къ желатинознымъ частямъ плазмы, можно придти къ заключенію, что наибольшія осмотическія давленія могутъ производиться наиболѣе сухими изъ нихъ; *чѣмъ меньше воды содержатъ желатинозныя части плазмы, тѣмъ большее осмотическое давленіе въ состояніи онѣ развитъ*. Такимъ образомъ громадныя давленія, образующіяся при разбуханіи сѣмянъ, нельзя приписывать исключительно дѣйствію давленія разбуханія составныхъ частей ихъ клѣтокъ.

#### Д. Центральное давленіе.

Центральное давленіе (Pfeffer, IX, p. 293), составляющее одно изъ слагающихъ тургорнаго давленія, предполагается дѣйствующимъ, какъ извѣстно, въ направленіи обратномъ осмотическому давленію клѣточного сока и вызывается силами сдѣвленія частичекъ полужидкой плазмы.

Для вычисленія этого давленія Пфефферъ (Pfeffer, IX, p. 299) примѣнилъ формулу, приведенную въ учебникѣ Негели (Nägeli u. Schwendener, p. 414) для радіального давленія, происходящаго вслѣдствіе тангентіальнаго натяженія клѣточной оболочки:

$$p = \frac{2 dt}{r}$$

гдѣ  $p$  — радіальное давленіе,  $d$  — толщина оболочки клѣтки,  $r$  — радіусъ кривизны,  $t$  — тангентіальное натяженіе оболочки, приходящееся на единицу поверхности поперечнаго сѣченія. Въ примѣненіи къ центральному давленію Пфефферъ принимаетъ  $t$  — за максимальное упругое натяженіе плазмы (zullässige elastische Spannung, p. 298). Такъ какъ послѣднее оказалось въ опытахъ того-же ученаго съ плазмодіемъ Chondrioderma равнымъ 300 миллигр. на кв. миллим., то центральное давленіе вычисленное по приведенной формулѣ не должно превосходить  $\frac{1}{5}$  —  $\frac{1}{10}$  атмосферы и только для очень маленькихъ вакуолей ( $r = 2 \mu$ ) оно можетъ достигать 1 атмосферы (l. c., p. 295).

Не трудно видѣть однако, что принимаемая въ формулѣ Негели  $t$  за величину наибольшаго упругаго натяженія плазмы, мы вычисляемъ не величину центрального давленія, а величину осмотического давленія, развившагося въ вакуолѣ свободной массы плазмы (помѣщенной хотя-бы въ водѣ) въ моментъ, соотвѣтствующій растяженію плазматического слоя надъ вакуолей до предѣла упругости. Съ другой стороны не всякое осмотическое давленіе въ вакуолѣ растянетъ ея стѣнки до предѣла упругости, также какъ можно предположить въ вакуолѣ такое количество осмотическихъ веществъ, что соотвѣтствующее имъ давленіе растянетъ стѣнки вакуоли и за предѣлы упругости. Такимъ образомъ даже и для свободной массы плазмы, находящейся въ водѣ, натяженіе стѣнокъ вакуоли можетъ быть больше или меньше  $t$ . Что касается плазмы, окруженной клѣточной стѣнкой, гдѣ

главное сопротивление осмотическому давленію оказываетъ эта послѣдняя, то произвольность допущенія Пфеффера въ этомъ случаѣ очевидна.

Позднѣйшіе авторы главнымъ образомъ цитируютъ работу Пфеффера. Впрочемъ въ работѣ Цвѣта (Tswett, p. 136) мы встрѣчаемся съ нѣкоторой самостоятельностью въ этомъ отношеніи. Названный авторъ даетъ для центрального давленія неизвѣстно какимъ способомъ полученную формулу:  $cd \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ ; называя ее почему-то формулой Лапласа. Въ послѣдствіи эта формула цитируется Риссельбергомъ, въ нѣсколько измененномъ видѣ вѣроятно для приданія ей большого сходства съ формулой Лапласа (Rysselberghe, I, p. 23)<sup>1)</sup>.

Приведеннымъ ограничивается все имѣющееся въ литературѣ относительно центрального давленія.

Постараемся теперь болѣе подробно разобраться въ интересующемъ насъ вопросѣ.

Если въ клѣткѣ имѣются вакуоли, то центральное давленіе т. е. давленіе, направленное къ центрамъ вакуолей будетъ очевидно равно алгебраической суммѣ давленій наружной выпуклой поверхности плазмы и внутренней вогнутой ея поверхности, граничащей съ данной вакуолей. Давленіе наружной поверхности передается во все стороны по плазмѣ (полужидкой консистенціи) и со всехъ сторонъ въ равной степени давитъ на все вакуоли, стремясь ихъ сжать, тогда какъ давленіе внутренней поверхности плазмы различно въ каждой изъ вакуолей, измѣняясь съ ихъ величиной и содержимымъ. Такимъ образомъ каждая вакуоля имѣетъ свое центральное давленіе, равное алгебраической суммѣ давленій наружной и внутренней поверхности плазмы.

Давленіе выпуклой поверхности жидкости выражается, какъ извѣстно, слѣдующей формулой Лапласа:

$$P = K + \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 \text{ гдѣ:}$$

$K$  — нормальное давленіе плоской поверхности жидкости,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности,  $\alpha$  — постоянная, выражающая величину поверхностнаго натяженія. (Хвольсонъ, т. I, p. 445, Winkelmann, p. 457). Эта формула примѣнительно къ нашему случаю выражаетъ давленіе наружной поверхности плазмы. Для давленія каждой изъ вогнутыхъ внутреннихъ поверхностей на соответствующую вакуолю имѣемъ выраженіе:

$$P_1 = -K + \alpha \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \text{ гдѣ:}$$

$r_1$  и  $r_2$  — радиусы кривизны двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченій вакуоли.

1) Пантанелли (Pantanelli, p. 311) приходитъ въ послѣднее время къ невѣрной величинѣ центрального давленія, вычисляя его, какъ будетъ видно изъ ниже слѣдующаго, по невѣрной формулѣ. Тотъ-же авторъ приходитъ нѣсколько строкъ позже къ совер-

шенному абсурду, что указываетъ на полное не пониманіе авторомъ явленій центрального давленія и капиллярности (l. c., p. 312).

2)  $\frac{H}{2}$  формулы Лапласа замѣнено черезъ  $\alpha$ .

Оба выраженія для давленій были бы справедливы лишь въ томъ случаѣ, если-бы какъ снаружи плазмы такъ и въ вакуоляхъ находился воздухъ. На самомъ дѣлѣ снаружи плазматическій мѣшокъ, какъ мы знаемъ, окруженъ оболочкой, тогда какъ въ вакуоляхъ находится водный растворъ. Поэтому нормальныя давленія  $K$  и поверхностныя натяженія  $\alpha$  снаружи и на внутренней поверхности плазмы въ общемъ случаѣ могутъ быть различны. Если обозначимъ нормальное давленіе и поверхностное натяженіе наружной поверхности черезъ  $K_1$  и  $\alpha_1$ , а соответствующія величины на внутренней поверхности черезъ  $K_2$  и  $\alpha_2$ , то центральное давленіе на данную вакуолю представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$(IX) \dots\dots\dots p = K_1 + \alpha_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - K_2 + \alpha_2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Разсмотримъ сначала величины  $K_1$  и  $K_2$ , которыя, какъ извѣстно, не могутъ быть измѣрены непосредственно и вычисляются только косвеннымъ путемъ (Хвольсонъ, стр. 463—464). Разность этихъ величинъ, какъ измѣряющихся тысячами атмосферъ, казалось бы должна составлять главное слагаемое въ выраженіи IX.

Всѣ имѣющіеся факты указываютъ на то, что нормальное давленіе плоской поверхности жидкости (въ данномъ случаѣ  $K_1$  и  $K_2$ ) мы должны принять равнымъ нулю или во всякомъ случаѣ не пропорціональнымъ поверхностному натяженію ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ); въ противномъ случаѣ приходится допустить, что это давленіе не распространяется по законамъ гидростатики на всю жидкость, ограничиваясь въ своемъ дѣйствіи лишь уплотненіемъ поверхностнаго слоя жидкости (Winkelmann, p. 487—490. Quinke I, p. 85. Young. Хвольсонъ, стр. 458—9). Опытъ показываетъ, что во всѣхъ случаяхъ, если мы принимаемъ  $K > 0$  и непропорціональность  $K$  и  $\alpha$ , должно быть справедливо равенство:  $K_1 - K_2 = K_{1,2}$  ( $= -K_{1,2}$ ), гдѣ  $K_1$  — нормальное давленіе поверхности на границѣ жидкости 1 и воздуха,  $K_2$  — то-же для жидкости 2 и  $K_{1,2}$  — нормальное давленіе поверхности на границѣ обѣихъ жидкостей 1 и 2 (последнее направлено въ сторону жидкости съ большимъ  $K$ )<sup>1)</sup>. Такимъ образомъ, если  $K > 0$ , гидравлическое давленіе каждой изъ жидкостей, расположенныхъ соприкасающимися между собою слоями, должно быть увеличиваемо такимъ-же нормальнымъ давленіемъ поверхности, какъ если-бы всѣ эти жидкости соприкасались только съ воздухомъ. Если мы погрузимъ каплю протоплазмы въ воду, то обѣ жидкости сохраняютъ свои нормальныя давленія. То-же можно сказать и относительно капли воднаго раствора, погруженной въ плазму, а слѣдовательно и относительно жидкости, находящейся въ вакуолѣ (присутствіе плазматическихъ перепонокъ между вакуольной и наружной жидкостями съ одной стороны и плазмой съ другой не измѣнитъ дѣла). Такимъ образомъ нормальныя давленія ( $K$ ), какъ плазмы такъ и плазматическихъ перепонокъ (если послѣднія имѣютъ другія капиллярныя постоянныя)

1) Мнѣ самому случалось не разъ наблюдать, что | слой масла (или лучше сказать измѣняется только  
высота мениска не измѣняется, если на свободную | вслѣдствіе гидростатическаго давленія масла).  
плоскую поверхность воды виѣ капилляра помѣстить |

не могутъ оказать вліянія на центральное давленіе. Посмотримъ можетъ-ли нормальное давленіе вакуольной жидкости препятствовать увеличенію вакуоли подѣ дѣйствіемъ осмотического давленія и вліять, слѣдовательно, тѣмъ самымъ на центральное давленіе.

Всякое увеличеніе поверхности жидкости должно сопровождаться работой вѣншихъ силъ (Хвольсонъ, стр. 454), поэтому на первый взглядъ увеличеніе объема вакуоли подѣ вліяніемъ осмотического давленія должно было-бы сопровождаться потерей въ величинѣ этого давленія. А такъ какъ послѣднее ничтожно (въ сотни и тысячи разъ меньше) въ сравненіи съ давленіемъ плоской поверхности клѣточного сока, то можно было-бы думать, что растяженіе вакуоли подѣ дѣйствіемъ осмотического давленія невозможно. На самомъ-же дѣлѣ осмотическое давленіе можетъ существовать только благодаря притоку воды извнѣ (черезъ слой плазмы) и увеличеніе поверхности вакуоли подѣ его вліяніемъ не сопряжено слѣдовательно съ преодоленіемъ силъ сцѣпленія частичекъ заключенной въ ней жидкости. Другими словами нормальное давленіе поверхности жидкости, заключенной въ вакуоль, не вліяетъ на величину центрального давленія. Такимъ образомъ въ формулѣ IX  $K_1 = K_2$  1).

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію величинъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . По своимъ физическимъ свойствамъ и химическому составу плазма можетъ быть отпесена въ группу органическихъ жидкостей съ большимъ молекулярнымъ вѣсомъ, куда относятся напр. расплавленный воскъ, сахаръ, жиръ при температурахъ близкихъ къ температурѣ ихъ плавленія растительныя масла и т. п.

Капиллярная постоянная такихъ веществъ  $a^2$  колеблется обыкновенно между 7 и 9. (Ostwald, p. 532). Поверхностное же натяженіе плазмы  $\alpha$ , равное  $\frac{a^2}{2s}$ , можно поэтому, не сдѣлавъ большой ошибки, положить равнымъ  $4 \frac{\text{миллигр.}}{\text{миллим.}}$ , такъ какъ удѣльный вѣсъ плазмы  $s$  близокъ къ единицѣ (Хвольсонъ, стр. 486) 2). На поверхности соприкосновенія плазмы съ водой эта величина нѣсколько уменьшится, такъ какъ поверхностное натяженіе воды обыкновенно больше суммы поверхностнаго натяженія жидкости, не смѣшивающейся съ ней, и поверхностнаго натяженія на общей ихъ границѣ, а поверхностное натяженіе воды =  $8,25 \frac{\text{миллигр.}}{\text{миллим.}}$  (Quinke I p. 12, 59—85. Хвольсонъ, стр. 491). Примемъ напр., что на границѣ плазмы и воды поверхностное натяженіе  $\alpha_1 = 3,5 \frac{\text{миллигр.}}{\text{миллим.}}$ . На границѣ плазмы и клѣточного сока поверхностное натяженіе  $\alpha_2$

1) Все сказанное не измѣнится также въ предположеніи, что плазма окружена твердой клѣточной оболочкой, такъ какъ послѣднюю можно разсматривать какъ четвертый слой жидкости. Кромѣ того плазма не смачиваетъ оболочку (что доказывается плазмолизомъ) и сцѣпленіе между ними мы можемъ разсматривать какъ сцѣпленіе между плазмой и водой, такъ какъ оболочка всегда напитана послѣдней.

Зап. Физ.-Мат. Отд.

2) Поверхностное натяженіе жидкостей за исключеніемъ ртути и расплавленныхъ металловъ колеблется приблизительно между 2 и 8. Слѣдовательно даже максимальная ошибка, которую мы можемъ сдѣлать, принимая поверхностное натяженіе плазмы = 4, не измѣнитъ во всякомъ случаѣ порядка величины центрального давленія, который, въ сущности говоря, для насъ только и важенъ.

будетъ нѣсколько меньше, при нашей точности можно принять его впрочемъ равнымъ  $\alpha_1$  (изслѣдованія Лерха — Lerch — показали, что поверхностное натяженіе на границѣ двухъ жидкостей сравнительно очень мало измѣняется отъ растворенія въ одной изъ нихъ солей. См. также работу Lenkewitz). Такимъ образомъ центральное давленіе  $p = 3,5 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ . Въ простѣйшемъ случаѣ, когда клѣтка шарообразна,  $R_1 = R_2$ ,  $r_1 = r_2$  и  $p = 7 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$ . При  $R = 0,1$  до  $0,001$  мм. и  $r = 0,1$  до  $0,001$  мм. (т. е. для клѣтокъ наиболѣе часто встрѣчающихся размѣровъ) центральное давленіе колеблется, слѣдовательно, между 140 до  $14000 \frac{\text{миллигр.}}{(\text{миллим.})^2} = 0,014$  до 1,4 атмосферы<sup>1)</sup>.

Если  $r$  (т. е. радіусъ вакуоли) достаточно малъ, то и при большомъ размѣрѣ клѣтки центральное давленіе на вакуолю можетъ быть значительно; при этомъ если осмотическое давленіе заключеннаго въ ней клѣточного сока меньше центрального давленія, то, какъ на это указалъ еще Пфефферъ (Pfeffer, IX), вакуоля должна исчезнуть. Во всякомъ случаѣ никакое осмотическое давленіе не спасетъ вакуолю отъ исчезновенія при достаточно маломъ  $r$ , потому что при  $r = 0$ , центральное давленіе  $= \infty$ . Расчитаемъ приблизительно минимальную величину вакуоли, существованіе которой еще возможно въ клѣткѣ.

Допустимъ, что въ жидкости, наполняющей вакуолю, находится вещество наиболѣе легко растворимое въ водѣ и дающее при этомъ наибольшее осмотическое давленіе, напр.  $\text{NH}_4\text{Cl}$ . Насыщенный растворъ этой соли при  $20^\circ\text{C}$ . содержитъ въ 100 с. с. 29% сухого вещества и даетъ осмотическое давленіе  $=$  около 170 атмосферъ. Такимъ образомъ теоретически минимальный размѣръ (діаметръ) вакуоли долженъ быть больше 0,001 микрона, что находится за предѣломъ наблюденія. Но даже и при обыкновенномъ давленіи въ клѣткѣ (минимумъ 3,5 атмосферы — Pfeffer XII р. 121) возможно еще существованіе вакуолей, не превосходящихъ размѣромъ 0,1 микрона. Такимъ образомъ гипотеза Бючли относительно ячеистаго строенія плазмы не противорѣчитъ ученію о центральномъ давленіи.

Такъ какъ вакуоля для возможности своего возникновенія должна сдѣлаться сразу больше своего минимальнаго размѣра (т. е. при давленіи въ клѣткѣ 170 атм. больше 0,001 микрона, а при давленіи 3,5 атм. больше 0,1 микрона), то образованіе вакуоли въ клѣткѣ возможно только вокругъ твердаго тѣла или капли несмѣшивающейся съ водою жидкости размѣра равнаго минимальному размѣру вакуоли. По этому поводу неволью упоминается гипотеза де-Фриза образованія вакуолей при помощи тонопластовъ (de-Vries, VII р. 469, 496—499). Если мы въ дѣйствительности имѣли-бы въ плазмѣ образованія, специально предназначенныя для возникновенія вакуолей, то они могли-бы имѣть значеніе только подобное описанному.

Посмотримъ, насколько отражается измѣненія температуры на величинѣ центрального давленія.

1) Если бы мы приняли поверхностное натяженіе плазмы равнымъ 2 или 8, то центральное давленіе | было бы равно 0,007 — 0,7 или 0,028 — 2,8 атм.

Поверхностное натяженіе можетъ быть представлено, какъ извѣстно, линейной функцией температуры. Такъ  $\alpha = \alpha_0 (1 - \beta t)$ , гдѣ  $\alpha_0$  — поверхностное натяженіе при  $0^\circ$ , а  $\alpha$  при  $t^\circ$ , при чемъ  $\beta$  равно приблизительно 0,002 (Хвольсонъ, стр. 492). Для растительной клѣтки температурныя колебанія рѣдко превосходятъ  $50 - 60^\circ$ , поэтому подъ вліяніемъ температуры поверхностное натяженіе плазмы можетъ измѣниться самое большее на 0,1 — 0,12 своей величины.

### Е. Давленіе разбуханія.

Какъ было упомянуто раньше, разбуханіемъ мы называемъ впитываніе воды (или другой жидкости) тѣломъ, подъ вліяніемъ притяженія нерастворимыхъ его частей. Отсюда слѣдуетъ, что разбухать могутъ только твердыя тѣла и по отношенію къ плазмѣ только желатинозныя ея части. Жидкая въ главной своей массѣ плазма (Pfeffer, XII, 60) хотя и содержитъ 60%—90% воды, послѣдняя находится въ пей очевидно въ видѣ вакуолей или въ растворенномъ состояніи (можетъ быть даже въ химическомъ соединеніи съ ней). Поэтому говоря о давленіи разбуханія въ клѣткѣ, мы должны имѣть въ виду давленіе разбуханія только желатинозныхъ частей плазмы. Для уясненія разбуханія послѣднихъ и вліянія на него различныхъ внѣшнихъ условій можно воспользоваться данными, найденными для желатины, крахмала и т. п.; я позволю себѣ ограничиться ссылкой на литературу, какъ цитированную въ учебникѣ Пфеффера (XII) такъ и позднѣйшую (Hofmeister, F., Vignon и др.).

Подобно тому, какъ осмотическое давленіе веществъ, находящихся въ плазмѣ, не можетъ оказать вліяніе на тургорное давленіе клѣтки, если въ послѣдней имѣются вакуоли (Pfeffer, IX р. 293), такъ и давленіе разбуханія вліяетъ на тургорное давленіе только въ клѣткахъ, не имѣющихъ вакуолей. Въ такихъ клѣткахъ все давленіе слагается только изъ давленія разбуханія и осмотического давленія желатинозныхъ частей плазмы, но если въ клѣткѣ появляется хоть одна даже самая ничтожная вакуоля, оба эти давленія перестаютъ вліять на тургорное давленіе. На указанное обстоятельство я въ особенности обращаю вниманіе въ виду неясности, встрѣчаемой относительно этого у Пфеффера (IX, р. 292. XII, р. 118)<sup>1)</sup>. Дѣло въ томъ, что вакуоля можетъ возникнуть только тогда, когда осмотическое давленіе веществъ, растворенныхъ въ ней, будетъ больше суммы двухъ названныхъ давленій плюсъ центральное давленіе. Если вакуоля образовалась въ клѣткѣ, оба эти давленія направлены какъ наружу такъ и внутрь, стремясь съ одной стороны растянуть оболочку клѣтки съ другой — сжать вакуолю. Такимъ образомъ осмотическое давленіе сока будетъ уменьшено на сумму названныхъ давленій. Слѣдовательно, если обозначимъ черезъ  $p_0$  —

1) Пантанелли, (Pantanelli, II р. 313—314), | ключенію относительно значенія давленія разбуханія  
цитируя Пфеффера, приходитъ къ ошибочному за- | въ клѣткахъ съ вакуолями.



осмотическое давленіе сока, черезъ  $p_c$  — центральное давленіе, а черезъ  $p_q$  и  $p_p$  — давленіе разбуханія и осмотическое давленіе желатинозныхъ частей плазмы, то тургорное давленіе  $P = p_q + p_p + [p_o - (p_q + p_p + p_c)] = p_o - p_c$ .

Чтобы наглядно представить себѣ, почему послѣ возникновенія вакуоли никакое давленіе, исходящее изъ плазмы, не будетъ вліять на тургорное давленіе (т. е. не будетъ входить слагаемымъ въ его величину), представимъ себѣ, что между какою-нибудь тяжестью и чашкою вѣсовъ помѣщенъ цилиндръ изъ мѣди и все вмѣстѣ уравновѣшено гирями, положенными на другую чашку вѣсовъ. Очевидно равновѣсіе вѣсовъ не нарушится, если цилиндръ замѣнить пружиною равнаго ему вѣса. Здѣсь роль осмотического давленія сока играетъ тяжесть, лежащая на вѣсахъ, роль давленія, исходящаго изъ плазмы, — пружина и, наконецъ, роль клѣточной оболочки — чашка вѣсовъ.

Насколько можно судить изъ выше цитированнаго неяснаго мѣста работы Пфедера, послѣдній предполагалъ, повидимому, что давленіе разбуханія, входя въ число слагаемыхъ тургорнаго давленія, направлено только въ сторону противоположную осмотическому давленію клѣточнаго сока. Послѣ всего сказаннаго невѣрность такого предположенія мнѣ кажется очевиднымъ.

Въ моментъ возникновенія вакуоли алгебраическая сумма центрального давленія и осмотического давленія клѣточнаго сока равна, какъ нетрудно видѣть, суммѣ давленій разбуханія и осмотического желатинозныхъ частей плазмы, т. е.  $p_o - p_c = p_q + p_p$ . Послѣ возникновенія вакуоли, хотя послѣднія и теряютъ значеніе, однако величина тургорнаго давленія очень близка къ  $(p_q + p_p)$ , и только по мѣрѣ увеличенія вакуоли обѣ величины начинаютъ между собою все болѣе и болѣе расходиться. Такимъ образомъ тургорное давленіе клѣтокъ съ ничтожными вакуолями (напр. не открываемыми микроскопомъ) можно принять съ извѣстнымъ приближеніемъ равнымъ суммѣ давленій разбуханія и осмотического плазмы.

Какъ извѣстно, давленіе разбуханія уменьшается со степенью насыщенія разбухающихъ частей водой и дѣлается, наконецъ, равнымъ нулю (Pfeffer, XII, 62) при полномъ ихъ насыщеніи. Поэтому даже при отсутствіи вакуолей, если разбухающія части клѣтки уже насыщены водой, давленіе разбуханія не входитъ въ величину тургорнаго давленія.

Не могу обойти молчаніемъ вліянія осмотически дѣйствующихъ веществъ на давленіе разбуханія, а вмѣстѣ съ тѣмъ и возможности плазмолиза клѣтокъ, не имѣющихъ вакуолей. Относительно перваго мы имѣемъ очень обстоятельное изслѣдованіе Гофмейстера (Hofmeister, F.), произведенное надъ желатиной. Различныя вещества оказались неодинаковыми въ своемъ дѣйствіи на разбуханіе. Въ растворахъ сахара даже большихъ концентрацій желатина разбухаетъ почти въ такой-же степени, какъ въ водѣ (l. c. p. 223), тогда какъ въ растворахъ различныхъ солей этотъ процессъ идетъ гораздо энергичнѣе (иногда почти въ 3—4 раза), въ крѣпкихъ же растворахъ  $\text{LiCl}_2$ ,  $\text{MgCl}_2$ ,  $\text{CaCl}_2$  разбуханіе настолько сильно, что желатина вся расплывается (p. 212—217)<sup>1)</sup>. Что разбуханіе въ

1) Только въ  $\text{Na}_2\text{C}_2\text{O}_4$  разбуханіе идетъ нѣсколько меньше, чѣмъ въ водѣ (l. c. p. 212).

соляныхъ растворахъ идетъ сильнѣе показали также изслѣдованія Виньона (Vignon, Leo) надъ шелкомъ, шерстью и бумагой.

Такимъ образомъ о плазмолизѣ клѣтокъ, не имѣющихъ вакуолей, или съ незначительными вакуолями растворами солей не можетъ быть и рѣчи, если разбуханіе желатинозныхъ частей плазмы идетъ аналогично разбуханію другихъ тѣлъ. вмѣсто желаемого сокращенія объема протопласта мы получимъ наоборотъ увеличеніе его объема, а вмѣстѣ съ тѣмъ и тургорнаго давленія. Явленіе сокращенія протопласта можетъ наблюдаться только тогда при погруженіи въ сахарный и соляные растворы, когда разбухающія части клѣтки были растянуты осмотическимъ давленіемъ заключающихся въ нихъ веществъ за предѣлы разбуханія ихъ въ плазмолизирующихъ растворахъ, что въ клѣткахъ окруженныхъ слабо растяжимой оболочкой мало вѣроятно.

### Г. Тургорное давленіе въ клѣткахъ съ многочисленными вакуолями.

Какъ было указано нѣкоторыми изслѣдователями (напр. Went, I p. 348), различныя вакуоли въ одной и той-же клѣткѣ могутъ содержать неодинаковыя вещества въ растворѣ; жидкости, заключенныя въ такія вакуоли, на первый взглядъ, должны имѣть также разное осмотическое давленіе. А такъ какъ подобныя вакуоли мыслимы въ любой клѣткѣ, то можно было думать, что тургорное давленіе въ различныхъ частяхъ клѣтки можетъ быть неодинаково. На самомъ дѣлѣ протоплазма имѣетъ, какъ извѣстно, полужидкую или даже жидкую консистенцію (Pfeffer, XII, p. 38, Bütschli, Strassburger, p. 527 и др.), поэтому если даже предположить, что въ одной части клѣтки тургорное давленіе превосходитъ всѣ остальные, то послѣднее тотчасъ распространится по законамъ гидростатики по всей клѣткѣ, сжимая вакуоли, имѣющія меньшую величину ( $p_0 - p_c$ ) до размѣровъ, отвѣчающихъ величинѣ наибольшаго ( $p_0 - p_c$ ). Слѣдовательно, тургорное давленіе во всѣхъ частяхъ клѣтки должно быть одинаково и равняется разности осмотическаго и центрального давленій любой вакуоли, уменьшенной суммой осмотическаго давленія окружающаго раствора и центрального давленія наружной поверхности плазмы.

### Выводы главы I.

1) Явленіе тургора опредѣляется двумя величинами: *тургорнымъ давленіемъ* (давленіемъ содержаемаго клѣтки на ея стѣнки) и *тургорнымъ натяженіемъ* (отношеніемъ упругаго удлиненія клѣточной оболочки къ длинѣ ея при отсутствіи тургорнаго давленія). Эти величины находятся въ тѣсной зависимости между собою.

2) Тургорное давленіе въ клѣткѣ, имѣющей вакуоли (т. е. какъ это случается всего чаще), слагается въ общемъ случаѣ изъ а) *осмотического давленія клѣточного сока*, в) *осмотического давленія окружающей клѣтку жидкости* и с) *центрального давленія*. Первое давленіе направлено къ периферіи клѣтки, второе и третье къ центру вакуолей послѣдней.

3) Если въ клѣткѣ находятся нѣсколько или много вакуолей, то всѣ онѣ доставляютъ одно и то-же тургорное давленіе, слагающееся изъ а) *осмотического давленія окружающей жидкости* (знакъ минусъ), в) *центрального давленія*, производимаго наружной поверхностью плазмы (минусъ) и с) *разности осмотического давленія сока и центрального давленія внутренней поверхности любой изъ вакуолей* (плюсъ).

4) *Давленіе разбуханія и осмотическое давленіе* могутъ возникнуть только въ *желатинозныхъ* (т. е. твердыхъ) частяхъ плазмы, при чемъ оба давленія *въ клѣткахъ съ вакуолями* не имѣютъ никакого значенія для тургорнаго давленія.

5) *Осмотическія давленія* клѣточного сока и окружающаго раствора *зависятъ* не только отъ концентраціи, температуры и электролитической диссоціаціи, но также въ большой мѣрѣ *отъ проницаемости* плазматического мѣшка клѣтки *для растворенныхъ въ нихъ веществъ*, въ нѣкоторыхъ же случаяхъ (ткани) осмотическое давленіе сока *зависитъ* также отъ проницаемости *для воды* оболочки и плазматического мѣшка какъ данной клѣтки такъ и клѣтокъ подводящихъ къ ней воду.

6) Величина центрального давленія для клѣтокъ наибодѣе часто встрѣчающихся размѣровъ колеблется между 0,014 и 1,4 атмосферами и очень мало измѣняется подъ вліяніемъ температурныхъ колебаній.

7) Въ клѣткахъ, не содержащихъ вакуолей, тургорное давленіе слагается изъ а) *давленія разбуханія желатинозныхъ* (не жидкихъ) частей плазмы, в) *осмотического давленія веществъ*, растворенныхъ въ содержащейся *въ послѣднихъ водѣ*, и с) *осмотического давленія окружающаго раствора*.

8) Такъ какъ размѣры вакуолей могутъ лежать за предѣлами увеличенія микроскопа, то не всегда удается рѣшить какіе изъ приведенныхъ двухъ случаевъ 2) или 7) нужно примѣнить, когда микроскопъ не обнаруживаетъ вакуолей. При такихъ малыхъ вакуоляхъ осмотическое давленіе ихъ сока можно принять равнымъ суммѣ давленій разбуханія и осмотическаго давленія плазмы, а слѣдовательно съ извѣстнымъ приближеніемъ разсматривать клѣтку, какъ не содержащую вакуолей.

9) Вакуоли въ клѣткѣ могутъ образоваться лишь около твердаго тѣла или капли жидкости, не смѣшивающейся съ водой. Величина послѣднихъ можетъ колебаться въ предѣлахъ 0,1 и 0,001 микрона.

## ГЛАВА II.

### Методы опредѣленія тургорнаго давленія и его слагающихъ въ клѣткахъ съ вакуолями.

Какъ было указано въ предисловіи, цѣлью предлагаемой работы было изслѣдованіе явленія тургора и измѣненій тургорнаго давленія какъ вызываемыхъ перемѣною внѣшнихъ условій, такъ и автономныхъ. Въ главѣ I мы разобрали сущность явленія тургора, опредѣляющагося, какъ мы видѣли, двумя величинами—тургорнымъ давленіемъ и тургорнымъ натяженіемъ клѣточной оболочки, и подробно остановились на слагаемыхъ первой изъ этихъ величинъ. Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію измѣненій тургорнаго давленія и установленію ближайшихъ причинъ этихъ измѣненій, мнѣ представлялось необходимымъ избрать наилучшіе, а если окажется нужнымъ, то и выработать новые методы для опредѣленія тургорнаго давленія и его слагающихъ. Эти методы предназначаются, какъ было упомянуто, главнымъ образомъ для установленія измѣненій тургорнаго давленія, поэтому для насъ имѣютъ также большое значеніе и такіе изъ нихъ, которые позволяютъ опредѣлять не столько абсолютную, сколько относительную величину слагающихъ этого давленія.

Въ главѣ I было показано, что тургорное давленіе въ клѣткахъ съ вакуолями и безъ нихъ слагается изъ различныхъ величинъ. Въ этой работѣ могутъ быть изслѣдованы только измѣненія тургорнаго давленія въ клѣткахъ съ вакуолями, какъ составляющихъ главную массу тѣла растенія и принимающихъ дѣятельное участіе въ ростѣ послѣдняго. Поэтому и методы опредѣленія тургорнаго давленія и его слагающихъ, описываемые ниже, относятся только къ такимъ клѣткамъ.

#### А. Центральное давленіе.

Изъ трехъ слагающихъ тургорнаго давленія клѣтки съ вакуолями (см. стр. 29—30) центральное давленіе къ сожалѣнію можетъ быть только приблизительно вычислено способомъ, приведеннымъ въ главѣ I; мы не обладаемъ въ настоящее время экспериментальнымъ методомъ опредѣленія поверхностнаго натяженія плазмы, заключенной въ клѣточную оболочку и недоступной механическимъ изслѣдованіямъ. Однако въ клѣткахъ высушенныхъ растеній, богатыхъ сокомъ, это давленіе настолько незначительно (см. выше, стр. 26), что

измѣненія его не могутъ оказать большаго вліянія на величину тургорнаго давленія, при точности обыкновеннаго измѣренія послѣдняго. Изученіе же тургорнаго давленія клѣтокъ, въ которыхъ центральное давленіе достигаетъ ощутимой величины, какъ напр. это имѣетъ мѣсто въ бактеріяхъ, не могло входить въ задачи предлагаемой работы.

### В. Осмотическое давленіе наружнаго раствора.

Осмотическое давленіе раствора, находящагося снаружи плазмы, т. е. насыщающаго оболочку клѣтокъ въ большинствѣ случаевъ можно положить равнымъ осмотическому давленію окружающей растеніе жидкости или осмотическому давленію жидкости, наполняющей древесину, если всасываніе происходитъ изъ послѣдней. При этомъ является часто необходимымъ ввести поправку, соответствующую скорости диффузіи растворенныхъ веществъ въ особенности, если концентрація этихъ жидкостей мѣняется и слой ткани, раздѣляющій мѣсто всасыванія и изслѣдуемая клѣтка, имѣетъ ощутительную толщину. Понятно въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ такая поправка должна находиться предварительнымъ опытомъ, хотя бы напр. такимъ образомъ какъ это дѣлаетъ Натансонъ въ своей работѣ (Nathanson, IV, p. 405). Хотя поправка является, какъ сказано, необходимой въ случаѣ измѣненія концентраціи и состава жидкости, изъ которой происходитъ всасываніе, однако и при постоянствѣ послѣднихъ подобная поправка дѣлается необходимой, если плазматическій мѣшокъ изслѣдуемыхъ клѣтокъ сильно проницаемъ для веществъ растворенныхъ въ клѣточномъ соку (см. стр. 19—20). Во избѣжаніе введенія поправокъ на скорость диффузіи растворенныхъ веществъ, я пользовался въ опытахъ, описанныхъ въ гл. III, объектами, клѣтки которыхъ могутъ непосредственно соприкасаться съ наружнымъ растворомъ. Тамъ-же гдѣ изслѣдовалось тургорное давленіе тканей можно было удовлетвориться относительными величинами тургорнаго давленія.

Для опредѣленія величины осмотическаго давленія окружающей клѣтку жидкости мало знать температуру ея, химическій составъ и концентрацію веществъ въ ней растворенныхъ, необходимо еще, какъ было указано въ главѣ I, знать факторы проницаемости плазматическаго мѣшка изслѣдуемыхъ клѣтокъ для этихъ веществъ, т. е. величины  $\mu$  въ выраженіяхъ  $P = P_0(1 - \mu)$ , гдѣ  $P_0$  — осмотическое давленіе въ предположеніи абсолютной полупроницаемости перепонки, а  $P$  — истинное осмотическое давленіе.

Если всѣ перечисленныя величины извѣстны, то осмотическое давленіе окружающаго раствора будетъ равно суммѣ осмотическихъ давленій каждаго изъ растворенныхъ веществъ. Послѣднія же опредѣляются по формуламъ:

$$1) P = RCT [1 + (n - 1) \alpha] (1 - \mu) \text{ (Аррениусъ) или}$$

$$2) P = 4,56 T \lg \frac{p}{p'} (1 - \mu) \text{ (Вантъ-Гоффе), гдѣ}$$

$R$  — газовая постоянная = 0,0821,  $C$  — концентрація даннаго вещества въ жидкости, выраженная въ гр.-мол. на литръ раствора,  $T$  — абсолютная температура жидкости,  $n$  —

число іоновъ,  $\alpha$  — степень электролитической диссоціаціи,  $p$  — упругость паровъ воды при температурѣ  $T$ ,  $p'$  — упругость паровъ раствора даннаго вещества концентраціи  $C$  и  $\mu$  — факторъ проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ. Осмотическое давленіе будетъ выражено, слѣдовательно, въ атмосферахъ.

Величины  $C$  и  $T$  измѣряются непосредственно,  $\alpha$  — находится изъ величинъ электропроводности (Kohlrausch). Для опредѣленія же величины  $p'$  можно пользоваться таблицами Дитеричи (Dieterici), данными однако только для нѣкоторыхъ веществъ: NaCl, CaCl<sub>2</sub>, сахара, глицерина и мочевины; изслѣдованія названнаго автора относятся при этомъ къ 0°, но съ небольшою погрѣшностью можно принять отношеніе  $\frac{p'}{p}$  постояннымъ въ предѣлахъ температуръ 0° — 30° C., тогда  $p = 4,569$  mm. Если второй формулой можно пользоваться такимъ образомъ и не для всякаго вещества, то съ другой стороны она даетъ несравненно болѣе точные результаты въ особенности при большихъ концентраціяхъ (напр. даже при 50% сахарномъ растворѣ ошибка менѣе 1%, см. Nernst, p. 160—161)<sup>1)</sup>.

Что касается опредѣленія фактора проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ наружной жидкости  $\mu$ , то можно въ этомъ отношеніи различать два случая. Во первыхъ, если нужно знать не абсолютную, а относительную величину этого фактора, напр., когда необходимо рѣшить, увеличилась или уменьшилась величина  $\mu$  и во сколько разъ. Знаніе относительной величины фактора проницаемости позволитъ судить только о качественномъ измѣненіи осмотического давленія. Во второмъ случаѣ, напротивъ того, необходимымъ представляется знать также и абсолютную величину фактора проницаемости, чтобы судить о томъ, насколько сильно измѣнилось осмотическое давленіе раствора вслѣдствіе измѣненія проницаемости. Въ первомъ случаѣ вмѣсто величины  $\mu$  можно опредѣлять величину ей пропорціанальную  $\frac{p}{c_1 - c_2} = \beta$  (см. стр. 9 и 10, а также тамъ цитированныя работы), гдѣ  $p$  — количество вещества проходящаго при осмозѣ черезъ единицу поверхности плазматической перепонки въ единицу времени (мы будемъ выражать эту величину въ гр.-мол. черезъ 1 квадр. сантим. въ одинъ часъ), а  $c_1 - c_2$  — разность концентрацій этого вещества въ растворахъ по обѣ стороны перепонки. Отношеніе  $\beta$ , постоянное для одной и той-же перепонки при равныхъ условіяхъ, мы будемъ называть, какъ это было сдѣлано мною раньше (см. мою русскую работу, стр. 28—29, тамъ это отношеніе было обозначено буквой  $\alpha$ ), проницаемостью плазматической перепонки для даннаго вещества. Что касается опредѣленія абсолютной величины фактора

1) Иногда представляется болѣе удобнымъ и скорымъ опредѣлять величины осмотического давленія наружной жидкости въ предположеніи абсолютной полупроницаемости ( $\mu = 0$ ) криоскопическимъ методомъ (напр. такимъ путемъ Nathanson опредѣлялъ осмотическое давленіе морской воды, II, p. 250). Въ такомъ случаѣ осмотическое давленіе опредѣлится по формулѣ  $P = \frac{1000 S \omega t}{24.25. T^0}$  атм. (Nernst, p. 143), гдѣ для водныхъ

растворовъ  $s = 1$ ,  $\omega = 80$ ,  $T^0 = 273$ , а  $t$  — есть пониженіе точки замерзанія. Мнѣ въ своихъ опытахъ не было необходимости прибѣгать къ такому приему.

Если наружная жидкость — некрѣпкій растворъ сахара, то можно вычислять ея осмотическое давленіе при помощи упрощенной формулы  $P = n \cdot 0.69$  атм., гдѣ  $n$  процентное содержаніе сахара (Pfeffer, XII, p. 128).

проницаемости  $\mu$ , то необходимо еще найти методъ этого опредѣленія. Разсмотримъ сначала способы опредѣленія отношенія  $\beta$ .

### 1. Опредѣленіе проницаемости плазматической перепонки для веществъ наружнаго раствора.

Для опредѣленія количества вещества, диффундирующаго въ клѣточный сокъ изъ наружнаго раствора, можно пользоваться непосредственнымъ опредѣленіемъ его въ клѣточномъ соку при помощи химическаго анализа (Nathanson, I—IV). Однако этотъ способъ непримѣнимъ въ тѣхъ случаяхъ, когда въ нашемъ распоряженіи не имѣется большого количества сока, нужнаго для болѣе или менѣе точнаго химическаго анализа; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ даетъ возможность опредѣлять проникновеніе вещества только въ цѣлыя комплексы клѣтокъ и тканей, т. е. не позволяетъ даже рѣшить вопроса, проницаемъ-ли вообще для даннаго вещества плазматическій мѣшокъ всѣхъ клѣтокъ, взятыхъ для изслѣдованія, или же только нѣкоторыхъ. Кромѣ того, чтобы въ клѣточный сокъ проникло количество вещества, достаточное для анализа, опытъ долженъ продолжаться сравнительно большое время (иногда больше сутокъ), такъ какъ эндосмозъ даже легко диффундирующихъ черезъ плазму веществъ, какъ напр. глицерина, происходитъ медленно. Это обстоятельство не позволяетъ подмѣтить быстрыя измѣненія проницаемости плазматической перепонки, съ другой стороны долгое погруженіе тканей въ растворъ создаютъ ненормальныя условія питанія и дыханія клѣтокъ, что можетъ отразиться на проницаемости и повести къ наблюденію величины послѣдней, нормально не существующей.

Изъ другихъ способовъ, позволяющихъ судить о *величинѣ* проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ наружной жидкости, извѣстенъ еще только способъ наблюденія скорости расхожденія плазмоллиза клѣтки въ растворѣ этихъ веществъ. Риссельбергъ (Rysselberghe, II), который впервые примѣнилъ этотъ способъ для сравненія проницаемости плазматической перепонки при различныхъ температурахъ, наблюдалъ собственно время полнаго исчезновенія плазмоллиза клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* при желаемыхъ температурахъ. Такимъ образомъ, строго говоря, о величинѣ проницаемости, т. е. отношенія  $\beta = \frac{p}{c_1 - c_2}$  при такомъ методѣ не могло быть и рѣчи. Не говоря уже о непригодности названнаго объекта для точныхъ измѣреній измѣненія объема плазмоллизированнаго протопласта (см. гл. I, стр. 9), Риссельбергъ могъ судить лишь объ относительной величинѣ этого отношенія при различныхъ температурахъ. Въ извѣстныхъ случаяхъ понятно можно удовлетвориться и способомъ Риссельберга, слѣдя однако затѣмъ, чтобы концентрація плазмоллизующаго раствора стояла всегда въ опредѣленномъ отношеніи къ концентраціи клѣточнаго сока (т. е. чтобы объемъ плазмоллизированныхъ протопластовъ былъ въ опредѣленномъ отношеніи къ объему оболочки), тѣмъ болѣе если тотъ или другой опытъ ставится лишь для качественнаго опредѣленія измѣненія фактора проницаемости и осмотическаго давленія. Но для болѣе точнаго опредѣленія величины  $\beta$  и выраженія ея въ нужныхъ единицахъ (т. е. въ гр.-мол., въ 1 часъ, черезъ 1 кв. сант. поверхн., раздѣл. на гр.-мол. въ литрѣ раствора), въ случаѣ напр. необходи-

мости сравненія этихъ величинъ для клѣтокъ различныхъ тканей или даже растений, способъ Риссельберга понятенъ не пригоденъ: нужно умѣть опредѣлять количества эндосмирующихъ веществъ въ гр., знать поверхность протопласта въ кв. сант. Наиболее пригодными объектами для такого количественнаго опредѣленія могутъ служить растенія и ткани съ цилиндрическими клѣтками, гдѣ плазмолизированный протопластъ поддается болѣе точному измѣренію. Въ первой главѣ для подобной цѣли была уже рекомендована спирогира, которой дѣйствительно очень удобно пользоваться во многихъ случаяхъ. Опыты обыкновенно производились мною слѣдующимъ образомъ.

Нить спирогиры укрѣплялась при помощи стеклянныхъ волосковъ (послѣдніе приклеивались смѣсью воска съ терпентиномъ) на большомъ покровномъ стеклѣ, которое опрокидывалось надъ низкимъ цилиндромъ (вышина  $1\frac{1}{2}$  сант.) съ боковымъ отверстіемъ, заткнутымъ пробкой. Цилиндрикъ приклеивался къ предметному стеклу канадскимъ бальзамомъ такъ, чтобы отверстіе было направлено вверхъ (столикъ микроскопа наклонялся на  $45^\circ$  С.). Въ отверстіе наливался изслѣдуемый растворъ. Покровное стекло приклеивалось къ цилиндрику смѣсью воска и терпетина (точка плавленія  $40^\circ$  С.).

Водоросль плазмолизировалась обыкновенно сначала растворомъ сахара опредѣленной концентраціи, нужной для полученія желаемой фигуры плазмолиза, гдѣ оставалась около часа. Послѣ этого растворъ сахара замѣнялся или изотоничнымъ ему растворомъ изслѣдуемаго вещества или изотоничнымъ растворомъ сахара  $\rightarrow$  изслѣдуемое вещество (концентраціи опредѣлялись съ точностью до  $0,01\%$ ). Черезъ 20 минутъ срисовывались плазмолизированные протопласты 10—20 клѣтокъ при помощи рисовальной призмы-окуляра Лейца. Черезъ  $t$  часовъ (обыкновенно не больше 2-хъ) производилось новое зарисовываніе протопластовъ и опытъ или заканчивался или жидкость въ цилиндрѣ по желанію замѣнялась новою.

По сдѣланнымъ рисункамъ при помощи масштаба, одно дѣленіе котораго равнялось  $2\mu$ , измѣрялись длина и діаметръ плазмолизированнаго протопласта и приращеніе длины послѣдняго во второмъ рисункѣ сравнительно съ первымъ. Объемъ протопласта  $V$  вычислялся по формулѣ:  $\frac{\pi D^2}{2} \left( \frac{1}{2} L - \frac{1}{6} D \right)$ , гдѣ  $D$  — его діаметръ и  $L$  — длина; приращенія объема  $w$  вычислялись по формулѣ:  $\frac{\pi D^2 l}{4}$ , гдѣ  $l$  приращеніе длины  $L$ . Всѣ величины выражались въ сантиметрахъ. Если концентрація наружной жидкости —  $c$ , то количество вещества, эндосмировавшее въ клѣточный сокъ въ теченіе  $t$  часовъ, равно очевидно  $\frac{w \cdot c}{1000}$  гр.-мол.; при этомъ, если  $P$  есть средняя поверхность протопласта (вычислялась по формулѣ:  $\pi D \left( L + \frac{1}{2} l \right)$ ), то количество вещества, прошедшаго черезъ 1 кв. сант. поверхности протопласта въ 1 часъ, есть  $\frac{w \cdot c}{1000 \cdot P \cdot t} = p$ . Что касается разности концентрацій вещества снаружи и съ внутренней стороны плазматической перепонки  $c_1 - c_2$ , то въ случаѣ отсутствія этого вещества въ клѣточномъ соку въ началѣ опыта  $c_1$  — есть концентрація даннаго вещества въ наружной жидкости, а  $c_2 = \frac{wc}{(V+w)2}$  (слѣдовательно



за концентрацію съ внутренней стороны плазматической перепонки принималась средняя въ теченіе опыта концентрація вещества въ клѣточномъ соку, предполагая распространеніе вещества въ послѣднемъ очень быстрымъ). Такимъ образомъ

$$\beta = \frac{p}{c_1 - c_2} = \frac{wc}{1000 Pt \left( c_1 - \frac{wc}{(V+w)^2} \right)}$$
; если въ наружной жидкости присутствуетъ только изслѣ-

дуемое вещество, то  $c_1 = c$  и  $\beta = \frac{w}{1000 P + \left( 1 - \frac{w}{(V+w)^2} \right)}$  при чемъ, если  $P$  выражено въ кв.

сант.,  $V$  и  $w$  — въ куб. сант.,  $t$  — въ часахъ, то  $\beta$  будетъ выражено въ гр.-мол. черезъ 1 кв. сант. въ 1 ч., раздѣленн. на гр.-мол.

Посмотримъ насколько велика точность приведеннаго способа опредѣленія величины  $\beta$  въ наименѣе благоприятномъ случаѣ. Для большей наглядности поставимъ въ выраженіе для  $\beta$  вмѣсто  $w$  и  $P$  значенія ихъ изъ вышеприведенныхъ формулъ. Слѣдовательно имѣемъ:

$$\beta = \frac{Dlc}{\left( L + \frac{1}{2} l \right) t \left( c_1 - \frac{wc}{(V+w)^2} \right)}$$
. Такъ какъ діаметръ спирогиры рѣдко превосходитъ 90—

100 микронъ, а при измѣреніи его можно сдѣлать ошибку въ 4—6 микронъ (благодаря цилиндрической формы клѣтокъ линія обрѣза протопласта вблизи стѣнокъ видна неясно), то вмѣсто  $D$  мы въ худшемъ случаѣ получимъ  $1,05 D$  или  $0,95 D$ . При измѣреніи длины  $l$  въ особенности при малой продолжительности опыта можетъ быть сдѣлана относительно гораздо большая ошибка. Нерѣдко  $l$  меньше 5 микр. и во всякомъ случаѣ меньше 40 микр. Поэтому, если принять точность измѣренія  $l$  въ 2 микрона (дѣленіе масштаба), ошибка при измѣреніи  $l$  можетъ достигнуть 40%, слѣдовательно вмѣсто  $l$  мы получимъ въ худшемъ случаѣ  $1,4 l$  или  $0,6 l$  и только въ наиболѣе удачномъ опытѣ  $1,04 l$  или  $0,96 l$ .  $L$  у спирогиры было въ моихъ опытахъ равно 150—250 микронъ, поэтому если принять точность измѣренія его въ 2 микрона, то даже въ худшемъ случаѣ мы могли-бы получить вмѣсто  $L$  или  $1,01$  или  $0,99 L$ . Кромѣ того при измѣреніи времени можетъ быть сдѣлана ошибка минутъ въ 5, т. е. около 4%. На второмъ множителѣ знаменателя точность измѣренія мало отражается, поэтому въ худшемъ случаѣ вмѣсто написаннаго выраженія для  $\beta$  мы получимъ:

$$\frac{1,05 D \cdot 1,4 l c}{\left( 0,99 L + 0,6 \frac{1}{2} l \right) 0,96 t \left( c_1 - \frac{wc}{(V+w)^2} \right)}$$

Такъ какъ величина  $0,6 \frac{1}{2} l$  мала въ сравненіи съ  $L$ , то ею можно пренебречь. Вмѣсто  $\beta$  мы получимъ такимъ образомъ въ самомъ неблагоприятномъ случаѣ  $1,5 \beta$ , т. е. сдѣлаемъ ошибку въ 50%. Если эта ошибка и не будетъ такъ велика каждый разъ, то во всякомъ случаѣ только среднія числа изъ многихъ наблюденій могутъ доставить удовлетворительную величину  $\beta$ . Мы увидимъ въ послѣдствіи, что числа  $\beta$ , полученные такимъ путемъ для спирогиры, дѣйствительно отличаются отъ полученныхъ болѣе точнымъ методомъ только самое большое на 15%.

Не трудно видѣть, что только что приведенный способъ опредѣленія проницаемости плазматической перепонки, кромѣ своей сравнительно небольшой точности имѣетъ и другіе

недостатки. Такъ какъ удовлетворительную точность можно получить только при большомъ  $l$ , то опытъ часто необходимо вести продолжительное время (больше 2-хъ часовъ), что исключаетъ возможность, подобно тому какъ это было въ способѣ опредѣленія проницаемости химическимъ анализомъ, подмѣтить быстрыя измѣненія послѣдней; вмѣстѣ съ тѣмъ продолжительный плазмолизъ и проникновеніе плазмолизирующаго вещества въ клѣточный сокъ можетъ отразиться также на величинѣ проницаемости, какъ на это еще указалъ де-Фризъ (de-Vries, VIII р. 531—532 и слѣд., а также VI, р. 299 и слѣд.). Кроме того способъ наблюденія расхожденія плазмолиза можетъ быть въ частности потому еще неточенъ, что въ немъ предполагается увеличеніе объема плазмолизированнаго протопласта только за счетъ проникновенія плазмолизирующаго вещества въ сокъ клѣтки, тогда какъ это увеличеніе можетъ происходить также благодаря образованію осмотическихъ веществъ въ клѣткѣ во время плазмолиза; вмѣстѣ съ тѣмъ пренебрегается и экзосмозъ веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку.

Всѣ перечисленные недостатки обѣихъ способовъ опредѣленія проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ въ наружной жидкости устраняются въ новомъ предлагаемомъ методѣ изотоническихъ коэффициентовъ, который вмѣстѣ съ тѣмъ является и методомъ опредѣленія абсолютной величины фактора проницаемости перепонки; послѣднее обстоятельство имѣетъ для насъ въ особенности большое значеніе.

**2. Опредѣленія фактора проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ наружной жидкости, при помощи изотоническихъ коэффициентовъ.**

Для установленія изотоническихъ коэффициентовъ де-Фризъ пользовался, какъ извѣстно, нахожденіемъ концентрацій растворовъ испытуемыхъ веществъ, производящихъ едва замѣтный плазмолизъ клѣтокъ (или другими словами одну и ту-же фигуру плазмолиза). Если концентрація одного вещества оказывалась при этомъ  $c_1$ , а концентрація другого вещества  $c_2$  (въ гр.-мол. на  $L$ ), то  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k_2}{k_1}$ , гдѣ  $k_1$ —изотоническій коэффициентъ перваго вещества, и  $k_2$ —второго. Де-Фризъ принялъ изотоническій коэффициентъ селитры ( $KNO_3$ ) за 3 и получилъ изотоническія коэффициенты многихъ веществъ, весьма близко подходящіе къ вычисленнымъ при помощи формулы:  $P = 0,0821 TC[1 + (n - 1)\alpha]$  (de-Vries, V). Однако, нѣкоторые коэффициенты какъ напр. глицерина оказались значительно меньше теоретическихъ. Такъ какъ глицеринъ не электролитъ, то изотоническій коэффициентъ его по приведенной формулѣ долженъ былъ равняться коэффициенту сахара, т. е. 1,88, тогда какъ де-Фризъ, дѣлая опыты надъ эпидермисомъ *Tradescantia discolor*, нашелъ его равнымъ 1,78. Подобное же отступленіе найдено было названнымъ авторомъ и для мочевины (de-Vries, X р. 330), изотоническій коэффициентъ которой оказался равнымъ 1,7. Дѣлая плазматическіе опыты надъ спирогирой, де-Фризъ нашелъ, что растворъ глицерина, изотоничный съ растворомъ сахара концентраціи 0,3 гр.-мол., содержитъ въ литрѣ 0,35 гр.-мол. (de-Vries, IX, р. 250), что отвѣчаетъ изотоническому коэффициенту 1,61. Названный авторъ пытается объяснить такой низкій изотоническій коэффициентъ предположеніемъ,

что во время опыта, продолжавшагося  $\frac{1}{2}$  часа, глицеринъ проникалъ въ плазмолизированный протопластъ и тѣмъ увеличивалъ концентрацію клѣточного сока. «Въ  $\frac{1}{2}$  часа перешло изъ концентраціи 0,35 гр.-мол. такое его количество въ клѣточный сокъ, что послѣдній содержалъ въ себѣ 0,03 молек.» (l. c. p. 250). Другими словами, втеченіе полчасы вслѣдствіе проникновенія глицерина черезъ плазму, по мнѣнію де-Фриза, плазмолизированный протопластъ увеличивался въ своемъ объемѣ на  $\frac{1}{10}$  своей величины <sup>1)</sup>. Ничего подобнаго мнѣ никогда не приходилось наблюдать. Даже при самыхъ большихъ проницаемостяхъ плазматического мѣшка спирогиры и при концентраціи плазмолизирующаго раствора глицерина 0,5 гр.-мол., объемъ протопласта увеличивается втеченіе полчасы только на  $\frac{1}{80}$  —  $\frac{1}{100}$  своей величины, не смотря на то, что изотоническій коэффициентъ въ этомъ случаѣ меньше найденнаго де-Фризомъ (см. табл. I и II, стр. 41).

Какъ было уже упомянуто выше (стр. 8), Тамманъ доказалъ, что осмотическое давленіе, получаемое при помощи осадочныхъ перепонокъ, всегда меньше осмотического давленія, вычисляемаго по формулѣ  $P = 0,0821 TC [1 + (n - 1) \alpha]$ , только вслѣдствіе зависимости послѣдняго отъ проницаемости перепонокъ для растворенныхъ веществъ. Тоже самое имѣетъ очевидно мѣсто и въ случаѣ протоплазматической перепонки, что должно естественно сказываться прежде всего на изотоническихъ коэффициентахъ веществъ, легко проникающихъ черезъ плазматическій мѣшокъ, т. е. на глицеринѣ и мочевинонѣ.

Разница между теоретическимъ изотоническимъ коэффициентомъ и коэффициентами, найденными де-Фризомъ, не будетъ такой значительной, если мы будемъ вычислять осмотическое давленіе по формулѣ:  $P = 4,56 T \lg \frac{p}{p'}$ , т. к. по ислѣдованіямъ Дитеричи (Dieterici) упругости паровъ растворовъ глицерина и мочевины показываютъ довольно значительныя отклоненія отъ нормы, не смотря на отсутствіе электролитической диссоціаціи. Такъ какъ изъ только что написанной формулы Вантъ-Гоффа слѣдуетъ, что изотоническіе растворы имѣютъ одинаковую упругость пара, то можно для нахождения теоретическихъ изотоническихъ коэффициентовъ пользоваться непосредственно таблицами Дитеричи. Напр. для раствора сахара въ опытѣ де-Фриза, содержавшемъ 0,3 гр.-мол. находимъ по таблицамъ молекулярное пониженіе упругости пара = 0,084; поэтому пониженіе упругости пара такого раствора = 0,0252 mm., а упругость пара, принимая послѣднюю для воды = 4,569, равна 4,5438 mm. Такъ какъ молекулярное пониженіе упругости пара раствора глицерина, соответствующее такой упругости пара, по тѣмъ же таблицамъ есть 0,083, то концентрація изотоничнаго раствора глицерина = 0,304 гр.-мол., а изотоническій коэффициентъ = 1,85 (принимая послѣдній для сахара = 1,88).

Только-что приведенному способу вычисленія изотоническихъ коэффициентовъ нужно, понятно, отдать предпочтеніе передъ способомъ нахождения послѣднихъ изъ формулы Аррениуса, такъ какъ послѣдняя вѣрна лишь для очень слабыхъ концентрацій. Мы въ

1) Слишкомъ большія величины концентрацій | повидимому такимъ-же путемъ, какъ де-Фризь, объ-  
Na и KNO<sub>3</sub>, вызывающихъ плазмолизъ спирогиры, | ясняетъ и Янсе (Janse).

послѣдствіи будемъ поэтому для тѣхъ веществъ, которые изслѣдовались Дитеричи, пользоваться всегда таблицами названнаго автора.

Допуская, такимъ образомъ, что ненормальная величина осмотического давленія, развиваемаго плазматической перепонкой, а слѣдовательно и ненормально низкая величина изотоническихъ коэффициентовъ зависятъ, подобно тому, какъ это было найдено для осадочныхъ перепонокъ Тамманномъ, исключительно отъ проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ, найдемъ видъ математической зависимости послѣдней отъ изотоническихъ коэффициентовъ теоретическаго и найденнаго опытнымъ путемъ.

Если  $c_1$  — концентрація перваго вещества,  $c_2$  ему отвѣчающая изотоническая концентрація втораго вещества, найденная изъ таблицъ Дитеричи или вычисленная при помощи формулы Арреніуса, а  $P_0$  — общее имъ осмотическое давленіе въ предположеніи абсолютной полупроницаемости перепонки, то молекулярныя осмотическія давленія обѣихъ растворовъ:  $p_{m1} = \frac{P_0}{c_1}$  и  $p_{m2} = \frac{P_0}{c_2}$ ; отношеніе ихъ  $\frac{p_{m1}}{p_{m2}} = \frac{c_2}{c_1}$ ; но  $\frac{c_2}{c_1} = \frac{k_1}{k_2}$ , гдѣ  $k_1$  и  $k_2$  — теоретическіе изотоническія коэффициенты, поэтому

$$\frac{p_{m1}}{p_{m2}} = \frac{k_1}{k_2} \dots \dots \dots (I).$$

Въ предположеніи проницаемости перепонки для веществъ растворенныхъ, изотоническія концентраціи обоеихъ веществъ окажутся другими именно такими, какими мы ихъ найдемъ изъ плазмолитическихъ опытовъ. Обозначимъ ихъ черезъ  $c_1'$  и  $c_2'$ . вмѣстѣ съ тѣмъ измѣнится также общее имъ осмотическое давленіе; пусть послѣднее будетъ  $P$ ; тогда молекулярное осмотическое давленіе перваго раствора  $p_{m1}' = \frac{P}{c_1'}$ , втораго  $p_{m2}' = \frac{P}{c_2'}$ ; отношеніе ихъ равно  $\frac{p_{m1}'}{p_{m2}'} = \frac{c_2'}{c_1'}$ ; но  $\frac{c_2'}{c_1'} = \frac{k_1'}{k_2'}$ , гдѣ  $k_1'$  и  $k_2'$  — изотоническіе коэффициенты, найденные опытнымъ путемъ при помощи плазмолиза. слѣдовательно  $\frac{p_{m1}'}{p_{m2}'} = \frac{k_1'}{k_2'}$ . Но по найденной зависимости осмотическаго давленія отъ проницаемости перепонки (см. стр. 9 и тамъ цитир. работы)  $p_{m1}' = p_{m1}(1 - \mu_1)$  и  $p_{m2}' = p_{m2}(1 - \mu_2)$ . Здѣсь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — факторы проницаемостей плазматической перепонки для перваго и втораго вещества.

Такимъ образомъ:  $\frac{p_{m1}(1 - \mu_1)}{p_{m2}(1 - \mu_2)} = \frac{k_1'}{k_2'}$ ; подставивъ вмѣсто  $\frac{p_{m1}}{p_{m2}}$  ему равное значеніе изъ I, имѣемъ окончательную формулу, выражающую зависимость изотоническихъ коэффициентовъ  $k$  и факторовъ проницаемостей  $\mu$

$$\frac{k_1(1 - \mu_1)}{k_2(1 - \mu_2)} = \frac{k_1'}{k_2'} \dots \dots \dots (II).$$

Если одно изъ изслѣдуемыхъ веществъ сахаръ, то  $\mu_1$  можно принять равнымъ 0, а  $k_1 = k_1' = 1,88$ . слѣдовательно

$$\mu_2 = 1 - \frac{k_2'}{k_2} \dots \dots \dots (III).$$

Въ опытахъ де-Фриза, произведенныхъ надъ *Spirogyra nitida*, изотоническій коэффициентъ глицерина, какъ было указано, равнялся 1,61, а изотоническій коэффициентъ, найденный изъ таблицъ Дитеричи = 1,85. Слѣдовательно проницаемость плазматической перепонки названной водоросли  $\mu_{гг.} = 1 - \frac{1,61}{1,85} = 0,13$  (или около  $\frac{1}{8}$ ). Для эпидермиса листа *Tradescantia discolor*  $\mu_{гг.} = 1 - \frac{1,78}{1,86} = 0,05$ , такъ какъ въ своихъ опытахъ де-Фризь пользовался растворами концентраціи 0,2 гр.-мол. (de-Vries, V) и найденный имъ изотоническій коэффициентъ равенъ 1,78.

Такъ какъ факторъ проницаемости  $\mu$  пропорціоналенъ проницаемости  $\beta$ , то равенство  $\mu = 1 - \frac{k'}{k}$  можно провѣрить, вычисляя величину проницаемости по способу, описанному въ предыдущемъ параграфѣ, понятно въ предѣлахъ точности этого способа. Если коэффициентъ упомянутой пропорціанальности есть  $h$ , то  $\beta h = 1 - \frac{k'}{k}$ . Найдя  $h$  изъ перваго опыта, мы можемъ для послѣдующихъ опытовъ вычислить  $\beta$  по послѣдней формулѣ и сравнить его съ  $\beta$ , полученными опытнымъ путемъ. Въ случаѣ справедливости формулы обѣ величины должны быть одинаковы. Обратимся теперь къ описанію опытовъ.

Опыты были поставлены такимъ образомъ, какъ описано на стр. 35. Изотоническій коэффициентъ находился изъ измѣненій объема протопласта, плазмолизированнаго сахаромъ, при перенесеніи въ растворъ глицерина, по концентраціи подходящей къ изотоничному. Если напр. объемъ протопласта въ сахарѣ концентраціи  $c_1$  былъ  $V_1$ , а объемъ его въ глицеринѣ концентраціи  $c_2$  былъ  $V_2$ , то концентрація глицерина, изотоничнаго сахару концентраціи  $c_1$ , очевидно была равна:  $c_x = \frac{V_2 c_2}{V_1}$ , а изотоническій коэффициентъ глицерина, предполагая изотоническій коэффициентъ сахара = 1,88, опредѣлялся:  $k' = \frac{c_1 \cdot 1,88}{c_x}$ . Само собою разумѣется, что объемъ  $V_2$  долженъ быть уменьшенъ на нѣкоторую величину, соответствующую величинѣ эндосмоза глицерина въ промежутокъ времени между зарисовываніемъ объемовъ  $V_1$  и  $V_2$ . Эта величина опредѣлялась изъ послѣдующаго увеличенія объема протопласта.

Въ таблицахъ I и II, въ рубрикахъ  $V_1$  стоятъ объемы протопластовъ въ сахарѣ въ куб. сант., въ рубр.  $V_2$  — исправленные на эндосмозъ объемы протопластовъ въ глицеринѣ, въ рубр.  $w$  — приращенія объемовъ въ глицеринѣ въ теченіе послѣдующихъ 2 часовъ (зарисованіе происходило 2 раза — средняя величина принималась за истинную). Въ рубрикахъ  $c$  стоятъ среднія разности концентрацій въ гр.-мол. (см. стр. 35). Въ рубрикѣ  $k'$  — найденные изотонические коэффициенты глицерина и наконецъ въ рубрикѣ  $\beta$  — проницаемости плазматической перепонки для глицерина, вычисленные по способу, описанному на стр. 35 — 36. Цифры рубрикъ должны быть умножены для полученія истинныхъ величинъ (т. е. въ куб. сант. и гр.-мол.) на число, поставленное внизу буквъ рубрикъ.

Таблица I.

Нить спирогиры № 1 плазмолизировалась сахаромъ конц. 0,5848 гр.-мол. въ литрѣ и глицериномъ конц. 0,6957 гр.-мол. Нить № 2 — сахаръ 0,7310 гр.-мол. и глицеринъ 0,8696 гр.-мол.

№ № клѣтокъ.	Нить № 1.						Нить № 2.					
	$V_1(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$V_2(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$w(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$k'$	$c$ гр.-мол.	$\beta$ $\times 10^{-9}$	$V_1(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$V_2(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$w(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$k'$	$c$ гр.-мол.	$\beta$ $\times 10^{-9}$
1	343,7	329,5	18,1	1,649	0,6711	63	147,5	144,4	16,2	1,615	0,7872	115
2	396,4	375,2	18,3	1,670	0,6729	58	146,3	139,9	18,4	1,653	0,7767	148
3	369,2	351,2	31,1	1,660	0,6603	101	146	144,4	17,5	1,561	0,7915	112
4	409,7	393,1	24,6	1,647	0,6691	71	145,2	143,7	15,3	1,595	0,7980	108
5	417,4	397,6	31,9	1,660	0,6612	92	145,9	147,2	10,9	1,567	0,8245	74
6	414,5	400,5	26,1	1,632	0,6685	75	137,1	137,9	10,9	1,572	0,8125	85
7	238,5	222,2	21,1	1,660	0,6562	104	138,5	135,9	14,4	1,612	0,7884	109
8	426,9	407,4	23,5	1,656	0,6722	65	151,2	153	15,7	1,562	0,7922	105
9	191,3	187,7	17,1	1,610	0,6569	99	152,5	154,5	13,8	1,560	0,8144	91
10	—	—	—	—	—	—	151,4	154,5	11,1	1,552	0,8169	75
11	—	—	—	—	—	—	147,9	148,8	13,7	1,574	0,8150	93
12	—	—	—	—	—	—	182,7	176,4	21,7	1,630	0,7607	137
—	Среднее:			1,649	—	81	Среднее:			1,587	—	104

Таблица II.

Нить спирогиры № 3 плазмолизировалась сахаромъ конц. 0,7044 гр.-мол. и глицериномъ конц. 0,8021; нить № 4 — сахар. 0,8783 гр.-мол. и глиц. 0,9408 гр.-мол.

№ № клѣтокъ.	Нить № 3.						Нить № 4.					
	$V_1(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$V_2(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$w(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$c$ гр.-мол.	$k'$	$\beta$ $\times 10^{-9}$	$V_1(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$V_2(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$w(c.c.)$ $\times 10^{-8}$	$k'$	$c$ гр.-мол.	$\beta$ $\times 10^{-9}$
1	97,3	98,9	12,3	0,726	1,624	117	134,2	153,3	24,4	1,537	0,860	170
2	105,1	106,8	9	0,747	1,624	82	119	136,1	39,7	1,534	0,853	156
3	101,9	104,4	11,9	0,733	1,611	108	134,7	153,5	29,7	1,547	0,845	203
4	90,2	95,2	9,4	0,740	1,564	90	137,9	155,6	23,7	1,556	0,862	162
5	99,3	100,3	8,7	0,735	1,634	84	135,2	155,6	27,0	1,525	0,864	182
6	90,3	91,2	9,7	0,735	1,637	97	127,7	148,8	29,7	1,507	0,843	203
7	92,2	95,0	6,8	0,753	1,601	71	138,5	162,8	27,7	1,493	0,855	218
8	90,3	92,8	5,4	0,760	1,606	57	115	137,1	26,0	1,472	0,847	195
9	99,0	103,3	10,8	0,745	1,582	99	115,6	137,1	18,3	1,482	0,867	150
10	96,6	98,7	9,4	0,741	1,616	87	100,6	119,9	10,8	1,473	0,889	108
11	84,4	86,5	10,4	0,729	1,611	107	126	152,4	24,7	1,451	0,859	177
12	96,1	98,9	8,7	0,746	1,604	82	127	152,2	33,3	1,465	0,834	232
13	—	—	—	—	—	—	119,8	149,6	30,7	1,405	0,840	223
—	Среднее:			—	1,609	92	Среднее:			1,498	—	183

Теоретическіе изотоническіе коэффициенты вычислялись мною по таблицамъ Дитериче (Dieterici). Для удобства я привожу здѣсь теоретическія величины изотоническихъ коэффициентовъ глицерина для различныхъ концентрацій. Промежуточные величины могутъ находиться интерполяціей.

Таблица III.

Изотоническіе коэффициенты глицерина  $k$ , вычисленные по таблицамъ Дитериче (Dieterici).  $c_1$  и  $c_2$  — концентраціи растворовъ сахара и глицерина, имѣющихъ одну и ту-же упругость пара, т. е. изотоничныхъ.  $\Pi_m$  и  $\Pi_m'$  — молекулярное пониженіе упругости пара тѣхъ же растворовъ въ  $\frac{m}{m}$ .

$\Pi_m$	$c_1$ (гр.-мол.)	$c_1$ ‰	$\Pi_m'$	$c_2$ (гр.-мол.)	$c_2$ ‰	$k$ (изот. коэфф. сахара = 1,88).
0,0900	1,0	34,2	0,081	1,1115	10,22	1,692
0,0894	0,9	30,68	0,081	0,9932	9,14	1,703
0,0888	0,8	27,36	0,081	0,8770	8,07	1,715
0,0882	0,7	23,94	0,081	0,7622	7,07	1,727
0,0876	0,6	20,52	0,081	0,6489	5,98	1,739
0,0871	0,5	17,1	0,081	0,5377	4,94	1,749
0,0860	0,4	13,68	0,0822	0,4185	3,81	1,797
0,0847	0,3	10,26	0,0833	0,3050	2,81	1,849
0,084	0,2441	8,35	0,084	0,2441	2,22	1,88
0,084	0,2	6,84	0,083	0,2024	1,86	1,858
0,084	0,15	5,13	0,0817	0,1542	1,41	1,829
0,084	0,1	3,42	0,081	0,1037	0,95	1,813

Подставляя въ выраженіе зависимости фактора проницаемости плазматической перепонки отъ изотоническихъ коэффициентовъ:  $\beta h = 1 - \frac{k'}{k}$  (см. стр. 40) вмѣсто  $\beta$  и  $k'$  ихъ величины, найденныя изъ второго опыта (табл. I, нить № 2), а вмѣсто  $k$  величину его изъ таблицы III, соответствующую концентраціи сахара 0,7310 гр.-мол., имѣемъ:

$$104 \cdot 10^{-9} h = 1 - \frac{1,587}{1,723} = 0,0789, \text{ откуда } h = 758700.$$

Вычислимъ теперь изъ величинъ изотоническихъ коэффициентовъ  $k'$  и  $k$  величины  $\beta$  для остальныхъ опытовъ и сравнимъ ихъ съ найденными опытнымъ путемъ.

Нить № 1 (табл. I) плазмоллизировалась растворомъ сахара концентраціи 0,5848 гр.-мол.; изотоническій коэффициентъ, соответствующій послѣдней изъ данныхъ Дитеричи (см. табл. III)  $k$  равенъ 1,741, а изотоническій коэффициентъ, найденный опытнымъ путемъ,  $k' = 1,649$ ; слѣдовательно  $\beta \cdot 758700 = 1 - \frac{1,649}{1,741}$ ; отсюда  $\beta = 70 \cdot 10^{-9}$ , найденное же опытнымъ путемъ (табл. I)  $\beta = 81 \cdot 10^{-9}$ . Для нити № 3 (табл. II) находимъ теоретическій изотоническій коэффициентъ  $k = 1,727$  (см. табл. III), а такъ какъ коэффициентъ, найденный опытнымъ путемъ  $k' = 1,609$ , то  $\beta$  должно равняться  $90 \cdot 10^{-9}$ ,

тогда какъ опытнымъ путемъ эта величина найдена равной  $92.10^{-9}$ . Подобнымъ же образомъ найдемъ для нити № 4 теоретическій изотоническій коэффициентъ  $k = 1,706$  и вычисленное  $\beta = 160.10^{-9}$ ; найденное же опытнымъ путемъ для этой нити  $\beta = 183.10^{-9}$ .

Разница между вычисленными и найденными опытнымъ путемъ величинами  $\beta$  не превосходитъ, такимъ образомъ, погрѣшностей наблюденія и вычисления. Зная величину фактора проницаемости и коэффициентъ пропорціанальности  $h$ , можно опредѣлить величину  $\beta$  и во всякомъ другомъ случаѣ. Коэффициентъ  $h$  мы опредѣляли изъ второго опыта (табл. II), правильнѣе было бы для будущихъ опытовъ за величину  $h$  принять среднюю величину его изъ всѣхъ четырехъ опытовъ. Такая средняя величина  $h = 703200$ . Опредѣливъ для любой клѣтки величину  $\mu$  изъ изотоническихъ коэффициентовъ глицерина и раздѣливъ его на  $703200$ , получимъ проницаемость плазматической перепонки этой клѣтки для глицерина. Если не абсолютная, то относительная величина послѣдней будетъ во всякомъ случаѣ точнѣе, чѣмъ величина ея, найденная изъ непосредственнаго наблюденія расхожденія плазмолиза, такъ какъ точность опредѣленія фактора проницаемости значительно больше точности нахождения  $\beta$  по послѣднему способу.

При полученіи формулы:  $\mu = 1 - \frac{k'}{k}$ , мы предполагали, что проницаемость плазматической перепонки для сахара равна нулю. Въ случаѣ значительной проницаемости послѣдней для сахара формула усложняется, принимая видъ:

$$\mu = 1 - \frac{k}{k'} M, \text{ гдѣ: } M = \frac{1,88}{k_0} (1 - \mu_0).$$

Въ послѣднемъ выраженіи  $k_0$  — есть изотоническій коэффициентъ сахара въ предположеніи, что перепонка проницаема для него и факторъ проницаемости ея  $= \mu_0$ . Величина  $M$  однако даже при большой проницаемости плазматической перепонки для сахара очень близка къ единицѣ. Если напр. осмотическія свойства сахара оказались бы даже одинаковыми съ глицериномъ, то и тогда  $M = 0,97$ .

Способъ опредѣленія проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ наружной жидкости, и ея фактора изъ изотоническихъ коэффициентовъ этихъ веществъ, выгодно отличаясь отъ другихъ способовъ опредѣленія проницаемости отсутствіемъ выше перечисленныхъ (стр. 34 и 37) недостатковъ, имѣетъ для насъ въ особенности большую цѣну, позволяя судить о величинѣ измѣненія осмотическаго давленія наружнаго раствора вслѣдствіе измѣненія проницаемости плазматической перепонки.

### 3. Вліяніе слабого и сильнаго плазмолиза на проницаемость плазматической перепонки.

До сихъ поръ мы предполагали, какъ это дѣлается и обыкновенно, что плазмолизъ, безъ различія, слабый или сильный, не вліяютъ на проницаемость плазматической перепонки, а слѣдовательно и на осмотическое давленіе наружнаго раствора. Только такое предположеніе позволяетъ переносить данныя, полученные при помощи плазмолиза, на клѣтку, находящуюся въ нормальныхъ условіяхъ и считать результаты, полученные



при помощи методовъ, описанныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, отвѣчающими дѣйствительности. Между тѣмъ на вредное дѣйствіе быстро или слишкомъ долго дѣющагося плазмолиза на плазму неоднократно указывалось въ литературѣ (напр. de-Vries, VIII и VI, Reinhard); измѣненіе проницаемости плазматическаго мѣшка подъ вліяніемъ послѣдняго казалось поэтому очень возможнымъ. Въ виду этого мнѣ представлялось необходимымъ выяснитъ вліяніе плазмолиза и концентраціи плазмолизирующаго раствора на проницаемость плазматической перепонки и, если это вліяніе окажется значительнымъ, вводитъ соответственныя поправки въ получаемые результаты или по крайней мѣрѣ принимать во вниманіе это вліяніе при толкованіи послѣдующихъ опытовъ. Посмотримъ сначала измѣняется-ли проницаемость плазматической перепонки при плазмолизѣ.

Факторъ проницаемости плазматической перепонки не плазмолизированной клѣтки нельзя опредѣлить при помощи изотоническихъ коэффициентовъ; поэтому можно было-бы, воспользоваться методомъ опредѣленія, если и не самой величины  $\mu$ , то ей пропорціональной проницаемости  $\beta$  при помощи анализа клѣточного сока. Однако съ одной стороны для этого необходимо было брать для изслѣдованія цѣлыя комплексы тканей и клѣтокъ съ различными проницаемостями перепонокъ, что лишило бы насъ возможности съ достаточной точностью опредѣлять величину  $\beta$  въ случаѣ плазмолиза, такъ какъ послѣдній приходится вести подъ микроскопомъ на срѣзахъ и поэтому можно установить проницаемость только для самой незначительной части клѣтокъ, входящихъ въ изслѣдованный комплексъ тканей, съ другой стороны такой способъ далъ-бы неточные результаты также благодаря ошибкамъ, необходимымъ вслѣдствіе различія въ величинѣ путей дифузій плазмолизирующаго раствора въ первомъ и во второмъ случаѣ. Поэтому я воспользовался для опредѣленія проницаемости перепонки не плазмолизированной спирогиры наблюденіями надъ восстановленіемъ тургорнаго давленія клѣтокъ этой водоросли послѣ помѣщенія ея въ слабый растворъ глицерина, вслѣдствіе проникновенія послѣдняго въ клѣточный сокъ.

О тургорномъ давленіи клѣтокъ спирогиры мы можемъ судить, какъ будетъ показано ниже, по величинѣ натяженія клѣточной оболочки, опредѣляя послѣднюю измѣреніемъ длины нити водоросли въ тургесцентномъ состояніи, при неполномъ тургорномъ давленіи и при отсутствіи послѣдняго съ помощью масштаба, нанесеннаго на предметное стекло. Въ отдѣлѣ этой главы, посвященномъ опредѣленію осмотическаго давленія клѣточного сока механическимъ методомъ, будетъ подробно описано, какимъ образомъ подобное измѣреніе производится, теперь же я ограничусь замѣчаніемъ, что послѣднее можно произвести во всякомъ случаѣ съ точностью не менѣе, 0,02% длины нити.

Вслѣдъ за помѣщеніемъ нити спирогиры въ глицеринъ концентраціи 0,19 гр.-мол. въ литрѣ длина послѣдней уменьшается въ слѣдствіе уменьшенія тургорнаго давленія, но по мѣрѣ проникновенія въ клѣточный сокъ глицерина эта длина вновь увеличивается и наконецъ полностью восстанавливается, такъ какъ къ осмотическому давленію веществъ сока прикладывается осмотическое давленіе эндосмирующаго глицерина. Само собою разумѣется, что увеличеніе длины нити въ глицеринѣ должно быть уменьшено величиною роста

нити въ послѣднемъ, найденною предварительнымъ опытомъ. Обыкновенно сначала находилась ростъ нити въ растворѣ сахара концентраціи изотоничной съ глицериномъ, потомъ водоросль помѣщалась въ глицеринъ, гдѣ измѣрялось приращеніе длины ея въ слѣдствіе вхожденія глицерина — ростъ, и наконецъ глицеринъ замѣнялся сахарнымъ растворомъ и опредѣлялся снова ростъ водоросли въ послѣднемъ. Ростъ въ глицеринѣ принимался равнымъ средней величинѣ роста въ сахарѣ до и послѣ погруженія въ глицеринъ, что весьма близко къ истинѣ, такъ какъ опытъ производился всего нѣсколько часовъ.

При замѣнѣ воды растворами и сахара глицериномъ соблюдалось постепенное введеніе водоросли въ новую среду. Длина нитей въ слѣдующихъ таблицахъ выражена въ дѣленіяхъ, вытравленныхъ на предметномъ стеклѣ.

### ОПЫТЪ 1.

Нить № 1, находится въ водѣ, на разсѣянномъ солнечномъ свѣту.

Число.	Часы.	Температура.	Длина нити.	Увеличеніе длины въ часъ.
27, VI	4 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> в.	24° С.	47,67	—
—	7 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup> »	24° »	47,73	0,025 (вечеръ).
28, VI	8 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup> у.	24° »	47,88	0,012 (ночь).
—	7 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup> в.	23° »	47,95	0,007 (день).
29, VI	6 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> у.	22° »	48,31	0,032 (ночь).

Нить положена въ растворѣ сахара концентраціи 0,118 гр.-мол. въ литрѣ.

—	7 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>	22° С.	48,08	—
---	--------------------------------	--------	-------	---

Нить положена въ сахаръ концентраціи 0,16 гр.-мол. (0,16 — 0,118 = 0,042 гр.-мол., что соотв. давл. 1 атм.).

—	8 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup> у.	22° С.	47,83	—
—	10 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> »	22° »	47,91	0,032 (утро).

Нить положена въ глицеринъ концентраціи 0,19 гр.-мол., т. е. почти изотон. раств. сах. 0,16 гр.-мол.

—	11 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup> у.	22° С.	47,87	—
—	2 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> дня.	22° »	48,03	0,064 (день).
—	3 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> »	22° »	48,09	0,040

Нить положена въ сахаръ концентраціи 0,181 гр.-мол.

—	4 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> дня.	22° С.	48,09	—
—	5 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> »	22° »	48,095	0,005 (день).
—	6 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> в.	21° »	48,10	0,005 (вечеръ).

Послѣ плазмолиза (т. е. полного исчезновенія тургорнаго давленія).

—	—	—	47,07	—
---	---	---	-------	---

## ОПЫТЪ 2.

Нить № 2, находится въ водѣ, на разсѣянномъ солн. свѣту.

Число.	Часы.	Температура.	Длина нити.	Увеличеніе длины въ часть.
29, VI	6 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	22° С.	45,77	—

Нить положена въ сахарный растворъ конц. 0,118 гр.-мол. въ литрѣ.

—	7 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	22° С.	45,56	—
---	--------------------------------	--------	-------	---

Нить положена въ сахаръ конц. 0,16 гр.-мол.

—	8 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> у.	22° С.	45,32	—
—	11 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> »	22° »	45,33	0,004

Нить положена въ глицеринъ конц. 0,19 гр.-мол.

—	11 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> у.	22° С.	45,21	—
—	2 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> дня.	22° »	45,36	0,054
—	3 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> »	22° »	45,41	0,037

Нить положена въ сахаръ конц. 0,181 гр.-мол.

—	4 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> дня.	22° С.	45,42	—
—	5 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> в.	22° »	45,42	0,000
—	7 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> »	21° »	45,43	0,006

Послѣ плазмолиза (т. е. при тургорномъ давленіи = 0).

—	—	—	44,50	—
---	---	---	-------	---

Величина проницаемостей плазматической перепонки клѣтокъ изслѣдованныхъ нитей  $\beta = \frac{p}{c_1 - c_2}$  вычислится изъ приведенныхъ опытовъ слѣдующимъ образомъ.

Въ опытѣ 1 длина нити увеличивалась въ глицеринѣ въ среднемъ на  $\frac{0,064 + 0,040}{2} = 0,052$  дѣлений въ часъ. Въ то же время ростъ нити равнялся въ среднемъ  $\frac{0,032 + 0,005}{2} = 0,018$  дѣлений. Такимъ образомъ длина нити увеличивалась вслѣдствіе эндосмоса глицерина въ среднемъ на 0,034 дѣленія въ часъ. Но изъ того же опыта (29, VI, 6<sup>h</sup> 30 — 7<sup>h</sup> 15) видно, что при увеличеніи тургорнаго давленія на одну атмосферу (0,16 гр.-мол. — 0,118 гр.-мол. = 0,042 гр.-мол., что соотвѣтствуетъ давленію въ 1 атм.) длина нити увеличивается на 0,25 дѣлений предметнаго стекла. Слѣдовательно вслѣдствіе

эндосмоса глицерина тургорное давленіе клѣтокъ нити повышалось въ часъ въ среднемъ на 0,14 атмосфер., что отвѣчаетъ увеличенію концентраціи глицерина въ клѣточномъ соку на 0,0063 гр.-мол. въ часъ. Такъ какъ, далѣе, передъ первымъ наблюденіемъ длины нити въ глицеринѣ послѣдняя находилась въ немъ уже около часа, а опытъ продолжался послѣ этого еще 4 часа, то разность концентрацій глицерина снаружи и внутри клѣтокъ ко времени перваго наблюденія  $c_1 - c_2 = 0,19 - 0,006 = 0,184$  гр.-мол., въ концѣ же пребыванія въ глицеринѣ  $c_1 - c_2 = 0,19 - 0,00635 = 0,18365$ . Въ среднемъ можно принять такимъ образомъ эту разность равной  $c_1 - c_2 = 0,17$  гр.-мол. Такъ какъ далѣе объемъ нити  $(\pi \frac{D^2}{4} l)$  при среднемъ внутреннемъ діаметрѣ въ 0,28 дѣлений и средней длинѣ въ 47,98 дѣлений равенъ 2,9544 куб. дѣлений масштаба или (каждое дѣленіе послѣдняго =  $\frac{1}{75}$  сантим.)  $72909 \cdot 10^{-10}$  куб. сант., то каждый часъ черезъ всю поверхность нити эндосмировалось въ среднемъ  $\frac{72909 \cdot 10^{-10} \cdot 0,0063}{1000} = 45932 \cdot 10^{-15}$  гр.-мол. глицерина. Поверхность нити  $(\pi D l)$ , какъ нетрудно вычислить, равна 42,205 кв. дѣл. масштаба или  $77074 \cdot 10^{-7}$  кв. сант. Такимъ образомъ для нити № 1 величина  $\beta = \frac{45932 \cdot 10^{-8}}{77074 \cdot 0,17} = 35 \cdot 10^{-9}$ .

Путемъ аналогичнаго разсужденія изъ опыта 2 находимъ для нити № 2 среднее увеличеніе длины нити въ часъ 0,042 дѣлений, что соотвѣтствуетъ 0,17 атмосферы и увеличенію концентраціи глицерина на 0,0076 гр.-мол. въ часъ. Діаметръ нити оказался равнымъ 0,265 дѣлений, что отвѣчаетъ объему нити въ 2,499 куб. дѣл. =  $61600 \cdot 10^{-10}$  куб. сант. и поверхности 37,72 кв. дѣл. =  $68880 \cdot 10^{-7}$  кв. сант. Количество глицерина, диффундировавшаго черезъ всю поверхность въ часъ, =  $46780 \cdot 10^{-15}$  гр.-мол. и средняя разность концентрацій снаружи и внутри  $c_1 - c_2 = 0,18$  гр.-мол. Такимъ образомъ для нити № 2,  $\beta = 38 \cdot 10^{-9}$ .

Посмотримъ теперь насколько измѣнятся величины  $\beta$ , а слѣдовательно и имъ пропорціональныя величины факторовъ проницаемостей плазматической перепонки  $\mu$  при плазмолизѣ клѣтокъ.

Растворъ сахара концентраціи 0,181 гр.-мол., въ которомъ находились нити № 1 и 2 къ концу опытовъ, былъ постепенно замѣненъ растворомъ сахара концентраціи 0,47 гр.-мол. Послѣ того какъ плазмолизованные протопласты клѣтокъ приняли окончательную фигуру (1 часъ), растворъ сахара въ свою очередь замѣненъ растворомъ, содержащимъ въ литрѣ 0,31 гр.-мол. сахара и 0,19 гр.-мол. глицерина. Увеличеніе объема плазмолизованныхъ протопластовъ 10 клѣтокъ изъ различныхъ частей каждой нити наблюдалось такимъ-же образомъ, какъ описано на стр. 35. Вычисленіе объемовъ, ихъ приращеній, поверхностей и т. п. производилось по тѣмъ-же формуламъ какъ и при составленіи таблицъ I—II. Измѣреніе производилось въ дѣленіяхъ масштаба предметнаго стекла, переводившихся потомъ въ сантиметры.

Таблица IV.

Растворъ: 0,31 гр.-мол. сах. + 0,19 гр.-мол. глицер.  $V$  — объемы плазмолизированныхъ протопластовъ въ с. с.  $W$  — приращеніе объемовъ послѣ пребыванія водоросли въ теченіе 2-хъ часовъ въ растворѣ.  $P$  — среднія поверхности плазмолиз. протопластовъ въ кв. сант.  $C$  — среднія разности концентрацій растворовъ глицерина.  $\beta$  — проницаемость. Числа рубрикъ надо умножить на цифры, поставленныя внизу буквъ. Выѣшній растворъ принимался изотоничнымъ 0,55 гр.-мол. глицер.

№ № кѣтокъ.	Нить № 1.					Нить № 2.				
	$V$ (с. с.) $\times 10^{-10}$	$W$ (с. с.) $\times 10^{-10}$	$P$ (q. с.) $\times 10^{-6}$	$c$ въ гр.-мол.	$\beta$ $\times 10^{-9}$	$V$ (с. с.) $\times 10^{-10}$	$W$ (с. с.) $\times 10^{-10}$	$P$ (q. с.) $\times 10^{-6}$	$c$ въ гр.-мол.	$\beta$ $\times 10^{-9}$
1	863	30	106	0,155	50	516	22	69	0,15	57
2	789	18	99	0,16	32	455	15	66	0,15	41
3	740	15	93	0,16	28	380	8	53	0,145	29
4	370	9	51	0,16	38	730	6	92	0,15	45
5	720	22	86	0,155	47	445	13	64	0,145	38
6	449	18	62	0,155	52	650	23	81	0,145	54
7	373	8	55	0,16	25	360	10	50	0,15	36
8	493	10	66	0,16	26	580	12	76	0,145	30
9	600	22	79	0,155	50	630	24	79	0,15	56
10	813	19	100	0,16	32	490	16	68	0,15	44
—	Среднее:				38	Среднее:				43

Мы видимъ, такимъ образомъ, что проницаемость плазматической перепонки, а слѣдовательно и ей пропорціальный факторъ ея  $\mu$  въ предѣлахъ погрѣшностей наблюденія остаются послѣ плазмолиза тѣми-же или, если и измѣняются, то настолько незначительно, что это измѣненіе не можетъ существенно отражаться на осмотическомъ давленіи и не имѣетъ для насъ большого значенія.

Обратимся теперь къ опытамъ съ вліяніемъ концентраціи плазмолизирующаго раствора на проницаемость плазматической перепонки.

Нить спирогиры была постепенно (2 ч.) плазмолизирована растворомъ сахара конц. 0,44 гр.-мол., послѣ чего переведена въ растворъ, содержащій въ литрѣ 0,22 гр.-мол. сахара и 0,26 гр.-мол. глицерина. Черезъ  $\frac{1}{2}$  наблюдался первый разъ объемъ плазмолизированныхъ протопластовъ. Еще черезъ два часа отмѣчалось приращеніе объема, послѣ чего водоросль была постепенно переведена въ растворъ сахара концентраціи 0,66 гр.-мол. и по установленіи новой фигуры плазмолиза въ растворъ, содержащій 0,44 гр.-мол. сахара и 0,26 гр.-мол. глицерина. Новое увеличеніе объема втеченіе 2-хъ послѣдующихъ часовъ отмѣчалось, какъ обыкновенно. Буквы сохранены тѣ-же.

Таблица V.

Нить № 7.

№ № КЛѢТОКЪ.	Растворъ: сахаръ 0,22 + глицеринъ 0,26.				Растворъ: сахаръ 0,44 + глицеринъ 0,26.			
	$w_1$ (с. с.) $\times 10^{-10}$	$P_1$ (г. с.) $\times 10^{-7}$	$c_1$ гр.-мол.	$\beta_1$ $\times 10^{-9}$	$w_2$ (с. с.) $\times 10^{-10}$	$P_2$ (г. с.) $\times 10^{-7}$	$c_2$ гр.-мол.	$\beta_2$ $\times 10^{-9}$
1	46	915	0,24	54	18	656	0,22	48
2	86	1020	0,24	57	20	748	0,22	43
3	32	915	0,25	36	22	680	0,23	46
4	54	994	0,24	58	21	754	0,22	50
5	49	1010	0,242	52	21	747	0,23	50
6	39	1000	0,255	40	19	756	0,24	41
7	38	1040	0,25	38	19	750	0,23	38
8	39	1140	0,25	34	16	889	0,23	30
—	Среднее:			46	Среднее:			43

Проницаемости плазматической перепонки  $\beta$ , а слѣдовательно и имъ пропорціанальные факторы  $\mu$ , какъ видно изъ табл. V, даже при увеличеніи концентраціи плазмолизирующаго раствора въ  $1\frac{1}{2}$  раза въ предѣлахъ погрѣшности наблюденія остаются тѣми-же или во всякомъ случаѣ измѣняются такъ незначительно, что это измѣненіе не отражается ощутительно на осмотическомъ давленіи, а поэтому и не имѣетъ для насъ значенія.

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ заключенію, что какъ слабый такъ и сильный плазмолизъ не измѣняютъ проницаемости плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ наружной жидкости, и ея фактора, по крайней мѣрѣ, въ предѣлахъ погрѣшностей опыта. Данныя, полученныя при помощи плазмолиза независимо отъ концентраціи плазмолизирующаго раствора, не теряютъ, слѣдовательно, своей силы и въ примѣненіи къ не плазмолизированнымъ клѣткамъ.

### С. Осмотическое давленіе клѣточного сока.

Осмотическое давленіе клѣточного сока измѣряется, какъ извѣстно, 1) при помощи сравненія этого давленія съ осмотическимъ давленіемъ наружнаго раствора (плазмолитическій методъ), 2) путемъ опредѣленія точки замерзанія выжатаго сока (кріоскопическій методъ), 3) вычисленіемъ его изъ химическаго состава послѣдняго по формуламъ Вантъ-Гоффа и Арреніуса (аналитическій методъ), и наконецъ 4), опредѣляя его изъ тургорнаго натяженія клѣточной оболочки или при помощи динамометра (механическіе методы). Мы рассмотримъ всѣ эти методы послѣдовательно.

### 1. Плазмолитическій методъ.

Согласно плазмолитическому методу обыкновенно принято считать клѣточный сокъ изотоничнымъ такому раствору какого-нибудь вещества, который вызываетъ едва замѣтные слѣды плазмолиза клѣтки. Однако такой растворъ, какъ на то указалъ еще Пфефферъ, не строго изотониченъ клѣточному соку. Объемъ клѣтки при плазмолизѣ, какъ извѣстно, уменьшается и въ случаѣ большого тургорнаго натяженія оболочки (напр. у *Pilobolus*, см. мою русскую работу, стр. 21) объемъ едва начинающей плазмолизироваться клѣтки можетъ иногда быть вдвое меньше объема той-же клѣтки въ нормальномъ состояніи. Кромѣ того въ клѣткѣ имѣется еще, какъ мы знаемъ центральное давленіе, поэтому осмотическое давленіе клѣточного сока должно быть нѣсколько больше давленія наружнаго раствора. Если центральнымъ давленіемъ благодаря его малости можно обыкновенно пренебрегать (см. гл. I, стр. 26), то поправку на уменьшеніе объема клѣтки никогда не слѣдуетъ оставлять безъ вниманія. Далѣе необходимо также вводить поправки на эндосмозъ плазмолизирующаго вещества, экзосмозъ и новообразование веществъ клѣточного сока втеченіе времени, протекающаго до момента установленія осмотическаго равновѣсія. При плазмолизѣ веществами, легко проникающими черезъ плазматическія перепонки (напр. глицериномъ, мочевиной), поправка на эндосмозъ можетъ быть очень существенной; поправка на экзосмозъ веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, можетъ иногда достигать также значительной величины (см. ниже). Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ подобныя поправки должны, само собою разумѣется, находиться опытнымъ путемъ: изъ наблюденія измѣненій фигуры плазмолиза при долговременномъ пребываніи клѣтокъ въ плазмолизирующихъ растворахъ различныхъ веществъ.

Введеніе всѣхъ перечисленныхъ поправокъ позволитъ изъ осмотическаго давленія плазмолизирующаго раствора вычислить болѣе или менѣе точно и величину осмотическаго давленія сока клѣтки, находящейся въ естественныхъ условіяхъ.

Какъ не однократно уже упоминалось, всѣ изслѣдователи игнорировали до сихъ поръ вліяніе проницаемости плазматической перепонки на осмотическое давленіе; поэтому при вычисленія осмотическаго давленія клѣточного сока обращали вниманіе только на концентрацію плазмолизирующаго вещества въ наружной жидкости, совершенно не интересуясь тѣмъ, насколько сильно плазматическая перепонка проницаема для этого вещества. Последнее приводило, само собою разумѣется къ невѣрнымъ величинамъ осмотическаго давленія наружнаго раствора, а слѣдовательно и клѣточного сока и заставляло авторовъ высказывать иногда совершенно невѣроятныя предположенія (см. гл. III). При примѣненіи плазмолитическаго метода никогда не слѣдуетъ поэтому забывать, что клѣтки, плазмолизирующіяся съ равной силой однимъ и тѣмъ-же растворомъ, могутъ имѣть вмѣстѣ съ тѣмъ разное осмотическое давленіе клѣточного сока и наоборотъ.

Изъ только-что сказаннаго слѣдуетъ, что только при плазмолизѣ веществами, мало проницаемыми для плазматической перепонки (напр. сахаромъ) можно съ нѣкоторымъ приближеніемъ довольствоваться опредѣленіемъ одной концентраціи плазмолизирующаго

раствора. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда плазматическая перепонка оказывается значительно проницаемой и для сахара, величину осмотического давленія клѣточного сока нельзя вообще узнать точно при помощи плазмолитического метода.

Мы видѣли выше, что постепенный плазмолизъ не измѣняетъ проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ; поэтому въ случаѣ такого плазмолиза разбираемый нами методъ приводитъ дѣйствительно къ величинамъ осмотического давленія, отвѣчающимъ нормальному состоянію клѣтки. Наоборотъ слишкомъ быстрый плазмолизъ, т. е. слишкомъ быстрое отнятіе воды, какъ показалъ де-Фризъ, ведетъ иногда къ отмиранію поверхностныхъ слоевъ плазмы, при чемъ роль полупроницаемой перепонки начинаютъ играть только слои плазмы, прилегающіе къ вакуоли, названные де-Фризомъ вакуольной оболочкой (de-Vries, VIII). Нѣкоторые виды спирогиры не поддаются, напр., вовсе нормальному плазмолизу поваренной солью или селитрой. Наоборотъ опытъ удается прекрасно, если плазмолизъ производится сначала сахаромъ, медленно диффундирующимъ черезъ оболочку клѣтки и дѣйствующимъ, такимъ образомъ, только постепенно на плазму. Но даже плазмолизъ сахаромъ иногда производитъ настолько сильныя поврежденія протопласта, что замѣна плазмолизирующаго раствора хотя-бы даже и постепенно водою не восстанавливаетъ нормальнаго состоянія клѣтки (Reinhardt, p. 443—4), а ведетъ наоборотъ къ смерти послѣдней. Легко убѣдятся въ томъ, что во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, осмотическое давленіе клѣточного сока сильно падаетъ благодаря повышенію проницаемости плазматической перепонки, замѣчающемуся во всѣхъ случаяхъ отмиранія плазмы (de-Vries, VIII, p. 548). Изъ своихъ опытовъ въ этой области я укажу, напр., на опыты со спирогирой и эпидермисомъ *Tradescantia discolor*. При слишкомъ долгомъ плазмолизѣ клѣтокъ названныхъ растений послѣ отмиранія поверхностныхъ слоевъ плазмы объемъ плазмолизированнаго протопласта уменьшается въ нѣсколько разъ. Если это отмираніе у спирогиры является очень замѣтнымъ благодаря лентѣ хлорофила, то въ клѣткахъ эпидермиса *Tradescantia*, въ особенности же въ безцвѣтныхъ объектахъ съ большими клѣтками (напр. въ стеблевой паренхимѣ) его можно очень легко проглядѣть, принявъ такимъ образомъ за осмотическое давленіе клѣточного сока величину въ нѣсколько разъ меньшую дѣйствительной.

Такимъ образомъ плазмолитическій методъ можетъ давать вѣрные результаты только при условіи постепеннаго, но не слишкомъ долго длящагося плазмолиза. Послѣднее даетъ себя въ особенности чувствовать при плазмолизѣ селитрой, вредное дѣйствіе которой на плазму, по крайней мѣрѣ, для нѣкоторыхъ объектовъ можно считать доказаннымъ (Краббе, p. 452, de-Vries, VIII, p. 531 и др.).

Мои наблюденія показали вмѣстѣ съ тѣмъ, что повышеніе проницаемости плазматической перепонки вслѣдствіе вреднаго дѣйствія плазмолиза начинается только незадолго до смерти клѣтки. Поэтому отсутствіе послѣдней втеченіе нѣсколькихъ часовъ послѣ наблюденія служило въ моихъ опытахъ вѣрной гарантіей того, что проницаемость перепонки оставалась нормальной. Въ своихъ плазмолитическихъ изслѣдованіяхъ я никогда, впрочемъ, не оставлялъ объектъ дольше  $\frac{1}{2}$  —  $\frac{3}{4}$  часа въ селитрѣ.



Обращаясь теперь къ оцѣнкѣ точности плазмолитического метода опредѣленія осмотического давленія клѣточного сока, не трудно видѣть, что къ ошибкамъ въ вычисленіи осмотического давленія плазмолизирующаго раствора, здѣсь присоединяются еще свои спеціальныя ошибки, дѣлающія найденную величину еще болѣе отличающейся отъ истины, чѣмъ это имѣло мѣсто при вычисленіи осмотического давленія наружной жидкости.

Прежде всего ошибка дѣлается при нахожденіи раствора, вызывающаго едва замѣтный плазмолизъ. Не надо забывать, что не всѣ клѣтки, разъ подвергнутыя плазмолизу, годятся для дальнѣйшихъ опытовъ, или потому, что деплазмолизъ (т. е. полное восстановленіе тургорнаго давленія послѣ плазмолиза) очень вредно отражается на состояніи плазмы многихъ растений (напр. спирогиры) или потому, что для произведенія плазмолиза необходимо нарушеніе цѣлостности ткани (изслѣдуются обыкновенно срѣзы, сдѣланныя черезъ данную ткань); поэтому при изслѣдованіи измѣненій тургорнаго давленія приходится довольствоваться очень часто установленіемъ только средней величины осмотического давленія сока для клѣтокъ данной ткани. Если ошибка при установленіи концентраціи раствора, производящаго едва замѣтный плазмолизъ какой-нибудь одной клѣтки, достигаетъ не болѣе  $\frac{1}{3}$ —1% величины концентраціи плазмолизирующаго раствора, то при опредѣленіи средней концентраціи такого раствора для клѣтокъ, взятыхъ изъ различныхъ частей ткани или даже изъ одноименныхъ тканей одного и того-же или разныхъ экземпляровъ растенія, ошибка можетъ достигать значительной величины. Такъ напр. Копеландъ (Copeland, p. 3) при установленіи средней концентраціи раствора селитры, изотоничнаго соку листовыхъ клѣтокъ мховъ, могъ достигнуть точности только 0,5%  $\text{KNO}_3$ , что при концентраціи плазмолизирующаго раствора въ 5—8%  $\text{KNO}_3$  даетъ ошибку при опредѣленіи средней величины осмотического давленія въ 6—10%<sup>1)</sup>. При такой малой точности наблюденія небольшія колебанія осмотического давленія совершенно исчезаютъ для изслѣдованія. Для изученія измѣненія осмотического давленія клѣточного сока необходимо поэтому выбирать объекты съ болѣе или менѣе однородными въ этомъ отношеніи клѣтками.

При опредѣленіи сокращенія паренхиматической или шарообразной клѣтки при плазмолизѣ ошибка можетъ достигать даже при большихъ размѣрахъ поперечника и длины (до 0,2 мм.) 3—6%, что въ такой-же пропорціи отразится и на величинѣ осмотического давленія. Поэтому въ своихъ опытахъ я вводилъ въ такихъ случаяхъ поправку на сокращеніе объема, опредѣляя предварительнымъ наблюденіемъ измѣненіе величины призмочекъ, вырѣзанныхъ изъ изслѣдуемой ткани, при плазмолизѣ.

Къ ошибкамъ при нахожденіи концентраціи плазмолизирующаго раствора присоединяются далѣе ошибки въ опредѣленіи проницаемости плазматической перепонки изслѣдуемыхъ клѣтокъ для плазмолизирующаго вещества. При значительной варіаціи клѣточного сока и установленіе изотоническихъ коэффициентовъ сопряжено съ большими ошибками.

1) Осмотическое давленіе отдѣльныхъ листовыхъ клѣтокъ мховъ колеблется по Копеланду въ пре- | дѣлахъ 1%  $\text{KNO}_3$  (l. c. p. 1).

Напр. при такой точности опредѣленія концентрацій, какъ это имѣетъ мѣсто въ листьяхъ мховъ, возможна ошибка въ опредѣленіи фактора проницаемости  $\mu$  до 50% его величины; при большихъ  $\mu$ , такая значительная погрѣшность ощутительно отразится и на осмотическомъ давленіи.

Если сюда присоединить погрѣшности при введеніи поправокъ на эндосмозъ, экзосмозъ и т. п., то въ общей сложности ошибка при опредѣленіи средней величины осмотического давленія сока для клѣтокъ какой-нибудь ткани при помощи плазмолитического метода можетъ достигать въ худшемъ случаѣ довольно ощутимой величины въ 10—17% и больше. Ошибка при нахожденіи осмотического давленія сока для какой-нибудь опредѣленной клѣтки или средняго давленія для клѣтокъ одного и того-же срѣза ткани хотя и не будетъ разумѣется такой значительной (въ худшемъ случаѣ она можетъ достигнуть не болѣе 0,5—2%), однако нахожденіе такого изотонического раствора довольно копотно, такъ какъ приходится въ каждомъ испытываемомъ на плазмолизъ растворѣ держать объектъ не менѣе 10—15 минутъ для установленія осмотического равновѣсія (см. напр. въ гл. III о способѣ опредѣленія концентраціи плазмолизирующихъ растворовъ у *Tradescantia*).

## 2. Кріоскопическій методъ.

Согласно такъ называемому кріоскопическому методу опредѣленія осмотического давленія клѣточного сока, послѣдній выжимается изъ клѣтокъ и подвергается замораживанію въ аппаратѣ Бекманна. По температурѣ замерзанія вычисляется осмотическое давленіе по извѣстнымъ формуламъ (см. стр. 33, прим.).

Главный недостатокъ кріоскопического метода состоитъ въ томъ, что для опредѣленія осмотического давленія по этому методу необходимо болѣе или менѣе значительное количество клѣточного сока. Благодаря этому приходится довольствоваться средней величиной осмотического давленія для клѣтокъ иногда цѣлаго комплекса тканей. При этомъ не представляется часто возможнымъ удалить изъ послѣднихъ сосудистые пучки и вода содержащаяся въ древесинѣ разбавляетъ такимъ образомъ клѣточный сокъ. Если растеніе культивируется въ жидкости, то послѣднюю также нѣтъ никакой возможности удалить полностью и температура замерзанія полученнаго сока не можетъ слѣдовательно отвѣчать даже среднему осмотическому давленію клѣтокъ взятыхъ тканей. Ошибка увеличивается еще иногда и тѣмъ, что приходится разбавлять полученный сокъ въ виду слишкомъ большой его концентраціи. Однако, если даже иногда и можно удовлетвориться полученной величиной осмотического давленія, то не слѣдуетъ во всякомъ случаѣ забывать, что мы опредѣляемъ лишь его теоретическую величину, т. е. предполагаемъ, что плазматическая перепонка абсолютно непроницаема для веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, тогда какъ это далеко не отвѣчаетъ истинѣ. вмѣстѣ съ тѣмъ выжимая изъ данной ткани клѣточный сокъ, мы отрѣзываемъ себѣ путь къ опредѣленію проницаемости плазматического мѣшка или принуждены довольствоваться опредѣленіемъ послѣдней для немногихъ клѣтокъ, случайно вырѣзанныхъ до опыта изъ взятыхъ тканей, содержащихъ миллионы клѣтокъ.

Не говоря уже о томъ, что криоскопическій методъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ прямо не примѣнимъ (напр. для спирогиры), изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что этотъ методъ даетъ лишь очень слабое представленіе объ осмотическомъ давленіи клѣточного сока.

Судя по даннымъ, полученнымъ Макенномъ (Maquenne, p. 834—836), Натансономъ (I. c.) и Пантанелли (Pantanelli, p. 307—309), примѣнявшимъ криоскопическій методъ въ своихъ изслѣдованіяхъ, послѣдній во всякомъ случаѣ не надеждѣ плазмолитическаго; при изслѣдованіи же плѣсней этотъ методъ, по словамъ Пантанелли, не заслуживаетъ даже названія количественнаго (Pantanelli, p. 309 и 314).

Въ виду всего сказаннаго я не счелъ возможнымъ пользоваться въ своихъ изслѣдованіяхъ криоскопическимъ методомъ опредѣленія осмотическаго давленія клѣточного сока.

### 3. Аналитическій методъ.

Опредѣленіе осмотическаго давленія клѣточного сока вычисленіемъ его изъ данныхъ химическаго анализа подобно криоскопическому методу требуетъ значительное количество сока и даже болѣе значительное его количество чѣмъ послѣдній, поэтому всѣ недостатки названнаго метода, перечисленные въ предыдущемъ параграфѣ имѣютъ мѣсто и здѣсь. Но кромѣ того благодаря присутствію въ клѣточномъ сокѣ органическихъ веществъ (часто даже бѣлковъ), опредѣленіе концентраціи послѣдняго дѣлается очень не точнымъ, и значительно уступаетъ криоскопическому методу. Насколько показанія аналитическаго метода могутъ разниться отъ результатовъ плазмолитическаго метода видно хотя-бы на примѣрѣ *Pilobolus* (см. моя русская работа, стр. 10), гдѣ по даннымъ химическаго анализа клѣточного сока осмотическое давленіе послѣдняго вычисляется въ 9,5 атм., тогда какъ плазмолізъ показываетъ, что клѣточный сокъ изотониченъ 2,3% раствору селитры или, принимая во вниманіе сокращеніе объема клѣтки при плазмолізѣ, 1,2% раствору селитры, т. е. осмотическое давленіе его равно приблизительно 4,2 атм.

Въ виду сказаннаго въ своихъ изслѣдованіяхъ я не считалъ возможнымъ пользоваться и аналитическимъ методомъ.

### 4. Механическіе методы.

Брюкке впервые примѣнилъ механической методъ для опредѣленія измѣненія тургорнаго давленія въ листовыхъ сочлененіяхъ растений, совершающихъ варіаціонныя движенія. Методъ его, состоящій въ измѣреніи разности между углами, составляющими черешками листьевъ и стеблемъ при нормальномъ и перевернутомъ положеніи, можетъ указывать только очень приблизительно на величину измѣненія, позволяя главнымъ образомъ судить о томъ, увеличилось или уменьшилось среднее тургорное давленіе для всѣхъ клѣтокъ ткани, подвергаемой изслѣдованію.

Въ послѣдствіи Пфефферъ примѣнилъ для измѣренія измѣненія тургорнаго давленія сочлененій при варіаціонныхъ движеніяхъ динамометръ, заставляя сочлененія при увеличеніи тургорнаго давленія давить на короткое плечо рычага сдерживаемое противовѣсомъ, тогда какъ длинное плечо послѣдняго описывало дугу, измѣрявшуюся въ градусахъ (Pfeffer, III, p. 9). Точность такихъ измѣреній, по Пфефферу, не превосходитъ 1° (I. c. p. 90),

а такъ какъ даже при самыхъ сильныхъ колебаніяхъ давленія, дуга описываемая плечомъ динамометра не превосходила  $20^\circ$  (р. 11 и 87), то ошибка при измѣреніи колебаній тургорнаго (а слѣдовательно и осмотического) давленія при помощи этого метода была во всякомъ случаѣ больше 5%. Главное преимущество этого метода заключается въ томъ, что онъ доставляетъ непосредственно величину измѣненія тургорнаго давленія, т. е. разности осмотического давленія клѣточного сока и наружнаго раствора. Концентрацію послѣдняго, какъ было уже упомянуто выше, не всегда можно опредѣлить, если изслѣдуется ткань, имѣющая значительные размѣры и клѣтки съ большой проницаемостью плазматической перепонки. Съ другой стороны если осмотическое давленіе наружнаго раствора извѣстно, или во всякомъ случаѣ можетъ быть вычислено съ извѣстной погрѣшностью, то методъ динамометра даетъ измѣненіе осмотического давленія клѣточного сока непосредственно выраженнымъ въ механическихъ единицахъ, что позволяетъ избѣгнуть ошибокъ при вычисленіи осмотического давленія и фактора проницаемости плазматической перепонки. Вмѣстѣ съ тѣмъ опыты съ динамометромъ могутъ производиться надъ однимъ и тѣмъ же объектомъ повторно много разъ.

Главный недостатокъ разбираемаго метода заключается въ сравнительно небольшой точности вычисленія абсолютныхъ величинъ измѣненія осмотического давленія. Впервыхъ ошибка дѣлается уже при измѣреніи всей силы давленія; вторая ошибка неизбежна при измѣреніи величины поверхности, на которую дѣйствуетъ эта сила (для переведенія въ атмосферы); наконецъ третья ошибка дѣлается благодаря пренебреженію силы упругости клѣточной оболочки при растяженіи ея подъ дѣйствіемъ тургорнаго давленія, эта ошибка, понятно тѣмъ больше, чѣмъ больше уголъ отклоненія динамометра, т. е. чѣмъ больше измѣненіе тургорнаго давленія. Насколько велики всѣ перечисленные ошибки можно, само собою разумѣется, рѣшить только опытнымъ путемъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, такъ какъ всѣ величины, обуславливающія ихъ, могутъ чрезвычайно варіировать.

Что касается опредѣленія при помощи динамометра не только величины измѣненія тургорнаго давленія, но и абсолютной величины этого давленія, какъ это пытается сдѣлать Пфефферъ (Pfeffer, I. с. р. 105—106), то оно, насколько мнѣ представляется, весьма фантастично; ничего нѣтъ поэтому удивительнаго въ томъ, что по Пфефферу приращеніе давленія вечеромъ вдвое больше чѣмъ само давленіе.

Остановимся теперь на третьемъ механическомъ методѣ опредѣленія тургорнаго давленія, а слѣдовательно и осмотического давленія клѣточного сока, основанномъ на измѣреніи тургорнаго натяженія клѣточной оболочки. Этотъ методъ былъ примененъ Пфефферомъ для опредѣленія измѣненія тургорнаго давленія въ клѣткахъ тычинокъ *Synagaeae* при раздраженіи. Судя по даннымъ названнаго автора (Pfeffer, I, 119 и слѣд.), по этому методу можно вычислять измѣненіе давленія лишь очень приблизительно.

Если измѣреніе растяженія клѣточной оболочки подъ вліяніемъ тургорнаго давленія производить, однако, съ достаточною точностью, то и самъ методъ можно сдѣлать

количественнымъ. Последнее дѣйствительно удается въ примѣненіи къ объектамъ, состоящимъ изъ одного ряда клѣтокъ, въ моихъ опытахъ къ спирогирѣ.

Среднюю величину осмотического давления сока клѣтокъ, входящихъ въ составъ нити спирогиры, благодаря однородности ихъ въ осмотическомъ смыслѣ, можно плазмолитическимъ методомъ опредѣлить очень точно (съ точностью до 0,1 атм.). Съ этою цѣлью можно пользоваться плазмолизомъ или растворами сахара, факторъ проницаемости котораго можно въ этомъ случаѣ принять равнымъ нулю, или растворами глицерина, факторъ проницаемости котораго находится по способу, описанному на стр. 29. При этомъ не слѣдуетъ забывать ввести поправку на сокращеніе объема клѣтки при плазмолизѣ, а также на эндосмозъ глицерина. Что касается экзосмоза и новообразованія веществъ клѣточного сока, то какъ показываетъ наблюденіе надъ фигурой плазмолиза спирогиры сахаромъ (остается неизмѣненнымъ въ теченіе сутокъ) они взаимно покрываются<sup>1)</sup>.

При помощи приспособленія, которое сейчасъ будетъ описано, можно очень точно измѣрить тургорное натяженіе клѣточныхъ оболочекъ водоросли. вмѣстѣ съ тѣмъ, внося нить послѣдовательно въ растворы сахара различной концентраціи и уменьшая, слѣдовательно, нормальное тургорное давление клѣтокъ ея на соответствующее послѣдней осмотическое давление наружнаго раствора, мы можемъ опредѣлять тургорное натяженіе оболочекъ при различныхъ величинахъ тургорнаго давления и раскрыть, такимъ образомъ, зависимость послѣднихъ. Обратнo, зная эту зависимость и тургорное натяженіе оболочекъ нити спирогиры въ извѣстный моментъ можно найти и соответствующее тургорное давление или по измѣненію перваго опредѣлить измѣненіе послѣдняго.

Наблюденіе плазмолиза клѣтокъ спирогиры показываетъ, что оболочка послѣднихъ растянута подъ вліяніемъ тургорнаго давления только въ продольномъ направленіи. По крайней мѣрѣ не удается подмѣтить даже съ иммерсионной системой сокращеніе діаметра клѣтокъ при плазмолизѣ. Такимъ образомъ для опредѣленія тургорнаго натяженія оболочки клѣтокъ у спирогиры можно удовлетвориться только измѣреніемъ длины клѣтокъ.

Само сабою разумѣется, что для большой точности, мною производилось измѣреніе длины не отдѣльныхъ клѣтокъ, а цѣлыхъ нитей. Опыты ставились обыкновенно слѣдующимъ образомъ. Нѣсколько дней передъ измѣреніемъ нить спирогиры разрѣзалась на куски длиной въ 6—9 мм. Перерѣзанныя клѣтки отдѣлялись по большей части уже втеченіе одной ночи отъ остального ряда клѣтокъ и наружныя поперечныя стѣнки конечныхъ клѣтокъ дѣлались такими-же выпуклыми, какъ у неповрежденныхъ нитей. Полученныя такимъ способомъ короткія нити спирогиры помѣщались при помощи маленькой кисточки въ каплю воды на предметномъ стеклѣ между двумя стеклянными волосками, приклеенными чернымъ сургучемъ совершенно параллельно и при томъ въ такомъ разстояніи другъ отъ друга, чтобы нить водоросли какъ разъ могла помѣститься между ними и предметнымъ стекломъ.

1) Послѣ плазмолиза новообразованіе веществъ | спирогиры прекращается уже въ растворѣ вдвое мень-  
уменьшается, повидимому, до минимума. Ростъ нити | шей концентраціи, чѣмъ плазмолизирующей.

Чтобы при перемѣнѣ растворовъ нить не смывалась, перпендикулярно къ параллельнымъ волоскамъ, послѣ того, какъ нить лежала уже между послѣдними, сверху накладывались еще 5—6 стеклянныхъ волосковъ, укрѣпившихся также при помощи чернаго сургуча. Этимъ приспособленіемъ достигалось укрѣпленіе и распрямленіе нити. На предметномъ стеклѣ были нанесены дѣленія: одинъ сантиметръ раздѣленный на 75 частей. Концы нитей и двѣ пары сосѣднихъ съ ними дѣленій срисовывались обыкновенно при помощи рисовальной призмы подъ большимъ увеличеніемъ. При маломъ увеличеніи опредѣлялась длина нити приблизительно въ дѣленіяхъ предметнаго стекла, доли же этихъ дѣленій измѣрялись масштабомъ по рисунку при большомъ увеличеніи (одно дѣленіе масштаба  $= \frac{1}{100}$  дѣленія предметнаго стекла). Штрихи на предметномъ стеклѣ вытраивались плавиковою кислотою, благодаря чему можно было очень точно установить сдѣланный рисунокъ на микроскопическую картину. Послѣдовательныя измѣренія одной и той-же нити отличались между собой поэтому не больше, чѣмъ на 0,005 дѣленія (т. е. во всякомъ случаѣ не больше чѣмъ на 1 микронъ). А такъ какъ длина нити колебалась обыкновенно между 6—9 мм., то описаннымъ способомъ можно было измѣрять послѣднюю съ точностью до 0,01%—0,02% ея величины.

Послѣ того, какъ длина нити въ водѣ была измѣрена, послѣдняя замѣнялась растворомъ сахара известной концентраціи, при чемъ прибавленія и удаленія раствора производилось повторно много разъ, чтобы достигнуть полной замѣны воды сахаромъ нужной концентраціи. Далѣе накладывалось покровное стеклышко и быстро заливалось по краямъ легкоплавающимъ парафиномъ (32°). Нить спирогиры оставалась въ растворѣ смотря по разницѣ въ концентраціяхъ новой и удаленной жидкостей 15—40 минутъ. Послѣ новаго измѣренія нити водоросли, первый сахарный растворъ замѣнялся растворомъ другой концентраціи, по истеченіи опредѣленнаго времени нить вновь измѣрялась и т. д. Наконецъ производился плазмолизъ клѣтокъ и измѣрялась длина нити при отсутствіи тургорнаго давленія.

Предварительный опытъ показалъ, что необходимо всегда вводить поправку на ростъ нити втеченіе опыта. Эта поправка находилась обыкновенно такимъ образомъ, что опредѣлялся ростъ нити втеченіе 1 ч. въ первомъ и послѣднемъ сахарномъ растворахъ. Средняя величина принималась равной росту во время опыта. Эта величина въ общемъ не превышала 0,03 дѣленія въ часъ и слѣдовательно сравнительно мало вліяла на разницу въ двухъ послѣдовательныхъ измѣреніяхъ длины.

Если длина нити спирогиры, находящейся въ растворѣ сахара концентраціи  $C$  гр.-мол. (см. табл. VI), есть  $L$ , а длина той-же нити, но плазмолизированной, есть  $L_0$ , то  $\frac{L-L_0}{L_0}$  есть тургорное натяженіе оболочки клѣтокъ въ продольномъ направленіи при тургорномъ давленіи въ клѣткѣ  $p$ , равномъ  $p_0 - p_c$ , гдѣ  $p_0$  — осмотическое давленіе клѣточного сока и  $p_c$  — осмотическое давленіе наружнаго раствора. Клѣточный сокъ имѣвшихся въ моемъ распоряженіи нитей спирогиры былъ въ среднемъ изотониченъ, послѣ сокраще-

нія объема кѣтокъ вслѣдствіе плазмолиза, 19,3% раствора сахара (или слѣдовательно 0,56 гр.-мол. въ литрѣ), что отвѣчаетъ 13,3 атмосфер. Въ слѣдующей таблицѣ приведены среднія числа, полученные изъ наблюденій надъ семью нитями спирогиры, находившимися передъ опытомъ втеченіе 4 дней между стеклянными волосками въ вышеописанномъ приспособленіи до ихъ измѣренія на разсѣянномъ свѣту. Температура во время опытовъ = 18° С.

Таблица VI.

<i>c</i> въ гр.-мол.	<i>p<sub>c</sub></i> въ атм.	<i>p<sub>0</sub></i> въ атм.	<i>p</i> въ атм.	$\frac{L-L_0}{L_0}$	Измѣненіе $\frac{L-L_0}{L_0}$ при увеличеніи <i>p</i> на 1 атм.	$\left(\frac{L-L_0}{L_0} : p\right) \times 10^{-4}$
0,564	13,3	13,3	0	0	0,0053	—
0,491	11,6	13,2	1,6	0,0085	0,0056	53
0,409	9,6	13	3,4	0,0187	0,0054	55
0,356	8,4	13	4,6	0,0252	0,0052	54
0,312	7,4	12,9	5,5	0,0299	0,0045	54
0,268	6,4	12,9	6,5	0,0344	0,0021	53
0,225	5,3	12,9	7,6	0,0369	0,0023	49
0,181	4,3	12,9	8,6	0,0392	0,0012	46
0,137	3,2	12,8	9,6	0,0404	0,0009	42
0,093	2,2	12,8	10,6	0,0413	0,0008	39
0,049	1,2	12,8	11,6	0,0421	0,0005	36
0,023	0,6	12,8	12,2	0,0424	0,0001	35
0	0	12,8	12,8	0,0425	—	33

Изъ предпоследняго столбца приведенной таблицы видно, что тургорное натяженіе кѣточной оболочки  $\frac{L-L_0}{L_0}$  сначала пропорціанально тургорному давленію *p*, но послѣ достиженія послѣднимъ величины 6,5 атмосферъ начинаетъ расти медленнѣе тургорнаго давленія, пока наконецъ увеличеніе давленія не производитъ лишь едва уловимое удлинненіе нити. Дальнѣйшее увеличеніе давленія, какъ было показано мною раньше (Lepeschkin, III, p. 5), производитъ остающееся растяженіе нити; поэтому при тургорномъ давленіи, большемъ нормальнаго, тургорное натяженіе не можетъ служить мѣрой послѣдняго. У растущей спирогиры кѣточная оболочка растянута въ естественныхъ условіяхъ до предѣла упругости. При одинаковыхъ механическихъ свойствахъ кѣточныхъ стѣнокъ спирогиры одного и того-же вида можно ждать поэтому одинаковое тургорное натяженіе оболочки водоросли въ нормальномъ состояніи не зависимо отъ величины тургорнаго давленія.

Тургорное давленіе тѣхъ семи нитей спирогиры, которыми я воспользовался для составленія таблицы VI, было дѣйствительно почти одинаково благодаря одинаковымъ условіямъ культуры, однако это давленіе можетъ иногда сильно варіировать, если водоросль подвергается различнымъ вліяніямъ и, не смотря на это, тургорное натяженіе остается болѣе или менѣе одинаковымъ. Такъ при культурѣ въ затемненномъ пространствѣ концентрація кѣточного сока водоросли значительно падаетъ, тургорное же натяженіе остается почти тѣмъ же, какъ это видно изъ слѣдующаго опыта.

Два отрѣзка одной и той-же нити водоросли культивировались въ теченіе 2-хъ недѣль при различномъ освѣщеніи. Одинъ изъ нихъ былъ помѣщенъ на разсѣянномъ свѣту у окна, другой культивировался въ самомъ темномъ углу комнаты, при чемъ освѣщеніе падало только отраженное отъ стѣны и потолка послѣдней.

По истеченіи выше означеннаго времени, плазмолизъ показалъ, что клѣточный сокъ перваго отрѣзка былъ (въ среднемъ) изотониченъ раствору сахара концентраціи 0,483 гр.-мол., клѣточный же сокъ втораго — 0,269 гр.-мол., тогда какъ тургорное натяженіе перваго было 0,034, втораго 0,035 <sup>1)</sup>).

Изъ только что сказаннаго слѣдуетъ, что при примѣненіи таблицы VI къ нити спирогиры того-же вида, но имѣющей другое тургорное давленіе, необходимо всѣ числа рубрики  $p$  уменьшить или увеличить востолько разъ, востолько осмотическое давленіе клѣточного сока изслѣдуемой нити меньше или больше 12,8 атмосферъ.

Целлюлёза клѣточныхъ стѣнокъ другихъ видовъ спирогиры можетъ имѣть также и другія механическія свойства, поэтому и тургорное натяженіе ихъ можетъ быть тамъ, само собою разумѣется, также другимъ. Дѣйствительно для трехъ различныхъ видовъ спирогиры, имѣвшихся въ моемъ распоряженіи, тургорныя натяженія нитей, находившихся въ водѣ равнялись послѣдовательно 0,0425; 0,0331 и 0,0236.

Не смотря на различіе въ механическихъ свойствахъ клѣточной оболочки различныхъ видовъ спирогиры, для всѣхъ 5 видовъ, имѣвшихся въ моемъ распоряженіи, можно было на основаніи многочисленныхъ опытовъ составить слѣдующую таблицу зависимости тургорнаго натяженія отъ тургорнаго давленія, при чемъ первое выражено въ этой таблицѣ въ доляхъ нормальнаго тургорнаго натяженія  $\frac{L_n - L_0}{L_0}$ , гдѣ  $L_n$  — длина нити водоросли, находящейся въ естественныхъ условіяхъ и  $L_0$  — длина той-же нити послѣ исчезновенія тургорнаго давленія (плазмолизъ), второе же выражено въ доляхъ нормальнаго осмотическаго давленія клѣточного сока  $p_n$ .

Таблица VII.

Тургорное давленіе $p$ , въ доляхъ нормальн. осмотич. давл. клѣт. сока $p_n$ .	Тургорное натяженіе клѣточной оболочки $\frac{L - L_0}{L_0}$ , въ доляхъ нормальнаго тургорнаго натяженія $\frac{L_n - L_0}{L_0}$ .	Отношеніе тургорнаго натяженія къ тургорному давленію.
1	1	1
0,95	0,998	1,050
0,90	0,990	1,100
0,80	0,965	1,206
0,75	0,950	1,267
0,70	0,930	1,329
0,65	0,908	1,397
0,60	0,880	1,467
0,55	0,850	1,545
0,50	0,806	1,632

1) Толщина оболочки клѣтокъ, какъ показывало наблюденіе, была въ первомъ отрѣзкѣ соотвѣтственно больше, чѣмъ во второмъ.



Послѣ уменьшенія тургорнаго давленія на половину своей нормальной величины зависимость тургорнаго натяженія отъ давленія у различныхъ видовъ спирогиры оказывается уже настолько различной, что составить одну общую таблицу для всѣхъ видовъ водоросли не представляется возможнымъ. Въ то время какъ напр. у вида спирогиры, опыты съ которымъ позволили составить таблицу VI, отношеніе тургорнаго натяженія къ давленію по достиженіи послѣднимъ половины нормальной величины дѣлается въ предѣлахъ погрѣшности опыта постояннымъ (см. табл. VI), у другихъ видовъ водоросли, это отношеніе можетъ нѣкоторое время продолжать увеличиваться, дѣлаясь постояннымъ только при гораздо меньшемъ тургорномъ давленіи. Такъ напр., у одного изъ имѣвшихся въ моемъ распоряженіи видовъ спирогиры отношеніе дѣлалось постояннымъ только при пониженіи тургорнаго давленія до 0,2 нормального, при чемъ въ единицахъ таблицы VII это отношеніе равнялось 3,6.

Въ моихъ опытахъ никогда не наблюдалось уменьшенія тургорнаго давленія спирогиры больше чѣмъ вдвое, поэтому таблица VII могла служить въ моихъ опытахъ для всѣхъ видовъ водоросли.

Такимъ образомъ, зная среднее нормальное тургорное натяженіе клѣточной оболочки спирогиры и среднее же осмотическое давленіе ея клѣточного сока, можно судить объ измѣненіи тургорнаго давленія изъ наблюдаемаго при этомъ натяженіи клѣточной оболочки. Если опытъ производился продолжительное время надъ однимъ и тѣмъ же отрѣзкомъ нити водоросли, то нормальное тургорное натяженіе и осмотическое давленіе клѣточного сока опредѣлялись обыкновенно плазмолизомъ другихъ отрѣзковъ той-же нити, такъ какъ обѣ величины болѣе или менѣе равны на всемъ протяженіи одной и той-же нити, которую для опыта можно разрѣзать на нѣсколько кусковъ.

Что касается въ частности сужденія объ увеличеніи тургорнаго давленія клѣтокъ спирогиры, находящейся въ водѣ, то на основаніи тургорнаго натяженія оно возможно только пока предѣлъ упругости клѣточной оболочки не перейденъ, что обыкновенно наступаетъ при увеличеніи тургорнаго давленія на 0,2 — 0,6 атм. (Lepeschkin, III, p. 5). Количественное опредѣленіе измѣненія тургорнаго давленія сдѣлается однако возможнымъ и при болѣшихъ увеличеніяхъ послѣдняго, если водоросль предварительно помѣститъ въ растворъ сахара (см. напр. стр. 45).

Такъ какъ измѣреніе длины нити можно производить съ точностью до 0,01 дѣленія объективнаго стекла (каждое дѣленіе равно  $\frac{1}{75}$  сант.), то при длинѣ нити въ 50 дѣленій (такая величина приблизительно была во всѣхъ моихъ опытахъ) точность вычисленія тургорнаго натяженія не превосходитъ 0,0002. Такимъ образомъ при нормальномъ тургорномъ давленіи (см. табл. VII) по измѣненію тургорнаго натяженія можетъ быть подмѣчено только уменьшеніе тургорнаго давленія на 6% его величины (при 12,8 атмосферахъ давленія это составитъ 0,8 атм.) Точность метода однако можно значительно поднять, помѣщая нити предварительно въ растворы сахара, осмотическое давленіе которыхъ равно 0,3—0,5 нормального осмотическаго давленія клѣточного сока. При соответственномъ тургорномъ

измѣненіе послѣдняго на давленіи даже 0,2 атмосферы вызоветъ измѣненіе длины нити на 0,06 — 0,01 дѣлений (при нормальномъ тургорномъ давленіи въ 6 — 20 атм. и тургорномъ натяженіи 0,02 — 0,04).

#### **D. Особенности опредѣленія проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ листовыхъ сочлененій.**

До сихъ поръ мы рассматривали общіе методы опредѣленія тургорнаго давленія клѣтокъ, причемъ въ особенности обратили вниманіе на способы нахождения проницаемости плазматической перепонки и ея фактора для веществъ растворенныхъ, оказывающихъ существенное вліяніе на величину осмотического давленія какъ клѣточного сока такъ и наружнаго раствора. Теперь мы рассмотримъ методъ опредѣленія проницаемости, который можетъ быть примѣненъ только къ клѣткамъ листовыхъ сочлененій растений, совершающихъ никтитропныя движенія. Наблюденіямъ надъ измѣненіемъ тургорнаго давленія сочлененій будетъ посвящена значительная часть предлагаемой работы, вотъ почему лишній способъ опредѣленія величины вліяющей на это давленіе имѣетъ для насъ большое значеніе.

##### **1. Причина паденія концентраціи сока клѣтокъ сочлененій.**

На сколько мнѣ извѣстно, Гильбургъ (Hilburg) впервые указалъ въ своей работѣ на замѣчательный фактъ быстрого паденія концентраціи клѣточного сока листовыхъ сочлененій *Phaseolus* (и др. *Leguminosae*), положенныхъ цѣликомъ или въ видѣ срѣзовъ въ воду. Названный авторъ находится, повидимому, однако въ полномъ недоумѣніи, не зная чему приписать подобное явленіе и считая невѣроятнымъ, что паденіе концентраціи сока можетъ обуславливаться экзосмосомъ веществъ изъ клѣтки (1. с. р. 40). Последнее мнѣніе Гильбургъ основываетъ однако только на томъ наблюденіи, что вода выщелачиваетъ, «повидимому», изъ кусочковъ стебля такое-же количество твердыхъ веществъ, какъ и изъ сочлененій, при лежаніи-же кусочковъ стебля въ водѣ не происходитъ паденія концентраціи ихъ клѣточного сока (1. с. р. 40). Болѣе точныхъ изслѣдованій названный авторъ не счелъ нужнымъ производить, довольствуясь опредѣленіемъ количества выщелачиваемыхъ веществъ въ томъ и другомъ случаѣ на глазъ.

Недовольствуясь такимъ способомъ опредѣленія, я поставилъ собственные опыты для провѣрки мнѣнія Гильбурга. Привожу здѣсь одинъ наиболѣе типичный примѣръ изъ нихъ.

Въ 4 одинаковые плоскіе, тонкостѣнные стаканчика съ притертыми крышками были уложены равномернымъ слоемъ вырѣзанные листовые сочлененія *Phaseolus multiflorus* (въ два стаканчика) и кусочки стебля такого-же размѣра (въ два другіе стаканчика) при чемъ какъ тѣ такъ и другіе предварительно взвѣшивались, промывались (для удаленія сока разрѣзанныхъ при препарированіи клѣтокъ) и тщательно обсушивались пропускной бумагой. Во всѣ четыре стаканчика наливалось по 3 с. с. дистиллированной (при помощи стеклянной

реторты) воды. Опытъ производился на разсѣянномъ солнечномъ свѣту. Температура 18° С. По прошествіи 6 час. въ опредѣленномъ вѣсѣ жидкости, взятой изъ стаканчиковъ, опредѣлялся твердый остатокъ. По полученнымъ числамъ вычислялось все количество перешедшихъ въ воду веществъ, при чемъ вѣсъ послѣдней въ каждомъ стаканчикѣ принимался равнымъ 3 гр. (концентрація образовавшагося раствора незначительна).

Получены слѣдующія числа:

	1-й стаканчикъ.	2-й стаканчикъ.
Вѣсъ взятыхъ сочлененій . . . . .	2,6698	2,5107
Вѣсъ жидкости, взятой для опредѣленія твердаго остатка . . . . .	1,8554	1,6563
Вѣсъ твердаго остатка . . . . .	0,0094	0,0081
Вѣсъ веществъ, экзосмировавшихъ изъ сочлененій . . . . .	0,0152	0,0146
Вѣсъ тѣхъ-же веществъ, приходящихся на 1 граммъ сочлененій . . . . .	0,0057	0,0058

	3-й стаканчикъ.	4-й стаканчикъ.
Вѣсъ взятыхъ кусочковъ стебля . . . . .	2,6711	2,6667
Вѣсъ жидкости для опредѣленія твердаго остатка . . . . .	1,9762	1,8854
Вѣсъ твердаго остатка . . . . .	0,0030	0,0025
Вѣсъ веществъ, экзосмировавшихъ изъ стеблей . . . . .	0,0045	0,0040
Вѣсъ тѣхъ-же веществъ, приходящихся на 1 граммъ стеблей . . . . .	0,0017	0,0015

Мы видимъ, такимъ образомъ, что при болѣе точной постановкѣ опыта мнѣніе Гильбурга оказалось не отвѣчающимъ дѣйствительности: изъ стеблей экзосмировало почти въ 4 раза меньше веществъ чѣмъ изъ листовыхъ сочлененій. При этомъ не слѣдуетъ забывать, что въ воду переходили также вещества изъ вскрытой при препарировкѣ ксилемы, объемъ же послѣдней въ стебляхъ въ 3—4 раза больше чѣмъ въ сочлененіяхъ. Кромѣ того микрохимическій анализъ показалъ, что въ водѣ, въ которой находились кусочки стебля, присутствовало значительное количество глюкозы и что, вмѣстѣ съ тѣмъ, глюкоза находилась только въ ксилемѣ стебля. Такимъ образомъ, весьма вѣроятно, что значительная часть твердаго остатка, найденнаго въ водѣ изъ стаканчиковъ съ кусочками стебля, диффундировала изъ ксилемы послѣднихъ.

Приведенный опытъ показываетъ намъ во всякомъ случаѣ, что *плазматическая перепонка кѣтокъ листовыхъ сочлененій Phaseolus значительно болѣе проницаема для растворенныхъ веществъ, чѣмъ плазматическая перепонка кѣтокъ стебля* <sup>1)</sup>.

Плазматическое изслѣдованіе поперечныхъ срѣзовъ сочлененій до и послѣ опыта показало вмѣстѣ съ тѣмъ, что концентрація сока кѣтокъ, расположенныхъ вблизи ихъ на-

1) Концентрація сока паренхимы стеблей (плазма-лизъ селитрой) лишь незначительно отличается отъ концентрація кѣточного сока сочлененій; поэтому большая диффузія изъ сочлененій могла быть объяснена только болѣе проницаемостью плазматической перепонки ихъ кѣтокъ.

ружной поверхности, а также вблизи сосудистаго пучка, послѣ нахождения сочлененій въ водѣ уменьшилась, тогда какъ паденія концентраціи сока клѣтокъ, лежащихъ внутри мякоти сочлененій, не удалось открыть. Въ томъ, что паденіе концентраціи сока клѣтокъ сочлененной паренхимы происходило вслѣдствіе экзосмоса веществъ въ окружающую воду, убѣждало также соотвѣтствіе между величиной этого паденія и количествомъ веществъ, найденныхъ въ водѣ. До опыта клѣтки паренхимы сочлененій плазмолизировались 6,3 — 6,5% селитрой (листья были взяты для опыта одного возраста), тогда какъ послѣ пребыванія послѣднихъ въ водѣ плазмолизъ клѣтокъ производилъ въ среднемъ (т. е. принимая во вниманіе и число клѣтокъ срѣзовъ видимо не измѣнившихъ концентраціи своего сока) уже 5,7 — 6% растворъ селитры (ближайшія къ поверхности клѣтки плазмолизировались 5,1 — 5,3% ея растворомъ). Такимъ образомъ, можно было принять, что втеченіе опыта около  $\frac{1}{10}$  веществъ, содержавшихся въ клѣточномъ соку сочлененій, экзосмировало въ окружающую жидкость. Съ другой стороны изслѣдованіе показало, что въ сочлененіяхъ содержится около 11% твердыхъ веществъ (высушиваніе при  $110^{\circ}$ ), изъ которыхъ около половины растворяется въ водѣ т. е., другими словами, вещества, растворенныя въ клѣточномъ соку, составляютъ около 5 — 6% вѣса сочлененій. Изъ таблицы же на стр. 62 видно, что въ воду экзосмировало около 0,006 гр. веществъ изъ каждаго грамма сочлененій, т. е. 0,6% ихъ вѣса. Полученное число находится, такимъ образомъ, въ полномъ согласіи съ данными плазмолиза.

Что паденіе концентраціи сока сочлененій происходитъ вслѣдствіе экзосмоса веществъ, растворенныхъ въ немъ, видно также изъ того факта, что это паденіе происходитъ гораздо быстрѣе, если вода окружающая клѣтки сочлененій, постоянно смѣняется. Послѣдняго можно напримѣръ достигнуть, помѣщая поперечные срѣзы сочлененій на тюлевой сѣткѣ въ стаканъ съ водой.

Такъ напр., если до опыта концентрація клѣточного сока уравновѣшивалась 3,5% селитрой, то послѣ лежанія срѣзовъ на сѣткѣ втеченіе 4 часовъ она равнялась 1,9% селитры, тогда какъ концентрація сока клѣтокъ срѣзовъ, лежавшихъ въ водѣ подъ покровнымъ стекломъ, падала въ это время только до 2,8% селитры.

Анализъ показываетъ, что вещества, экзосмирующія изъ сочлененій *Phaseolus multiflorus*, главнымъ образомъ минеральнаго происхожденія. Среди нихъ преобладаютъ  $CaCl_2$ ,  $KCl$ ,  $KNO_3$ , находятся также  $CaSO_4$  и сѣрнокислыя соли щелочей. Для перечисленныхъ солей плазматическая перепонка клѣтокъ сочлененій, если паденіе концентраціи ихъ сока обуславливается экзосмосомъ, должна быть такимъ образомъ очень велика и при погруженіи срѣзовъ сочлененій въ растворы этихъ солей экзосмосъ долженъ въ большей или меньшей степени покрываться эндосмосомъ этихъ солей въ клѣточный сокъ. Дѣйствительно, какъ на это указывалъ и Гильбургъ (l. c. p. 32), въ растворахъ названныхъ солей паденіе концентраціи сока сочлененій сильно замедляется, въ растворѣ же селитры, плазмолизирующемъ клѣтку, это паденіе совершенно прекращается: объемъ плазмолизованнаго протопласта клѣтокъ остается неизмѣнной втеченіе долгаго времени въ растворѣ селитры. При

плазмолизѣ растворомъ  $CaCl_2$  этотъ объемъ очень медленно уменьшается. Напротивъ того въ растворахъ сахара, какъ и слѣдовало ожидать, паденіе концентраціи клѣточного сока сочлененій идетъ также быстро, какъ и въ водѣ, а объемъ протопласта клѣтокъ, плазмолизованныхъ сахаромъ, очень быстро уменьшается.

Съ другой стороны въ растворахъ такихъ легко проникающихъ черезъ плазму веществъ, какъ глицеринъ, мочевины, происходитъ не паденіе, а наоборотъ увеличеніе концентраціи клѣточного сока сочлененій.

Что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій для селитры и др. солей необыкновенно велика, показываютъ также низкіе изотоническіе коэффициенты этихъ солей, находимые для клѣтокъ сочлененій.

Такъ изотоническій коэффициентъ селитры, найденный при помощи плазмолиза клѣтокъ сочлененій *Phaseolus*, равенъ только 1,8 — 2,6, тогда какъ по де-Фризу, пользовавшемуся для опредѣленія изотоническаго коэффициента клѣтками листового эпидермиса *Tradescantia discolor*, онъ равенъ 3 (изотоническій коэффициентъ сахара принимается въ томъ и другомъ случаѣ равнымъ 1,88). Изотоническій коэффициентъ глицерина для клѣтокъ сочлененій *Phaseolus* оказался равнымъ 1,34 — 1,48. Тотъ-же коэффициентъ для поваренной соли найденъ мною равнымъ 1,98 — 2,31 (у *Tradescantia discolor* онъ равенъ, по де-Фризу, 3,05).

Мы видимъ, такимъ образомъ, что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій для веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, дѣйствительно очень велика и нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что послѣ помѣщенія клѣтокъ въ воду, при условіи возможно полного отведенія экзосмирующихъ веществъ, замѣчается быстрое паденіе концентраціи клѣточного сока.

Если паденіе концентраціи сока происходитъ вслѣдствіе экзосмоса, то скорость его должна опредѣляться законами диффузіи. Согласно послѣднимъ (Ostwald, p. 675) скорость диффузіи пропорціональна разности концентрацій диффундирующаго вещества въ растворахъ, между которыми происходитъ диффузія. Тотъ-же законъ, справедливъ также въ примѣненіи и къ полупроницаемой перепонкѣ (Гамшанн, II, p. 99).

Если мы вообразимъ себѣ, слѣдовательно, что экзосмирующія изъ клѣтокъ вещества отводятся прочь, т. е. экзосмосъ происходитъ въ чистую воду, то по мѣрѣ паденія концентраціи сока, скорость этого паденія должна постоянно уменьшаться, чтобы сдѣлаться наконецъ едва замѣтной. Попробуемъ выразить это уменьшеніе скорости диффузіи математически, чтобы потомъ провѣрить полученное выраженіе на опытѣ. Будемъ предполагать разумѣется, что сръзсы сочлененій настолько тонки, что клѣтки ихъ паренхимы со всѣхъ сторонъ омываются водой и что послѣдняя постоянно смѣняется; скорость диффузіи слѣдовательно должна быть пропорціональна въ любой моментъ концентраціи клѣточного сока.

Пусть въ извѣстный моментъ концентрація сока клѣтокъ поперечныхъ сръзвовъ листовыхъ сочлененій какого-нибудь растенія есть  $c$ . Втеченіе слѣдующаго безконечно малаго промежутка времени  $dt$  изъ клѣтокъ продиффундируетъ наружу нѣкоторое безконечно малое

количество вещества  $dS$ , при чемъ концентрація клѣточного сока измѣнится вслѣдствіе этого на  $-dc$ . Если объемъ клѣтокъ есть  $V$ , то, какъ нетрудно видѣть,  $dS = -Vdc$ . Но количество веществъ, диффундирующихъ черезъ опредѣленную поверхность перепонки клѣтокъ, напр. черезъ единицу ея въ единицу времени, по законамъ диффузіи должно быть пропорціонально концентраціи клѣточного сока, поэтому, если  $P$  вся поверхность клѣтокъ, то:

$$-\frac{Vdc}{Pdt} = kc,$$

гдѣ  $k$  — коэффициентъ пропорціональности; отсюда:

$$-\frac{dc}{c} = \frac{Pk}{V} dt$$

или послѣ интегрированія:

$$-\lg_n c = \frac{Pk}{V} t + M \dots \dots (I)$$

Если въ началѣ опыта, т. е. при  $t = 0$ , концентрація клѣточного сока есть  $c_1$ , то  $M = -\lg_n c_1$  или, подставляя эту величину въ (I):

$$\lg_n \frac{c_1}{c} = \frac{Pk}{V} t = at \dots \dots (II)$$

Такимъ образомъ, если паденіе концентраціи клѣточного сока листовыхъ сочлененій происходитъ вслѣдствіе экзосмоса растворенныхъ въ немъ веществъ, то плазмолитическое изслѣдованіе срѣзовъ этихъ сочлененій, находящихся въ водѣ, должно показать, что логарифмъ отношенія первоначальной концентраціи сока къ концентраціи его, найденной по истеченіи извѣстнаго времени, пропорціоналенъ времени нахождения срѣзовъ въ водѣ, при условіи неизмѣнности объема и поверхности клѣтокъ. Последнее, однако, справедливо только приблизительно. По мѣрѣ уменьшенія концентраціи сока тургорное давленіе, тургорное натяженіе оболочки, а слѣдовательно объемъ и поверхность клѣтокъ уменьшаются. Если принять клѣтки шарообразными, то при уменьшеніи объема ихъ въ  $n$  разъ, отношеніе  $\frac{P}{V}$  увеличивается въ  $\sqrt[3]{n}$  разъ. Такимъ образомъ величина  $\frac{\lg_n \frac{c_1}{c}}{t}$  съ теченіемъ времени увеличивается въ  $\sqrt[3]{n}$  разъ, если объемъ клѣтокъ уменьшается въ  $n$  разъ.

Кромѣ того все сказанное справедливо лишь въ томъ случаѣ, если проницаемость плазматической перепонки для всѣхъ веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, одинакова.

Если-же эта проницаемость для однихъ изъ нихъ велика, для другихъ же наоборотъ незначительна, то съ теченіемъ времени въ клѣткѣ останутся главнымъ образомъ вещества, трудно проникающія черезъ перепонку, и убыль концентраціи сока клѣтки будетъ дѣлаться все менѣе и менѣе значительной, пока наконецъ не перестанетъ болѣе открываться плазмо-

лизомъ. Такой именно случай представляютъ листовые сочлененія фасоли и въ особенности верхнія половины послѣднихъ. Въ этомъ случаѣ въ концѣ опыта клѣтки содержали обыкновенно главнымъ образомъ вещества, трудно экзосмирующія. Последнее явствовало изъ того, что фигура плазмолиза селитрой клѣтокъ паренхимы верхней половины сочлененія до опыта оставалась неизмѣнной втеченіе нѣсколькихъ часовъ (8—10 часовъ), тогда какъ та же фигура, наблюдавшаяся надъ клѣтками срѣза сочлененія, лежавшаго долгое время въ водѣ, быстро увеличивалась вслѣдствіе проникновенія селитры въ клѣтку, такъ какъ эндосмозъ послѣдней не выравнивался уже болѣе экзосмозомъ веществъ клѣточного сока.

Болѣе выгодными въ смыслѣ возможности проверки закона диффузіи являются клѣтки нижнихъ половинъ листовыхъ сочлененій *Phaseolus*, содержащія болѣе однородныя по силѣ экзосмоса вещества. Въ особенности же пригодными для той-же цѣли оказались листовыя сочлененія (сочлененія первичнаго черешка) мимозъ (въ моихъ опытахъ *Mimosa pudica* и *sinsitiva*), клѣтки которыхъ содержатъ лишь незначительное количество трудно экзосмирующихся веществъ<sup>1)</sup>.

Перехожу къ описанію опытовъ, при чемъ считаю необходимымъ сдѣлать его болѣе подробнымъ, такъ какъ эти опыты будутъ имѣть большое значеніе при установленіи метода опредѣленія проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій.

Листовое сочлененіе разрѣзалось обыкновенно при помощи микронома<sup>2)</sup> на 30—60 поперечныхъ ломтиковъ толщиной отъ 40 до 80 микронъ, смотря по величинѣ клѣтокъ сочлененія, съ такимъ расчетомъ, чтобы срѣзъ содержалъ по толщинѣ не больше одного ряда неповрежденныхъ клѣтокъ. Срѣзы оставались въ водѣ на 25 минутъ, что оказалось необходимымъ въ особенности при изслѣдованіи листовыхъ сочлененій *Phaseolus*, такъ какъ клѣтки послѣднихъ, освобожденные отъ давленія окружающей ткани, вбирая воду, сильно увеличиваются въ размѣрѣ, при чемъ часто происходятъ (въ особенности если листь былъ взятъ для опыта молодой) остающееся растяженіе оболочки, а слѣдовательно и уменьшеніе концентрации сока клѣтокъ, открываемой плазмолизомъ. Предварительный опытъ показалъ, что 25-ти минутъ вполне достаточно для установленія осмотического равновѣсія (прекращенія всасыванія воды). Послѣ этого меньшая часть срѣзовъ тотчасъ же подвергались плазмолизу калийной селитрой, вполне безвредной для клѣтокъ листовыхъ сочлененій, большая же часть помѣщалась на шелковую сѣточку (тюль) вставленную въ стаканчикъ, наполненный водой, и раздѣлявшую его горизонтальною плоскостью на два этажа<sup>3)</sup>. Последнимъ достигалась постоянная смѣна воды, окружавшей клѣтки, такъ какъ вещества, диффундирующія изъ послѣднихъ, образуя растворъ, тотчасъ опускаются на дно стаканчика, замѣняясь водой. По истеченіи опредѣленнаго промежутка времени часть срѣзовъ вынима-

1) Для опыта рекомендуется брать молодые листья, такъ какъ чѣмъ старше листь, тѣмъ болѣе трудно экзосмирующихся веществъ содержатъ клѣтки его сочлененія.

2) Въмѣсто микрономаго ножа вставлялась для этого обыкновенная бритва.

3) Слой воды надъ срѣзами былъ не больше 2 мм. Вода бралась для опытовъ изъ водопровода.

лась изъ стаканчика и подвергалась плазмолизу. Последняя операція повторялась нѣсколько разъ.

Предварительный опытъ показалъ, что клѣтки листовыхъ сочлененій, расположенныя по извѣстному радіальному сѣченію послѣднихъ, отличаются въ концентраціи сока по длинѣ сочлененія не больше какъ на 0,2% селитры, и что паденіе концентраціи сока во всѣхъ клѣткахъ такого сѣченія происходитъ совершенно одинаково, такимъ образомъ ошибка, происходящая вслѣдствіе опредѣленія концентраціи сока на различныхъ поперечныхъ разрѣзахъ, не превышаетъ во всякомъ случаѣ 0,2% селитры и можетъ быть еще значительно уменьшена установленіемъ средней концентраціи, полученной на нѣсколькихъ срѣзахъ, плазмолизируемыхъ одновременно (не менѣе 6 срѣзовъ). Что касается концентраціи сока клѣтокъ одного и того же поперечнаго срѣза, то она по большей части различна, именно клѣточный сокъ верхней половины сочлененія обыкновенно концентрированнѣе. Поэтому при опредѣленіи концентраціи сока приходится выбрать на поперечныхъ срѣзахъ строго опредѣленныя мѣста для плазмолитического изслѣдованія. Я изслѣдовалъ въ своихъ опытахъ только клѣтки, расположенныя сверху и снизу сосудистаго пучка (мѣсто ихъ расположенія ограничено двумя перпендикулярами, возстановленными къ средней линіи, дѣлящей пучекъ на верхнюю и нижнюю половины и касательными къ послѣднему) причѣмъ буду называть первыя клѣтками верхнихъ, а вторыя — нижнихъ половинъ сочлененій. Установленіе концентраціи селитры, изотоничной клѣточному соку, производилось такимъ образомъ, что микрономные поперечные срѣзы изслѣдуемаго сочлененія помѣщались въ закрытые препаратные цилиндрики съ растворами селитры, концентрація которыхъ отличалась между собою на 0,25%. По истеченіи извѣстнаго промежутка времени срѣзы изслѣдовались подъ микроскопомъ въ тѣхъ же растворахъ. Если оказывалось, напр., что въ 3,25% растворѣ селитры клѣтки верхней половины сочлененія плазмолизировались очень слабо, въ 3% же растворѣ плазмолизъ отсутствовалъ, то за изотоническую концентрацію принималось 3,2; если же въ 3,25% растворѣ плазмолизъ былъ силенъ, въ 3% отсутствовалъ, то за изотоническую концентрацію принималось 3,1%. Послѣ этого срѣзы изъ всѣхъ цилиндриковъ перекладывались въ растворы 3,25% и 3%, а черезъ 6 — 10 минутъ изслѣдовались вновь <sup>1)</sup>.

Найденая средняя для 5—8 срѣзовъ концентрація селитры должна быть, разумѣется, исправлена согласно величинѣ сокращенія объема клѣтки при плазмолизѣ, такъ какъ диффузія происходитъ изъ тургесцентной клѣтки; при этомъ по мѣрѣ уменьшенія концентраціи уменьшаются также какъ тургорное давленіе, такъ и тургорное натяженіе, а слѣдовательно и величина поправки. Къ сожалѣнію вслѣдствіе неправильной формы и паренхиматичности клѣтокъ сочлененій, сокращеніе объема ихъ при плазмолизѣ опредѣлить непосредственно съ достаточною точностью не представлялось возможнымъ и пришлось установить сокра-

1) Новообразованіемъ осмотически дѣйствующихъ веществъ въ клѣткахъ во время опыта можно, какъ | лichenія концентраціи сока въ срѣзахъ, находящихся  
показало предварительное изслѣдованіе (отсутствіе уве- | во влажной атмосферѣ) свободно пренебречь.



чение предварительнымъ опытомъ, опредѣляя размѣры призмочекъ, вырѣзанныхъ изъ нижнихъ и верхнихъ половинокъ сочлененій, въ водѣ и растворахъ селитры. Измѣреніе производилось подъ микроскопомъ (100 р. увел.) при помощи скалы, нанесенной на предметномъ стеклѣ съ дѣленіемъ равнымъ  $\frac{1}{75}$  сант.

Многочисленные опыты показали, что сокращеніе верхнихъ половинокъ сочлененій *Phaseolus multiflorus* и *vulgaris*, насыщенныхъ водой, при плазмолизѣ колеблется между 25% и 29% ихъ плазмолизированнаго объема, тогда какъ сокращеніе нижнихъ половинокъ колеблется между 35% и 50% той же величины. Такъ какъ опредѣлять сокращеніе при плазмолизѣ изслѣдовавшихся плазмолитически половинокъ сочлененій не представлялось возможнымъ, то пришлось удовлетвориться средними величинами изъ приведенныхъ чиселъ, тѣмъ болѣе, что ошибка, происходящая вслѣдствіе этого, не больше во всякомъ случаѣ 10%. Что касается сокращенія объема клѣтокъ при неполномъ плазмолизѣ, то изслѣдованіе показало, что при потери клѣтками половины своего тургорнаго давленія (т. е. при погруженія половинокъ сочлененій въ растворъ селитры концентраціи, равной половинѣ концентраціи раствора изотоничнаго клѣточному соку) объемъ верхнихъ половинокъ сочлененій въ среднемъ на 19% больше ихъ длины при плазмолизѣ; объемъ же нижнихъ половинокъ на 26%. Для введенія поправки при другихъ концентраціяхъ принималось обыкновенно пропорціанальность между увеличеніемъ тургорнаго давленія и растяженіемъ клѣтки<sup>1)</sup>. Неточности происходящія отъ введенія подобныхъ поправокъ не имѣющихъ большаго значенія такъ какъ намъ нужно опредѣлить отношеніе концентрацій, а не абсолютныя ихъ величины<sup>2)</sup>.

Для мимозъ приведенныя величины оказались нѣсколько другими; такъ въ среднемъ для верхнихъ половинокъ сочлененій сокращеніе при плазмолизѣ равно 18% и для нижнихъ половинокъ 40%; при половинномъ же тургорномъ давленіи соответственно 13% и 25%.

Въ нижеприведенныхъ таблицахъ въ рубрикѣ  $c_1$  — даны концентраціи (въ процентахъ селитры) клѣтокъ въ началѣ опыта (т. е. послѣ 25 минутнаго пребыванія въ водѣ), въ рубрикѣ  $c$  — концентраціи, найденныя по прошествіи извѣстнаго числа минутъ, даннаго въ рубрикѣ  $t$ , втеченіе которыхъ срѣзы находились въ водѣ на сѣткѣ (см. выше). Рядомъ въ рубрикахъ  $c'_1$  и  $c'$  помѣщены тѣ же концентраціи, исправленныя на сокращеніе объема при плазмолизѣ. Въ рубрикѣ  $lg_n \frac{c'_1}{c}$ , — приведены натуральные логарифмы отношеній  $\frac{c'_1}{c}$ . Въ рубрикѣ  $\alpha$  частное отъ дѣленія  $lg_n \frac{c'_1}{c}$  на число минутъ (рубр.  $t$ ). Это частное должно было бы оставаться для однѣхъ и тѣхъ-же клѣтокъ постояннымъ, если бы не происходило измѣненія ихъ объема; послѣднее однако, какъ мы знаемъ, не совсѣмъ вѣрно; поэтому рядомъ

1) Если напр. первая найденная плазмолизомъ концентрація верхней половины сочлененія была 2,80%, а вторая послѣ лежанія срѣзовъ въ водѣ—2% селитры, то соотвѣтствующая поправка для первой концентраціи будетъ 0,7% (т. е. 27% этой концентраціи) для второй же она равна 0,40% (т. е. 22% этой величины, такъ какъ она соотвѣтствуетъ только 0,7 полного тур-

горнаго давленія, а при 0,5 этого давленія поправка = 19%; такимъ образомъ, величина промежуточной поправки находилась интерполяціей).

2) Во всякомъ случаѣ эти неточности меньше ошибокъ, получающихся при установленіи концентраціи раствора селитры, изотоничнаго клѣточному соку.

имѣется еще рубрика  $\alpha'$ , въ которой поставлены тѣ же отношенія, вычисленныя теоретически изъ величины  $\alpha$ , соответствующей первому опредѣленію концентрации  $c$ , согласно выше приведенному вліянію измѣненія объема клѣтки на отношеніе  $\frac{P}{V}$  (см. стр. 65).

Таблица VIII.

Измѣненіе концентрации сока клѣтокъ верхней и нижней половины листового сочлененія *Phaseolus multiflorus*, находившагося въ видѣ поперечныхъ срѣзовъ въ водѣ. Температура 25° С. Толщина срѣзовъ 80  $\mu$ .

		Первонач. $c_1$ ‰ сел.	Исправл. $c_1'$ ‰ сел.	Найдenn. $c$ ‰ сел.	Исправл. $c'$ ‰ сел.	$\lg_n \frac{c_1'}{c}$	$t$ минуты.	$\alpha$	$\alpha'$
Верхняя половина сочлененія.	I	2,8	2,1	2	1,6	0,2719	62	0,0044	0,0044
	II	»	»	1,5	1,2	0,5595	132	0,0042	0,0044
	III	»	»	1,3	1,1	0,7390	222	0,0033	0,0044
	IV	»	»	1,1	0,9	0,8473	310	0,0027	0,0045
Нижняя половина сочлененія.	I	2,5	1,5	2	1,3	0,1432	62	0,0023	0,0023
	II	»	»	1,5	1,1	0,3102	132	0,0023	0,0023
	III	»	»	1,3	1	0,4055	222	0,0018	0,0024
	IV	»	»	1,1	0,9	0,5110	310	0,0016	0,0024

Таблица IX.

Измѣненіе концентрации сока клѣтокъ верхней и нижней половины листового сочлененія *Phaseolus multiflorus*, находившагося въ видѣ поперечныхъ срѣзовъ въ водѣ. Темп. 25° С. Толщина срѣзовъ 80  $\mu$ .

		Первонач. $c_1$ ‰ сел.	Исправл. $c_1'$ ‰ сел.	Найдenn. $c$ ‰ сел.	Исправл. $c'$ ‰ сел.	$\lg_n \frac{c_1'}{c}$	$t$ минуты.	$\alpha$	$\alpha'$
Верхняя половина сочлененія.	I	2,8	2,1	2,2	1,7	0,2113	60	0,0035	0,0035
	II	»	»	1,5	1,2	0,5595	225	0,0025	0,0035
	III	»	»	1,2	1,0	0,7418	420	0,0018	0,0036
	IV	»	»	1,1	0,9	0,8472	560	0,0015	0,0036
Нижняя половина сочлененія.	I	2	1,2	1,7	1,1	0,0870	60	0,0014	0,0014
	II	»	»	1,3	0,9	0,2878	225	0,0013	0,0014
	III	»	»	1,1	0,8	0,1055	420	0,0010	0,0015
	IV	»	»	1,0	0,7	0,5390	560	0,0010	0,0015

Таблица X.

Измѣненіе концентраціи сока клѣтокъ верхней и нижней половины листового сочлененія *Mimosa pudica*, находившагося въ видѣ поперечныхъ сръзовъ въ водѣ. Толщина сръзовъ 40  $\mu$ .

		Первонач. $c_1$ ‰ сел.	Исправл. $c_1'$ ‰ сел.	Найдени. $c$ ‰ сел.	Исправл. $c'$ ‰ сел.	$\lg_n \frac{c_1'}{c'}$	$t$ минуты.	$\alpha$	$\alpha'$
Верхняя половина сочлененія.	I	2,9	2,4	1,9	1,7	0,3449	84	0,0041	0,0041
	II	»	»	1,1	1,0	0,8758	216	0,0041	0,0041
	III	»	»	0,6	0,6	1,3868	358	0,0039	0,0042
	IV	»	»	0,4	0,4	1,7918	430	0,0042	0,0042
Нижняя половина сочлененія.	I	3,2	1,9	2,9	1,8	0,0538	84	0,0006	0,0006
	II	»	»	2,6	1,7	0,1112	216	0,0005	0,0006
	III	»	»	2,2	1,5	0,2362	368	0,0006	0,0006
	IV	»	»	2,0	1,4	0,3053	483	0,0006	0,0007

Таблица XI.

Измѣненіе концентраціи сока клѣтокъ верхней и нижней половины листового сочлененія *Mimosa pudica*, находившагося въ видѣ поперечныхъ сръзовъ въ водѣ. Толщина сръзовъ 40  $\mu$ .

		Первонач. $c_1$ ‰ сел.	Исправл. $c_1'$ ‰ сел.	Найдени. $c$ ‰ сел.	Исправл. $c'$ ‰ сел.	$\lg_n \frac{c_1'}{c'}$	$t$ минуты.	$\alpha$	$\alpha'$
Верхняя половина сочлененія.		6,7	5,5	3,1	2,8	0,6752	76	0,0089	0,0089
	»	»	»	1,6	1,5	1,2993	139	0,0093	0,0089
	»	»	»	1,2	1,2	1,5223	190	0,0080	0,0089
	»	»	»	0,9	0,9	1,8101	220	0,0082	0,0090
Нижняя половина сочлененія.		4,9	3,0	3,6	2,5	0,1824	76	0,0026	0,0026
	»	»	»	2,8	2,0	0,4055	139	0,0029	0,0026
	»	»	»	2,4	1,8	0,5107	200	0,0026	0,0026

Таблица XII.

Измѣненіе концентраціи сока клѣтокъ верхней и нижней половины листового сочлененія *Mimosa pudica*, находившагося въ видѣ поперечныхъ срѣзовъ (толщина 40  $\mu$ ) въ водѣ.

	Первонач. $c_1$ % сел.	Исправ. $c_1'$ % сел.	Найденн. $c$ % сел.	Исправ. $c'$ % сел.	$lg_n \frac{c_1'}{c'}$	$t$ минуты.	$\alpha$	$\alpha'$
Верхняя половина сочлененія.	5,2	4,3	2	1,8	0,8703	85	0,0102	0,0102
	»	»	1,3	1,2	1,2762	130	0,0098	0,0103
	»	»	1,0	1,0	1,4585	160	0,0091	1,0103
Нижняя половина сочлененія.	4,6	2,8	2,1	1,5	0,6240	85	0,0073	0,0073
			1,1	1,0	1,0297	130	0,0079	0,0073
			1,0	0,9	1,1135	160	0,0071	0,0073

Таблица XIII.

Измѣненіе концентраціи сока клѣтокъ верхней половины листового сочлененія *Mimosa sensitiva*, находившаго въ видѣ срѣзовъ (толщина 40  $\mu$ ) въ водѣ.

	Первонач. $c_1$ % сел.	Исправ. $c_1'$ % сел.	Найденн. $c$ % сел.	Исправ. $c'$ % сел.	$lg_n \frac{c_1'}{c'}$	$t$ минуты.	$\alpha$	$\alpha'$
Верхняя половина сочлененія.	8,6	7,1	7,5	6,2	0,1494	74	0,0020	0,0020
	»	»	4,8	4,2	0,5390	271	0,0020	0,0020
	»	»	3,3	3,0	0,8616	456	0,0019	0,0020
	»	»	2,1	2,0	1,2671	640	0,0020	0,0021

Приведенные опыты подтверждаютъ такимъ образомъ высказанное предположеніе о причинѣ паденія концентраціи сока сочлененій Leguminosae. Какъ этого требуетъ законъ диффузіи, концентрація сока уменьшается сначала быстро, потомъ все медленнѣе и медленнѣе, пока наконецъ паденіе ея дѣлается едва замѣтнымъ. Мало того въ предѣлахъ погрѣшности метода опредѣленія концентраціи сока согласіе паденія послѣдней съ закономъ диффузіи оказалось въ случаяхъ наиболѣе благопріятныхъ (нижнія половины сочлененій *Phaseolus* и сочлененія *Mimosa*) количественнымъ. Логарифмъ отношенія первоначальной концентраціи къ найденной оказался пропорціональнымъ времени нахождения срѣзовъ въ водѣ.

2. **Определение величины проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій для веществъ, растворенныхъ въ ихъ соку.**

Убѣдившись въ томъ, что экзосмозъ является причиной паденія концентраціи клѣточного сока сочлененій, мы можемъ воспользоваться только что приведенными опытами для опредѣленія величины проницаемости плазматической перепонки ихъ клѣтокъ для экзосмирующихъ веществъ.

Если вещества клѣточного сока однородны въ отношеніи скорости ихъ экзосмоза (такой случай имѣется, напр. у мимозы), то проницаемость плазматической перепонки для нихъ опредѣлится непосредственно изъ формулы (II) на стр. 65, гдѣ въ данномъ случаѣ  $k = \beta$ , такъ какъ мы назвали проницаемостью ( $\beta$ ) перепонки отношеніе количества вещества диффундирующаго въ единицу времени черезъ единицу ея поверхности къ концентраціи раствора, изъ котораго происходитъ диффузія (см. стр. 33). Если мы будемъ выражать проницаемость, какъ это дѣлали раньше, отношеніемъ числа гр.-молекулъ вещества, диффундирующихъ черезъ 1 кв. сант. перепонки въ 1 часъ, къ концентраціи въ гр.-мол. на литръ раствора, то формула приметъ видъ:

$$\lg_n \frac{c_1}{c} = \frac{P \cdot 1000 \cdot t}{V} \beta, \dots \dots (III)$$

причемъ  $P$ —должно быть выражено въ кв. сант.,  $V$ —въ куб. сант.,  $t$ —въ часахъ;  $c_1$  и  $c$  въ какомъ нибудь однородномъ наименованіи, безразлично.

Опредѣлимъ для примѣра проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ верхней половины листового сочлененія *Mimosa pudica*.

Принимая во вниманіе, что время  $t$  выражено въ таблицѣ въ минутахъ, изъ формулы (III) имѣемъ:

$$\beta = \frac{\lg \frac{c_1}{c} \cdot V \cdot 60}{P \cdot 1000 \cdot t} = \frac{\alpha \cdot V \cdot 60}{P \cdot 1000}$$

Средняя величина для  $\alpha$  въ таблицѣ X равна 0,0041; вмѣстѣ съ тѣмъ изслѣдованіе показываетъ, что, если предположить клѣтки паренхимы сочлененія шарообразными, ихъ діаметръ  $D$  нужно принять въ среднемъ равнымъ 0,0033 сант.; такимъ образомъ отношеніе  $\frac{V}{P} = \frac{\pi D^3}{6 \pi D^2} = \frac{D}{6} = 0,00055$ , а  $\beta = 135 \cdot 10^{-9}$ .

Мы видимъ, слѣдовательно, что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ сочлененія *Mimosa* для веществъ клѣточного сока не уступаетъ по своей величинѣ проницаемости плазматической перепонки *Spirogyra* для глицерина (см. стр. 42—43).

Обратимся теперь къ опредѣленію проницаемости для веществъ клѣточного сока въ случаѣ значительнаго различія между ними въ отношеніи скорости экзосмоза. Такой случай представляютъ верхнія половины сочлененій *Phaseolus*.

Разсматривая приведенныя выше таблицы, видимъ, что втеченіе первыхъ двухъ часовъ величины  $\alpha$  получаются близкими между собой; это показываетъ, что, если опытъ

продолжается не больше 1 — 2 час., величина  $\alpha$ , получающаяся при этомъ, болѣе или менѣе близка къ истинѣ и относится, само собою разумѣется, къ веществу сильно экзосмирующему. Съ другой стороны можно приблизительно подыскать ту концентрацію трудно экзосмирующаго вещества, на которую должна быть уменьшена какъ начальныя такъ и послѣдующія концентраціи, чтобы величина  $\alpha$  сдѣлалась постоянной. Проще всего допустить, что концентрація трудно-экзосмирующаго вещества въ предѣлахъ точности метода остается въ клѣткѣ постоянной или по крайней мѣрѣ экзосмозъ его покрывается новообразованіемъ осмотически дѣйствующихъ веществъ. Это предположеніе очень близко къ истинѣ, потому что, изслѣдуя концентрацію сока клѣтокъ срѣзовъ, находящихся въ водѣ, по истеченіи значительнаго промежутка времени, мы находимъ, что концентрація дѣлается постоянной. Такъ напр., концентрація клѣтокъ верхней половины сочлененія молодого листа *Phaseolus* какъ послѣ 20-ти такъ и послѣ 72 часового пребыванія срѣзовъ въ водѣ оказалось равной 0,8% селитры. Тоже изслѣдованіе, произведенное надъ старымъ листомъ, сочлененія котораго, какъ было упомянуто выше, содержатъ въ клѣточномъ соку больше трудно-экзосмирующихъ веществъ, показало, что копечная концентрація ихъ въ этомъ случаѣ равнялась 1,5%<sup>1)</sup>. Наоборотъ при изслѣдованіи срѣзовъ сочлененій *Mimosa* такую конечную концентрацію не удается найти. Клѣтки этого растенія, концентрація сока которыхъ понизилась до 0,2 — 0,4% селитры, обыкновенно отмираютъ (отмираніе клѣтокъ нижнихъ половинокъ сочлененій происходитъ еще гораздо раньше).

Предположимъ что сокъ клѣтокъ верхней половины сочлененія *Phaseolus*, къ которому относится таблица VIII, содержитъ 0,8% такихъ веществъ. Тогда  $\alpha$  будетъ послѣдовательно равняться 0,0078; 0,0089; 0,0066 и 0,0083, т. е. въ среднемъ 0,0079. Мы видимъ, слѣдовательно, что удовлетворяясь первымъ опредѣленіемъ мы дѣлаемъ вѣроятную ошибку почти въ 45%. Однако въ тѣхъ случаяхъ когда намъ нужно знать лишь относительную величину проницаемости или опредѣлить лишь качественно измѣненіе послѣдней можно удовлетвориться и первымъ опредѣленіемъ  $\alpha$ .

Такимъ образомъ для исправленія величины  $\alpha$  въ случаѣ *Phaseolus* нужно опредѣлить концентрацію клѣтокъ срѣзовъ, находящихся въ водѣ по истеченіи 15 — 20 часовъ, и уменьшить на найденную величину концентрацію, опредѣленную послѣ 1 — 2 часового нахождения срѣзовъ въ водѣ. Если же величина  $\alpha$  такъ или иначе дѣлается извѣстнымъ, опредѣленіе изъ нее проницаемости  $\beta$  не представитъ затрудненія.

## Выводы главы II.

1) Для опредѣленія осмотическаго давленія окружающей клѣтку жидкости мало знать температуру ея и концентрацію веществъ, растворенныхъ въ ней: необходимо знать также

1) Какъ разъ въ клѣткахъ срѣзовъ этого листа, съ теченіемъ времени. Величина его черезъ 5 часовъ наблюдалась въ особенности сильное уменьшеніе  $\alpha$  | лежанія срѣзовъ въ водѣ уменьшилась въ 3 раза.

факторъ проницаемости плазматической перепонки клѣтки для этихъ веществъ, т. е. величину, пропорціональную проницаемости или отношенію  $\frac{p}{c_1 - c_2}$ , гдѣ  $p$  — число гр-мол. вещества, диффундирующаго черезъ перепонку, а  $c_1 - c_2$  — разность концентрацій этого вещества по обѣ стороны послѣдней.

2) При опредѣленіи фактора проницаемости плазматической перепонки для какого-нибудь вещества  $\mu$ , лучше всего пользоваться вычисленіемъ его изъ изотоническихъ коэффициентовъ послѣдняго, теоретическаго  $k_0$ , вычисленнаго по формуламъ Арреніуса или Вантъ-Гоффа, и найденнаго опытнымъ путемъ  $k$ , по формулѣ:  $\mu = 1 - \frac{k}{k_0}$ . Въ томъ и другомъ случаѣ изотоническій коэффициентъ сахара принимается равнымъ 1,88, а проницаемость послѣдняго черезъ плазматическую перепонку — равной нулю. Въ случаѣ, если перепонка проницаема для сахара, вычисленный факторъ проницаемости немного меньше, чѣмъ въ дѣйствительности.

3) Если извѣстенъ коэффициентъ пропорціональности проницаемости и ея фактора, то послѣдній можно опредѣлять также, очевидно, изъ проницаемости, находя ея наблюденіемъ увеличенія объема плазмолизированнаго протопласта въ растворѣ даннаго вещества. Этотъ способъ опредѣленія фактора проницаемости, однако, значительно менѣе точенъ, чѣмъ первый.

4) Плазмолизъ — какъ слабый, такъ и сильный, — произведенный съ достаточною осторожностью, не измѣняетъ проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ, а слѣдовательно и ея фактора, въ предѣлахъ погрѣшности опыта.

5) Наиболѣе точнымъ методомъ опредѣленія осмотического давления клѣточного сока является плазматическій методъ, т. е. методъ сравненія осмотического давления клѣточного сока съ осмотическимъ давлениемъ окружающей клѣтку жидкости. Такимъ образомъ, для опредѣленія этого давления нужно знать тѣ-же величины, какъ и для опредѣленія осмотического давления окружающей жидкости. Кромѣ этого, однако, нужно знать поправки: на уменьшеніе объема клѣтки при плазмолизѣ, на экзосмозъ, эндосмозъ и на новообразование осмотическихъ веществъ въ клѣточномъ соку.

6) Для непосредственнаго опредѣленія тургорнаго давления и его измѣненій въ клѣткахъ спирогиры и другихъ подобныхъ объектовъ можно пользоваться нахожденіемъ его изъ величины тургорнаго натяженія клѣточной оболочки по заранѣ составленной таблицѣ зависимости между тургорнымъ давлениемъ и тургорнымъ натяженіемъ. Этотъ методъ можетъ служить для провѣрки результатовъ, полученныхъ плазмолитическимъ методомъ.

7) Паденіе концентраціи клѣточного сока находящихся въ водѣ сочлененій растеній, совершающихъ варіаціонныя пиктиронныя движенія, обусловливается экзосмозомъ веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, что позволяетъ намъ опредѣлять величину проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій для этихъ веществъ, а слѣдовательно и относительную величину ея фактора.

## ГЛАВА III.

### Измѣненія тургорнаго давленія и его ближайшія причины.

#### А. Общее состояніе вопроса въ настоящее время.

Какъ упоминалось уже много разъ въ первыхъ главахъ этой работы, понятіе о величинѣ тургорнаго давленія въ клѣткѣ очень часто соединялось до сихъ поръ съ понятіемъ о концентраціи клѣточного сока, причемъ послѣдняя часто прямо замѣнялась словомъ «тургоръ клѣтки» (напр. Soreland, p. 4). Вполнѣ понятно поэтому, если большинство авторовъ, работавшихъ до послѣдняго момента въ области измѣненія «тургора» клѣтки направляли свои старанія исключительно на опредѣленіе измѣненія концентраціи клѣточного сока при помощи плазмолитическаго метода. Примѣненіе другихъ методовъ къ изслѣдованію тургорнаго давленія и его измѣненій мы встрѣчаемъ лишь у меньшей части авторовъ. Сначала я позволю себѣ остановиться на работахъ первой категоріи.

Измѣненіе концентраціи клѣточного сока теоретически можетъ происходить съ одной стороны вслѣдствіе накопленія (resp. эндосмоза) или разрушенія (resp. экзосмоза) осмотически дѣйствующихъ веществъ, съ другой стороны вслѣдствіе измѣненія объема клѣтки. Процессы обоихъ родовъ могутъ, само собою разумѣется, совершаться въ общемъ случаѣ и одновременно.

Какъ извѣстно, клѣтки одного и того-же растенія или даже какой-нибудь ткани его никогда не плазмолизируются въ равной степени тѣмъ-же растворомъ. Даже сосѣднія клѣтки такой однородной въ осмотическомъ смыслѣ водоросли, какъ спирогира, нерѣдко требуютъ для плазмолиза растворовъ сахара, отличающихся между собой на 0,1 — 0,3% (иногда и больше). Однако разлічіе концентрацій сока клѣтокъ одной и той-же ткани не превосходитъ извѣстнаго предѣла и средняя концентрація клѣточного сока для той-же ткани какого-нибудь растенія при опредѣленныхъ условіяхъ есть болѣе или менѣе величина постоянная. Это обстоятельство зависитъ очевидно отъ того, что увеличеніе объема ткани (или ея ростъ) при данныхъ условіяхъ соответствуетъ накопленію осмотическихъ веществъ въ клѣточномъ соку. Обсужденіе вопроса, является-ли послѣднее причиной перваго, не входило въ планы предлагаемаго очерка, изъ извѣстныхъ же въ литературѣ



фактовъ можно скорѣе заключить, что оба процесса протекаютъ не зависимо другъ отъ друга. Такъ или иначе, если скорости обѣихъ указанныхъ процессовъ подѣ влияніемъ какихъ-либо причинъ измѣняются неодинако, тотчасъ происходитъ, само собою разумѣется, и измѣненіе концентраціи клѣточного сока. По крайней мѣрѣ всѣ авторы, изучавшіе измѣненіе «тургора» клѣтокъ растущихъ тканей подѣ влияніемъ различныхъ факторовъ приходятъ въ полномъ согласіи другъ съ другомъ къ заключенію, что искусственное замедленіе процесса роста всегда вызываетъ повышеніе концентраціи клѣточного сока. Такъ напр. въ клѣткахъ корней, ростъ которыхъ механически задерживается, всегда наблюдается увеличеніе концентраціи сока, дѣлающейся опять нормальной, послѣ устранения сопротивленія (Pfeffer, X, p. 227 и 231). Подобное же явленіе наблюдается при замедленіи роста послѣ помѣщенія растенія на растворы осмотически дѣйствующихъ веществъ (Eschenhagen, Stange, Rysselberghe I, Meyenburg, Wieler и др.), при перемѣнѣ температуры, освѣщенія или влажности (de-Vries, Wortmann I, p. 296, Stange, Copeland и др.), а также при тропическихъ изгибахъ (Noll I, p. 525, II, p. 44. Kohl II, p. 60, Pfeffer, XIII, p. 668). Наоборотъ усиленіе роста ведетъ постоянно къ паденію концентраціи клѣточного сока (l. c.). Насколько измѣняется однако при измѣненіи роста скорость накопленія осмотически дѣйствующихъ веществъ въ клѣточномъ соку, остается пока невыясненнымъ (Pfeffer, XI, p. 336 и 387—88).

Изслѣдованія Штанге (Stange, p. 347) и Копеланда (Copeland, p. 19—30) хотя, повидимому, и указываютъ на небольшую задержку накопленія послѣднихъ параллельно съ уменьшеніемъ энергіи роста, но опыты ихъ, производившіеся съ другою цѣлю, слишкомъ неточны, чтобы разрѣшить вопросъ, происходитъ-ли увеличеніе концентраціи клѣточного сока только вслѣдствіе замедленія роста при неизмѣнной скорости накопленія осмотически дѣйствующихъ веществъ или оно является результатомъ измѣненія обѣихъ процессовъ. На то, что оба процесса могутъ въ одинаковомъ смыслѣ измѣняться одновременно указываютъ можетъ быть также результаты опытовъ Гильбурга (Hilburg), нашедшаго увеличеніе концентраціи сока клѣтокъ листовыхъ сочлененій *Phaseolus* и *Mimosa* въ частяхъ, обращенныхъ въ сторону противоположную источнику свѣта при гелиотропическихъ изгибахъ (p. 30—31). Однако опыты названнаго автора мало убѣдительны въ особенности если принять во вниманіе всѣ неточности, могущія происходить при опредѣленіи концентраціи клѣточного сока сочлененій<sup>1)</sup>.

Кромѣ случаевъ измѣненія концентраціи клѣточного сока, соединеннаго съ измѣненіемъ роста клѣтокъ (или тканей) теоретически допустимы само собою разумѣется также случаи перемѣны состава сока клѣтокъ, прекратившихъ уже ростъ (или съ ничтожнымъ приростомъ), подѣ влияніемъ тѣхъ или другихъ факторовъ. Подобное измѣненіе концентраціи клѣточного сока повидимому имѣло мѣсто въ опытахъ Риссельберга (Ryssel-

1) Повидимому, передъ плазмоллизомъ Гильбургъ складывалъ срѣзы сначала въ воду, такъ какъ концентрація сока клѣтокъ сочлененій *Phaseolus vulgaris* не превышаетъ по его наблюденіямъ 4‰ соли, на самомъ же дѣлѣ это концентрація рѣдко бываетъ меньше 5‰ соли.

berghe, I), при помѣщеніи эпидермиса *Tradescantia discolor* на растворы различной концентрации. Авторъ даже усматриваетъ изъ полученныхъ при этомъ результатовъ, что величина измѣненія концентрации клѣточного сока слѣдуетъ закону Вебера. Къ сожалѣнію рамки настоящей работы не позволяютъ останавливаться на критикѣ опытовъ Риссельберга, я замѣчу лишь, что такъ какъ въ этихъ опытахъ совершенно не обращалось вниманіе на измѣненіе роста клѣтокъ, то въ настоящее время нельзя съ увѣренностью сказать, что измѣненія концентрации сока, наблюдавшіяся авторомъ, обуславливались исключительно измѣненіемъ энергіи накопленія осмотически дѣйствующихъ въ клѣткахъ<sup>1)</sup>.

Что-же касается предположенія, высказаннаго Пфефферомъ (Pfeffer, IV, p. 188) относительно измѣненія концентрации клѣточного сока въ сочлененіяхъ *Mimosa pudica*, являющейся причиной измѣненія тургорнаго давленія послѣднихъ при раздраженіи, то оно до сихъ поръ еще не подверглось опытной провѣркѣ.

При оцѣнкѣ всѣхъ цитированныхъ выше работъ, не слѣдуетъ забывать, что авторы ихъ, примѣняя плазмолитическій методъ къ опредѣленію измѣненія тургорнаго давленія съ легкой руки Пфеффера, совершенно игнорировали вліяніе на послѣднее проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ. Такъ какъ, вмѣстѣ съ тѣмъ въ своихъ опытахъ они производили плазмолізъ исключительно селитрой, для которой плазматическая перепонка, какъ извѣстно, сравнительно легко проницаема, то представляется вполне возможнымъ, что находившееся авторами уменьшеніе концентрации плазмолизирующаго раствора указывало въ противоположность ихъ выводамъ какъ разъ наоборотъ на увеличеніе тургорнаго давленія клѣтокъ (см. стр. 11), а увеличеніе этой концентрации на уменьшеніе послѣдняго. Такимъ образомъ результаты всѣхъ цитированныхъ работъ совершенно не говорятъ намъ не только объ измѣненіи тургорнаго давленія, но и объ измѣненіи концентрации клѣточного сока.

Послѣ только что сказаннаго намъ будутъ понятны противорѣчія, къ которымъ приходятъ иногда изслѣдователи, не довольствующіеся для опредѣленія тургорнаго давленія установленіемъ одной концентрации клѣточного сока, а обращающіеся также къ другимъ методамъ опредѣленія внутрелѣточного давленія. Такъ напр. въ опытахъ Пантанелли (Pantanelli) часто при увеличеніи концентрации сока, наблюдалось уменьшеніе тургорнаго натяженія оболочекъ клѣтокъ и наоборотъ (l. c. p. 325, Tab. IX и LIII—LIV, p. 319, 326); для объясненія такого противорѣчія названный авторъ прибѣгаетъ къ предположенію, что здѣсь имѣетъ мѣсто «измѣненіе растяжимости плазматическаго мѣшка», допуская такимъ образомъ что «плазма своими силами сдѣленія можетъ оказать сопротивленіе» тургорному давленію<sup>2)</sup> (l. c. p. 327).

1) Чтобы избѣжать перечисленія фактовъ измѣненія концентрации клѣточного сока, наблюдавшихся другими авторами и не имѣющихъ для насъ большого значенія, я позволю себѣ обратить вниманіе на краткій историческій очеркъ въ работѣ Риссельберга (Ruselberghe, I, p. 23—24).

2) Авторъ пишетъ: «eine Variation d. Dehnungsgrösse des Protoplasmas ist ohne Aenderung d. elastischen Eigenschaften d. Zellhaut v. Schimmelpilzen denkbar»... «weil d. Protoplasma mit seiner eigenen Kohäsionskraft einen Widerstand entgegensetzt»... «das Protoplasma strebt einer weiteren Ausdehnung entgegen».

Фактъ, аналогичный найденному Пантанелли, повидимому, имѣетъ мѣсто и въ опытахъ Копеланда (Copeland, таблицы на стр. 24 и 25), который проходитъ однако его молчаніемъ.

Къ противорѣчію, подобному только что описаннымъ, приходитъ также Гильбургъ (Hilburg), изслѣдуя варіаціонныя движенія листовыхъ сочлененій. Опыты Пфеффера (Pfeffer, III), какъ извѣстно, показали, что эти движенія происходятъ вслѣдствіи періодическаго измѣненія тургорнаго давленія клѣтокъ сочлененій, тогда какъ Гильбургъ не могъ подмѣтить разности въ концентраціи сока клѣтокъ даже въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ по даннымъ Пфеффера, полученнымъ при помощи динамометра, «сила напряженія» (Expansionskraft) уменьшалась больше чѣмъ вдвое (Hilburg, p. 28). Названный авторъ поступаетъ однако благоразумнѣе Пантанелли, оставляя найденный имъ фактъ безъ особаго объясненія (l. c. p. 41).

Мы видимъ, такимъ образомъ, что отождествленіе тургорнаго давленія съ концентраціей клѣточного сока можетъ дѣйствительно привести къ невѣрнымъ результатамъ, а данныя полученные при помощи плазмолитическаго метода, безъ введенія поправки на проницаемость, т. е. данныя всѣхъ цитированныхъ выше работъ настоятельно нуждаются въ провѣркѣ. Что именно измѣненіе величины проницаемости плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ можетъ обуславливать значительное измѣненіе тургорнаго давленія безъ достаточной перемѣны въ составѣ клѣточного сока, было показано мною еще три года тому назадъ надъ спорангиеносцами *Pilobolus* (Лепешкинъ, стр. 20—22).

Обращаясь теперь къ изслѣдованіямъ надъ измѣненіемъ тургорнаго давленія, производившимся при помощи методовъ, не основанныхъ на опредѣленіи концентраціи клѣточного сока, прежде всего необходимо остановиться на изслѣдованіяхъ, касающихся движеній чувствительной мимозы и такъ называемыхъ сонныхъ движеній листьевъ. Брюкке (Brücke I p. 435 и слѣд.) былъ, какъ извѣстно, первымъ ученымъ, показавшимъ что движенія листьевъ мимозы, вызываемыя раздраженіемъ, не тождественны съ движеніями ихъ при переходѣ растенія въ почное положеніе. Названный авторъ показалъ также при помощи очень простаго метода опредѣленія сопротивленія сгибанію листовыхъ сочлененій (Biegungsfestigkeitsmethode), что послѣ раздраженія послѣднее дѣлается значительно меньше, крѣпость сочлененій (Strafheit) уменьшается т. е., выражаясь современными терминами, что сумма тургорныхъ давленій клѣтокъ нижнихъ и верхнихъ половинокъ сочлененій уменьшается послѣ раздраженія. Вмѣстѣ съ тѣмъ Брюкке показалъ, что движеніе происходитъ главнымъ образомъ благодаря нижней половинѣ сочлененій (l. c. p. 447). Что касается ночного положенія растенія, то сопротивленіе сочлененій сгибанію (а слѣдовательно и тургорное давленіе его клѣтокъ) въ этомъ случаѣ наоборотъ увеличивается (l. c. p. 451—452).

Далѣе авторъ сравниваетъ протоплазму съ деревянной палкой, а клѣточную оболочку съ желѣзной (стр. 327—328). Совершенно непонятнымъ является, какимъ образомъ Пантанелли согласуетъ только-что приведен-

ное свое положеніе, съ тѣмъ фактомъ, что центральное давленіе, даже по мнѣнію самого автора, такъ ничтожно, что не играетъ роли въ тургорномъ давленіи клѣтки (p. 311).

Впослѣдствіи Пфефферъ подтвердилъ, какъ извѣстно, результаты, полученные Брюкке, показавъ при помощи динамометра, что измѣненіе сопротивленія сгибанію сочлененій *Mimosa* въ случаѣ раздраженія или перехода въ ночное положеніе обуславливается дѣйствительно уменьшеніемъ или увеличеніемъ тургорнаго давленія клѣтокъ (Pfeffer, III). Уменьшеніе тургорнаго давленія клѣтокъ при раздраженіи было доказано тѣмъ же ученымъ также для сочлененій *Oxalis* и филиментовъ *Synagaeae* (Pfeffer, I). Увеличеніе же тургорнаго давленія въ клѣткахъ сочлененій при переходѣ въ ночное положеніе совершается, какъ показалъ Пфефферъ, у всѣхъ растений, листья которыхъ совершаютъ періодическія движенія (Pfeffer, III). Благодаря изслѣдованію Пфеффера сдѣлалось также извѣстнымъ, что у растений послѣдней категоріи нужно различать три рода движеній, соединенныхъ съ измѣненіемъ тургорнаго давленія клѣтокъ листовыхъ сочлененій: 1) паратоническія движенія, вызываемыя затемнѣніемъ гесп. болѣе сильнымъ освѣщеніемъ и сопровождающіяся увеличеніемъ гесп. уменьшеніемъ тургорнаго давленія клѣтокъ обѣихъ половинъ сочлененій, 2) такъ называемыя послѣдѣйствія этихъ движеній, обуславливаемыя предварительнымъ сгибаніемъ и разгибаніемъ сочлененій и 3) автономныя движенія, происходящія безъ видимаго внѣшняго побужденія, при чемъ оба послѣдніе рода движеній сопровождаются противоположнымъ измѣненіемъ тургорнаго давленія клѣтокъ въ верхней и нижней половинахъ сочлененій. Дневныя движенія листьевъ представляютъ по Пфефферу комбинацію всѣхъ трехъ родовъ движенія.

Впослѣдствіи Швенденеръ (Schwendener III и IV) и Іостъ (Iost) пытались доказать, что паратоническія и дневныя движенія листьевъ сопровождаются также какъ автономныя и послѣдѣйствія разнороднымъ измѣненіемъ тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ листовыхъ сочлененій; ихъ предположенія не подтвердились однако позднѣйшими изслѣдованіями Пантанелли (Pantanelli, I) и Видерсгейма (Widersheim).

Изъ другихъ изслѣдованій надъ измѣненіемъ тургорнаго давленія подъ вліяніемъ свѣта, упомяну наблюденія Гофмейстера (Hofmeister, II, p. 330), пользовавшагося въ своихъ опытахъ методомъ опредѣленія сопротивленія сгибанію и нашедшаго увеличеніе тургорнаго давленія при затемнѣніи въ черешкахъ листьевъ у *Malva silvestris* и уменьшеніе послѣдняго у *Impatiens noli tangere*; наблюденія Гофмейстера не были однако подтверждены опытами Пфеффера (Pfeffer, III, p. 92).

Пфефферъ въ цитированной выше работѣ показалъ далѣе при помощи динамометра, что геотропическія изгибы листьевъ, извѣстные еще Саксу (Sachs), обуславливаются измѣненіемъ тургорнаго давленія сочлененій подъ вліяніемъ перемѣны направленія силы тяжести. При этомъ сопротивленіе сгибанію сочлененій остается неизмѣнной (Pfeffer, l. c. p. 140), что указываетъ на противоположное измѣненіе тургорнаго давленія въ различныхъ половинахъ сочлененій.

Что касается измѣненія тургорнаго давленія при геотропическихъ изгибахъ другихъ органовъ, то методъ исчезанія сгиба при плазмолизѣ, употреблявшійся для доказательства такого измѣненія, слишкомъ мало надеженъ, чтобы дать какіе-бы то ни было окончательные

результаты (Fitting, p. 596); вопросъ получалъ, такимъ образомъ, въ зависимости отъ возрѣнія автора, то положительное то отрицательное разрѣшеніе (литература цитирована у Фиттинга).

Что касается ближайшей причины измѣненія тургорнаго давленія во всѣхъ перечисленныхъ случаяхъ, то она остается пока не выясненной. Во всякомъ случаѣ предположенія Брюкке (Brücke, p. 444), Гофмейстера (Hofmeister I § 32 и 38) и Сакса (Sachs Lehrbuch IV Aufl. p. 757) послѣ изслѣдованій Пфеффера приобрѣтаютъ только историческое значеніе, приведенное же выше предположеніе Пфеффера (Pfeffer, IV, p. 188) объ уменьшеніи концентраціи сока клѣтокъ въ нижней половинѣ сочлененія *Mimosa* при раздраженіи не проверено на опытѣ; вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ было уже упомянуто, Гильбургу не удалось найти разницу въ концентраціи клѣточного сока сочлененій у растений, находящихся въ дневномъ и ночномъ положеніи.

Кромѣ концентраціи раствора и проницаемости плазматической перепонки для растворенныхъ веществъ на осмотическое давленіе клѣточного сока, а слѣдовательно и тургорное давленіе, оказываетъ, какъ мы знаемъ, немаловажное вліяніе и окружающая температура. Это вліяніе, выражаемое формулами Арреніуса и Вантъ-Гоффа (т. е. пропорціональность давленія абсолютной температурѣ), усложняется однако тѣмъ, что отъ температуры зависитъ также проницаемость плазматической перепонки (см. *Russelberghe*, II), а слѣдовательно и ея факторъ въ формулахъ на стр. 10, 16 и 32. Такъ какъ вліяніе проницаемости на осмотическое давленіе до сихъ поръ игнорировалось, то указанное обстоятельство не получило до сихъ поръ должной оцѣнки у большинства изслѣдователей. Приблизительно вѣрное представленіе о возможномъ вліяніи температуры на тургорное давленіе мы встрѣчаемъ въ литературѣ собственно только у Краббе (*Krabbe*, p. 445), опыты его однако съ измѣненіемъ объема клѣтокъ подъ вліяніемъ температуры, а слѣдовательно и изъ нихъ слѣдующія заключенія относительно измѣненія при этомъ внутрисклѣточного давленія, повидимому, не увѣнчались успѣхомъ (I. с. p. 447). Ему удалось лишь наблюдать, что измѣненіе «тургора» не слѣдуетъ закону Вантъ-Гоффа, своихъ опытовъ авторъ не считаетъ однако возможнымъ приводить, упоминая лишь, что пониженіе температуры давало у него, повидимому, меньшія величины, чѣмъ того требуетъ названный законъ.

Объ опытахъ *Russelberghe*'а, направленныхъ противъ наблюденія Краббе упоминалось уже въ гл. I (стр. 9). Опыты эти, какъ мы знаемъ, производились надъ клѣтками эпидермиса *Tradescantia discolor*, не позволяющими подмѣтить небольшія измѣненія объема плазмолизированнаго протопласта, а поэтому и не имѣютъ значенія для разрѣшенія вопроса.

Болѣе счастливы были опыты Краббе надъ вліяніемъ температуры на энергію осмотического всасыванія воды растеніемъ, показавшіе, какъ было уже упомянуто въ главѣ I (стр. 18), что осмотическое, а слѣдовательно и тургорное давленіе, соответствующее извѣстному времени, протекшему послѣ начала всасыванія, быстро увеличивается съ возрастаніемъ температуръ.

Изъ приведенныхъ литературныхъ данныхъ видно, что разрѣшеніе вопросовъ объ измѣненіи тургорнаго давленія въ клѣткѣ и о ближайшихъ причинахъ этого измѣненія находилось до настоящаго времени далеко не въ блестящемъ состояніи. Возможно болѣе тщательное и критически поставленное изслѣдованіе относящихся сюда явленій мнѣ представлялось поэтому необходимымъ. Однако въ рамкахъ предлагаемой работы пришлось ограничиться только изслѣдованіемъ наиболее важныхъ и общихъ изъ нихъ, не касаясь пока деталей.

Важнѣйшею и вмѣстѣ съ тѣмъ простѣйшею задачею въ разрѣшеніи интересующаго насъ вопроса объ измѣненіи тургорнаго давленія и о ближайшихъ его причинахъ представлялось мнѣ изслѣдованіе его въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ это измѣненіе совершается независимо отъ измѣненій объема или роста клѣтокъ, вызывающихъ перемѣну въ концентраціи клѣточного сока. Къ такимъ случаямъ относятся напр. измѣненіе тургорнаго давленія, наблюдаемое при варіаціонныхъ никтитропныхъ движеніяхъ листьевъ, или измѣненіе этого давленія, происходящее непосредственно послѣ перемѣны температуры. Только изучивъ явленіе въ его самой простой формѣ можно было приступить къ изслѣдованію болѣе сложныхъ случаевъ, гдѣ въ измѣненіи тургорнаго давленія принимаетъ участіе также и ростъ клѣтокъ; вмѣстѣ съ тѣмъ представлялось желательнымъ изучать эти случаи параллельно съ измѣненіями роста клѣтокъ и причинами послѣдняго.

Что касается объектовъ для моихъ опытовъ, то кромѣ типичности наблюдаемаго явленія пришлось, само собою разумѣется, считаться также съ наибольшою доступностью ихъ для изслѣдованія. Такъ напр. при изученіи дѣйствія свѣта на тургорное давленіе листовыхъ сочлененій я, изъ всѣхъ извѣстныхъ растений съ одинаковымъ ходомъ сонныхъ движеній, выбралъ *Phaseolus*, листовыя сочлененія котораго достаточно велики для срѣзовъ и не содержатъ въ своихъ клѣткахъ пузырчатыхъ скопленій дубильныхъ веществъ (*Gerbstoffblasen*), сильно мѣшающихъ микроскопическому наблюденію. Тамъ, гдѣ приходилось изучать вліяніе различныхъ факторовъ на тургорное давленіе вообще растительной клѣтки плазматическимъ методомъ, я пользовался излюбленными въ такихъ случаяхъ объектами: эпидермисомъ главной жилки листьевъ *Tradescantia discolor*, *Spirogyra* и т. п.

## **В. Вліяніе свѣта на тургорное давленіе листовыхъ сочлененій и его ближайшія причины.**

Согласно сказанному выше въ мою задачу входило изслѣдованіе только непосредственнаго вліянія свѣта на тургорное давленіе клѣтокъ, не связаннаго съ ростомъ (или измѣненіемъ объема) послѣднихъ. Изъ случаевъ, относящихся къ названной категоріи, единственнымъ пока извѣстнымъ примѣромъ дѣйствія перемѣны силы освѣщенія является измѣненіе тургорнаго давленія въ листовыхъ сочлененіяхъ растений, совершающихъ варіаціонныя никтитропныя движенія. Оставляя механизмъ послѣднихъ пока въ сторонѣ, постараемся выяснитъ сначала какимъ измѣненіямъ подвергается тургорное давленіе клѣтокъ сочлененій при перемѣнѣ освѣщенія.

Бертъ (Bert), Мильярде (Millardet II), а впоследствии, какъ было уже упомянуто выше, и Пфефферъ принимаютъ на основаніи своихъ опытовъ съ оперированными листовыми сочлененіями, что при затемнѣніи происходитъ увеличеніе тургорнаго давленія всѣхъ клѣтокъ послѣднихъ (Pfeffer, III, p. 7—8, 11). Это явленіе наблюдается, по Пфефферу, независимо отъ того, въ нормальномъ или перевернутомъ (корнемъ вверхъ) положеніи находится растеніе (l. c. p. 142). Въ вѣрности опытовъ Пфеффера ни одинъ батаникъ не сомнѣвался до 1897, когда появилась работа не менѣе извѣстнаго физиолога Швенденера (Schwendener, I), въ которой авторъ, исходя изъ положенія, что послѣдствія дневныхъ движеній листьевъ могутъ быть лишь ихъ полнымъ повтореніемъ (l. c. p. 240), пытается доказать невѣрность наблюденій Пфеффера. По мнѣнію Швенденера верхняя и нижняя половины сочлененій реагируютъ на затемнѣніе, какъ и въ случаѣ послѣдствій, въ различномъ смыслѣ: въ то время какъ въ одной изъ половинъ повышается тургорное давленіе, оно понижается въ другой половинѣ сочлененія. Однако при послѣдствіяхъ, какъ показалъ Пфефферъ (l. c. p. 89), сопротивленіе сгибанію, а слѣдовательно и сумма тургорныхъ давленій верхней и нижней половинъ сочлененій остаются постоянными, тогда какъ при затемнѣніи или вечеромъ это сопротивленіе значительно увеличивается. Такъ какъ подобное различіе между дневными движеніями и послѣдствіями не согласовалось со взглядомъ Швенденера, то послѣдній произвелъ опыты надъ мимозой, которые должны были показать, что сопротивленіе сгибанію листовыхъ сочлененій названнаго растенія неизмѣняется при затемнѣніи и вечеромъ. Однако авторъ, чтобы облегчить себѣ задачу, передъ измѣреніемъ сопротивленія сгибанію хлороформировалъ свои растенія, поэтому и результаты полученные имъ не могутъ относиться во всякомъ случаѣ къ нормальному растенію (l. c. p. 250). Что же касается его опытовъ надъ черешками мимозы съ удаленными половинами сочлененій, то нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что и послѣ удаленія верхнихъ половинъ листья продолжали вечеромъ опускаться, такъ какъ въ опытахъ Швенденера вторичные черешки были свободны (l. c. табл., фиг. 1—3) и, сближаясь между собою, увеличивали моментъ тяжести листа; такъ какъ увеличеніе тургорнаго давленія въ нижней половинѣ сочлененія, вечеромъ, какъ мы узнаемъ ниже, очень незначительно, то уже одного увеличенія момента тяжести было достаточно для опусканія листьевъ.

Почти одновременно съ работой Швенденера, Іостомъ были опубликованы опыты также для доказательства различнаго реагированія половинъ сочлененій при затемнѣніи (Iost). При этомъ авторъ рекомендуетъ *Desmodium gyanis*, какъ растеніе наиболѣе пригодное для опроверженія опытовъ Пфеффера (l. c. p. 373). Однако въ заключеніи своей работы Іостъ признается, что взгляда Пфеффера онъ не могъ опровергнуть, также какъ его не опровергли и опыты Швенденера (l. c. p. 376). Тотъ же авторъ, реферируя работу Пантанелли (Pantanelli, I), нашедшаго увеличеніе тургорнаго давленія въ обѣихъ половинахъ сочлененій при затемнѣніи у *Robinia Pseudacacia* и *Porliera hygrometrica*, высказываетъ предположеніе, что удаленіе половины сочлененія вообще не пригодно для разрѣшенія вопроса, такъ какъ по его мнѣнію при этомъ могутъ создаться

условія, прекращающія «специфическую чувствительность» разныхъ половинокъ сочлененій (Ref. Bot. Zeit. 1901, II Abth. p. 123), которыя начинаютъ реагировать, какъ обыкновенныя ткани.

Только въ самое послѣднее время появилась работа Видерсгейма, сдѣланная подъ руководствомъ и по методикѣ Пфеффера (Wiedersheim). Авторъ подтверждаетъ выводы своего учителя, указывая вмѣстѣ съ тѣмъ, что противоположные результаты, къ которымъ пришли Швенденеръ и Юстъ въ своихъ опытахъ, были получены ими вслѣдствіе недостаточно полного срѣзанія половинокъ сочлененій. Дѣйствительно опыты Видерсгейма съ недостаточно глубоко срѣзанными половинами сочлененій привели къ тѣмъ же результатамъ, какіе были получены выше названными авторами.

Если срѣзываніемъ половинокъ сочлененій создавались дѣйствительно, какъ думаетъ Юстъ, какія-нибудь ненормальныя условія, прекращающія специфическую чувствительность половинокъ сочлененій, то совершенно непонятно было-бы, почему только полное удаленіе половины создаетъ такія условія, тогда какъ неполная операція нисколько не вліяетъ на нормальное состояніе клѣтокъ.

Однако и Видерсгеймъ въ своихъ опытахъ, не смотря на полное удаленіе верхнихъ половинокъ листовыхъ сочлененій *Phaseolus* наблюдалъ у  $\frac{1}{3}$  растений опусканіе листьевъ (l. c. p. 273); по мнѣнію названнаго автора это обстоятельство объясняется тѣмъ, что граница сферы дѣйствія обѣихъ половинокъ варьируетъ у различныхъ индивидуумовъ (p. 264).

Не слѣдуетъ однако забывать, что, какъ показалъ еще Пфефферъ, всѣ видимыя движенія листьевъ представляютъ такъ или иначе лишь комбинацію паратонического дѣйствія переменны освѣщенія, послѣдствія и автономныхъ движеній. Если первое сопровождается у *Phaseolus* повышеніемъ тургорнаго давленія нижней половины сочлененій, то послѣдствіе наоборотъ сопряжено съ уменьшеніемъ этого давленія. Паратоническое дѣйствіе темноты и послѣдствіе комбинируясь, могутъ давать слѣдовательно въ результатъ, смотря по тому какое изъ нихъ сильнѣе, повышеніе или пониженіе тургорнаго давленія нижней половины или даже отсутствіе какого-бы то ни было измѣненія послѣдняго (Wiedersheim p. 263—264). Если напр., затемнѣніе происходитъ послѣ 12 ч. дня (какъ это было всегда въ опытахъ Видерсгейма), когда нормально листь и на свѣту начинаетъ уже опускаться (см. Табл. въ работѣ Видерсгейма на стр. 261), то хотя паратоническое дѣйствіе темноты и вызываетъ увеличеніе тургорнаго давленія нижней половины сочлененія, однако послѣдствіе продолжаетъ свой нормальный ходъ и, если паратоническое дѣйствіе не въ состояніи его подавить, мы получимъ опусканіе листьевъ съ вырѣзанными верхними половинами и послѣ затемнѣнія. Что опусканіе листьевъ на свѣту, начиная съ 12 ч. дня вплоть до глубокихъ сумерокъ<sup>1)</sup>, происходитъ вслѣдствіе послѣдствія, видно изъ сопротивленія сочлененій сгибанію, величина котораго, не смотря на сильное пониженіе листа колеблется болѣе или менѣе около одной и той же высоты (см. таблицы Видерсгейма на стр. 274) и только послѣ наступленія сумерокъ паратоническое дѣйствіе есте-

1) Опыты Видерсгейма производились зимою.



ственнаго затемнѣнія начинаетъ сказываться на величинѣ сопротивленія сгибанію. Мои опыты съ листочками тройчатыхъ листьевъ *Phaseolus*, *Desmodium gurgans* и главными черешками *Mimosa pudica*, производившіеся лѣтомъ въ утренніе часы, показали, что послѣ полнаго (до середины сосудистаго пучка) удаленія верхней половины сочлененія у двухъ первыхъ растений и нижней половины у *Mimosa*, затемнѣніе всегда вызываетъ движеніе, противоположное наблюдаемому у неоперированныхъ листьевъ (т. е. поднятіе въ первомъ случаѣ и опусканіе во второмъ). Для иллюстраціи привожу здѣсь свои опыты надъ *Desmodium gurgans*.

Прежде всего выяснилось, почему это растеніе менѣе всего пригодно для провѣрки опытовъ Пфеффера. Дѣло въ томъ, что сочлененія *Desmodium gurgans* сильно согнуты, причѣмъ выпуклая ихъ сторона обращена къ землѣ; благодаря этому обстоятельству очень трудно удалить верхнюю половину сочлененія полностью, т. е. до сосудистаго пучка, не оставляя боковыхъ ея частей: очень легко при этомъ перерѣзать сочлененіе.

Однако, если операція сдѣлана тщательно, опытъ всегда удается. Послѣ вырѣзыванія верхней половины поверхность срѣза покрывалась обыкновенно въ моихъ опытахъ вазелиномъ (Юстъ пользовался гуттаперчивымъ лакомъ, дѣйствующимъ, безъ сомнѣнія, ядовито) и растеніе помѣщалось подъ стеклянный колоколь съ мокрой бумагой на стѣнкахъ. Въ приведенномъ опытѣ наблюдалось измѣненіе угла между пластинкой и черешкомъ средняго листочка послѣ перемѣны освѣщенія. У пяти листьевъ изслѣдованнаго растенія верхняя половина тщательно удалялась до сосудистаго пучка (операція по Пфефферу). У пяти листьевъ операція производилась по Швенденеру, т. е. срѣзъ не доходилъ до сосудистаго пучка. Пять же листьевъ оставались не оперированными. Въ 8 ч. утра сдѣлано первое наблюденіе, послѣ чего растеніе поставлено въ темноту. Въ 10 ч. у. сдѣлано второе наблюденіе и растеніе выставлено опять на свѣтъ, гдѣ оставалось до 12 ч. дня, послѣ чего опять помѣщено въ темноту и въ 2 ч. дня наконецъ вновь выставлено на свѣтъ. Температура во время опыта: 18 — 20° С.

Таблица XIV.

Измѣненіе угла, составляемаго пластинкою и черешкомъ листа *Desmodium gurgans* при перемѣнѣ освѣщенія.

Способъ операціи.	Листья, оперированные по Швенденеру.					Листья, оперированные по Пфефферу.					Листья не оперированные.				
	№ листочка.	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV
8 ч. у., свѣтъ . . .	120°	130°	112°	115°	132°	98°	95°	125°	80°	105°	140°	125°	130°	132°	120°
10 ч. у., темнота . .	110	115	105	108	118	110	110	135	95	118	115	120	110	120	105
12 ч. дня, свѣтъ . .	120	130	113	116	131	99	94	124	80	106	140	125	129	132	121
2 ч. дня, темнота . .	109	113	102	107	116	105	108	131	93	116	116	118	110	120	104
4 ч. дня, свѣтъ . .	118	128	110	112	128	98	95	124	80	106	138	123	128	132	120

Изъ приведенной таблицы видно, что листья, у которыхъ верхняя половина сочлененія вырѣзана по способу Пфеффера, въ противоположность не оперированнымъ и листьямъ, оперированнымъ по способу Швенденера, поднимаются въ темнотѣ и опускаются послѣ выставленія на свѣтъ.

Мы можемъ считать, такимъ образомъ, доказаннымъ, что *затемнѣніе вызываетъ увеличеніе тургорнаго давленія въ клеткахъ какъ верхнихъ такъ и нижнихъ половинъ листовыхъ сочлененій* растений, совершающихъ варіаціонныя движенія.

Въ чемъ могутъ однако заключаться ближайшія причины подобнаго дѣйствія перемѣны освѣщенія на тургорное давленіе? Опыты Гильбурга, какъ упоминалось выше, показали, что концентрація клѣточного сока остается при этомъ неизмѣнной или, по крайней мѣрѣ, что измѣненія ея не могутъ быть открыты, если точность опредѣленія не превышаетъ 0,5% селитры. Мои наблюденія, гдѣ концентрація клѣточного сока устанавливалась съ точностью до 0,1% селитры<sup>1)</sup> показали, что измѣненія ея послѣ наступленія темноты не превышаютъ во всякомъ случаѣ 0,1—0,2% селитры. Такого измѣненія концентраціи недостаточно для объясненія измѣненія тургорнаго давленія, измѣряемаго атмосферами (Pfeffer, III. p. 105). Не было поэтому никакого сомнѣнія въ томъ, что колебанія тургорнаго давленія совершаются такъ или иначе при участіи протоплазмы. Постараемся же опредѣлить это участіе болѣе конкретно.

#### 1. Теоретическое предположеніе о причинѣ измѣненія тургорнаго давленія сочлененій.

Тургорное давленіе клѣтокъ съ большимъ количествомъ сока, какъ мы видѣли въ гл. I, опредѣляется, въ виду малости центральнаго давленія, разностью осмотическихъ давленій клѣточного сока и жидкости, насыщающей клѣточную стѣнку. Если назовемъ концентрацію сока клѣтокъ сочлененій черезъ  $c_1$ , а концентрацію жидкости, пропитывающей оболочку этихъ клѣтокъ, черезъ  $c_2$ , то, принимая во вниманіе, что вещества, растворенныя въ этой жидкости экзосмировали изъ клѣточного сока, можемъ написать слѣдующую формулу, выражающую величину тургорнаго давленія клѣтокъ сочлененій (см. стр. 32).

$$P = R (c_1 - c_2) T [1 + (n - 1) \alpha] (1 - \mu)$$

Такъ какъ при перемѣнѣ освѣщенія обѣ концентраціи и температура остаются безъ измѣненія, то какъ степень электролитической диссоціаціи  $\alpha$ , такъ и число іоновъ  $n$  остаются также безъ измѣненія. Мы видимъ, такимъ образомъ, что тургорное давленіе

1) Проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій для веществъ растворенныхъ въ соку, какъ уже упоминалось раньше, одинакова съ проницаемостью ея для селитры (фигура плазмолиза селитрой | остается неизмѣнной въ теченіе 8—10 ч.), поэтому концентрація селитры точно выражаетъ концентрацію клѣточного сока.

можетъ измѣнить свою величину при перемѣнѣ освѣщенія только вслѣдствіе измѣненія фактора проницаемости плазматической перепонки.

Въ предположеніи, что послѣдняя можетъ измѣняться подъ вліяніемъ свѣта, не было для меня ничего невѣроятнаго, такъ какъ еще три года тому назадъ мнѣ удалось показать, что подобное вліяніе дѣйствительно наблюдается надъ *Pilobolus* и водовыдѣлительными волосками *Phaseolus*. Какъ въ послѣднихъ случаяхъ, такъ и въ клѣткахъ сочлененій проницаемость плазматической перепонки очень значительна, и измѣненіе ея можетъ производить большія колебанія тургорнаго давленія.

Обратимся однако къ опытной проверкѣ высказаннаго предположенія.

2. Примѣненіе аналитическаго метода къ выясненію причинъ измѣненія тургорнаго давленія сочлененій.

Самымъ простымъ способомъ убѣдиться во вліяніи силы освѣщенія на проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ листовыхъ сочлененій для веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку, было, воспользовавшись легкимъ экзосмосомъ послѣднихъ (см. стр. 62), опредѣлить химическимъ путемъ количество экзосмирующихъ изъ сочлененій веществъ на свѣту и въ темнотѣ. Хотя такой способъ и не можетъ быть очень точнымъ вслѣдствіе различія концентраціи сока, проницаемости, величины поверхности, толщины и т. п. у различныхъ сочлененій, тѣмъ не менѣе онъ очень нагляденъ, почему я и воспользовался имъ.

Опытъ былъ поставленъ слѣдующимъ образомъ.

Наканунѣ срѣзались около 400 листьевъ *Phaseolus multiflorus* (въ моихъ опытахъ изслѣдовались исключительно тройчатые листья фасоли) по возможности одинаковаго возраста и послѣ того, какъ каждый листь былъ поставленъ въ колбочку съ водой, половинна изъ нихъ оставалась на окнѣ лабораторіи, другая же половинна помѣщалась въ темную комнату. На слѣдующее утро у всѣхъ листьевъ обрѣзались сочлененія и оставлялись въ водѣ около часа, послѣ чего обсушивались пропускной бумагой и размѣщались однимъ слоемъ въ 4-хъ кристаллизационныхъ чашкахъ, соответствующаго размѣра. Туда же вливалось по 4 к. с. певской воды, по количеству растворенныхъ въ ней веществъ, въ предѣлахъ точности взвѣшивания, не отличающейся отъ дистиллированной. Послѣ этого всѣ чашки покрывались стеклянными колоколами съ мокрой бумагой на стѣнкахъ. Всѣ манипуляціи совершались, само собою разумѣется, или на свѣту или въ темной комнатѣ, смотря по тому, какія сочлененія имъ подвергались. Чашки съ сочлененіями, находившимися въ темной комнатѣ, помѣщались въ черныя коробки, которыя закутывались еще нѣсколько разъ чернымъ коленикомъ, и всѣ 4 чашки помѣщались рядомъ на окнѣ лабораторіи, при чемъ чашки съ сочлененіями, предназначенными для дѣйствія свѣта, освѣщались также снизу при помощи зеркала. Черезъ 7 часовъ (съ 10<sup>1</sup>/<sub>2</sub> час. утра до 5<sup>1</sup>/<sub>2</sub> дня, опытъ производился въ концѣ августа) были взяты пробы жидкостей изъ чашекъ для опредѣленія количества твердаго остатка. Послѣдній высушивался при 115°. Послѣ взятія пробъ, сочлененія просушивались пропускной бумагой и

взвѣшивались <sup>1)</sup>. Въ ниже приведенной таблицѣ помѣщены результаты опыта. О вычисленіи всего количества экзосмировавшихъ веществъ см. стр. 62.

Таблица XV.

Количество воды, окружавшей сочлененія, = 4 к. с.	С в ѣ т ъ.		Т е м н о т а.	
	I чашка.	II чашка.	III чашка.	IV чашка.
Вѣсъ взятыхъ сочлененій . . . . .	3,5834	3,0642	3,1202	3,8432
Вѣсъ взятой для анализа воды . . . . .	1,7832	1,3425	1,6241	1,8340
Вѣсъ полученнаго твердаго остатка . . . . .	0,0094	0,0052	0,0046	0,0055
Вѣсъ экзосмировавшихъ веществъ . . . . .	0,0211	0,0156	0,0115	0,0119
<i>Вѣсъ тѣхъ же веществъ, приходящійся на 1 гр. сочлененій . . . . .</i>	0,0059	0,0051	0,0037	0,0031

Мы видимъ такимъ образомъ, что изъ одного и того-же количества сочлененій въ окружающую воду экзосмировало на свѣту почти въ полтора раза больше веществъ клѣточного сока, чѣмъ въ темнотѣ. Такъ какъ всѣ условія въ томъ числѣ и температура были одинаковы въ обоихъ случаяхъ, то результатъ опыта указываетъ, что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій, согласно ожиданію, меньше въ темнотѣ, чѣмъ на свѣту. Однако въ виду недостатковъ аналитическаго метода, указанныхъ уже раньше (см. стр. 53 — 54), я счелъ необходимымъ прибѣгнуть также къ помощи другихъ методовъ опредѣленія величины проницаемости плазматической перепонки и прежде всего къ наблюденію измѣненія концентраціи клѣточного сока сочлененій.

### 3. Примѣненіе метода уменьшенія концентраціи клѣточного сока сочлененій.

Въ главѣ II (стр. 68—72) было въ подробности описано, какимъ образомъ на основаніи уменьшенія концентраціи клѣточного сока сочлененій можно судить о величинѣ проницаемости плазматической перепонки ихъ клѣтокъ для растворенныхъ веществъ. Здѣсь остается только дополнить сказанное нѣкоторыми частностями постановки опытовъ, въ которыхъ предполагалось сравненіе проницаемостей перепонокъ въ темнотѣ и на свѣту. Опыты были двухъ родовъ. Въ однихъ изслѣдуемые сочлененія листьевъ (у фасоли — листочковъ), находившихся въ дневномъ положеніи, разрѣзались микротомомъ (толщина срѣзовъ Phaseolus и толстыхъ сочлененій Mimosa — 70 — 80 микронъ, у тонкихъ сочлененій Mimosa — 40 — 60 микронъ) до мѣста прикрѣпленія ихъ къ черешку листа и срѣзы помѣщались поровну

1) Изслѣдованіе показало, что опытъ удастся только въ той обстановкѣ, которая только-что описана. Нельзя напримѣръ помѣщать сочлененія въ стаканчики съ притертыми пробками, такъ какъ недостатокъ кис-

лорода въ темнотѣ повышаетъ, какъ мы увидимъ ниже, проницаемость плазматической перепонки и результатъ опыта получается какъ разъ обратный.

въ два стаканчика съ водой, защищенныхъ съ трехъ сторонъ ширмами отъ слишкомъ сильнаго освѣщенія. По прошествіи 25 минутъ изъ обоихъ стаканчиковъ выбиралось по 6—8 срѣзовъ для установленія концентраціи селитры, изотоничной ихъ клѣточному соку (средняя величина концентраціи опредѣлялась такимъ образомъ на 6—8 срѣзахъ). Тотчасъ послѣ помѣщенія срѣзовъ въ растворы селитры одинъ изъ стаканчиковъ выставлялся на разсѣянный солнечный свѣтъ (на подоконникъ), другой же помѣщался въ черную коробку съ черной же крышкой; коробка закутывалась кромѣ того чернымъ коленкоромъ. По прошествіи 60—97 минутъ оставшіеся срѣзы изъ обоихъ стаканчиковъ подвергались плазмолизу въ различныхъ препаратныхъ цилиндрикахъ изслѣдовались же подъ микроскопомъ въ одномъ препаратѣ <sup>1)</sup>.

Въ опытахъ другого рода изслѣдуемое сочлененіе листа, находившагося въ дневномъ положеніи, разрѣзалось микротомомъ только до половины его длины, другая же половина вмѣстѣ съ остаткомъ черешка помѣщалась въ атмосферу, насыщенную водяными парами, гдѣ и оставалась до вечера. Срѣзы помѣщались въ стаканчикъ съ водой на разсѣянный солнечный свѣтъ. Черезъ 25 минутъ производилось установленіе концентраціи селитры на одной половинѣ срѣзовъ, по прошествіи же слѣдующихъ 60 мин. опредѣлялась концентрація сока и остальныхъ срѣзовъ. Оставшаяся половина сочлененія разрѣзалась микротомомъ вечеромъ въ темной комнатѣ (свѣтъ свѣчи на разстояніи 3 сажень) и срѣзы подвергались аналогичной операціи съ тѣмъ отличіемъ, что стаканчикъ стоялъ все время въ черной коробкѣ, закутанной чернымъ каленкоромъ. Температура воздуха: 18°—20° С.

Прявожу результаты опытовъ, производившихся въ іюль, располагая ихъ въ таблицахъ. Значенія рубрикъ остались тѣми-же какъ и въ таблицахъ на стр. 69. Нѣтъ нужды вычислять абсолютныя величины проницаемостей перепонокъ: этимъ величинамъ

пропорціональны отношенія  $\alpha = \frac{\lg_n \frac{c_1'}{c_2'}}{t}$ .

Ниже приводятся только нѣкоторые изъ сдѣланныхъ опытовъ, давшихъ въ общемъ схожіе результаты за исключеніемъ одного, въ которомъ мнѣ не удалось найти какого-либо отличія между величинами  $\alpha$  въ темнотѣ и на свѣту, причина чего безъ сомнѣнія кроется въ неточности самого метода. Дѣйствительно, какъ видно напр. изъ табл. XVIII, даже разность въ 0,1% селитры указываетъ при малыхъ паденіяхъ концентраціи на сравнительно большое измѣненіе проницаемости.

1) Концентрація селитры устанавливалась при | химы сочлененій; 1—2 слоя мелкихъ клѣтокъ, при этомъ только для большихъ клѣтокъ внутренней парен- | тающихъ къ эпидермису не наблюдались.

Таблица XVI.

*Phaseolus multiflorus*. Срѣзы положены въ воду въ 4 ч. 30 м. дня, половина изъ нихъ въ селитру — въ 4 ч. 55 м. Въ 5 ч. 59 м. положены въ селитру остальные срѣзы одновременно изъ освѣщеннаго и затемненнаго стаканчиковъ. Температура 19° С.

	Половина сочлененія.	Первая найд. конц. сел. $c_1$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Вторая найд. конц. сел. $c_2$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Продолж. опыт. $t$ въ мин.	$lg_n \frac{c_1'}{c_2'}$ .	$\alpha$ (пропорц. прониц.).
Свѣтъ.	Верхняя . . .	3,2	2,3	2,4	1,9	64	0,191	0,0029
	Нижняя . . .	3,3	1,9	2,6	1,7	»	0,111	0,0017
Темнота.	Верхняя . . .	3,2	2,3	2,9	2,2	64	0,044	0,0007
	Нижняя . . .	3,3	1,9	2,9	1,8	»	0,053	0,0008

Таблица XVII.

*Phaseolus multiflorus*. Срѣзы положены въ воду въ 11 ч. 27 м. утра, половина изъ нихъ въ селитру — въ 11 ч. 52 м. утра. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 1 ч. 22 м. дня, одновременно изъ освѣщеннаго и затемненнаго стаканчиковъ. Температура 20°—21° С.

	Половина сочлененія.	Первая найд. конц. сел. $c_1$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Вторая найд. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Продолж. опыт. $t$ въ мин.	$lg_n \frac{c_1'}{c_2'}$ .	$\alpha$ (пропорц. прониц.).
Свѣтъ.	Верхняя . . .	2,9	2,1	1,5	1,2	90	0,578	0,0064
	Нижняя . . .	3,0	1,7	2,2	1,5	»	0,125	0,0014
Темнота.	Верхняя . . .	2,9	2,1	1,9	1,5	90	0,336	0,0038
	Нижняя . . .	3,0	1,7	2,7	1,6	»	0,058	0,0006

Таблица XVIII.

*Phaseolus multiflorus*. Срѣзы положены въ воду въ 12 ч. 33 м., половина изъ нихъ въ селитру — въ 12 ч. 53 м. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 2 ч. 30 м., одновременно изъ освѣщеннаго и затемненнаго стаканчиковъ. Температура 20°—21° С.

	Половина сочлененія.	Первая найд. конц. сел. $c_1$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Вторая найд. конц. сел. $c_2$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Продолж. опыт. $t$ въ мин.	$lg_n \frac{c_1'}{c_2'}$ .	$\alpha$ (пропорц. прониц.).
Свѣтъ.	Верхняя . . .	3,0	2,2	1,8	1,4	97	0,452	0,0046
	Нижняя . . .	2,9	1,7	2,1	1,4	»	0,194	0,0019
Темнота.	Верхняя . . .	3,0	2,2	1,9	1,5	97	0,383	0,0039
	Нижняя . . .	2,9	1,7	2,2	1,5	»	0,122	0,0013

Таблица XIX.

*Phaseolus multiflorus*. Срѣзы одной половины сочлененія положены въ воду въ 3 ч. 30 м. дня (разсѣянный солнечный свѣтъ) и часть ихъ — въ селитру въ 3 ч. 55 м. дня. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 4 ч. 55 м. дня. Другая половина сочлененія оставалась цѣльной на разсѣянномъ свѣту до 5 ч. дня, послѣ чего помѣщена въ темноту. Въ 8 ч. вечера эта половина сочлененія была разрѣзана микротомомъ и срѣзы положены въ воду. Въ 8 ч. 25 м. часть срѣзовъ положена въ селитру. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 9 ч. 25 м. Температура 18 — 19° С.

	Половина сочлененія.	Первая найд. конц. сел. $c_1$ (‰).	Исправ. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Вторая найд. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Исправ. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Продолж. опыт. $t$ въ мин.	$lg_n \frac{c_1'}{c_2'}$ .	$\alpha$ (пропорц. прониц.).
Свѣтъ.	Верхняя . . .	3,5	2,6	2,6	2,0	60	0,262	0,0044
	Нижняя . . .	3,1	1,8	2,3	1,5	»	0,183	0,0030
Темнота.	Верхняя . . .	3,8	2,8	3,1	2,3	60	0,197	0,0033
	Нижняя . . .	3,3	1,9	2,7	1,7	»	0,111	0,0018

Таблица XX.

*Mimosa pudica*. Срѣзы положены въ воду въ 11 ч. 37 м. утра и половина изъ нихъ въ селитру въ 12 ч. 9 м. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 1 ч. 14 м. дня, одновременно изъ освѣщеннаго и затемненнаго стаканчиковъ.

	Половина сочлененія.	Первая найд. конц. сел. $c_1$ (‰).	Исправ. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Вторая найд. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Исправ. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Продолж. опыт. $t$ въ мин.	$lg_n \frac{c_1'}{c_2'}$ .	$\alpha$ (пропорц. прониц.).
Свѣтъ.	Верхняя . . .	3,8	3,1	1,8	1,6	65	0,661	0,0102
	Нижняя . . .	4,1	2,5	3,6	2,2	»	0,128	0,0019
Темнота.	Верхняя . . .	3,8	3,1	2,4	2,1	65	0,390	0,0060
	Нижняя . . .	4,1	2,5	3,8	2,4	»	0,041	0,0006

Таблица XXI.

*Mimosa pudica*. Срѣзы одной половины сочлененія положены въ воду въ 12 ч. 15 м. дня (разсѣянный солнечный свѣтъ) и часть ихъ — въ селитру въ 12 ч. 45 м. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 2 ч. 15 м. дня. Другая половина сочлененія оставалась цѣльной на разсѣянномъ солнечномъ свѣту до 6 ч. вечера, послѣ чего помѣщена въ темноту. Въ 8 ч. вечера эта половина сочлененія была разрѣзана микротомомъ и срѣзы положены въ воду. Въ 8 ч. 30 м. веч. часть срѣзовъ положена въ селитру. Остальные срѣзы положены въ селитру въ 10 ч. веч. Температура въ комнатѣ понизилась съ 19° до 18° С.

	Половина сочлененія.	Первая найд. конц. сел. $c_1$ (‰).	Исправл. конц. сел. $c_1'$ (‰).	Вторая найд. конц. сел. $c_2$ (‰).	Исправ. конц. сел. $c_2'$ (‰).	Продолж. опыт. $t$ въ мин.	$lg_n \frac{c_1'}{c_2'}$ .	$\alpha$ (пропорц. прониц.).
Свѣтъ.	Верхняя . . .	4,8	4,0	1,8	1,6	90	0,916	0,0102
	Нижняя . . .	4,3	2,6	2,1	1,7	»	0,425	0,0046
Темнота.	Верхняя . . .	4,6	3,8	2,5	2,2	90	0,547	0,0067
	Нижняя . . .	4,1	2,5	2,3	1,7	»	0,386	0,0043

Изъ приведенныхъ таблицъ видно, что отношеніе  $\alpha$ , а слѣдовательно и ему пропорціональныя величины проницаемости плазматической перепонки и ея фактора въ клѣткахъ какъ верхнихъ, такъ и нижнихъ половинокъ сочлененій въ темнотѣ меньше, чѣмъ на разсвѣтѣ солнечномъ свѣту. Результатъ, полученный при помощи метода паденія концентраціи клѣточного сока, также какъ полученный аналитическимъ методомъ, подтверждаетъ, такимъ образомъ, высказанное предположеніе о причинѣ измѣненія тургорнаго давленія сочлененій подъ вліяніемъ затемнѣнія.

Что касается наблюденій Гильбурга (Hilburg, p. 33), не замѣтившаго разницы въ скоростяхъ паденія концентраціи клѣточного сока сочлененій на свѣту и въ темнотѣ, то они вполне удовлетворительно объясняются небольшою точностью установленія въ его опытахъ концентраціи растворовъ селитры, изотоничныхъ клѣточному соку<sup>1)</sup>.

Единственное возраженіе противъ объясненія различія въ скорости паденія концентраціи клѣточного сока на свѣту и въ темнотѣ измѣненіемъ проницаемости плазматической перепонки можетъ заключаться въ допущеніи, что послѣ помѣщенія срѣзовъ сочлененій въ воду, начинается новообразованіе осмотически дѣйствующихъ веществъ въ клѣточномъ соку, причемъ последнее идетъ въ темнотѣ быстрѣе чѣмъ на свѣту. Не говоря уже о томъ, что подобное допущеніе противорѣчило бы всему намъ до сихъ поръ извѣстному о накопленіи осмотически дѣйствующихъ веществъ въ клѣточномъ соку (въ темнотѣ происходитъ наоборотъ паденіе концентраціи сока, см. напр. работу Штанге или Копеланда—Stange, Copeland), мы видѣли на примѣрѣ мимозы (стр. 70—71), что ходъ паденія концентраціи сока срѣзовъ сочлененій въ водѣ нисколько не указываетъ на одновременное новообразованіе осмотически дѣйствующихъ веществъ въ послѣднемъ (иначе наблюдалось бы уменьшеніе  $\alpha$  съ теченіемъ времени); вмѣстѣ съ тѣмъ подобное новообразованіе въ клѣткахъ, не погруженныхъ въ воду, настолько ничтожно, что плазмолизъ не открываетъ измѣненія въ концентраціи клѣточного сока сочлененій даже черезъ большое число часовъ.

Не довольствуясь обоими описанными методами сравненія проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ сочлененій въ темнотѣ и на свѣту, я воспользовался

1) Къ сожалѣнію Гильбургъ совершенно не описываетъ своихъ опытовъ съ дѣйствіемъ свѣта на скорость паденія концентраціи клѣточного сока сочлененій, поэтому трудно сказать навѣрное, почему имъ полученъ невѣрный результатъ. Онъ ограничивается лишь однимъ небольшимъ замѣчаніемъ по этому по-

воду. Точность же опредѣленія концентраціи въ его опытахъ обыкновенно не превосходила 0,5‰; кромѣ того къ плазмолизирующему раствору прибавлялась анилиновая краска, что могло также вредно отражаться на клѣткахъ (Hilburg, p. 26, 27, 31 и др.).



съ той же цѣлью также методомъ опредѣленія изотоническихъ коэффициентовъ селитры, который позволяетъ одновременно съ наблюденіемъ измѣненія проницаемости перепонки судить также о величинѣ осмотического давленія клѣточного сока и его измѣненій въ зависимости отъ проницаемости.

#### 4. Примѣненіе метода изотоническихъ коэффициентовъ.

Въ главѣ II (стр. 39) было показано, какимъ образомъ на основаніи изотоническихъ коэффициентовъ, найденныхъ опытнымъ путемъ и вычисленныхъ по одной изъ формулъ, выражающихъ величину осмотического давленія, можно найти факторъ проницаемости плазматической перепонки для плазмолизирующаго вещества. При полученіи формулы III мы принимали проницаемость перепонки для сахара равной нулю. Примѣнительно къ клѣткамъ сочлененій это допущеніе очень близко къ истинѣ, потому что паденіе концентраціи клѣточного сока сочлененій, какъ упоминалось выше, происходитъ съ одинаковой скоростью какъ въ концентрированныхъ растворахъ сахара такъ и въ водѣ; эндосмозъ сахара въ клѣточный сокъ не можетъ быть, такимъ образомъ, подмѣченъ опытомъ. Величина фактора проницаемости мало измѣнится, какъ мы знаемъ, если допустить даже, что сахаръ сравнительно легко проникаетъ черезъ плазму клѣтокъ сочлененій (см. стр. 43). При вычисленіи фактора проницаемости изъ изотоническихъ коэффициентовъ мы будемъ пользоваться, такимъ образомъ, исключительно формулой III.

Чтобы опредѣлить измѣненіе фактора проницаемости плазматической перепонки и осмотического давленія клѣточного сока листовыхъ сочлененій, въ моихъ опытахъ устанавливались обыкновенно изотоническіе коэффициенты селитры для клѣтокъ обѣихъ половинокъ сочлененій у листьевъ, находившихся въ дневномъ положеніи, а затѣмъ эти коэффициенты опредѣлялись для тѣхъ-же самыхъ сочлененій послѣ перехода листа въ ночное положеніе вслѣдствіе искусственнаго затемнѣнія при наступленіи сумерокъ. Опытъ производился слѣдующимъ образомъ.

Изслѣдуемое сочлененіе разрѣзалось микротомомъ только до половины длины и полученные срѣзы отчасти помѣщались непосредственно въ селитру для опредѣленія концентраціи ея, изотоничной клѣточному соку сочлененія, большая же ихъ часть переносилась въ сахарные растворы, выставленные на разсѣянный солнечный свѣтъ, для опредѣленія изотонического коэффициента селитры. Другая половина сочлененія съ черешкомъ помѣщалась подъ маленькій опрокинутый препаратный цилиндрикъ съ мокрой фильтровальной бумагой на стѣнкахъ (слѣдовательно окружалась атмосферой, насыщенной водяными парами) и тотъ часъ же затемнялась (цилиндрикъ обертывался фольгой и покрывался чернымъ картоннымъ колпакомъ) или оставалась до наступленія сумерокъ на разсѣянномъ солнечномъ свѣту. Затемнѣніе какъ въ томъ, такъ и другомъ случаѣ продолжалось не менѣе 2-хъ часовъ, послѣ чего цилиндрикъ съ половиной сочлененія переносился въ темную комнату (опыты производились въ іюнѣ и послѣ перехода растенія въ ночное положеніе, въ рабочей комнатѣ не было достаточно темно), гдѣ при свѣтѣ свѣчи на разстояніи трехъ сажень сочлененіе окончательно разрѣзалось микротомомъ. Срѣзы отчасти поступали непо-

средственно въ селитру для опредѣленія ея концентраціи, изотоничной клѣточному соку сочлененія, большая же ихъ часть помѣщалась въ цилиндрики съ сахарными растворами, находившимися въ черной коробкѣ съ крышкой, для установленія изотоническихъ коэффициентовъ селитры. Микроскопированіе происходило при свѣтѣ свѣчи, защищенной съ боковъ ширмами, и концентрирующаго свѣтъ баллона (для устраненія дѣйствія свѣта во время приготовленія препарата) и продолжалось не больше 1 минуты, втеченіе которой могло совершиться лишь самое незначительное несущественное для результата опыта измѣненіе фигуры плазмолиза подѣ влияніемъ свѣта, такъ какъ всякое измѣненіе фигуры плазмолиза сопряжено съ фильтраціей воды черезъ плазматическую перепонку, что при незначительности производящей фильтраціи силы требуетъ по крайней мѣрѣ 5—10 минутъ. Что касается самаго процесса установленія концентраціи изотоническихъ растворовъ въ моихъ опытахъ, то онъ производился тѣмъ же способомъ, который былъ описанъ на стр. 67<sup>1)</sup>. Этимъ способомъ опредѣлялась средняя концентрація селитры или сахара обыкновенно для 6—12 срѣзовъ.

Найденная концентрація селитры не нуждается въ поправкѣ, такъ какъ экзосмозъ веществъ клѣточного сока во время плазмолиза въ предѣлахъ точности опыта покрывается, какъ неоднократно упоминалось въ главѣ II, эндосмозомъ селитры. Иначе обстоятъ дѣло при плазмолизѣ сахаромъ. Концентрація клѣточного сока сочлененій, какъ мы знаемъ, также быстро падаетъ въ сахарныхъ растворахъ, какъ и въ водѣ. Ввести нужную поправку на экзосмозъ веществъ клѣточного сока можно только очень приближенно. Гораздо проще было тотчасъ послѣ установленія изотонической концентраціи сахара переносить тѣ-же самые срѣзы изъ сахара въ растворы селитры и опредѣлять такимъ образомъ концентраціи сахара и селитры, изотоничныя клѣточному соку не сочлененій, а ихъ срѣзовъ послѣ нахожденія послѣднихъ, до момента установленія изотоничной концентраціи, въ плазмолизирующихъ сахарныхъ растворахъ. Микроскопированіе начиналось обыкновенно черезъ 20—25 минутъ въ случаѣ непосредственнаго плазмолиза селитрой клѣтокъ сочлененій *Phaseolus*, въ случаѣ плазмолиза клѣтокъ *Mimosa* черезъ 10—15 минутъ. Въ растворахъ сахара срѣзы сочлененій *Phaseolus* оставались 1 ч. 10 м. — 1 ч. 40 м., срѣзы *Mimosa* только 20—30 минутъ. Этого времени было вполне достаточно для установленія фигуръ плазмолиза, ограниченныхъ шаровыми поверхностями<sup>2)</sup>. Что же касается микроскопированія срѣзовъ, плазмолизовавшихся селитрой послѣ сахара, то оно начиналось непосредственно послѣ окончанія микроскопированія срѣзовъ, взятыхъ изъ сахарныхъ растворовъ, такъ какъ къ окончанію просмотра послѣдняго изъ этихъ срѣзовъ

1) Послѣдовательныя концентраціи растворовъ сахара отличались между собою на 0,70%; средняя концентрація сахара, изотоничаго клѣточному соку, устанавливалась, такимъ образомъ, съ точностью до 0,30%. Температура плазмолизирующихъ растворовъ какъ на свѣту, такъ и въ темнотѣ была постоянно равна 20° С.

2) Въ виду тонкости плазматического слоя и боль-

шого количества содержаемаго клѣтокъ у *Mimosa*, гдѣ, какъ извѣстно, находятся пузырьчатые скопленія дубильныхъ веществъ, для точнаго заключенія о степени плазмолиза необходима шарообразность фигуры плазмолиза. Плазмолизъ наблюдался только надъ клѣтками, содержащими скопленія дубильныхъ веществъ. Клѣтки, не содержащія ихъ, считались отмирающими.

первый срѣзь, положенный уже въ селитру, успѣвалъ принять окончательную фигуру плазмолиза (послѣднее показалъ предварительный опытъ). Клѣтки сочлененій у *Mimosa* не переносятъ долгаго плазмолиза, поэтому въ этомъ случаѣ приходится въ особенности быстро манипулировать.

Такъ какъ у *Mimosa* разрѣзаніе сочлененія производитъ раздраженіе нижней его половины (выражающееся въ сгибаніи), проходящее обыкновенно въ 20—30 минутъ, то микротомные срѣзы сочлененій *Mimosa* помѣщались передъ плазмолизомъ сахаромъ на 25 минутъ въ воду (на свѣту или въ темнотѣ смотря по опыту). Однако уже перекладываніе изъ воды въ сахарные растворы производитъ раздраженіе клѣтокъ срѣзовъ нижней половины, поэтому числа, полученные при плазмолитическомъ изслѣдованіи послѣднихъ, не могутъ считаться относящимися къ ихъ нормальному состоянію.

Привожу нѣсколько примѣровъ изъ сдѣланныхъ опытовъ.

Для удобства располагаю полученныя числа въ таблицахъ. Въ третьей рубричкѣ послѣднихъ,  $c$ , помѣщены концентраціи селитры въ процентахъ, изотоничныя клѣточному соку срѣзовъ, найденныя непосредственно послѣ разрѣзыванія и не исправленныя на измѣненіе объема клѣтки при плазмолизѣ<sup>1)</sup>; въ четвертой рубричкѣ  $c_1$  — концентраціи сахара и въ пятой  $c_2$  — концентраціи селитры въ ‰, изотоничныя клѣточному соку срѣзовъ послѣ нахожденія ихъ въ плазмолизирующемъ сахарномъ растворѣ. Въ шестой рубричкѣ  $k$  помѣщены изотоническіе коэффициенты селитры, вычисленные изъ  $c_1$  и  $c_2$  (изотонич. коэфф. сах. = 1,88) по формулѣ  $k = \frac{c_1 \cdot 101 \cdot 1,18}{c_2 \cdot 342}$ <sup>2)</sup>. Въ седьмой рубричкѣ,  $\mu$ , помѣщены факторы проницаемости плазматической перепонки, вычисленные по формулѣ III (стр. 39), въ которой теоретическій изотоническій коэфф. селитры принимался равнымъ 3,33 — 3,26, смотря по концентраціи селитры<sup>3)</sup>, и наконецъ въ восьмой рубричкѣ,  $P$ , даны осмотическія давленія въ атмосферахъ, вычисленныя по формулѣ Арреніуса (см. стр. 32), изъ чиселъ рубричкѣ  $c$  и  $\mu$ , принимая въ ней температуру  $T = 293^\circ$ , а  $C = \frac{c \cdot 10}{101}$ .

## Таблица XXII.

*Phaseolus multiflorus*. Первое опредѣленіе изотоническихъ коэффициентовъ селитры сдѣлано въ 10 ч. утра. Второе — въ 8 ч. вечера, хотя затемнѣніе началось уже въ 6 ч. вечера. Срѣзы находились въ сахарѣ: на свѣту 1 ч. 25 м., въ темнотѣ 1 ч. 10 м.

1) Исправленіе концентраціи на измѣненіе объема не имѣло значенія, такъ какъ важно было составить себѣ представленіе только объ относительной величинѣ осмотическаго давленія клѣтокъ. Предварительные опыты съ измѣреніемъ размѣровъ призмочекъ, вырѣзанныхъ изъ половинъ сочлененій, непосредственно послѣ вырѣзыванія и плазмолизированныхъ, показали, что поправка на измѣненіе объема для половинъ сочлененій, находящихся въ дневномъ положеніи, равна приблизительно 7—10% величины найденной кон-

центраціи, причемъ для нижней половины сочлененія она всегда больше, чѣмъ для верхней половины.

2) 101 — молекулярн. вѣсъ селитры; 342 — мол. в. сахара; 1,88 — изотоническій коэффициентъ сахара.

3) Вычисленная по Кольраушу (Kohlrausch) степень электролитической диссоціи селитры для 3‰ раствора  $\alpha = 0,77$ , для 4‰ раствора  $\alpha = 0,73$ ; слѣдовательно теоретическій изотоническій коэффициентъ селитры  $k = 1,88 [1 + (n - 1)\alpha] = 3,33 - 3,26$ .

	Половины сочлененія.	Конц. сел. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. $P$ въ атм.
Свѣтъ.	Верхняя . . .	5,1	12	3,5	1,90	0,424	12,1
	Нижняя . . .	5	12,2	3,3	2,05	0,381	12,6
Темнота.	Верхняя . . .	5,3	16,5	3,7	2,48	0,244	16,5
	Нижняя . . .	5,1	12,8	3,2	2,22	0,329	14,0

Таблица XXIII.

*Phaseolus multiflorus*. Первое опредѣленіе изот. коэфф. селитры сдѣлано въ 10 ч. утра. Второе — въ 8 ч. вечера (затемнѣніе началось уже въ 6 ч. в.). Срѣзы находились въ сахарѣ: на свѣту — 1 ч. 10 м., въ темнотѣ — 1 ч. 40 м.

	Половины сочлененія.	Конц. сел. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. $P$ въ атм.
Свѣтъ.	Верхняя . . .	5,2	11,2	3,6	1,73	0,472	11,3
	Нижняя . . .	5,2	12,9	4	1,79	0,453	11,7
Темнота.	Верхняя . . .	5,4	13,2	3,2	2,29	0,300	15,5
	Нижняя . . .	5,2	12,6	3,4	2,06	0,371	13,4

Таблица XXIV.

*Phaseolus multiflorus*. Первое опредѣленіе изот. коэфф. селитры сдѣлано въ 12 ч. дня. Сейчасъ же началось и затемнѣніе. Второе опредѣленіе сдѣлано въ 3 ч. дня. Срѣзы находились въ сахарѣ: на свѣту 1 ч. 15 м., въ темнотѣ 1 ч. 15 м.

	Половины сочлененія.	Конц. сел. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. $P$ въ атм.
Свѣтъ.	Верхняя . . .	5,2	10,6	3,2	1,84	0,438	12,3
	Нижняя . . .	5	10,8	3	2,00	0,389	12,6
Темнота.	Верхняя . . .	5,2	12,4	3,3	2,09	0,363	13,6
	Нижняя . . .	5,1	12,4	3,4	2,02	0,381	13,0

Таблица XXV.

*Phaseolus multiflorus*. Первое опредѣленіе сдѣлано въ 5 ч. дня, послѣ чего сейчасъ же началось затемнѣніе. Второе опредѣленіе сдѣлано въ 8 ч. вечера. Срѣзы находились въ сахарѣ: на свѣту 1 ч. 10 м., въ темнотѣ 1 ч. 10 м.

	Половины сочлененія.	Конц. сел. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. $P$ въ атм.
Свѣтъ.	Верхняя . . .	6,5	14,7	4,5	1,81	0,442	14,9
	Нижняя . . .	5,1	13,5	4	1,88	0,424	12,1
Темнота.	Верхняя . . .	6,9	17,2	4,6	2,07	0,362	18,1
	Нижняя . . .	5,6	16,6	4,4	2,09	0,356	14,8

Таблица XXVI.

*Mimosa pudica*. Первое опредѣленіе изотон. коэфф. сдѣлано въ 11 $\frac{1}{2}$  ч. утра, послѣ чего произведено сейчасъ же затемнѣніе, продолжавшееся 1 $\frac{1}{2}$  часа. Второе опредѣленіе сдѣлано, слѣдовательно, въ часъ дня. Срѣзы находились въ сахарѣ: на свѣту 25 минутъ, въ темнотѣ 25 минутъ (Предъ сахаромъ около  $\frac{1}{2}$  ч. въ водѣ).

	Половины сочлененія.	Конц. сел. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. $P$ въ атм.
Свѣтъ.	Верхняя . . .	8	13,2	3,4	2,15	0,349	21,0
	Нижняя . . .	8,3	10	3	1,85	0,445	18,8
Темнота.	Верхняя . . .	8,3	15,3	3,3	2,57	0,223	25,3
	Нижняя . . .	8,3	10	3	1,85	0,445	18,8

Таблица XXVII.

*Mimosa pudica*. Первое опредѣленіе сдѣлано въ 11 ч. утра. Второе опредѣленіе сдѣлано въ 10 $\frac{1}{2}$  ч. вечера, затемнѣніе же началось съ 9 часовъ (опыты производились въ июнѣ). Срѣзы находились въ сахарѣ: на свѣту 20 мин., въ темнотѣ 20 мин. (Предъ сахаромъ около  $\frac{1}{2}$  ч. въ водѣ).

	Половина сочлененія.	Конц. сел. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. $P$ въ атм.
Свѣтъ.	Верхняя . . .	7,8	11,2	3,2	1,94	0,406	18,8
	Нижняя . . .	8,2	9,7	3	1,79	0,451	18,3
Темнота.	Верхняя . . .	7,8	15,3	3,3	2,57	0,213	24,9
	Нижняя . . .	8,2	12,8	3,2	2,22	0,321	22,7

Мы видимъ изъ приведенныхъ таблицъ, что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ листовыхъ сочлененій для селитры уменьшается послѣ затемнѣнія и перехода растенія въ ночное положеніе очень значительно. Методъ изотоническихъ коэффиціентовъ въ согласіи съ методомъ паденія концентраціи клѣточного сока показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что уменьшеніе проницаемости плазматической перепонки при затемнѣніи происходитъ въ клѣткахъ обѣихъ половинъ сочлененія. Такое уменьшеніе проницаемости вызываетъ съ своей стороны сильное увеличеніе осмотического давленія въ клѣткахъ обѣихъ половинъ сочлененія. Это давленіе должно уже увеличиваться вслѣдствіе уменьшенія проницаемости для селитры, входящей въ составъ веществъ клѣточного сока, но нѣтъ никакого сомнѣнія въ томъ, что проницаемость уменьшается и для всѣхъ остальныхъ веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку сочлененій. Въ результатѣ создается такое

сильное увеличеніе осмотического давленія клѣточного сока послѣ затемнѣнія, какое напр. было найдено для верхнихъ половинокъ сочлененій *Phaseolus* и *Mimosa*: 4,3—6,1 атмосферы. Даже послѣ введенія поправки на сокращеніе объема клѣтокъ при плазмолизѣ, это увеличеніе давленія будетъ все-же равно 3,4—4,8 атм.

Не слѣдуетъ забывать, однако, что такое сильное увеличеніе осмотического давленія клѣточного сока не соотвѣтствуетъ измѣненію тургорнаго давленія клѣтокъ сочлененій, потому что въ послѣднее со знакомъ минусъ входитъ осмотическое давленіе раствора, насыщающаго клѣточную оболочку. Концентрація этого раствора, къ сожалѣнію, не можетъ быть опредѣлена. Приходится довольствоваться, слѣдовательно, лишь относительными величинами тургорнаго давленія сочлененій и его измѣненія.

Мы приходимъ, во всякомъ случаѣ, на основаніи результатовъ, полученныхъ при помощи трехъ различныхъ методовъ, къ заключенію, что *тургорное давленіе клѣтокъ обѣихъ половинокъ листовыхъ сочлененій увеличивается въ темнотѣ вслѣдствіе уменьшенія проницаемости плазматической перепонки* этихъ клѣтокъ (а слѣдовательно и ей пропорціональнаго фактора ея) для растворенныхъ веществъ.

Конечно это заключеніе относится только къ *Phaseolus* и *Mimosa*, но нельзя сомнѣваться въ томъ, что повышеніе тургорнаго давленія подъ вліяніемъ затемнѣнія въ сочлененіяхъ другихъ растений, совершающихъ варіаціонныя движенія листьевъ, вызывается также, какъ у изслѣдованныхъ, уменьшеніемъ проницаемости плазматической перепонки. По крайней мѣрѣ опыты Гильбурга (*Hilburg*, p. 35—36), показали, что у всѣхъ растений, совершающихъ никтитропныя движенія, наблюдается паденіе концентраціи клѣточного сока листовыхъ сочлененій, помѣщенныхъ въ воду. При этомъ чѣмъ сильнѣе движеніе листьевъ, тѣмъ быстрѣе совершается паденіе концентраціи сока. Листовые сочлененія *Phyllanthus*, совершающіе лишь очень слабыя движенія, показываютъ также и слабое паденіе концентраціи, въ противоположность сочлененіямъ листочковъ того-же растенія, совершающимъ вмѣстѣ съ тѣмъ и сильныя варіаціонныя движенія: чѣмъ больше проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ, тѣмъ больше и ея вліяніе на осмотическое давленіе сока послѣднихъ.

### С. Причина движенія листьевъ при измѣненіи освѣщенія.

Насъ интересовало до сихъ поръ только вліяніе силы освѣщенія на тургорное давленіе клѣтокъ сочлененій. Причину опусканія и поднятія листьевъ при перемѣнѣ освѣщенія, т. е. механизмъ сонныхъ движеній, мы оставляли пока въ сторонѣ. Послѣ того, какъ намъ удалось выяснитъ причину измѣненія тургорнаго давленія сочлененій при переходѣ растенія въ ночное положеніе, обратимся къ разсмотрѣнію механизма движенія.

Причина движенія листьевъ при измѣненіи тургорнаго давленія сочлененій, по мнѣнію Пфеффера (*Pfeffer*, III, p. 12, 171), заключается въ разной скорости этого измѣненія въ различныхъ половинахъ сочлененія. Въ случаѣ опусканія листьевъ послѣ затемнѣнія

(напр. у *Phaseolus*) въ верхней половинѣ сочлененія повышение тургорнаго давления идетъ быстрѣе, чѣмъ въ нижней, т. е. другими словами видимое осмотическое давление въ верхней половинѣ сочлененія (см. гл. I, стр. 17) черезъ нѣкоторое время послѣ начала затемнѣнія оказывается увеличеннымъ на бѣльшую величину, чѣмъ видимое осмотическое давление въ нижней половинѣ. Что при движеніи сочлененія играетъ роль только различіе въ скоростяхъ увеличенія тургорнаго давления въ разныхъ его половинахъ, видно, по аргументаціи Пфеффера, изъ того факта, что послѣ сгибанія или разгибанія вслѣдствіе перемѣны въ освѣщеніи происходитъ затѣмъ обратный процессъ, приводящій листъ въ положеніе болѣе или менѣе схожее съ исходнымъ (l. c., p. 11 — 12).

Швенденеръ въ выше цитированной работѣ высказываетъ однако сомнѣніе въ вѣрности такого предположенія Пфеффера. По мнѣнію названнаго ученаго, производившаго опыты съ мимозой, обратнаго опусканія поднявшихся послѣ затемнѣнія черешковъ не наблюдается даже при «болѣе продолжительномъ пребываніи» растенія въ темнотѣ (l. c. p. 244). Швенденеръ не рекомендуетъ однако продолжать опытъ долѣе 30 — 45 минутъ, иначе могутъ начаться различныя другія движенія какъ періодическія, такъ и автономныя, затемняющія результатъ опыта (p. 244). Причину движенія листа авторъ приписываетъ, какъ мы знаемъ, разнородному реагированію верхней и нижней половины сочлененій на перемѣну освѣщенія. Кромѣ того Швенденеръ отрицаетъ значеніе сближенія вторичныхъ черешковъ вечеромъ, какъ главную причину опусканія листьевъ мимозы въ сумерки: ему удавалось наблюдать послѣднее, когда вторичныя черешки не успѣвали еще сблизиться (p. 251).

Въ предыдущемъ отдѣлѣ главы было показано, что обѣ половины сочлененія реагируютъ на измѣненіе силы освѣщенія одинаково; такимъ образомъ причина движенія листьевъ не можетъ заключаться, какъ думалъ Швенденеръ, въ одновременномъ увеличеніи и уменьшеніи тургорнаго давления въ различныхъ половинахъ сочлененій. Однако наблюденія Пантанелли (*Pantanelli, I*) показали, что и разгибанія согнувшася послѣ затемнѣнія листа, т. е. различной скорости увеличенія тургорнаго давления въ верхней и нижней половинахъ сочлененія (по крайней мѣрѣ для *Robinia Pseudacacia* и *Porliera hygrometrica*) не наблюдается.

Въ противоположность Швенденеру и Пантанелли въ цитированной выше работѣ Видергсгеймъ наоборотъ приходитъ къ тому же заключенію относительно причины движенія листьевъ при затемнѣніи, какъ и Пфефферъ (*Wiedersheim, l. p. 267*). Разсматривая однако таблицы, приведенныя въ работѣ Видергсгейма (l. c. p. 260), видимъ, что у *Phaseolus* слабое разгибаніе листа въ темнотѣ наблюдалось только въ одномъ изъ двухъ приведенныхъ примѣровъ и то лишь черезъ  $4\frac{1}{2}$  часа послѣ начала затемнѣнія. Въ моихъ опытахъ съ *Desmodium girans* обратное поднятіе опустившагося въ темнотѣ листа также начиналось спустя много часовъ и по большей части только на слѣдующее утро. Пфефферъ показалъ при помощи метода Брюкке, что сумма тургорнаго давления верхней и нижней половины листового сочлененія остается, послѣ того какъ опусканіе листа совер-

шилось, постояннымъ, не смотря на то, что послѣдній по истеченіи нѣкотораго времени вновь поднимается (Pfeffer l. c. p. 95). Названный ученый вынужденъ принять на этомъ основаніи, что при разгибаніи листа въ верхней половинѣ сочлененія, послѣ достиженія извѣстнаго максимума давленія, происходитъ обратное уменьшеніе тургорнаго давленія, въ то время какъ въ нижней половинѣ сочлененія послѣднее продолжаетъ увеличиваться (l. c. p. 93 и 107). Другими словами послѣ паратонического движенія, вызваннаго затемнѣніемъ, начинаетъ совершаться процессъ, аналогичный происходящему при автономномъ движеніи или послѣдствіи. Такъ какъ подобный процессъ начинается иногда только черезъ 7 — 9 часовъ послѣ начала затемнѣнія (Pfeffer l. c. p. 43), то мнѣ кажется очевиднымъ, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло то съ настоящими автономными движеніями, варьирующими какъ извѣстно очень значительно у различныхъ индивидуумовъ (l. c. p. 156), то съ послѣдствіями, смотря потому, въ какое время дня производится опытъ.

Единственнымъ вѣроятнымъ объясненіемъ движенія листьевъ у *Phaseolus* и др. подобныхъ растений съ одинаковыми паратоническими и дневными движеніями можно считать, такимъ образомъ, не разную скорость увеличенія тургорнаго давленія, какъ принималъ Пфефферъ, а разную степень увеличенія осмотического давленія клеточнаго сока въ верхней и нижней половинахъ сочлененій и именно осмотического давленія, устанавливающагося послѣ окончанія всасыванія воды<sup>1)</sup>.

Болѣе сложный случай варіаціоннаго никтитропнаго движенія представляетъ, какъ извѣстно, *Mimosa pudica*. Главные черешки листьевъ этого растенія реагируютъ иначе на искусственное затемнѣніе, чѣмъ на естественную темноту сумерокъ. Фактъ поднятія листьевъ мимозы при искусственномъ затемнѣніи и опусканія ихъ вечеромъ объясняется по мнѣнію Пфеффера тѣмъ, что вторичные черешки, сближаясь между собою вечеромъ, увеличиваютъ механической моментъ тяжести листьевъ, заставляя послѣдніе, не смотря на уменьшеніе освѣщенія, понижаться; напротивъ того при кратковременномъ искусственномъ затемнѣніи вторичные черешки не успѣваютъ сложиться и главные черешки поднимаются. Для провѣрки своего мнѣнія названный ученый укрѣплялъ вторичные черешки въ неподвижномъ положеніи перпендикулярно къ главному черешку. Хотя первые дни не смотря на это и происходило опусканіе листьевъ, однако черезъ 12 — 14 дней вечернее опусканіе листьевъ все-же прекращалось. Послѣ освобожденія вторичныхъ черешковъ листья вновь начинали опускаться, при чемъ ихъ опусканіе съ каждымъ днемъ становилось значительное пока амплитуда его наконецъ не возстановлялась полностью (Pfeffer, III p. 73 — 82 и 171).

1) Пфефферъ и самъ допускаетъ, что тургорное давленіе нижней и верхней половинъ листового сочлененія могутъ измѣняться неодинаково при затемнѣніи, а листъ въ концѣ концовъ можетъ послѣ установленія равновѣсія занять положеніе, отвѣчающее извѣстной степени освѣщенія (Pfeffer, l. c. p. 12). Болѣе значительное увеличеніе тургорнаго давленія въ нижней половинѣ сочлененія *Mimosa* при затемнѣніи Пфефферъ повидимому даже принимаетъ (Pfeffer, l. c. 74).



Пфефферъ не совсѣмъ точно принимаетъ, что только измѣненіе момента тяжести листа заставляетъ его вечеромъ опускаться (l. с. р. 171). Это видно уже изъ только что упомянутаго опыта названнаго ученаго, гдѣ какъ ослабленіе такъ и усиленіе вечерняго опусканія совершается постепенно. Въ томъ-же легко убѣдиться также, насильственно сближая вторичные черешки, послѣ того какъ вслѣдствіе искусственнаго затемнѣнія главные черешки поднялись. Можно напр., осторожно, чтобы не вызвать раздраженія, навести на вторичные черешки петлю изъ тонкой нитки и, затянувъ послѣднюю, заставить ихъ принять ночное положеніе. Мы увидимъ при этомъ, что главный черешокъ листа, поднявшійся въ темнотѣ на  $20 - 30^\circ$ , не смотря на то, что къ тяжести листа присоединился еще вѣсъ виточной петли, опустится лишь на какіе-нибудь  $2 - 10^\circ$ . Въ особенности незначительно, почти едва замѣтно такое опусканіе у молодыхъ листьевъ. Такимъ образомъ, кромѣ измѣненія момента тяжести листьевъ, въ вечернемъ опусканіи послѣднихъ участвуетъ еще какой-то другой факторъ. Не трудно видѣть, что этимъ факторомъ является послѣдѣйствіе. Измѣненіе момента тяжести является лишь побудительной причиной для развитія послѣдняго. Мнѣ кажется поэтому вполне понятнымъ, почему, какъ свидѣтельствуетъ Швенденеръ (l. с. р. 251), можно видѣть иногда вечернее опусканіе главныхъ черешковъ еще до сближенія вторичныхъ черешковъ. Къ паратонически вызванному сумерками увеличенію тургорнаго давления въ верхней половинѣ сочлененія присоединяется увеличеніе этого давления вслѣдствіе послѣдѣйствія, тогда какъ одновременное увеличеніе тургорнаго давления въ нижней половинѣ сочлененія въ значительной степени ослабляется уменьшеніемъ его подъ вліяніемъ послѣдѣйствія.

Дѣйствительно разница между дѣйствіемъ искусственнаго затемнѣнія и вечернихъ сумерокъ на движеніе листьевъ мимозы, у которыхъ одна изъ половинъ сочлененія удалена, прямо бросается въ глаза. Если напр., искусственное затемнѣніе вызываетъ пониженіе главнаго черешка листа, у котораго нижняя половина сочлененія удалена, на  $6 - 8^\circ$ , то тотъ-же черешокъ при наступленіи полныхъ сумерокъ (лѣтомъ часовъ въ  $10 - 11$  ч. вечера), опускается по крайней мѣрѣ на  $20^\circ - 40^\circ$ . Напротивъ того черешокъ листа, у котораго верхняя половина сочлененія удалена, при искусственномъ затемнѣніи поднимается на большій уголъ, чѣмъ вечеромъ (напр. въ первомъ случаѣ на  $30^\circ$ , во второмъ только на  $15^\circ$ ). Обратимся теперь къ объясненію паратоническаго дѣйствія затемнѣнія на листовыя сочлененія мимозы.

Уже изъ таблицъ, приводимыхъ въ работѣ Видерсгейма (l. с. р. 265—266) видно, что затемнѣніе вызываетъ у мимозы, въ противоположность фасоли, движеніе листьевъ, состоящее въ первоначальномъ поднятіи черешковъ и въ послѣдующемъ, довольно скоро (черезъ  $1 - 1\frac{1}{2}$  часа) наступающемъ опусканіи послѣднихъ. Однако опыты затемнѣнія производились названнымъ авторомъ въ  $1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$  часа дня, когда начинается уже нормальное опусканіе листьевъ, достигающее поздно вечеромъ своего максимума и производимое послѣдѣйствіемъ. Хотя вторичные черешки въ опытахъ Видерсгейма и были укрѣплены

неподвижно (I. c. p. 265), однако изъ описанія послѣднихъ къ сожалѣнiю не видно, за сколько дней передъ наблюденiемъ производилось укрѣпленiе и было ли устранено послѣдѣйствiе. Можно было думать поэтому, что наступающее въ темнотѣ вслѣдъ за поднятiемъ черешковъ опусканiе ихъ происходитъ также, какъ у *Phaseolus*, вслѣдствiе продолжающагося и въ темнотѣ послѣдѣйствiя.

Однако мои опыты показали, что вслѣдъ за поднятiемъ листьевъ мимозы, съ укрѣпленными вторичными черешками, послѣ затемнѣнiя, въ какое бы время дня послѣднее не происходило, всегда спустя 1 — 1½ ч. послѣ начала затемнѣнiя наблюдается обратное ихъ опусканiе. При этомъ при достаточно долгомъ пребыванiи растенiя въ темнотѣ (напр. около 3-хъ ч.), главные черешки иногда настолько сильно опускаются, что уголь составляемый ими и стеблемъ (обращенный къ землѣ), дѣлается меньше, чѣмъ до помѣщенiя растенiя въ темноту.

Чтобы выяснитъ причину такого исключительнаго реагированiя главныхъ черешковъ мимозы на затемнѣнiе, обратимся къ опытамъ, произведеннымъ мною надъ листьями этого растенiя, у которыхъ удалялись нижнiя или верхнiя половины сочлененiй. Считаю необходимымъ привести здѣсь лишь два наиболѣе типичные примѣра изъ большого числа сдѣланныхъ опытовъ. Для сравненiя привожу рядомъ также одинъ изъ опытовъ съ листьями, сочлененiя которыхъ не подвергались операции. Измѣрялся уголь (открытый къ землѣ) между главнымъ черешкомъ листа и стеблемъ, на которомъ укрѣплялся циферблатъ, причемъ центръ послѣдняго приходился на срединѣ сочлененiя (нуль циферблата — внизу). Вторичные черешки во всѣхъ опытахъ укрѣплялись въ неподвижномъ положенiи, перпендикулярно главному. Половины сочлененiй удалялись наканунѣ опытовъ. Всѣ опыты производились въ июлѣ, отъ 8 ч. утра до 2 ч. дня.

### I опытъ.

Верхняя половина сочлененiя удалена.

24/VII 8 ч. у. — 117°

Растенiе поставлено въ темноту.

8 ч. 5 м. — 119°

» 10 » — 121

» 15 » — 123

» 20 » — 126

» 30 » — 131

» 40 » — 135

» 50 » — 137

9 ч. — » — 138

### II опытъ.

Нижняя половина сочлененiя удалена.

24/VII 8 ч. у. — 48°

Растенiе поставлено въ темноту.

8 ч. 5 м. — 48°

» 10 » — 48

» 15 » — 48

» 50 » — 47

9 ч. 30 » — 46

10 » — » — 44

10 » 40 » — 42

11 » 20 » — 41

### III опытъ.

Не оперированный листъ.

23/VI 8 ч. у. — 109°

Растенiе поставлено въ темноту.

8 ч. 5 м. — 110°

» 10 » — 112

» 15 » — 114

» 20 » — 116

» 30 » — 120

» 40 » — 125

» 50 » — 135

9 ч. — » — 139

I ОПЫТЪ.	II ОПЫТЪ.	III ОПЫТЪ.
Верхняя половина сочлененія удалена.	Нижняя половина сочлененія удалена.	Не оперированный листъ.
10 ч. — м. — 142°	12 ч. — м. — 40°	9 ч. 10 м. — 141°
12 » дня — 142	Растеніе выставлено на свѣтъ.	9 » 20 » — 140
12 » 50 м. — 142	12 ч. 10 м. — 45°	9 » 30 » — 135
Растеніе выставлено на свѣтъ.	12 » 20 » — 48	10 » — » — 123
12 ч. 55 м. — 138°	1 » 15 » — 48	11 » — » — 115
1 » 15 » — 125		11 » 20 » — 110
2 » — » — 116		11 » 40 » — 109
		12 » 15 » — 105
		12 » 30 » — 104

Изъ приведенныхъ опытовъ видно, что листья съ удаленной верхней половиной сочлененія послѣ затемнѣнія быстро поднимаются, достигаютъ почти своей максимальной высоты уже въ какой-нибудь часъ, чтобы затѣмъ оставаться почти безъ движенія. Листья, у которыхъ нижняя половина сочлененія была удалена, опускаются напротивъ того очень медленно, достигая наименьшей своей высоты не раньше какъ черезъ 3 часа. Въ тотъ промежутокъ времени въ который листья съ удаленной верхней половиной достигаютъ наибольшей высоты, листья съ удаленной нижней половиной успѣваютъ опуститься только едва на половину того угла, на который они въ состояніи опуститься. Изъ приведенныхъ опытовъ ясно, такимъ образомъ, что тургорное давленіе нижнихъ половинокъ сочлененій увеличивается послѣ затемнѣнія почти въ 3 раза быстрѣе, чѣмъ тургорное давленіе верхнихъ половинокъ. Движеніе листа съ не оперированными сочлененіями дѣлается, слѣдовательно, вполне понятнымъ. При затемнѣніи такого листа, тургорное давленіе нижней половины сочлененія начинаетъ быстро увеличиваться, заставляя листъ также быстро подниматься. Однако поднявшійся листъ не остается въ такомъ положеніи, какъ въ опытѣ, въ которомъ верхнія половины были удалены: растущее тургорное давленіе верхней половины постепенно уравниваетъ давленіе нижней половины и листъ возвращается въ первоначальное положеніе. При этомъ не происходитъ никакого обратнаго уменьшенія тургорнаго давленія нижней половины. Увеличеніе же тургорнаго давленія верхнихъ половинокъ нисколько не меньше, а въ некоторыхъ случаяхъ даже больше увеличенія тургорнаго давленія нижнихъ половинокъ сочлененій.

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ заключенію, что *движеніе листьевъ Mimosa pudica при затемнѣніи обуславливается, въ противоположность другимъ растеніямъ, неравною скоростью увеличенія тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ листовыхъ сочлененій.*

Въ чемъ же можетъ заключаться причина такого особеннаго положенія *Mimosa pudica* среди другихъ растеній, совершающихъ варіаціонныя никтитропныя движенія?

Что бы отвѣтить на этотъ вопросъ, обратимся сначала къ выясненію ближайшихъ причинъ различнаго измѣненія тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ сочлененія *Phaseolus* при перемѣнѣ освѣщенія; это различіе, по мнѣнію Пфеффера, заключается въ «специфическихъ, исторически данныхъ особенностяхъ противоположныхъ половинъ сочлененій» (Pfeffer, III, p. 13), особенностяхъ во всякомъ случаѣ не анатомическаго характера (1. с. p. 12).

Такъ какъ измѣненіе тургорнаго давленія листовыхъ сочлененій при перемѣнѣ освѣщенія вызывается, какъ мы видѣли, измѣненіемъ проницаемости плазматической перепонки ихъ клѣтокъ, то естественно было прежде всего искать причину различнаго реагирования верхней и нижней половины сочлененія въ какомъ бы то ни было различіи плазматическихъ перепонокъ ихъ клѣтокъ.

Дѣйствительно, просматривая таблицы, приведенныя на стр. 69, 89, 90 и 95, замѣчаемъ прежде всего, что во всѣхъ опытахъ проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ нижнихъ половинъ листовыхъ сочлененій *Phaseolus* была найдена меньшею чѣмъ проницаемость клѣтокъ верхнихъ половинъ. Для удобства сравненія полученныхъ чиселъ, я позволю себѣ привести ихъ вновь; напоминаю, что величины  $\alpha$  и  $\mu$ , помѣщенныя ниже, пропорціональны проницаемости плазматической перепонки для растворенныхъ веществъ.

*Величины  $\alpha$ .*

	I оп.	II оп.	III оп.	IV оп.	V оп.	VI оп.
Верхнія половины:	0,0044	0,0035	0,0029	0,0064	0,0046	0,0044
Нижнія половины:	0,0023	0,0014	0,0017	0,0038	0,0039	0,0033

*Величины  $\mu$ .*

	I оп.	II оп.	III оп.	IV оп.
Верхнія половины:	0,418	0,438	0,442	0,341
Нижнія половины:	0,243	0,363	0,362	0,213

Мною было произведено изслѣдованіе болѣе пятидесяти сочлененій листочковъ *Phaseolus multiflorus* и *vulgaris* и вездѣ проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ верхней половины была найдена большею проницаемости клѣтокъ нижней половины сочлененія; о какой-либо случайности полученныхъ результатовъ, не можетъ быть, слѣдовательно, и рѣчи.

Если найденное отношеніе между проницаемостями плазматической перепонки верхней и нижней половинъ сочлененій является, такимъ образомъ, специфическимъ ихъ отличіемъ, то вполне понятнымъ становится также и ихъ различное реагированіе на измѣненіе освѣщенія. Дѣйствительно, чѣмъ больше проницаемость данной перепонки для ве-

ществовъ растворенныхъ, тѣмъ сильнѣе отражается ея измѣненіе на осмотическомъ давленіи. Слѣдовательно при относительно одинаковомъ уменьшеніи проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ той и другой половины сочлененія при затемнѣніи, осмотическое давленіе клѣточного сока, а вмѣстѣ съ тѣмъ и тургорное давленіе, должно увеличиваться сильнѣе въ верхней половинѣ. Для большей ясности только что сказаннаго, представимъ себѣ разбираемый процессъ въ математической формѣ.

Пусть  $P_o$  есть разность осмотическихъ давленій клѣточного сока и раствора, насыщающаго клѣточную оболочку верхней половины сочлененія, въ предположеніи непроницаемости плазматической перепонки для растворенныхъ веществъ,  $P_n$  — подобное же давленіе для нижней половины сочлененія,  $\mu_o$  и  $\mu_n$  — факторы проницаемости плазматическихъ перепонокъ клѣтокъ верхней и нижней половинъ. Взаимно уравнивающимися тургорныя давленія верхней и нижней половины сочлененія представляются въ видѣ:  $P_o (1 - \mu_o)$  и  $P_n (1 - \mu_n)$ , при чемъ  $P_o (1 - \mu_o) = P_n (1 - \mu_n)$ , а такъ какъ  $\mu_o > \mu_n$ , то  $P_o > P_n$ <sup>1)</sup>. При увеличеніи проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ той и другой половины въ  $n$  разъ, гдѣ  $n \geq 1$ , тургорныя давленія послѣднихъ превратятся въ  $P_o (1 - n\mu_o)$  и  $P_n (1 - n\mu_n)$ . Такимъ образомъ тургорное давленіе верхней половины измѣнится на:  $P_o \mu_o (1 - n)$ , а нижней — на  $P_n \mu_n (1 - n)$ . Но  $P_o > P_n$ ,  $\mu_o > \mu_n$ , слѣдовательно первое выраженіе больше послѣдняго, а тургорное давленіе верхней половины сочлененія должно увеличиться или уменьшиться на большую величину, чѣмъ тургорное давленіе нижнихъ половинъ при относительно одинаковомъ измѣненіи проницаемостей плазматической перепонки. Просматривая таблицы на стр. 95, видимъ, что проницаемость плазматической перепонки въ клѣткахъ верхнихъ половинъ уменьшается послѣ затемнѣнія даже въ болѣе значительной степени, чѣмъ проницаемость той же перепонки въ клѣткахъ нижнихъ половинъ. Такъ напр., проницаемость въ верхнихъ половинахъ уменьшалась въ 1,7; 1,5; 1,2 и 1,2 раза, проницаемость же въ нижнихъ половинахъ уменьшалась послѣдовательно только въ 1,1; 1,2; 1,0 и 1,1 раза. Такимъ образомъ величина  $n$  оказалась для нижнихъ половинъ большею, а величина  $(1 - n)$  меньшею, чѣмъ для верхнихъ половинъ.

Это неравное измѣненіе проницаемости плазматической перепонки послѣ затемнѣнія вызывается, какъ мы увидимъ въ отдѣлѣ этой работы, посвященномъ вліянію механическихъ воздѣйствій на тургорное давленіе, послѣдствіемъ, увеличивающимъ проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ нижней половины и уменьшающимъ проницаемость перепонки верхней половины. Во всякомъ случаѣ такое различіе въ величинѣ измѣненія плазматической перепонки приводитъ къ еще большому различію тургорныхъ давленій послѣ затемнѣнія въ противоположныхъ половинахъ сочлененія *Phaseolus*.

Мы приходимъ, слѣдовательно, къ заключенію, что причина неравнаго измѣненія тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ сочлененія *Phaseolus*, а также,

1) Последнее дѣйствительно всегда имѣетъ мѣсто, | чанія къ стр. 94.  
какъ это видно изъ таблицъ на стр. 95 и примѣ-

безъ сомнѣнія, и другихъ растений, схожихъ съ нимъ движеніями, *заклочается въ большей проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ верхней половины.*

Обратимся теперь къ объясненію причины исключительнаго положенія среди другихъ растений, которое занимаетъ *Mimosa pudica* благодаря движенію ея листьевъ послѣ затемнѣнія.

Просматривая таблицы XX и XXI (стр. 90), видимъ что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ верхней половины листовыхъ сочленій мимозы больше, чѣмъ проницаемость перепонки клѣтокъ нижней половины<sup>1)</sup>; поэтому послѣ установленія осмотическаго равновѣсія въ темнотѣ, тургорное давленіе клѣтокъ верхней половины должно оказаться увеличеннымъ на большую величину, чѣмъ тургорное давленіе клѣтокъ нижнихъ половинъ, т. е. листъ долженъ занять положеніе болѣе низкое, чѣмъ то, которое онъ занималъ до помѣщенія растенія въ темноту. Это, какъ мы знаемъ, дѣйствительно происходитъ, но не всегда (стр. 101). Послѣднее будетъ понятно, если мы примемъ во вниманіе относительные размѣры верхнихъ и нижнихъ половинъ сочлененій мимозы. На поперечномъ разрѣзѣ величина первыхъ всегда меньше величины послѣднихъ. Такъ напр. по Дютроше (Dutrochet, p. 52) отношеніе между обѣими величинами равно 3:5, по Пфефферу и Мильярде — 6:7 (Pfeffer, I, p. 10, Millardet, p. 209); Швенденеръ (Schwendener, I, p. 230), хотя и отрицаетъ разницу въ размѣрахъ половинъ сочлененій, однако, измѣряя поверхность поперечнаго разрѣза обѣихъ половинъ по рисунку, прилагаемому имъ къ своей работѣ (см. табл. I, рис. 8), мы найдемъ это отношеніе равнымъ 4:5. Такимъ образомъ хотя увеличеніе тургорнаго давленія въ отдѣльныхъ клѣткахъ верхнихъ половинъ сочлененій и больше, но сумма увеличенія его по всему поперечному сѣченію можетъ оказаться и меньшею суммы увеличенія его по всему поперечному сѣченію нижнихъ половинъ. Если напр. тургорное давленіе клѣтокъ верхней половины сочлененія увеличится въ среднемъ на 4 атм., а тургорное давленіе нижней половины только на 3 атм., то, въ случаѣ отношенія поперечныхъ сѣченій той и другой половины 3:5, сила, съ которою вся верхняя половина давитъ на нижнюю, увеличится лишь на  $3.4x$  килограммъ<sup>2)</sup>, тогда какъ сила давленія нижней половины на верхнюю увеличится на  $5.3x$  килограммъ, гдѣ  $x$  — нѣкоторое число (кв. сантиметр.), зависящее отъ абсолютной величины поперечнаго сѣченія сочлененія.

Такъ какъ въ верхнихъ половинахъ сочлененія *Mimosa* тургорное давленіе клѣтокъ увеличивается послѣ затемнѣнія на большую величину, чѣмъ въ нижнихъ, то на первый взглядъ кажется непонятнымъ, почему, уголь на который опускается листъ съ удаленной нижней половиной сочлененія значительно меньше угла, на который подни-

1) Въ данномъ случаѣ мы можемъ воспользоваться только результатами, полученными при помощи метода паденія концентраціи клѣточного сока, потому что при плазмолитическомъ методѣ нельзя избѣгнуть, какъ упоминалось раньше, раздраженія клѣтокъ нижней

половины сочлененія; поэтому и проницаемость плазматической перепонки, находящаяся при его помощи не относится къ нормальному состоянію клѣтокъ.

2) Давленіе атмосферы = 1 килограмму на 1 кв. сантим.

мается листъ съ удаленной верхней половиной (см. оп. I и II на стр. 101). Мы видѣли однако раньше, что клѣточные стѣнки верхней половины сочлененія гораздо менѣе растяжимы въ сравненіи съ клѣточными стѣнками нижней половины (см. стр. 68), поэтому указанное явленіе представляется вполнѣ понятнымъ.

До сихъ поръ мы говорили объ осмотическомъ давленіи листовыхъ сочлененій мимозы, устанавливаемомъ послѣ наступленія осмотического равновѣсія; обратимся теперь къ выясненію причины различной скорости увеличенія тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ.

Прежде всего необходимо имѣть въ виду, что величина видимаго осмотического давленія, какъ на это было уже указано въ гл. I (стр. 17), зависитъ не только отъ концентраціи клѣточного сока, температуры и т. п., но и отъ величины проницаемости для воды тканей, проводящихъ послѣднюю отъ ксилемы къ мѣсту всасыванія. Такъ какъ главная масса клѣтокъ сочлененій получаетъ необходимую для повышенія осмотического давленія воду при посредствѣ нѣсколькихъ слоевъ клѣтокъ паренхимы, окружающей сосудистый пучекъ и содержащей въ своихъ интерпеллюлярахъ воздухъ, то скорость увеличенія давленія должна зависѣть отъ проницаемости, а слѣдовательно и толщины клѣточныхъ стѣнокъ этой паренхимы. Какъ извѣстно, *клеточныя стѣнки паренхимы въ верхней половинѣ сочлененія мимозы, въ противоположность другимъ растеніямъ, въ 3—5 разъ толще клеточныхъ стѣнокъ паренхимы нижней половины* (Brücke, Millardet, p. 209). Вполнѣ понятнымъ является, слѣдовательно, почему всасываніе воды верхними половинами сочлененій изъ ксилемы идетъ медленнѣе всасыванія нижними ихъ половинами.

Въ согласіи съ только что приведеннымъ объясненіемъ различія скорости увеличенія тургорнаго давленія въ верхнихъ и нижнихъ половинахъ сочлененій мимоза послѣ затемненія находятся также результаты опытовъ, произведенныхъ мною съ дѣйствіемъ освѣщенія на растеніе, находившееся извѣстное время въ темнотѣ.

Опыты показываютъ, что послѣ обратнаго помѣщенія растенія изъ темноты на свѣтъ только тогда наблюдается опусканіе черешковъ, если въ темнотѣ послѣдніе еще не опустились до высоты, на которой они находились передъ затемненіемъ, причемъ опусканіе черешковъ идетъ только до этой высоты; если же напротивъ того черешки опустились уже въ темнотѣ до высоты, на которой находились передъ затемненіемъ, или еще ниже, то послѣ выставленія на свѣтъ въ первомъ случаѣ не наблюдается никакого движенія листьевъ, во второмъ же происходитъ поднятіе послѣднихъ. Однако это поднятіе идетъ только до той высоты, на которой черешки находились до затемненія. Для иллюстраціи только что сказаннаго, приведу три наиболѣе типичные опыта, показывающіе всѣ три случая движенія главнаго черешка листьевъ мимозы при выставленія растенія на свѣтъ.

Вторичные черешки были за нѣсколько дней до опытовъ укрѣплены перпендикулярно главному. Температура въ теченіе опытовъ измѣнялась самое большее на 2°.

I ОПЫТЪ.	II ОПЫТЪ.	III ОПЫТЪ.
23/VII 8 ч. у. — 110°	21/VII 9 ч. 27 м. у. — 91°	20/VII 8 ч. — 102°
Растеніе поставлено въ темноту.	Растеніе поставлено въ темноту.	Растеніе поставлено въ неполную темноту.
8 ч. 5 м. — 111°	9 ч. 33 м. — 92°	8 ч. 5 м. — 104°
8 » 15 » — 115	9 » 38 » — 94	8 » 10 » — 107
9 » 5 » — 145	10 » 4 » — 112	8 » 15 » — 110
9 » 10 » — 146	10 » 14 » — 117	8 » 20 » — 112
9 » 30 » — 146	10 » 30 » — 115	8 » 25 » — 110
10 » 30 » — 124	11 » 6 » — 110	8 » 35 » — 107
11 » 15 » — 112	Растеніе выставлено на свѣтъ.	8 » 40 » — 104
11 » 30 » — 109	11 ч. 10 м. — 109°	Растеніе поставлено въ полную темноту.
12 » — » — 107	11 » 15 » — 102	8 ч. 45 м. — 107°
12 » 30 » — 105	11 » 20 » — 99	8 » 55 » — 110
Растеніе перенесено на свѣтъ.	11 » 25 » — 92	9 » 5 » — 117
12 ч. 35 м. — 106°	11 » 30 » — 92	9 » 10 » — 113
12 » 40 » — 107	12 » — » — 92	9 » 15 » — 107
12 » 50 » — 110		9 » 20 » — 104
		9 » 30 » — 103
		9 » 40 » — 102
		Растеніе выставлено на свѣтъ.
		9 ч. 45 м. — 102°
		10 » — » — 102

Если подобныя опыты производятся съ листьями, у которыхъ верхняя или нижняя половина сочлененія удалена, то послѣ помѣщенія растенія на свѣтъ происходитъ также возвращеніе листьевъ въ то положеніе, которое они занимали до затемненія; при этомъ потеря всего избытка тургорнаго давленія какъ нижними такъ и верхними половинами происходитъ въ меньшій промежутокъ времени, чѣмъ приобрѣтеніе его послѣ затемненія. Въ особенности бросается въ глаза разница во времени, нужномъ для поднятія и паденія тургорнаго давленія въ верхнихъ половинахъ сочлененія. Въ то время какъ поднятіе этого давленія требуетъ, какъ мы знаемъ, 3 — 3½ часа, паденіе его послѣ выставленія растенія на свѣтъ происходитъ въ какія-нибудь 15 — 20 минутъ (см. опыты на стр. 102).

Описанныя явленія объясняются слѣдующимъ образомъ.

При повышеніи тургорнаго давленія вода всасывается клѣтками сочлененія изъ ксилемы сосудистаго пучка и видимое осмотическое давленіе сочлененія зависитъ отъ проницаемости, а слѣдовательно и отъ толщины клѣточныхъ стѣнокъ; при пониженіи тургорнаго давленія, послѣ выставленія растенія на свѣтъ, напротивъ того, освобождая-



щаяся вода заполняетъ межклетники паренхимы, какъ это происходитъ при пониженіи давленія вслѣдствіе раздраженія (Pfeffer, I, p. 32), и видимое осмотическое давленіе быстро переходитъ въ истинное, не зависящее отъ толщины клеточныхъ стѣнокъ.

Пониженіе тургорнаго давленія нижнихъ половинъ до прежняго уровня послѣ выставленія на свѣтъ требуетъ, какъ видно изъ оп. I и II на стр. 102, даже большаго времени, чѣмъ пониженіе тургорнаго давленія верхнихъ половинъ, потому что количество воды, теряемое первыми, въ нѣсколько разъ больше количества воды, теряемаго послѣдними (измѣненіе угла въ опытѣ I было  $25^\circ$ , тогда какъ въ опытѣ II только  $8^\circ$ ).

На основаніи всего сказаннаго мы приходимъ къ заключенію, что *причина неравной скорости увеличенія тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ листового сочлененія Mimosa pudica при затемненіи заключается въ меньшей проницаемости для воды паренхимы верхней половины, что въ свою очередь обуславливается сравнительно гораздо болѣею толщиною ея клеточныхъ стѣнокъ.*

Какъ извѣстно, вторичные черешки и листочки Mimosa послѣ искусственнаго затемненія, въ противоположность главному черешку, совершаютъ движеніе въ ту же сторону, какъ и вечеромъ: въ обоихъ случаяхъ вторичные черешки сближаются между собою, а листочки складываются своими верхними поверхностями. вмѣстѣ съ тѣмъ сближившіеся въ темнотѣ вторичные черешки и сложившіеся листочки не расходятся болѣе даже при продолжительномъ пребываніи растенія въ темнотѣ и только послѣдѣйствіе или сильное охлажденіе (Iost, II) вызываетъ ихъ обратное движеніе.

Принимая во вниманіе причину движенія листьевъ Phaseolus и главныхъ черешковъ Mimosa послѣ затемненія, нужно было предполагать, что проницаемость плазматической перепонки клетокъ въ боковыхъ половинахъ сочлененія вторичныхъ черешковъ различна. Въ половинѣ, обращенной наружу, т. е. въ сторону противоположную средней линіи листа, служащей продолженіемъ главнаго черешка, нужно было ждать болѣе проницаемости плазматической перепонки. Съ другой стороны вторичные черешки не совершаютъ обратнаго движенія въ темнотѣ послѣ достиженія максимальнаго угла отклоненія; поэтому нужно предполагать, что клеточныя оболочки обѣихъ боковыхъ половинъ сочлененія имѣютъ одинаковую толщину.

Высказанныя предположенія дѣйствительно вполне подтвердились изслѣдованіемъ. Клетки съ толстыми оболочками въ сочлененіяхъ вторичныхъ черешковъ располагаются въ верхней ихъ части, тогда какъ клетки боковыхъ половинъ, какъ съ наружной такъ и съ внутренней стороны сочлененія, всѣ тонкостѣнны.

При помощи метода паденія концентраціи клеточнаго сока, нетрудно показать, что и второе предположеніе совершенно справедливо. Для иллюстраціи привожу здѣсь два наиболѣе типичные опыта, показывающіе, что проницаемость плазматической перепонки клетокъ въ наружной половинѣ сочлененія вторичныхъ черешковъ значительно больше проницаемости клетокъ внутренней ихъ половины (напоминаю, что величины  $\alpha$ , данныя въ таблицѣ пропорціональны проницаемости).

Опыты были поставлены также, какъ въ случаѣ изслѣдованія сочлененій первичныхъ черешковъ (см. стр. 87). Рубрики таблицы остаются подъ тѣми же литерами <sup>1)</sup>. Для опытовъ брались крайніе вторичные черешки листьевъ *Mimosa pudica*, съ 4 черешками: наибольшій путь при переходѣ растенія въ ночное положеніе, совершаютъ крайніе вторичные черешки.

Таблица XXVIII.

Опыты.	Половина сочлененія.	I конц. $c_1$ %	Исправл. концентр. $c_1'$ %	II конц. $c_2$ %	Исправл. концентр. $c_2'$ %	$t$ въ мин.	$\lg n \frac{c_1'}{c_2'}$	$\alpha$
I опытъ.	Наружная . . .	5,1	3,5	2,7	2,2	60	0,464	0,0077
	Внутренняя . . .	4,2	2,5	3,1	2,1	»	0,174	0,0029
II опытъ.	Наружная . . .	5,5	3,7	2,9	2,3	60	0,476	0,0080
	Внутренняя . . .	4,3	2,6	3,4	2,3	»	0,123	0,0020

Сочлененія листочковъ мимозы настолько малы, что не поддаются разрѣзыванію микротомомъ, а слѣдовательно и плазмолитическому изслѣдованію. Анатомическое же изслѣдованіе показываетъ, что клѣточные оболочки верхней половины сочлененія немного толще оболочекъ нижней половины; однако толщина ихъ какъ здѣсь, такъ и тамъ настолько мала, а разстояніе проходимое водой отъ ксилемы до центральной части половинъ сочлененія настолько незначительно, что видимое осмотическое давленіе въ сочлененіи не можетъ сильно разниться отъ истиннаго. Последнее же, какъ мы знаемъ, не зависитъ отъ проницаемости клѣточной оболочки для воды. Надо думать поэтому, что листочки мимозы складываются послѣ затемнѣнія благодаря ббльшей проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ нижней половины сочлененія, какъ у *Robinia pseudacacia*; клѣтки же чувствительной къ механическимъ раздраженіямъ половины сочлененія у листочковъ, какъ и у главнаго черешка, имѣютъ въ нормальномъ состояніи меньшую проницаемость плазматическихъ перепонокъ, чѣмъ клѣтки нечувствительной половины.

#### D. Ближайшія причины обратныхъ сонныхъ движеній листьевъ.

Еще Саксу (Sachs I p. 105, II p. 823) и де-Фризу (de-Vries, XI, p. 258) былъ извѣстенъ фактъ, что послѣ переворачиванія стебля фасоли вершиною къ землѣ происходятъ геотропическіе изгибы листовыхъ сочлененій. Названные ученые не считали однако эти изгибы вариационными движеніями и только Пфефферъ (Pfeffer, III, 138) показалъ,

1) Для исправленія найденной концентраціи на сокращеніе объема при плазмолизѣ были поставлены предварительные опыты, которые показали, что при полномъ насыщеніи водой объемъ призмочекъ, вырѣзанныхъ изъ наружной половины, на 32% больше объема тѣхъ-же призмочекъ, но плазмолизирован-

ныхъ; объемъ призмочекъ вырѣзанныхъ изъ внутреннихъ половинокъ былъ больше на 40%. При половинномъ тургорномъ давленіи объемъ тѣхъ и другихъ половинокъ былъ соответственно на 20% и 25% больше объема при плазмолизѣ.

что они обуславливаются измѣненіемъ тургорнаго давленія и наблюдаются у всѣхъ растеній, совершающихъ сонныя варіаціонныя движенія. По изслѣдованію Пфеффера изгибъ вызывается увеличеніемъ тургорнаго давленія въ морфологически верхней половинѣ сочлененія и одновременнымъ уменьшеніемъ этого давленія въ морфологически нижней его половинѣ (I. с. р. 140). Послѣ того какъ сгибаніе сочлененія, вслѣдствіе перевертыванія растенія, совершилось (для этого нужно 10 — 30 часовъ), у растеній, листья или листочки которыхъ опускаются при переходѣ въ почное положеніе (напр. у *Phaseolus*), начинаютъ наблюдаться обратныя сонныя движенія, т. е. при затемнѣніи или въ сумерки вмѣсто движенія листьевъ и листочковъ по направленію къ корню происходитъ движеніе ихъ по направленію къ вершинѣ растенія; наоборотъ у растеній, листочки которыхъ поднимаются при переходѣ въ ночное положеніе (напр. у *Asacia lorphantha*) наблюдаются при этомъ усиленные сонныя движенія въ прежнемъ направленіи (Pfeffer, III, p. 141, 142 и 143). Пфефферъ показалъ кромѣ того, что при затемнѣніи такихъ перевернутыхъ растеній происходитъ увеличеніе тургорнаго давленія въ обѣихъ половинѣхъ листового сочлененія. Причина же измѣненнаго движенія заключается, по мнѣнію Пфеффера, въ томъ, что скорость увеличенія тургорнаго давленія послѣ перевертыванія растенія дѣлается больше въ той изъ половинъ, въ которой при нормальномъ положеніи растенія происходило послѣ затемнѣнія болѣе медленное поднятіе тургорнаго давленія (I. с. р. 142 и 143).

Пфефферъ приходитъ на основаніи только что сказаннаго къ заключенію, что сила тяжести безспорно вліяетъ на варіаціонныя движенія листьевъ, но не вызываетъ ихъ (I. с. р. 143).

Впослѣдствіи благодаря опытамъ А. Фишера (A. Fischer, p. 672) сдѣлалось извѣстно, что нѣкоторыя растенія изъ совершающихъ никтитропныя варіаціонныя движенія (*Phaseolus* и *Lupinus*) постепенно прекращаютъ эти движенія при вращеніи на клиностатѣ вокругъ горизонтальной оси. На основаніи найденнаго имъ факта Фишеръ дѣлитъ всѣ растенія, совершающія никтитропныя движенія, на аутониктитропныя, у которыхъ движенія не зависятъ отъ направленія силы тяжести (ихъ «никтитропическая чувствительность автономна») и геониктитропныя, движенія которыхъ зависятъ отъ тяжести (I. с. р. 710—711).

По мнѣнію Фишера, зависимость сонныхъ движеній геониктитропныхъ растеній отъ тяжести такого же рода, какъ и зависимость ихъ отъ температуры. Подобно тому, какъ сильно понижая или повышая температуру, можно вызвать прекращеніе движеній, такъ и, исключая одностороннее дѣйствіе силы тяжести, можно достигнуть тѣхъ же результатовъ.

Ноль (Noll III p. 12), возражая Фишеру, справедливо указываетъ, что о тождественности зависимостей движеній геониктитропныхъ растеній Фишера отъ тяжести и отъ температуры уже потому одному не можетъ быть рѣчи, что перевернутыя растенія совершаютъ обратныя сонныя движенія. Ноль, на основаніи теоретическихъ соображеній, приходитъ къ заключенію, что въ случаѣ никтитропныхъ движеній мы имѣемъ дѣло съ гетерогенной индукціей; свѣтъ, по его мнѣнію, производитъ первичное раздраженіе и тѣмъ вызываетъ вторичное раздраженіе силы тяжести, производящее соотвѣт-

ствующее движеніе (I. с. р. 13). Въ настоящей работѣ я не задавался цѣлью подвергать разсматриваемыя явленія теоретической обработкѣ; меня интересовалъ не столько вопросъ, имѣемъ ли мы дѣло съ гетерогенной и какой другой индукціей, сколько вопросъ о выясненіи ближайшихъ причинъ обратныхъ нуктитропныхъ движеній съ точки зрѣнія тѣхъ выводовъ, которыя изложены въ предыдущихъ параграфахъ этой главы.

Прежде всего постараемся выяснитъ какія условія создаются въ листовыхъ сочлененіяхъ растенія, послѣ перевертыванія послѣдняго.

Пфефферъ, какъ упомянуто выше, показалъ, что послѣ перевертыванія растенія тургорное давленіе морфологически верхнихъ половинокъ сочлененій увеличивается, тогда какъ тургорное давленіе морфологически нижнихъ половинокъ одновременно уменьшается. Вслѣдствіе какихъ ближайшихъ причинъ происходитъ подобное измѣненіе тургорнаго давленія?

Прежде всего возникаетъ предположеніе, не происходитъ ли при геотропическомъ изгибѣ измѣненія концентраціи клѣточного сока сочлененій. Однако мои опыты, для провѣрки подобнаго предположенія надъ *Phaseolus multiflorus*, дали отрицательный результатъ. Ни въ одномъ случаѣ, не смотря на то, что геотропическіе изгибы были очень сильны (листочки прижимались своими морфологически нижними поверхностями), не могло быть подмѣчено измѣненія концентраціи клѣточного сока, превосходящаго ошибку наблюденія<sup>1)</sup>.

Это относится, само собою разумѣется, къ концентраціи сока клѣтокъ, начинающихся плазмолизироваться; если мы ввели-бы поправку на измѣненіе объема клѣтокъ при плазмолизѣ, то, принимая во вниманіе, что морфологически верхнія половины сочлененій при геотропическомъ изгибѣ увеличиваются въ размѣрахъ, а нижнія половины наоборотъ уменьшаются, мы пришли бы къ заключенію, что концентрація сока клѣтокъ, въ которыхъ увеличивается тургорное давленіе, уменьшается, тамъ же, гдѣ происходитъ уменьшеніе тургорнаго давленія, она наоборотъ увеличивается.

Такимъ образомъ не измѣненіе концентраціи клѣточного сока вызываетъ геотропическіе изгибы сочлененій. Такъ какъ температура при этомъ также остается неизмѣнной, то единственно возможнымъ объясненіемъ измѣненія тургорнаго давленія въ сочлененіяхъ является предположеніе, что при геотропическихъ изгибахъ измѣняется проницаемость плазматической перепонки для веществъ растворенныхъ.

Для провѣрки сдѣланнаго предположенія мною были поставлены опыты, въ которыхъ о перемѣнѣ проницаемости плазматической перепонки судилось по измѣненію ея фактора, опредѣлявшагося при помощи изотоническихъ коэффициентовъ. Въ однихъ опытахъ опредѣлялась сначала величина фактора проницаемости для клѣтокъ обѣихъ половинокъ сочле-

1) Гильбургъ (Hilburg, p. 30—31), повидимому, наблюдалъ слабое (до  $\frac{1}{2}\%$  селитры) увеличеніе концентраціи клѣточного сока въ верхней половинѣ сочлененія первичнаго листа *Phaseolus vulgaris* послѣ геотропическаго изгиба. Къ сожалѣнію результаты (двухъ) его опытовъ мало убѣдительны, такъ какъ точность установленія концентраціи у него была очень небольшая и растенія, повидимому, изслѣдовались спустя

продолжительное время послѣ перевертыванія, когда различныя вторичныя измѣненія концентраціи, связанныя съ ростомъ (послѣдній продолжается очень долго въ сочлененіяхъ первичныхъ листьевъ), могли привести къ невѣрнымъ результатамъ. Во всякомъ случаѣ трудно сдѣлать какіе-либо выводы изъ двухъ опытовъ Гильбурга, въ которыхъ сравнивались концентраціи клѣточного сока сочлененій у различныхъ листьевъ.

ненія средняго листочка *Phaseolus multiflorus* при нормальномъ положеніи листа, при чемъ разрѣзаніе сочлененія микротомомъ происходило только до половины его длины; затѣмъ листь вмѣстѣ съ оставшейся половиной сочлененія<sup>1)</sup> перевертывался и черезъ сутки (18° С.), когда геотропическія изгибы какъ обѣихъ боковыхъ листочковъ, такъ и половины сочлененія достигали своего максимума, факторъ проницаемости опредѣлялся снова. Въ другихъ опытахъ порядокъ опредѣленія фактора проницаемости былъ обратнымъ, т. е. сначала опредѣлялась его величина послѣ геотропическаго изгиба, а затѣмъ послѣ сглаживания послѣдняго вслѣдствіе помѣщенія листа въ нормальное положеніе. Геотропическій изгибъ листового сочлененія съ отрѣзанною пластинкою листа всегда менѣе значителенъ, чѣмъ изгибъ цѣльнаго листа. Въ виду этого мною были сдѣланы также опыты другого рода, въ которыхъ сначала опредѣлялся факторъ проницаемости для клѣтокъ сочлененія одного изъ боковыхъ листочковъ *Phaseolus*, а затѣмъ, когда послѣ перевертыванія листа другой боковой листочекъ совершалъ геотропическій изгибъ, опредѣлялся факторъ проницаемости для клѣтокъ сочлененія и этого листочка. Предварительный опытъ показалъ, что проницаемости плазматическихъ перепонокъ клѣтокъ въ соответственныхъ половинахъ сочлененій двухъ боковыхъ листочковъ у одного и того же листа отличаются между собою самое большее на 10% ихъ величины, поэтому измѣненіе фактора проницаемости, большія этой величины, должны быть отнесены всецѣло на счетъ измѣненія его вслѣдствіе перемѣны направленія силы тяжести.

Въ ниже слѣдующихъ таблицахъ расположены результаты наиболее типичныхъ примѣровъ изъ сдѣланныхъ опытовъ всѣхъ четырехъ родовъ. Результаты остальныхъ опытовъ были тѣ-же, поэтому я считаю излишнимъ приводить ихъ здѣсь. Рубрики таблицъ, а также способы нахождения и вычисленія изотоническихъ коэффициентовъ и факторовъ проницаемости остались такими же, какъ и въ опытахъ съ дѣйствіемъ затемненія на проницаемость плазматической перепонки сочлененій (см. стр. 92 — 95).

Таблица XXIX.

Сочлененіе средняго листочка *Phaseolus multiflorus*, находившагося въ нормальномъ положеніи, разрѣзалось микротомомъ до половины длины, затѣмъ, послѣ перевертыванія листа и геотропическаго изгиба, разрѣзалось окончательно. Температура 18 — 20° С. 8 ч. — 10 ч. утра.

Положеніе.	Половина сочлененія.	Конц. сел. до сах. $c$ %	Конц. сах. $c_1$ %	Конц. сел. $c_2$ %	Изот. коэфф. $K$ .	Ф. прониц. $\mu$ .
Нормальное.	Верхняя . . . .	6	12,8	3,3	2,15	0,340
	Нижняя . . . .	5,2	15,7	3,2	2,72	0,178
Перевернутое, послѣ геотропическ. изгиба.	Верхняя . . . .	6	15,8	3,6	2,44	0,240
	Нижняя . . . .	5,2	12,6	2,9	2,41	0,272

1) Оставшаяся половина сочлененія вмѣстѣ съ черешкомъ помѣщалась въ атмосферу, насыщенную водяными парами (см. стр. 92).

Таблица XXX.

Геотропически согнутое сочленение среднего листочка *Phaseolus multiflorus*, находившагося въ перевернутомъ положеніи, разрѣзалось микротомомъ до половины длины, затѣмъ, послѣ помѣщенія листа въ нормальное положеніе и сглаживанія изгиба, разрѣзалось окончательно. Температура 17 — 20° С. 10 ч. — 12 ч. утра.

Положеніе.	Половина сочлененія.	Конц. сел. до сах. $c$ 0/0	Конц. сах. $c_1$ 0/0	Конц. сел. $c_2$ 0/0	Изот. коэфф. К.	Ф. прониц. $\mu$ .
Перевернутое, геотропич. изгибъ.	Верхняя . . . .	5,9	16,2	3,2	2,81	0,151
	Нижняя . . . .	5,1	12	2,9	2,30	0,305
Нормальное, послѣ сглажив. изгиба.	Верхняя . . . .	5,9	13,4	2,9	2,56	0,226
	Нижняя . . . .	5,1	14,9	3,2	2,59	0,217

Таблица XXXI.

Послѣ опредѣленія фактора проницаемости для клѣтокъ сочлененія одного изъ боковыхъ листочковъ *Phaseolus multiflorus* (№ 1), листъ поворачивался на 180° и послѣ геотропическаго изгиба опредѣлялся факторъ проницаемости для клѣтокъ сочлененія другого листочка (№ 2). Температура 17,5 — 20° С. 10 ч. — 12 ч. утра.

Положеніе.	Половины сочлененія.	Конц. сел. до сах. $c$ 0/0	Конц. сах. $c_1$ 0/0	Конц. сел. $c_2$ 0/0	Изот. коэфф. К.	Ф. прониц. $\mu$ .
Нормальное, листоч. № 1.	Верхняя . . . .	6,2	12,5	3,3	2,10	0,365
	Нижняя . . . .	5,3	16,1	3,2	2,79	0,157
Перевернутое, листоч. № 2.	Верхняя . . . .	6,0	16,8	3,4	2,74	0,172
	Нижняя . . . .	5,2	12,0	2,9	2,30	0,305

Таблица XXXII.

Послѣ опредѣленія фактора проницаемости для клѣтокъ геотропически согнутаго сочлененія одного изъ боковыхъ листочковъ *Phaseolus multiflorus* (№ 1), листъ поворачивался на 180° и послѣ сглаживанія изгибовъ опредѣлялся факторъ проницаемости для клѣтокъ сочлененія другого листочка (№ 2). Температура 17,5 — 20° С. 10 ч. — 12 ч. утра.

Положеніе.	Половины сочлененія.	Конц. сел. до сах. $c$ 0/0	Конц. сах. $c_1$ 0/0	Конц. сел. $c_2$ 0/0	Изот. коэфф. К.	Ф. прониц. $\mu$ .
Перевернутое, листоч. № 1.	Верхняя . . . .	6,0	16,2	3,3	2,72	0,178
	Нижняя . . . .	5,6	13,5	3,0	2,50	0,245
Нормальное, листоч. № 2.	Верхняя . . . .	6,2	13,4	3,0	2,48	0,251
	Нижняя . . . .	5,0	15,9	3,2	2,76	0,166

Изъ приведенныхъ опытовъ видно, что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ при геотропическомъ изгибѣ въ морфологически верхней половинѣ сочлененія, согласно ожиданію, сильно уменьшается, что и вызываетъ увеличеніе тургорнаго давленія этой половины. Наоборотъ перемѣна направленія силы тяжести послѣ перевертыванія растенія вызываетъ увеличеніе проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ въ морфологически нижней половинѣ сочлененія и вслѣдствіе этого уменьшеніе тургорнаго давленія въ этой половинѣ.

Перемѣна направленія силы тяжести, вызывая, такимъ образомъ, противоположныя измѣненія проницаемостей плазматической перепонки въ верхней и нижней половинахъ сочлененія, приводитъ къ обратному отношенію этихъ проницаемостей у перевернутаго растенія въ сравненіи съ растеніемъ, находящимся въ нормальномъ положеніи. Во всѣхъ 20 геотропически согнутыхъ сочлененіяхъ, подвергавшихся въ моихъ опытахъ изслѣдованію, проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ въ верхней половинѣ была значительно меньше проницаемости перепонки въ нижней половинѣ. Вполнѣ понятнымъ является, слѣдовательно, почему перемѣна освѣщенія должна отражаться у перевернутаго растенія въ бѣльшей степени на тургорномъ давленіи морфологически нижнихъ половинъ сочлененій, чѣмъ на тургорномъ давленіи верхнихъ половинъ.

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ заключенію, что *при обратномъ сонномъ движеніи листьевъ тургорное давленіе морфологически нижнихъ половинъ сочлененій увеличивается сильнѣе, вслѣдствіи бѣльшей проницаемости плазматической перепонки клѣтокъ этихъ половинъ въ геотропически согнутыхъ сочлененіяхъ.*

Хотя заключеніе, къ которому мы пришли, было выведено на основаніи фактовъ, полученныхъ для Phaseolus, однако трудно сомнѣваться въ томъ, что перемѣна направленія силы тяжести одинаково вліяетъ на проницаемость плазматической перепонки какъ Phaseolus такъ и другихъ растеній. Вполнѣ понятнымъ является, почему растенія, листья и листочки которыхъ при нормальномъ положеніи поднимаются вслѣдствіе затемнѣнія, послѣ перевертыванія вершиной къ землѣ не совершаютъ обратныхъ никтитропныхъ движеній, а наоборотъ усиливаютъ свои движенія, совершая ихъ въ томъ же направленіи. Послѣ перевертыванія растенія происходитъ всегда уменьшеніе проницаемости плазматической перепонки въ половинѣ сочлененія, обращенной при новомъ положеніи къ землѣ, тогда какъ въ противоположной половинѣ его, наоборотъ происходитъ всегда увеличеніе проницаемости. Но у растеній съ поднимающимися листьями и листочками при нормальномъ положеніи, морфологически нижняя половина сочлененія имѣетъ большую проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ, чѣмъ морфологически верхняя половина; поэтому послѣ геотропическаго изгиба проницаемость въ клѣткахъ морфологически нижней половины превосходитъ еще въ бѣльшей степени проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ въ верхней половинѣ, слѣдовательно и затемнѣніе отражается на тургорномъ давленіи морфологически нижней половины у перевернутаго растенія еще въ бѣльшей степени чѣмъ у растенія, находящагося въ нормальномъ положеніи.

Мы видимъ, что направленіе силы тяжести создаетъ условія, необходимыя для такого или иного направленія никтитропныхъ движеній листьевъ, понижая или повышая проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ листовыхъ сочлененій. Однако нельзя сказать вмѣстѣ съ Нолемъ, что раздраженіе силы тяжести производитъ эти движенія: ихъ безъ сомнѣнія производитъ перемѣна освѣщенія, или, выражаясь языкомъ Ноля, свѣтовое раздраженіе; геотропическое же раздраженіе, дѣйствуя вполне самостоятельно, дѣлаетъ только листовыя сочлененія способными реагировать на перемѣну освѣщенія движеніемъ <sup>1)</sup>.

Что же касается дѣленія растений на авто- и геониктитропныя, какъ это дѣлаетъ Фишеръ, то мнѣ кажется это во всякомъ случаѣ преждевременнымъ, такъ какъ опыты съ клиноостатомъ можно толковать различно; вмѣстѣ съ тѣмъ извѣстны растенія, совершающія обратныя движенія послѣ перевертыванія и продолжающія сонныя движенія на клиноостатѣ, не смотря на долговременное вращеніе вокругъ горизонтальной оси (напр. *Desmodium gyrans*, см. Pfeffer III p. 142 и Fischer, A., p. 710).

### Е. Вліяніе свѣта на тургорное давленіе клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* и *Spirogyra*.

Мы видѣли въ предыдущемъ какимъ образомъ вліяетъ сила освѣщенія на тургорное давленіе клѣтокъ листовыхъ сочлененій. Мнѣ представлялось въ высшей степени интереснымъ выяснитъ вопросъ, обладаетъ ли плазматическая перепонка клѣтокъ сочлененій какой-нибудь специфической чувствительностью къ перемѣнѣ освѣщенія, не свойственною плазматической перепонкѣ другихъ клѣтокъ, не участвующихъ въ какихъ либо никтитропныхъ движеніяхъ, или же измѣненіе проницаемости для веществъ растворенныхъ подъ дѣйствіемъ свѣта принадлежитъ къ свойствамъ всякой плазматической перепонки и тургорное давленіе каждой растительной клѣтки реагируетъ въ одинаковомъ смыслѣ на перемѣну освѣщенія.

Правда опыты Гофмейстера, какъ упоминалось выше, какъ будто указывали на возможность дѣйствія перемѣны силы освѣщенія на тургорное давленіе клѣтокъ листовыхъ черешковъ, однако эти опыты не подтвердились, какъ мы знаемъ, изслѣдованіями Пфелфера. Трудно было ожидать, что измѣненіе тургорнаго давленія, если бы оно обусловливалось перемѣной проницаемости плазматической перепонки, аналогичной съ наблюдаемой въ листовыхъ сочлененіяхъ, могло бы быть подмѣчено такимъ грубымъ методомъ опредѣленія измѣненія тургорнаго давленія, какимъ является методъ измѣренія сопротивленія сгибанію, нашедшій себѣ примѣненіе въ опытахъ Гофмейстера и Пфелфера.

1) При извѣстномъ среднемъ положеніи листа (между нормальнымъ и перевернутымъ) проницаемость плазматической перепонки въ клѣткахъ обѣихъ половинъ сочлененія будетъ одинакова и листъ перестанетъ реагировать на перемѣну освѣщенія движеніемъ.



Разница въ углахъ, составляемыхъ черешкомъ и стеблемъ при нормальномъ и перевернутомъ положеніяхъ растенія, не превосходитъ обыкновенно  $20^\circ$ . вмѣстѣ съ тѣмъ, увеличивая тяжесть листа, а слѣдовательно и разность угловъ укрѣпленіемъ на послѣднемъ разновѣсокъ, мы можемъ повредить клѣтки черешка, заставляя его слишкомъ сильно сгибаться. Если проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ черешка измѣняется подъ вліяніемъ перемѣны освѣщенія въ такой-же степени, какъ и проницаемость клѣтокъ сочлененій, то при затемнѣніи (предполагая величину проницаемости перепонки клѣтокъ черешковъ равнымъ, напр. проницаемости ея въ клѣткахъ спирогиры) можно ждать увеличеніе тургорнаго давленія самое больше на  $4\%$ , причемъ разность угловъ измѣнилась бы только на  $0,8^\circ$ . Такою точностью, къ сожалѣнію, не обладаетъ методъ Брюкке.

Несравненно болѣе точнымъ методомъ при подходящихъ объектахъ, является, какъ мы знаемъ, плазмолитическій методъ съ поправкою на проницаемость плазматической перепонки. Къ наиболѣе излюбленнымъ объектамъ для плазматическихъ изслѣдованій относятся клѣтки эпидермиса листьевъ *Tradescantia discolor* и *Spirogyra*. вмѣстѣ съ тѣмъ примѣненіе плазмолитического метода къ названнымъ объектамъ даетъ наиболѣе точные результаты.

Прежде всего обратимся къ описанію способа опредѣленія концентрацій растворовъ селитры и сахара, изотоничныхъ клѣточному соку листового эпидермиса *Tradescantia discolor*.

Концентрація клѣточного сока листового эпидермиса названнаго растенія меньше всего варіируетъ вдоль главной жилки; вмѣстѣ съ тѣмъ клѣтки послѣдней содержатъ обыкновенно гораздо больше пигмента въ соку; въ виду этого эпидермисъ главной жилки является наиболѣе пригоднымъ объектомъ для плазмолитическихъ изслѣдованій. Плазматическая перепонка клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* гораздо менѣе проницаема для веществъ растворенныхъ, чѣмъ перепонка клѣтокъ сочлененій: концентрація сока здѣсь не измѣняется такъ быстро, какъ тамъ. вмѣстѣ съ тѣмъ клѣтки *Tradescantia discolor* легко переносятъ не только плазмолизъ, но и обратное возстановленіе объема плазмолизированнаго протопласта въ водѣ. Поэтому можно устанавливать объ концентраціи изотоническихъ растворовъ (селитры и сахара) на одномъ и томъ-же срѣзѣ эпидермиса. Благодаря послѣднему опредѣленіе изотоническихъ концентрацій селитры и сахара возможно здѣсь съ гораздо большею точностью, чѣмъ въ случаѣ листовыхъ сочлененій; гораздо точнѣе можетъ быть, слѣдовательно, опредѣленъ и изотоническій коэффициентъ селитры. Что же касается самаго процесса опредѣленія изотоническихъ концентрацій, то онъ производился въ моихъ опытахъ слѣдующимъ образомъ. Прежде всего находились примѣрные предѣлы колебанія концентраціи клѣточного сока въ эпидермисѣ главной жилки даннаго листа, т. е. опредѣлялись концентраціи растворовъ селитры и сахара, плазмолизирующихъ только нѣкоторыя ея клѣтки, и концентраціи растворовъ, производящихъ плазмолизъ всѣхъ клѣтокъ. Послѣ этого готовились растворы обоихъ веществъ, концентраціи которыхъ заключались между найденными предѣлами и отличались между собою въ

случаѣ селитры на 0,01%, въ случаѣ сахара на 0,05%. Установленіе концентраціи селитры и сахара производилось обыкновенно параллельно для 5 — 8 срѣзовъ эпидермиса. За концентрацію того и другого вещества, изотоничную средней концентраціи сока клѣтокъ какого-нибудь изъ срѣзовъ, принималась концентрація раствора, въ которомъ только половина клѣтокъ срѣза была (обыкновенно очень слабо) плазмолизирована. Такую концентрацію легко можно было опредѣлять съ точностью до 0,01% селитры и 0,05% сахара. Такъ, напр. въ 1,12% растворѣ селитры отношеніе числа плазмолизированныхъ клѣтокъ къ не плазмолизированнымъ было въ одномъ изъ срѣзовъ приблизительно 2:3, тогда какъ въ 1,14% растворѣ это отношеніе было уже 4:1. Хотя въ 1,13% растворѣ отношеніе и не было въ данномъ случаѣ строго равно 1:1, однако онъ принимался за изотоничный растворъ, такъ какъ за третій десятичный знакъ нельзя было поручиться, да въ большей точности не было и настоятельной нужды.

Чтобы избѣжать поправку на эндосмозъ селитры въ клѣточный сокъ, плазмолизъ растворомъ сахара производился непосредственно за нахожденіемъ концентраціи селитры. Въ среднемъ установленіе послѣдней требовало 50 — 60 минутъ, установленіе же концентраціи сахара 40 — 50 мин. Микроскопированіе происходило при увеличеніи въ 150 разъ.

Опыты надъ дѣйствіемъ силы освѣщенія на проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* производились слѣдующимъ образомъ. Для нѣсколькихъ срѣзовъ эпидермиса (5 — 8) взятыхъ съ растенія, находившагося на разсѣянномъ солнечномъ свѣту, устанавливались изотоническіе коэффициенты селитры; одновременно растеніе переносилось въ темную комнату, гдѣ и оставалось втеченіе часа; по прошествіи этого времени устанавливались изотоническіе коэффициенты въ темнотѣ <sup>1)</sup>, при чемъ кусочки эпидермиса брались изъ главной жилки рядомъ со срѣзами, изслѣдованными на свѣту. Въ другихъ опытахъ срѣзалось извѣстное число кусочковъ эпидермиса на свѣту; всѣ кусочки разрѣзались на двѣ равныя части; однѣ половины оставались втеченіе 1½ часа на разсѣянномъ солнечномъ свѣту въ водѣ, другія же переносились въ темную комнату, гдѣ оставались въ водѣ также втеченіе 1½ часа. Послѣ этого опредѣлялись изотоническіе коэффициенты тѣхъ и другихъ половинъ одновременно. Всего же убѣдительно были опыты, въ которыхъ, послѣ установленія изотоническихъ коэффициентовъ для кусочковъ эпидермиса на свѣту, тѣ-же кусочки (занумерованные) помещались въ воду (плазмолизъ расходился), переносились въ темную комнату и по прошествіи 1½—2 часовъ вновь изслѣдовались уже въ темнотѣ на изотоническіе коэффициенты. Подобные опыты производились и въ обратномъ порядкѣ, т. е. сначала опредѣлялись изотоническіе коэффициенты въ темнотѣ, а затѣмъ для тѣхъ же самыхъ срѣзовъ — на свѣту. Температура все время оставалась = 18° С.

1) При свѣтѣ свѣчи, поставленной въ фонарь, и | окиси мѣди (цвѣтъ клѣточного сока оставался поэтому концентрирующаго баллона съ растворомъ амміачной | не измѣненнымъ).

Въ приведенныхъ ниже таблицахъ собраны результаты нѣсколькихъ наиболѣе типичныхъ опытовъ. Такъ какъ остальные опыты привели къ тому же результату, какъ и вошедшіе въ таблицы, то мнѣ кажется излишнимъ ихъ приводить.

Въ первой графѣ таблицъ даны найденныя концентрации селитры  $c_1$ , во второй графѣ — концентрации сахара  $c_2$  (обѣ концентрации въ ‰). Въ третьей графѣ — изотоническіе коэффициенты  $k$ , вычисленные изъ  $c_1$  и  $c_2$  по формулѣ:  $k = \frac{c_2 \cdot 101 \cdot 1,88}{c_1 \cdot 342}$  (см. прим. стр. 94). Въ четвертой графѣ даны факторы проницаемости  $\mu$ , вычисленные по формулѣ  $\mu = 1 - \frac{k}{3,38}^1$ ) и наконецъ въ пятой графѣ — величины осмотического давленія  $P$ , вычисленные по формулѣ Аррениуса (см. стр. 32) изъ чиселъ рубрикъ  $c_1$  и  $\mu$ , принимая въ ней температуру  $T = 291^\circ$  и  $C = \frac{c_1 \cdot 10}{101}$ .

Таблица XXXIII.

Срѣзы эпидермиса *Tradescantia discolor* №№ 1 — 6 взяты съ растенія въ 10 ч. у., послѣ чего послѣднее поставлено въ темноту. Въ 11 ч. 10 м. у. взяты остальные срѣзы (№№ 7 — 12).

С в ѣ т ь.						Т е м н о т а.					
№№ срѣ- зовъ.	Конц. сел. $c_1$ ‰	Конц. сах. $c_2$ ‰	Изотон. коэфф.ц. К.	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давленіе P въ атм.	№№ срѣ- зовъ.	Конц. сел. $c_1$ ‰	Конц. сах. $c_2$ ‰	Изотонич. коэфф.ц. К.	Ф. прониц. $\mu$ .	Осмот. давл. P въ атм.
1	1,23	6,55	2,96	0,126	4,57	7	1,21	6,60	3,03	0,104	4,61
2	1,16	6,25	2,99	0,115	4,37	8	1,22	6,70	3,05	0,098	4,68
3	1,23	6,65	3,00	0,112	4,64	9	1,21	6,60	3,03	0,104	4,61
4	1,18	6,40	3,01	0,109	4,47	10	1,19	6,65	3,10	0,082	4,64
5	1,19	6,45	3,01	0,110	4,51	11	1,16	6,55	3,13	0,073	4,57
6	1,17	6,30	2,99	0,116	4,40	12	1,18	6,55	3,08	0,090	4,57
—	Среднее:		2,99	0,115	4,49	—	Среднее:		3,07	0,091	4,61

Таблица XXXIV.

Всѣ срѣзы эпидермиса *Tradescantia discolor* взяты съ растенія въ 10 ч. у. Одни изъ нихъ (№№ 6 — 10) оставались въ темнотѣ, другіе (№№ 1 — 5) на разсѣянномъ солнечномъ свѣту до 11 $\frac{1}{2}$  ч., когда произведено опредѣленіе изотоническихъ коэффициентовъ.

1) Вычисленная по Кольраушу (Kohlrausch), степень электролитической диссоціаціи селитры для 1,1 — 1,3‰ раствора  $\alpha = 0,80$ ; следовательно теоретическій изотоническій коэфф. селитры  $K_0 = 1,88[1 + (n-1)\alpha] = 3,38$ .

С в ѣ т ѣ .						Т е м н о т а .					
№№ срѣ- зовъ.	Конц. сел. с <sub>1</sub> %	Конц. сах. с <sub>2</sub> %	Изотон. коэфф. К.	Ф. прониц. μ.	Осмот. давленіе Р въ атм.	№№ срѣ- зовъ.	Конц. сел. с <sub>1</sub> %	Конц. сах. с <sub>2</sub> %	Изотонич. коэфф. К.	Ф. прониц. μ.	Осмот. давл. Р въ атм.
1	1,15	6,20	3,00	0,113	4,33	6	1,19	6,60	3,08	0,089	4,61
2	1,18	6,35	2,99	1,116	4,44	7	1,17	6,50	3,09	0,088	4,54
3	1,19	6,50	3,03	0,103	4,54	8	1,22	6,75	3,07	0,091	4,71
4	1,20	6,50	3,01	0,100	4,54	9	1,21	6,65	3,06	0,097	4,64
5	1,17	6,35	3,01	0,109	4,44	10	1,18	6,50	3,05	0,095	4,54
—	Среднее:		3,00	0,108	4,45	—	Среднее:		3,07	0,092	4,61

Таблица XXXV.

Одни и тѣ-же срѣзы (занумерованные) подвергались сначала плазмолизу на разсѣянномъ солнечномъ свѣту, потомъ переносились въ воду и помѣщались на 2 ч. въ темноту. Послѣ этого производился снова плазмолизъ, но въ темнотѣ.

С в ѣ т ѣ .						Т е м н о т а .				
№№ срѣ- зовъ.	Конц. сел. с <sub>1</sub> %	Конц. сах. с <sub>2</sub> %	Изотон. коэфф. К.	Факт. прониц. μ.	Осмот. давленіе Р въ атм.	Конц. сел. с <sub>1</sub> %	Конц. сах. с <sub>2</sub> %	Изотон. коэфф. К.	Факт. прониц. μ.	Осмот. давл. Р въ атм.
1	1,17	6,40	3,03	0,104	4,47	1,14	6,45	3,14	0,071	4,51
2	1,16	6,35	3,04	0,101	4,44	1,13	6,40	3,12	0,068	4,47
3	1,18	6,30	2,96	0,124	4,40	1,14	6,35	3,07	0,084	4,44
5	1,19	6,50	3,03	0,104	4,54	1,16	6,55	3,11	0,071	4,57
5	1,19	6,45	3,01	0,109	4,51	1,16	6,50	3,09	0,077	4,54
6	1,25	6,70	2,97	0,121	4,68	1,21	6,75	3,07	0,088	4,71
—	Среднее:		3,00	0,110	4,50	Среднее:		3,11	0,077	4,54

Таблица XXXVI.

Одни и тѣ-же срѣзы (занумерованные) подвергались сначала плазмолизу въ темнотѣ, потомъ переносились въ воду и помѣщались на 2 ч. въ разсѣянный солнечный свѣтъ. Послѣ этого производился снова плазмолизъ.

Т е м н о т а .						С в ѣ т ѣ .				
№№ срѣ- зовъ.	Конц. сел. с <sub>1</sub> %	Конц. сах. с <sub>2</sub> %	Изотон. коэфф. К.	Факт. прониц. μ.	Осмот. давленіе Р въ атм.	Конц. сел. с <sub>1</sub> %	Конц. сах. с <sub>2</sub> %	Изотон. коэфф. К.	Факт. прониц. μ.	Осмот. давл. Р въ атм.
1	1,17	6,55	3,11	0,080	4,57	1,20	6,50	3,00	0,115	4,54
2	1,16	6,50	3,10	0,083	4,54	1,19	6,45	3,01	0,109	4,51
3	1,17	6,55	3,11	0,080	4,57	1,20	6,50	3,00	0,113	4,54
4	1,16	6,40	3,06	0,095	4,47	1,19	6,35	2,96	0,124	4,44
5	1,20	6,60	3,05	0,098	4,61	1,23	6,55	2,95	0,128	4,57
6	1,15	6,45	3,11	0,080	4,51	1,18	6,40	3,01	0,109	4,47
—	Среднее:		3,09	0,086	4,54	Среднее:		2,99	0,116	4,51

Приведенные опыты показываютъ, что проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ листового эпидермиса *Tradescantia discolor* не менѣе чувствительна къ свѣту, чѣмъ плазматическая перепонка клѣтокъ листовыхъ сочлененій. При затемнѣніи происходитъ уменьшеніе проницаемости въ 1,2—1,5 раза. Наоборотъ освѣщеніе вызываетъ въ затемненной клѣткѣ соответственное увеличеніе проницаемости.

Изъ таблицъ видно также, что благодаря уменьшенію проницаемости плазматической перепонки послѣ затемнѣнія происходитъ увеличеніе осмотического давленія клѣточного сока по крайней мѣрѣ на 0,04 атм. и соответственное паденіе этого давленія послѣ перенесенія растенія на свѣтъ.

Изъ приведенныхъ опытовъ видно, насколько можно придавать цѣну результатамъ изслѣдованій надъ измѣненіями тургорнаго давленія, полученнымъ при помощи плазмолитического метода безъ введенія поправки на проницаемость плазматической перепонки. Послѣ затемнѣнія концентрація плазмолизирующаго раствора селитры, какъ показываютъ таблицы, уменьшается на 0,03—0,04% (табл. XXXV), тогда какъ тургорное давленіе при этомъ увеличивается.

Обратимся теперь къ опредѣленію измѣненія проницаемости плазматической перепонки и тургорнаго давленія клѣтокъ спирогиры подъ вліяніемъ переменны освѣщенія.

Способъ установленія изотонического коэффициента спирогиры былъ въ подробностяхъ описанъ въ главѣ II (стр. 40). Примѣнительно къ опредѣленію измѣненія проницаемости при переменнѣ освѣщенія, опытъ располагался слѣдующимъ образомъ.

Нить спирогиры длиною около  $1\frac{1}{2}$  сант. разрѣзалась наканунѣ опыта на двѣ равныя части. Послѣднія укрѣплялись при помощи стеклянныхъ волосковъ и смѣси воска съ терпентиномъ на двухъ большихъ покровныхъ стеклахъ, которыя опрокидывались, какъ описано на стр. 35, надъ цилиндромъ. Въ цилиндрикъ наливалась вода, послѣ чего обѣ такимъ образомъ уединенныя половины нити спирогиры оставались втеченіе ночи на окнѣ лабораторіи. На другой день одна изъ уединенныхъ половинокъ подвергалась тотчасъ плазмолизу, другая же помѣщалась предварительно на  $1\frac{1}{2}$  часа въ темную комнату.

Послѣ установленія изотонического коэффициента для 10 клѣтокъ первой половины нити на свѣту и введенія поправки на эндосмозъ глицерина, эта половина помѣщалась также въ темноту, гдѣ и оставалась около  $1\frac{1}{2}$  часа. По истеченіи этого времени отмѣчался новый объемъ плазмолизованнаго протопласта въ глицеринѣ и послѣ замѣны послѣдняго раствора сахара, опредѣлялся снова изотоническій коэффициентъ. Опредѣленіе изотонического коэффициента у половины нити, помѣщенной вначалѣ опыта въ темную комнату, происходило въ обратномъ порядкѣ т. е. сначала эта величина опредѣлялась въ темнотѣ, послѣ чего водоросль выставлялась на разсѣянный солнечный свѣтъ и изотоническіе коэффициенты опредѣлялись вновь. Микроскопированіе и зарисовываніе плазмолизованныхъ протопластовъ въ темной комнатѣ происходило при свѣтѣ ауеровской горѣлки, поставленной въ фонарь, при чемъ свѣтъ предварительно проходилъ черезъ слой насыщеннаго раствора хромпика толщиною около 15 сант.

Всѣ сдѣланные опыты дали почти одинаковые результаты; поэтому я считаю необходимымъ привести изъ нихъ только одинъ наиболѣе типичный примѣръ.

Въ слѣдующихъ таблицахъ, въ рубрикѣ  $V_1$  даны объемы протопластовъ въ сахарѣ (въ куб. сант.), въ рубр.  $V_2$  — объемы протопластовъ въ глицеринѣ, исправленные на эндосмозъ послѣдняго (исправленіе нужно только тогда, когда плазмолизъ глицериномъ слѣдуетъ за плазмолизомъ сахаромъ), въ рубр.  $k'$  — изотоническіе коэффициенты, найденные по способу, описанному на стр. 40, въ рубр.  $\mu$  — факторы проницаемости, при вычисленіи которыхъ теоретическіе изотоническіе коэффициенты брались изъ табл. III (стр. 42).

Цифры, помѣщенные въ рубрикахъ, надо умножить, для полученія величинъ въ к. с., на число, поставленное внизу буквъ.

Въ таблицѣ XXXVIII во многихъ мѣстахъ вмѣсто цифръ поставлены черточки; послѣдними отмѣчены клѣтки, отмиравшія вслѣдствіе долгаго плазмолиза и повторнаго опредѣленія изотоническихъ коэффициентовъ, сопряженнаго съ измѣненіемъ объема протопласта.

Таблица XXXVII.

Концентрація плазмолизирующаго раствора сахара — 0,7302 гр.-мол. въ  $L$ ; концентрація глицерина — 0,8195 гр.-мол. Температура 17,5° С.

Первая половина нити спирогиры. С в ѣ т ь.					Вторая половина нити спирогиры. Т е м н о т а.				
№№ клѣтокъ.	$V_1$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$V_2$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$k'$	$\mu$ .	№№ клѣтокъ.	$V_1$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$V_2$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$k'$	$\mu$ .
1	549	587	1,569	0,089	1	669	679	1,649	0,042
2	623	684	1,527	0,114	2	564	584	1,616	0,061
3	613	663	1,548	0,101	3	609	640	1,593	0,075
4	724	784	1,547	0,102	4	599	608	1,650	0,042
5	760	834	1,527	0,114	5	631	640	1,650	0,042
6	754	804	1,570	0,088	6	621	640	1,625	0,056
7	724	784	1,546	0,102	7	621	640	1,625	0,056
8	663	714	1,557	0,096	8	720	746	1,617	0,061
9	621	650	1,579	0,083	9	671	692	1,625	0,057
10	714	774	1,545	0,103	10	665	678	1,643	0,046
—	Среднее:		1,551	0,099	—	Среднее:		1,629	0,054

Таблица XXXVIII.

Тѣ-же самыя половины нити водоросли, что и въ табл. XXXVII. Изъ нихъ первая изслѣдовалась послѣ пребыванія ея втеченіе  $1\frac{1}{2}$  ч. въ темнотѣ, вторая — послѣ нахождения ея втеченіе  $1\frac{1}{2}$  ч. на разсѣянномъ солнечномъ свѣту. Концентраціи растворовъ сахара и глицерина тѣ-же. Температура  $17,5^{\circ}$  С.

Первая половина нити спирогиры. Т е м н о т а.					Вторая половина нити спирогиры. С в ѣ т ѣ.				
№№ клетокъ.	$V^2$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$V_1$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$k'$	$\mu$ .	№№ клетокъ.	$V_2$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$V_1$ (с. с.) $\times 10^{-9}$	$k'$	$\mu$ .
1	631	605	1,607	0,067	1	701	645	1,516	0,105
2	754	720	1,600	0,071	2	606	550	1,521	0,117
3	714	693	1,626	0,056	3	660	—	—	—
4	813	—	—	—	4	637	—	—	—
5	876	845	1,616	0,061	5	681	629	1,547	0,102
6	844	824	1,636	0,040	6	675	—	—	—
7	824	784	1,593	0,074	7	679	630	1,554	0,098
8	824	780	1,588	0,078	8	772	718	1,558	0,095
9	707	—	—	—	9	710	663	1,564	0,092
10	813	—	—	—	10	701	—	—	—
—	Среднее:		1,609	0,064	—	Среднее:		1,550	0,101

Изъ приведенныхъ таблицъ видно, что проницаемость плазматической перепонки спирогиры измѣняется подѣ дѣйствіемъ свѣта во всякомъ случаѣ не менѣе проницаемости плазматической перепонки клетокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* и листовыхъ сочлененій. Соответственно измѣненію проницаемости измѣняется также и осмотическое давленіе клеточнаго сока спирогиры.

Чтобы составить себѣ представленіе о величинѣ измѣненія тургорнаго давленія спирогиры при перемѣнѣ освѣщенія, нужно знать среднюю концентрацію раствора сахара, изотоничную клеточному соку изслѣдованныхъ отрѣзковъ нитей спирогиры, и средній факторъ проницаемости плазматической перепонки ихъ клетокъ для веществъ, растворенныхъ въ клеточномъ соку. Средняя концентрація сахарнаго раствора, изотоничнаго клеточному соку изслѣдованныхъ отрѣзковъ нити спирогиры, оказалась равной 20,1%. Факторъ же проницаемости можно было принять  $\mu_0 = 0,08$  (см. стр. 16). Такимъ образомъ среднее осмотическое давленіе клеточнаго сока изслѣдованныхъ нитей на свѣту  $p = 14$  атм., послѣ же затемнѣнія, принимая уменьшеніе проницаемости при этомъ въ 1,6 раза,  $p = \frac{14(1-0,05)}{1-0,08} = 14,4$  атм.

Резюмируя все сказанное въ этомъ отдѣлѣ главы, мы приходимъ къ заключенію, что плазматическая перепонка клѣтокъ листовыхъ сочлененій не отличается какими нибудь специфическими, ей одной присущими свойствами въ отношеніи чувствительности къ свѣту. Въ такой-же степени чувствительны къ свѣту плазматическія перепонки клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* и спирогиры. Если же въ клѣткахъ сочлененій при перемѣнѣ освѣщенія происходятъ болѣе значительныя колебанія тургорнаго давленія, то это зависитъ только отъ болѣе величины проницаемости плазматической перепонки ихъ клѣтокъ.

Такъ какъ проницаемость перепонки для растворенныхъ веществъ зависитъ отъ ихъ способности растворяться въ послѣдней <sup>1)</sup>, то дѣйствіе свѣта на плазматическую перепонку обуславливается, повидимому, измѣненіемъ ея химическаго состава. Подъ вліяніемъ свѣта въ плазматической перепонкѣ происходятъ очевидно химическія реакціи, состоящія или въ образованіи новаго вещества или въ разрушеніи вещества, образующагося только въ отсутствіи свѣта. Къ какой изъ этихъ двухъ категорій принадлежатъ реакціи, имѣющія мѣсто въ дѣйствительности, должны показать будущія изслѣдованія.

### Выводы главы III <sup>2)</sup>.

1) Перемѣна освѣщенія вызываетъ однородное измѣненіе тургорнаго давленія клѣтокъ въ верхнихъ и нижнихъ половинахъ листовыхъ сочлененій у растений, совершающихъ никтитропныя варіаціонныя движенія. При затемненіи происходитъ увеличеніе этого давленія въ обѣихъ половинахъ сочлененія.

2) Тургорное давленіе клѣтокъ листовыхъ сочлененій увеличивается въ темнотѣ вслѣдствіе уменьшенія проницаемости ихъ плазматической перепонки для веществъ, растворенныхъ въ клѣточномъ соку. Наоборотъ, увеличеніе освѣщенія вызываетъ повышеніе проницаемости, вслѣдствіе чего является уменьшеніе тургорнаго давленія.

3) Движеніе листочковъ тройчатыхъ листьевъ *Phaseolus* при перемѣнѣ освѣщенія вызывается болѣе значительнымъ измѣненіемъ осмотическаго давленія въ клѣткахъ верхней половины сочлененія.

4) Ближайшая причина болѣе значительнаго измѣненія осмотическаго давленія въ клѣткахъ верхней половины сочлененія *Phaseolus* заключается въ болѣе проницаемости плазматической перепонки этихъ клѣтокъ въ сравненіи съ проницаемостью перепонки клѣтокъ нижней половины.

1) См. работы Вальдена (Walden) и Тамманна (Tammann).

2) По не предвидѣннымъ обстоятельствамъ въ главѣ III настоящей работы могла быть напечатана

лишь часть матеріала, первоначально предназначавшагося для этой главы. Остальное будетъ мною напечатано въ непродолжительномъ времени.



5) Движеніе главнаго черешка листьевъ *Mimosa pudica* послѣ затемнѣнія вызывается различной скоростью увеличенія тургорнаго давленія въ верхней и нижней половинахъ сочлененія.

6) Ближайшая причина такого различія заключается въ бѣльшей проницаемости паренхимы нижней половины сочлененія для воды, вслѣдствіе значительно меньшей толщины оболочекъ ея клѣтокъ, сравнительно съ толщиной оболочекъ въ верхней половинѣ.

7) Ближайшая причина движенія вторичныхъ черешковъ листьевъ *Mimosa* послѣ затемнѣнія заключается въ бѣльшей проницаемости для растворенныхъ веществъ плазматической перепонки клѣтокъ въ боковой половинѣ ихъ сочлененій, обращенной въ сторону, противоположную направленію движенія.

8) Перевертываніе растенія вершиною къ землѣ вызываетъ увеличеніе тургорнаго давленія въ клѣткахъ морфологически верхней половины. Это увеличеніе тургорнаго давленія происходитъ вслѣдствіе уменьшенія проницаемости плазматическихъ перепонокъ клѣтокъ для веществъ растворенныхъ. Одновременное уменьшеніе тургорнаго давленія въ противоположной половинѣ сочлененія происходитъ вслѣдствіе увеличенія проницаемости плазматическихъ перепонокъ клѣтокъ этой половины.

9) Послѣ геотропическаго изгиба сочлененія проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ въ морфологически верхней половинѣ его дѣлается меньше проницаемости перепонки въ морфологически нижней половинѣ. Благодаря этому растенія, опускающія листья и листочки послѣ затемнѣнія, совершаютъ въ перевернутомъ положеніи обратныя сонныя движенія.

10) Плазматическая перепонка клѣтокъ листовыхъ сочлененій не отличается какими-нибудь специфическими, ей одной присущими свойствами въ отношеніи чувствительности къ дѣйствию свѣта; въ такой-же степени чувствительны къ свѣту плазматическія перепонки клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* и спирогиры.

11) Такъ какъ проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ эпидермиса *Tradescantia discolor* и спирогиры для веществъ растворенныхъ уменьшается въ темнотѣ и увеличивается при дѣйстви свѣта, то тургорное давленіе этихъ клѣтокъ, наоборотъ, повышается въ темнотѣ и уменьшается при усиленіи освѣщенія.

12) Въ клѣткахъ листовыхъ сочлененій, при перемѣнѣ освѣщенія, происходятъ болѣе значительныя колебанія тургорнаго давленія, чѣмъ въ другихъ растительныхъ клѣткахъ, благодаря бѣльшей проницаемости плазматической перепонки первыхъ для веществъ растворенныхъ.

## ДОПОЛНЕНИЕ.

Когда настоящая работа была уже окончена и главная часть послѣднихъ корректуръ сдана въ типографію (конецъ октября), появилась въ печати работа Пфеффера, посвященная изслѣдованію возникновенія сонныхъ движеній листьевъ (Abhandl. d. math.-phys. Kl. d. Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1907, Bd. XXX, № III).

Оставляя механизмъ движеній въ сторонѣ, авторъ, пользуясь саморегистрирующими приборами, описываетъ свои наблюденія надъ сонными движеніями листьевъ и листочковъ различныхъ растений при естественномъ и искусственномъ освѣщеніи (непрерывномъ и періодически смѣняющимся темнотою). Главные результаты, къ которымъ приходитъ Пфефферъ, остаются тѣ-же, что и полученные имъ 32 года назадъ. Дневныя движенія листьевъ слагаются изъ трехъ родовъ движеній: паратоническихъ, послѣдѣйствій и автономныхъ. Однако значеніе послѣдѣйствій въ возникновеніи дневныхъ движеній, было имъ въ первой работѣ сильно преувеличено (l. p. с. 447 и 466): максимальная амплитуда движенія производится по большей части уже однимъ фотонастическимъ раздраженіемъ.

Если основные выводы, къ которымъ приходитъ Пфефферъ, мало отличаются отъ прежнихъ его выводовъ, то нельзя сказать того-же относительно второстепенныхъ результатовъ новой работы. Эти результаты имѣютъ вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшее отношеніе къ моимъ изслѣдованіямъ, поэтому я останавлиюсь на нихъ нѣсколько подробнѣе.

Выводы, къ которымъ приходитъ Пфефферъ въ двухъ своихъ работахъ, всего болѣе расходятся между собою въ примѣненіи къ случаю соннаго движенія листовыхъ черешковъ мимозы. Въ противоположность прежнимъ своимъ заключеніямъ, названный авторъ считаетъ участіе вторичныхъ черешковъ въ вечернемъ опусканіи главныхъ черешковъ не имѣющимъ никакого значенія. По новому мнѣнію Пфеффера, опусканіе послѣднихъ вечеромъ индуцируется еще разсвѣтомъ; но реакція на утреннее освѣщеніе протекаетъ настолько медленно (*viele Stunden*), что максимальное отклоненіе черешка отъ первоначальнаго положенія приходится только на вечерніе часы (l. с. p. 306). Усиленіе

освѣщенія производитъ, такимъ образомъ, по мнѣнію Пфеффера, очень медленное опусканіе листовыхъ черешковъ, вечернее же затемнѣніе не оказываетъ почти никакого вліянія на ходъ движенія (I. с. р. 411, 467). Авторъ не можетъ однако игнорировать сравнительно быстрого поднятія главнаго листового черешка *Mimosa pudica* при затемнѣніи и считаетъ это явленіе особенной фотонастической реакціей (I. с. р. 383), происходящей только послѣ внезапнаго затемнѣнія (I. с. р. 378, 415)<sup>1)</sup>. Это реакція сильна только у *Mimosa pudica*, внезапное же затемнѣніе *Mimosa Speggazzinii*, выросшей въ естественныхъ условіяхъ, производитъ то слабое поднятіе, то слабое опусканіе главныхъ черешковъ (I. с. р. 383). Такъ какъ по мнѣнію Пфеффера, различать подобныя особенныя реакціи отъ обыкновенныхъ по большей части затруднительно, то онъ не находитъ возможнымъ вдаваться въ дальнѣйшее обсужденіе вопроса (I. с. р. 415). Что же касается своихъ опытовъ съ укрѣпленіемъ вторичныхъ черешковъ мимозы, показавшихъ, какъ упоминалось выше, что вечернее опусканіе листьевъ послѣ такой операціи постепенно прекращается, то Пфефферъ считаетъ выводы, сдѣланные имъ изъ этихъ опытовъ, ошибочными, такъ какъ прекращеніе вечерняго опусканія, по его мнѣнію, происходило лишь благодаря случайной комбинаціи какихъ-нибудь факторовъ (I. с. р. 384 — 385). Во всякомъ случаѣ не одна высокая температура могла вліять на результаты, такъ какъ въ новыхъ опытахъ автора, давшихъ аналогичныя результаты, температура не поднималась выше 24° С. (только въ самые жаркіе дни было 30° С.), въ прежнихъ же опытахъ эта температура была 20,8 — 23,7° С. (Pfeffer, *Periodische Bewegungen* 1875, p. 176 Taf. III). Пфефферъ оставляетъ, такимъ образомъ, невыясненной причину прекращенія вечерняго опусканія листовыхъ черешковъ мимозы послѣ укрѣпленія вторичныхъ черешковъ и отсутствія его у *Mimosa Speggazzinii* въ опытахъ съ искусственнымъ періодическимъ освѣщеніемъ, гдѣ температура не поднималась выше 20,3° С. (I. с. р. 385 — 386).

Характеризуя новые выводы Пфеффера по отношенію къ соннымъ движеніямъ листовыхъ черешковъ мимозы, можно сказать, что авторъ, считая всѣ свои прежнія объясненія ошибочными, не даетъ наблюдаемымъ явленіямъ никакого другого объясненія, если не считать не доказаннаго предположенія его о томъ, что вечернее опусканіе черешковъ вызывается утреннимъ освѣщеніемъ.

Очень жаль, что Пфефферъ могъ поставить только незначительное число опытовъ съ регистраціей движеній листового черешка *Mimosa Speggazzinii* (I. с. р. 379); однако уже изъ того матеріала, который приводится въ работѣ (кривыя фиг. 30 и 31), можно съ увѣренностью заключить, что вечернее опусканіе черешковъ происходитъ у мимозы, какъ было указано выше (стр. 100), вслѣдствіе послѣдствія. Дѣйствительно послѣ того, какъ послѣднее въ опытахъ Пфеффера было устранено непрерывнымъ освѣщеніемъ, регулярная смѣна искусственнаго освѣщенія и темноты, отвѣчавшая дневному

1) Пфефферъ ошибочно думаетъ, что поднятіе | кою же быстротою, какъ опусканіе его вслѣдствіе меха-  
главнаго черешка *Mimosa pudica* совершается съ та- | нического раздраженія (I. с. 415).

ходу измѣненія освѣщенія, приводила къ обратной кривой движенія листового черешка (I. с. р. 380, кривыя фиг. 31). До устранения послѣдѣйствія (верхняя кривая) опусканіе черешковъ достигало своего максимума послѣ наступленія темноты (т. е. ночью), тогда какъ при отсутствіи послѣдѣйствія наибольшее опусканіе наблюдалось вскорѣ послѣ начала освѣщенія (нижняя кривая). Вопросъ можетъ заключаться, лишь въ томъ, какой факторъ вызываетъ первоначальное опусканіе первичнаго черешка мимозы вечеромъ, влекущее за собой послѣдѣйствіе. Не смотря на отрицаніе Пфефферомъ своего прежняго заключенія, единственнымъ пока возможнымъ факторомъ, вызывающимъ это первоначальное вечернее опусканіе листа, должно по прежнему оставаться измѣненіе механическаго момента тяжести листа, благодаря складыванію вторичныхъ черешковъ<sup>1)</sup>. Мы видѣли выше (стр. 100), что одного увеличенія момента тяжести недостаточно для такого сильнаго опусканія листа, какое наблюдается вечеромъ; однако небольшое опусканіе послѣдняго, вслѣдствіе искусственнаго сближенія вторичныхъ черешковъ, всегда происходитъ; поэтому на слѣдующій день послѣ перваго сближенія черешковъ, послѣдѣйствіе вызваннаго этимъ сближеніемъ опусканія первичнаго черешка сложится съ новымъ опусканіемъ его вслѣдствіе той-же причины и амплитуда движенія увеличится. Вечернее опусканіе листьевъ мимозы должно, слѣдовательно, съ каждымъ днемъ увеличиваться, пока не достигнетъ наконецъ своего максимума, опредѣляющагося анатомическими особенностями сочлененій и свойствомъ плазматическихъ перепонокъ клѣтокъ послѣднихъ.

Пфефферъ различаетъ, какъ мы видѣли, два рода реакціи главнаго листового черешка мимозы на затемнѣніе: обыкновенную фотонастическую реакцію при постепенномъ затемнѣніи, которая очень незначительна, и «особенную фотонастическую реакцію», наступающую послѣ внезапнаго затемнѣнія и вырожающуюся у *Mimosa pudica* въ быстромъ поднятіи черешковъ (I. с. р. 378, 379, 383, 411, 415, 467), а у *Mimosa Speggazzinii* то въ слабомъ поднятіи, то въ слабомъ опусканіи послѣднихъ.

Однако движеніе главнаго черешка мимозы при внезапномъ затемнѣніи не представляетъ какой-нибудь «особенной фотонастической реакціи», отличающейся отъ той, которая происходитъ при медленномъ измѣненіи освѣщенія; это показали мои опыты надъ *Mimosa pudica*, поставленные прошлымъ лѣтомъ<sup>2)</sup>. Постепенное затемнѣніе растенія втеченіе часа приводило всегда къ такому же поднятію листовыхъ черешковъ, какъ и внезапное полное затемнѣніе, продолжавшееся часъ. Постепенная же перемѣна освѣщенія втеченіе болѣе продолжительнаго времени вызывала поднятіе черешковъ на меньшій уголъ только благодаря тому, что давленіе въ верхнихъ половинахъ сочлененій успѣвало уже въ свою очередь значительно увеличиться (см. стр. 101 и 107).

1) Можетъ быть это первоначальное опусканіе черешковъ усиливается также пониженіемъ температуры вечеромъ, однако насколько такое предположеніе вѣрно, должны показать дальнѣйшія изслѣдованія.

2) Прежде всего мнѣ самому пришла въ голову мысль объяснить различія въ движеніяхъ черешка *Mimosa pudica* послѣ внезапнаго затемнѣнія и вечеромъ при помощи особенной чувствительности нижней половины сочлененія.

Если бы движеніе черешковъ *Mimosa* при внезапномъ затемнѣніи было «особенной фотонастической реакціей», происходящей вслѣдствіе особенно сильной чувствительности нижней половины сочлененія, къ пріятію чего, повидимому, склоненъ Пфефферъ (I. с. р. 415), то подобная реакція должна была бы наблюдаться и у листочковъ мимозы, имѣющихъ также чувствительную къ раздраженіямъ верхнюю половину сочлененія. Однако, опыты Пфеффера показали, что подобной «особенной реакціей» тамъ не наблюдается. Листочки совершенно одинаково реагируютъ какъ на внезапное, такъ и на постепенное затемнѣніе.

Согласно моему объясненію причины поднятія листовыхъ черешковъ *Mimosa pudica* при затемнѣніи, является совершенно понятнымъ, почему черешки *Mimosa Spegazzinii* даже при внезапномъ затемнѣніи производятъ лишь слабыя движенія, поднимаясь или опускаясь. Дѣйствительно, анатомическое изслѣдованіе листовыхъ сочлененій названнаго растенія показываетъ, что даже у четвертаго листа, считая отъ вершины<sup>1)</sup>, незамѣтно разницы въ толщинѣ клѣточныхъ стѣнокъ въ верхней и нижней половинахъ сочлененія. Поэтому нѣтъ основанія и для разной скорости поднятія тургорнаго давленія въ послѣднихъ послѣ затемнѣнія. Листъ приходитъ, такимъ образомъ, непосредственно въ положеніе, отвѣчающее осмотическому равновѣсію. Отношеніе между поверхностью поперечныхъ сѣченій тѣхъ и другихъ половинокъ сочлененій *Mimosa Spegazzinii* сильно варьируетъ; поэтому является вполне понятнымъ также, почему при внезапномъ затемнѣніи наблюдается, то слабое поднятіе, то опусканіе черешковъ этого растенія (см. стр. 105)<sup>2)</sup>.

Кажущееся противорѣчіе высказанному мнѣнію объ однородности реакціи при медленной и внезапной переменѣ освѣщенія можно на первый взглядъ видѣть въ движеніи листового черешка *Mimosa Spegazzinii* подъ вліяніемъ искусственнаго періодическаго освѣщенія (Pfeffer, I. с. р. 380, нижняя кривая). Въ виду слабости реакціи черешка этого растенія на внезапное затемнѣніе, нужно было ожидать послѣ устраненія послѣдствія лишь слабыя колебанія листового черешка при восстановленіи періодичности освѣщенія, которыя, только постепенно суммируясь со своими послѣдствіями, могли бы создать полную амплитуду движенія. Въ опытѣ же, приведенномъ Пфефферомъ (стр. 380, нижняя кривая), уже первое освѣщеніе вызывало довольно значительное опусканіе черешковъ, а затемнѣніе — поднятіе<sup>3)</sup>. Къ сожалѣнію, послѣ устраненія послѣдствія непрерывнымъ освѣщеніемъ, Пфефферъ подвергалъ растеніе только періодическому искусственному освѣщенію, не

1) Пфефферъ производилъ свои опыты со вторымъ листомъ отъ вершины (I. с. р. 265).

2) Такъ какъ у молодыхъ листьевъ нижняя половина сочлененія сравнительно слабо развита, то при затемнѣніи нужно ждать опусканія ихъ; наоборотъ старые листья съ сильно развитой нижней половиной должны при этомъ подниматься.

3) Заключение Пфеффера относительно того, что листовые черешки *Mimosa Spegazzinii* реагируютъ главнымъ образомъ только на освѣщеніе, мнѣ кажется совершенно несобоснованнымъ. Изъ кривой 31 (I. с. р. 380), видно, что уже первое затемнѣніе приводитъ къ максимальному опусканію черешка мимозы, и только случайное совпаденіе направленія автономнаго движенія съ этимъ опусканіемъ затемняетъ послѣднее.

дѣлая параллельно опытовъ съ естественнымъ освѣщеніемъ и затемнѣніемъ. Между тѣмъ искусственное освѣщеніе вызывало всегда у *Mimosa Spegazzinii* гелиотропическіе изгибы (I. с. р. 378—379); это обстоятельство заставляетъ предполагать, что поднятіе и опусканіе, если и не всецѣло обуславливались, то во всякомъ случаѣ усиливались въ приведенномъ опытѣ боковымъ освѣщеніемъ: при такомъ освѣщеніи нижнія половины сочлененій освѣщались сильнѣе, чѣмъ при естественномъ освѣщеніи (свѣтовые лучи получались въ послѣднемъ случаѣ главнымъ образомъ сверху); верхнія же половины, наоборотъ, получали меньше свѣта. Въ виду сказаннаго является понятнымъ, почему послѣ освѣщенія, слѣдовавшаго за темнотой, въ опытѣ Пфеффера тургорное давленіе нижнихъ половинъ падало сильнѣе, а тургорное давленіе верхнихъ половинъ — слабѣе, чѣмъ послѣ затемнѣнія растенія, находившагося въ естественныхъ условіяхъ освѣщенія. О томъ, что искусственное освѣщеніе было боковымъ въ опытахъ Пфеффера и благодаря этому верхняя половина сочлененія получала меньше свѣта, чѣмъ въ естественныхъ условіяхъ, мы узнаемъ отъ самого автора при толкованіи имъ опытовъ съ *Phaseolus* (I. с. р. 363—366). Нѣтъ ничего удивительнаго, если вмѣсто небольшихъ колебаній главнаго черешка *Mimosa Spegazzinii*, постепенно увеличивающихся съ новыми періодами освѣщенія, въ опытахъ Пфеффера уже первое освѣщеніе вызывало значительное опусканіе черешка. Послѣ прекращенія послѣдѣйствія, естественное освѣщеніе ни въ какомъ случаѣ не могло бы повести къ кривой, полученной при искусственномъ освѣщеніи.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію опытовъ Пфеффера надъ *Phaseolus*.

Прежде всего слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что Пфефферъ ставитъ опыты исключительно съ первичными простыми листьями двухъ разновидностей *Phaseolus vulgaris*, наиболѣе пригодныхъ для изслѣдованія сонныхъ движеній. Первичные листья *Phaseolus multiflorus* совершаютъ лишь незначительныя движенія и не годятся для изслѣдованія (I. с. р. 342—343).

Изъ своихъ опытовъ Пфефферъ дѣлаетъ выводъ, аналогичный сдѣланному имъ изъ опытовъ съ *Mimosa Spegazzinii*: утреннее освѣщеніе индуцируетъ, по его мнѣнію, вечернее опусканіе листа, происходящее, такимъ образомъ, только черезъ довольно продолжительное время послѣ начала освѣщенія (I. с. р. 343, 306, кривая фиг. 22 *A* на стр. 346). Въ прежней своей работѣ Пфефферъ, наоборотъ, рассматривалъ вечернее опусканіе листа, какъ результатъ комбинаціи паратонического дѣйствія затемнѣнія и послѣдѣйствія (Pfeffer, III, p. 45).

Кривая, полученная послѣ устраненія послѣдѣйствія непрерывнымъ освѣщеніемъ, по своему виду одинакова съ кривой, полученной въ опытѣ надъ растеніемъ, подвергавшемся все время естественной смѣнѣ освѣщенія (см. крив. на стр. 344 и 346). Поэтому при объясненіи движенія первичнаго листа *Phaseolus* можно, дѣйствительно, вмѣстѣ съ Пфефферомъ сказать, что послѣдѣйствіе не необходимо для вечерняго опусканія листа. Изъ кривыхъ фиг. 22 *A*, 23 и 25 *A*, приводимыхъ Пфефферомъ, видно кромѣ того,

что освѣщеніе вызываетъ опусканіе, а затемнѣніе — поднятіе листа <sup>1)</sup>. Пфефферъ объясняетъ такое противорѣчіе найденному имъ факту опусканія первичнаго листа *Phaseolus vulgaris*, выросшаго при естественномъ освѣщеніи, тѣмъ, что въ послѣднемъ случаѣ послѣ затемнѣнія, происходитъ прекращеніе односторонняго освѣщенія сочлененія сверху и вызваннаго имъ геліотропическаго изгиба листа (I. с. р. 363, 405). Справедливость такого толкованія опусканія листа послѣ затемнѣнія доказывается, по мнѣнію Пфеффера, тѣмъ, что при искусственномъ (т. е. боковомъ) освѣщеніи, а также послѣ предварительнаго затемнѣнія верхней половины сочлененія кусочкомъ черной матеріи, такого опусканія листа не наблюдается (I. с. 363 — 366).

Противоположная реакція листа на затемнѣніе при большемъ освѣщеніи верхней половины сочлененія сравнительно съ нижней половиной и одинаковомъ освѣщеніи обѣихъ половинокъ, вполне объяснима и съ точки зрѣнія выводовъ, сдѣланныхъ въ предлагаемой работѣ. Дѣйствительно, если листъ реагируетъ на затемнѣніе при одинаковомъ освѣщеніи обѣихъ половинокъ сочлененія поднятіемъ, то проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ въ нижней половинѣ должна быть больше проницаемости ея въ верхней половинѣ. Однако при большемъ освѣщеніи верхней половины сочлененія (естественное освѣщеніе) можетъ наблюдаться и опусканіе листа послѣ затемнѣнія, такъ какъ проницаемость плазматической перепонки клѣтокъ въ верхней половинѣ при этомъ уменьшается въ болѣе значительной степени, чѣмъ въ нижней половинѣ: чѣмъ больше измѣненіе освѣщенія, тѣмъ больше и измѣненіе проницаемости. Такимъ образомъ нѣтъ необходимости вмѣстѣ съ Пфефферомъ предполагать здѣсь какую-нибудь «особенную способность» сочлененія реагировать на болѣе сильное освѣщеніе сверху (I. с. 405).

Дальнѣйшее изслѣдованіе должно показать, какимъ образомъ можно разяснить всѣ противорѣчія, къ которымъ приходитъ Пфефферъ въ своихъ работахъ, дѣлая опыты надъ первичнымъ листомъ фасоли. Къ сожалѣнію я не могъ достать разновидностей *Phaseolus vulgaris vitellinus* и *Tausend für eine*, съ которыми ставилъ свои опыты Пфефферъ <sup>2)</sup>; имѣвшіяся въ моемъ распоряженіи разновидности *Phaseolus multiflorus* и *vulgaris* имѣли такія незначительныя сонныя движенія первичныхъ листьевъ, что ставить съ ними опыты не представлялось возможнымъ. Поэтому я не могу сказать пока ничего положительнаго относительно механики этихъ движеній. Всѣ свои опыты я дѣлалъ исключительно съ тройчатыми листьями *Phaseolus multiflorus* и *vulgaris*, которые судя по литературнымъ даннымъ совершаютъ сонныя движенія во всякомъ случаѣ отличныя или даже противоположныя движеніямъ первичныхъ листьевъ (см. напр. Darwin, Ch. p. 313).

1) Какъ и при объясненіи движенія *Mimosa*, Пфефферъ принимаетъ, что первичный листъ *Phaseolus vitellinus* реагируетъ, главнымъ образомъ, на освѣщеніе (I. с. 306, 411, 467), тогда какъ изъ приведенныхъ имъ кривыхъ, видно, что уже при пер-

вомъ затемнѣніи листъ поднимается на максимальную высоту.

2) Разновидности *Phaseolus vitellinus*, по свидѣтельству Пфеффера, уже не имѣется въ продажѣ (I. с. 342, прим.).

Такимъ образомъ, желаніе Пфеффера изъ своихъ опытовъ съ первичными листьями по аналогіи заключить о движеніи тройчатыхъ листьевъ (l. с. р. 372—373) кажется мнѣ неосновательнымъ. Въ опытѣ предварительнаго затемнѣнія верхней половины сочлененія, которымъ Пфефферъ пытается подкрѣпить свою аналогію, движеніе листочковъ послѣ помѣщенія растенія въ темноту могло отсутствовать, не зависимо отъ какой-либо «особенной способности» сочлененій реагировать на болѣе сильное освѣщеніе сверху.

Другіе случаи сонныхъ движеній, изслѣдуемые Пфефферомъ, не представляютъ какихъ-либо противорѣчій съ его прежними данными, поэтому я не нахожу нужнымъ останавливаться на нихъ.

---



## Литература разбираемыхъ вопросовъ.

- Arrhenius S. Ueb. d. Dissociationswärme etc. Zeitschrift f. physik. Chemie. 1889. Bd. 4, p. 96.
- Aubert. Recherches sur la turgescence et la transpiration etc. Ann. d. sciences natur., t. XVI, 1892, p. 1.
- Askenasy. Beziehung. zwisch. Wachsth. u. Temper. Ber. d. deutsch. bot. Gesellsch., 1890, p. 69.
- Bert. Recherches sur l. mouvem. d. l. sensitive. 2-e mem. d. l. soc. d. sc. Bordeaux. 1870.
- Boehm, I. Ueb. d. Ursache d. Mark- und Blatt-Turgors. Bot. Ztg. 1886 p. 257.
- Brücke. Ueb. d. Beweg. d. Mimosa pudica, Müller's Arch. f. Anatomie u. Physiologie. 1848, p. 434.
- Bütschli. Unters. über mikroskop. Schäume. 1892.
- Candolle-de. Mem. près. à l'inst. p. div. sav. 1805, T. I, p. 349.  
— Pflanzenphysiologie (пѣм. пер.). 1835. Bd. II, p. 640.
- Cavaras — работы цитир. у Pantanelli, II, p. 366.
- Copeland. Ueb. d. Einfl. v. Licht und Temperat. auf d. Turgor. Diss. Halle. 1896.
- Darwin, Ch. Das Bewegungsvermögen d. Pflanzen. 1881, p. 346.
- Demoor, I. La significat. d. l. pression cellulaire etc. Journ. d. l. soc. royale d. sc. med. etc. n<sup>o</sup> 7, 1895.
- Dieterici. Ueb. d. Dampfdrucke d. Lös. Wiedem. Ann. d. Physik. 1897. Bd. 62, p. 632,  
— » » » » » Wied. Ann. d. Physik. 1899. Bd. 67, p. 865.
- Dixon. H. I. Note on th. Role of Osmos. etc. Proc. of th. Roy. Irish. Acad. v. III, 1896. p. 767.  
— II. On th. Osmotic. Press. in th. cells of Leaves. Ibid. v. IV. 1896, p. 61.
- Dutrochet. Mémoires p. serv. a l'hist. v. veg. Brüssel. 1837.
- Errera. I. S. l. mécanisme du summel. C. f. à l. soc. d'anthropol. d. Bruxelles, 25 mars 1895.  
— II. Rem. s. l. toxicité moléc. d. alc. Bull. d. l. soc. roy. d. sc. med. et nat. Bruxelles. 1900, p. 25.  
— III. Sur l. myriotonie comme unité d. l. mes. osmot. Bull. d. l'Ac. roy. d. Belg. 1901, III, p. 135.
- Eschenhagen. Ueb. d. Einfl. v. Lös. verschied. Concentr. auf d. Wachsth. v. Schimmelpilzen. Diss. Leipzig. 1889.

- Etard. La constit. d. solut. étend. et l. pression osmot. Rev. gen. 15 avr. 1890.
- Fischer, A. Botan. Ztng. 1890. Bd. 48, p. 672.
- Fitting, Unters. üb. d. Haptotropismus d. Ranken. Jahrb. für. wiss. Botanik. 1895. Bd. 27, p. 73.
- Fünfstück. Ueb. d. Permeabilität d. Niederschlagsmembr. Ber. d. deutsch. botan. Gesellsch. 1893, II. p. 80.
- Godlewski. Ueb. d. Beeinfluss. d. Wachst. v. d. äuss. Fakt. Anz. d. Akad. d. Wissensch. zu Krakau. 1890, p. 170.
- Hamburger. Die isoton. Coefficienten und d. roth. Blutkörper. Zeitschr. f. physikal. Chemie. Bd. VI. 1890.
- Hegler. Ueb. d. Einfluss d. mechan. Zugs auf d. Wachst. Beitr. zur Biol. d. Pflanz. hrsgb. v. Cohn. Bd. VI. H. 3, p. 383.
- Hilburg. Ueb. Turgescenzänderungen etc. Unters. a d. botan. Institut. z. Tübingen. Bd. I, 1881, p. 23.
- Hoff, van't Zur Theorie der Lösungen. Zeitschr. f. phys. Ch. Bd. 9. 1892, p. 477.
- Hofmeister F. Beteil. d. Salze an Quellungsvorgängen. Arch. f. experim. Pathol. u. Pharmakol. 28. 1891, p. 210.
- Hofmeister. W. Pflanzenzelle. 1867.
- Janse. Plasmolytische Versuche etc. Botan. Ctrbl. Bd. XXXII, 1887, n<sup>o</sup>. 40.  
— D. Permeabilität d. Protoplasma. Versl. en med. d. koninkl. Akad. v. wetensch. Amsterdam. Bd. IV, 1888, p. 332 (Ref. Bot. Ztg. 1889, p. 239).
- Iost. I. Beitr. z. Kenntn. d. nyctitrop. Beweg. Jahrb. f. wiss. Botan. Bd. 31, p. 369.  
— II. Ueb. d. Beweg. v. Mimosa pudica. Botan. Ztg. 1897. s. 17.
- Kaufler. Ueb. d. Verschieb. d. osmot. Gleichgewichts etc. Zeitschr. f. physik. Chemie. 1903. Bd. 43, p. 686.
- Kohl. D. Mechan. d. Reizkrümmungen. 1894.
- Kohlrausch. Wiedem. Ann. 26, 195, 1885.
- Kolkwitz. Unters. üb. Plasmolyse etc. Dissert. Berlin. 1895.
- Krabbe. Ueb. d. Einfluss d. Temp. a. d. osmot. Prozesse etc. Jahrb. f. wiss. Botan. Bd. XXIX. 1896, p. 441.
- Krabbe u. Schwendener. Ueb. d. Beziehung. zw. Turgordehn. etc. Jahrb. f. wiss. Botan. 1893, p. 323.
- Laurent, E. Etud. s. l. turgesc. etc. Bull. d. l'Acad. r. d. Belgique. T. X. 1885, 3 ser., p. 12.
- Lenkewitz. Unt. üb. d. Kapilarität. Dissert. 1904, Münster.
- Lepeschkin. I. Ueb. d. mathemat. Ausdruck. etc. Zeitschr. f. physik. Chemie. Bd. 48, p. 596.  
— II. Zur Kenntnis d. Mechanismus etc. Beihefte z. bot. Centralbl. 1906. Bd. XIX, Abt. I. H. 3, p. 409.

- Lepeschkin. III. Zur Kenntn. d. Wachstumsmechanismus etc. Beihefte z. bot. Centralbl. 1907.
- Lerch. Oberflächenspannung etc. Ann. d. Physik. 1902. Bd. 9, p. 434.
- Mayenburg, von. Lösungskonzentration u. Turgorregulation etc. Jahrb. f. wiss. Botan. Bd. 36. 1901, p. 381.
- Maquenne. I. Sur le rôle de l'osmose d. l. veget. Comptes rendus. T. 121, p. 834.  
— II. То-же. Comptes rendus. T. 123, 1896, p. 898.
- Millardet I. Mémoire etc. 1837, p. 508 u. 521.  
— II. Nouv. rech. s. l. périodicité d. la tension. 1869.
- Nathanson. I. Ueb. Regulationserschein. im Stoffaustausch. Jahrbüch. f. wiss. Botan. 1902.  
— II. То-же. Jahrbüch. f. wiss. Botan. Bd. 38. 1903, p. 241.  
— III. » Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. 39. 1904, p. 607.  
— IV. » Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. 40. 1904, p. 403.
- Nägeli. Pflanzenphysiol. Unters. 1855. I, p. 21.
- Nägeli u. Schwendener. Mikroskop. 1877. II Aufl.
- Nernst. Theoretische Chemie. II Aufl.
- Noll I. Beitr. z. Kenntn. d. physik. Vorgänge etc. Unters. a. d. bot. Instit. Würzburg. Bd. 3. 1888, p. 496 и слѣд.  
— II. Ueb. d. Mechan. d. Krümmungsbew. etc. Flora. Bd. 81 Ergsb. 1895.  
— III. Heterogene Induktion. Leipzig. 1892.
- Ostwald. Lehrbuch d. allgem. Chemie. 2 Aufl. Bd. I, 1891, Bd. II, 1893.
- Overton. I. Die osmot. Eigensch. d. lebend. Pflanzenselle. Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Ges. in Zürich. 1895. 2 H.  
— II. Ueb. d. osmot. Eigensch. d. Zelle etc. Zeitschr. f. phys. Chemie. Bd. XXII p. 189.  
— III. Studien üb. d. Aufnahme d. Anilinforrb. Jahrb. f. wiss. Botan. Bd. XXXIV, 1900.  
— IV. Ueb. d. osmot. Eigensch. d. Zelle. Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellsch. in Zürich. Bd. 44. 1899, p. 110.
- Pantanelli. I. Studi d'anatomia e fisiol. etc. Modena. 1901. Ref. Iost'a въ Bot. Ztg. 1901. II Abt., p. 122.  
— II. Zur Kenntniss d. Turgorregulation etc. Jahrb. f. wiss. Botan. Bd. 40. 1904.
- Pfeffer. I. Physiologische Untersuchungen. 1873.  
— II. Ueb. d. Zustandekommen d. hohen hydrost. Druckes etc. Sitzb. d. niederrh. Gesellsch. f. Naturk. Bonn. v. 2. Aug.  
— III. Periodische Bewegungen d. Blattorgane. 1875.  
— IV. Osmotische Untersuchungen. 1877.  
— V. Kritische Besprech. v. de-Vries plasmol. Stud. Bot. Ztg. 1886, p. 114.

- Pfeffer. VI. Ueb. Aufnahme v. Anilinfarben etc. Unt. a. d. botan. Inst. Tübingen. Bd. II. 1886 — 88, p. 179.
- VII. Ueb. Oxydationsvorgänge in leb. Zellen. Ber. d. deutsch. botan. Gesellsch. Bd. LXXV. 1889, p. 82.
- VIII. Ueb. Aufnahme u. Ausgabe ungelöst. Körper. Abh. d. k. sächsisch. Gesellsch. d. Wissensch. Math.-phys. Kl. Bd. XVI, 1890.
- IX. Zur Kenntniss d. Plasmahaut u. Vacuolen. Abh. d. sächs. Gesellsch. Math. Kl. Bd. XVI. 1890.
- X. Studien zur Energetik etc. Abh. d. sächs. Gessellsch. Math. Kl. 1893. Bd. XVIII.
- XI. Druck u. Arbeitsleist. d. wachs. Pflanz. Abh. d. sächs. Gesellsch. d. wiss. Math.-phys. Kl. Bd. XX. 1893, p. 235.
- XII. Pflanzenphysiologie II Aufl. Bd. I. 1897. Bd. II. 1904.
- Pringsheim. I. Unters. üb. d. Bau u. d. Bildung d. Pflanzenzelle Berlin. 1854, p. 12.
- II. Ueb. chemische Niederschläge in Gallerte. Jahrb. f. wiss. Botan. 1895. Bd. 28, p. 1.
- Puriewitsch. Ueb. d. selbsttät. Entleerung etc. Ber. d. deutsch. botan. Gesellsch. 1896, p. 207.
- Quincke. Annalen der Phys. u. Chemie. 139. 1870.
- Reinhardt. Plasmolytische Studien etc. Schwendener's Festschrift. 1899, p. 425.
- Rysselberghe. van. I. Reaction osmotique etc. Bruxelles. 1899.
- Influence d. l. temperature sur la perméabilité d. protoplasme etc. Bull. d. l'Acad. roy. d. Belgique. n° 3. 1901.
- Sachs. I. Experimentalphysiologie. 1865.
- II. Lehrbuch d. Botanik. IV Aufl.
- Schwendener. I. Die Gelenkpolster v. Mimosa pudica. Sitzb. d. Berl. Akademie. 1897, p. 228.
- II. Die Gelenkpolster v. Phaseolus u. Oxalis. Sitzb. d. Berl. Akademie. 1898, p. 176.
- Schwendener und Krabbe, см. Krabbe u. Schwendener.
- Semon. Die Mneme. 1904, p. 95.
- Biolog. Ctbl. 1905. Bd. 25, p. 241.
- Smits. Ueb. d. Verlauf d. Fakt. *i* etc. Zeitschr. f. phys. Ch.-Bd. 39. 1901, p. 385.
- Stange. Bezieh. zw. Substratkonc., Turgor etc. Bot. Ztg. 1892, p. 253.
- Strassburger. Die pflanzliche Häute. Jahrb. f. wiss. Botan. 1898. Bd. 31, p. 511.
- Tammann. I. Ueb. Osmose d. Niederschlagsmembr. Wied. Ann. d. Phys. u. Chemie. Bd. 34. 1888, p. 299.
- II. Zur Messung osmotischer Drucke. Zeitschr. f. phys. Chemie. Bd. 9, p. 97.
- III. Ueb. d. Perméabilit. d. Niederschlagsmembr. Zeitschr. f. phys. Chemie. Bd. 10, p. 255.

- Tieghem, van. *Traité de Botanique*. I et II. Paris. 1891.
- Traube. *Centralblatt f. medicin. Wissenschaft*. 1865.
- Truc. On the infl. of sudd. changes of turgor etc. *Ann. of Botany*. 1895, p. 365.
- Tswett. *Etudes de physiol. cellulaire*. Bull. d. Labor. d. bot. d. l'Univ. d. Genève, vol. I, 1896, p. 127.
- Verschaffelt. Ov. weerstandsvermog. v. h. protoplasma etc. *Bot. Jaarb. u. Kruidk. Genootsch. Dodonoea, Gent. t. III*, 1891.
- Vignon. Absorbstion v. Flussigk. d. Gevebestoffe. *Comptes rendus*. 127, p. 73 — 75.
- Voigtländer. Ueb. d. Diffusin in Agargallerte. *Zeitschr. f. physik. Chemie*. Bd. 3, 1889, p. 316.
- Vries, de. I. Sur l. perméabil. d. protoplasm. etc. *Arch. néerlandaises*. 1871, p. 117.
- II. Unters. üb. d. mechan. Ursach. d. Zellstreckung. 1877.
- III. Sur la perméabil. d. membr. precipitées. *Arch. néerlandaises*. 1878, t. 13, p. 344.
- IV. Ueb. d. Anth. d. Pflanzensäuren etc. *Bot. Ztg.* 1883, p. 849.
- V. Osmotische Untersuchungen etc. *Zeitschrift f. physik. Chemie*. 1888. Bd. 2, p. 415.
- VI. Zur plasmolut. *Methodik Bot. Ztg.* 1884, p. 289.
- VII и VIII. Plasmolytische Studien etc. *Jahrb. f. wiss. Botan.* Bd. 16, 1885, p. 465.
- IX. Ueb. osmot Koeff. v. Glycerin. *Bot. Ztg.* 1888, p. 229.
- X. Perméabilité d. Protoplasmas f. Harnstoff *Bot. Ztg.* 1889, p. 309.
- XI. Ueb. d. Ursach. d. Richt. bil. symm. Pflanzent. *Arb. d. bot. Inst. Würzburg*. Bd. I. H. I, p. 258.
- Walden. Ueb. Diffusionsersch. an d. Niederschlagsmembr. *Zeitschr. f. physik. Chemie*, Bd. X. 1892, p. 699.
- Wiedersheim. Studien üb. photonastische Beweg. *Jahrb. f. wiss. Bot.* Bd. 40, p. 230.
- Went. Entstehung d. Vacuolen etc. *Jahrb. f. wiss. Bot.* Bd. 19. 1888, p. 296.
- Wiedemann u. Lüdeking, Quellung d. Gelatine. *Ann. d. Phys.* 1885, Bd. 15, p. 53.
- Wieler. Plasmolyt. Versuche etc. *Ber. d. deutsch. Bot. Gesellsch.* Bd. V. 1887, p. 375.
- Winkelmann. *Handbuch d. Physik*. 1891. Bd. I.
- Wortmann. I. Beiträge z. *Physiol. d. Wachsth.* *Bot. Ztg.* 1889, p. 229.
- II. Zur Kenntniss d. Reizbew. *Bot. Ztg.* Bd. 45. 1887, p. 788.
- Young. *Works by Peacock*. I. p. 463. 1855.

Ленешкинъ. Изслѣдованіе надъ выдѣл. водн. раств. *Зап. Ак. Наукъ. Спб.*, 1904. Физ.-мат. кл. 15, № 6.

Хвольсонъ. *Учебникъ Физики*. 1897.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

СТРАНИЦА: СТРОЧКА:	НАПЕЧАТАНО:	НУЖНО ЧИТАТЬ:
4 21 св.	клѣтки	клѣткѣ
5 10 и 20 св.	Kolkwitz, p. 37.	Copeland, p. 37.
8 21 св.	VI	V
9 3 сн.	III	I
10 7 сн.	Риссельбергомъ	Риссельберга
17 15 св.	XV	XII
» »	Nägeli, p. 373	Nägeli, p. 21
18 2 сн.	коносу	конусу
20 11 св.	p. 33	p. 119, прим.
36 5 св.	$\beta = \frac{w}{1000 P + \left(1 - \frac{w}{(V+w)^2}\right)}$	$\beta = \frac{w}{1000 Pt \left(1 - \frac{w}{(V+w)^2}\right)}$
37 7 св.	p. 299	p. 292
» 14 св.	обѣихъ	обоихъ
48 6 сн.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ч.
57 18 св.	прибавленія и удаленія	прибавленіе и удаленіе
61 1 св.	измѣненіе послѣдняго на давленіе даже	давленіи измѣненіе послѣдняго даже
68 19 св.	имѣющихъ	имѣютъ
73 4 св.	уменьшена	уменьшены
81 5 сн.	единственнымъ пока	наиболѣе нагляднымъ и

PRESENTED  
8 JUN. 1916









Цѣна: 1 руб. 80 к.; Prix: 4 Mrk.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и Н. Л. Риннера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петербур., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Ключина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Ниммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзанѣ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Pétersbourg, N. Karbasnikof à St.-Pétersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Ogioblina à St.-Pétersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sörgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

8 JUN. 1916

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**  
**MÉMOIRES**  
**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.**  
**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 3.**

**Volume XXII. № 3.**

**ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ СОЛНЕЧНАГО СІЯНІЯ**  
**ВЪ РОССІИ.**

**П. Ваннари.**

СЪ 3 ТАБЛИЦАМИ.

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 13 декабря 1906 г.).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1907. ST.-PÉTERSBOURG.**



**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 3.**

**Volume XXII. № 3.**

---

# ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ СОЛНЕЧНАГО СІЯНІЯ

## ВЪ РОССІИ.

—  
**П. Ваннари.**

—  
СЪ 3 ТАБЛИЦАМИ.  
—

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 13 декабря 1906 г.).*



С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1907. ST.-PÉTERSBOURG.

Декабрь 1907 года.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ*.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 лин., № 12.

## ОГЛАВЛЕНІЕ.

---

	Стран.
I. Введеніе.....	1
II. Сравненіе продолжительности солнечнаго сіянія по записямъ гелиографовъ Кемп- беля и Величко .....	2
III. Продолжительность солнечнаго сіянія въ среднемъ годовомъ выводѣ .....	5
IV. Продолжительность солнечнаго сіянія лѣтомъ и зимою .....	6
V. Годовой ходъ продолжительности солнечнаго сіянія.....	6
VI. Суточный ходъ продолжительности солнечнаго сіянія .....	9
1. Суточный ходъ солнечнаго сіянія за годъ .....	9
2. Суточный ходъ солнечнаго сіянія за лѣтніе мѣсяцы.....	10
3. Суточный ходъ солнечнаго сіянія за зимніе мѣсяцы .....	11
4. Распредѣленіе солнечнаго сіянія до полудня и послѣ полудня.....	12
VII. Распредѣленіе по годамъ наибольшей и наименьшей величины средней годовой продолжительности солнечнаго сіянія .....	14
VIII. Отношеніе продолжительности солнечнаго сіянія къ облачности .....	16
IX. Замѣтка о вѣковомъ ходѣ продолжительности солнечнаго сіянія въ Павловскѣ ..	19

## ПРИЛОЖЕНІА.

Алфавитный списокъ станцій, наблюденія которыхъ надъ солнечнымъ сіяніемъ использованы въ этой работѣ .....	21
Таблицы выводовъ изъ наблюденій надъ продолжительностью солнечнаго сіянія:	
Таблица I. Средняя продолжительность солнечнаго сіянія за сутки въ часахъ...	25
Таблица II. Суточный ходъ продолжительности солнечнаго сіянія.....	28

---



# О продолжительности солнечнаго сіянія въ Россіи.

## I. Введение.

Въ Россіи первый гелиографъ былъ установленъ въ Константиновской Обсерваторіи въ Павловскѣ въ 1880 г.; до 1892 г. это былъ единственный пунктъ въ Россіи, гдѣ производились такого рода наблюденія; съ 1892 г. эти приборы стали устанавливаться и въ другихъ мѣстахъ, сначала въ очень немногихъ, но въ послѣднія восемь лѣтъ число ихъ быстро увеличилось, и въ 1903 г. въ Лѣтописяхъ Николаевской Главной Физической Обсерваторіи напечатаны уже выводы съ 145 пунктовъ.

Нами обработаны наблюденія только для тѣхъ пунктовъ, для которыхъ имѣются наблюденія по крайней мѣрѣ за 3 года 1901—1903.

Въ Россіи дѣйствуютъ гелиографы системы Кемпбеля и Величко. Записи этихъ двухъ приборовъ не вполне сравнимы, такъ какъ гелиографъ Кемпбеля записываетъ тепловое дѣйствіе солнечныхъ лучей, а гелиографъ Величко — химическое.

Эти приборы далеко несовершенны, такъ какъ они записываютъ только продолжительность инсоляціи, но не даютъ представленія объ интенсивности и химической силѣ солнечныхъ лучей. Но и продолжительность солнечнаго сіянія не записывается этими приборами полностью; запись начинается нѣсколько времени послѣ восхода и прекращается за нѣкоторое время до заката солнца. Въ гелиографѣ Величко, кромѣ того, имѣетъ еще большое значеніе качество свѣточувствительной бумаги, которое не всегда было удовлетворительно.

По гелиографу Кемпбеля наблюденія производились въ слѣдующихъ пунктахъ: Халила; С.-Петербургъ, Ник. Гл. Физ. Обсерваторія; Павловскъ, Константиновская Магн.-Мет. Обсерваторія; Екатеринбургъ, Магн.-Мет. Обсерваторія; Богородицкое; Мартыновка; Магарачъ; Эссентуки; Желѣзноводскъ; Байрамъ-Али и Иркутскъ, Магн.-Мет. Обсерваторія.

Пункты съ гелиографомъ Кемпбеля въ таблицахъ всюду отмѣчены звездочкой (\*).

На остальныхъ станціяхъ наблюденія производились, за разсматриваемый нами періодъ, по гелиографу Величко. На нѣкоторыхъ станціяхъ наблюденія производились по обоимъ гелиографамъ, на что болѣе подробно будетъ указано ниже.



Продолжительность солнечного сияния вычислялась или проверялась въ Ник. Гл. Физ. Обсерваторіи по записямъ всѣхъ станцій вполнѣ однообразно, а потому весь разсматриваемый нами матеріалъ является, относительно его первоначальной разработки, вполнѣ сравнимымъ.

## II. Сравненіе продолжительности солнечного сиянія по записямъ гелиографовъ Кемпбеля и Величко.

Одновременныя наблюденія продолжительности солнечного сиянія по гелиографамъ Кемпбеля и Величко имѣются, какъ уже упоминалось выше, для нѣсколькихъ пунктовъ и за достаточно продолжительное время, такъ что есть возможность получить нѣкоторый критерій для опредѣленія сравнимости результатовъ, полученныхъ по этимъ двумъ приборамъ.

Такія одновременныя наблюденія имѣются: въ Новомъ-Королевѣ за 1902 и 1903 гг.; въ Богородицкомъ за 1902 г. и въ 1903 г. съ января по мартъ и съ іюля по декабрь; въ Перми въ 1902 г. съ января по апрѣль и за октябрь и декабрь и въ 1903 г. за январь и съ апрѣля по декабрь; въ Сагунахъ за 1903 г. съ іюня по декабрь и въ Благодаткѣ за 1903 г.; всего за 80 мѣсяцевъ. Въ 74 мѣсяцахъ изъ 80, гелиографъ Величко показывалъ большее число часовъ съ солнечнымъ сияніемъ, чѣмъ гелиографъ Кемпбеля, въ 5 мѣсяцевъ наоборотъ гелиографъ Кемпбеля показываетъ больше, а въ одномъ мѣсяцѣ оба гелиографа даютъ одинаковое число солнечныхъ часовъ. Въ число мѣсяцевъ, когда Кемпбель показывалъ больше, входятъ: декабрь — 3 раза, ноябрь и январь — по одному разу, причемъ большее показаніе Кемпбеля наблюдалось только въ двухъ пунктахъ въ Перми (4 раза) и въ Благодаткѣ (1 разъ).

Отношеніе продолжительности солнечного сиянія по гелиографу Кемпбеля къ продолжительности солнечного сиянія по гелиографу Величко въ процентахъ выражается слѣдующими числами:

	Январь.	Февр.	Мартъ.	Апрѣль.	Май.	Іюнь.	Іюль.	Августъ.	Сент.	Октябрь.	Ноябрь.	Дек.	Годъ.
%	81	76	78	79	85	91	90	85	80	83	82	95	84

Нами разсмотрѣнъ также вопросъ, какой изъ этихъ двухъ гелиографовъ записываетъ солнечное сияніе утромъ раньше и вечеромъ позже. Оказалось, что въ 48 изъ 80 мѣсяцевъ гелиографъ Величко начинаетъ раньше и кончаетъ позже записывать солнечное сияніе, чѣмъ гелиографъ Кемпбеля, кромѣ того онъ еще въ 13 мѣсяцахъ начинаетъ записывать раньше и въ 6 мѣсяцахъ кончаетъ позже, а въ 7 мѣсяцахъ оба гелиографа кончаютъ запись одновременно.

Результатъ сравниванія записей обоихъ гелиографовъ можетъ быть изображенъ въ видѣ слѣдующей таблицы:

Таблица 1.

Число мѣсяцевъ, за которые имѣются одновременныя на- блюденія.	Гел. Кемпбеля запи- сывать больше.		Гел. Кемпбеля запис- ывать раньше и позже.		Гел. Кемпбеля запи- сывать позже.		Гел. Кемпбеля запис- ывать раньше.		Гел. Кемпбеля запис- ывать всего позже.		Гел. Кемпбеля запис- ывать всего раньше.		Гел. Величко записыв- ать больше.		Гел. Величко запис- ывать раньше и позже.		Гел. Величко записыв- ать позже.		Гел. Величко записыв- ать раньше.		Гел. Величко записыв- ать всего позже.		Гел. Величко записыв- ать всего раньше.		Оба гелиограф. кончили запись одновременно.		
	%		%		%		%		%		%		%		%		%		%		%		%		%		
Январь 7 лѣтъ . . .	1	14	2	2	0	4	58	2	28	6	86	2	0	3	2	28	5	72	1	14							
Февраль 6 » . . .	0		0	1	0	1	17			6	100	5	0	1	5	83	6	100									
Мартъ 7 » . . .	0		0	0	0					7	100	7	0	0	7	100	7	100									
Апрѣль 6 » . . .	0		0	1	1	1	17	1	17	6	100	4	1	1	5	83	5	83									
Май 5 » . . .	0		1	0	0	1	20	1	20	5	100	4	0	0	4	80	4	80									
Іюнь 6 » . . .	0		2	0	1	2	33	3	50	6	100	2	0	1	2	33	3	50	2	34							
Іюль 7 » . . .	0		2	1	2	3	42	4	58	7	100	2	2	1	4	58	3	42									
Августъ 7 » . . .	0		1	1	1	2	29	2	29	7	100	4	1	1	5	71	5	71									
Сентябрь 6 » . . .	0		0	0	1			1	17	6	100	5	1	0	6	100	5	83									
Октябрь 8 » . . .	0		0	0	0					8	100	7	0	1	7	88	8	100	1	12							
Ноябрь 7 » . . .	1	14	1	1	1	2	29	2	29	6	86	4	1	1	5	71	5	71									
Декабрь 8 » . . .	3	38	1	2	2	3	38	3	38	5	62	2	0	3	2	24	5	62	3	38							
Всего...80 . . . . .	5	6	10	9	9	19	24	19	24	75	94	48	6	13	54	68	61	76	7	8							

*Примчаніе:* Подъ словомъ «раньше» подразумѣвается, что запись начиналась раньше, подъ словомъ «позже», что запись кончалась позже.

Какъ видно изъ этой таблицы гелиографъ Величко записываетъ раньше въ 76% всѣхъ случаевъ и кончаетъ запись позже или одновременно съ гелиографомъ Кемпбеля также въ 76% всѣхъ случаевъ. Гелиографъ Кемпбеля начинаетъ записывать раньше въ 4 случаяхъ изъ 7 въ іюль и кончаетъ позже въ 4 случаяхъ изъ 7 въ январѣ. Во всѣ остальные мѣсяцы въ большинствѣ случаевъ гелиографъ Величко записываетъ солнечное сіяніе раньше и позже, чѣмъ гелиографъ Кемпбеля.

Для сравненія суточного хода продолжительности солнечнаго сіянія по гелиографамъ Кемпбеля и Величко нами взяты четыре года, за которые имѣются полныя сравнительныя наблюденія, а именно для Новаго-Королева 1902 и 1903 гг., для Богородицкаго 1902 г. и для Благодатки 1903 г. Нами сравнены суточный ходъ за годъ, за лѣто (апрѣль по сентябрь) и за зиму (октябрь по мартъ). При этомъ оказалось, что гелиографъ Кемпбеля давалъ всегда меньше солнечнаго сіянія, чѣмъ гелиографъ Величко.

Результатъ этого сравненія можетъ быть выраженъ въ слѣдующей таблицѣ.

Таблица 2.

Отношеніе продолжительности солнечнаго сіянія по гелиографу Кемпбеля къ продолжительности солнечнаго сіянія по гелиографу Величко въ процентахъ.

	4—5 ч.	5—6 ч.	6—7 ч.	7—8 ч.	8—9 ч.	9—10 ч.	10—11 ч.	11—12 ч.	12—1 ч.	1—2 ч.	2—3 ч.	3—4 ч.	4—5 ч.	5—6 ч.	6—7 ч.	7—8 ч.
	Г о д ь.															
%	57	78	76	81	85	84	85	84	85	88	88	86	78	73	73	58
	Л ь т о.															
%	52	77	78	84	87	87	88	86	87	88	89	82	80	74	72	52
	З и м а.															
%			17	54	78	79	77	79	81	85	87	82	61	20		

Какъ видно изъ этой таблицы наибольшая разность наблюдается въ первый утренній и послѣдній вечерній часъ, а наименьшая отъ 1—3 ч. пополудни, причемъ разность никогда не бывала меньше 11 процентовъ. Зимой вообще разности больше чѣмъ лѣтомъ кромѣ времени отъ 3—4 ч., когда она одна и таже лѣтомъ и зимой.

Слѣдуетъ еще разсмотрѣть на сколько тождественны записи двухъ гелиографовъ одной и той же системы. Относительно гелиографа Величко, къ сожалѣнію, у меня нѣтъ соответствующихъ данныхъ, относительно же гелиографа Кемпбеля могу привести нѣсколько данныхъ, полученныхъ въ іюнѣ 1906 г. въ Ник. Гл. Физ. Обсерваторіи. Здѣсь былъ установленъ на башнѣ рядомъ съ гелиографомъ Кемпбеля, служащимъ постоянно для регистраціи, другой, проверенный, гелиографъ той же системы. При этомъ получились слѣдующіе результаты:

(I — гелиографъ Обсерваторіи. II — гелиографъ, взятый для сравненія).

13-го іюня 1906 г. . . . .	I 8.9 <sup>1)</sup> часовъ.	II 7.6 часовъ или 85%.
14 » » » . . . . .	I 5.9 »	II 5.3 » » 90 »
15 » » » . . . . .	I 10.9 »	II 10.5 » » 96 »
16 » » » . . . . .	I 11.2 »	II 10.0 » » 89 »
17 » » » . . . . .	I 13.8 »	II 9.9 » » 72 »
18 » » » . . . . .	I 10.2 »	II 9.8 » » 96 »
19 » » » . . . . .	I 12.1 »	II 11.7 » » 97 »
21 » » » . . . . .	I 14.2 »	II 13.5 » » 95 »
Всего . . . . .	I 87.2 часовъ.	II 78.3 часовъ или 90%.

Изъ этого видно, что два гелиографа системы Кемпбеля даютъ далеко не согласные результаты.

1) Первый утренній часъ не принять въ расчетъ, такъ какъ одинъ гелиографъ въ этотъ часъ затѣнялся.

### III. Продолжительность солнечнаго сіянія въ среднемъ годовомъ выводѣ.

Продолжительность солнечнаго сіянія выражена нами въ видѣ средней суточной продолжительности въ часахъ. Чтобы получить сравнимыя между собою величины, мы воспользовались наблюдениями за три года 1901 — 1903. Только для станцій Магарачъ и Оранжевой промыселъ взяты наблюдения за 2 года 1902 и 1903.

Разсматривая карту продолжительности солнечнаго сіянія за годъ, (см. карту I) мы видимъ, что и для Россіи подтверждается въ общемъ законъ, что продолжительность солнечнаго сіянія увеличивается съ сѣвера на югъ, а также съ запада на востокъ.

Увеличеніе продолжительности солнечнаго сіянія съ сѣвера на югъ видно на примѣръ въ слѣдующемъ рядѣ станцій, расположенныхъ приблизительно на  $30^{\circ}$  восточной долготы отъ Гринвича: Халила, продолжительность сіянія 4.1 ч., Павловскъ—4.3, Бусаны—4.5, Новое-Королево — 5.1, Коростышевъ — 5.6, Умань — 5.4 и Плоты — 5.6; или въ другомъ рядѣ, расположенномъ приблизительно на  $40^{\circ}$  вост. долг. отъ Гринвича: Остахово — 5.0 ч., Успенская сельско-хоз. школа — 5.7, Сагуны — 6.1, Деркульское лѣсничество — 6.4 и 6.0, Персіановка — 6.6.

Увеличеніе продолжительности солнечнаго сіянія съ запада на востокъ видно на примѣръ на слѣдующихъ станціяхъ, расположенныхъ приблизительно на  $54^{\circ}$  сѣв. шир.: Сувалки — 4.9 ч., Минскъ — 5.3, Мариина Горка — 5.4, Полибино — 6.1, Троицкъ — 6.3.

Этотъ законъ однако не безъ исключеній, такъ на станціяхъ вблизи открытаго моря какъ Гольдингенъ и Мыхуже больше солнечнаго сіянія, чѣмъ на нѣкоторыхъ болѣе южныхъ и восточныхъ станціяхъ. На востокѣ Европейской Россіи имѣется область съ малою продолжительностью солнечнаго сіянія, вѣроятный центръ этой области — Пермь. На Кавказѣ солнечнаго сіянія меньше, чѣмъ къ сѣверу отъ него.

На юго-западѣ Россіи имѣется также небольшая область съ сравнительно малою продолжительностью солнечнаго сіянія, въ этой области находятся станціи: Плисково-Андрушевскій заводъ, Умань и Лубны. Въ Фленовѣ, Уфѣ, Конь-Колодези, Деркульскомъ лѣсничествѣ (степная станція) и Мариупольскомъ лѣсничествѣ солнечнаго сіянія меньше, чѣмъ на окружающихъ станціяхъ, въ этихъ пунктахъ гелиографъ навѣрное затѣнялся.

Вліяніе дыма отъ значительнаго числа фабрикъ и жилыхъ домовъ можно видѣть въ Петербургѣ. Въ Петербургѣ годовая продолжительность солнечнаго сіянія 3.8 ч., меньше чѣмъ на какой либо другой станціи Россіи, тогда какъ въ Халилѣ, лежащемъ нѣсколько къ сѣверо-западу отъ него, она равняется 4.1 ч., а въ Павловскѣ, къ югу, она равна 4.3 ч. Судя по этимъ двумъ пунктамъ, Петербургъ долженъ бы имѣть 4.2 ч. солнечнаго сіянія въ день, а такъ какъ онъ въ дѣйствительности имѣетъ только 3.8 ч., то онъ теряетъ отъ дыма ежедневно 0.4 ч. солнечнаго сіянія.

Продолжительность солнечнаго сіянія въ Европейской Россіи колеблется отъ 3.8 ч. въ Петербургѣ до 7.4 ч. въ Херсонѣ. Изогеліи направлены въ общемъ отъ юго-запада на сѣверо-востокъ. Такъ изогелія 5 ч. проходитъ около станцій: Мыхуже, Новое-Королево,

направляясь къ сѣверу около Остахова, потомъ опускаясь къ югу проходитъ около Екатеринбурга; изогелія 6.0 ч. проходитъ около Елисаветграда, Дергачей, Сагунъ, Полибина и Троицка. На Кавказѣ продолжительность солнечнаго сіянія около 5—6 ч. Въ Сибири, гдѣ за этотъ періодъ имѣются наблюденія только для 2 пунктовъ, она для Иркутска равна 5.8 ч., а для Читы равна 6.7 ч. Наибольшая продолжительность наблюдается въ Байрамъ-Али, Закаспійской области, здѣсь она = 8.0 ч.

#### IV. Продолжительность солнечнаго сіянія лѣтомъ и зимою.

Лѣтомъ (апрѣль по сентябрь) продолжительность солнечнаго сіянія въ Европейской Россіи колеблется отъ 6.2 ч. въ Петербургѣ до 10.6 ч. въ Херсонѣ (см. карту II). Ходъ изогелій за лѣто менѣе правильный, чѣмъ за годъ. Изогеліи — 8.5 ч. и 8.0 ч. имѣютъ почти совершенно параллельный ходъ. Изогелія — 8.0 ч. идетъ отъ Бѣлой-Криницы на сѣверъ до Минска, далѣе на востокъ и опять на сѣверъ до Остахова, а потомъ на юго-востокъ до Екатеринбурга. Изогелія 9.0 ч. направляется отъ Елисаветграда на сѣверо-востокъ черезъ Дергачи, сѣвернѣе Сагунъ она идетъ на сѣверъ до Успенской сельско-хозяйственной школы, а оттуда направляется на востокъ. Изогелія 10.0 ч. обнимаетъ полосу, въ которую входятъ Херсонъ, Обиточенская сельско-хоз. школа и Персіяновка. Въ Фленовѣ, Конь-Колодези, Деркульскомъ лѣсничествѣ (степная станція) и Мариупольскомъ лѣсничествѣ солнечнаго сіянія лѣтомъ, также какъ и за годъ, слишкомъ мало.

Въ Петербургѣ вліяніе дыма лѣтомъ обнаруживается болѣе рѣзко, чѣмъ за годъ. Продолжительность солнечнаго сіянія лѣтомъ въ Петербургѣ 6.2 ч.; въ Халилѣ 6.6 ч., а въ Павловскѣ 6.9 ч. По географическому положенію въ Петербургѣ эта продолжительность должна быть не менѣе 6.75 ч., и слѣдовательно онъ теряетъ лѣтомъ отъ дыма по крайней мѣрѣ 0.55 ч. солнечнаго сіянія въ день.

Зимою (октябрь по мартъ) продолжительность солнечнаго сіянія въ Европейской Россіи колеблется отъ 1.2 ч. въ Перми до 4.2 ч. въ Херсонѣ (см. карту III). Изогеліи за зиму имѣютъ довольно правильный ходъ; изогеліи 2.0 ч. и 2.5 ч. идутъ отъ запада на востокъ; изогеліи — 3.0 ч. и 3.5 ч. направляются отъ юго-запада на сѣверо-востокъ при чемъ изогелія 3.5 ч. дѣлаетъ изгибъ на югъ, а изогелія за 4.0 ч. занимаетъ одну область вокругъ Херсона и другую на Кавказѣ. Мало солнечнаго сіянія въ Фленовѣ, Конь-Колодези и Мариупольскомъ лѣсничествѣ. На Кавказѣ зимою солнечнаго сіянія въ общемъ не меньше, чѣмъ къ сѣверу отъ него. Больше всего солнечнаго сіянія зимою бываетъ въ Байрамъ-Али 5.8 ч. и въ Читѣ 5.3 ч. (въ Иркутскѣ 4.0 ч.).

#### V. Годовой ходъ продолжительности солнечнаго сіянія.

Для опредѣленія годового хода продолжительности солнечнаго сіянія мы воспользовались наблюденіями 23 пунктовъ за 1898—1903 гг. и 3 пунктовъ съ наблюденіями за

другіе годы: а именно наблюденіями за 1897, 1899—1903 гг. для Троицка; за 1896, 1898—1902 гг. для Сакарскаго питомника и за 1897, 1899—1903 гг. для Байрамъ-Али.

Годовой ходъ въ общемъ довольно правильный. Продолжительность солнечнаго сіянія увеличивается съ января до максимума въ серединѣ года, а потомъ опять падаетъ до декабря, когда почти на всѣхъ пунктахъ наблюдается минимумъ. Величина и время наступленія годовыхъ максимума и минимума даны въ слѣдующей таблицѣ.

Таблица 3.

Величина и время наступленія годовыхъ максимума и минимума продолжительности солнечнаго сіянія.

Максимумъ.			Минимумъ.		
Станція.	Величина.	Мѣсяць.	Станція.	Величина.	Мѣсяць.
Абасъ Туманъ . . . . .	8.0 ч.	Іюль.	С.-Петербургъ* . . . . .	0.2 ч.	Декабрь.
С.-Петербургъ* . . . . .	8.3 »	»	Вышній-Волочекъ . . . . .	0.2 »	»
Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	8.4 »	»	Павловскъ* . . . . .	0.6 »	»
Осовецъ . . . . .	8.6 »	Май.	Гольдингенъ . . . . .	0.6 »	»
Бѣлая Кривица . . . . .	8.6 »	Іюль.	Новое-Королево . . . . .	0.8 »	»
Екатеринбургъ* . . . . .	8.8 »	»	Осовецъ . . . . .	1.0 »	»
Иркутскъ* . . . . .	8.8 »	Іюнь.	Минскъ . . . . .	1.1 »	»
Павловскъ* . . . . .	8.9 »	Іюль.	Полибино . . . . .	1.1 »	»
Минскъ . . . . .	9.3 »	»	Елисаветградъ . . . . .	1.1 »	»
Вышній-Волочекъ . . . . .	9.4 »	Іюнь и Іюль.	Конь-Колодезь . . . . .	1.2 »	Ноябрь и Декабрь.
Умань . . . . .	9.4 »	Іюль и Августъ.	Лубны . . . . .	1.3 »	Декабрь и Январь.
Елисаветградъ . . . . .	9.4 »	Августъ.	Екатеринбургъ* . . . . .	1.4 »	Декабрь.
Сакарскій питомникъ . . . . .	9.5 »	Іюль.	Дергачи . . . . .	1.4 »	Январь.
Плоти . . . . .	9.7 »	»	Згуровка . . . . .	1.4 »	Декабрь и Январь.
Гольдингенъ . . . . .	9.8 »	»	Бѣлая Кривица . . . . .	1.5 »	Декабрь.
Конь-Колодезь . . . . .	9.8 »	»	Умань . . . . .	1.5 »	»
Чита . . . . .	9.9 »	Іюнь.	Сагуны . . . . .	1.5 »	Январь.
Новое-Королево . . . . .	10.0 »	* Іюль.	Плоти . . . . .	1.6 »	Декабрь.
Лубны . . . . .	10.0 »	»	Уральскъ . . . . .	1.8 »	Ноябрь.
Згуровка . . . . .	10.4 »	»	Троицкъ . . . . .	1.9 »	Декабрь.
Дергачи . . . . .	10.5 »	»	Иркутскъ* . . . . .	2.0 »	»
Троицкъ . . . . .	10.9 »	Іюнь.	Абасъ-Туманъ . . . . .	2.8 »	»
Сагуны . . . . .	11.4 »	Іюль.	Сакарскій питомникъ . . . . .	3.0 »	»
Полибино . . . . .	11.6 »	»	Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	3.2 »	»
Уральскъ . . . . .	11.6 »	Іюнь.	Чита . . . . .	3.7 »	»
Байрамъ-Али* . . . . .	11.8 »	Іюль.	Байрамъ-Али* . . . . .	4.2 »	»

Наибольшая продолжительность солнечнаго сіянія наблюдается почти во всей Европейской Россіи и на Кавказѣ въ іюлѣ мѣсяцѣ, только въ Осовцѣ главный максимумъ бываетъ въ маѣ, въ Троицкѣ и Уральскѣ въ іюнѣ, а въ Елисаветградѣ въ августѣ. Въ Вышнемъ-Волочкѣ въ іюнѣ продолжительность таже, что въ іюлѣ, а въ Умани она въ августѣ таже, что въ іюлѣ. Второстепенные максимумы бываютъ въ Осовцѣ въ іюлѣ, а

въ Минскѣ, Умани, Лубнахъ, Згуровкѣ и Елисаветградѣ въ маѣ. Въ Иркутскѣ и Читѣ главный максимумъ бываетъ въ іюнѣ, а второстепенный — въ апрѣлѣ. Максимумъ продолжительности солнечнаго сіянія колеблется отъ 8.0 ч. въ Абасъ-Туманѣ<sup>1)</sup> (С.-Петербургъ 8.3 ч.) до 11.8 ч. въ Байрамъ-Али.

Максимумъ продолжительности солнечнаго сіянія меньше всего на сѣверѣ (С.-Петербургъ 8.3 ч., Павловскъ 8.9 ч.), на крайнемъ западѣ (Осовецъ и Бѣлая Криница 8.6 ч.), на сѣверо-востокѣ (Екатеринбургъ 8.8 ч.) и на Кавказѣ (Абасъ-Туманъ 8.0 ч., Темиръ-Ханъ-Шура 8.4 ч.). Наиболѣе значителенъ максимумъ на востокѣ и юго-востокѣ (Полибино и Уральскъ 11.6 ч. и Сагуны 11.4 ч.) и въ Закаспійской области (Байрамъ-Али 11.8 ч.).

Минимумъ продолжительности солнечнаго сіянія наблюдается всюду въ декабрѣ, кромѣ Уральска, гдѣ онъ бываетъ въ ноябрѣ и Сагунѣ и Дергачей, гдѣ онъ — въ январѣ. Кромѣ того надо замѣтить, что онъ въ Новомъ-Королевѣ въ ноябрѣ имѣетъ ту же величину какъ въ декабрѣ, а въ Лубнахъ и Згуровкѣ онъ въ январѣ такой же, какъ въ декабрѣ.

Минимумъ продолжительности солнечнаго сіянія колеблется отъ 0.2 ч. (въ Петербургѣ) до 4.2 ч. въ Байрамъ-Али, а въ Европейской Россіи онъ колеблется всего отъ 0.2 ч. до 1.9 ч. въ Троицкѣ, причѣмъ онъ увеличивается довольно правильно отъ сѣвера на югъ и отъ запада на востокъ. На Кавказѣ и въ Сибири онъ больше.

По годовому ходу продолжительности солнечнаго сіянія всѣ станціи можно раздѣлять на двѣ группы:

- 1) Станціи съ однимъ годовымъ максимумомъ.
- 2) Станціи съ двумя годовыми максимумами.

Ко второй группѣ принадлежатъ станціи: Осовецъ, Минскъ, Згуровка, Лубны, Умань и Елисаветградъ и сибирскія станціи: Чита и Иркутскъ, а къ первой группѣ всѣ остальные станціи.

На станціяхъ первой группы максимумъ наступаетъ въ іюлѣ, за исключеніемъ Троицка и Уральска, гдѣ онъ наблюдается въ іюнѣ.

На европейскихъ станціяхъ второй группы первый максимумъ наблюдается въ маѣ, а второй въ іюлѣ (въ Елисаветградѣ въ августѣ); а на сибирскихъ станціяхъ первый максимумъ бываетъ въ апрѣлѣ и второй — въ іюнѣ. Относительно наступленія главнаго максимума, Троицкъ, Уральскъ, Чита и Иркутскъ образуютъ какъ бы одну группу, такъ какъ на этихъ станціяхъ максимумъ наступаетъ въ іюнѣ.

Новое-Королево, Сагуны, Дергачи, Бѣлая-Криница и Плоти служатъ переходомъ отъ первой группы къ второй, въ этихъ пунктахъ увеличеніе солнечнаго сіянія отъ мая къ іюню весьма незначительное.

Годовой ходъ продолжительности солнечнаго сіянія изображенъ также въ видѣ кривыхъ на помѣщенной въ концѣ статьи таблицѣ.

---

1) Гелиографъ затѣняется утромъ и вечеромъ.

## VI. Суточный ходъ продолжительности солнечнаго сіянія.

Суточный ходъ продолжительности солнечнаго сіянія разсмотрѣнъ нами по наблюденіямъ тѣхъ же пунктовъ, которыми мы воспользовались для изслѣдованія годового хода. Суточный ходъ дается числомъ часовъ солнечнаго сіянія за мѣсяць для каждаго часа.

### 1. Суточный ходъ солнечнаго сіянія за годъ.

Суточный ходъ солнечнаго сіянія въ среднемъ за годъ весьма правильный. Солнечное сіяніе увеличивается съ утра до максимума около полудня и потомъ опять уменьшается до вечера. Съ утра увеличеніе идетъ быстро, а потомъ у максимума медленно, уменьшеніе послѣ максимума, сперва медленное, а потомъ болѣе быстрое.

Наиболѣе ранній часъ, за который имѣются записи солнечнаго сіянія, это отъ 3—4 ч. утра на станціяхъ Павловскъ, Гольдингенъ, Вышній-Волочекъ, Екатеринбургъ и Троицкъ; наиболѣе поздній, это отъ 8—9 ч. вечера, на тѣхъ же станціяхъ, кромѣ Троицка, и въ Петербургѣ.

Максимумъ солнечнаго сіянія за годъ наблюдался почти на всѣхъ станціяхъ отъ 11 до 12 ч. дня. Только въ Петербургѣ и Иркутскѣ онъ бываетъ отъ 12 до 2 ч., въ Павловскѣ и Вышнемъ-Волочкѣ отъ 12 до 1 ч., въ Абасъ-Туманѣ отъ 10 до 11 ч., въ Темиръ-Ханъ-Шурѣ отъ 10 до 12 ч., въ Полибинѣ, Новомъ-Королевѣ, Конь-Колодези, Минскѣ, Елисаветградѣ, Плотяхъ, Бѣлой-Криницѣ и Байрамъ-Али отъ 11 до 1 ч.

Вѣличина и время наступленія суточнаго максимума за годъ приведены въ слѣдующей таблицѣ:

Таблица 4.

Станція.	Макс.	Время наступл.	Станція.	Макс.	Время наступл.
С.-Петербургъ* . . . . .	11.0 ч.	12— 2 ч.	Умань . . . . .	17.0 ч.	11—12 ч.
Павловскъ* . . . . .	12.0 »	12— 1 »	Плоти . . . . .	17.0 »	11— 1 »
Вышній-Волочекъ . . . . .	13.4 »	12— 1 »	Полибино . . . . .	17.2 »	11— 1 »
Гольдингенъ . . . . .	13.9 »	11—12 »	Згуровка . . . . .	17.2 »	11—12 »
Новое-Королево . . . . .	14.4 »	11— 1 »	Сагуны . . . . .	18.0 »	11—12 »
Екатеринбургъ* . . . . .	14.4 »	11—12 »	Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	18.6 »	10—12 »
Минскъ . . . . .	14.8 »	11— 1 »	Уральскъ . . . . .	19.7 »	11—12 »
Осовецъ . . . . .	15.1 »	11—12 »	Иркутскъ* . . . . .	19.7 »	12— 2 »
Конь-Колодезь . . . . .	15.3 »	11— 1 »	Сакарскій питомникъ . . . . .	20.2 »	11—12 »
Бѣлая-Криница . . . . .	15.5 »	11— 1 »	Троицкъ . . . . .	20.3 »	11—12 »
Елисаветградъ . . . . .	16.4 »	11— 1 »	Абасъ-Туманъ . . . . .	20.3 »	10—11 »
Лубны . . . . .	16.4 »	11—12 »	Чита . . . . .	23.7 »	11—12 »
Дергачи . . . . .	16.5 »	11—12 »	Байрамъ-Али* . . . . .	23.8 »	11— 1 »



Въ Троицкѣ суточный ходъ солнечнаго сiянiя имѣеть ту особенность, что отъ 8-го ч. до 9-го ч. утра продолжительность сiянiя увеличивается только на 0.4 ч., а отъ 4-го ч. до 5-го ч. в. она уменьшается всего на 0.2 ч. Въ общемъ можно сказать, что максимумъ увеличивается съ сѣвера на югъ и съ запада на востокъ. Въ Екатеринбургѣ, Конь-Колодези и Лубнахъ максимумъ меньше, чѣмъ можно было-бы ожидать по ихъ географическому положенiю.

## 2. Суточный ходъ солнечнаго сiянiя за лѣтнiе мѣсяцы.

Лѣтомъ (апрѣль — сентябрь), также какъ и за годъ, наблюдается утромъ быстрое увеличенiе, а вечеромъ быстрое уменьшенiе продолжительности солнечнаго сiянiя, а около максимума, въ серединѣ дня, увеличенiе и уменьшенiе бываетъ медленное.

Лѣтомъ максимумъ наступаетъ на многихъ станціяхъ раньше, чѣмъ за годъ. А именно: въ Павловскѣ отъ 11 до 12 ч., Читѣ отъ 10—12 ч., Минскѣ и Новомъ-Королевѣ отъ 11—12 ч., Вышнемъ-Волочкѣ, Елисаветградѣ, Конь-Колодези, Плотяхъ и Лубнахъ отъ 10—11 ч., Умани и Згуровкѣ отъ 10—12 ч., Байрамъ-Али и Иркутскѣ отъ 11—12 ч., Темиръ-Ханъ-Шура отъ 9—10 ч., Дергачахъ отъ 9—11 ч.

Величина и время наступленiя суточного максимума за лѣто даны въ слѣдующей таблицѣ:

Таблица 5.

Станція.	Макс.	Время наступл.	Станція.	Макс.	Время наступл.
С.-Петербургъ* . . . . .	16.0 ч.	12—2 ч.	Плоти . . . . .	22.5 ч.	10—11 ч.
Павловскъ* . . . . .	16.8 »	11—12 »	Абасъ-Туманъ . . . . .	22.6 »	11—12 »
Екатеринбургъ* . . . . .	18.2 »	11—12 »	Умань . . . . .	22.7 »	10—12 »
Вышній-Волочекъ . . . . .	18.7 »	10—12 »	Дергачи . . . . .	22.7 »	9—11 »
Гольдингенъ . . . . .	19.0 »	11—12 »	Чита . . . . .	22.7 »	10—12 »
Новое-Королево . . . . .	19.9 »	11—12 »	Лубны . . . . .	23.0 »	10—11 »
Осовецъ . . . . .	19.9 »	11—12 »	Полибино . . . . .	23.1 »	10—11 »
Бѣлая-Криница . . . . .	19.9 »	11—2 »	Сакарскій питомникъ . . . . .	23.1 »	10—11 »
Минскъ . . . . .	20.0 »	11—12 »	Згуровка . . . . .	23.2 »	10—12 »
Конь-Колодезь . . . . .	20.6 »	10—11 »	Троицкъ . . . . .	23.5 »	11—12 »
Иркутскъ* . . . . .	20.9 »	11—12 »	Сагуны . . . . .	24.5 »	11—12 »
Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	20.9 »	9—10 »	Уральскъ . . . . .	25.3 »	11—12 »
Елисаветградъ . . . . .	22.3 »	10—11 »	Байрамъ-Али* . . . . .	27.9 »	11—12 »

Колебанiе солнечнаго сiянiя въ серединѣ дня въ продолженiе нѣсколькихъ часовъ весьма пезначительное. Въ Байрамъ-Али напримѣръ оно колеблется отъ 8 ч. у. до 3 ч. д. всего отъ 27.2 ч. до 27.9 часовъ, въ Иркутскѣ отъ 10 ч. у. до 3 ч. д. отъ 20.5 до 20.9 ч.

Лѣтомъ суточный ходъ солнечнаго сiянiя не такой правильный, какъ за годъ.

Въ Осовцѣ имѣются два максимума, кромѣ главнаго отъ 11 ч. до 12 ч. второй отъ 1 ч. до 2 ч.; въ Троицкѣ три максимума 1) отъ 7 ч. до 8 ч. у., 2) отъ 11 ч. до 12 ч. д. и 3) отъ 4 ч. до 5 ч. д.; въ Байрамъ-Али два максимума отъ 11 ч. до 12 ч. д. и отъ 2 ч. до 3 ч. д. На многихъ станціяхъ солнечное сіяніе послѣ максимума уменьшается сперва быстрѣе, а потомъ это уменьшеніе замедляется. Напр. въ Гольдингенѣ, Вышнемъ-Волочкѣ, Екатеринбургѣ, Бѣлой-Криницѣ и Плотяхъ.

Максимумъ солнечнаго сіянія усиливается въ общемъ также съ сѣвера на югъ и съ запада на востокъ, только на Кавказѣ онъ нѣсколько меньше, чѣмъ къ сѣверу отъ него и въ Иркутскѣ и Читѣ меньше чѣмъ на юго-востокѣ Европейской Россіи. Въ Екатеринбургѣ и Ковъ-Колодези максимумъ меньше, чѣмъ можно было ожидать по ихъ географическому положенію.

### 3. Суточный ходъ солнечнаго сіянія за зимніе мѣсяцы.

Суточный ходъ солнечнаго сіянія зимою (октябрь по мартъ) гораздо болѣе правильнѣе, чѣмъ лѣтомъ. Почти на всѣхъ станціяхъ первыя записи утромъ получаются отъ 6 до 7 ч. у. и послѣднія вечеромъ отъ 5 до 6 ч. в. Только въ С.-Петербургѣ и Абасъ-Туманѣ<sup>1)</sup> первыя записи получаются отъ 7 ч. до 8 ч. у., а въ Абасъ-Туманѣ и Байрамъ-Али послѣднія отъ 4 ч. до 5 ч. пополудни. Двойныхъ максимумовъ нѣтъ ни на одной станціи. Почти на всѣхъ станціяхъ максимумъ наступаетъ зимою позже, чѣмъ лѣтомъ. Только въ Гольдингенѣ, Сагунахъ, Уральскѣ и Сакарскомъ питомникѣ онъ наступаетъ въ тогъ-же часъ, а въ С.-Петербургѣ и Бѣлой-Криницѣ раньше.

Величина и время наступленія суточнаго максимума за зиму приведены въ слѣдующей таблицѣ:

Таблица 6.

Станція.	Макс.	Время наступл.	Станція.	Макс.	Время наступл.
С.-Петербургъ* . . . . .	6.1 ч.	12— 1 ч.	Згуровка . . . . .	11.1 ч.	11—12 ч.
Павловскъ* . . . . .	7.5 »	12— 2 »	Умань . . . . .	11.4 »	11— 1 »
Вышній-Волочекъ . . . . .	8.1 »	12— 1 »	Сагуны . . . . .	11.4 »	11—12 »
Гольдингенъ . . . . .	8.8 »	11—12 »	Полибино . . . . .	11.5 »	12— 2 »
Новое-Королево . . . . .	9.2 »	12— 1 »	Плоти . . . . .	12.1 »	12— 1 »
Минскъ . . . . .	9.7 »	12— 1 »	Уральскъ . . . . .	14.1 »	11—12 »
Ковъ-Колодезь . . . . .	10.3 »	11— 1 »	Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	16.9 »	11—12 »
Лубны . . . . .	10.3 »	1— 2 »	Сакарскій питомникъ . . . . .	17.2 »	11—12 »
Осовецъ . . . . .	10.4 »	12— 1 »	Троицкъ . . . . .	17.4 »	12— 1 »
Дергачи . . . . .	10.7 »	12— 1 »	Абасъ-Туманъ . . . . .	18.2 »	11—12 »
Екатеринбургъ* . . . . .	10.8 »	12— 1 »	Иркутскъ* . . . . .	18.8 »	12— 1 »
Елисаветградъ . . . . .	10.9 »	12— 1 »	Байрамъ-Али* . . . . .	19.8 »	12— 1 »
Бѣлая-Криница . . . . .	11.1 »	10— 1 »	Чита . . . . .	25.0 »	12— 1 »

1) Въ Абасъ-Туманѣ гелиографъ затѣняется утромъ и вечеромъ.

Суточный максимумъ солнечнаго сіянія за зимніе мѣсяцы колеблется въ Европейской Россіи всего отъ 6.1 ч. въ С.-Петербургѣ до 12.1 ч. въ Плотяхъ, кромѣ юго-востока Россіи, гдѣ онъ значительно выше, а именно 14.1 ч. въ Уральскѣ и 17.4 ч. въ Троицкѣ. На Кавказѣ онъ выше, онъ колеблется отъ 16.9 ч. до 18.2 ч. Въ Байрамъ-Али онъ еще выше 19.8 ч. Въ Иркутскѣ онъ также великъ 18.9 ч., но самымъ яснымъ небомъ пользуется Чита, тамъ зимою суточный максимумъ 25.0 ч., больше чѣмъ на той же станціи лѣтомъ.

#### 4. Распределение солнечнаго сіянія до полудня и послѣ полудня.

Распределение солнечныхъ часовъ за время до полудня и послѣ полудня даны въ слѣдующей таблицѣ.

### Таблица 7.

Продолжительность солнечнаго сіянія до и послѣ полудня за годъ:

	до 12 ч.	послѣ 12 ч.		до 12 ч.	послѣ 12 ч.
Иркутскъ*	46.3 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>	53.7 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>	Лубны . . . . .	50.3 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>	49.7 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>
С.-Петербургъ*	48.4	51.6	Полибино . . . . .	50.3	49.7
Новое-Королево . . . . .	48.5	51.5	Сакарскій питомникъ . . . . .	50.3	49.7
Павловскъ*	48.7	51.3	Елисаветградъ . . . . .	50.5	49.5
Екатеринбургъ*	49.4	50.6	Згуровка . . . . .	50.6	49.4
Осовецъ . . . . .	49.6	50.4	Вышній-Волочекъ . . . . .	50.6	49.4
Байрамъ-Али*	49.8	50.2	Троицкъ . . . . .	51.0	49.0
Чита . . . . .	49.8	50.2	Конь-Колодезь . . . . .	51.1	48.9
Бѣлая-Криница . . . . .	49.9	50.1	Дергачи . . . . .	51.2	48.8
Минскъ . . . . .	50.0	50.0	Умань . . . . .	51.4	48.6
Плоти . . . . .	50.1	49.9	Сагуны . . . . .	51.5	48.5
Уральскъ . . . . .	50.1	49.9	Абасъ-Туманъ . . . . .	52.4	47.6
Гольдингенъ . . . . .	50.2	49.8	Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	52.8	47.2

Продолжительность солнечнаго сіянія до и послѣ полудня лѣтомъ:

	до 12 ч.	послѣ 12 ч.		до 12 ч.	послѣ 12 ч.
Иркутскъ*	48.7 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>	51.3 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>	Минскъ . . . . .	51.1 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>	48.9 <sup>0</sup> / <sub>10</sub>
С.-Петербургъ*	49.0	51.0	Згуровка . . . . .	51.1	48.9
Новое-Королево . . . . .	49.2	50.8	Полибино . . . . .	51.2	48.8
Павловскъ*	49.4	50.6	Вышній-Волочекъ . . . . .	51.2	48.8
Осовецъ . . . . .	50.0	50.0	Плоти . . . . .	51.5	48.5
Екатеринбургъ*	50.1	49.9	Сагуны . . . . .	51.6	48.4
Гольдингенъ . . . . .	50.1	49.9	Елисаветградъ . . . . .	51.9	48.1
Сакарскій питомникъ . . . . .	50.1	49.9	Троицкъ . . . . .	52.0	48.0
Бѣлая-Криница . . . . .	50.3	49.7	Конь-Колодезь . . . . .	52.1	47.9
Байрамъ-Али*	50.5	49.5	Умань . . . . .	52.1	47.9
Уральскъ . . . . .	50.5	49.5	Дергачи . . . . .	52.2	47.8
Чита . . . . .	50.8	49.2	Абасъ-Туманъ . . . . .	52.9	47.1
Лубны . . . . .	51.0	49.0	Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	54.8	45.2

## Продолжительность солнечнаго сіянія до и послѣ полудня зимою:

	до 12 ч.	послѣ 12 ч.		до 12 ч.	послѣ 12 ч.
Иркутскъ*	42.8%	57.2%	Згуровка	48.0%	52.0%
С.-Петербургъ*	45.0	55.0	Елисаветградъ	48.1	51.9
Павловскъ*	45.8	54.2	Конь-Колодезь	48.2	51.8
Новое-Королево	46.1	53.9	Осовецъ	48.5	51.5
Плоти	46.2	53.8	Байрамъ-Али*	48.5	51.5
Полибино	47.1	52.9	Умань	48.7	51.3
Вышній-Волочекъ	47.2	52.8	Вѣлая-Криница	48.8	51.2
Екатеринбургъ*	47.5	52.5	Темиръ-Ханъ-Шура	49.3	50.7
Лубны	47.6	52.4	Троицкъ	49.4	50.6
Чита	47.7	52.3	Сагуны	50.8	49.2
Дергачи	47.8	52.2	Гольдингенъ	50.9	49.1
Уральскъ	47.9	52.1	Сакарскій питомникъ	51.2	48.8
Минскъ	48.0	52.0	Абасъ-Туманъ	51.3	48.7

Въ среднемъ за годъ продолжительность солнечнаго сіянія до полудня и послѣ полудня почти одинаковая. Въ Европейской Россіи разность солнечнаго сіянія до и послѣ полудня не превышаетъ 3.2%; въ Иркутскѣ продолжительность солнечнаго сіянія до полудня меньше, чѣмъ послѣ полудня, разность достигаетъ 7.4%, и въ Темиръ-Ханъ-Шурѣ на Кавказѣ эта разность 5.6%; на сѣверѣ Россіи, въ С.-Петербургѣ, Павловскѣ и Новомъ-Королевѣ, она тоже нѣсколько меньше (3.2—2.2%); въ Конь-Колодези, Дергачахъ, Умани, Сагунахъ, Абасъ-Туманѣ и Темиръ-Ханъ-Шурѣ она до полудня больше чѣмъ послѣ полудня отъ 2.2—5.6%. На остальныхъ станціяхъ разность между солнечнымъ сіяніемъ до и послѣ полудня не больше 2%.

Лѣтомъ на сѣверныхъ станціяхъ, въ С.-Петербургѣ, Павловскѣ и Новомъ-Королевѣ, а также въ Иркутскѣ, продолжительность солнечнаго сіянія до полудня нѣсколько меньше, чѣмъ послѣ полудня. Въ Иркутскѣ эта разность наиболѣе значительна, но и здѣсь она составляетъ всего 2.6%. На всѣхъ остальныхъ станціяхъ она лѣтомъ послѣ полудня больше, чѣмъ до полудня, причемъ наибольшая разность 5.2% въ пользу пополуденнаго времени наблюдается въ Темиръ-Ханъ-Шурѣ.

Зимою продолжительность солнечнаго сіянія на всѣхъ станціяхъ послѣ полудня больше, чѣмъ до полудня, и эта разность достигаетъ весьма значительныхъ величинъ, наиболѣе велика она въ Иркутскѣ, гдѣ она составляетъ 14.4%, далѣе слѣдуютъ сѣверныя станціи: С.-Петербургъ 10.0%; Павловскъ 8.4%; Новое-Королево 7.8%. Исключеніе составляютъ Сагуны, Гольдингенъ, Абасъ-Туманъ и Сакарскій питомникъ, гдѣ продолжительность сіянія до полудня отъ 1.6 до 2.6% больше, чѣмъ послѣ полудня.

Сравнивая процентное отношеніе продолжительности солнечнаго сіянія до полудня ко всей продолжительности лѣтомъ и зимою, мы видимъ, что оно лѣтомъ больше чѣмъ зимою на всѣхъ станціяхъ, кромѣ Гольдингена, гдѣ оно зимою на 0.8% больше и Сакарскаго пи-

томника, гдѣ оно на 1.1% больше чѣмъ лѣтомъ. Наиболѣе велика разность въ Иркутскѣ 5.9%; Темиръ-Ханъ-Шуръ 5.5%; далѣе слѣдуютъ Плоты 5.3%; Дергачи 4.4%; Полибино 4.1%; С.-Петербургъ и Вышній-Волочекъ 4.0%; меньше всего эта разность въ Сагунахъ 0.8%; Бѣлой-Криницѣ и Осовцѣ 1.5%.

### VII. Распредѣленіе по годамъ наибольшей и наименьшей величины средней годовой продолжительности солнечнаго сіянія.

По даннымъ 25 пунктовъ, для которыхъ имѣются наблюденія за 1898—1903 гг., максимумъ продолжительности солнечнаго сіянія за этотъ періодъ наблюдался въ 1898 г. на 5 пунктахъ, въ 1899 на 8, въ 1900 на 1, въ 1901 на 9, въ 1902 на 1 и въ 1903 г. на 1 пунктѣ. Въ 1901 г. максимумъ наблюдался въ районѣ, лежащемъ къ сѣверу и западу отъ линіи, соединяющей Бѣлую-Криницу съ Конь-Колодезью и Конь-Колодезь съ С.-Петербургомъ и кромѣ того въ Байрамъ-Али. 1899 г. максимумъ былъ въ области къ югу отъ линіи, идущей отъ Бѣлой-Криницы до Конь-Колодези и далѣе до Уральска за исключеніемъ Елисаветграда (макс. въ 1902 г.) и Дергачей (макс. въ 1903 г.). Въ остальной Россіи максимумъ наблюдался въ 1898 г.

Минимумъ продолжительности солнечнаго сіянія за этотъ періодъ наблюдался, по даннымъ тѣхъ же станцій, въ 1898 г. на 6 пунктахъ, въ 1900 г. на 2, въ 1901 на 1, въ 1902 на 6 и въ 1903 г. на 10 пунктахъ. Въ 1902 или 1903 г. (разность между этими годами незначительна) минимумъ наблюдался въ области, лежащей къ востоку и сѣверу отъ линіи, соединяющей Халила съ Уманью и Умань черезъ Сагуны съ Уральскомъ и идущей далѣе на востокъ, за исключеніемъ Полибина, гдѣ минимумъ наблюдался въ 1900 г. Въ области, лежащей къ западу отъ этой линіи минимумъ наступалъ въ 1898, а въ районѣ, лежащемъ къ югу отъ нея минимумъ наблюдался въ разные годы: въ Елисаветградѣ въ 1901 г., въ Темиръ-Ханъ-Шурѣ и Байрамъ-Али въ 1900 г., въ Дергачахъ въ 1901 г. и въ Абасъ-Туманѣ въ 1902.

Отношеніе наименьшей годовой продолжительности солнечнаго сіянія къ наибольшей, выраженное въ процентахъ, колеблется отъ 66% до 89%. Число 66%, найденное для Елисаветграда, повидимому не совсѣмъ надежное, такъ какъ на всѣхъ, окружающихъ эту станцію, пунктахъ, это число больше 80. Послѣ Елисаветграда это число меньше всего для Халилы и Павловска 72%; больше всего это число для Екатеринбургa, Полибина и Бѣлой-Криницы 89%.

Максимумъ и минимумъ годовой продолжительности солнечнаго сіянія и отношеніе минимума къ максимуму даны въ слѣдующей таблицѣ:

Таблица 8.

Распределение по годамъ наибольшей и наименьшей величины продолжительности солнечнаго сянія.

Названіе станціи.	Годы наблюденій.	Максимумъ.			Минимумъ.			Отношеніе минимума къ максимуму. %
		Сумма часовъ за годъ.	Число часовъ въ день.	Годъ.	Сумма часовъ за годъ.	Число часовъ въ день.	Годъ.	
Халила* . . . . .	1898—1903	1843.0	5.0	1901	1311.7	3.6	1903	72
Гольдингень . . . . .	» »	1867.3	5.1	1901	1581.6	4.3	1898	84
С.-Петербургъ* . . . . .	» »	1592.7	4.4	1901	1179.0	3.2	1902	73
» . . . . .	1894—1903	1759.8	4.8	1896	1179.0	3.2	1902	67
Павловскъ* . . . . .	1898—1903	1915.0	5.25	1901	1383.1	3.8	1902	72
» . . . . .	1881—1903	1915.0	5.25	1901	1383.1	3.8	1902	72
Бусаны . . . . .	1898—1903	1902.7	5.2	1901	1452.8	4.0	1903	77
Вышній-Волочекъ . . . . .	» »	1825.2	5.0	1898	1577.1	4.3	1902	86
» . . . . .	1895—1903	2021.8	5.5	1897	1577.1	4.3	1902	78
Екатеринбургъ* . . . . .	1898—1903	1981.3	5.4	1898	1759.8	4.8	1902	89
» . . . . .	1893—1903	2068.9	5.65	1896	1759.8	4.8	1902	85
Новое-Королево . . . . .	1898—1903	2096.4	5.7	1901	1699.4	4.7	1902	82
» . . . . .	1895—1903	2096.4	5.7	1901	1699.4	4.7	1902	82
Троицкъ . . . . .	1897, 99—1903	2411.7	6.6	1897	2225.1	6.1	1903	92
Осовецъ . . . . .	1898—1903	1968.5	5.4	1900	1573.2	4.3	1898	80
Минскъ . . . . .	1898—1903	2112.1	5.8	1901	1648.0	4.5	1898	78
Полибино . . . . .	» »	2398.3	6.6	1898	2083.8	5.7	1900	86
Бѣлая-Криница . . . . .	» »	1980.6	5.4	1901	1740.7	4.8	1898	89
Плоти . . . . .	» »	2301.0	6.3	1899	1943.4	5.3	1898	84
» . . . . .	1895—1903	2301.0	6.3	1899	1824.3	5.0	1897	79
Умань . . . . .	1898—1903	2219.6	6.1	1899	1921.4	5.2	1903	85
» . . . . .	1893—1903	2230.5	6.1	1896	1859.8	5.1	1893	84
Згуровка . . . . .	1898—1903	2323.9	6.4	1899	2094.2	5.7	1903	89
Лубны . . . . .	» »	2277.5	6.2	1899	1961.0	5.3	1903	85
» . . . . .	1893—1903	2348.2	6.4	1895	1961.0	5.3	1903	83
Дергачи . . . . .	1898—1903	2258.5	6.2	1903	1990.9	5.4	1901	87
Ковь-Колодезь . . . . .	» »	2092.1	5.7	1901	1705.9	4.7	1903	81
» . . . . .	1895—1903	2148.6	5.9	1897	1705.9	4.7	1903	79
Сагуны . . . . .	1898—1903	2501.4	6.8	1899	2133.6	5.8	1903	85
» . . . . .	1895—1903	2736.9	7.5	1896	2133.6	5.8	1903	77
Елисаветградъ . . . . .	1898—1903	2316.8	6.3	1902	1488.0(?)	4.1	1898	66(?)
Уральскъ . . . . .	» »	2684.3	7.4	1899	2296.0	6.3	1903	85
Чита . . . . .	» »	2987.7	8.2	1898	2256.5	6.1	1903	74
Иркутскъ* . . . . .	» »	2391.8	6.6	1898	1986.2	5.4	1903	82
» . . . . .	1893—1903	2391.8	6.6	1898	1986.2	5.4	1903	82
Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .	1898—1903	2264.0	6.2	1899	1830.2	5.0	1900	80
Сакарскій питомникъ . . . . .	1896, 98—1902	2488.2	6.8	1902	2276.1	6.2	1896	91
Абасъ-Туманъ . . . . .	1898—1903	2141.1	5.8	1899	1846.9	5.1	1902	88
Байрамъ-Али* . . . . .	1897, 99—1903	3079.2	8.4	1901	2674.0	7.3	1900	87

### VIII. Отношеніе продолжительности солнечнаго сіянія къ облачности.

Для сравненія продолжительности солнечнаго сіянія съ облачностью взята облачность въ процентахъ неба, покрытаго облаками, и солнечное сіяніе въ процентахъ возможной продолжительности<sup>1)</sup> за годъ, за іюль мѣсяць, когда на большинствѣ станцій наблюдается максимумъ и за декабрь, когда почти на всѣхъ станціяхъ бываетъ минимумъ продолжительности солнечнаго сіянія, за три года 1901—1903.

Нанеся на карту соотвѣтствующія величины облачности и продолжительности солнечнаго сіянія за годъ, мы видимъ (см. карту IV), что область съ облачностью 60% и область съ продолжительностью солнечнаго сіянія 60% почти совпадаютъ; она лежитъ на югѣ Россіи и простирается отъ Херсона на востокъ, въ ней находятся пункты: Херсонъ, Персіановка, Магарачъ, Оранжерейный промыселъ и Уральскъ. Линія облачности 70% и солнечнаго сіянія 50% также почти совпадаетъ, она идетъ отъ юго-запада на сѣверо-востокъ, начинаясь около Бѣлой Криницы она проходитъ сѣвернѣе Успенской сельско-хозяйственной школы и направляется дальше на востокъ; сѣвернѣе этой линіи облачность не увеличивается, но продолжительность солнечнаго сіянія уменьшается.

Какъ предполагали раньше<sup>2)</sup> облачность и продолжительность солнечнаго сіянія должны дополнять другъ друга, но по изслѣдованіямъ г. Фигуровскаго<sup>3)</sup> это не такъ, и дѣйствительно, если суммировать величины облачности и солнечнаго сіянія за годъ, то получается въ среднемъ не 100, а 117, со среднимъ отклоненіемъ  $\pm 4$ , при чемъ это число въ общемъ нѣсколько меньше на сѣверо-западѣ и больше въ южной части центра Россіи. Это число на станціяхъ съ гелиографомъ Кемпбеля меньше, чѣмъ на станціяхъ съ гелиографомъ Величко, напримѣръ по Кемпбелю С.-Петербургъ 106, Халила 109, Богородицкое 111, Мартыновка 113, Желѣзноводскъ 109; кромѣ того упомянутая сумма получилась меньше, чѣмъ на окружающихъ станціяхъ, въ Мариупольскомъ лѣсничествѣ 108, Згуровкѣ 110 и Конь-Колодези 113. Въ Темиръ-Ханъ-Шурѣ она также мала 108.

Въ іюлѣ линія солнечнаго сіянія 70% идетъ южнѣе Оранжерейнаго промысла на западъ сѣвернѣе Кавказскихъ горъ и южнѣе Крыма, потомъ она начинается около станціи Плоты и направляется на сѣверо-востокъ до Мевзелинской сельско-хозяйственной школы, а далѣе идетъ на юго-востокъ; внутри всей этой обширной области облачность въ общемъ

1) За возможную продолжительность солнечнаго сіянія для Павловска, Екатеринбургa и Иркутска принята астрономически возможная продолжительность для горизонта этихъ пунктовъ, слѣдовательно величина постоянная для всѣхъ лѣтъ; для всѣхъ же остальныхъ пунктовъ за возможную продолжительность солнечнаго сіянія принята возможная продолжительность записи cadaго даннаго гелиографа при безоблачномъ небѣ, слѣдовательно величина непостоянная, зависящая отъ качества прибора и бумаги.

2) König, H. Dauer des Sonnenscheins in Europa. Abhandl. d. Kais. Leop. Car. Deutschen Akad. der Naturforscher. Bd. LXVII. № 3.

3) Фигуровскій, И. Объ отношеніи между облачностью и продолжительностью солнечнаго сіянія. Зап. Импер. Акад. Наукъ, Т. V. № 12.

50% и менѣе, а солнечное сіяніе 70% и болѣе. На Кавказѣ облачность также меньше 50%, но здѣсь продолжительность солнечнаго сіянія меньше 70%. Къ сѣверо-востоку отъ этой области до линіи, идущей отъ Бѣлой Криницы на сѣверо-востокъ черезъ Минскъ, Новос-Королево, сѣвернѣе Успенской сельско-хозяйственной школы и опускающейся къ югу около Перми, облачность колеблется отъ 60% до 50%, а солнечное сіяніе отъ 60% до 70%. Сѣвернѣе этой линіи находится область, въ которой облачность не больше чѣмъ къ югу отъ нея, но въ которой солнечнаго сіянія меньше 60%.

Для іюля сумма облачности и солнечнаго сіянія въ среднемъ 120, съ среднимъ отклоненіемъ  $\pm 5.5$ . На станціяхъ съ гелиографомъ Кемпбеля эта сумма въ іюль, также какъ и за годъ, меньше чѣмъ на остальныхъ станціяхъ, кромѣ того эта сумма мала въ Мариупольскомъ лѣсничествѣ, Згуровкѣ и Темиръ-Ханъ-Шурѣ.

Въ декабрѣ линія солнечнаго сіянія 20% идетъ западнѣе Херсона на сѣверо-востокъ восточнѣе Дергачей, далѣе почти на сѣверъ до Успенской сельско-хозяйственной школы, направляясь оттуда на востокъ; къ югу и востоку отъ этой линіи солнечное сіяніе 20% и болѣе, а облачность 80% и меньше; а къ сѣверу и западу отъ нея солнечное сіяніе менѣе 20% (за исключеніемъ Бѣлой-Криницы, гдѣ оно 21%), а облачность 80% и нѣсколько болѣе (кромѣ Остахова, гдѣ она 75% и Мыхуже, гдѣ она 77%). Сѣвернѣе линіи, идущей отъ Гольдингена на сѣверо-востокъ южнѣе Бусанъ, солнечное сіяніе 10% и менѣе, а облачность такая же, какъ въ болѣе южной области.

Сумма облачности и солнечнаго сіянія за декабрь въ среднемъ 100, съ среднимъ отклоненіемъ  $\pm 4$ , при чемъ сѣвернѣе 55° она всюду меньше 100, а южнѣе въ большинствѣ случаевъ больше 100.

Итакъ мы видимъ, что облачность и продолжительность солнечнаго сіянія имѣютъ въ общемъ противоположный ходъ, но одно изъ этихъ явленій не можетъ служить прямымъ дополненіемъ другого. Какъ мы выше видѣли въ декабрѣ дѣйствительно облачность и продолжительность солнечнаго сіянія въ среднемъ для Россіи дополняютъ другъ друга до 100%, но это только въ среднемъ для всѣхъ станцій, на югѣ же сумма облачности и солнечнаго сіянія была больше 100, а на сѣверѣ меньше; въ іюль же эта сумма была всюду больше 100, достигая въ среднемъ 120, а въ среднемъ за годъ она равна 117 и также всюду больше 100. Отношеніе дѣйствительной продолжительности солнечнаго сіянія къ возможной въ процентахъ и облачность въ среднемъ за годъ, іюль и декабрь даны въ слѣдующей таблицѣ:



Таблица 9.

Станція.	Отношение дѣйствительной продолжительности солнечнаго сіянія къ возможной % 1901—1903.			Облачность. 1901—1903.		
	Годъ.	Іюль.	Декабрь.	Годъ.	Іюль.	Декабрь.
Халила* . . . . .	40	51	9	69	60	80
Остахово . . . . .	46	57	18	71	60	76
Гольдингенъ . . . . .	45	62	10	68	58	86
С.-Петербургъ* . . . . .	37	51	4	69	59	81
Павловскъ* . . . . .	35	47	9	75	68	86
Бусаны . . . . .	43	58	9	69	60	81
Вышній-Волочекъ . . . . .	44	54	13	73	67	80
Нартасъ . . . . .	53	68	29	62	47	67
Благodatка . . . . .	45	65	18	70	62	70
Перь . . . . .		58	20	73	63	76
Екатеринбургъ* . . . . .	39	54	24	63	52	65
Мыхуже . . . . .	48	62	18	66	59	76
Новое-Королево . . . . .	45	61	14	69	57	84
Фленово . . . . .	43	58	12	74	64	85
Успенская сельско-хоз. школа . . . . .	51	68	19	68	53	77
Мензелинская сельско-хоз. школа . . . . .	54	75	25		56	74
Уфа . . . . .	51	73	20	74	62	81
Троицкъ . . . . .	58	66	36	62	52	66
Сувалки . . . . .	45	56	18	71	66	80
Осовецъ . . . . .	46	58	17	67	60	83
Минскъ . . . . .	47	60	16		59	85
Маріина-Горка . . . . .	49	60	16	68	55	85
Пажень . . . . .	52	66	22	64	50	78
Полибино . . . . .	55	79	24	64	48	76
Ключевскій хуторъ . . . . .	56	76	25	68	52	78
Бѣлая Криница . . . . .	49	62	21	67	59	84
Плоти . . . . .	52	68	14	60	46	91
Коростышевъ . . . . .	53	68	17	68	62	87
Мартыновка* . . . . .	47	62	13	66	54	88
Плисково-Андрушевскій заводъ . . . . .	49	62	11	68	58	88
Умань . . . . .	52	68	13	73	65	90
Згуровка . . . . .	53	67	18	57	41	81
Лубны, гимназія . . . . .	52	67	16	69	56	83
Уютное . . . . .	51	65	19	71	65	82
Курскъ . . . . .	55	68	29	74	62	85
Богородицкое* . . . . .	48	63	24	63	51	76

Станція.	Отношеніе дѣйствительной продолжительности солнечнаго сіянія къ возможной 0/0. 1901—1903.			Облачность. 1901—1903.		
	Годъ.	Іюль.	Декабрь.	Годъ.	Іюль.	Декабрь.
Дергачи . . . . .	59	69	18	62	50	75
Деркульское лѣснич., степн. ст. . . . .	55	68	24	61	47	78
» » низ. ст. . . . .	57	69	25	65	50	82
Конь-Колодезь . . . . .	49	65	25	64	52	76
Сагуны. . . . .	56	76	30	72	62	78
Гриноуцы . . . . .	51	61	15	68	56	90
Елисаветградъ . . . . .	54	67	17	66	56	86
Херсонъ . . . . .	66	83	27	57	42	81
Маріупольское лѣсн., степн. ст. . . . .	56	70	20	52	38	80
Персіяновка . . . . .	60	74	17	58	49	79
Оранжерейный промыселъ (1902—1903). . .	63	72	22	53	40	80
Обиточенская сельско-хоз. школа. . . . .	62	78	24	55	36	80
Магарачь* (1902—1903). . . . .	62	80	28	60	40	80
Уральскъ. . . . .	60	78	33	59	43	71
Чита. . . . .	63	64	58	49	63	38
Иркутскъ* . . . . .	47	51	21	66	76	70
Желѣзноводскъ* . . . . .	47	62	26	62	45	76
Ессентуки*. . . . .	49	61	29	66	51	82
Темиръ-Ханъ-Шура. . . . .	53	61	40	55	44	65
Абасъ-Туманъ . . . . .	58	66	42	62	67	61
Байрамъ-Али* . . . . .	74	91	53			

**IX. Замѣтка о вѣковомъ ходѣ продолжительности солнечнаго сіянія въ Павловскѣ.**

Самый длинный рядъ наблюденій надъ продолжительностью солнечнаго сіянія въ Россіи имѣется, какъ уже сказано выше, для Павловска, а именно съ 1881 г.

Приводимъ для этого пункта за каждый годъ среднюю продолжительность солнечнаго сіянія за сутки, отношеніе дѣйствительной продолжительности къ возможной въ процентахъ и среднюю облачность. Средняя продолжительность солнечнаго сіянія и облачность представлены также въ видѣ кривыхъ на таблицѣ, помѣщенной въ концѣ этой статьи.

**Г о д ы .**

1881. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 1900. 01. 02. 03. 04. 05. 06. Ср.

**Средняя продолжительность солнечнаго сіянія въ сутки.**

4.7 4.9 4.8 4.5 4.5 5.1 4.7 4.5 4.7 4.4 5.0 4.0 4.6 4.0 4.8 4.9 4.3 4.3 4.4 4.6 5.2 3.8 3.8 4.2 4.1 5.1 4.5

**Отношеніе дѣйствительной продолжительности къ возможной.**

38 40 39 36 36 41 38 37 38 36 40 33 37 33 39 40 35 35 36 38 43 33 33 34 33 41 37

**Облачность.**

67 67 68 65 68 66 70 70 68 72 66 72 70 74 70 68 75 76 76 74 69 79 76 76 80 75 71

3\*

Сопоставляя продолжительность солнечнаго сіянія съ облачностью, мы видимъ, что эти два метеорологическихъ элемента имѣютъ противоположный ходъ, т. е. большей продолжительности солнечнаго сіянія соотвѣтствуетъ меньшая облачность и на оборотъ меньшей продолжительности солнечнаго сіянія большая облачность. Только 1884 и 1903 гг. составляютъ въ этомъ отношеніи исключеніе. Это исключеніе объясняется, по крайней мѣрѣ отчасти, тѣмъ, что въ эти годы гелиографъ начиналъ записывать утромъ позже и кончалъ запись вечеромъ раньше чѣмъ обыкновенно. (Изверженіе вулкана Кракатоа въ 1883 г. и Mont Pelée въ 1902 г.). Кромѣ того мы видимъ, что съ 1895 г. отношеніе между этими элементами нѣсколько измѣнилось, такъ какъ облачность, сравнительно съ продолжительностью солнечнаго сіянія, становилась больше, чѣмъ она была раньше. Происходитъ ли это отъ измѣненія въ оцѣнкѣ облачности или отношеніе между этими элементами дѣйствительно измѣнилось, выяснить намъ не удалось.

Данныя о продолжительности солнечнаго сіянія указываютъ какъ будто-бы на нѣкоторую періодичность въ наступленіи наибольшей годовой продолжительности сіянія въ Павловскѣ. Длина этого періода отъ 4 до 5 лѣтъ. Первый максимумъ былъ въ 1882 г., второй въ 1886 г., третій въ 1891 г., четвертый въ 1896 г., пятый въ 1901 г. и шестой въ 1906 г. Впрочемъ надо замѣтить, что рядъ наблюденій для Павловска еще слишкомъ короткій, чтобы по нему можно было установить дѣйствительность этой періодичности.

---

Въ приложеніи мы даемъ алфавитный списокъ станцій, наблюденія которыхъ надъ солнечнымъ сіяніемъ использованы въ этой работѣ и таблицы выводовъ изъ этихъ наблюденій, а именно въ таблицѣ I помѣщены средняя продолжительность солнечнаго сіянія за сутки въ часахъ и въ таблицѣ II — суточный ходъ продолжительности солнечнаго сіянія.

---

*Алфавитный списокъ станцій, наблюденія которыхъ надъ солнечнымъ сіяніемъ использованы въ этой работѣ.*

| Станція.   | Широта. | Долгота отъ<br>Гринвича. | Высота.<br>Метры. | Система<br>гелиографа. | З а м ѣ ч а н і я .   |
|--|---------|--------------------------|-------------------|------------------------|---|
| Абаст-Туманъ . . . . .                                 | 41°45'  | 42°50'                   | 1260              | Величко.               | Станція въ ущельѣ. Восходъ запаздываетъ на 1—1½ ч. и закатъ наступаетъ на столько же раньше.  |
| Байрамъ-Али . . . . .                                  | 37 40   | 62 5                     | 239               | Кемпбель.              | При восходѣ и закатѣ затѣняется.  |
| Благodatка . . . . .                                   | 58 17   | 59 45                    | 309               | Величко.               | Съ 1-го марта по 10-ое мая и съ 10-го августа по 15-ое сентября затѣняется при восходѣ горою. |
| Богородицкое . . . . .                                 | 51 10   | 37 21                    | 222               | Кемпбель.              |   |
| Бусаны . . . . .                                       | 58 31   | 29 54                    | 68                | Величко.               |   |
| Бѣлая Криница . . . . .                                | 50 8    | 25 44                    | 230               | Величко.               | Зимою, весною и осенью затѣняется передъ закатомъ отъ 5—15 мин.                               |
| Вышній-Волочекъ . . . . .                              | 57 35   | 34 34                    | 167               | Величко.               | Въ январѣ затѣняется при восходѣ и закатѣ.  |
| Гольдингенъ . . . . .                                  | 56 58   | 21 58                    | 42                | Величко.               |   |
| Гриноуцы . . . . .                                     | 48 17   | 27 18                    | 252               | Величко.               |   |
| Дергачи . . . . .                                      | 50 4    | 36 9                     | 116               | Величко.               |   |
| Деркульское лѣсничество,<br>стенная станція . . . . .  | 49 3    | 39 48                    | 155               | Величко.               |   |
| Деркульское лѣсничество,<br>низинная станція . . . . . | 49 5    | 39 20                    | 57                | Величко.               |   |
| Екатеринбургъ . . . . .                                | 56 50   | 60 38                    | 286               | Кемпбель.              |   |
| Елисаветградъ . . . . .                                | 48 31   | 32 17                    | 123               | Величко.               |   |
| Ессентуки . . . . .                                    | 44 2    | 42 51                    | 624 <sup>?</sup>  | Кемпбель.              |   |
| Желѣзноводскъ . . . . .                                | 44 8    | 43 2                     | 637               | Кемпбель.              |   |
| Згуровка . . . . .                                     | 50 30   | 31 46                    | 139               | Величко.               |   |
| Иркутскъ . . . . .                                     | 52 16   | 104 19                   | 474               | Кемпбель.              |   |
| Ключевскій хуторъ . . . . .                            | 53 42   | 52 40                    | 180               | Величко.               |   |
| Конь-Колодезь . . . . .                                | 52 8    | 39 10                    | 119               | Величко.               | Въ апрѣлѣ и маѣ затѣняется при восходѣ отъ 11—25 мин.   |

*Примѣчаніе.* На станціяхъ, гдѣ въ графѣ «Замѣчанія» ничего не сказано, установка гелиографовъ, по имѣющимся свѣдѣніямъ, должно быть открытое.

| Станци.   | Широта. | Долгота отъ<br>Гринвича. | Высота.<br>Метры. | Система<br>гелиографа. | Замѣчанія.   |
|---|---------|--------------------------|-------------------|------------------------|--|
| Коростышевъ . . . . .                             | 50°19'  | 29° 3'                   | 175               | Величко.               |  |
| Курскъ . . . . .                                  | 51 45   | 36 12                    | 236               | Величко.               |  |
| Лубны, гимназія . . . . .                         | 50 1    | 33 2                     | 162               | Величко.               |  |
| Магарачь . . . . .                                | 44 32   | 34 13                    | 80                | Кемпбель.              | При восходѣ и закатѣ затѣняется горами отъ 1/2 до 2 час.                             |
| Мариина Горка . . . . .                           | 53 26   | 28 18                    | 176               | Величко.               |  |
| Мариупольское лѣсничест-<br>во, степная станція . | 47 39   | 37 30                    | 280               | Величко.               |  |
| Мартыновка . . . . .                              | 49 38   | 31 17                    | 104               | Кемпбель.              | На SE и SW немного закрывается холмомъ.  |
| Мензелинская сельск.-хоз.<br>школа . . . . .      | 55 39   | 53 5                     | 80                | Величко.               | Затѣняется короткое время передъ закатомъ.   |
| Минскъ . . . . .                                  | 53 54   | 27 33                    | 220               | Величко.               | Въ лѣтніе мѣсяцы передъ закатомъ затѣняется на 15 мин.                               |
| Мыхуже . . . . .                                  | 55 31   | 21 38                    | 40                | Величко.               | При восходѣ и закатѣ затѣняется.   |
| Нартась . . . . .                                 | 56 46   | 49 54                    | 140               | Величко.               |  |
| Новое Королево . . . . .                          | 55 9    | 30 28                    | 236               | Величко.               | При восходѣ и закатѣ затѣняется не болѣе 10 мин.                                     |
| Обиточенская сельск.-хоз.<br>школа . . . . .      | 47 8    | 36 27                    | 200               | Величко.               | Съ 5-го ноября по 5-ое февраля затѣняется отъ 5—25 мин.                              |
| Оранжевый промыш-<br>сель . . . . .               | 45 51   | 47 31                    | —20               | Величко.               |  |
| Осовецъ . . . . .                                 | 53 29   | 22 38                    | 114               | Величко.               |  |
| Остахово . . . . .                                | 59 28   | 39 26                    | 150               | Величко.               |  |
| Павловскъ . . . . .                               | 59 41   | 30 29                    | 40                | Кемпбель.              |  |
| Пажень . . . . .                                  | 52 35   | 38 23                    | 150               | Величко.               | Съ апрѣля по сентябрь затѣняется при закатѣ отъ 20—40 мин.                           |
| Перьмь . . . . .                                  | 58 1    | 56 16                    | 159               | Величко.               | Въ 1903 г. февраль и мартъ мѣсяцы взяты по гелиографу Кемпбеля.                      |
| Персіяновка . . . . .                             | 47 32   | 40 7                     | 22                | Величко.               |  |
| Плисково - Андрушевскій<br>заводъ . . . . .       | 49 20   | 29 10                    | 249               | Величко.               |  |
| Плоти . . . . .                                   | 47 57   | 29 10                    | 143               | Величко.               | Затѣняется возвышенностями при восходѣ отъ 15—30 мин. и при закатѣ нѣсколько минутъ. |
| Полибино . . . . .                                | 53 44   | 52 56                    | 108               | Величко.               |  |

| Станціи.                                    | Широта. | Долгота отъ<br>Гринвича. | Высота.<br>Метры.       | Система<br>гелиографа. | Замѣчанія.   |
|---|---------|--------------------------|-------------------------|------------------------|--|
| Сагуны . . . . .                            | 50°36'  | 39°43'                   | 206                     | Величко.               | Въ апрѣлѣ, маѣ, іюлѣ и августѣ затѣняется при восходѣ менѣе $\frac{1}{2}$ ч. и въ маѣ, іюлѣ, августѣ, ноябрѣ и декабрѣ менѣе $\frac{1}{2}$ ч. при закатѣ. См. «Лѣтописи» за 1896 г. Въ ноябрѣ и декабрѣ затѣняется деревьями при закатѣ. См. «Лѣтописи» за 1899 г. |
| Сакарскій питомникъ . .                     | 42 8    | 43 1                     | 148                     | Величко.               | Окруженъ холмами и горами кромѣ W; разница между дѣйствительнымъ и теоретическимъ восходомъ и закатомъ не достигаетъ 30 мин.   |
| С.-Петербургъ Н. Г. Ф. О.                   | 59 56   | 30 16                    | 5                       | Кемпбель.              |  |
| Сувалки . . . . .                           | 54 6    | 22 56                    | 177                     | Величко.               | Деревья могутъ немного затѣнять утромъ и вечеромъ.   |
| Темиръ-Ханъ-Шура. . .                       | 42 49   | 47 7                     | 475                     | Величко.               |  |
| Троицкъ . . . . .                           | 54 5    | 61 33                    | 175                     | Величко.               | Открыто, почти не затѣняется.  |
| Умань . . . . .                             | 48 45   | 30 13                    | 216                     | Величко.               | Въ январѣ и декабрѣ затѣняется утромъ и вечеромъ около 1 ч.  |
| Уральскъ, реальн. учил. .                   | 51 12   | 51 22                    | 38                      | Величко.               | Съ мая по іюль затѣняется при восходѣ на $1\frac{1}{4}$ ч., а въ августѣ на 1 ч.   |
| Успенская сельск. - хоз.<br>школа . . . . . | 56 38   | 39 12                    | 239                     | Величко.               | Съ запада затѣняется возвышенными мѣстностями.   |
| Уфа . . . . .                               | 54 43   | 55 56                    | 174                     | Величко.               | Лѣтомъ послѣ 8 ч. 15 мин. веч. затѣняется.   |
| Уютное. . . . .                             | 52 4    | 35 5                     | 159                     | Величко.               |  |
| Фленово . . . . .                           | 54 40   | 32 11                    | 196 и съ V<br>1903—200. | Величко.               | Зимою утромъ затѣняется возвышенностями и деревьями.   |
| Халила. . . . .                             | 60 22   | 29 7                     | 52                      | Кемпбель.              |  |
| Херсонъ . . . . .                           | 46 38   | 32 37                    | 20                      | Величко.               |  |
| Чита. . . . .                               | 52 2    | 113 30                   | 685                     | Величко.               |  |



Таблицы выводовъ изъ наблюдений надъ продолжительностью  
солнечного сіянія.

Таблица I.

Средняя продолжительность солнечного сіянія за сутки въ часахъ.

| Станція.                                    | Годы наблю-<br>дений. | Январь. | Февраль. | Мартъ. | Апрѣль. | Май. | Іюнь. | Іюль. | Августъ. | Сентябрь. | Октябрь. | Ноябрь. | Декабрь. | Годъ. | Лѣто. | Зима. |
|---|-----------------------|---------|----------|--------|---------|------|-------|-------|----------|-----------|----------|---------|----------|-------|-------|-------|
| Халила* . . . . .                           | 1898—1903             | 0.8     | 1.4      | 3.6    | 5.7     | 7.8  | 8.6   | 8.6   | 6.8      | 3.9       | 1.8      | 1.0     | 0.4      | 4.5   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 0.7     | 1.6      | 3.3    | 6.2     | 7.8  | 8.3   | 7.9   | 5.5      | 4.3       | 2.0      | 1.1     | 0.4      | 4.1   | 6.6   | 1.5   |
| Остахово . . . . .                          | 1901—1903             | 0.5     | 1.8      | 4.7    | 6.9     | 9.0  | 11.3  | 9.7   | 7.0      | 5.2       | 2.2      | 0.8     | 0.6      | 5.0   | 8.2   | 1.8   |
| Гольдингенъ . . . . .                       | 1898—1903             | 0.8     | 2.1      | 3.7    | 5.7     | 7.6  | 8.4   | 9.8   | 8.4      | 5.8       | 2.6      | 1.3     | 0.5      | 4.7   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 0.8     | 2.7      | 3.5    | 6.0     | 7.4  | 8.1   | 9.8   | 7.7      | 5.8       | 2.8      | 1.5     | 0.4      | 4.7   | 7.5   | 2.0   |
| С.-Петербургъ* . . . . .                    | 1894—1903             | 0.6     | 1.5      | 3.2    | 5.9     | 7.9  | 8.4   | 8.5   | 6.4      | 3.6       | 1.7      | 0.9     | 0.4      | 4.1   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1898—1903             | 0.6     | 1.1      | 3.3    | 5.3     | 7.1  | 8.1   | 8.3   | 6.4      | 3.5       | 1.6      | 0.8     | 0.2      | 3.9   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 0.5     | 1.4      | 3.2    | 5.7     | 6.9  | 7.8   | 7.7   | 5.2      | 4.1       | 1.7      | 1.0     | 0.2      | 3.8   | 6.2   | 1.3   |
| Павловскъ* . . . . .                        | 1881—1903             | 0.9     | 2.2      | 4.1    | 6.3     | 8.1  | 9.3   | 8.7   | 6.9      | 4.4       | 2.1      | 0.9     | 0.6      | 4.5   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1898—1903             | 0.8     | 1.6      | 4.1    | 5.5     | 7.7  | 8.6   | 8.9   | 7.2      | 4.1       | 1.9      | 1.0     | 0.6      | 4.4   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 0.6     | 1.9      | 3.7    | 6.2     | 7.5  | 8.7   | 8.3   | 5.9      | 4.7       | 2.0      | 1.3     | 0.5      | 4.3   | 6.9   | 1.7   |
| Бусаны . . . . .                            | 1898—1903             | 0.6     | 1.8      | 4.2    | 6.0     | 8.2  | 8.4   | 9.3   | 7.7      | 5.1       | 1.8      | 1.0     | 0.4      | 4.6   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 0.5     | 2.3      | 4.1    | 6.8     | 8.2  | 8.3   | 8.6   | 5.8      | 5.8       | 1.8      | 1.2     | 0.4      | 4.5   | 7.2   | 1.7   |
| Вышній Волочекъ . . . . .                   | 1898—1903             | 0.8     | 2.0      | 4.5    | 6.2     | 8.5  | 9.4   | 9.4   | 8.1      | 4.4       | 2.0      | 1.0     | 0.5      | 4.7   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 0.5     | 2.1      | 4.3    | 6.5     | 8.2  | 9.7   | 8.4   | 7.1      | 5.1       | 2.2      | 1.2     | 0.6      | 4.6   | 7.5   | 1.7   |
| Нартасъ . . . . .                           | 1901—1903             | 1.2     | 2.8      | 5.1    | 7.3     | 10.3 | 11.3  | 10.5  | 9.0      | 5.1       | 2.5      | 1.3     | 1.5      | 5.7   | 8.9   | 2.4   |
| Благодатка . . . . .                        | 1901—1903             | 1.0     | 1.9      | 4.3    | 7.4     | 8.6  | 9.3   | 10.1  | 7.3      | 4.1       | 2.1      | 1.1     | 0.7      | 4.8   | 7.7   | 1.8   |
| Перьмь . . . . .                            | 1901—1903             | 0.5     | 1.0      | 3.0    | 6.3     | 8.1  | 8.5   | 8.8   | 6.8      | 3.0       | 0.9      | 0.7     | 0.8      | 4.1   | 6.9   | 1.2   |
| Екатеринбургъ* . . . . .                    | 1893—1903             | 2.2     | 3.3      | 4.9    | 7.4     | 8.2  | 8.1   | 8.4   | 7.5      | 4.5       | 2.6      | 1.5     | 1.6      | 5.0   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1898—1903             | 1.9     | 3.1      | 4.3    | 7.2     | 7.8  | 8.5   | 8.8   | 7.4      | 4.3       | 2.4      | 1.6     | 1.4      | 4.9   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 1.6     | 2.4      | 3.9    | 6.8     | 8.0  | 9.1   | 9.2   | 7.3      | 4.2       | 1.8      | 1.6     | 1.6      | 4.8   | 7.4   | 2.1   |
| Мыжуе . . . . .                             | 1901—1903             | 1.5     | 3.2      | 3.5    | 6.7     | 8.4  | 8.0   | 9.3   | 8.0      | 6.5       | 3.4      | 2.0     | 0.9      | 5.1   | 7.8   | 2.4   |
| Новое-Королево . . . . .                    | 1898—1903             | 0.9     | 2.5      | 4.7    | 6.0     | 8.8  | 9.2   | 10.0  | 9.1      | 5.9       | 2.9      | 1.3     | 0.8      | 5.2   |       |       |
| » . . . . .                                 | 1901—1903             | 1.1     | 3.0      | 4.1    | 6.1     | 7.8  | 10.0  | 9.5   | 7.8      | 5.9       | 3.0      | 1.5     | 0.8      | 5.1   | 7.8   | 2.3   |
| Фленово . . . . .                           | 1901—1903             | 0.7     | 2.6      | 3.5    | 5.3     | 7.3  | 9.1   | 8.6   | 7.0      | 5.2       | 2.0      | 1.0     | 0.6      | 4.4   | 7.1   | 1.7   |
| Успенская сельско-хоз.<br>школа . . . . .   | 1901—1903             | 0.8     | 2.4      | 5.4    | 7.3     | 9.7  | 12.1  | 10.8  | 8.6      | 5.9       | 2.9      | 1.3     | 0.9      | 5.7   | 9.1   | 2.3   |
| Мензелинская сельск-хоз.<br>школа . . . . . | 1901—1903             | 1.1     | 2.6      | 4.4    | 7.4     | 10.1 | 11.7  | 11.7  | 9.6      | 5.3       | 3.0      | 1.1     | 1.3      | 5.8   | 9.3   | 2.2   |



| Станція.                                     | Годы наблю-<br>дений. | Январь. | Февраль. | Мартъ. | Апрѣль. | Май. | Июнь. | Июль. | Августъ. | Сентябрь. | Октябрь. | Ноябрь. | Декабрь. | Годъ. | Лѣто. | Зима. |
|--|-----------------------|---------|----------|--------|---------|------|-------|-------|----------|-----------|----------|---------|----------|-------|-------|-------|
| Уфа . . . . .                                | 1901—1903             | 1.1     | 2.0      | 4.6    | 7.6     | 9.3  | 11.1  | 11.3  | 9.5      | 5.0       | 2.9      | 1.4     | 1.0      | 5.6   | 9.0   | 2.2   |
| Троицкъ . . . . .                            | 1897, 1899—1903       | 2.7     | 3.7      | 6.5    | 8.5     | 10.2 | 10.9  | 10.7  | 9.1      | 6.6       | 4.2      | 2.4     | 1.9      | 6.4   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 2.3     | 3.9      | 6.2    | 8.7     | 10.3 | 11.2  | 10.2  | 8.9      | 5.8       | 3.9      | 2.7     | 2.0      | 6.3   | 9.2   | 3.5   |
| Сувалки . . . . .                            | 1901—1903             | 1.4     | 3.4      | 3.5    | 5.2     | 8.3  | 7.8   | 8.5   | 7.3      | 6.8       | 3.6      | 1.8     | 0.9      | 4.9   | 7.3   | 2.4   |
| Осовецъ . . . . .                            | 1898—1903             | 1.4     | 2.7      | 3.8    | 5.9     | 8.6  | 8.2   | 8.4   | 8.2      | 6.1       | 3.5      | 1.6     | 1.0      | 5.0   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.6     | 3.6      | 3.5    | 5.7     | 8.5  | 7.8   | 8.6   | 7.6      | 6.4       | 3.7      | 1.8     | 0.9      | 5.0   | 7.4   | 2.5   |
| Минскъ . . . . .                             | 1898—1903             | 1.3     | 2.7      | 4.1    | 6.2     | 8.5  | 8.3   | 9.3   | 8.9      | 6.4       | 3.1      | 1.7     | 1.1      | 5.1   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.7     | 3.3      | 3.8    | 6.2     | 8.2  | 8.9   | 9.2   | 8.3      | 7.0       | 3.6      | 1.8     | 1.0      | 5.3   | 8.0   | 2.5   |
| Марина Горка . . . . .                       | 1901—1903             | 1.7     | 3.4      | 3.9    | 6.2     | 8.7  | 9.3   | 9.1   | 8.6      | 7.2       | 3.7      | 2.0     | 0.9      | 5.4   | 8.2   | 2.6   |
| Пажень . . . . .                             | 1901—1903             | 1.3     | 3.6      | 4.3    | 7.0     | 8.3  | 11.1  | 10.0  | 8.7      | 6.8       | 4.0      | 1.8     | 1.3      | 5.7   | 8.6   | 2.7   |
| Полибино . . . . .                           | 1898—1903             | 1.7     | 4.0      | 5.3    | 8.2     | 9.8  | 11.2  | 11.6  | 9.4      | 6.1       | 3.3      | 1.3     | 1.1      | 6.1   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.2     | 2.7      | 5.3    | 8.2     | 9.7  | 11.6  | 11.7  | 9.9      | 6.1       | 3.3      | 1.6     | 1.4      | 6.1   | 9.5   | 2.6   |
| Ключевскій хуторъ . . . . .                  | 1901—1903             | 1.1     | 2.8      | 5.6    | 8.3     | 10.0 | 11.6  | 11.4  | 10.0     | 6.0       | 3.3      | 1.5     | 1.3      | 6.1   | 9.6   | 2.6   |
| Бѣлая-Криница . . . . .                      | 1898—1903             | 1.8     | 2.7      | 4.3    | 5.8     | 7.8  | 8.2   | 8.6   | 8.5      | 6.6       | 3.8      | 2.0     | 1.5      | 5.1   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 2.1     | 3.3      | 4.0    | 5.5     | 8.0  | 8.0   | 8.8   | 8.4      | 7.0       | 3.8      | 2.1     | 1.3      | 5.2   | 7.6   | 2.8   |
| Плоти . . . . .                              | 1898—1903             | 2.0     | 2.9      | 3.8    | 6.7     | 8.4  | 8.9   | 9.7   | 9.5      | 7.2       | 4.6      | 3.0     | 1.6      | 5.7   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 2.1     | 3.1      | 3.6    | 6.2     | 8.2  | 8.9   | 9.4   | 9.3      | 7.6       | 4.4      | 3.4     | 0.9      | 5.6   | 8.3   | 2.9   |
| Коростышевъ . . . . .                        | 1901—1903             | 1.6     | 3.9      | 4.0    | 6.5     | 8.6  | 9.1   | 9.2   | 8.7      | 7.9       | 4.2      | 2.7     | 1.1      | 5.6   | 8.3   | 2.9   |
| Мартыновка* . . . . .                        | 1901—1903             | 1.2     | 2.8      | 2.9    | 5.2     | 8.1  | 8.5   | 8.9   | 8.9      | 6.6       | 4.0      | 2.7     | 1.2      | 5.1   | 7.7   | 2.6   |
| Плисково - Андрушевскій<br>заводъ . . . . .  | 1901—1903             | 1.5     | 3.1      | 3.8    | 5.6     | 8.1  | 8.8   | 8.9   | 8.3      | 7.2       | 4.0      | 2.6     | 0.5      | 5.2   | 7.8   | 2.6   |
| Умань . . . . .                              | 1893—1903             | 2.0     | 2.7      | 3.5    | 6.5     | 8.1  | 8.9   | 9.9   | 9.7      | 7.6       | 4.8      | 2.7     | 1.4      | 5.6   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1898—1903             | 1.8     | 2.9      | 3.7    | 6.6     | 8.9  | 8.8   | 9.4   | 9.4      | 7.6       | 4.5      | 2.6     | 1.6      | 5.6   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.5     | 3.1      | 3.2    | 5.6     | 8.0  | 9.0   | 9.0   | 9.2      | 7.4       | 4.3      | 2.0     | 0.8      | 5.4   | 8.1   | 2.7   |
| Згуровка . . . . .                           | 1898—1903             | 1.4     | 3.0      | 4.4    | 7.0     | 10.0 | 9.8   | 10.4  | 9.9      | 7.6       | 4.4      | 2.2     | 1.4      | 6.0   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.1     | 3.6      | 4.1    | 6.4     | 9.1  | 10.4  | 9.9   | 9.4      | 8.0       | 4.3      | 2.7     | 1.2      | 5.8   | 8.9   | 2.8   |
| Лубны . . . . .                              | 1893—1903             | 1.6     | 2.7      | 3.8    | 7.1     | 9.3  | 9.6   | 10.5  | 10.0     | 7.7       | 4.8      | 2.3     | 1.3      | 5.9   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1898—1903             | 1.3     | 2.7      | 4.1    | 6.8     | 9.8  | 9.4   | 10.0  | 9.9      | 7.4       | 4.2      | 2.1     | 1.3      | 5.8   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.0     | 3.1      | 4.0    | 5.6     | 8.5  | 10.0  | 9.6   | 9.4      | 7.5       | 4.0      | 2.6     | 1.0      | 5.5   | 8.4   | 2.6   |
| Уютное . . . . .                             | 1901—1903             | 1.2     | 3.4      | 4.7    | 6.1     | 8.8  | 10.9  | 9.7   | 9.2      | 7.5       | 3.4      | 1.7     | 1.1      | 5.6   | 8.7   | 2.6   |
| Курскъ . . . . .                             | 1901—1903             | 1.4     | 4.0      | 4.9    | 7.4     | 8.8  | 11.4  | 10.3  | 9.9      | 7.6       | 4.0      | 2.0     | 1.9      | 6.1   | 9.2   | 3.0   |
| Богородицкое* . . . . .                      | 1901—1903             | 1.2     | 2.9      | 3.5    | 5.4     | 7.2  | 9.6   | 9.0   | 8.5      | 5.9       | 3.8      | 1.5     | 1.5      | 5.0   | 7.6   | 2.4   |
| Дергачи . . . . .                            | 1898—1903             | 1.4     | 3.1      | 4.4    | 6.6     | 9.3  | 9.8   | 10.5  | 9.8      | 7.1       | 3.9      | 1.6     | 1.6      | 5.8   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.2     | 3.2      | 4.8    | 6.8     | 8.5  | 11.0  | 10.1  | 9.8      | 7.6       | 4.2      | 2.0     | 1.8      | 5.9   | 9.0   | 2.9   |
| Деркульское лѣснич.,<br>степн. стан. . . . . | 1901—1903             | 1.5     | 3.2      | 4.7    | 7.1     | 8.8  | 10.0  | 9.5   | 10.0     | 7.9       | 4.9      | 2.4     | 1.6      | 6.0   | 8.8   | 3.1   |
| Деркульское лѣснич.,<br>низин. стан. . . . . | 1901—1903             | 1.7     | 3.5      | 5.1    | 7.5     | 9.5  | 10.7  | 10.1  | 10.7     | 8.3       | 4.8      | 2.6     | 1.6      | 6.4   | 9.5   | 3.2   |
| Конь-Колодезь . . . . .                      | 1895—1903             | 1.5     | 3.3      | 3.8    | 6.3     | 8.3  | 9.4   | 9.9   | 8.9      | 6.1       | 3.6      | 1.4     | 1.3      | 5.3   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1898—1903             | 1.3     | 3.4      | 4.4    | 6.1     | 8.4  | 9.3   | 9.8   | 8.9      | 5.9       | 3.0      | 1.2     | 1.2      | 5.2   |       |       |

| Станція.                                     | Годы наблю-<br>дений. | Годы наблюдений. |          |        |         |      |       |       |          |           |          |         |          |       |       |       |
|--|-----------------------|------------------|----------|--------|---------|------|-------|-------|----------|-----------|----------|---------|----------|-------|-------|-------|
|  |                       | Январь.          | Февраль. | Мартъ. | Апрѣль. | Май. | Іюнь. | Іюль. | Августъ. | Сентябрь. | Октябрь. | Ноябрь. | Декабрь. | Годъ. | Лѣто. | Зима. |
| Конь-Колодезь . . . . .                      | 1901—1903             | 1.1              | 3.2      | 3.8    | 6.1     | 7.7  | 10.1  | 9.5   | 8.5      | 6.4       | 3.7      | 1.7     | 1.4      | 5.3   | 8.0   | 2.5   |
| Сагуны. . . . .                              | 1895—1903             | 1.8              | 3.5      | 4.1    | 7.5     | 10.1 | 10.9  | 11.7  | 11.0     | 8.5       | 5.2      | 2.3     | 1.9      | 6.5   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1898—1903             | 1.5              | 3.6      | 4.5    | 7.2     | 9.9  | 10.4  | 11.4  | 10.7     | 8.2       | 4.5      | 2.0     | 1.8      | 6.3   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.4              | 3.5      | 5.0    | 7.3     | 8.6  | 9.4   | 10.8  | 11.0     | 8.5       | 3.8      | 2.1     | 2.0      | 6.1   | 9.3   | 3.0   |
| Гриноуцы . . . . .                           | 1901—1903             | 2.1              | 3.4      | 4.7    | 5.3     | 8.5  | 8.3   | 8.8   | 8.9      | 7.5       | 4.3      | 3.2     | 0.9      | 5.5   | 7.9   | 3.1   |
| Елисаветградъ . . . . .                      | 1898—1903             | 1.6              | 2.6      | 3.3    | 6.4     | 9.2  | 8.8   | 9.4   | 9.5      | 7.1       | 4.2      | 2.2     | 1.1      | 5.6   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 1.8              | 3.6      | 3.6    | 6.6     | 9.2  | 9.9   | 9.5   | 9.9      | 7.8       | 4.4      | 2.8     | 1.0      | 5.8   | 8.8   | 2.9   |
| Херсонъ . . . . .                            | 1901—1903             | 2.6              | 4.2      | 5.1    | 8.5     | 10.4 | 11.7  | 12.1  | 11.4     | 9.7       | 6.9      | 4.5     | 1.9      | 7.4   | 10.6  | 4.2   |
| Мариупольск. лѣснич,<br>степн. стан. . . . . | 1901—1903             | 1.5              | 2.9      | 4.4    | 7.0     | 8.3  | 10.5  | 9.8   | 9.8      | 8.5       | 5.2      | 3.2     | 1.4      | 6.1   | 9.0   | 3.1   |
| Персіяновка . . . . .                        | 1901—1903             | 1.6              | 3.3      | 5.0    | 7.7     | 10.0 | 11.3  | 10.8  | 10.8     | 9.2       | 5.6      | 3.3     | 1.2      | 6.6   | 10.0  | 3.3   |
| Оранжевый промы-<br>сель . . . . .           | 1902—1903             | 2.2              | 3.8      | 7.3    | 9.6     | 9.6  | 11.6  | 10.2  | 10.9     | 8.8       | 4.8      | 3.1     | 1.6      | 7.0   | 10.0  | 3.8   |
| Обиточенская сельск.-хоз.<br>школа . . . . . | 1901—1903             | 2.1              | 3.5      | 4.9    | 7.9     | 9.4  | 11.6  | 11.6  | 11.0     | 9.2       | 6.2      | 3.6     | 1.5      | 6.9   | 10.1  | 3.6   |
| Магарачъ* . . . . .                          | 1902—1903             | 2.4              | 3.2      | 4.3    | 6.4     | 7.2  | 8.4   | 9.8   | 9.4      | 7.9       | 5.6      | 3.9     | 2.0      | 5.8   | 8.2   | 3.6   |
| Уральскъ, Реальн. учил. .                    | 1898—1903             | 2.2              | 4.8      | 5.8    | 8.2     | 10.2 | 11.6  | 11.4  | 10.0     | 7.8       | 4.7      | 1.8     | 2.0      | 6.7   |       |       |
| » » » . . . . .                              | 1901—1903             | 1.9              | 3.5      | 5.9    | 8.1     | 9.6  | 11.4  | 10.9  | 10.1     | 7.4       | 4.7      | 2.1     | 2.3      | 6.5   | 9.6   | 3.4   |
| Чита . . . . .                               | 1898—1903             | 4.7              | 7.0      | 8.8    | 9.2     | 8.3  | 9.9   | 8.2   | 8.0      | 7.8       | 5.9      | 4.4     | 3.7      | 7.2   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 4.0              | 6.7      | 8.0    | 8.5     | 8.0  | 9.7   | 7.6   | 7.4      | 7.8       | 5.9      | 4.2     | 3.2      | 6.7   | 8.2   | 5.3   |
| Иркутскъ* . . . . .                          | 1893—1903             | 3.4              | 5.4      | 6.8    | 7.9     | 7.9  | 9.1   | 8.1   | 7.8      | 6.3       | 4.6      | 3.2     | 2.0      | 6.0   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1898—1903             | 3.5              | 5.3      | 6.7    | 7.8     | 7.2  | 8.8   | 8.0   | 7.9      | 6.7       | 4.6      | 3.1     | 2.0      | 6.0   |       |       |
| » . . . . .                                  | 1901—1903             | 3.4              | 5.5      | 6.2    | 6.9     | 7.6  | 7.8   | 8.2   | 7.8      | 7.1       | 4.3      | 3.0     | 1.6      | 5.8   | 7.6   | 4.0   |
| Желѣзноводскъ* . . . . .                     | 1901—1903             | 3.2              | 2.6      | 3.5    | 5.1     | 6.2  | 7.1   | 8.1   | 8.1      | 5.6       | 4.1      | 2.9     | 1.9      | 4.9   | 6.7   | 3.1   |
| Ессентуки* . . . . .                         | 1901—1903             | 3.6              | 3.3      | 4.0    | 5.0     | 6.2  | 7.0   | 8.0   | 8.1      | 6.1       | 4.5      | 3.4     | 2.2      | 5.1   | 6.7   | 3.5   |
| Темиръ-Ханъ-Шура. . . . .                    | 1898—1903             | 4.2              | 3.8      | 4.8    | 6.5     | 7.1  | 7.7   | 8.4   | 7.5      | 6.1       | 5.3      | 4.0     | 3.2      | 5.7   |       |       |
| » » » . . . . .                              | 1901—1903             | 4.1              | 4.3      | 5.4    | 7.1     | 7.0  | 8.4   | 8.4   | 8.1      | 5.8       | 5.3      | 3.7     | 3.0      | 5.9   | 7.5   | 4.3   |
| Сакарскій питомникъ . . .                    | 1896, 1898—1902       | 3.6              | 4.3      | 5.9    | 6.6     | 7.6  | 9.0   | 9.5   | 9.2      | 8.3       | 6.8      | 4.2     | 3.0      | 6.5   |       |       |
| Абасъ-Туманъ . . . . .                       | 1898—1903             | 3.4              | 4.0      | 5.2    | 5.8     | 5.9  | 7.0   | 8.0   | 7.4      | 7.0       | 5.2      | 3.6     | 2.8      | 5.5   |       |       |
| » » . . . . .                                | 1901—1903             | 3.3              | 4.1      | 5.1    | 6.1     | 5.8  | 6.9   | 7.4   | 7.4      | 6.4       | 4.9      | 3.0     | 2.6      | 5.3   | 6.7   | 3.8   |
| Байрамъ-Али* . . . . .                       | 1897, 1899—1903       | 4.3              | 5.6      | 5.5    | 7.6     | 9.9  | 11.5  | 11.8  | 11.7     | 9.8       | 7.6      | 5.8     | 4.2      | 7.9   |       |       |
| » » . . . . .                                | 1901—1903             | 5.0              | 6.3      | 5.7    | 7.3     | 9.6  | 11.1  | 11.9  | 11.7     | 9.7       | 7.2      | 6.1     | 4.6      | 8.0   | 10.2  | 5.8   |

Суточный ходъ п

(Число часовъ въ м

| Станція                   | Д о п о л у д н я . |     |     |      |      |      |      |       |       | П    |
|---------------------------|---------------------|-----|-----|------|------|------|------|-------|-------|------|
|                           | 3-4                 | 4-5 | 5-6 | 6-7  | 7-8  | 8-9  | 9-10 | 10-11 | 11-12 |      |
| Гольдингенъ . . . . .     | 0.1                 | 1.9 | 4.6 | 6.7  | 8.9  | 10.7 | 12.0 | 13.5  | 13.9  | 13.7 |
| С.-Петербургъ * . . . . . | 0.1                 | 1.9 | 4.4 | 5.9  | 7.2  | 8.7  | 9.9  | 10.7  | 11.2  | 11.5 |
| » . . . . .               |                     | 1.6 | 4.2 | 5.6  | 6.8  | 8.3  | 9.5  | 10.3  | 10.8  | 11.0 |
| Павловскъ * . . . . .     | 0.3                 | 2.5 | 4.7 | 6.5  | 8.4  | 9.9  | 11.2 | 12.1  | 12.3  | 12.3 |
| » . . . . .               | 0.3                 | 2.2 | 4.4 | 6.2  | 8.1  | 9.4  | 10.6 | 11.4  | 11.9  | 12.0 |
| Вышний-Волочекъ . . . . . | 0.2                 | 2.5 | 5.5 | 7.6  | 8.9  | 10.4 | 11.8 | 12.9  | 13.3  | 13.4 |
| Екатеринбургъ * . . . . . | 0.1                 | 2.2 | 4.7 | 6.7  | 8.8  | 11.0 | 13.2 | 14.3  | 14.9  | 14.8 |
| » . . . . .               | 0.1                 | 1.9 | 4.6 | 6.8  | 8.7  | 10.6 | 12.6 | 13.8  | 14.4  | 14.2 |
| Новое-Королево . . . . .  |                     | 2.1 | 5.3 | 7.6  | 9.5  | 11.1 | 12.7 | 13.7  | 14.4  | 14.4 |
| Троицкъ . . . . .         | 0.1                 | 2.7 | 6.7 | 10.0 | 11.9 | 12.4 | 16.4 | 19.5  | 20.3  | 20.1 |
| Осовецъ . . . . .         |                     | 0.8 | 4.0 | 6.9  | 9.3  | 11.3 | 13.1 | 14.3  | 15.1  | 14.8 |
| Минскъ . . . . .          |                     | 2.0 | 5.5 | 8.0  | 9.8  | 11.1 | 13.2 | 14.3  | 14.8  | 14.8 |
| Полибно . . . . .         |                     | 2.1 | 6.5 | 9.5  | 11.8 | 13.9 | 15.4 | 16.7  | 17.2  | 17.2 |
| Бѣлая Криница . . . . .   |                     | 0.4 | 3.6 | 7.3  | 9.8  | 12.2 | 14.2 | 15.2  | 15.5  | 15.5 |
| Плоти . . . . .           |                     | 0.2 | 3.5 | 8.4  | 11.4 | 14.0 | 15.8 | 16.7  | 17.0  | 17.0 |
| Умань . . . . .           |                     | 0.2 | 3.8 | 8.9  | 11.3 | 14.2 | 16.1 | 16.8  | 17.0  | 16.8 |
| Згуровка . . . . .        |                     | 1.2 | 5.5 | 9.2  | 11.9 | 14.0 | 15.8 | 16.8  | 17.2  | 16.9 |
| Лубны . . . . .           |                     | 0.6 | 4.6 | 8.8  | 11.7 | 14.2 | 15.7 | 16.3  | 16.4  | 16.2 |
| Дергачи . . . . .         |                     | 0.9 | 5.5 | 9.3  | 11.8 | 13.9 | 15.6 | 16.3  | 16.5  | 16.4 |
| Конь-Колодезь . . . . .   |                     | 1.3 | 5.1 | 8.3  | 10.7 | 12.4 | 13.8 | 14.9  | 15.3  | 15.3 |
| Сагуны . . . . .          |                     | 1.2 | 5.7 | 10.4 | 13.1 | 15.5 | 17.0 | 17.8  | 18.0  | 17.5 |
| Елисаветградъ . . . . .   |                     | 0.4 | 4.0 | 8.5  | 11.2 | 13.1 | 15.3 | 16.0  | 16.4  | 16.4 |
| Уральскъ . . . . .        |                     | 0.3 | 4.8 | 10.0 | 13.4 | 17.0 | 18.3 | 19.3  | 19.7  | 19.3 |
| Чита . . . . .            |                     | 0.7 | 4.1 | 8.4  | 12.3 | 16.1 | 20.3 | 22.7  | 23.7  | 23.6 |
| Пркутскъ * . . . . .      |                     | 1.0 | 3.7 | 6.2  | 9.2  | 12.5 | 15.6 | 17.7  | 19.1  | 19.8 |
| » . . . . .               |                     | 0.8 | 3.5 | 6.2  | 9.2  | 12.4 | 15.6 | 17.9  | 19.2  | 19.7 |

а II.

ости солнечного сяннїя.

даннїй часъ сутокъ).

| д н я. |      |     |     |     |     | До                | Послѣ             | До            | Послѣ         | Годы<br>наблюденїй. |
|--------|------|-----|-----|-----|-----|-------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------------|
| 3—4    | 4—5  | 5—6 | 6—7 | 7—8 | 8—9 | полудня.<br>Часы. | полудня.<br>Часы. | полудня.<br>% | полудня.<br>% |                     |
| 10.3   | 8.9  | 7.2 | 5.1 | 2.0 | 0.1 | 72.3              | 71.7              | 50.2          | 49.8          | 1898—1903           |
| 9.6    | 7.9  | 6.2 | 4.6 | 2.1 | 0.2 | 60.0              | 64.5              | 48.2          | 51.8          | 1894—1903           |
| 8.9    | 7.5  | 5.8 | 4.3 | 1.8 | 0.1 | 57.1              | 60.8              | 48.4          | 51.6          | 1898—1903           |
| 10.2   | 8.8  | 7.0 | 5.2 | 3.0 | 0.5 | 67.9              | 70.6              | 49.0          | 51.0          | 1881—1903           |
| 9.6    | 8.5  | 6.8 | 5.0 | 2.8 | 0.4 | 64.5              | 68.0              | 48.7          | 51.3          | 1898—1903           |
| 10.6   | 9.3  | 7.2 | 5.0 | 1.7 |     | 73.1              | 71.5              | 50.6          | 49.4          | » »                 |
| 11.4   | 9.0  | 6.9 | 4.8 | 2.2 | 0.1 | 75.9              | 77.1              | 49.6          | 50.4          | 1893—1903           |
| 11.1   | 9.1  | 7.0 | 5.0 | 2.2 | 0.1 | 73.5              | 75.2              | 49.4          | 50.6          | 1898—1903           |
| 12.1   | 10.5 | 8.6 | 5.8 | 2.3 |     | 76.4              | 81.0              | 48.5          | 51.5          | » »                 |
| 12.0   | 11.8 | 9.5 | 6.3 | 2.0 |     | 100.0             | 96.2              | 51.0          | 49.0          | 1897, 1899—1903     |
| 11.5   | 9.6  | 7.4 | 4.5 | 1.0 |     | 74.8              | 75.9              | 49.6          | 50.4          | 1898—1903           |
| 11.5   | 10.2 | 7.9 | 4.8 | 1.6 |     | 77.7              | 77.8              | 50.0          | 50.0          | » »                 |
| 13.7   | 11.7 | 9.1 | 6.1 | 2.0 |     | 93.1              | 92.2              | 50.3          | 49.7          | » »                 |
| 12.3   | 9.9  | 7.5 | 3.5 | 0.2 |     | 78.2              | 78.3              | 49.9          | 50.1          | » »                 |
| 14.4   | 11.7 | 8.1 | 3.3 | 0.2 |     | 87.0              | 86.7              | 50.1          | 49.9          | » »                 |
| 13.8   | 10.9 | 7.9 | 2.6 | 0.1 |     | 88.3              | 83.8              | 51.4          | 48.6          | » »                 |
| 14.0   | 11.9 | 9.2 | 5.0 | 0.8 |     | 91.6              | 89.8              | 50.6          | 49.4          | » »                 |
| 14.2   | 12.0 | 8.8 | 4.0 | 0.4 |     | 88.3              | 87.3              | 50.3          | 49.7          | » »                 |
| 13.1   | 11.2 | 8.4 | 4.9 | 0.8 |     | 89.8              | 85.5              | 51.2          | 48.8          | » »                 |
| 11.9   | 10.0 | 7.5 | 4.3 | 0.7 |     | 81.8              | 78.0              | 51.1          | 48.9          | » »                 |
| 14.8   | 12.7 | 9.3 | 4.8 | 1.0 |     | 98.7              | 93.3              | 51.5          | 48.5          | » »                 |
| 12.7   | 10.6 | 7.3 | 3.4 | 0.3 |     | 84.9              | 83.4              | 50.5          | 49.5          | » »                 |
| 16.3   | 13.8 | 9.8 | 5.2 | 1.1 |     | 102.8             | 102.5             | 50.1          | 49.9          | » »                 |
| 16.2   | 12.6 | 8.7 | 4.5 | 1.1 |     | 108.3             | 109.1             | 49.8          | 50.2          | » »                 |
| 16.1   | 11.6 | 7.1 | 3.8 | 1.2 |     | 85.0              | 98.6              | 46.3          | 53.7          | 1893—1903           |
| 15.7   | 11.4 | 7.0 | 3.5 | 1.0 |     | 84.8              | 96.8              | 46.7          | 53.3          | 1898—1903           |

| Станція.                      | Д о п о л у д н я . |     |      |      |      |      |      |       |       | П о  |
|-------------------------------|---------------------|-----|------|------|------|------|------|-------|-------|------|
|                               | 3-4                 | 4-5 | 5-6  | 6-7  | 7-8  | 8-9  | 9-10 | 10-11 | 11-12 |      |
| Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .    |                     | 0.1 | 2.9  | 7.5  | 11.6 | 15.2 | 17.8 | 18.6  | 18.6  | 18.0 |
| Сакарскій питомникъ . . . . . |                     | 0.4 | 3.5  | 8.2  | 12.7 | 16.7 | 18.8 | 19.6  | 20.2  | 19.9 |
| Абасъ-Туманъ . . . . .        |                     |     |      | 2.6  | 9.5  | 14.5 | 19.5 | 20.3  | 20.2  | 19.5 |
| Байрамъ-Али * . . . . .       |                     | 0.1 | 3.2  | 9.7  | 16.5 | 21.2 | 22.8 | 23.4  | 23.8  | 23.8 |
| Гольдингенъ . . . . .         | 0.3                 | 3.8 | 9.1  | 13.0 | 16.0 | 17.9 | 18.5 | 18.8  | 19.0  | 18.6 |
| С.-Петербургъ * . . . . .     | 0.2                 | 3.7 | 8.9  | 11.6 | 13.8 | 15.3 | 15.8 | 16.1  | 16.2  | 16.5 |
| » . . . . .                   | 0.1                 | 3.2 | 8.4  | 11.2 | 13.1 | 14.6 | 15.0 | 15.4  | 15.6  | 16.0 |
| Павловскъ * . . . . .         | 0.7                 | 5.0 | 9.4  | 12.7 | 15.2 | 16.3 | 16.8 | 17.2  | 17.1  | 16.9 |
| » . . . . .                   | 0.5                 | 4.5 | 8.9  | 12.2 | 14.9 | 16.0 | 16.3 | 16.7  | 16.8  | 16.6 |
| Вышній-Волочекъ . . . . .     | 0.3                 | 5.0 | 11.0 | 14.4 | 16.2 | 17.4 | 18.2 | 18.7  | 18.6  | 18.6 |
| Екатеринбургъ * . . . . .     | 0.2                 | 4.3 | 9.5  | 13.1 | 15.5 | 16.7 | 17.5 | 18.0  | 18.2  | 17.8 |
| » . . . . .                   | 0.1                 | 3.9 | 9.3  | 13.2 | 15.4 | 16.6 | 17.2 | 17.9  | 18.2  | 17.7 |
| Новое-Королево . . . . .      | 0.1                 | 4.3 | 10.7 | 14.6 | 16.7 | 17.9 | 19.2 | 19.5  | 19.9  | 19.5 |
| Троицкъ . . . . .             | 0.2                 | 5.4 | 13.3 | 19.0 | 20.5 | 19.8 | 21.8 | 23.2  | 23.5  | 23.0 |
| Осовецъ . . . . .             |                     | 1.6 | 8.0  | 13.4 | 16.4 | 17.9 | 18.9 | 19.4  | 19.9  | 19.2 |
| Минскъ . . . . .              |                     | 4.1 | 11.1 | 15.2 | 17.0 | 17.6 | 18.9 | 19.8  | 20.0  | 19.8 |
| Полибино . . . . .            |                     | 4.2 | 13.0 | 18.3 | 20.5 | 22.1 | 22.6 | 23.1  | 23.0  | 22.9 |
| Бѣлая Криница . . . . .       |                     | 0.7 | 7.2  | 14.1 | 17.0 | 18.5 | 19.4 | 19.9  | 19.9  | 19.9 |
| Илоти . . . . .               |                     | 0.4 | 7.0  | 16.4 | 19.9 | 21.4 | 22.2 | 22.5  | 22.3  | 21.9 |
| Умань . . . . .               |                     | 0.4 | 7.5  | 17.3 | 20.1 | 21.5 | 22.5 | 22.7  | 22.6  | 22.2 |
| Згуровка . . . . .            |                     | 2.5 | 10.9 | 18.0 | 20.5 | 21.6 | 22.8 | 23.2  | 23.2  | 22.9 |
| Лубны . . . . .               |                     | 1.1 | 9.2  | 17.2 | 20.4 | 22.0 | 22.9 | 23.0  | 22.8  | 22.2 |
| Дергачи . . . . .             |                     | 1.9 | 11.0 | 18.0 | 20.6 | 22.0 | 22.7 | 22.7  | 22.6  | 22.1 |
| Конь-Колодезь . . . . .       |                     | 2.7 | 10.2 | 16.1 | 18.6 | 19.0 | 20.1 | 20.6  | 20.4  | 20.8 |
| Сагуны . . . . .              |                     | 2.4 | 11.4 | 19.7 | 22.3 | 23.3 | 23.8 | 24.4  | 24.5  | 23.9 |
| Елисаветградъ . . . . .       |                     | 0.7 | 7.9  | 16.6 | 20.1 | 21.2 | 22.1 | 22.3  | 22.2  | 21.9 |
| Уральскъ . . . . .            |                     | 0.7 | 9.6  | 19.3 | 22.8 | 24.2 | 25.1 | 25.2  | 25.3  | 24.7 |
| Чита . . . . .                |                     | 1.3 | 8.3  | 16.0 | 19.4 | 21.1 | 22.3 | 22.7  | 22.7  | 22.3 |
| Иркутскъ * . . . . .          |                     | 1.9 | 7.3  | 12.2 | 15.6 | 17.9 | 19.4 | 20.4  | 20.7  | 20.9 |
| » . . . . .                   |                     | 1.6 | 6.9  | 12.0 | 15.8 | 18.0 | 19.4 | 20.5  | 20.9  | 20.7 |
| Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .    |                     | 0.2 | 5.7  | 14.4 | 18.8 | 20.2 | 20.9 | 20.7  | 20.4  | 19.2 |
| Сакарскій питомникъ . . . . . |                     | 0.8 | 7.0  | 14.9 | 18.0 | 19.8 | 21.7 | 22.6  | 23.1  | 22.9 |
| Абасъ-Туманъ . . . . .        |                     |     |      | 5.2  | 17.4 | 21.0 | 22.3 | 22.6  | 22.3  | 21.4 |
| Байрамъ-Али * . . . . .       |                     | 0.1 | 6.3  | 18.8 | 25.1 | 27.2 | 27.5 | 27.7  | 27.9  | 27.7 |

| у д н я. |      |      |      |     |     | До<br>полудня. | Послѣ<br>полудня. | До<br>полудня. | Послѣ<br>полудня. | Годы<br>наблюдений. |
|----------|------|------|------|-----|-----|----------------|-------------------|----------------|-------------------|---------------------|
| 3—4      | 4—5  | 5—6  | 6—7  | 7—8 | 8—9 | Часы.          | Часы.             | %              | %                 |                     |
| 18.0     | 9.5  | 6.4  | 3.1  | 0.4 |     | 92.3           | 82.5              | 52.8           | 47.2              | 1898—1903           |
| 17.4     | 12.5 | 8.0  | 3.4  | 0.2 |     | 100.1          | 98.9              | 50.3           | 49.7              | 1896, 1898—1902     |
| 18.1     | 8.7  | 2.5  |      |     |     | 86.6           | 78.8              | 52.4           | 47.6              | 1898—1903           |
| 22.2     | 17.7 | 9.3  | 1.9  |     |     | 120.7          | 121.4             | 49.8           | 50.2              | 1897, 1899—1903     |
| 17.2     | 15.9 | 14.4 | 10.3 | 3.9 | 0.2 | 116.4          | 115.8             | 50.1           | 49.9              | 1898—1903           |
| 15.6     | 14.7 | 12.3 | 9.3  | 4.1 | 0.3 | 101.6          | 105.8             | 48.9           | 51.1              | 1894—1903           |
| 14.7     | 14.0 | 11.6 | 8.7  | 3.5 | 0.2 | 96.6           | 100.4             | 49.0           | 51.0              | 1898—1903           |
| 15.9     | 15.2 | 13.4 | 10.4 | 6.0 | 1.0 | 110.4          | 111.6             | 49.7           | 50.3              | 1881—1903           |
| 15.8     | 15.1 | 13.2 | 10.0 | 5.6 | 0.8 | 106.8          | 109.5             | 49.4           | 50.6              | 1898—1903           |
| 16.7     | 16.5 | 14.1 | 9.8  | 3.3 | 0.1 | 119.8          | 114.3             | 51.2           | 48.8              | » »                 |
| 16.4     | 15.3 | 13.2 | 9.6  | 4.4 | 0.2 | 113.0          | 111.3             | 50.4           | 49.6              | 1893—1903           |
| 16.3     | 15.8 | 13.5 | 10.0 | 4.3 | 0.2 | 111.8          | 111.4             | 50.1           | 49.9              | 1893—1903           |
| 18.6     | 17.7 | 16.1 | 11.5 | 4.6 | 0.1 | 122.9          | 126.7             | 49.2           | 50.8              | » »                 |
| 18.9     | 19.8 | 17.9 | 12.6 | 4.0 | 0.1 | 146.7          | 138.1             | 52.0           | 48.0              | 1897, 1899—1903     |
| 17.6     | 16.6 | 14.4 | 8.9  | 2.0 |     | 115.5          | 115.3             | 50.0           | 50.0              | 1898—1903           |
| 17.7     | 17.2 | 14.9 | 9.7  | 3.1 | 0.1 | 123.7          | 118.8             | 51.1           | 48.9              | » »                 |
| 20.5     | 19.5 | 17.2 | 12.2 | 3.9 |     | 146.8          | 139.6             | 51.2           | 48.8              | » »                 |
| 18.4     | 17.5 | 14.5 | 7.1  | 0.3 |     | 116.7          | 115.4             | 50.3           | 49.7              | » »                 |
| 19.9     | 19.1 | 15.5 | 6.5  | 0.5 |     | 132.1          | 124.7             | 51.5           | 48.5              | » »                 |
| 20.1     | 18.6 | 15.1 | 5.3  | 0.2 |     | 134.6          | 123.7             | 52.1           | 47.9              | » »                 |
| 20.9     | 19.7 | 17.5 | 10.0 | 1.7 |     | 142.7          | 136.3             | 51.1           | 48.9              | » »                 |
| 21.2     | 20.2 | 16.9 | 8.1  | 0.8 |     | 138.6          | 133.1             | 51.0           | 49.0              | » »                 |
| 19.3     | 18.7 | 16.3 | 9.8  | 1.6 |     | 141.5          | 129.4             | 52.2           | 47.8              | » »                 |
| 17.8     | 17.0 | 14.5 | 8.6  | 1.5 |     | 128.3          | 118.0             | 52.1           | 47.9              | » »                 |
| 21.9     | 21.1 | 17.7 | 9.6  | 1.9 |     | 151.8          | 142.3             | 51.6           | 48.4              | » »                 |
| 19.5     | 18.5 | 14.3 | 6.9  | 0.5 |     | 133.1          | 123.5             | 51.9           | 48.1              | » »                 |
| 23.1     | 22.2 | 18.5 | 10.3 | 2.2 |     | 152.2          | 148.8             | 50.5           | 49.5              | » »                 |
| 19.0     | 17.9 | 15.7 | 8.9  | 2.2 |     | 133.8          | 127.2             | 50.8           | 49.2              | » »                 |
| 19.6     | 17.8 | 13.4 | 7.5  | 2.5 |     | 115.4          | 123.1             | 48.4           | 51.6              | 1893—1903           |
| 19.4     | 17.7 | 13.2 | 7.0  | 2.1 |     | 115.1          | 121.3             | 48.7           | 51.3              | 1898—1903           |
| 14.6     | 13.4 | 11.6 | 6.1  | 0.8 |     | 121.3          | 100.0             | 54.8           | 45.2              | 1898—1903           |
| 20.3     | 18.7 | 14.7 | 6.7  | 0.3 |     | 127.9          | 126.8             | 50.1           | 49.9              | 1896, 1898—1902     |
| 17.8     | 15.6 | 5.0  |      |     |     | 110.8          | 98.4              | 52.9           | 47.1              | 1898—1903           |
| 27.2     | 25.4 | 17.6 | 3.7  |     |     | 160.6          | 157.0             | 50.5           | 49.5              | 1897, 1899—1903     |

| Станція.                      | Д о п о л у д н я . |     |     |     |     |      |      |       |       | П о  |
|-------------------------------|---------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|-------|-------|------|
|                               | 3-4                 | 4-5 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 8-9  | 9-10 | 10-11 | 11-12 |      |
| Гольдингенъ . . . . .         |                     |     |     | 0.3 | 1.8 | 3.4  | 5.6  | 8.1   | 8.8   | 8.7  |
| С.-Петербургъ * . . . . .     |                     |     |     |     | 0.6 | 2.1  | 4.0  | 5.4   | 6.2   | 6.5  |
| » . . . . .                   |                     |     |     |     | 0.4 | 2.0  | 3.9  | 5.2   | 5.9   | 6.1  |
| Павловскъ * . . . . .         |                     |     |     | 0.3 | 1.7 | 3.6  | 5.6  | 6.9   | 7.6   | 7.8  |
| » . . . . .                   |                     |     |     | 0.3 | 1.5 | 3.1  | 4.9  | 6.1   | 7.1   | 7.5  |
| Вышній Волочекъ . . . . .     |                     |     |     | 0.4 | 1.6 | 3.4  | 5.4  | 7.0   | 7.9   | 8.1  |
| Екатеринбургъ * . . . . .     |                     |     |     | 0.2 | 2.1 | 5.3  | 8.9  | 10.7  | 11.6  | 11.8 |
| » . . . . .                   |                     |     |     | 0.3 | 2.0 | 4.6  | 8.0  | 9.7   | 10.7  | 10.8 |
| Новое-Королево . . . . .      |                     |     |     | 0.6 | 2.4 | 4.4  | 6.3  | 7.9   | 8.8   | 9.2  |
| Троицкъ . . . . .             |                     |     |     | 1.1 | 3.2 | 5.0  | 11.1 | 15.8  | 17.1  | 17.2 |
| Осовецъ . . . . .             |                     |     |     | 0.4 | 2.3 | 4.8  | 7.3  | 9.2   | 10.3  | 10.4 |
| Минскъ . . . . .              |                     |     |     | 0.8 | 2.6 | 4.7  | 7.5  | 8.7   | 9.5   | 9.7  |
| Полибино . . . . .            |                     |     |     | 0.7 | 3.1 | 5.8  | 8.3  | 10.3  | 11.3  | 11.5 |
| Бѣлая Криница . . . . .       |                     |     |     | 0.4 | 2.6 | 5.8  | 9.0  | 10.6  | 11.1  | 11.1 |
| Плоти . . . . .               |                     |     |     | 0.4 | 2.8 | 6.6  | 9.5  | 10.9  | 11.6  | 12.1 |
| Умань . . . . .               |                     |     |     | 0.5 | 2.6 | 6.9  | 9.7  | 10.9  | 11.4  | 11.4 |
| Згуровка . . . . .            |                     |     |     | 0.6 | 3.3 | 6.4  | 8.8  | 10.4  | 11.1  | 10.8 |
| Лубны . . . . .               |                     |     |     | 0.4 | 3.0 | 6.4  | 8.5  | 9.6   | 10.0  | 10.2 |
| Дергачи . . . . .             |                     |     |     | 0.5 | 3.1 | 5.8  | 8.6  | 9.9   | 10.5  | 10.7 |
| Конь-Колодезь . . . . .       |                     |     |     | 0.5 | 2.7 | 5.2  | 7.5  | 9.1   | 10.3  | 10.3 |
| Сагуны . . . . .              |                     |     |     | 1.1 | 3.9 | 7.8  | 10.2 | 11.3  | 11.4  | 11.2 |
| Елисаветградъ . . . . .       |                     |     |     | 0.3 | 2.3 | 5.0  | 8.5  | 9.8   | 10.6  | 10.9 |
| Уральскъ . . . . .            |                     |     |     | 0.7 | 4.0 | 7.8  | 11.5 | 13.4  | 14.1  | 13.9 |
| Чита . . . . .                |                     |     |     | 0.8 | 5.2 | 11.1 | 18.3 | 22.8  | 24.8  | 25.0 |
| Иркутскъ * . . . . .          |                     |     |     | 0.2 | 2.8 | 7.1  | 11.7 | 15.1  | 17.6  | 19.0 |
| » . . . . .                   |                     |     |     | 0.3 | 2.5 | 6.9  | 11.7 | 15.3  | 17.5  | 18.9 |
| Темиръ-Ханъ-Шура . . . . .    |                     |     |     | 0.6 | 4.5 | 10.2 | 14.7 | 16.4  | 16.9  | 16.8 |
| Сакарскій питомникъ . . . . . |                     |     |     | 1.4 | 7.4 | 13.5 | 16.0 | 16.6  | 17.2  | 17.0 |
| Абасъ-Туманъ . . . . .        |                     |     |     |     | 1.6 | 8.1  | 16.6 | 18.0  | 18.2  | 17.6 |
| Байрамъ-Али * . . . . .       |                     |     |     | 0.6 | 7.9 | 15.2 | 18.1 | 19.2  | 19.7  | 19.8 |



| д н я . |      |     |     |     |     | До<br>полудня. | Послѣ<br>полудня. | До<br>полудня. | Послѣ<br>полудня. | Годы<br>наблюдений. |
|---------|------|-----|-----|-----|-----|----------------|-------------------|----------------|-------------------|---------------------|
| 3—4     | 4—5  | 5—6 | 6—7 | 7—8 | 8—9 | Часы.          | Часы.             | %              | %                 |                     |
| 3.4     | 1.4  | 0.1 |     |     |     | 28.0           | 27.0              | 50.9           | 49.1              | 1898—1903           |
| 3.5     | 1.2  | 0.1 |     |     |     | 18.3           | 23.1              | 44.4           | 55.6              | 1894—1903           |
| 3.1     | 1.0  | 0.1 |     |     |     | 17.4           | 21.3              | 45.0           | 55.0              | 1898—1903           |
| 4.6     | 2.3  | 0.5 |     |     |     | 25.7           | 29.4              | 46.6           | 53.4              | 1881—1903           |
| 3.9     | 2.0  | 0.4 |     |     |     | 23.0           | 27.3              | 45.8           | 54.2              | 1898—1903           |
| 4.4     | 2.3  | 0.4 |     |     |     | 25.7           | 28.7              | 47.2           | 52.8              | » »                 |
| 6.4     | 2.7  | 0.5 |     |     |     | 38.8           | 42.7              | 47.6           | 52.4              | 1893—1903           |
| 5.9     | 2.4  | 0.6 |     |     |     | 35.3           | 39.0              | 47.5           | 52.5              | 1898—1903           |
| 5.7     | 3.3  | 1.1 |     |     |     | 30.4           | 35.6              | 46.1           | 53.9              | » »                 |
| 5.2     | 3.9  | 1.1 |     |     |     | 53.3           | 54.5              | 49.4           | 50.6              | 1897, 1899—1903     |
| 5.4     | 2.5  | 0.4 |     |     |     | 34.3           | 36.4              | 48.5           | 51.5              | 1898—1903           |
| 5.4     | 3.1  | 0.8 |     |     |     | 33.8           | 36.6              | 48.0           | 52.0              | » »                 |
| 6.9     | 3.8  | 0.9 |     |     |     | 39.5           | 44.5              | 47.1           | 52.9              | » »                 |
| 6.3     | 2.4  | 0.5 |     |     |     | 39.5           | 41.4              | 48.8           | 51.2              | » »                 |
| 8.9     | 4.3  | 0.7 |     |     |     | 41.8           | 48.6              | 46.2           | 53.8              | » »                 |
| 7.6     | 3.1  | 0.7 |     |     |     | 42.0           | 44.1              | 48.7           | 51.3              | » »                 |
| 7.6     | 4.1  | 0.9 |     |     |     | 40.6           | 43.9              | 48.0           | 52.0              | » »                 |
| 7.2     | 3.9  | 0.7 |     |     |     | 37.9           | 41.6              | 47.6           | 52.4              | » »                 |
| 7.0     | 3.8  | 0.8 |     |     |     | 38.4           | 42.1              | 47.8           | 52.2              | » »                 |
| 5.9     | 3.1  | 0.5 |     |     |     | 35.3           | 37.9              | 48.2           | 51.8              | » »                 |
| 7.7     | 4.2  | 1.0 |     |     |     | 45.7           | 44.3              | 50.8           | 49.2              | » »                 |
| 6.0     | 2.7  | 0.3 |     |     |     | 36.5           | 39.4              | 48.1           | 51.9              | » »                 |
| 9.5     | 5.3  | 1.2 |     |     |     | 51.5           | 56.1              | 47.9           | 52.1              | » »                 |
| 13.5    | 7.3  | 1.7 |     |     |     | 83.0           | 91.0              | 47.7           | 52.3              | » »                 |
| 12.5    | 5.4  | 0.9 |     |     |     | 54.5           | 74.3              | 42.3           | 57.7              | 1893—1903           |
| 12.1    | 5.1  | 0.9 |     |     |     | 54.2           | 72.8              | 42.8           | 57.2              | 1898—1903           |
| 11.1    | 5.5  | 1.3 |     |     |     | 63.3           | 64.9              | 49.3           | 50.7              | 1898—1903           |
| 12.5    | 6.3  | 1.2 |     |     |     | 72.1           | 68.7              | 51.2           | 48.8              | 1896, 1898—1902     |
| 8.4     | 1.8  |     |     |     |     | 62.5           | 59.4              | 51.3           | 48.7              | 1898—1903           |
| 17.2    | 10.0 | 1.0 |     |     |     | 80.7           | 85.6              | 48.5           | 51.5              | 1897, 1899—1903     |

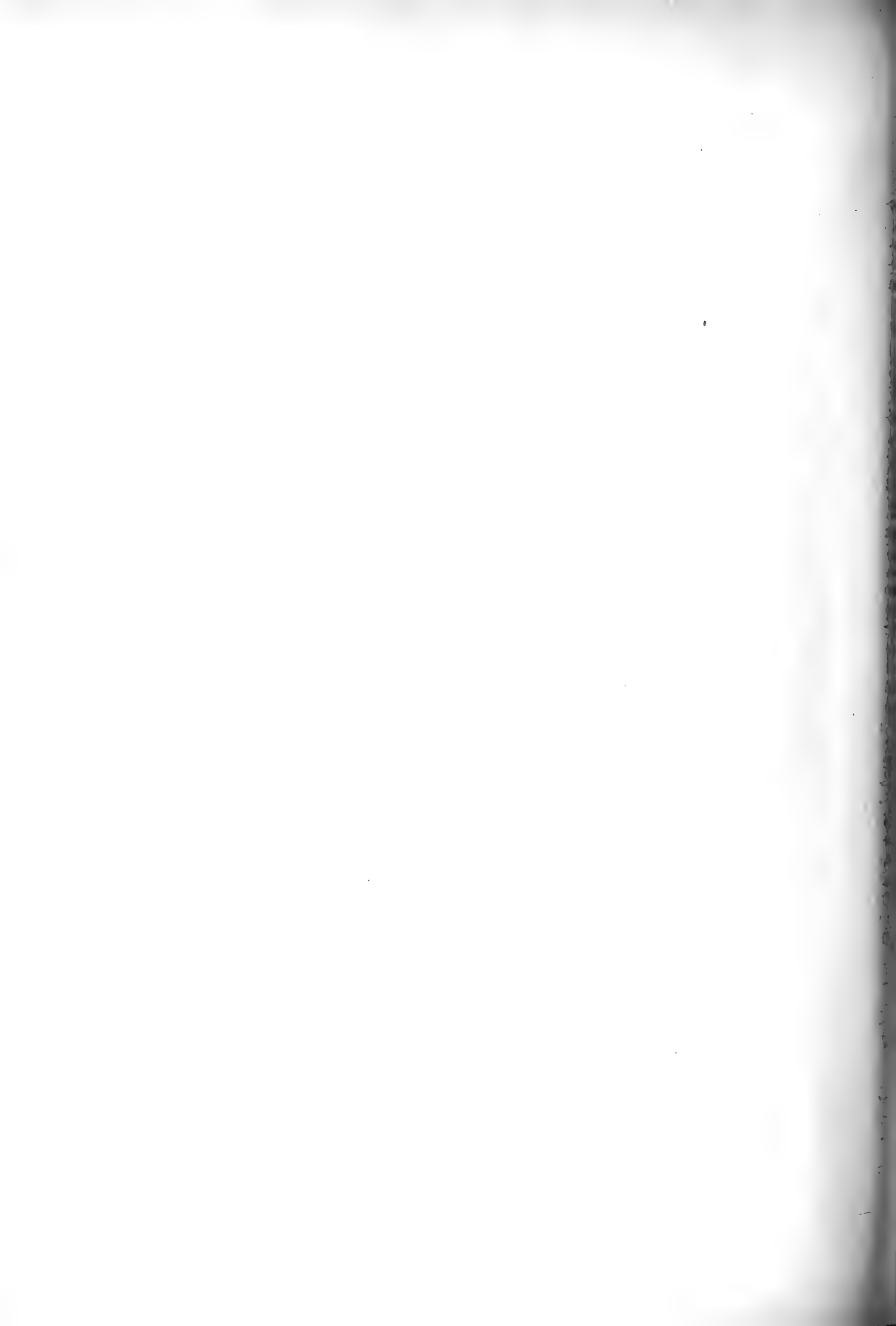
Зап. Физ.-Мат. Отд.

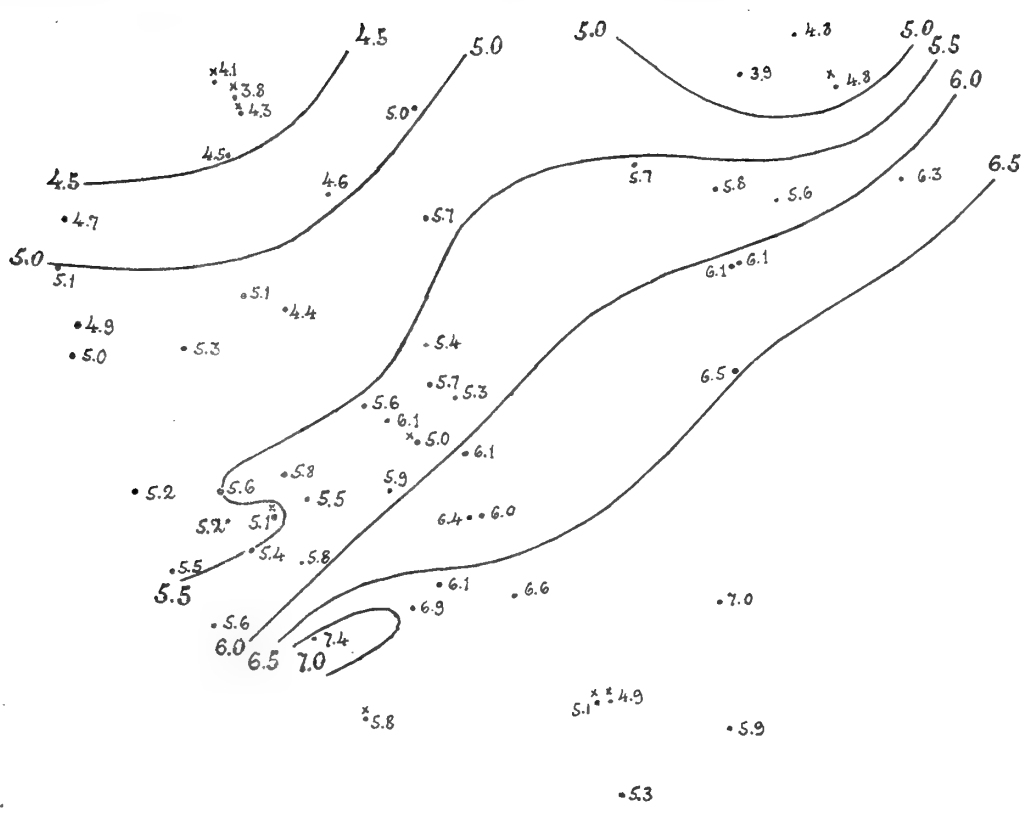
PRESENTED  
18 JUN. 1916

5

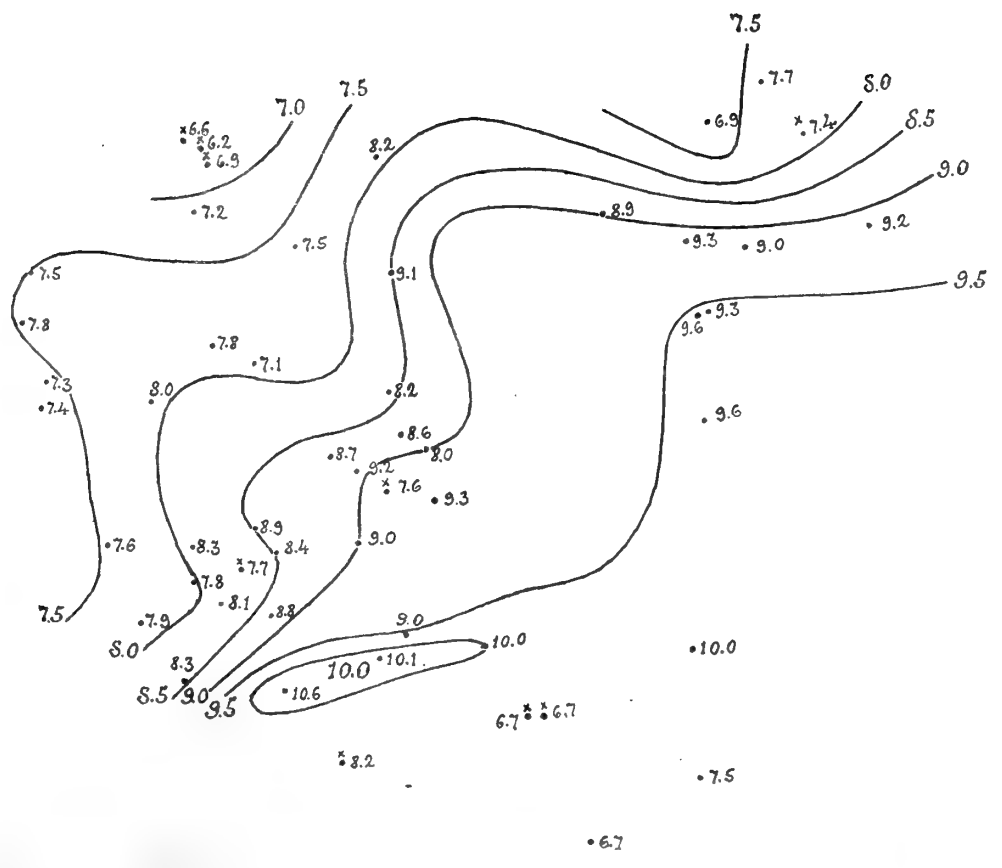






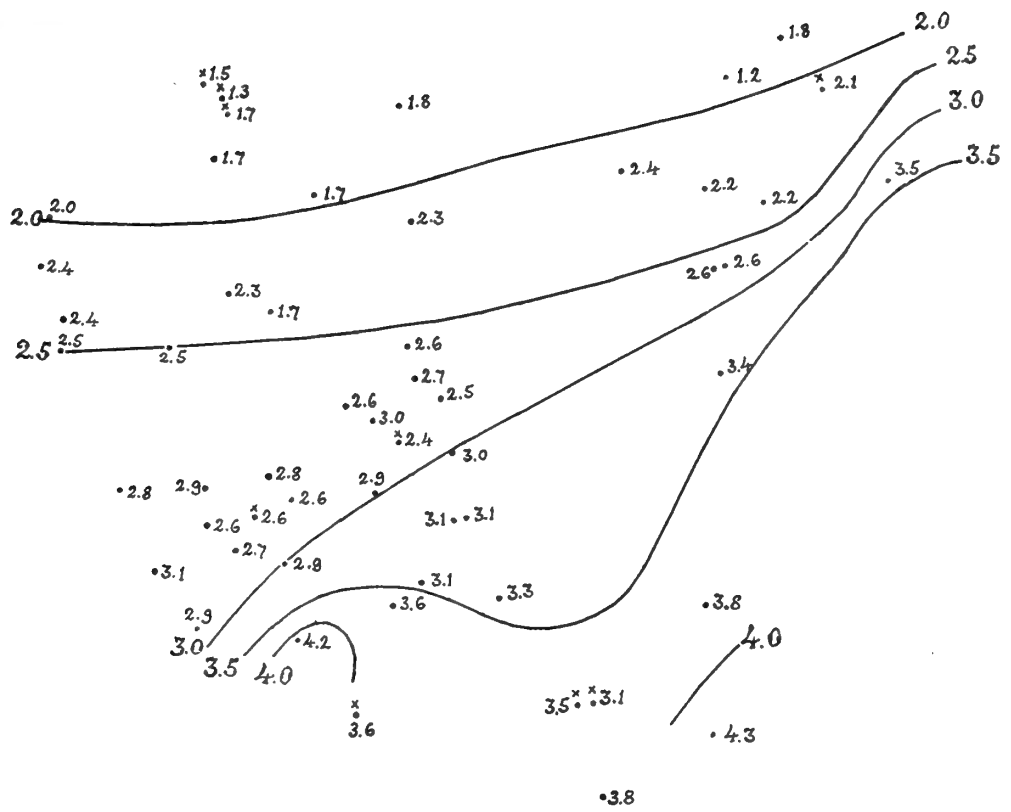


Продолжительность сол-  
нечного сiяня.  
1901 - 1903  
Годъ  
Число часовъ въ день.  
x Обозначаетъ гелиографъ Кемпбеля.

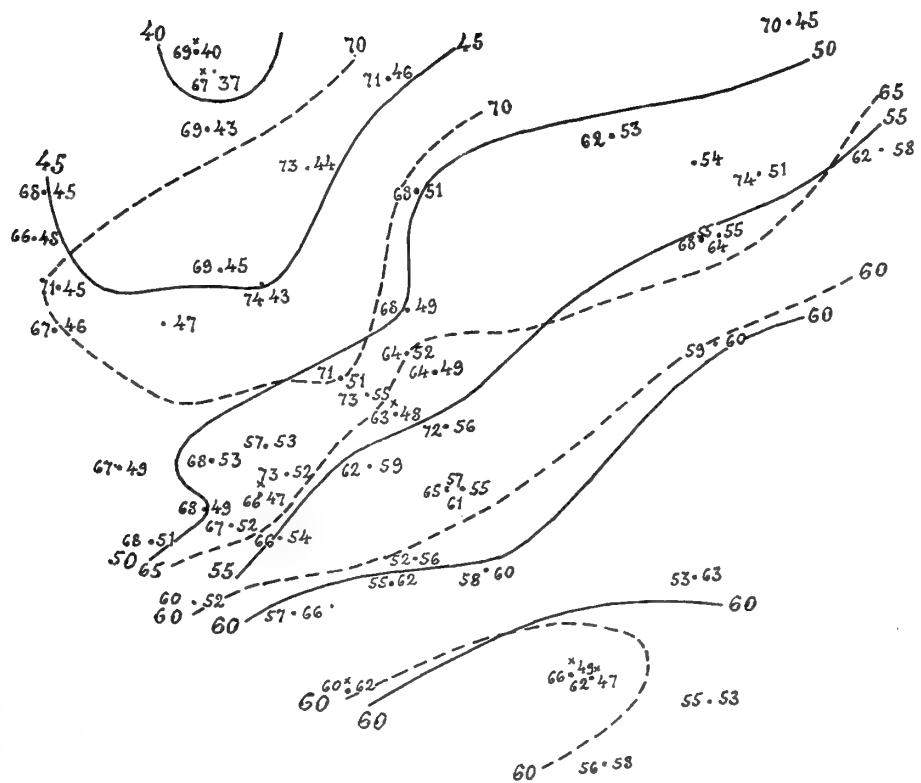


Продолжительность  
солнечного сiяня.  
1901 - 1903  
Лѣто  
(Апрѣль - Сентябрь)  
Число часовъ въ день.





Продолжительность  
солнечного сияния.  
1901 - 1903.  
ЗИМА  
(Октябрь - Март)  
Число часов в день.



Годъ  
1901 - 1903  
Продолжительность солнечного  
сияния въ процентахъ возможной  
продолжительности - цифры справа  
Облачность - цифры слева.  
----- солнечное сияние.  
----- облачность.



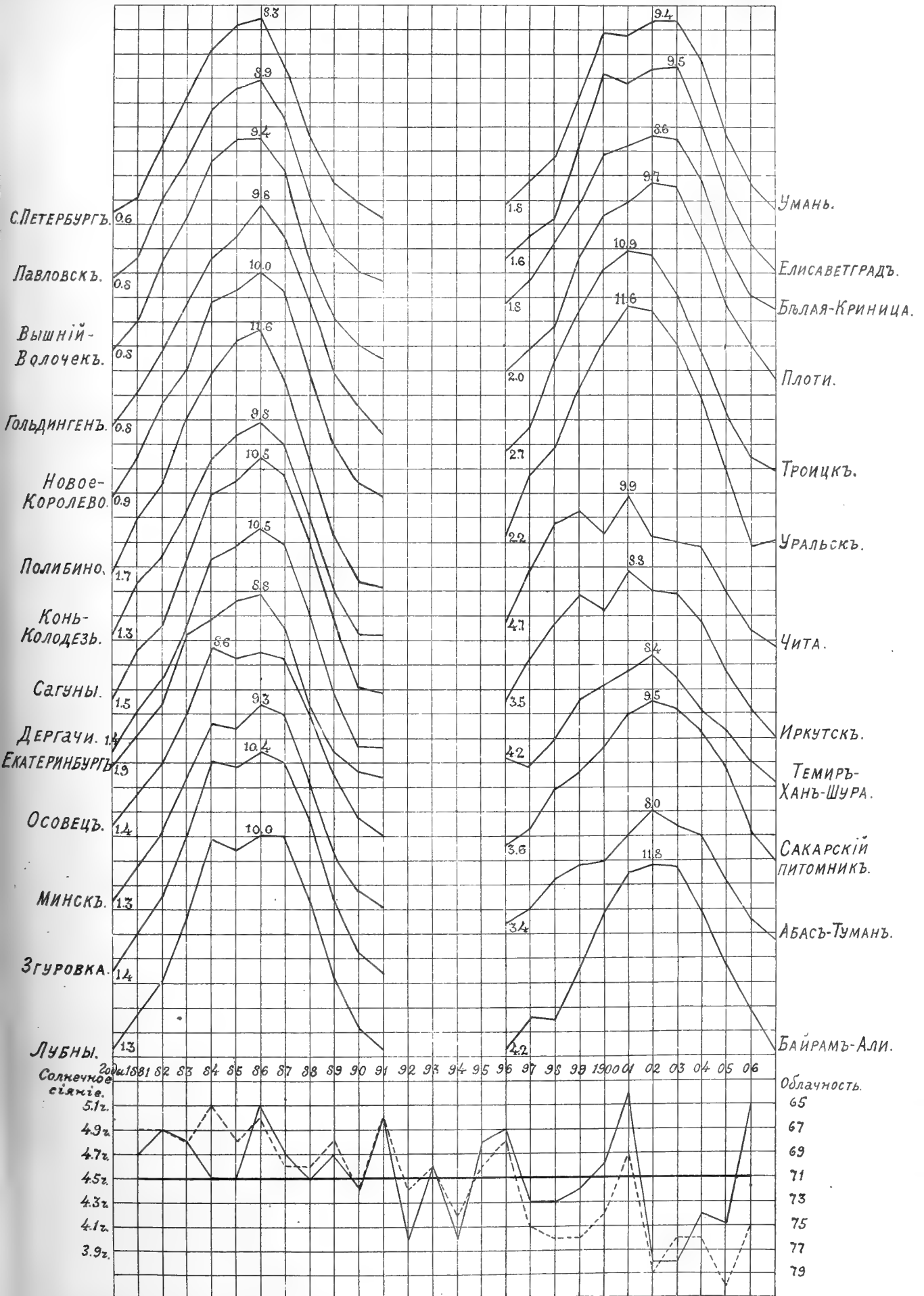
BRITISH MUSEUM  
NATURAL HISTORY  
LONDON

# Къ статьѣ П. Ваннари.

Годовой ходъ продолжительности солнечнаго сіянія 1898—1903.

I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII

I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII



Павловскъ ————— солнечное сіяніе, - - - - - облачность.







Цѣна: 70 к.; Prix: 1 Mrk. 50 Pf.

Продается у комиссіонеръ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и К. Л. Рикера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбаснинова въ С.-Петербур., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Клякина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Ниммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзакъ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kymmel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

PRESENTED  
16 NOV. 1908

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 4.**

**Volume XXII. № 4.**

# ICHTHYOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN IM EISMEER.

II. GYMNELIS UND ENCHELYOPUS s. ZOARCES.

VON

**N. Knipowitsch.**

MIT 8 FIGUREN UND EINER KARTE IM TEXT.

*(Vorgelegt der Akademie am 13. December 1906).*



C.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.



**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 4.**

**Volume XXII. № 4.**

---

# ICHTHYOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN IM EISMEER.

## II. GYMNELIS UND ENCHELYOPUS s. ZOARCES.

VON

**N. Knipowitsch.**

*auf with I*

—  
MIT 8 FIGUREN UND EINER KARTE IM TEXT.  
—

(Vorgelegt der Akademie am 13. December 1906).



С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.  
St. Petersburg, Januar 1908. Beständiger Sekretär Akademiker *S. v. Oldenburg*.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.  
Wass. Ostr., 9. Linie, № 12.

*Gymnelis viridis* (Fabricius).

Fig. 1—8.

- Wichtigste Litteratur.** O. Fabricius. Fauna groenlandica. 1780. S. 141 (*Ophidium viride*).  
Lacépède. Histoire naturelle des poissons. Paris. L'an VIII de la République (1800).  
Vol. II, S. 280<sup>1)</sup> (*Ophidium unernak*).  
J. C. H. Reinhardt. Översigt. Kjöbenhavn. 1832—1833. S. 4—6 (*Gymnelus viridis*)<sup>2)</sup>.  
» » » » K. Danske Videnskabernes Selskabs Afh. VI. Kjöbenhavn. 1837.  
S. XXI (*Gymnelus viridis*)<sup>2)</sup>.  
» » » » Ichtyologische Bidrag til den Grönlandske Fauna. K. Danske Vi-  
denskab. Selskabs Afh. VII. Kjöbenhavn. 1838. S. 131 (*Gymnelis viridis*)<sup>2)</sup>.  
Lay and Bennett. Zoology of Beechey's Voyage. 1839. S. 67, Tab. XX, Fig. 1  
(*Ophidium stigma*)<sup>2)</sup>.  
H. Kröyer. Voyages de la commission scientifique du nord en Scandinavie, en La-  
ponie, au Spitzberg et aux Feröe pendant les années 1838, 1839 et 1840 sur la corvette  
La Recherche publiés sous la direction de M. P. Gaimard. Poissons. Tab. 15 (a-f) (nur  
Abbildungen).  
Sir John Richardson. Account of the fish. The last of the arctic voyages, being a  
narrative of the expedition in H. M. S. Assistance, under the command of captain Sir  
Edward Belcher. Vol. II. 1885. S. 367—372, Plates XXIX, XXX (*Gymnelis viridis* +  
*Gymnelis viridis* v. *unimaculatus*).  
J. Kaup. Einiges über die Unterfamilie Ophidinae. Archiv für Naturgeschichte, gegr.  
von Wiegman. 22 Jahrg. 1-er Band. 1856. S. 96 (*Cepolophis viridis*).  
A. Günther. Catalogue of the fishes in the British Museum. Vol. VI. 1862. S. 323.  
H. Kröyer. Naturhistoriske Tidsskrift. 3 R. I. 1862. S. 258<sup>3)</sup>.  
A. J. Malmgren. Om Spetsbergens Fiskfauna. Öfversigt af K. Sv. Vetenskaps-Aka-  
demiens Förhandlingar, 1864, № 10. 1865. S. 514—516.  
R. Collett. Fishes. The Norwegian North-Atlantic Expedition. Vol. III. 1880. S.  
123—125. Pl. IV. Fig. 32.

1) Vol. IV, S. 2 der kleinen Ausgabe.

2) Diese Quellen waren mir nicht zugänglich.

Зан. Физ.-Мат. Орг.

3) Die Arbeit blieb mir nicht zugänglich.

Chr. F. Lütken. Et Bidrag til Kundskab om Kara-Havets Fiske. Dijnphna-Togtets zoologisk-botaniske Udbytte. Kjöbenhavn. 1886. S. 125—126.

G. B. Goodé and T. H. Bean. Oceanic Ichthyology. Memoirs of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XX. 1896. S. 313.

D. S. Jordan and B. W. Evermann. The fishes of North and Middle America. Bulletin of the United States National Museum. № 47. Part III. 1898. S. 2477—2478 (*Gymnelis viridis* + *Gymnelis stigma*). Part V, Pl. CCCLII, Fig. 864, 864a, 864b, 864c (*Gymnelis viridis*).

Chr. F. Lütken. The ichthyological Results. The Danish Ingolf-Expedition. Vol. II, Part 1. 1899.

N. Knipowitsch. Zoologische Ergebnisse der Russischen Expeditionen nach Spitzbergen. Über die in den Jahren 1899—1900 im Gebiete von Spitzbergen gesammelten Fische. Annuaire du Musée Zoologique de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. Vol. VI. 1901. S. 75—76.

E. Ehrenbaum. Fische. Fauna arctica. Bd. II. 1902. S. 119.

A. S. Jensen. The Fishes of East-Greenland. Meddelelser om Grönland. Vol. XXIX. 1904. S. 264—265.

R. Collett. Fiske indsamlede under «Michael Sars»'s Togter i Nordhavet 1900—1902. Report on Norwegian Fishery and Marine-Investigations. Vol. II. 1905. № 3. S. 142.

**Beschreibung.** Die mir zur Verfügung stehende Collection aus dem europäischen und asiatischen Teil des Eismeres enthält im Ganzen 52 Exemplare von *Gymnelis viridis* (Fabr.), deren Länge von 32.6 mm. bis 142.3 mm. beträgt. Die meisten, und zwar 46 Exemplare sind genügend gut erhalten um Messungen zu ermöglichen, eine Hälfte davon zeigt sogar sehr guten Erhaltungs-Zustand. Die wichtigsten Messungen der erwähnten 46 Exemplare findet der Leser unten in Tabellen.

Sowohl die Farbe, wie auch die Verhältnisse einzelner Körperteile zeigen beträchtliche Schwankungen. Wir müssen zunächst die letzteren näher ins Auge fassen.

Die Kopflänge ist von 14.2% bis 19.1% der Totallänge, meist kleiner als 17% (und zwar von 46 Exemplaren bei 31, d. h. bei c.  $\frac{2}{3}$ ). Wenn wir unsere Exemplare nach der Grösse in 3 Gruppen verteilen, so bekommen wir folgende Tabelle der Kopflänge:

| Länge in mm. | Anzahl der Exemplare. | Anzahl der Exemplare mit der Kopflänge. |           |           |           |           |           |
|--------------|-----------------------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|              |                       | unter 15%.                              | 15—15.9%. | 16—16.9%. | 17—17.9%. | 18—18.9%. | über 19%. |
| unter 100    | 17                    | —                                       | 5         | 2         | 7         | 3         | —         |
| 100—120      | 14                    | 3                                       | 6         | 2         | 2         | 1         | —         |
| über 120     | 15                    | 1                                       | 5         | 7         | —         | 1         | 1         |
| Im Ganzen    | 46                    | 4                                       | 16        | 11        | 9         | 5         | 1         |

Aus der Tabelle kann man leicht ersehen, dass die Kopflänge am grössten bei jungen Exemplaren (unter 100 mm.) ist, am kleinsten bei mittelgrossen (100—120 mm.), während sie bei den grössten (über 120 mm.) im Ganzen wieder zunimmt. Von 17 kleinsten Exemplaren beträgt die Kopflänge bei 12 mehr als 16% der Totallänge (und bei 10 Exemplaren 17% oder mehr); von 14 mittelgrossen Exemplaren beträgt die Kopflänge nur bei 5 mehr als 16%, von 15 Exemplaren über 120 mm. zeigen 9 die Kopflänge über 16% (vergl. die Tabelle der Messungen).

Die Kopflänge ist im Ganzen merklich grösser bei Männchen als bei Weibchen, besonders ist dies bei grösseren Exemplaren der Fall. Bei 32 Exemplaren, deren Geschlecht bestimmt worden ist, finden wir folgendes.

Die Kopflänge der Männchen über 120 mm. beträgt 15.6—19.1% der Totallänge, die der Weibchen 14.8—15.7%; es ist dabei zu bemerken, dass von 10 Männchen nur bei einem die Kopflänge weniger als 16% beträgt, während dies bei allen 5 Weibchen der Fall ist. Die Kopflänge der Männchen von 100—120 mm. beträgt 15.3—18.5%, die der Weibchen 14.2—16.2%; von 6 Männchen ist die Kopflänge bei 2 unter 16%, von 5 Weibchen — bei 4. Die Kopflänge der Männchen unter 100 mm. ist (bei 4 Exemplaren) 15.3—18.2%, die der Weibchen (bei 2 Exemplaren) 15.2—16.5%.

Die Breite des Kopfes beträgt bei Männchen über 120 mm. 8.2—13.1% (von 10 Exemplaren nur bei 2 weniger als 9%), bei Weibchen 8.0—9.7% (von 5 Exemplaren bei 3 weniger als 9%). Bei Männchen von 100—120 mm. ist die Kopfbreite 7.8—11.8%, bei Weibchen 7.5—8.4%. Bei 4 Männchen unter 100 mm. fand ich 8.1—10.6%, bei 2 Weibchen 7.4% und 9.5%. Es liegt auf der Hand, dass die Breite des Kopfes im Ganzen bei Männchen merklich grösser ist.

Der Durchmesser der iris beträgt bei Exemplaren unter 100 mm. 3.2—5.2% der Totallänge (von 16 Exemplaren bei 12 4% oder mehr, bei 4 weniger als 4%), bei Exemplaren von 100—120 mm. 3.2—4.3% (von 13 Exemplaren bei 7 4% oder mehr), bei Exemplaren über 120 mm. 3.3—4.5% (von 14 Exemplaren bei 6 4% oder mehr). Bei der ersten Gruppe ist der Durchmesser der iris fast immer grösser als der Abstand von dem vorderen Rand der iris bis zur Schnauzenspitze, bei der zweiten ist dies meist der Fall, bei der dritten ist dagegen der Durchmesser der iris in der Regel kleiner. Nach A. Günther ist die Schnauze überhaupt länger, als das Auge<sup>1)</sup>. Im Ganzen scheinen die Augen bei Männchen etwas grösser zu sein als bei Weibchen.

Sehr beträchtlichen Schwankungen unterliegt die Lage der Rückenflosse und zwar beträgt der Abstand von der Schnauzenspitze bis zum Anfang der Rückenflosse von 16.2 bis 34.8% der Totallänge. Von 46 Exemplaren ist derselbe bei 17 kleiner als 20% der Totallänge, bei 19 Exemplaren von 20 bis 30%, bei 10 Exemplaren über 30%. Bei einigen Exemplaren beginnt die Rückenflosse sehr weit vorne, fast über der Basis der Brustflossen,

1) A. Günther. Catalogue. S. 324.



bei anderen sehr weit hinten, bei dem Exemplar № 6 (St. № 66 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi») sogar nach hinten von der vertikalen Linie durch die Mitte von anus; die Länge bis zum Anfang der Rückenflosse beträgt bei diesem Exemplar 34.8% der Totallänge, die Länge bis zum Anfang der Analflosse 35.5%, die Länge bis zur Mitte von anus 34.2%. Von 49 Exemplaren beginnt die Rückenflosse bei 26 über den Brustflossen, bei 23 mehr oder weniger nach hinten von den Spitzen der (an die Seiten gedrückten) Brustflossen; der Anfang der Rückenflosse liegt also nur bei c. 53% der Exemplare über den Brustflossen (vergl. Fig. 1—6 auf der Seite 8—9).

Vor einigen Jahren habe ich in meiner Arbeit über die Fische Spitzbergens<sup>1)</sup> erwähnt, dass das von Prof. R. Collett in der Diagnose der Art angeführte Merkmal «Dorsal commencing above the posterior third of the pectorals»<sup>2)</sup> nicht richtig ist und verworfen werden muss. Die oben angeführten Angaben zeigen dies sehr deutlich. Denselben Fehler finden wir auch in dem «Catalogue» von A. Günther<sup>3)</sup>.

Beträchtlichen Schwankungen unterliegt auch die relative Länge des Rumpfes. Die Länge bis zur Mitte von anus beträgt 32.4—39.5% der Totallänge, meist 34—37%. Von 46 Exemplaren ist diese Länge bei 8 unter 34%, bei 31 (also c.  $\frac{2}{3}$ ) 34—37%, bei 7 über 37%. Die Länge bis zum Anfang der Analflosse ist 33.9—40.1%, meist 35—38%. Von 46 Exemplaren war dieselbe bei 7 unter 35%, bei 31 (also c.  $\frac{2}{3}$ ) 35—38%, bei 8 über 38%. Ich konnte keinen Zusammenhang dieser Schwankungen mit dem Alter oder mit dem Geschlecht der Tiere entdecken.

Die maximale Höhe des Körpers beträgt 7.1—12.0% der Totallänge. Von Exemplaren über 120 mm. ist dieselbe bei Männchen 7.3—10.5%, bei Weibchen 7.5—11.3%, von Exemplaren von 100—120 mm. ist sie bei Männchen 7.1—12.0%, bei Weibchen 7.8—11.2%. Bei den Exemplaren unter 100 mm. beträgt die Höhe 7.5—11.1%, bei 4 Männchen fand ich 8.8—11.1%, bei 2 Weibchen 7.8% und 8.2%. Im Ganzen ist die maximale Höhe des Körpers abgesehen von den jüngsten Exemplaren (unter 100 mm.) grösser bei Weibchen als bei Männchen. Nach A. Günther ist die Höhe gleich oder grösser als die Hälfte der Kopflänge<sup>4)</sup>; dies ist in der Regel, aber nicht immer, der Fall.

Die Länge der Brustflossen beträgt bei dem kleinsten Exemplar (32.6 mm.) 10.7% der Totallänge, bei den übrigen Exemplaren schwankt dieselbe zwischen 6.9% und 10%. Indessen wenn wir von einigen Ausnahmefällen absehen, so bekommen wir beträchtlich engere Grenzen der Schwankungen; von 45 Exemplaren beträgt nämlich bei 41, d. h. 91%, die Länge der Brustflossen 7.1—9.3%, bei 4 übrigen ist die Länge der Brustflossen 10.7%, 10%, 9.9% und 6.9%. Unter grösseren und mittelgrossen Exemplaren (über 120 mm. und von 100 bis 120 mm.) zeigen die Männchen im Ganzen längere Brustflossen. Die Länge der Brustflossen bei Männchen über 120 mm. beträgt 7.2—9.2% und bei Weibchen 7.3—

1) N. Knipowitsch. Zoologische Ergebnisse etc. S. 76.

2) R. Collett. Fishes. The Norwegian North-Atlantic Expedition. S. 124.

3) A. Günther. Catalogue. S. 323—324.

4) A. Günther. Ebendasselbst.

9.1%, aber während von 10 Männchen bei 7 die Länge der Brustflossen über 8% ist, finden wir von 5 Weibchen die Länge über 8% nur bei 2. Bei 6 Männchen von 100—120 mm. ist die Länge 7.1—10% (davon bei 5 über 8%), bei 5 Weibchen 7.6—9.3% (davon bei 3 über 8%).

Die oben beschriebenen Schwankungen der relativen Grösse einzelner Körperteile finden wir auch bei Exemplaren von ein und derselben Station, jedoch sind sie in diesem Fall im Ganzen beträchtlich kleiner als wenn wir Exemplare von verschiedenen Stationen zusammenstellen. Einen konstanten, deutlich ausgeprägten Zusammenhang der Schwankungen mit der Verbreitung konnte ich nicht feststellen, indessen scheint ein gewisser Zusammenhang zu existieren. So können wir, erstens, feststellen, dass Exemplare mit der praeanaln Länge über 37% der Totallänge nur im Gebiet der kalten und salzreichen Bodenströmung längs den West- und Südwest-Küsten von Nowaja Semlja zu finden sind, obgleich hier auch Exemplare mit kleinerer praeanaln Länge (bis 34%) vorkommen. Zweitens, finden wir Exemplare mit der praeanaln Länge über 36% entweder in derselben kalten Boden-Strömung, oder nach Norden von Nowaja Semlja (St. № 86 des Dampfers «Jermak»), oder im Gebiet von Spitzbergen, oder schliesslich im Nord-Sibirischen Eismeer. Exemplare mit der praeanaln Länge von 35.9% fand ich in derselben kalten Boden-Strömung (Exemplar № 15) und in Kostin Schar (Exemplar № 16). Bei allen übrigen Exemplaren aus dem Barents-Meer beträgt die praeanaln Länge höchstens 35.6%. Auffallend klein ist die praeanaln Länge bei Exemplaren von der St. № 42 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» (Exemplare № 1—5), wo dieselbe 32—33.6% beträgt, bei dem Exemplar № 38 aus dem Sund Jugorskij Schar (33.9%), bei dem Exemplar № 33 von der St. № 71 des Dampfers «Jermak» im Gebiet der kalten Boden-Strömung (32.9%) und bei dem Exemplar № 41 aus Malyja Karmakuly (32.8%).

Die oben beschriebenen Verhältnisse erinnern einigermaßen an dasjenige, was ich bei *Lycodes rossi* Malmgren feststellen konnte<sup>1)</sup>.

Die Anzahl der Strahlen in den Flossen zeigt sehr beträchtliche Schwankungen. R. Collett<sup>2)</sup> führt folgende Zahlen an: D. 90—100, A. 70—72, C. 8—11, P. 11—13. Nach A. Günther<sup>3)</sup> beträgt die Anzahl der Strahlen: D. 100, A. 80. D. S. Jordan und B. W. Evermann führen für *Gymnelis viridis* (Fabr.) in der Diagnose D. 100, A. 80, dann für ein Exemplar D. c. 97, A. c. 80 und für *Gymnelis stigma* (Lay et Bennett), welche Art ohne Zweifel von der ersteren Art nicht zu trennen ist, D. 90, A. 70<sup>4)</sup>. Wenn wir nun die Angaben dieser Forscher für beide vermutliche Arten zusammenfassen, so bekommen wir: D. 90—100, A. 70—80.

1) N. Knipowitsch. Ichthyologische Untersuchungen im Eismeer. I. *Lycodes* und *Lycenchelys*. Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. VIII<sup>e</sup> Série. Classe physico-mathématique. Vol. XIX, № 1. 1906. S. 28—31.

2) R. Collett. Fishes. S. 124.

3) A. Günther. Catalogue. S. 323.

4) D. C. Jordan and B. W. Evermann. l. c. S. 2477.

Bei 8 Exemplaren unserer Collection fand ich folgende Zahlen, welche ich mit Angaben über den Abstand des Anfangs der Rückenflossen von der Schnauzenspitze (in % der Totallänge) zusammenstelle.

|   |           |           |           |          |           |          |          |          |
|---|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| N <sup>o</sup> des Exemplars . . . .        | 10        | 12        | 16        | 30       | 17        | 33       | 2        | 6        |
| N <sup>o</sup> der Station. . . . .         | A. P. 250 | A. P. 288 | A. P. 593 | Jerm. 70 | A. P. 693 | Jerm. 71 | A. P. 42 | A. P. 66 |
| Länge bis <i>D</i> in % d. Totall.          | 16.2 %    | 18.5 %    | 18.6 %    | 18.9 %   | 21 %      | 23.6 %   | 31.8 %   | 34.8 %   |
| Anzahl der Strahlen in <i>D</i> .           | 91        | 83        | 91        | 94       | 82        | 91       | 81       | 82       |
| » » » » <i>A</i> .                          | 75        | 70        | 72        | 79       | 70        | 77       | 76       | 76       |
| » » » » <i>C</i> .                          | 11        | 8         | 10        | 8        | 10        | 8        | 10       | 12       |
| » » » » <i>P</i> .                          | 12—12     | 11—11     | 11—11     | 10—10    | 11—11     | 11—11    | 11—11    | 11—11    |
| » » » » <i>D</i> + $\frac{1}{2}$ <i>C</i> . | 95—96     | 87        | 96        | 93       | 87        | 95       | 86       | 88       |
| » » » » <i>A</i> + $\frac{1}{2}$ <i>C</i> . | 80—81     | 74        | 77        | 83       | 75        | 81       | 81       | 82       |

Die Anzahl der Strahlen bei diesen 8 Exemplaren beträgt also: *D*. 81—94, *A*. 70—79, *C*. 8—12, *P*. 10—12, in der Regel 11, oder, wenn wir anstatt *D*., *A*. und *C*. *D*. +  $\frac{1}{2}$ *C*. und *A*. +  $\frac{1}{2}$ *C*. anführen: *D*. +  $\frac{1}{2}$ *C*. 86—98, *A*. +  $\frac{1}{2}$ *C*. 74—83, *P*. 10—12. Wie man auch a priori erwarten konnte, ist der Unterschied in der Anzahl der Strahlen in der Rückenflosse und der Analflosse am grössten bei denjenigen Formen, deren Rückenflosse weit vorn beginnt, während bei Exemplaren mit grossem Abstand der Rückenflosse von der Schnauzenspitze (vergl. die Exemplare 2 und 6 in der obigen Tabelle) der Unterschied relativ gering ist.

Wie bekannt, kommen bei *Gymnelis viridis* (Fabr.) verschiedenste Farben-Variationen vor. Die Grundfarbe unserer Exemplare ist bald sehr hell gelblich oder grünlich, bald dunkel braun von verschiedenen Nuancen; oft ist die untere Seite heller; wir finden auf dem Körper verschiedene Flecken oder helle und dunkle Querbänder, deren Anzahl bis 18—19 betragen kann; diese Querbänder können sich auf die Rückenflosse fortsetzen. Zuweilen bestehen die hellen Querstreifen oder Querbänder aus sehr zahlreichen kleinen hellen runden Flecken. Die Analflosse ist oft dunkel, bräunlich oder schwärzlich, besonders die vorderen Teile und der Rand derselben. Oft finden wir schliesslich rundliche dunkle mit weissem Ring umgebene Flecken auf der Rückenflosse. Die Anzahl dieser Flecken kann 1—5 betragen. Zuweilen nehmen dieselben auch einen Teil des Rückens ein. Von 52 Exemplaren unserer Collection haben 29 keine schwarze Flecken auf der Rückenflosse, von 23 übrigen besitzen 10 je 2 Flecken, 5 je 1, 5 je 3, 2 je 4 und 1—5. Bei zwei Exemplaren aus dem Nord-Sibirischen Meer finden wir grosse unregelmässige weisse Flecken auf dem vorderen Teil des Rückens. Bei den kleinsten Exemplaren ist der obere Teil des Körpers dunkel, der untere hell, die Grenze ist durch eine wellenförmige Linie bezeichnet (Fig. 1). Unge-

fähr dasselbe beobachtete Ehrenbaum bei einem nur 30 mm. langen Exemplar aus dem Gebiet des König Karls Landes<sup>1)</sup>.

Die Art scheint in unserem Untersuchungs-Gebiet viel kleinere Dimensionen zu erreichen als an den Küsten Grönlands. R. Collett führt nämlich die maximale Länge von 300 mm.<sup>2)</sup> an. Unter 5 Exemplaren der Art aus Grönland, welche unser Museum besitzt<sup>3)</sup>, haben 4 die Totallänge von 195—209 mm. Dagegen ist das grösste Exemplar unserer Collection aus dem Gebiet von Spitzbergen bis zu den Neu-Sibirischen Inseln nur 142.3 mm. lang. Das grösste Exemplar der Norwegischen Nord-Atlantischen Expedition hatte ungefähr dieselbe Länge und zwar 143 mm. Die von «Michael Sars» erbeuteten Exemplare hatten die Länge bis 135 mm.<sup>4)</sup>

Die Männchen scheinen im Ganzen grösser zu sein. Das grösste Männchen unserer Collection ist 142.3 mm. lang, das grösste Weibchen 134.3 mm.; 4 grössten Exemplare von 134.6—142.3 mm. sind Männchen.

Die Anzahl der Männchen ist in unserer Collection viel grösser als die Anzahl der Weibchen: von 31 Exemplaren sind 20 Männchen, 11 Weibchen.

Es bleibt mir noch übrig, einige systematische Bemerkungen zuzufügen und zwar erstens über *Gymnelis stigma* (Lay et Bennett), zweitens über *Nemalycodes grigorievi* Herzenstein.

Jordan und Evermann unterscheiden *Gymnelis viridis* (Fabr.) und *Gymnelis stigma* (Lay et Bennett), wenn auch mit Vorbehalt, auf folgende Weise<sup>5)</sup>:

a) Dorsal fin inserted close behind pectoral, its distance from it much less than diameter of eye; no ocellus on dorsal fin . . . . . *viridis* (Fabr.)

aa) Dorsal fin inserted an eye's diameter behind pectoral; a large black spot, ocellated with white, on dorsal fin above vent; other ocelli sometimes present . . . . . *stigma* (Lay et Bennett).

Wir sahen oben, dass die Lage des Anfangs der Rückenflosse sehr grossen Schwankungen unterliegt; viele Exemplare entsprechen in dieser Hinsicht ebensowenig der einen wie der anderen «Art». Diese Schwankungen stehen in keinem Zusammenhang mit den Schwankungen der Farbe und speciell mit dem Vorhandensein oder Fehlen der Augenflecken auf der Rückenflosse. Um diese Tatsache einwenig zu veranschaulichen, kann ich folgende Beispiele anführen: 1) bei dem Exemplar № 6 liegt der Anfang der Rückenflosse sehr weit hinten, die Länge bis zur Rückenflosse beträgt 34.8% (also mehr als bis zum anus), bei dem Exemplar № 38 beträgt die Länge bis zur Rückenflosse nur 16.4%; beide Exemplare haben Augenflecken auf der Rückenflosse; 2) bei den Exemplaren № 1 und № 2 beträgt die Länge bis zur Rückenflosse 31% und 31.8%, bei den Exemplaren № 10 und № 11 nur 16.2% und

1) E. Ehrenbaum. l. c. S. 119.

2) R. Collett. Fishes. S. 124—125.

3) Auf der Etiquette steht: Grönland, Dr. Reinhardt. 1842.

4) R. Collett. Fiske etc. S. 142.

5) Jordan and Evermann. l. c. S. 2477.

16.4 %; alle vier Exemplare haben keine Augenflecken. Wir sehen also, dass beide Formen offenbar zu ein und derselben Art gehören (vergl. die Fig. 1—6).

Was nun *Nemalycodes grigorievi* Herzenstein anbetrifft, so habe ich schon vor einigen Jahren festgestellt, dass dies ein schlecht conserviertes Exemplar von *Gymnelis viridis* (Fabr.) ist<sup>1)</sup>. In den folgenden Tabellen der Fundorte und der Messungen wird das Original-Exemplar von *Nemalycodes* unter № 41 angeführt.

Von den in dem Verzeichnis der Litteratur citierten Abbildungen der Art ist die Abbildung von Lay und Bennett mir nicht zugänglich geblieben. Die Abbildungen von Kröyer in «Voyages de la commission scientifique» sind ziemlich schlecht. Viel besser sind die Abbildungen von *Gymnelis viridis* (Fabr.) und v. *unimaculatus* bei Richardson. Nicht ganz richtig und wenig charakteristisch scheint mir die Abbildung bei R. Collett zu sein. Mehr oder weniger befriedigend sind schliesslich die Abbildungen bei Jordan and Evermann. Wir besitzen also, soweit ich weiss, keine gute Abbildungen von *Gymnelis viridis* (Fabr.). Ich lasse daher einige neue Abbildungen der Art folgen.



Fig. 1. Ein 35.5 mm. langes Exemplar (№ 24) von der St. № 698 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» (Vergr.  $\frac{2}{1}$ ).



Fig. 2. Ein 80.5 mm. langes Exemplar (№ 46) von der St. № 64 der Expeditionen nach Spitzbergen (natürl. Grösse).

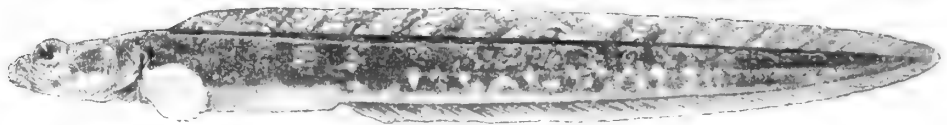


Fig. 3. Ein 128.8 mm. langes Weibchen (№ 9) von der St. № 250 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» (natürliche Grösse).



Fig. 4. Ein 134.6 mm. langes Männchen (№ 30) von der St. № 70 des Dampfers «Jermak» (natürliche Grösse).

1) N. Knipowitsch, Zoologische Ergebnisse der Russischen Expeditionen nach Spitzbergen. Über die in den Jahren 1899—1900 im Gebiete von Spitzbergen gesammelten Fische. *Annuaire du Musée Zoologique de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg*. Bd. VI. 1901. S. 76.



Fig. 5. Ein 137.5 mm. langes Männchen (№ 19) von der St. № 695 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» (natürliche Grösse).



Fig. 6. Ein 140.3 mm. langes Männchen (№ 14) von der St. № 339 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» (natürliche Grösse).



Fig. 7 und 8. Der Kopf desselben von unten und oben.

Auf den Zeichnungen treten sehr deutlich die Schwankungen in der Lage der Rückenflosse und in der Zeichnung auf dem Körper und auf den unpaaren Flossen hervor. Man sieht, dass schwarze Flecken auf der Rückenflosse unabhängig von der Lage der Rückenflosse vorhanden sein oder fehlen können.

**Verbreitung und Existenzbedingungen.** Die mir zur Verfügung stehenden Exemplare von *Gymnelis viridis* (Fabr.) aus dem europäischen und asiatischen Teil des Eismeereres sind in folgenden 30 Punkten gesammelt worden.

| Gesammelt von        | Zeit.                   | № der Station. | Breite N.             | Länge O.      | Geräth.               | Tiefe der Station in Meter. | Boden.                       | t° und S <sup>0</sup> / <sub>00</sub> am Boden. |                  |                                | Anzahl der Exemplare. | № der Exemplare. |
|----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------------------------|------------------------------|---|------------------|--------------------------------|-----------------------|------------------|
|                      |                         |                |                       |               |                       |                             |                              | in der Tiefe von M.                             | t°               | S <sup>0</sup> / <sub>00</sub> |                       |                  |
| 1 Murman-Expedition. | 26 (14) VI. 1899        | 42             | 72° 47'               | 32° 15'       | Petersen's Ottertrawl | 280                         | Lehm                         | 250   | + 0.1            | —                              | 5                     | 1— 5             |
| 2 » »                | 20 (8) VII. 1899        | 66             | 71° 58'               | 37° 24'       | » »                   | 293— 298                    | Schlamm<br>Schwarzer Schlamm | 294   | — 1.9            | —                              | 2                     | 6— 7             |
| 3 » »                | 11. VIII (30. VII) 1899 | 85             | 72° 28' 30''          | 52° 41'       | Sigsbee-Trawl         | 20                          | Schlamm                      | —   | —                | —                              | 1                     | 8                |
| 4 » »                | 8. VII (25. VI) 1900    | 250            | *Pomorsche Malyja Kar | Rhede* makuly | » »                   | 9— 17 1/2                   | Schlamm,<br>Algen            | { 9<br>17                                       | { + 1.3<br>+ 1.1 | { —<br>—                       | { 3                   | 9— 11            |
| 5 » »                | 7. VIII (25. VII) 1900  | 288            | 69° 53'               | 43° 30'       | Petersen's Ottertrawl | 104                         | Sand-Schlamm                 | 90  | — 0.5            | 34.61                          | 1                     | 12               |

| Gesammelt von                              | Zeit.                 | № der Station. | Breite N.                | Länge O.             | Geräth.               | Tiefe der Station in Meter. | Boden.                        | t° und S <sup>0</sup> / <sub>00</sub> am Boden. |          |                                | Anzahl der Exemplare. | № der Exemplare. |
|--|-----------------------|----------------|--------------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------------|-------------------------------|---|----------|--------------------------------|-----------------------|------------------|
|  |                       |                |                          |                      |                       |                             |                               | in der Tiefe von M.                             | t°       | S <sup>0</sup> / <sub>00</sub> |                       |                  |
| 6 Murman-Expedition.                       | 8.VIII (26.VII) 1900  | 290            | 71° 00'                  | 43° 43'              | Ottertrawl            | 94                          | Sand                          | 90  | +0.5     | 34.78                          | 1                     | 13               |
| 7 » »                                      | 17 (4) IX. 1900       | 339            | 75° 00'                  | 35° 30'              | Petersen's Ottertrawl | 213                         | Schlamm                       | 205   | -0.5     | —                              | 1                     | 14               |
| 8 » »                                      | 19 (6) VII. 1901      | 527            | 72° 29'                  | 51° 20'              | » »                   | 73-74                       | »                             | 70  | -1.75    | 35.3-35.5                      | 1                     | 15               |
| 9 » »                                      | 18 (5) VIII. 1901     | 593            | Bucht Kabin<br>Kostin    | Sarinow<br>Schar     | Sigsbee-Trawl         | 9-17 1/2                    | Schlamm, Algen                | 16  | +1.1     | 33.87                          | 1                     | 16               |
| 10 » »                                     | 10.VIII (28.VII) 1902 | 693(51)        | 74° 02'                  | 52° 36'              | Petersen's Ottertrawl | 154                         | Schlamm                       | 150   | -1.64    | 34.87                          | 2                     | 17-              |
| 11 » »                                     | 10.VIII (28.VII) 1902 | 695(53)        | 75° 07'                  | 54° 51'              | » »                   | 181                         | »                             | 175   | -1.65    | 34.99                          | 5                     | 19-              |
| 12 » »                                     | 11.VIII (29.VII) 1902 | 698(56)        | 76° 28' 30"              | 59° 10'              | Dredge                | 118                         | Schlamm und Steine            | 113   | -1.02    | 35.01                          | 1                     | 24               |
| » » »                                      | »                     | »              | »                        | »                    | Petersen's Ottertrawl | »                           | »                             | »   | »        | »                              | 2                     | 25-              |
| 13 » »                                     | 12.VIII (30.VII) 1902 | 702(60)        | 75° 57'                  | 50° 54'              | » »                   | 300                         | —                             | 295   | -0.88    | 34.99                          | 1                     | 27               |
| 14 » »                                     | 13.IX (31.VIII) 1903  | 931            | 70° 21' 30"              | 53° 50'              | » »                   | 105                         | Lehmiger Schlamm              | 100   | -1.77    | 34.70                          | 1                     | 28               |
| 15 «Jermak»<br>(A. Tschernytschew.)        | 10.VII (27.VI) 1901   | 52 b           | 74° 30'                  | 54° 10'              | Sigsbee-Trawl         | 175                         | Schlamm                       | —   | —        | —                              | 1                     | 29               |
| 16 »                                       | 30 (17) VII. 1901     | 70             | 76° 28'                  | 57° 03'              | » »                   | 66                          | Sand                          | 66  | -1.9     | —                              | 3                     | 30-              |
| 17 »                                       | 31 (18) VII. 1901     | 71             | 76° 30'                  | 59° 24'              | » »                   | 194                         | Schlamm                       | 194   | -1.3     | —                              | 2                     | 33-              |
| 18 »                                       | 4.VIII (22.VII) 1901  | 86             | 77° 31'                  | 64° 34'              | Petersen's Ottertrawl | 280                         | »                             | 280   | -1.1     | —                              | 3                     | 35-              |
| 19 «Pachtussow»<br>(A. Tschernytschew.)    | 4.VIII (22.VII) 1900  | 8(1900)        | Jugorskij                | Schar                | —                     | 14.6-16.5                   | Kleine Steine                 | —   | —        | —                              | 1                     | 38               |
| 20 «Pachtussow»<br>(Dr. Polilow.)          | 1.VIII (19.VII) 1903  | 3(1903)        | 71° 14'                  | 50° 58'              | Sigsbee-Trawl         | 140                         | Schlamm                       | 140   | -1.7     | 34.78                          | 1                     | 39               |
| 21 Exped. der Russ.<br>Geogr. Gesellsch.   | 1883                  | —              | Nowaja                   | Semlja               | —                     | —                           | —                             | —   | —        | —                              | 1                     | 40               |
| 22 Grigoriew                               | 1887                  | —              | Malyja                   | Karmakuly            | —                     | —                           | —                             | —   | —        | —                              | 1                     | 41               |
| 23 «Najesdnik»<br>(N. Knipowitsch.)        | 26 (14) VII. 1893     | 43             | 68° 56' 30"              | 45° 06'              | —                     | c. 68                       | Schlamm                       | —   | -1.7     | 34.30                          | 1                     | 42               |
| 24 Spitzbergen-Exped.<br>(A. Wolkowitsch.) | 17 (4) VI. 1900       | —              | 77° 27'                  | 18° 45'              | Sigsbee-Trawl         | 120 1/2                     | Schlamm                       | 120 1/2   | -1.9-2.0 | —                              | 1                     | 43               |
| 25 »                                       | 18 (5) VI. 1900       | —              | 77° 28'                  | 18° 40'              | » »                   | 108                         | »                             | 108   | -2.0     | —                              | 1                     | 44               |
| 26 »                                       | 5.VII (22.VI) 1900    | —              | 77° 14'                  | 18° 40'              | » »                   | 70                          | Schlamm und Grus              | 70  | -1.6     | —                              | 2                     | 45-              |
| 27 Russ. Polar-Exped.<br>(A. Birula.)      | 22 (9) IX. 1900       | 27             | 76° 08'                  | 93° 50'              | Dredge                | 27 1/2                      | Sand u. Grus                  | —   | —        | —                              | 1                     | 47               |
| 28 »                                       | 4.IX (22.VIII) 1901   | 47             | 75° 38'                  | 114° 11'             | Sigsbee-Trawl         | 19                          | Steine und feiner grauer Sand | 18  | c.+0.1   | c. 30.81                       | 2                     | 48-              |
| 29 »                                       | 6.IX (24.VIII) 1901   | 49             | 75° 42'                  | 124° 41'             | » »                   | 51                          | Schlamm                       | 48  | -1.42    | c. 33.88                       | 2                     | 50-              |
| 30 »                                       | 28 (15) VII. 1902     | 58             | Norpalach-<br>c. 75° 25' | Hafen<br>c. 137 1/2° | Waade                 | —                           | —                             | —   | —        | —                              | 1                     | 52               |

Im Barents-Meer ist die Art ausserdem auch von der holländischen Expedition erbeutet worden<sup>1)</sup>.

1) Chr. F. Lütken. Et Bidrag til Kara-Havets Fiske. | havn. 1886. S. 125.  
Dijmphna-Togtets zoologisk-botaniske Udbytte. Kjöben-

Im Gebiet von Spitzbergen wurde *Gymnelis viridis* (Fabr.) von verschiedenen Expeditionen gefunden.

Im J. 1858 erbeutete hier O. Torell ein junges Exemplar «bei Cloven Cliff ungefähr unter 80° N.» in der Tiefe von c. 22 M. (12 Faden)<sup>1)</sup>. Auch die späteren schwedischen Expeditionen fanden die Art bei Spitzbergen bis zu den nördlichsten von denselben untersuchten Teilen<sup>2)</sup>. Von der Norwegischen Nord-Atlantischen Expedition wurden 3 Exemplare in Magen von Dorschen bei Norwegischen Inseln (NW. Teil von Spitzbergen) gefunden<sup>3)</sup>. Die Expedition von Römer und Schaudinn im J. 1898 erbeutete ein Exemplar von 30 mm. bei Schwedisch Vorland (König Karls Land) in der Tiefe von 66 M., Boden — blauer Mud mit Steinen<sup>3)</sup>. Am 26. VII. 1901 wurden in Green-Harbour (Eis-Fjord) in der Tiefe von 240 M. 6 Exemplare von dem norwegischen Untersuchungs-Dampfer «Michael Sars» gefangen<sup>4)</sup>. Die Temperatur in der Tiefe von 200 M. war hier + 1.49°.

Im Karischen Meer erbeutete die «Dijmphna»-Expedition ein Exemplar von *Gymnelis viridis* (Fabr.) in der Tiefe von c. 84 M. (46 Faden)<sup>5)</sup>. Im Nord-Sibirischen (Nordenskjölds-) Meere ist die Art unter 72° 20' N., und 153 1/2° O. von der «Vega»-Expedition erbeutet worden<sup>6)</sup>.

Die Art kommt weiter im Behrings-Meer bis zum Bristol Bay und zur Insel Unalaska vor, sowie an den Nordküsten Amerikas von Behrings Strait bis zu Nova Scotia<sup>7)</sup>. Sehr zahlreich ist dieselbe an den Küsten von Grönland, wo sie wenigstens bis 81° 52' N. vorkommt<sup>8)</sup>. An den Küsten von Ost-Grönland lebt die Art nach den Angaben von A. S. Jensen<sup>9)</sup> in den Tiefen von einigen Faden bis 110 Faden, d. h. ungefähr 200 M.; die Ingolf-Expedition fand *Gymnelis viridis* (Fabr.) in Davis Strait unter 65° 34' N. und 54° 31' W. in der Tiefe von 68 Faden ( $t^{\circ} + 0.2^{\circ}$ ) und unter 67° 17' N. und 54° 17' W. in der Tiefe von 55 Faden ( $t^{\circ} + 0.9^{\circ}$ ). Chr. F. Lütken erwähnt diese Art ausserdem aus Denmark Strait in der Tiefe von 80 Faden, also c. 146 M.<sup>10)</sup>.

Schliesslich ist *Gymnelis viridis* (Fabr.) auch bei Jan Mayen erbeutet worden, und zwar am 3. VIII. 1877 an der Südküste der Insel unter 70° 41' N., 10° 10' W.; die Tiefe war hier 481 M. der, Boden — grober Sand und kleine Steine, die Temperatur am Boden — 0.3°<sup>11)</sup>.

1) A. I. Malmgren. Om Spetsbergens Fiskfauna. Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1864, № 10. 1865. S. 515.

2) R. Collett. Fishes. The Norwegian North-Atlantic Expedition. Bd. III. 1880. S. 124—125.

3) E. Ehrenbaum. Die Fische. Fauna Arctica. Bd. II. 1902. S. 119.

4) R. Collett. Fiske indsamlede under «Michael Sars»'s Togter i Nordhavet 1900—1902. Report on Norwegian Fishery and Marine-Investigations. Vol. II. 1905. № 3. S. 142.

5) Chr. F. Lütken. I. c.

6) E. Ehrenbaum. I. c.

7) D. S. Jordan and B. W. Evermann. The fishes

of North and Middle America. Part III. Bulletin of the United States National Museum. № 47. 1898. S. 2477—2478 [*Gymnelis viridis* (Fabricius) + *Gymnelis stigma* (Lay et Bennett)].

G. B. Goode and T. H. Bean. Oceanic Ichthyology. Memoirs of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XX. 1896. S. 313.

8) R. Collett. Fishes. S. 124—125.

9) A. S. Jensen. The Fishes of East-Greenland. Meddelelser om Grönland. Vol. XXIX. 1904. S. 264.

10) Chr. F. Lütken. The ichthyological results. The Danish Ingolf-Expedition. Vol. II, Part. 1. 1899. S. 18.

11) R. Collett. Fishes. S. 124.



Die angeführten Angaben über die Verbreitung von *Gymnelis viridis* (Fabr.) zusammenfassend, ersehen wir, dass dies wirklich eine circumpolare Art ist. Das Verbreitungs-Gebiet erstreckt sich von der West- und Nord-Küste Spitzbergens ununterbrochen bis zur Ost-Küste Grönlands und die Art erscheint wieder bei Jan Mayen. Die südlichsten Punkte, wo *Gymnelis viridis* (Fabr.) bisjetzt erbeutet wurde, sind: im Nord-Atlantischen Ocean (abgesehen von den Küsten Grönlands) —  $70^{\circ} 41' N.$  an der Südküste von Jan-Mayen, im Europäischen Eismeer  $68^{\circ} 56' 30'' N.$ , im Sunde Jugorskij Schar ungefähr unter  $69^{\circ} 40' N.$ , im Nordenskjölds Meer  $72^{\circ} 20' N.$ , im Behrings-Meer ungefähr  $54^{\circ} N.$ , an der Ost-Küste Nord-Amerikas bis ungefähr  $46^{\circ} N.$  Schliesslich finden wir die Art an den West- und Ost-Küsten (bis c.  $65 \frac{1}{2}^{\circ} N.$ ) Grönlands. Was die nördlichsten Punkte anbetrifft, so sind dies ungefähr  $80^{\circ} N.$  bei Spitzbergen,  $77^{\circ} 31' N.$  im Barents-Meer,  $76^{\circ} 08'$  im Karischen Meer,  $75^{\circ} 42' N.$  im Nordenskjölds-Meer und  $81^{\circ} 52' N.$  bei Grönland. Wahrscheinlich erstreckt sich das Verbreitungs-Gebiet der Art auch weiter nach Norden überall, wo dieselbe passende Existenzbedingungen findet.

Ich gehe jetzt zu einer näheren Beurteilung dieser Existenzbedingungen über.

In der Regel bewohnt *Gymnelis viridis* (Fabr.) nur mässige Tiefen von einigen wenigen Metern bis c. 300 Meter; die einzige Ausnahme bildet der Fundort bei Jan-Mayen, wo die Tiefe 481 M. betrug.

Fast immer finden wir die Art bei sehr niedriger Temperatur, meist unter  $-1^{\circ}$ ; sie kommt indessen auch bei Temperaturen etwas über  $0^{\circ}$ , sogar etwas über  $+1^{\circ}$  vor, aber relativ selten und meist in solchen Punkten, wo die Temperatur im Ganzen niedrig ist und nur kurze Zeit mehr oder weniger beträchtliche Sommererwärmung zeigt. Es liegt daher auf der Hand, das *Gymnelis viridis* (Fabr.) als eine Kaltwasser-Form zu betrachten ist.

Im Zusammenhang damit steht die sehr eigentümliche Verbreitung dieser Art im Europäischen Eismeer.

Wenn wir alle Fundorte von *Gymnelis viridis* (Fabr.) im Europäischen Eismeer auf einer hydrologischen Karte notieren, so fällt sogleich in die Augen, dass dieselben auf kalte Gebiete beschränkt sind (vergl. die beiliegende Karte). Die Stationen № 85, 250 und 593 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» (Murman-Expedition), sowie die unter № 21 und 22 in der Tabelle angeführten Fundorte gehören dem Küsten-Gebiet von Nowaja Semlja an. Die Station № 8 (1900) des Dampfers «Pachtussow» liegt im Sunde Jugorskij Schar. Die Stationen № 527, 693, 695, 698 und 931 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi», die Stationen № 42 b, 70 und 71 des Dampfers «Jermak» und die Station № 3 (1903) des Dampfers «Pachtussow» liegen im Gebiet der eigentümlichen kalten und salzreichen Boden-Strömung längs den West-Küsten von Nowaja Semlja. Die Stationen № 66 und 702 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» und die Station № 86 des Dampfers «Jermak» liegen in verschiedenen Teilen des «nördlichen kalten Gebiets», die Station № 288 und 290 des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» und die Station № 43 des Dampfers «Najesdnik» im «südlichen kalten Gebiet» oder im kalten Teil der Flachsee des südöstlichen Teils des Europäischen Eismeres. Die Stationen № 42 und 339 des Dampfers

«Andrei Perwoswannyi» liegen zwischen Zweigen des Nordkapstroms und zwar die Station № 42 zwischen dem zweiten und dritten Zweig, wo man oft relativ niedrige Temperaturen findet, die Station № 339 zwischen dem dritten und dem vierten Zweig (von Süden gerechnet), wo die Temperatur immer niedrig ist. Auf der Station № 42 war die Temperatur  $-0.1^{\circ}$  in der Tiefe von 250 M., während die Tiefe der Station 280 M. betrug; die Temperatur am Boden war ohne Zweifel c.  $0^{\circ}$ , vielleicht unter  $0^{\circ}$ . Weiter finden wir eine Reihe von Stationen an den Küsten Spitzbergens und im Storfjord und eine Station bei König Karls Land — diese liegen ebenfalls im kalten Gebiet, nur über die Station in Green Harbour ist es nicht klar, bei welcher Temperatur die Art hier lebt.

Wir finden daher *Gymnelis viridis* (Fabr.) im Europäischen Eismeer weder im Gebiet des Golfstroms, wo derselbe noch stark ausgeprägt ist und am Boden immer Temperaturen über  $0^{\circ}$  zeigt, noch an der Murman-Küste, wo entweder im Laufe des ganzen Jahres oder eines grossen Teils desselben Temperaturen am Boden beträchtlich über  $0^{\circ}$  bleiben, noch, soweit bisjetzt bekannt, im Weissen Meer mit starker Sommererwärmung der oberen Schichten (des Warmen Gebiets) und im Küsten-Gebiet bei der Halbinsel Kanin und im Golfe Tscheschskaja Guba, wo ebenfalls ziemlich starke Sommererwärmung stattfindet.

In der Tabelle der Fundorte finden wir Salzgehalte von c.  $30.81\text{‰}$  bis  $35.05\text{‰}$ , also ungefähr von 31 bis  $35\text{‰}$ ; wahrscheinlich kommt die Art auch bei niedrigerem Salzgehalt vor, wie z. B. in den Fjorden Ost-Grönlands, wo *Gymnelis viridis* (Fabr.), wie wir sahen, auch in sehr geringen Tiefen zu finden ist.

In der Regel lebt dieser Fisch auf Schlamm Boden, seltener findet man denselben auf Sand oder Grus.

Die Nahrung scheint hauptsächlich aus Crustaceen, weniger aus Anneliden zu bestehen. Von 12 Exemplaren fand ich Crustaceen bei 10, Anneliden bei 5, Mollusken (und zwar ein Operculum wahrscheinlich von einer Bela-Art) bei 1. R. Collett fand im Mund eines Exemplars *Modiolaria laevigata* Gray<sup>1)</sup>.

Über die Fortpflanzung der Art besitzen wir wenige Angaben. Mehr oder weniger stark entwickelte Geschlechtsorgane finden wir bei folgenden Exemplaren unserer Collection:

| № des Exemplars und der Station. | Datum.                  | Geschlecht. | Zustand der Geschlechtsorgane.                                     |
|----------------------------------|-------------------------|-------------|--|
| № 16, St. № 593. A. P. .         | 18 (5) VIII. 1901       | Männchen    | Ziemlich stark entwickelt.   |
| № 17, St. № 693. A. P. .         | 10. VIII (28. VII) 1902 | »           | » » »  |
| № 19, St. № 695. A. P. .         | » »                     | »           | Stark entwickelt.  |
| № 21, » » » » » .                | » »                     | Weibchen    | Sehr stark entwickelt, Durchmesser der Eier bis $3\frac{1}{2}$ mm. |
| № 25, St. № 698. A. P. .         | 11. VIII (29. VII) 1902 | Männchen    | Ziemlich stark entwickelt.   |
| № 26, » » » » » .                | » »                     | »           | Stark entwickelt.  |

1) R. Collett. Fishes. S. 125.

| № des Exemplars und der Station. | Datum.                 | Geschlecht. | Zustand der Geschlechtsorgane.                        |
|----------------------------------|------------------------|-------------|---|
| № 30, St. № 70. Jerm. .          | 30 (17) VII. 1901      | Männchen    | Stark entwickelt.                                     |
| № 32, » » » » . .                | » »                    | Weibchen    | Sehr stark entwickelt, Durchmesser der Eier bis 3 mm. |
| № 33, St. № 71. Jerm. .          | 31 (18) VII. 1901      | Männchen    | Stark entwickelt.                                     |
| № 35, St. № 86. Jerm. .          | 4. VIII (22. VII) 1901 | »           | » »   |
| № 36, » » » » . .                | » »                    | »           | » »   |
| № 38, St. № 8. (1900). P. .      | 4. VIII (22. VII) 1900 | Weibchen    | Sehr stark entwickelt.                                |

Das kleinste 32.6 mm. lange Exemplar unserer Sammlung wurde am 26. (14) VII. 1893 erbeutet, das etwas grössere (35.5 mm.) am 11. VIII. (29. VII.) 1902.

Bei einem am 26. VII. 1901 in Green Harbour erbeuteten Exemplar waren die Eier nach R. Collett<sup>1)</sup> ganz reif, ihr Durchmesser betrug c. 3 mm. Es ist schliesslich zu erwähnen, dass Römer und Schaudinn im Ende Juli 1898 bei König Karls Land ein Exemplar von 30 mm. erbeuteten<sup>2)</sup>.

Nach diesen Angaben scheint die Fortpflanzung im Herbst oder Winter stattzufinden. Die erwähnten 30 mm. und 32.6 mm. langen Exemplare gehörten also wahrscheinlich zu der sogenannten O.-Gruppe, d. h. sie waren wahrscheinlich weniger als ein Jahr alt.

**Tabelle der Messungen von *Gymnelis viridis* (Fabr.).** In der beiliegenden Tabelle werden die Resultate der Messungen von 46 Exemplaren angeführt. Die erste Zeile enthält die №№ der Exemplare in der Tabelle der Fundorte. In der zweiten Zeile wird № der Station, sowie kurze Bezeichnung der Expedition oder des Schiffes angegeben. Knip. 1893 bedeutet Sammlung von Knipowitsch im J. 1893, A. P. — Dampfer «Andrei Perwoswanyj» (Murmansk-Expedition), Jerm. — der Dampfer «Jermak», P. — der Dampfer «Pachtussow», P. E. — Russische Polar-Expedition unter der Leitung von Baron E. Toll, N. S. 1883 — Nowaja Semlja-Expedition im J. 1883, Sp. — Russische Expeditionen nach Spitzbergen.

Die Totallänge in mm. wird so angeführt, wie sie durch möglichst genaue Messung bestimmt worden ist, ohne jegliche Abrundungen. Selbstverständlich sind die Zehntel mm. nicht ganz zuverlässig, aber es scheint mir richtiger zusein die durch Messung erhaltenen Zahlen direct anzugeben, als durch Abrunden (etwa bis zur nächsten  $\frac{1}{2}$  mm.) einen neuen, wenn auch kleinen, willkürlichen Fehler einzuführen.

1) R. Collett. Fiske indsamlede etc. S. 143.

2) E. Ehrenbaum. l. c. S. 119.

Tabelle der Messungen von *Gymnelis viridis* (Fabr.)

| N <sup>o</sup> des Exemplars . . .  | 42            | 24           | 8           | 29             | 39             | 51          | 12           | 28           | 41            | 50          | 46        | 15           |
|-------------------------------------|---------------|--------------|-------------|----------------|----------------|-------------|--------------|--------------|---------------|-------------|-----------|--------------|
| N <sup>o</sup> der Station. . . . . | Knip.<br>1893 | A. P.<br>698 | A. P.<br>85 | Jerm.<br>52 b. | P. 3<br>(1903) | P. E.<br>49 | A. P.<br>288 | A. P.<br>931 | N. S.<br>1883 | P. E.<br>49 | Sp.<br>64 | A. P.<br>527 |
| Totallänge in mm. . . . .           | 32.6          | 35.5         | 56.5        | 58.6           | 58.7           | 67          | 69.3         | 72.2         | 73.2          | 77          | 80.5      | 83.2         |
| Kopflänge in % . . . . .            | 16.6          | 17.2         | 15.2        | 17.4           | 18.1           | 17.5        | 17.0         | 18.7         | 15.3          | 18.2        | 17.5      | 17.4         |
| Kopfbreite in % . . . . .           | 8.6           | 9.0          | 7.4         | 8.5            | 10.2           | 9.4         | 8.9          | 10.4         | 7.4           | 10.6        | 7.8       | 9.3          |
| Schnauzenlänge in % . . . . .       | 3.1           | 3.4          | 3.4         | 3.4            | 3.7            | 3.6         | 3.8          | 4.2          | —             | 4.5         | 4.3       | 4.2          |
| Länge von iris in % . . . . .       | 5.2           | 4.8          | 3.9         | 4.6            | 4.8            | 3.9         | 4.8          | 4.7          | —             | 4.0         | 4.3       | 4.2          |
| » bis <i>D</i> in % . . . . .       | 18.7          | 20.8         | 17.7        | 20.3           | 17.9           | 17.3        | 18.5         | 20.2         | 18.0          | 19.9        | 30.9      | 19.8         |
| » bis <i>A</i> in % . . . . .       | 35.9          | 35.8         | 35.4        | 39.1           | 39.0           | 35.2        | 36.5         | 39.5         | 34.4          | 38.3        | 37.6      | 36.9         |
| » bis anus in % . . . . .           | 35.0          | 35.2         | 34.3        | 37.9           | 37.5           | 34.5        | 35.5         | 38.6         | 32.8          | 36.6        | 36.4      | 35.9         |
| » von <i>P</i> in % . . . . .       | 10.7          | 9.9          | c. 7.1      | 9.0            | 8.5            | 6.9         | 7.9          | 9.0          | —             | 9.2         | 9.3       | 8.7          |
| Maximale Höhe in % . . . . .        | 9.5           | 8.5          | 7.8         | 8.9            | 10.2           | 9.9         | 10.1         | 9.4          | 7.5           | 9.9         | 8.2       | 9.9          |
| Geschlecht. . . . .                 | —             | —            | ♀           | —              | —              | —           | —            | —            | —             | ♂           | —         | ♂            |

| N <sup>o</sup> des Exemplars . . . . . | 23           | 45        | 18           | 11           | 52          | 32          | 5           | 17           | 44        | 27           | 22           | 4           |
|--|--------------|-----------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-----------|--------------|--------------|-------------|
| N <sup>o</sup> der Station. . . . .    | A. P.<br>695 | Sp.<br>64 | A. P.<br>693 | A. P.<br>250 | P. E.<br>58 | Jerm.<br>70 | A. P.<br>42 | A. P.<br>693 | Sp.<br>62 | A. P.<br>702 | A. P.<br>695 | A. P.<br>42 |
| Totallänge in mm. . . . .              | 87.8         | 93.2      | 94.5         | 96           | 96.2        | 100.6       | 103         | 103.1        | 104       | 105          | 105.2        | 106.4       |
| Kopflänge in % . . . . .               | 15.3         | 16.5      | 17.5         | 15.7         | 15.3        | 15.7        | 14.3        | 17.7         | 17.3      | 15.3         | 15.6         | 15.2        |
| Kopfbreite in % . . . . .              | 8.0          | 9.5       | 10.6         | 7.8          | 8.1         | 8.4         | 6.9         | 10.8         | 9.8       | 8.2          | 8.1          | 6.8         |
| Schnauzenlänge in % . . . . .          | 3.9          | 3.9       | 3.6          | 3.2          | 3.3         | 4.0         | 3.2         | 4.0          | —         | 3.4          | 3.8          | 3.9         |
| Länge der iris in % . . . . .          | 4.1          | 4.2       | 4.2          | 3.4          | 3.2         | 3.7         | 3.4         | 4.0          | —         | 4.1          | 4.0          | 4.1         |
| » bis <i>D</i> in % . . . . .          | 32.2         | 29.8      | 19.7         | 16.4         | 16.8        | 23.6        | 22.8        | 21.0         | 27.3      | 31.4         | 28.8         | 23.7        |
| » bis <i>A</i> in % . . . . .          | 36.9         | 37.0      | 38.1         | 35.5         | 35.0        | 37.5        | 34.0        | 40.1         | 36.5      | 35.8         | 37.4         | 34.5        |
| » bis anus in % . . . . .              | 35.3         | 36.4      | 37.1         | 34.7         | 34.5        | 36.4        | 32.0        | 39.5         | 34.9      | 34.1         | 36.8         | 33.6        |
| » von <i>P</i> in % . . . . .          | 8.2          | 8.9       | 7.9          | 7.4          | 8.3         | 9.3         | 7.5         | 8.1          | 9.0       | 7.1          | 8.4          | 7.1         |
| Maximale Höhe in % . . . . .           | 8.1          | 8.2       | 11.1         | 8.0          | 8.8         | 11.2        | 7.6         | 12.0         | 8.7       | 8.3          | 9.0          | 7.7         |
| Geschlecht . . . . .                   | —            | ♀         | ♂            | —            | ♂           | ♀           | —           | ♂            | ♂         | ♂            | ♀            | —           |

| № des Exemplars . . . . .     | 33          | 3           | 37          | 31          | 2           | 49          | 10           | 36          | 7           | 21           | 1           | 20           |
|-------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|
| № der Station. . . . .        | Jerm.<br>71 | A. P.<br>42 | Jerm.<br>86 | Jerm.<br>70 | A. P.<br>42 | P. E.<br>47 | A. P.<br>250 | Jerm.<br>86 | A. P.<br>66 | A. P.<br>695 | A. P.<br>12 | A. P.<br>695 |
| Totallänge in mm. . . . .     | 108.8       | 110         | 112.5       | 113.8       | 114.8       | 117.5       | 118.6        | c. 122      | 122.6       | 123.3        | 123.5       | 123.7        |
| Kopflänge in % . . . . .      | 16.3        | 14.4        | 16.2        | 15.5        | 15.4        | 18.5        | 14.2         | 16.5        | 16.3        | 14.8         | 16.3        | 15.5         |
| Kopfbreite in % . . . . .     | 8.5         | 7.5         | 7.8         | 7.5         | 7.8         | 11.8        | 8.4          | 8.9         | 8.2         | 8.1          | 9.2         | 9.3          |
| Schnauzenlänge in % . . . . . | 3.9         | 3.5         | 3.9         | 3.3         | 3.9         | 4.7         | 3.2          | 3.9         | 3.8         | 3.6          | 4.6         | 4.0          |
| Länge der iris in % . . . . . | 4.0         | 3.6         | 4.1         | 3.7         | 4.3         | 3.6         | 3.2          | 4.2         | 3.8         | 3.9          | 4.5         | 4.1          |
| » bis <i>D</i> in % . . . . . | 23.6        | 25.2        | 32.9        | 20.0        | 31.8        | 19.1        | 16.2         | 29.5        | 32.1        | 28.5         | 31.0        | 26.8         |
| » bis <i>A</i> in % . . . . . | 34.2        | 33.9        | 37.2        | 35.1        | 35.5        | 37.0        | 35.7         | 36.6        | 36.4        | 37.3         | 34.4        | 38.9         |
| » bis anus in % . . . . .     | 32.9        | 32.4        | 35.2        | 34.2        | 33.4        | 36.3        | 34.3         | 34.7        | 35.3        | 35.8         | 33.5        | 37.2         |
| » von <i>P</i> in % . . . . . | 8.9         | 8.0         | 8.0         | 7.6         | 8.5         | 10.0        | 7.6          | 8.6         | 8.6         | 9.1          | 8.7         | 8.3          |
| Maximale Höhe in % . . . . .  | 8.9         | 7.1         | 7.8         | 8.3         | 7.1         | 10.6        | 8.4          | 8.1         | 8.7         | 11.3         | 7.3         | 9.0          |
| Geschlecht . . . . .          | ♂           | —           | ♀           | ♀           | ♂           | ♂           | ♀            | ♂           | ♂           | ♀            | ♂           | ♀            |

| № des Exemplars . . . . .     | 35          | 48          | 38             | 9            | 25           | 6           | 30          | 19           | 14           | 19           |
|-------------------------------|-------------|-------------|----------------|--------------|--------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| № der Station. . . . .        | Jerm.<br>86 | P. E.<br>47 | P. 8<br>(1900) | A. P.<br>250 | A. P.<br>698 | A. P.<br>66 | Jerm.<br>70 | A. P.<br>695 | A. P.<br>339 | A. P.<br>593 |
| Totallänge in mm. . . . .     | 125         | 125.5       | 127.7          | 128.8        | 129          | 134.3       | 134.6       | 137.5        | 140.3        | 142.3        |
| Kopflänge in % . . . . .      | 18.2        | 19.1        | 15.2           | 15.1         | 16.8         | 15.7        | 15.6        | 16.7         | 16.4         | 16.5         |
| Kopfbreite in % . . . . .     | 10.0        | 13.1        | 9.7            | 8.5          | 9.5          | 8.0         | 9.7         | 10.2         | 10.3         | 9.3          |
| Schnauzenlänge in % . . . . . | 4.8         | 5.0         | 3.3 ?          | 3.4          | 4.0          | 3.9         | 4.1         | 4.2          | 4.1          | 3.7          |
| Länge der iris in % . . . . . | 4.2         | 4.0         | 3.3 ?          | 3.4          | 4.3          | 3.9         | 3.4         | 3.9          | 4.1          | 3.3          |
| » bis <i>D</i> in % . . . . . | 31.4        | 20.7        | 16.4           | 17.2         | 28.1         | 34.8        | 18.9        | 31.5         | 30.0         | 18.6         |
| » bis <i>A</i> in % . . . . . | 38.3        | 37.5        | 34.9           | 36.6         | 37.9         | 35.4        | 35.3        | 37.8         | 36.5         | 37.1         |
| » bis anus in % . . . . .     | 36.6        | 36.8        | 33.9           | 35.6         | 36.4         | 34.2        | 34.0        | 37.1         | 35.2         | 35.9         |
| » von <i>P</i> in % . . . . . | 8.0         | 9.2         | 7.4            | 7.3          | 9.1          | 7.4         | 7.9         | 9.2          | 7.2          | 7.4          |
| Maximale Höhe in % . . . . .  | 8.5         | c. 10.5     | —              | 8.5          | 8.1          | 7.5         | 9.0         | 9.3          | 7.8          | 8.0          |
| Geschlecht . . . . .          | ♂           | ♂           | ♀              | ♀            | ♂            | ♀           | ♂           | ♂            | ♂            | ♂            |

*Enchelyopus* s. *Zoarces viviparus* (L.).

**Beschreibung.** Von den mir zur Verfügung stehenden 73 Exemplaren dieser Art aus dem Gebiet des Europäischen Eismeeres stammen 49, deren Länge von 42 bis 307.7 mm. beträgt, von der Murman-Küste, 1 junges 98.4 mm. langes Exemplar aus dem Golf Tschesskaja oder Tscheschskaja Guba und 23 Exemplare von 55 bis 318.5 mm. aus dem Weissen Meer. Von denselben sind 16 Exemplare von der Murman-Küste, das Exemplar aus dem Golfe Tschesskaja Guba und 20 Exemplare aus dem Weissen Meer näher untersucht worden; die Resultate der Messungen findet der Leser in Messungstabellen am Ende dieses Abschnitts.

Die Verhältnisse der Grösse einzelner Körperteile zeigen beträchtliche Schwankungen, welche zum Teil individuell, vielleicht auch lokal, zum Teil — und zwar hauptsächlich — mit dem Alter verbunden sind.

Die Kopflänge in % der Totallänge beträgt von 14.9 % bis 18.9 %, also ungefähr von 15 % bis 19 %. Bei einem näheren Studium der Kopfgrösse können wir eine gewisse Regelmässigkeit entdecken, welche indessen durch individuelle (zum Teil vielleicht auch lokale) Abweichungen einigermaßen verwischt wird. Bei 16 Exemplaren von der Murman-Küste in der Tabelle der Messungen sehen wir, dass die Kopflänge bei dem kleinsten 42 mm. langen Exemplar 17.4 % beträgt, dann mit zunehmender Totallänge unter beträchtlichen Schwankungen allmählich abnimmt und bei einem 100.7 mm. langen Exemplar nur 14.9 % ist; bei etwas grösseren Exemplaren ist die Kopflänge wieder etwas grösser und bei Exemplaren von 237 bis 307.7 mm. beträgt dieselbe 17.5—18.6 %. Ungefähr dasselbe finden wir bei Exemplaren aus dem Weissen Meer, nur ist die Regelmässigkeit der Veränderungen durch grossköpfige Exemplare № 25 und besonders № 31 von der Station № 24 der Tabelle der Fundorte etwas verwischt. Wenn wir aber von diesen zwei Exemplaren (mit der Kopflänge von 17.9 %) absehen, so finden wir, dass die Kopflänge von 16.7 % bei dem kleinsten 55 mm. langen Exemplar mit Schwankungen bis 15.4 % bei den 103.5 mm. und 148.5 mm. langen Exemplaren № 32 und 30 sinkt, dann allmählich bis 16.4 % bei einem 179.7 mm. langen Exemplar zunimmt, bei Exemplaren von 194 bis 215.5 mm. zwischen 16.9 % und 17.7 % schwankt und bei den grössten 290.5 und 318.5 mm. langen Exemplaren 18.9 und 18.2 % beträgt. Abgesehen von den kleinsten Exemplaren von 42 und 55 mm. und dem 132.8 mm. langen Exemplar № 31 finden wir die Kopflänge von c. 17 % oder mehr (16.9—18.9 %) bei Exemplaren über 180 mm.

Etwas ähnliches finden wir auch in Bezug auf die Lage der Rückenflosse, nur sind die Veränderungen hier weniger regelmässig. Die Länge von der Schnauzenspitze bis zum Anfang der Rückenflosse beträgt im Ganzen von 13.9 bis 16.8 % der Totallänge. Die kleinste Länge von 13.9 bis 14.9 % finden wir unter Exemplaren von der Murman-Küste bei denjenigen, welche 93.8 bis 113 mm. lang sind, während sowohl bei grösseren wie bei kleineren Exemplaren die Länge grösser ist. Bei Exemplaren aus dem Weissen Meer ist dies weniger deutlich, die Regelmässigkeit durch individuelle Variationen gestört, aber auch hier finden

wir die Länge bis zum Anfang der Rückenflosse unter 15% nur unter Exemplaren von 103.5 bis 179.7 mm.

Die Länge von der Schnauzenspitze bis zum Anfang der Analflosse beträgt 34.2—42.7% der Totallänge. Bei Exemplaren von der Murman-Küste nimmt diese Länge von 36.7 und 36.8% bei zwei kleinsten Exemplaren mit Schwankungen bis 34.6 und 34.2% bei Exemplaren von 93.8 und 95.4 mm. ab, wird dann wieder grösser und beträgt bei Exemplaren von 106.6 und 113 mm. 37.1 und 36.4%, bei Exemplaren von 237—307.7 mm. 38.6 bis 42.7%. Von Exemplaren aus dem Weissen Meer beträgt die Länge bis zum Anfang der Analflosse bei 55—176 mm. langen 36.2—37.1%, bei 178.5 und 179.7 mm. langen — 37.9 und 37.8%, bei 194—318.5 mm. langen — 38.7—40.9%. Im Ganzen schwankt diese Länge bei Exemplaren aus dem Weissen Meer in engeren Grenzen, als bei Exemplaren von der Murman-Küste.

Die Lage der Analöffnung zeigt im Ganzen dieselben Verhältnisse. Der Abstand von der Schnauzenspitze bis zur Mitte des anus beträgt 33.2—41.1% der Totallänge. Bei Exemplaren von der Murman-Küste nimmt diese Länge von 35.7% bei zwei kleinsten Exemplaren bis 34.2%, 33.2% und 33.9% bei Exemplaren von 93.8—98 mm. ab, schwankt bei Exemplaren von 100.7—113 mm. zwischen 34.8 und 35.5%, beträgt 36.7—36.8% bei Exemplaren von 237 und 241 mm. und 41—41.1% bei Exemplaren von 299.5 und 307.7 mm. Bei Exemplaren aus dem Weissen Meer von 55—156.5 mm. beträgt die Länge bis zum anus 34.5—35.6%, bei einem Exemplar von 178.5 mm. 37.0% (?), bei Exemplaren von 184.2—318.5 mm. 36.6—39.0%.

Alle oben erwähnten Schwankungen der relativen Länge einzelner Körperteile in Zusammenhang mit der Grösse des Fisches können auf folgende Weise erklärt werden. Stark entwickelte Geschlechtsorgane finden wir nur bei Exemplaren von 176 mm. an, bei Exemplaren von geringerer Länge bis 132.8 mm. sind dieselben höchstens mässig entwickelt, bei noch kleineren sehr schwach. Der Fisch scheint die Geschlechtsreife bei einer Totallänge von c. 160 mm. zu erreichen und die Verwandlung in das erwachsene Tier wird nur bei der Totallänge von über 180 mm. vollendet. Die ganz jungen Fische haben einen grossen Kopf und relativ kurzen Schwanz, dann wächst der Schwanz schneller als der Rumpf mit dem Kopf und schliesslich mit der eintretenden Geschlechtsreife findet eine starke Zunahme der relativen Kopflänge sowie auch der relativen Länge des Rumpfes statt. Daraus folgen die oben beschriebenen Veränderungen in der relativen Länge der Körperteile. Je grösser der Fisch wird, desto deutlicher treten diese Veränderungen hervor.

Wir müssen jetzt die ziemlich complicierten Wachstumsverhältnisse einzelner Körperteile näher ins Auge fassen.

In der beiliegenden Tabelle führe ich 1) die №№ der gemessenen Exemplare von der Murman-Küste, 2) die Totallänge derselben in mm., 3) die Kopflänge in % der Totallänge, 4) die Zunahme resp. die Abnahme der relativen Kopflänge gegen das, was wir bei dem kleinsten 42 mm. langen Exemplar finden, 5) die relative Länge bis zum Anfang der Anal-

flosse, 6) die Zunahme resp. die Abnahme dieser Länge, 7) die relative Länge des Rumpfes ohne Kopf, 8) die Zunahme resp. die Abnahme derselben, 9) die relative Länge des Schwanzes vom Anfang der Analflosse, 10) die Zunahme resp. die Abnahme derselben an.

|                                      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |       |       |
|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|
| 1) № des Exemplars. . . . .          | 16   | 15   | 14   | 13   | 12   | 11   | 10   | 9    | 8    | 7     | 6     | 5    | 4    | 3    | 2     | 1     |
| 2) Totallänge in mm. . . . .         | 42   | 62.5 | 73.8 | 77.7 | 81.5 | 90.7 | 93.8 | 95.4 | 98   | 100.7 | 106.6 | 113  | 237  | 241  | 299.5 | 307.7 |
| 3) Kopflänge in % d. Totall. .       | 17.4 | 16.2 | 15.9 | 16.3 | 15.6 | 15.9 | 15.5 | 15.9 | 15.3 | 14.9  | 16.4  | 15.4 | 17.7 | 17.5 | 18.4  | 18.6  |
| 4) Zunahme od. Abnahme derselben.    | 0    | -1.2 | -1.5 | -1.1 | -1.8 | -1.5 | -1.9 | -1.5 | -2.1 | -2.5  | -1.0  | -2.0 | +0.3 | +0.1 | +1.0  | +1.2  |
| 5) Länge von Kopf + Rumpf in %.      | 36.7 | 36.8 | 36.0 | 36.4 | 35.8 | 35.6 | 34.6 | 34.2 | 35.0 | 35.7  | 37.1  | 36.4 | 38.8 | 38.6 | 42.3  | 42.7  |
| 6) Zunahme od. Abnahme derselben.    | 0    | +0.1 | -0.7 | -0.3 | -0.9 | -1.1 | -2.1 | -2.5 | -1.7 | -1.0  | +0.4  | -0.3 | +2.1 | +1.9 | +5.4  | +6.0  |
| 7) Länge des Rumpfes ohne Kopf in %. | 19.3 | 20.6 | 20.1 | 20.1 | 20.2 | 19.7 | 19.1 | 18.3 | 19.7 | 20.8  | 20.7  | 21.0 | 21.1 | 21.1 | 23.9  | 24.1  |
| 8) Zunahme od. Abnahme derselben.    | 0    | +1.3 | +0.8 | +0.8 | +0.9 | +0.4 | -0.2 | -1.0 | +0.4 | +1.5  | +1.4  | +1.7 | +1.8 | +1.8 | 4.4   | 4.8   |
| 9) Länge des Schwanzes in %.         | 63.3 | 63.2 | 64.0 | 63.6 | 64.2 | 64.4 | 65.4 | 65.8 | 65.0 | 64.3  | 62.9  | 63.6 | 61.2 | 61.4 | 57.7  | 57.3  |
| 0) Zunahme od. Abnahme derselben.    | 0    | -0.1 | +0.7 | +0.3 | +0.9 | +1.1 | +2.1 | +2.5 | +1.7 | +1.0  | -0.6  | +0.3 | -2.1 | -1.9 | -5.4  | -6.0  |

Aus der Tabelle ersehen wir, dass, abgesehen von nicht unbeträchtlichen individuellen Schwankungen in der relativen Länge der Körperteile, folgende Veränderungen im Wachstum einzelner Körperteile stattfinden: 1) der Kopf wächst anfangs relativ langsam und die relative Länge desselben nimmt in beträchtlichem Grad ab, bis sie um 2—2½% kleiner als bei dem kleinsten Exemplar wird; bei dem Übergang in das Stadium der Geschlechtsreife findet eine starke Beschleunigung des Wachstums statt und die relative Kopflänge wird beträchtlich grösser (bis um 1—1.2% der Totallänge) als bei dem jüngsten Fisch; 2) der Rumpf (ohne Kopf) wächst anfangs relativ schnell und die relative Länge desselben wird um 1.3—0.8% der Totallänge grösser; dann giebt sich eine deutliche Verlangsamung des Wachstums kund, die relative Rumpflänge wird beträchtlich kleiner als bei dem kleinsten Exemplar; von dem 98 mm. langen Exemplar an finden wir eine starke Beschleunigung des Wachstums, besonders bei den grössten Exemplaren, bei denen die Rumpflänge um 4.4—4.8% grösser ist, als bei dem kleinsten Exemplar; 3) der Schwanz wächst anfangs sehr schnell und wird bis um 2.5% der Totallänge grösser als bei dem jüngsten Exemplar; dann beginnt eine Abnahme des Wachstums, welche ihr Maximum bei grössten Exemplaren erreicht.

Etwas ähnliches finden wir bei Exemplaren aus dem Weissen Meer, wenn wir von einigen starken individuellen Schwankungen absehen. Der Kopf wächst anfangs langsam und seine relative Länge nimmt ab, dann wird das Wachstum schneller, besonders bei Exemplaren über 180 mm. Die relative Länge des Rumpfes (ohne Kopf) zeigt hier kleinere Veränderungen als bei Exemplaren von der Murman-Küste: sie beträgt bei Exemplaren von 55—156.5 mm. 18.8—21.4%, bei Exemplaren von 176—179.7 — 20.2—21.9%, bei Exemplaren über 180 mm. — 20.1—22.7%; jedenfalls findet auch hier ein schnelleres



Wachstum bei grösseren, erwachsenen Exemplaren statt. Der Schwanz schwankt bei Exemplaren von 55—156.5 mm. zwischen 62.9 und 63.6 %, bei Exemplaren von 176—179.7 mm. zwischen 63.6 und 62.1 %, bei Exemplaren über 180 mm. zwischen 61.3 und 59.1 %. Der Schwanz verspätet also im Wachstum bei grösseren und besonders bei ganz erwachsenen Exemplaren.

Die maximale Höhe des Körpers beträgt 9.3—13 % der Totallänge bei Exemplaren von der Murman-Küste und 8.4 — c. 13 % bei Exemplaren aus dem Weissen Meer.

Geringeren Schwankungen unterliegt die Höhe am Anfang der Analflosse, und zwar 7.9—11.2 % bei Exemplaren von der Murman-Küste und 7.6—9.9 % bei Exemplaren aus dem Weissen Meer. Im Ganzen ist sie grösser bei erwachsenen Exemplaren.

Die Länge der Brustflossen beträgt bei Exemplaren von der Murman-Küste 14.3—11.9 % der Totallänge und bei Exemplaren aus dem Weissen Meer 14.9—12 %. Sie zeigt beträchtliche individuelle Schwankungen und nimmt im Ganzen mit dem Alter ab.

Die Anzahl der Strahlen in den Flossen beträgt bei den in dieser Hinsicht untersuchten Exemplaren: D. (79—84) + (8—11) + (22—27), A. 85—95, C. 10—13, P. 18—20, in der Regel 19. Um sichere ganz zuverlässige Resultate über die Anzahl der Strahlen zu bekommen nahm ich bei einigen Exemplaren die Haut auf einer Seite der unpaaren Flossen ab; ich fand dabei ungefähr dieselbe Amplitude der Schwankungen, welche ich auch sonst feststellen konnte.

Die Grösse von *Enchelyopus viviparus* (L.) scheint in unserem Gebiet im Ganzen der gewöhnlichen Grösse des Fisches an den Skandinavischen Küsten gleich zu sein. Das grösste Exemplar von der Murman-Küste ist ungefähr 308 mm. lang, das grösste Exemplar aus dem Weissen Meer 318.5 mm. Die Weibchen sind grösser als die Männchen: die grössten Männchen von der Murman-Küste und aus dem Weissen Meer sind 241 und 206 mm. lang. Von 23 Exemplaren sind 9 Männchen und 14 Weibchen, indessen ist die Anzahl der untersuchten Exemplare zu gering um sichere Schlüsse über das Verhältnis der Anzahl der Geschlechter zu ziehen.

Wir müssen jetzt zur Frage übergehen, ob und inwieweit die Exemplare von *Enchelyopus viviparus* (L.), welche in unserem Untersuchungs-Gebiet leben, von denjenigen verschieden sind, welche die südlichen Gebiete bewohnen. Nach F. A. Smitt<sup>1)</sup> scheint es nämlich möglich zu sein unter Skandinavischen Vertretern dieser Art zwei Formen zu unterscheiden: eine nördliche, welche an den Küsten von Finmarken lebt, und eine südliche aus der Ostsee und von den Küsten Bohuslans. Die erste Form zeichnet sich durch die schlankere Form des Körpers, durch den weiter nach vorn liegenden Anfang der Rückenflosse, dessen Abstand von der Schnauzenspitze weniger als 16 % der Länge beträgt, so wie durch andere Spuren von jugendlichen Merkmalen aus. Bei der südlichen Form ist die Kopflänge grösser, die Länge bis zur Rückenflosse grösser, das Gebiet der Analflosse kürzer. Diese

1) F. A. Smitt. Skandinavian Fishes, 1895. Part II, S. 604.

Unterschiede werden durch einige Resultate der Messungen (leider nur in mittleren Zahlen) erläutert. Ich entnehme der Tabelle von F. A. Smitt die wichtigsten Angaben.

| Fundort.   | Halbinsel Kola. | N. Finmarken u. Halbinsel Kola. | Ostsee und Bohuslän. | Ostsee und Bohuslän. | Ostsee. |
|--|-----------------|---------------------------------|----------------------|----------------------|---------|
| Anzahl der Exemplare . . . . .                   | 3               | 3                               | 4                    | 6                    | 2       |
| Totallänge der Exemplare in mm. . .              | 93—108          | 125—201                         | 56—92                | 218—251              | 317—382 |
| Mittlere Länge bis <i>D</i> in % der Total.      | 14.2            | 15.1                            | 16.7                 | 17.2                 | 17.0    |
| Mittl. postorbitale Länge in % d. Total.         | 9.3             | 9.6                             | 10.3                 | 10.9                 | 10.8    |
| Mittl. Schwanzl. (von <i>A</i> ) in % der Total. | 64.9            | 62.3                            | 63.0                 | 59.4                 | 58.7    |

Die Angaben der ersten vertikalen Reihe und zwar die Länge bis zur Rückenflosse und die Länge vom Anfang der Analflosse bis zur Schwanzspitze stimmen mit Resultaten meiner Messungen gut überein. Für 5 Exemplare von der Murman-Küste, deren Totallänge 93.8—106.6 mm. beträgt, fand ich die mittlere Länge bis zur Rückenflosse 14.5% und die Schwanzlänge 64.7%. Weniger gut stimmen die Angaben der ersten Reihe mit den Messungen der Exemplare aus dem Weissen Meer, überein. Bei 2 Exemplaren von 91 und 103.5 mm. beträgt die mittlere Länge bis zur Rückenflosse 15.0% und die mittlere Schwanzlänge 63.6%. Sehr gut stimmen weiter die Angaben der zweiten vertikalen Reihe mit den Messungen der Exemplare aus dem Weissen Meer. Bei 9 Exemplaren von 132.8 bis 201 mm. fand ich nämlich 15.4% und 62.2%.

Die Angaben von F. A. Smitt geben uns indessen nicht ganz genaue Vorstellung über den Unterschied zwischen der nördlichen und der südlichen Form von *Enchelyopus viviparus* (L.) und zwar weil in der Tabelle Messungen von Exemplaren der nördlichen Form, deren Länge kleiner als 93 mm. oder grösser als 201 mm., vollständig fehlen.

Bei 5 Exemplaren von der Murman-Küste, deren Länge 62.5—90.7 mm. beträgt, finde ich die mittleren Werte von 15.2% und 64.0%, bei 5 Exemplaren aus dem Weissen Meer, deren Länge 55—91 mm. beträgt, 15.6% und 63.4%. Der Unterschied der nördlichen Form von der südlichen ist also bei Exemplaren unter 92 mm. nicht so stark, wie man nach der Tabelle von F. A. Smitt denken könnte.

Was die nördlichen Exemplare anbetrifft, welche der vierten vertikalen Reihe in der Tabelle entsprechen, so fand ich bei 2 Exemplaren von der Murman-Küste, deren Länge 237 und 241 mm. war, 15.9% und 61.3%.

Bei den grössten Exemplaren unserer Sammlung und zwar bei 4 Exemplaren von

290.5 bis 318 mm. fand ich 16.2% und 58.7%. Die mittlere Schwanzlänge ist also genau dieselbe wie bei den grössten Exemplaren in der Tabelle von F. A. Smitt.

Bei drei Exemplaren aus dem Finnischen Meerbusen wurden von mir Messungen ausgeführt, welche ich in der beiliegenden Tabelle anführe. Die zwei grossen Exemplare stammen aus der Nähe von Narwa, das kleine aus der Nähe von Helsingfors.

| N <sup>o</sup> des Exemplars . . . . .          | 1         | 2         | 3               |
|---|-----------|-----------|-----------------|
| Fundort. . . . .                                | bei Narwa | bei Narwa | bei Helsingfors |
| Totallänge in mm. . . . .                       | 318.8     | 211.4     | 87.8            |
| Kopflänge in % der Totallänge. . . . .          | 19.1      | 19.7      | 17.2            |
| Länge bis Anfang <i>D</i> in % . . . . .        | 17.3      | 18.4      | 15.7            |
| » » » <i>A</i> in % . . . . .                   | 42.4      | 40.3      | 36.0            |
| Länge bis anus in % . . . . .                   | 40.1      | 38.8      | 35.1            |
| Schwanzlänge vom Anfang <i>A</i> in % . . . . . | 57.6      | 59.7      | 64.0            |
| Maximale Höhe in % . . . . .                    | —         | 12.6 (?)  | c. 10.9         |
| Höhe am Anfang <i>A</i> in % . . . . .          | 10.9      | 10.3      | 9.2             |
| Länge von <i>P</i> in % . . . . .               | 11.1      | 13.0      | 12.0            |
| Geschlecht . . . . .                            | ♀         | ♂         | —               |
| Entwicklungszustand d. Geschlechtsorg.          | stark     | stark     | —               |
| Anzahl der Strahlen in <i>D</i> . . . . .       | 73+10+27  | 79+9+26   | —               |
| » » » » <i>A</i> . . . . .                      | 89        | 90        | —               |
| » » » » <i>C</i> . . . . .                      | 13        | 10        | —               |
| » » » » <i>P</i> . . . . .                      | 19—18     | 19—19     | —               |

Wir können auf Grund der obigen Angaben feststellen, dass die südliche Form von der nördlichen durch grössere Kopflänge, grössere Länge bis zum Anfang der Rückenflosse, sowie in der Regel durch kleinere Schwanzlänge abweicht. Indessen ist der Unterschied nicht immer stark ausgeprägt; besonders ist dies mit der Schwanzlänge der grossen Exemplare der Fall; dieselbe ist bei grossen Exemplaren beider Formen sogar ungefähr dieselbe, bald finden wir bei nördlichen Exemplaren, bald bei südlichen grössere Schwanzlänge. Die Länge bis zum Anfang der Rückenflosse, welche nach F. A. Smitt bei nördlichen Exemplaren weniger als 16% der Totallänge betragen soll, ist nicht selten grösser als 16%.

Wie gering der Unterschied zuweilen sein kann, zeigt eine Zusammenstellung der Messungen der unter N<sup>o</sup> 1 und N<sup>o</sup> 2 angeführten grossen Exemplare aus dem Finnischen Meerbusen mit den Messungen unserer nördlichen Exemplare N<sup>o</sup> N<sup>o</sup> 1, 2, 18 und 19. Ich führe diese Zusammenstellung in tabellarischer Form an.

| Fundort.                             | Finn. Meerb. | Finn. Meerb. | Murman-Küste. | Murman-Küste. | Weisses Meer. | Weisses Meer. |
|--------------------------------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| N <sup>o</sup> des Exemplars . . . . | 1            | 2            | 1             | 2             | 18            | 19            |
| Totallänge in mm. . . . .            | 318.8        | 211.4        | 307.7         | 299.5         | 318.5         | 290.5         |
| Kopflänge in % d. Totall. .          | 19.1         | 19.7         | 18.6          | 18.4          | 18.2          | 18.9          |
| Länge bis D in % . . . . .           | 17.3         | 18.4         | 16.8          | 15.4          | 16.0          | 16.5          |
| Länge bis A in % . . . . .           | 42.4         | 40.3         | 42.7          | 42.3          | 40.9          | 39.0          |
| Schwanzlänge von A in %.             | 57.6         | 59.7         | 57.3          | 57.7          | 59.1          | 61.0          |

Wir sehen, dass die Differenz in der relativen Kopflänge bis 0.2%, die Differenz der Länge bis zur Rückenflosse bis 0.5% sinkt und dass die Länge bis zur Analflosse und also auch die Schwanzlänge bei beiden Formen ungefähr dieselben sind.

In Bezug auf die Anzahl der Strahlen in den Flossen bin ich zu einem wesentlich anderen Resultat gekommen, als F. A. Smitt, und zwar nicht nur bei der nördlichen sondern auch bei der südlichen Form. F. A. Smitt führt folgende Anzahl der Strahlen an<sup>1)</sup>: D. (72—80) + (6—10) + (16—21); A. 80—88, nach Moreau zuweilen 89; P. 19. Ich fand bei nördlichen Exemplaren D. (79—84) + (8—11) + (22—27); A. 85—95; C. 10—13; P. 18—20, in der Regel 19, und bei zwei Exemplaren aus dem Finnischen Meerbusen D. (73—79) + (9—10) + (26—27); A. (89—90); C. 10—13; P. 18—19.

**Verbreitung und Existenzbedingungen.** Das mir zur Verfügung stehende Material enthält 73 Exemplare, darunter 14 Exemplare, welche ich durch Herrn K. Derjugin aus dem Zoologischen Institut der hiesigen Universität empfangen habe. Die meisten Exemplare zeigen einen guten oder mindestens mehr oder weniger befriedigenden Erhaltungszustand, nur wenige eignen sich für eine nähere Untersuchung gar nicht.

Die Exemplare aus dem Zoologischen Institut der Universität werden in der beiliegenden Tabelle unter N<sup>o</sup> N<sup>o</sup> 20—24 angeführt; in der Collection des Instituts tragen dieselben N<sup>o</sup> N<sup>o</sup> 744 $\alpha$ , 518 $\alpha$ , 598 $\alpha$ , 508 $\alpha$  und 864 $\alpha$ .

Die 13 ersten N<sup>o</sup> der Tabelle beziehen sich auf die Murman-Küste und zwar hauptsächlich auf den Kola-Fjord (Hafen Jekaterininskaja, Bucht Srednjaja Guba, Bucht Tjuwa-Guba), N<sup>o</sup> 14 — auf den Golf Tschesskaja oder Tscheschskaja Guba (nach O von der Halbinsel Kanin), die übrigen N<sup>o</sup> — auf das Weisse Meer. In der vierten vertikalen Reihe werden mit römischen Ziffern die Stationen der vorbereitenden Expedition (von Mai 1898 bis Mai 1899) angegeben, mit A. P.-Stationen des Dampfers «Andrei Perwoswannyi» bezeichnet.

1) F. A. Smitt. l. c. S. 603.

| №  | Gesammelt von                                 | Zeit.                       | № der Station und der Arbeit (in Klammern). | Fundort.  |
|----|---|-----------------------------|---|---|
| 1  | Rippas und Taube                              | 1894                        | —   | Hafen Jekaterininskaja, ungefähr<br>12 <sup>1</sup> / <sub>4</sub> ' N, 33° 28 <sup>1</sup> / <sub>4</sub> ' O. |
| 2  | Wissenschaftlich-prakt.<br>Murman-Expedition. | 4.VI (23.V) 1898            | IX (9)                                      | » »   |
| 3  |   | 2.IX (21.VIII) 1898         | CXLVI (186)                                 | » »   |
| 4  |   | 21 (9) IX. 1898             | —   | » »   |
| 5  |   | 24 (12) IX. 1898            | CLXIV (212)                                 | Kola-Fjord, Ostseite der Insel Jekat  |
| 6  | » »   | 20 (8) VIII. 1899           | 95 A. P. (197)                              | Hafen Jekaterininskaja  |
| 7  | » »   | 1.VII (18.VI) 1900          | —   | » »   |
| 8  | » »   | 3.VIII (21.VII) 1900        | Küsten-Arbeiten № 53                        | Teriberka, ungefähr 69° 10' N, 35°  |
| 9  | » »   | 11. I. 1901 (29. XII. 1900) | » » № 81                                    | Bucht Tjuwa-Guba, Kola-Fjord, un-<br>gefähr 69° 11' N, 33° 37' O.   |
| 10 | » »   | 20 (7) VII. 1901            | » » № 165                                   | Bucht Srednjaja-Guba, Kola Fjord un-<br>gefähr 69° 08' N, 33° 35' O.  |
| 11 | » »   | 25 (12) VII. 1901           | » » № 170                                   | Hafen Jekaterininskaja  |
| 12 | » »   | 8.VIII (26.VII) 1901        | » » № 183                                   | Bucht Srednjaja-Guba, Kola-Fj   |
| 13 | » »   | 17 (4) VIII. 1900           | —   | » »   |
| 14 | » »   | 3.VIII (21.VII) 1900        | 281 A. P. (638)                             | Golf Tschesskaja Guba, am Vorg.<br>ny ungefähr 67° 48' N, 48° 50'   |
| 15 | Danilewskij                                   | 1861                        | —   | Weisses Meer  |
| 16 | Rochmistrow                                   | —                           | —   | Sumskij Possad, Golf von Onegame<br>gefähr 64° 15' N, 35 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ' O.                       |
| 17 | Mirsachanow                                   | 1886                        | —   | Fluss Wyg, ungefähr 64 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ' N, 34°   |
| 18 | I. Tarnani                                    | 1891                        | —   | Inseln Solowetzkije, ungefähr 65°<br>35 <sup>3</sup> / <sub>4</sub> ' O.  |
| 19 | N. Knipowitsch.                               | 12.VII (30.VI) 1895         | —   | Vorgeb. Turija Gora, NW-Teil des<br>ungefähr 66° 39' N, 34° 20'   |
| 20 | Iversen                                       | 1869                        | —   | «Archangelsk»   |
| 21 | I. Tarnani                                    | 1891                        | —   | Inseln Solowetzkije   |
| 22 | »   | »                           | —   | » »   |
| 23 | »   | —                           | —   | » »   |
| 24 | D. Pedaschenko                                | —                           | —   | » »   |

Die Tabelle zeigt, dass *Enchelyopus* s. *Zoarcis viviparus* L. im Europäischen Eismeer die Murman-Küste, die Küstengebiete des Weissen Meeres und die Küsten des Golfes Tschesskaja oder Tscheschkaja Guba bewohnt. Von der norwegischen Grenze an erstreckt sich das Verbreitungs-Gebiet dieses Fisches bis zu den südlichen, westlichen und nordwestlichen Teilen des Weissen Meeres, sowie bis zur Ost-Küste des Golfes Tscheschkaja Guba, wo im Jahre 1900 ungefähr unter 67° 48' N und 48° 50' O ein Exemplar erbeutet wurde.

| Boden.                 | Gesammelt mit | Anzahl der Exemplare. | Totallänge der Exemplare.                   | № der Exemplare in der Messungstabelle. |
|------------------------|---------------|-----------------------|---|---|
| —                      | —             | 1                     | 113 mm.                                     | 5                                       |
| Sand und Steine        | Waade         | 1                     | 241 mm.                                     | 3                                       |
| Steine                 | Händen        | 2                     | 100.7; 90.7 mm.                             | 7, 11                                   |
| Sand und Steine        | Waade         | 1                     | 83 mm.                                      | —                                       |
| Steine                 | Händen        | 1                     | 106.6 mm.                                   | 6                                       |
| »                      | »             | 1                     | 81.5 mm.                                    | 12                                      |
| »                      | »             | 5                     | 85.3; 64.3; 63.4; 62; 61 mm.                | —                                       |
| Sand                   | Waade         | 2                     | 307.7; 237 mm.                              | 1, 4                                    |
| »                      | »             | 1                     | 42 mm.                                      | 16                                      |
| Sand, Steine           | Händen        | 6                     | 72; 73.8; 75; 75; 75 $\frac{1}{2}$ ; 85 mm. | 14                                      |
| »                      | Waade         | 1                     | 299.5 mm.                                   | 2                                       |
| »                      | Händen        | 25                    | 95.4; 93.8; 77.7 und 77.7—97.5 mm.          | 13                                      |
| »                      | »             | 2                     | 98; 62.5 mm.                                | 8, 15                                   |
| Sand                   | Waade         | 1                     | 98.4 mm.                                    | 17                                      |
| —                      | —             | 4                     | 91; 84.2; 81.2; 80.9 mm.                    | 33, 34, 35, 36                          |
| —                      | —             | 1                     | c. 169 mm.                                  | —                                       |
| —                      | —             | 2                     | 201; 194 mm.                                | 23, 24                                  |
| Sand, Steine, Algen    | Waade         | 1                     | 318.5 mm.                                   | 18                                      |
| —                      | —             | 1                     | 156.5 mm.                                   | 29                                      |
| —                      | —             | 1                     | c. 252 $\frac{1}{2}$ mm.                    | 20                                      |
| Sand und Steine, Algen | Waade         | 2                     | 103.5; 89.5 mm.                             | 32, —                                   |
| »                      | »             | 2                     | 179.7; 178.5 mm.                            | 26, 27                                  |
| »                      | »             | 5                     | 215.5; 215.5; 206; 176; 148.5 mm.           | 21, —, 22, 28, 30                       |
| »                      | »             | 4                     | 290.5; 184.2; 132.8; 55 mm.                 | 19, 25, 31, 37                          |

Ob und in wie weit die Art auch weiter nach Osten zu finden ist, kann man zur Zeit mit Sicherheit nicht sagen. Jedenfalls wird man diese Art, meiner Meinung nach, kaum an den Küsten von Nowaja Semlja, von den in das Karische Meer führenden Sunden oder in der südöstlichen Ecke des Europäischen Eismeerer finden. Nur im Golfe («Liman») von Petschora können vielleicht die Existenzbedingungen für dieselbe günstiger sein, weil hier starke Sommererwärmung des Wassers beobachtet wird. Indessen fehlt die Art in den mir zur Verfügung stehenden Collectionen aus diesem Golfe.

Was die physikalisch-geographischen Verhältnisse, in welchen *Enchelyopus viviparus* L. in unserem Untersuchungsgebiet lebt, betrifft, so zeigen dieselben grosse Unterschiede. Leider besitzen wir keine Beobachtungen über diese Art während des kalten Teils des Jahres und wissen nicht, in welchen Schichten dieselbe dann lebt. Es scheint sehr wahrscheinlich zu sein, dass die Art auch dann in bedeutende Tiefen nicht überwandert. Der Fang mit Trawls und Dredgen in dem Hafen Jekaterininskaja zur Winterzeit gab in Bezug auf diese Art negative Resultate.

Wir müssen jetzt die Temperatur-Verhältnisse in verschiedenen Teilen des Verbreitungsgebiets von *Enchelyopus viviparus* L. im Europäischen Eismeer näher ins Auge fassen.

Der Hafen Jekaterininskaja zeigt sehr grosse Temperaturschwankungen. Wegen der starken Sommererwärmung und Winterabkühlung erreicht die jährliche Temperatur-Amplitude bis c.  $14^{\circ}$  C. (zuweilen noch mehr) an der Oberfläche, bis c.  $11^{\circ}$  in der Tiefe von 5 M. und bis c.  $10^{\circ}$  in der Tiefe von 10 M. Sie nimmt dann mit der Tiefe sehr beträchtlich ab und beträgt schon in der Tiefe von 25 M. in der Regel weniger als  $6\frac{1}{2}^{\circ}$ . Die höchsten Temperaturen, welche man im Hafen, und zwar an der Oberfläche, beobachtete, betragen  $+ 14^{\circ}$ , sogar über  $+ 15^{\circ}$  ( $+ 15.3^{\circ}$ ); diese höchsten Temperaturen findet man an den Küsten. Die niedrigsten Temperaturen im Hafen betragen  $- 1.5^{\circ}$  (an der Oberfläche und in tieferen Schichten), einmal sogar  $- 1.8^{\circ}$  (in der Tiefe von 30 M.) und  $- 2^{\circ}$  (? in der Tiefe von 25 M.; wahrscheinlich war das Ablesen nicht ganz genau). Die erwähnten höchsten und niedrigsten Temperaturen werden keineswegs in jedem Jahr beobachtet; ausserdem unterliegt die Temperatur besonders an der Oberfläche, zum Teil auch in tieferen Schichten grossen und raschen Schwankungen.

In der Regel erstreckt sich das Gebiet der grossen jährlichen Schwankungen nur auf die oberen Schichten bis c. 25 M. In grösseren Tiefen sind dieselben viel geringer; nur selten, ausnahmsweise wird hier plötzliche sehr beträchtliche Steigerung der Temperatur beobachtet, welche wahrscheinlich durch ausserordentlich starke Vermischung der Wasserschichten oder durch ausserordentlich grosses Eindringen des wärmeren Wassers aus dem Kola-Fjord über die die tiefsten Teile des Hafens absperrende Bodenerhebung im nördlichen Eingang in denselben verursacht wird und mehr oder weniger bald verschwindet. Zuweilen kann man in den tiefsten Teilen des Hafens Jekaterininskaja zu allen Jahreszeiten Temperaturen unter  $0^{\circ}$  beobachten.

Wenn wir für die Schichten von 0 bis 30 M., als die niedrigsten Temperaturen  $- 1.5^{\circ}$  —  $- 1.8^{\circ}$  annehmen, so bekommen wir für die ganze Periode vom Mai 1899 bis Ende 1903 folgende Amplitude in verschiedenen Tiefen (die ausserordentlich hohen Temperaturen trenne ich in der Tabelle von den mehr oder weniger normalen):

| Tiefe | Minimale Temperatur | Maximale Temperatur                                      |
|-------|---------------------|--|
| 0     | —1.8 — —1.5°        | c. +13°, ausnahmsweise bis +14 und +15.3°                |
| 5     | » »                 | +9.8°  |
| 10    | » »                 | +9.6°  |
| 15    | » »                 | +8.9°  |
| 20    | » »                 | +7.05°   |
| 25    | » »                 | +6.1°  |
| 30    | » »                 | gewöhnlich bis c. +3°, ausnahmsweise bis +4.95 und +5.5° |
| 35    | —1.3°               | » bis c. +3°, ausnahmsweise +4.55, +4.9 u. +5.5°         |
| 40    | —0.7°               | » bis c. +2.6°, ausnahmsweise +4.85 und +5.2°            |
| 45    | —0.2°               | bis +1.25, ausnahmsweise +4.8°.                          |

Für *Enchelyopus viviparus* L. kommen wahrscheinlich nur obere Schichten in Betracht.

Was die mittleren Temperaturen verschiedener Schichten anbetrifft, so habe ich dieselben auf Grund der von mir construierten Curven der jährlichen Temperaturveränderungen berechnet und dabei folgende Resultate für die Periode von drei Jahren, und zwar von Anfang Juni 1898 bis Anfang Juni 1901, erhalten:

| Tiefe | Mittlere Temperatur für 3 Jahre |
|-------|---------------------------------|
| 0 M.  | +3.9°                           |
| 5 M.  | +3.6°                           |
| 10 M. | +3.3°                           |
| 15 M. | +3.1°                           |
| 20 M. | +2.3°                           |
| 25 M. | +1.8°                           |
| 30 M. | +1.3°                           |
| 35 M. | +0.8°                           |
| 40 M. | +0.6°                           |
| 45 M. | +0.45°.                         |

Die Temperatur der untersten Schichten scheint in einigen Jahren niedriger zu sein.

Die Temperaturverhältnisse im Kola-Fjord weichen von denen im Hafen Jekaterininskaja beträchtlich ab. Auch hier kann man zuweilen sehr starke Sommererwärmung und starke Abkühlung der obersten Schichten beobachten, aber schon in der Tiefe von 10 M. wurden Temperaturen unter 0° nicht beobachtet. Die niedrigste Temperatur, welche ich in dieser Tiefe in meinen Tabellen finde, beträgt +0.6°, die höchste +10.2°. Wir können vermuten, dass die Temperatur in der Tiefe von 10 M. zuweilen auch etwas niedriger sein kann, etwa bis c. +0.4° oder +0.3° (die niedrigsten Temperaturen, welche man in tiefen Teilen des Fjords fand), in Buchten wohl auch noch niedriger bis c. 0° oder etwas unter 0°. Während im Hafen Jekaterininskaja die Sommererwärmung hauptsächlich nur auf die oberen



Schichten ungefähr bis 25 M. sich erstreckt und nur in sehr geringem Mass die tieferen berührt, können wir auch in den tiefsten Teilen des Kola-Fjords (und zwar spät im Herbst und im Winter: erst dann erreicht die Erwärmung diese Schichten) relativ sehr hohe Temperaturen finden ( $+5.8^\circ$  in der Tiefe von 247 M. am 25 (13) X. 1898,  $+4.3^\circ$  in der Tiefe von 230 M. am 11. XI (30. X) 1898,  $+5.7$  in der Tiefe von 280 M. am 23 (11) XI. 1899,  $+4.9^\circ$  in der Tiefe von 275 M. am 10. I. 1900 (29. XII. 1899)).

In der Bucht von Teriberka kann die Temperatur an der Oberfläche  $+10-11^\circ$ , unmittelbar an der Küste sogar c.  $+13^\circ$  erreichen und im Winter ungefähr bis  $0^\circ$ , an der Küste zuweilen ein wenig unter  $0^\circ$  sinken. In der Tiefe von 10 M. wurden Temperaturen von  $+9.6$  bis c.  $-0.1^\circ$ , in der Tiefe von 25 M. von c.  $+9$  bis c.  $0^\circ$  beobachtet.

Das Weisse Meer zeichnet sich durch einen ausserordentlich starken Gegensatz zwischen Sommer- und Winterverhältnissen aus. In oberen Schichten findet sehr starke Sommererwärmung statt, welche an der Oberfläche unmittelbar an der Küste oder in geringer Entfernung davon bis über  $+16^\circ$  und sogar  $+17^\circ$  steigen kann.

Im tiefen mittleren Teil des Weissen Meeres und im Golfe von Onega beobachtete man folgende höchste Temperaturen:

| Tiefe                                | 0 M.                                    | 10 M.         | 25 M.        | 30 M.        | 50 M.        | 100 M.       |
|--------------------------------------|---|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Der mittlere Teil des Weissen Meeres | $+13.3^\circ$ bis $+15.0^\circ$         | $+11.6^\circ$ | $+2.3^\circ$ | —            | $+0.9^\circ$ | $+1.2^\circ$ |
| Der Golf von Onega                   | $+13$ — $+13.5^\circ$ bis $+15.5^\circ$ | $+12.1^\circ$ | $+9.6^\circ$ | $+9.0^\circ$ | —            | —            |

Eingehende Untersuchungen zeigen, dass im Golf von Onega, und zwar im Gebiet der Inseln Solowetzkije, die ganze Wassermasse bis 30—35 M. im Sommer sehr stark erwärmt wird und dass die Boden-Schichten in diesen Tiefen je nach den Jahren bis  $+7.6^\circ$ ,  $+8.2^\circ$  oder  $+9.0^\circ$  (oder sogar etwas darüber) betragen.

Im Winter findet dagegen eine sehr starke Abkühlung statt und die ganze Masse des Wassers bekommt dann die niedrigste Temperatur, welche für das Wasser des Weissen Meeres möglich ist, also  $-1.4$  —  $-1.6^\circ$ . Da die Periode, während deren grössere oder kleinere Massen des Eises vorhanden sind, in verschiedenen Teilen des Weissen Meeres ungefähr von 5 bis 7 Monate dauert, so können wir annehmen, dass sogar in den im Sommer relativ warmen Schichten im Winter Temperaturen unter  $0^\circ$  im Laufe von einigen Monaten (wahrscheinlich bis 5—6 Monate) herrschen.

Was schliesslich die Temperaturverhältnisse im Golf Tschesskaja Guba anbetrifft, so findet hier ziemlich starke Sommererwärmung statt und im Anfang August 1900 beobachteten wir hier auf zwei Stationen folgende Temperaturen:

| Tiefe | 0                       | 10 M.                   | 25 M.                 | 30 M. | 50 M.           |
|-------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|-------|-----------------|
| t°    | $+5.4$ und $+7.2^\circ$ | $+5.3$ und $+7.0^\circ$ | $+5.2$ und $+7^\circ$ | —     | $+6.8$ $+5.2$ — |

Im Winter nimmt die ganze Wassermasse, soweit man nach dem Salzgehalt urteilen kann, die Temperatur von c.  $-1.8$  —  $-1.9^{\circ}$  an, die Temperaturen unter  $0^{\circ}$  müssen hier ebenso wie im Weissen Meer im Laufe von einigen Monaten herrschen.

Die angeführten Angaben über die Temperaturverhältnisse zusammenfassend, unter welchen *Enchelyopus viviparus* L. im Europäischen Eismeer lebt, finden wir, dass der Fisch sowohl in solchen Gebieten vorkommt, wo die Temperatur nur für kurze Zeit ungefähr bis  $0^{\circ}$  (oder etwas niedriger) sinkt und fast immer über  $0^{\circ}$  bleibt, wie auch in solchen, wo dieselbe (in den von dieser Art bewohnten Tiefen) in der Regel nur für kurze Zeit beträchtlich unter  $0^{\circ}$  sinkt, und in solchen, wo sehr niedrige Temperaturen ( $-1.4$  —  $-1.5^{\circ}$  oder  $-1.8$  —  $-1.9^{\circ}$ ) im Laufe von einigen Monaten dauern.

Ohne Zweifel bewohnt *Enchelyopus viviparus* L. auch die westlichen Teile der Murman-Küste und die dem Einfluss des offenen Meeres ausgesetzten Strecken der Küste, obgleich wir zur Zeit von dort kein Material besitzen. Hier kann die Temperatur an der Küste ohne Zweifel nicht so stark sinken, wie z. B. in Nebenbuchten der grossen Bucht Teriberka (auf welche die oben angeführten Angaben über die Abkühlung bis c.  $-0.1^{\circ}$  in der Tiefe von 10 M. und bis c.  $0^{\circ}$  in der Tiefe von 25 M. sich beziehen), und der Fisch lebt immer bei Temperaturen über  $0^{\circ}$ .

Auffallend ist, dass die Art sowohl an der Murman-Küste, wie im Weissen Meer ihre normale Grösse (bis über 300 mm.) erreicht. Es ist daher klar, dass für diese Art niedrige Wintertemperaturen von geringer Bedeutung sind, wenn nur im Sommer beträchtliche Erwärmung stattfindet.

Die Abhängigkeit der Seetiere von Temperaturverhältnissen kann sich auf sehr verschiedene Weise kundgeben. Viele Arten, welche hauptsächlich relativ warme Gebiete bewohnen und in echten kalten Gebieten (mit Temperaturen immer oder in der Regel unter  $0^{\circ}$ ) nicht leben, können auch monatelang dauernde starke Erniedrigung der Temperatur ertragen, wenn nur im Laufe des übrigen Teils des Jahres starke Erwärmung des Wassers stattfindet. Andererseits, können die Arten, welche hauptsächlich in kalten Gebieten zu finden sind und in echten warmen Gebieten nicht vorkommen, auch in Gebieten mit beträchtlicher Sommererwärmung leben, wenn nur im Winter die Temperatur sehr niedrig ist. Selbstverständlich ist hier die Rede über den «Sommer» oder «Winter» in betreffenden Schichten. Wenn nun ein Meeresgebiet starke und lange Sommererwärmung und starke und lange Winterabkühlung des Wassers zeigt, so kann hier eine sehr eigenthümliche Fauna sich entwickeln, in welcher normale Bewohner kalter Gebiete neben normalen Einwohnern warmer Gebiete vorkommen. Ein ausgezeichnetes Beispiel solcher Verhältnisse ist das sogenannte «warme Gebiet» des Weissen Meeres, d. h. die oberen Schichten dieses Meeres. Verschiedene Fische, Mollusken, Krebse etc. der westeuropäischen Küsten leben hier zusammen mit Arten, welche hauptsächlich echte arktische Gebiete bewohnen. Weniger stark ist dasselbe auch an der Murman-Küste ausgeprägt.

*Enchelyopus viviparus* (L.) gehört ohne Zweifel zu solchen Tieren, welche in der Regel

relativ warme Meeresgebiete bewohnen, aber auch starke und lange Erniedrigung der Temperatur ertragen können. Diese Art findet daher ganz gute Existenzbedingungen sowohl an den Westküsten Norwegens oder an den Küsten Gross-Britanniens, wie auch an der Murman-Küste und im Weissen Meer.

Der Salzgehalt im Hafen Jekaterininskaja schwankt nach den in den Jahren 1901—1903 ausgeführten Beobachtungen in folgenden Grenzen:

| Tiefe | Salzgehalt ‰ |          |
|-------|--------------|----------|
|       | minimum      | maximum  |
| 0     | 14.92        | 34.36    |
| 5     | 25.08        | 34.38    |
| 10    | 32.41        | 34.38    |
| 15    | 33.08        | 34.42    |
| 20    | 33.64        | 34.43    |
| 25    | 34.18        | 34.60    |
| 30    | 34.18        | c. 34.60 |
| 35    | 34.20        | c. 34.60 |
| 40    | 34.31        | 34.61    |
| 45    | 34.36 (?)    | 34.61    |

Die Salzgehalte unter 34.4 ‰ in den Tiefen von 35, 40 und 45 M. können als Ausnahmefälle betrachtet werden. Die Salzgehalte über 34.5 ‰ wurden in der Periode 1901—1903 nur im J. 1903 beobachtet. Ohne Zweifel kann der Salzgehalt an der Oberfläche auch noch mehr sinken (zur Zeit des Eis- und Schneeschmelzens).

Für die oberen hier in Betracht kommenden Schichten im Kola-Fjord können wir ungefähr dieselben Salzgehaltsverhältnisse annehmen. In Buchten kann der Salzgehalt der oberen Schichten sehr niedrig sein. So fand man z. B. in der Bucht Tjuwa am 8. VI (25. V) 1902 an der Oberfläche 4.65 ‰ in der Tiefe von 6 M. 26.35 ‰, in der Bucht Srednjaja am 4. VI (22. V) 1903 an der Oberfläche 2.59 ‰, in der Tiefe von 2 M. 6.51 ‰, in der Tiefe von 5 M. 24.07 ‰ und in der Tiefe von 9 M. 33.12 ‰.

Ueber den Salzgehalt in Teriberka und zwar in der Nähe von der Küste besitzen wir eine Reihe von Beobachtungen im J. 1903, hauptsächlich in der Bucht Lodejnaja, einer Nebenbucht der Bucht Teriberskaja. Wir finden folgende Amplitude der Schwankungen des Salzgehalts:

| Tiefe | Salzgehalt ‰ |                     |
|-------|--------------|---------------------|
|       | minimum      | maximum             |
| 0 M.  | 14.42        | 34.52               |
| 5 M.  | 29.45        | 34.51               |
| 10 M. | 31.24        | 34.52 <sup>1)</sup> |

1) Am 20(7)VIII. 1903 beobachtete man in d. Tiefe von 11 M. 34.56 ‰; vielleicht enthält diese Angabe einen Fehler.

| Tiefe | Salzgehalt ‰ |         |
|-------|--------------|---------|
|       | minimum      | maximum |
| 15 M. | 34.18        | 34.52   |
| 20 M. | 34.18        | 34.54   |
| 25 M. | 34.27        | 34.52   |
| 30 M. | 34.25        | 34.58   |
| 35 M. | 34.38        | 34.58   |

In dem Golf Tschesskaja Guba beobachtete man am 2. VIII (20. VII) 1900 folgende Salzgehalte:

|                     | 0 M.  | 10 M.   | 25 M.   | 30 M. | 50 M. |
|---------------------|-------|---------|---------|-------|-------|
| 67° 29' N 47° 00' O | 33.21 | 33.21   | 33.21   | —     | 33.22 |
| 67° 21' N 46° 55' O | 33.55 | (33.57) | (33.59) | 33.60 | —     |

Ohne Zweifel nimmt hier der Salzgehalt im Winter beträchtlich zu und sinkt im Anfang des Sommers. Genaue Angaben darüber fehlen vollständig.

Viel niedriger ist der Salzgehalt im Weissen Meer: erst in der Tiefe von 200 M. fand man hier den Salzgehalt über 30 ‰ (und zwar 30.08 ‰ und 30.05 ‰). Im offenen Teil dieses Meeres scheint der Salzgehalt der oberen Schichten im Winter ungefähr bis 28.6 ‰, vielleicht ein wenig mehr zu steigen, in der Tiefe von 50 M. beträgt der höchste beobachtete Salzgehalt 28.91 ‰, in der Tiefe von 100 M. 29.69 ‰, in der Tiefe von 150 M. 29.92 ‰ und in der Tiefe von 200 M. 30.08 ‰. Im Frühjahr und im Sommer ist der Salzgehalt der oberen Schichten kleiner, besonders an der Oberfläche während des Eisschmelzens. In der Tiefe von 10 M. beobachtete man im August 1900 die Salzgehalte von 25.95–26.17 ‰. Selbstverständlich ist der Salzgehalt an den Küsten niedriger und unterliegt hier grossen Schwankungen. Im Golf Kandalakskaja Guba (№ 19 in der Tabelle der Fundorte) beobachtete ich im Ende Juni und Juli 1895 an der Oberfläche Salzgehalte ungefähr von 14.36 bis 25.52 ‰, in der Tiefe von 36.6 M. (20 Faden) 25.52 bis 27.36 ‰, in der Tiefe von 54.9 M. (30 Faden) 26.05 und 27.89 ‰.

Wir sehen daher, dass *Enchelyopus viviparus* L. auch in Bezug auf Salzgehalt unter sehr verschiedenen Verhältnissen leben kann.

Die Art ist in unserem Untersuchungsgebiet ein echter Bewohner der Litoral- und Sublitoralzone, den man oft während der Ebbe in feuchten Schlupfwinkeln unter den Steinen findet. Der Fisch führt zusammen mit *Centronotus* s. *Pholis gunellus* (L.) ein gewissermassen amphibisches Leben. Die Fähigkeit sehr verschiedene Temperaturen und Salzgehalte zu ertragen ist für ein Litoraltier der gemässigten und kalten Zone sehr natürlich.

Der biologische Charakter des Fisches, als einer euryhalinen und eurythermen Art (wenn auch im Ganzen einer Warmwasserart) tritt besonders deutlich hervor, wenn wir in Betracht nehmen, dass *Enchelyopus viviparus* (L.) ein sehr grosses Gebiet mit mannigfaltigen

Existenzbedingungen bewohnt. Nach F. A. Smitt bewohnt die Art das Weisse Meer und die Murman-Küste, die ganze Strecke der skandinavischen Küsten vom Varanger-Fjord bis Torneå, die dänischen Küsten und die deutschen Küsten, die Küsten und Bänke der Nordsee, kommt selten nach Westen und Süden vom Englischen Canal vor, dringt aber nach Steindachner bis in die Nähe von Cadiz vor<sup>1)</sup>. Ich muss hinzufügen, dass die Art, erstens, wie erwähnt, auch im Golfe Tschesskaja Guba lebt, zweitens, dass wir dieselbe auch in den östlichsten Teilen des Finnischen Busens (in der Nähe von Kronstadt und an der Mündung der Newa) finden. Auch in süßes Wasser scheint die Art zuweilen vorzudringen<sup>2)</sup>.

Die Nahrung von *Enchelyopus viviparus* (L.) in unserem Untersuchungsgebiet besteht aus kleinen Fischen, Fischeiern (sehr viel Eier von *Cyclopterus lumpus* bei einem Exemplar von der Murman-Küste), Crustaceen, Mollusken und Larven und Puppen von den in der Litoralzone lebenden Dipteren (Chironomidae). Die Larven (resp. Puppen) von Dipteren fand ich bei Exemplaren von der Murman-Küste und aus dem Weissen Meer.

Über die Fortpflanzungszeit kann ich nur wenige mehr oder weniger genaue Angaben anführen, weil fast alle Exemplare aus dem Weissen Meer ohne Angaben über die Zeit des Fanges sind. Was die Exemplare von der Murman-Küste anbetrifft, so finden wir bei zwei am 3. VIII (21. VII) 1900 gefangenen grossen Weibchen (307.7 mm. und 237 mm.) stark entwickelte Eier, deren Durchmesser bei dem grösseren Exemplar (nach dem Aufbewahren in Spiritus) bis 3 mm. beträgt. Der Embryo ist schon ziemlich stark entwickelt. Bei einem am 25 (12) VII. 1901 gefangenen 299.5 mm. langen Weibchen zeigten die 76 Eier stark vorgeschrittene Entwicklung, die Embryonen waren fast bis 11 mm. lang und hatten pigmentierte Augen. Bei einem 201 mm. langen Weibchen aus dem Weissen Meer fand ich im Ovarium 36 ganz entwickelte Fischchen, deren Länge bis c. 37 mm. betrug (Angabe über die Zeit des Fanges fehlt).

Über junge Exemplare von der Murman-Küste besitzen wir folgendes Material:

|                        |                            |  |
|------------------------|----------------------------|--|
| Hafen Jekaterininskaja | 2. IX (21. VIII) 1898      | Länge 90.7 und 100.7 mm.                                     |
| »                      | » 21 (9) IX. 1898          | » 83 mm.   |
| »                      | » 24 (12) IX. 1898         | » 106.6 mm.  |
| »                      | » 20 (8) VIII. 1899        | » 81.5 mm.   |
| »                      | » 1. VII (18. VI) 1900     | » 61—64.3 mm und 85.3 mm.                                    |
| Bucht Tjuwa-Guba       | 11. I. 1901 (29. XII 1900) | » 42 mm.   |
| Bucht Srednjaja-Guba   | 20 (7) VII. 1901           | » 72—75½ mm. und 85 mm.                                      |
| »                      | » 8. VIII (26. VII) 1901   | » 77.7—81 mm. u. 86½ — 97½ mm.<br>(hauptsächlich 92—95 mm.). |
| »                      | » 17 (4) VIII. 1901        | » 62.5 mm. und 98 mm.  |

1) F. A. Smitt. Skandinavian Fishes. Part II. S. 607. | 2) Ebendasselbst.

Die wichtigste von diesen Angaben ist die Angabe über ein 42 mm. langes am 11. I. 1901 (29. XII. 1900) gefangenes Exemplar. Nach verschiedenen Beobachtungen kann man nämlich als festgestellt betrachten, dass die Brut von *Enchelyopus viviparus* (L.) ungefähr 40 mm. lang geboren wird. So hat Malm bei einem Weibchen am 17. XI gegen 300 vollständig ausgebildete Jungen von c. 40 mm. gefunden<sup>1)</sup>. Knut Dahl fand am 17. XI. 1898 im Ovarium eines Weibchens im Trondhjemsfjord 54 Junge ebenfalls von 40 mm., er bemerkt, dass diese Länge ungefähr mit der kleinsten Länge der im Freien gefundenen Exemplare zusammenfällt<sup>2)</sup>. Wir können daher annehmen, dass unser 42 mm. langes Exemplar vor kurzem, wahrscheinlich im Dezember geboren war.

Es entsteht jetzt die Frage, ob die Brut von *Enchelyopus viviparus* (L.) an der Murman-Küste nur ungefähr um diese Zeit, d. h. in den letzten Monaten des Jahres geboren wird.

W. Lilljeborg schreibt über die Fortpflanzungszeit dieses Fisches folgendes: «Er hat keine eigentliche Zeit des Laichens, sondern trüchtige Weibchen werden nach C. U. Ekström fast zu allen Jahreszeiten gefunden. Dieser Verfasser giebt indessen an, dass Weibchen mit vollständig entwickelten Jungen am öftesten im Dezember gefunden werden. Gissler giebt an, dass der Bauch der Weibchen im Oktober, November und Dezember von Jungen ausgedehnt ist und dass dieselben im Januar geboren werden. . . . Malm sagt, dass er am 17. November bei einem Weibchen gegen 300 vollständig ausgebildete Junge ungefähr von 40 mm. fand. Viele andere Weibchen waren nach ihm um diese Zeit in demselben Zustand der Trächtigkeit und dieser Umstand spricht im Wesentlichen der oben erwähnten Angabe Gisslers zu Gunsten, sowie auch der Angabe Malms, dass die Weibchen in der Regel die Jungen von der Mitte November bis zur Mitte Dezember gebären, wenn man auch nach Ekström zuweilen zu anderer Zeit Weibchen finden kann, welche fertig sind Junge zu gebären»<sup>3)</sup>. Für das Gebiet des Trondhjemsfjords nimmt Knut Dahl an, dass die Brut ungefähr im November geboren wird.

Nach den von dem letztgenannten Forscher ausgeführten Messungen erreichen die im November geborenen Jungen im nächsten Mai, also nach 6 Monaten eine Länge von c. 8 cm.; im Juli bis 13 cm.; im Mai des folgenden Jahres 13—18 cm. und im Juli 17—24 cm. Weniger deutlich sind die Wachstumsverhältnisse bei über 2 Jahre alten Individuen; die Exemplare von c. 30 cm. sollen zu der III Gruppe zugehören, d. h. über 3 Jahre alt sein<sup>4)</sup>.

Aus den Angaben von Knut Dahl können wir erschen, dass 6 Monate alte Exemplare c. 80 mm. lang sind, ungefähr 8 Monate alte — bis 130 mm., 18 Monate alte — 130—180 mm. (durchschnittlich ungefähr 160 mm.), 20 Monate alte — 170—240 mm. (durchschnittlich c. 210 mm.) u. s. w. Knut Dahl erwähnt, dass seine Resultate mit den von C. G. J. Petersen gut übereinstimmen.

1) W. Lilljeborg. Sveriges och Norges Fiskar. Bd. I. 1891. S. 559.

2) Knut Dahl. Beretning om fiskeriundersøgelser i

og om Trondhjemsfjorden 1898. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1898. № 10. 1899. S. 7.

3) W. Lilljeborg. l. c. S. 559—560.

4) Knut Dahl. l. c. 7—8 und Tabelle I.

Die von C. G. J. Petersen im Jahre 1890 im Holbaek-Fjord (Dänemark) ausgeführten Messungen gaben folgende Resultate, welche ich in kurzem Auszug folgen lasse<sup>1)</sup>:

I. Am 10—11. VII. 1890.

- a) 0-Gruppe (die im Jahre 1890 geborenen, nach Petersen ungefähr 6 Monate alten Exemplare)  $2\frac{1}{2}$  und  $3\frac{1}{4}$ — $4\frac{1}{2}$ , meist  $4''$  (dänisch) lang<sup>2)</sup> = c. 67 mm. und c. 85— $117\frac{1}{2}$ , meist c.  $104\frac{1}{2}$  mm.
- b) I-Gruppe (die im J. 1889 geborenen, c.  $1\frac{1}{2}$  Jahre alten Exemplare), die Weibchen  $5\frac{3}{4}$ — $8\frac{1}{4}$ , meist c.  $7'' = 150$ — $215\frac{1}{2}$ , meist c. 183 mm. lang, die Männchen  $5\frac{3}{4}$  und  $6\frac{1}{4}$ — $7\frac{3}{4}$ , meist  $6\frac{1}{4}$ — $6\frac{3}{4}'' = 150$  mm. und  $163$ — $202\frac{1}{2}$ , meist  $163$ — $176$  mm.
- c) II-Gruppe (die im J. 1888 geborenen, c.  $2\frac{1}{2}$  Jahre alten Exemplare), die Weibchen  $9\frac{1}{2}$ — $12\frac{1}{4}''$ , meist  $10\frac{3}{4}$ — $11\frac{1}{2}'' = c. 248$ — $322$  mm., meist  $280\frac{1}{2}$ — $300$  mm., die Männchen  $10$ — $11''$ , meist  $10\frac{1}{4}$ — $10\frac{1}{2}'' = 261$ — $287$ , meist  $266\frac{1}{2}$ — $274$  mm. Ausserdem werden einzelne Weibchen von  $8\frac{3}{4}$  und  $9'' = 228\frac{1}{2}$ — $235$  mm., und einzelne Männchen von  $8\frac{1}{2}$ — $9'' = 222$ — $235$  mm. beobachtet, sowie ältere Weibchen von  $12\frac{3}{4}$  und  $13\frac{1}{4}'' = 335$  und  $348$  mm. und ältere Männchen von  $11\frac{1}{2}$  und  $11\frac{3}{4}'' = 300$  und  $306.5$  mm.

Im Ganzen nimmt Dr. Petersen folgende durchschnittliche Dimensionen für verschiedene Gruppen an:

0-Gruppe ( $\frac{1}{2}$  Jahr alt) c.  $4'' = c. 104\frac{1}{2}$  mm.

I-Gruppe ( $1\frac{1}{2}$  Jahre alt) c.  $6$ — $8'' = c. 156\frac{1}{2}$ — $183$  mm.

II-Gruppe ( $2\frac{1}{2}$  Jahre alt) c.  $10$ — $12'' = c. 261$ — $315$  mm.

II. Am 22. X. 1890, also fast  $3\frac{1}{3}$  Monate später.

- a) 0-Gruppe (c.  $9\frac{1}{2}$  Monate alt)  $5$  und  $5\frac{1}{2}'' = 130.5$  und  $143.5$  mm.
- b) I-Gruppe (c.  $21\frac{1}{2}$  Monate alt)  $6$ — $10$ , meist  $8\frac{1}{2}'' = 156\frac{1}{2}$ — $261$ , meist c.  $222$  mm.
- c) II-Gruppe (c.  $33\frac{1}{2}$  Monate alt)  $10\frac{1}{2}$ — $11\frac{1}{2}$ , meist  $11$ — $11\frac{1}{2}'' = 274$ — $300$ , meist  $287$ — $300$  mm.

1) C. G. J. Petersen. Studier over Fiskenes Alder og Vaext, samt nogle dermed i Forbindelse staaede Spørgsmaal. Stockholm. 1892 (Separat-Abdruck).  
2)  $1''$  (dänisch) =  $26.1$  mm.

Wenn wir die Angaben von Knut Dahl und C. G. J. Petersen mit unseren oben angeführten Angaben über kleine Exemplare zusammenstellen, so können wir den Schluss ziehen, dass an der Murman-Küste die Brut von *Enchelyopus viviparus* (L.) wahrscheinlich in der Regel in letzten Monaten des Jahres geboren wird, zuweilen aber auch in anderen Monaten.

Wir finden z. B. gleichzeitig und zusammen am 1.VII(18.VI)1900 Exemplare von 61—64.3 mm. und von 85.3 mm., am 17(4)VIII.1901 Exemplare von 62.5 mm. und 98 mm. Ohne Zweifel gehören die Exemplare jedes Mal ein und derselben Jahres-Klasse an, sind aber zu verschiedener Zeit geboren, denn der Grössenunterschied scheint für rein-individuelle Schwankungen zu gross zu sein.

Das Wachstum von *Enchelyopus viviparus* (L.) scheint in unserem Untersuchungsgebiet fast ebenso schnell oder nur ein wenig langsamer, als in Norwegen vor sich zu gehen. Da nun die Geschlechtsreife bei der Totallänge von c. 160—170 mm. eintritt, so können wir den Schluss ziehen, dass der Fisch sich im zweiten Jahre des Lebens fortpflanzen kann.



Tabelle der Messungen von *Em*

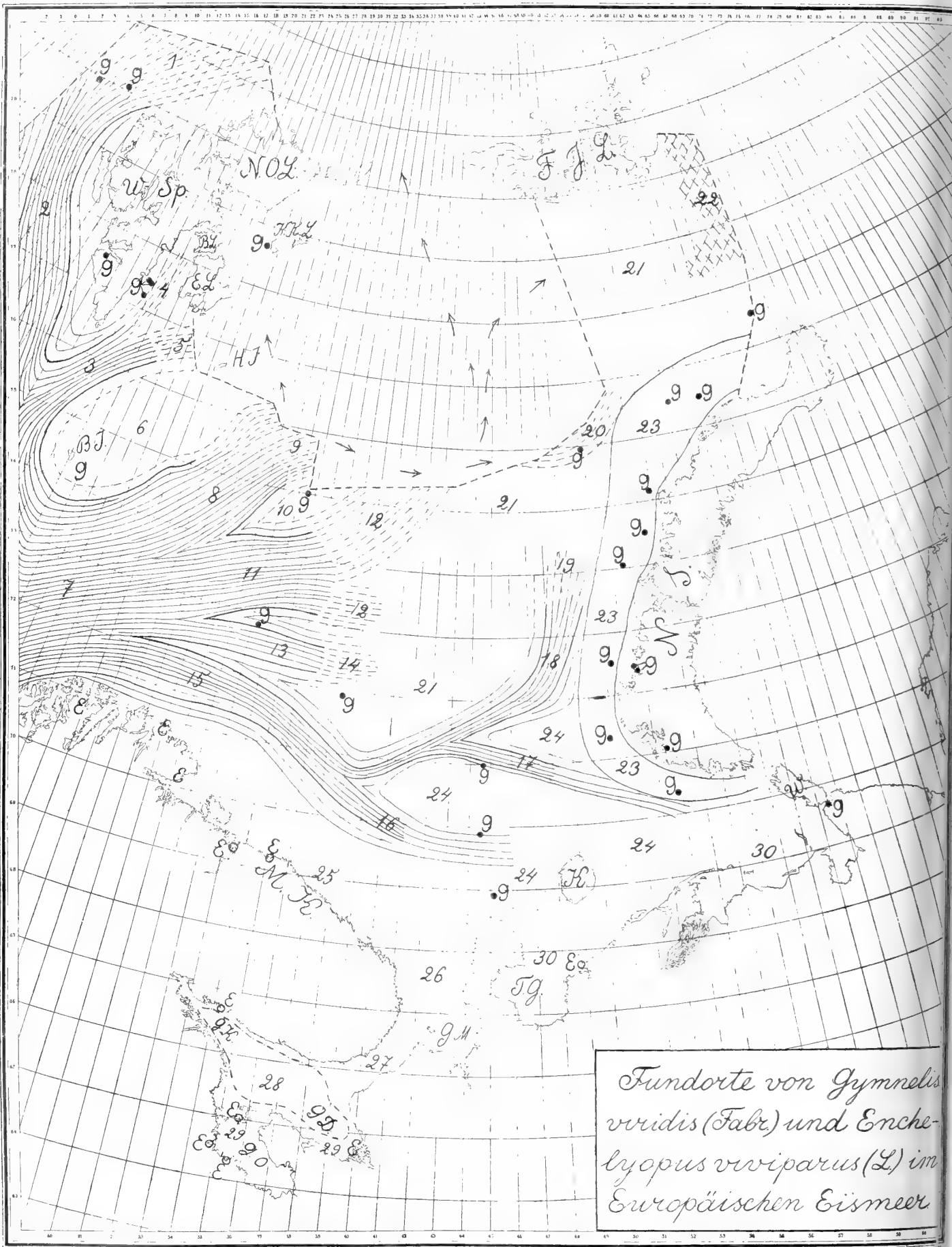
| Verbreitungs-Gebiet.                              | M u r |       |       |       |      |              |
|---|-------|-------|-------|-------|------|--------------|
| N <sup>o</sup> des Exemplars . . . . .            | 1     | 2     | 3     | 4     | 5    | 6            |
| N <sup>o</sup> in d. Tabelle d. Fundorte. . . . . | 8     | 11    | 2     | 8     | 1    | 5            |
| Totallänge in mm. . . . .                         | 307.7 | 299.5 | 241   | 237   | 113  | 106.6        |
| Kopflänge in % der Totallänge. . . . .            | 18.6  | 18.4  | 17.5  | 17.7  | 15.4 | 16.4         |
| Länge bis Anfang <i>D</i> in % . . . . .          | 16.8  | 15.4  | 15.6  | 16.1  | 14.8 | 14.9         |
| » » » <i>A</i> in % . . . . .                     | 42.7  | 42.3  | 38.6  | 38.8  | 36.4 | 37.1         |
| Länge bis anus in % . . . . .                     | 41.1  | 41.0  | 36.7  | 36.8  | 34.8 | 35.5         |
| Schwanzlänge vom Anfang <i>A</i> in % . . . . .   | 57.3  | 57.7  | 61.4  | 61.2  | 63.6 | 62.9         |
| Maximale Höhe in % . . . . .                      | 12.7  | 13.0  | 11.6  | 11.1  | 10.2 | 10.6         |
| Höhe am Anfang <i>A</i> in % . . . . .            | 10.8  | 11.2  | 10.4  | 9.3   | 9.0  | 9.7          |
| Länge von <i>P</i> in % . . . . .                 | 11.9  | 12.9  | 12.8  | 13.5  | 12.9 | 13.2         |
| Geschlecht . . . . .                              | ♀     | ♀     | ♂     | ♀     | —    | ♀            |
| Entwicklungszust. d. Geschlechtsorg.              | stark | stark | stark | stark | —    | sehr schwach |
| Anzahl der Strahlen in <i>D</i> . . . . .         | —     | —     | —     | —     | —    | 80+10+25     |
| » » » » <i>C</i> . . . . .                        | —     | —     | —     | —     | —    | 11           |
| » » » » <i>A</i> . . . . .                        | —     | —     | —     | —     | —    | 95           |
| » » » » <i>P</i> . . . . .                        | 20—19 | 18—18 | 19—19 | 19—19 | —    | 19—20        |

| Verbreitungs-Gebiet.                     | W e i    |         |            |       |       |         |         |         |  |
|--|----------|---------|------------|-------|-------|---------|---------|---------|--|
| N <sup>o</sup> des Exemplars . . . . .   | 18       | 19      | 20         | 21    | 22    | 23      | 24      | 25      |  |
| N <sup>o</sup> in d. Tabelle d. Fundorte | 18       | 24      | 20         | 23    | 23    | 17      | 17      | 24      |  |
| Totallänge in mm. . . . .                | 318.5    | 290.5   | c. 252 1/2 | 215.5 | 206   | 201     | 194     | 184.2   |  |
| Kopflänge in % d. Totall.                | 18.2     | 18.9    | —          | 16.9  | 17.6  | 17.7    | 17.7    | 17.9    |  |
| Länge bis Anf. <i>D</i> in %             | 16.0     | 16.5    | —          | 15.2  | 15.6  | 15.6    | 16.8    | 16.0    |  |
| Länge bis Anf. <i>A</i> in %             | 40.9     | 39.0    | —          | 39.4  | 38.7  | 39.9    | 40.1    | 39.5    |  |
| » bis anus in % . . . . .                | 38.4     | 36.7    | —          | 38.7  | 36.6  | 38.8    | 39.0    | 37.7    |  |
| Schwanzl. vom Anf. <i>A</i> in %         | 59.1     | 61.0    | —          | 60.6  | 61.3  | 60.1    | 59.9    | 60.5    |  |
| Maximale Höhe in % . . . . .             | —        | 10.7(?) | —          | 10.3  | 12.0  | c. 12.9 | c. 12   | 11.9    |  |
| Höhe am Anfang <i>A</i> in %             | 8.0      | 9.2     | —          | 9.3   | 9.6   | 9.0     | 9.1     | 9.2     |  |
| Länge von <i>P</i> in % . . . . .        | 13.2     | 12.7    | —          | 12.3  | 13.2  | 12.3    | 13.4    | 13.5    |  |
| Geschlecht . . . . .                     | ♀        | ♀       | —          | ♀     | ♂     | ♀       | ♀       | ♂       |  |
| Entw. d. Geschlechtsorg.                 | stark    | schwach | —          | stark | stark | stark   | stark   | schwach |  |
| Anzahl d. Strahlen in <i>D</i> .         | 80+11+27 | —       | 79+10+22   | —     | —     | —       | 81+9+25 | —       |  |
| » » » » <i>C</i> .                       | 11       | —       | 13         | —     | —     | —       | 11      | —       |  |
| » » » » <i>A</i> .                       | 90       | —       | 93         | —     | —     | —       | 92      | —       |  |
| » » » » <i>P</i> .                       | 19—19    | 18—18   | 19—19      | —     | —     | —       | 20—19   | 19—19   |  |

*viviparus* (L).

| e.           |          |              |       |      |         |             |          | Tscheschkaja Guba. |
|--------------|----------|--------------|-------|------|---------|-------------|----------|--------------------|
| 9            | 10       | 11           | 12    | 13   | 14      | 15          | 16       | 17                 |
| 12           | 12       | 3            | 6     | 12   | 10      | 13          | 9        | 14                 |
| 95.4         | 93.8     | 90.7         | 81.5  | 77.7 | 73.8    | 62.5        | 42       | 98.4               |
| 15.9         | 15.5     | 15.9         | 15.6  | 16.3 | 15.9    | 16.2        | 17.4     | 15.2               |
| 14.9         | 13.9     | 15.0         | 15.2  | 15.3 | 15.0    | 15.7        | 16.2     | 14.6               |
| 34.2         | 34.6     | 35.6         | 35.8  | 36.4 | 36.0    | 36.8        | 36.7     | 36.2               |
| 33.2         | 34.2     | 34.8         | 35.3  | 35.1 | 35.0    | 35.7        | 35.7     | 35.2               |
| 65.8         | 65.4     | 64.4         | 64.2  | 63.6 | 64.0    | 63.2        | 63.3     | 63.8               |
| 11.1         | 9.6      | 10.8         | 9.8   | 10.9 | 9.3     | 9.4         | 10.5     | 10.8               |
| 9.4          | 8.5      | 9.6          | 8.2   | 9.3  | 8.7     | 8.2         | 7.9      | 9.2                |
| 13.1         | 13.0     | 13.6         | 13.5  | 13.8 | 13.4    | 14.2        | 14.3     | 13.7               |
| ♀            | —        | ♂            | —     | —    | —       | —           | —        | ♀                  |
| sehr schwach | —        | sehr schwach | —     | —    | —       | —           | —        | sehr schwach       |
| 79+10+27     | 82+11+25 | 83+8+25      | —     | —    | 79+9+25 | c. 79+10+25 | 80+10+24 | —                  |
| 11           | 12       | 10           | —     | —    | 10      | 10          | 10       | —                  |
| 94           | 92       | 88           | —     | —    | 89      | c. 85       | 85       | —                  |
| 19—19        | 19—19    | 19—19        | 19—19 | —    | 19—19   | 19—19       | 19—19    | 18—19              |

|       |         |        |            |       |      |       |      |      |      |
|-------|---------|--------|------------|-------|------|-------|------|------|------|
| 28    | 29      | 30     | 31         | 32    | 33   | 34    | 35   | 36   | 37   |
| 23    | 19      | 23     | 24         | 21    | 15   | 15    | 15   | 15   | 24   |
| 176   | 156.5   | 148.5  | 132.8      | 103.5 | 91   | 84.2  | 81.2 | 80.9 | 55   |
| 16.2  | 16.0    | 15.4   | 17.9       | 15.4  | 15.7 | 15.9  | 16.5 | 16.2 | 16.7 |
| 14.8  | 15.5    | 14.5   | 16.0       | 14.2  | 15.4 | 15.3  | 16.0 | 15.7 | 15.8 |
| 36.4  | 36.4    | 36.6   | 36.7       | 36.2  | 37.1 | 36.2  | 36.8 | 36.5 | 36.4 |
| —     | 35.0    | 35.4   | 35.5       | 34.5  | 35.6 | 34.8  | 35.2 | 35.1 | 34.7 |
| 63.6  | 63.6    | 63.4   | 63.3       | 63.8  | 62.9 | 63.8  | 63.2 | 63.5 | 63.6 |
| —     | 9.9     | 9.4    | 10.4       | 8.4   | —    | 10.8? | —    | —    | 9.6  |
| 9.1   | 8.8     | 8.6    | 9.5        | 7.6   | 9.2  | 9.1   | 9.1  | 9.1  | 8.0  |
| 13.0  | 13.4    | 12.5   | 14.9       | 13.0  | 13.1 | 12.6  | 14.0 | 14.0 | 14.7 |
| ♂     | ♂       | ♀      | ♂          | —     | —    | —     | —    | —    | —    |
| stark | schwach | mässig | mässig     | —     | —    | —     | —    | —    | —    |
| —     | —       | —      | c. 79+8+25 | —     | —    | —     | —    | —    | —    |
| —     | —       | —      | c. 10—11   | —     | —    | —     | —    | —    | —    |
| —     | —       | —      | c. 90      | —     | —    | —     | —    | —    | —    |
| —     | —       | —      | 19—19      | —     | —    | —     | —    | —    | —    |



## Erklärung der Karte „Verbreitung von *Gymnelis viridis* (Fabr.) und *Enchelyopus viviparus* (L.) im Europäischen Eismeer“.

Mit kontinuierlichen Linien werden die Zweige des Golfstroms bezeichnet, und zwar diejenigen Teile dieser Strömung, wo dieselbe mindestens im Sommer (Juli—August), in der Regel im Laufe des ganzen Jahres, bis zur Oberfläche des Meeres reicht; im Bereiche der Zweige selbst sind diese Linien dicht geführt, im Rand-Gebiet in grösseren Entfernungen von einander. Die Fortsetzungen des Golfstroms unter kalten Deckschichten, wo das Golfstromwasser noch eine Temperatur über  $0^{\circ}$  hat, sind mit durchbrochenen Strichen bezeichnet. Weitere Fortsetzungen der Zweige des Golfstroms, wo das Wasser eine Temperatur unter  $0^{\circ}$  hat, sind auf der Karte nicht gezeichnet. Mit zwei Systemen von durchbrochenen Strichen ist eine Bucht des Nord-Polar-Bassins zwischen Nowaja Semlja und Franz Josephs Land bezeichnet.

Die Pfeile zeigen die vermutliche Richtung der Golfstromzweige ausserhalb des Gebiets an, in dem genügende direkte Beobachtungen vorhanden sind. Mit groben durchbrochenen Strichen sind die Grenzen des Untersuchungs-Gebiets bezeichnet.

- 1) Die Fortsetzung des West-Spitzbergischen Golfstroms im Nord-Polar-Bassin als Unterstrom.
- 2) Der Westspitzbergische Golfstrom.
- 3) Der Südspitzbergische Golfstrom.
- 4) Die Fortsetzung des Südspitzbergischen Golfstroms in den Stor-Fjord.
- 5) Die Fortsetzung desselben nach Osten.
- 6) Die Flachsee des Gebiets von der Bären-Insel (B. I.) und der Hoffnungs-Insel (H. I.) mit relativ kaltem und salzarmem Wasser.
- 7) Der Nordkapstrom.
- 8) Der nördliche (vierte) Zweig des Nordkapstroms.
- 9) Die Fortsetzung des nördlichen Zweiges als Unterstrom.
- 10) Das kalte Gebiet zwischen dem vierten und dem dritten Zweig des Nordkapstroms.
- 11) Der dritte Zweig des Nordkapstroms.
- 12) Die Fortsetzung des dritten Zweiges als Unterströme.
- 13) Der zweite Zweig des Nordkapstroms.
- 14) Die Fortsetzung des zweiten Zweiges als Unterstrom.
- 15) Der südliche (erste) Zweig des Nordkapstroms oder die Murman-Strömung.
- 16) Der erste Nebenzweig der Murman-Strömung oder die Kanin-Strömung.
- 17) Der zweite Nebenzweig der Murman-Strömung oder die Kolgudjew-Nowaja Semlja-Strömung.
- 18) Die Fortsetzung der Murman-Strömung an der Westküste von Nowaja Semlja oder Warme Nowaja-Semlja-Strömung; der Boden ist hier schon mit kaltem Wasser (mit Temperaturen unter  $0^{\circ}$ ) bedeckt.

- 19) Die Fortsetzung der Warmen Nowaja-Semlja-Strömung als Unterstrom.
- 20) Die Fortsetzung der nördlichen Zweige des Nordkapstroms als Unterstrom.
- 21) Das Kalte Nördliche Gebiet, in welches auch das abgekühlte Wasser der Zweige des Nordkapstroms sich ergießt.
- 22) Die Bucht des Nord-Polar-Bassins zwischen Nowaja Semlja und Franz Josephs Land (mit Temperatur über 0° am Boden).
- 23) Die Kalte salzreiche Bodenströmung an den Westküsten von Nowaja Semlja.
- 24) Das Kalte Gebiet der Flachsee des südöstlichen Teils des Europäischen Eismeer.
- 25) Das Küsten-Gebiet an der Murman-Küste.
- 26) Der breite Teil («Trichter») des Eingangs in das Weisse Meer.
- 27) Der Eingang in das Weisse Meer.
- 28) Das Kalte Gebiet des Weissen Meeres mit sehr niedrigen Temperaturen am Boden während des ganzen Jahres.
- 29) Das Warme Gebiet des Weissen Meeres mit relativ sehr hoher Temperatur am Boden im Sommer und sehr niedriger im Winter.
- 30) Das Warme Gebiet (oder Küsten-Gebiet) der Flachsee des südöstlichen Teils des Europäischen Eismeer.

G — Fundorte von *Gymnelis viridis* (Fabr.).

E — Fundorte von *Enchelyopus* s. *Zoarces viviparus* (L.).

W. Sp. — West-Spitzbergen.

N. O. L. — Nord-Ost-Land.

B. L. — Barents-Land.

E. L. — Edge-Land.

B. I. — Bären-Insel.

H. I. — Hoffnungs-Insel.

K. K. L. — König Karls-Land.

M. K. — Murman-Küste.

G. M. — Golf von Mesenj.

G. K. — Golf von Kandalakscha.

G. O. — Golf von Onega.

G. D. — Golf von Dwina.

T. G. — Tschesskaja oder Tscheschskaja Guba.

K. — Kolgudjew.

W. — Waigatsch.

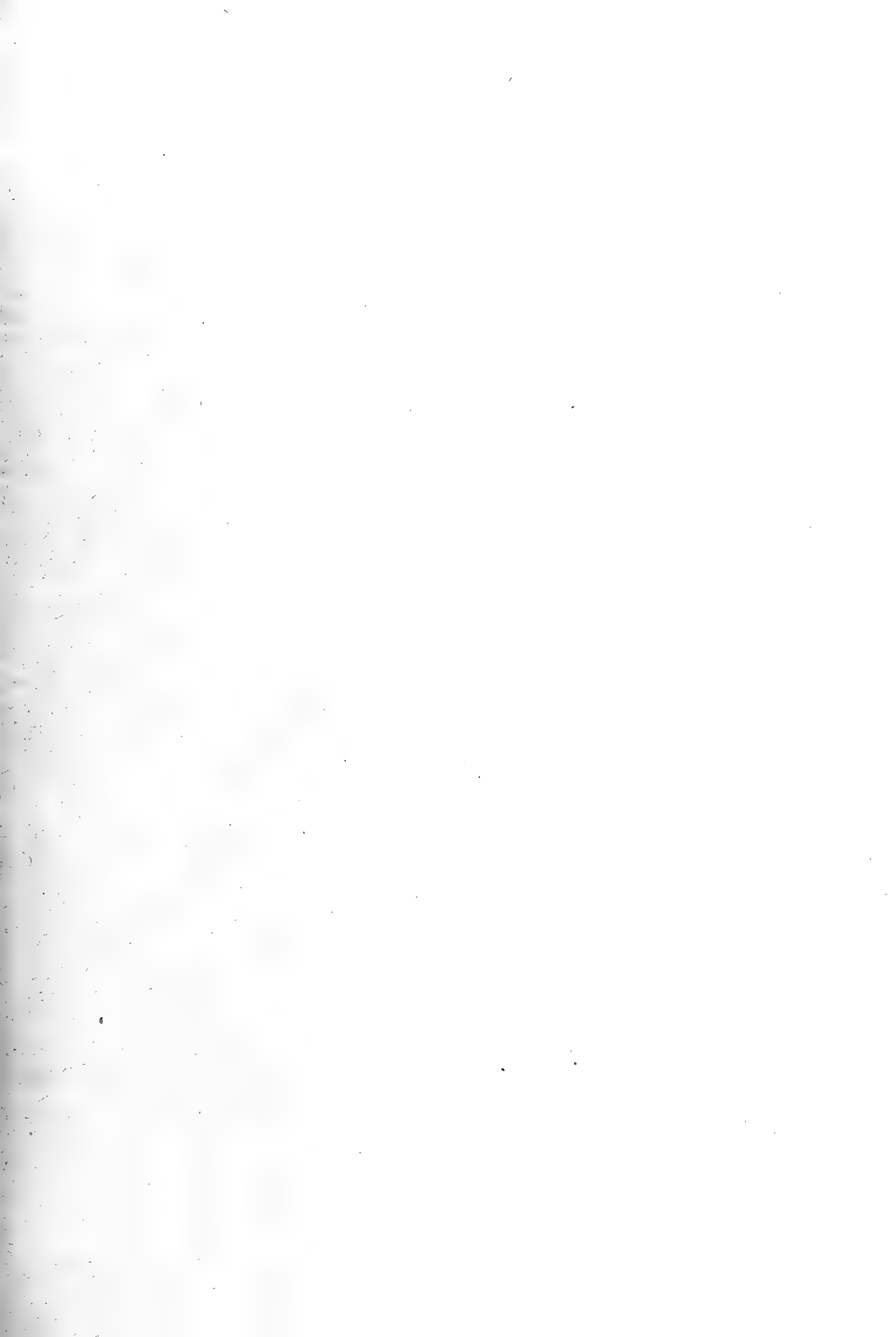
N. S. — Nowaja Semlja.

F. J. L. — Franz Josephs Land.

---

PRESENTED

16 NOV. 1908



Цѣна: 50 к.; Prix: 1 Mrk. 10 Pf.

Продається у комиссіонерівъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и К. Л. Ринкера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петербург., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Ключина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Ниммея въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзанѣ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasouf et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Ogiobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kymmel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sörgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

8 JUN. 1916

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**  
**MÉMOIRES**  
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG.  
**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 5.**

**Volume XXII. № 5.**

**PROBLÈME DE MINIMUM**

DANS UNE QUESTION DE STABILITÉ

**DES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION.**

PAR

**A. Liapounoff.**

(*A. Liapunov*).

(Lu le 2 octobre 1907).



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**





**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 5.**

**Volume XXII. № 5.**

---

# PROBLÈME DE MINIMUM

DANS UNE QUESTION DE STABILITÉ

**DES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION.**

PAR

**A. Liapounoff.**

*(A. Liapunov).*

*(Lu le 2 octobre 1907).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**

Mars 1908.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des Sciences.

*S. d'Oldenburg*, Secrétaire perpétuel.

## TABLE DES MATIÈRES.

---

|  | <i>Pages:</i> |
|--|---------------|
| Introduction.....  | 1             |
| I. — Notations et suppositions .....                           | 6             |
| II. — Recherche de l'accroissement réduit .....                | 22            |
| III. — Démonstration d'une proposition auxiliaire .....        | 41            |
| IV. — Application de la proposition précédente .....           | 50            |
| V. — Étude des cas ordinaires .....                            | 60            |
| VI. — L'accroissement restreint dans les cas singuliers .....  | 77            |
| VII. — Examen des cas singuliers .....                         | 104           |
| VIII. — Examen des figures d'équilibre non ellipsoïdales ..... | 123           |
| IX. — Conclusions sur la stabilité .....                       | 132           |

---

## ERRATA.

---

| Pages. | Lignes.  | <i>Au lieu de:</i>                  | <i>Lisez:</i>                   |
|--------|----------|-------------------------------------|---------------------------------|
| 88     | dernière | l'ellipsoïde E.                     | l'ellipsoïde E.                 |
| 112    | dernière | $+ [F_2(0) - c] \varepsilon^2 = 0,$ | $+ [F_2(0) - c] \varepsilon^2,$ |
| 118    | 15       | complètement,                       | complètement,                   |

---

# PROBLÈME DE MINIMUM

DANS UNE QUESTION DE STABILITÉ

DES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION.

---

## INTRODUCTION.

Dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation* \*), j'ai recherché, en partant du principe de minimum de l'énergie, les conditions de la stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi.

D'après ce principe la question se réduit à reconnaître si le mouvement de rotation, qui convient à la figure d'équilibre considérée, correspond à un minimum de l'énergie totale, en supposant que ce mouvement soit comparé à d'autres mouvements du liquide, ayant lieu sous l'action des mêmes forces (qui sont ici les attractions newtoniennes entre les éléments) et correspondant à la même valeur du moment des quantités de mouvement, ce moment étant rapporté au centre de gravité.

J'ai montré que, pour un liquide incompressible et homogène, ce qui est ici le cas, le problème ainsi posé est équivalent à un autre, qui est exempt de toute considération mécanique et qui consiste dans la recherche des conditions de minimum d'une certaine expression dépendant de la figure de la masse fluide, cette figure ayant un volume donné.

Soient:  $d\tau$  et  $d\tau'$  les éléments de volume,  $r$  leur distance mutuelle et  $S$  le moment d'inertie du volume du liquide par rapport à un axe de direction fixe passant par le centre de gravité. Alors l'expression dont il s'agit pourra s'écrire ainsi:

$$II = \frac{M}{S} - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\tau d\tau'}{r},$$

où  $M$  est une constante *positive* que l'on doit supposer avoir une valeur donnée, et où les deux intégrations indiquées s'étendent, chacune, au volume occupé par le liquide.

---

\*) Ce Mémoire, paru en russe en 1884, est traduit en français par M. Davaux en 1904. La traduction est insérée aux *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, tome VI.

En annulant la variation de  $\Pi$  sous la condition d'invariabilité de volume, on arrive à une des figures d'équilibre que peut affecter une masse liquide en rotation sous l'action des attractions newtoniennes entre ses éléments. Cette figure aura pour axe de rotation l'axe du moment d'inertie  $S$ , et la vitesse angulaire correspondante  $\omega$  sera donnée par la formule

$$\omega = \frac{\sqrt{2\pi f k M}}{S},$$

où  $k$  désigne la densité du liquide et  $f$  la constante de la gravitation universelle.

Comme le produit  $\omega S k$  représente le moment des quantités de mouvement qui correspond à cette figure d'équilibre, on voit que, ce moment étant désigné par  $J$ , il viendra

$$M = \frac{J^2}{2\pi f k^3}.$$

Si l'on veut examiner la stabilité d'une figure d'équilibre donnée, on aura par cette formule la valeur correspondante de  $M$  et, ayant ainsi fixé cette constante, on examinera si  $\Pi$  atteint un minimum pour la figure dont il s'agit.

C'est de cette manière que j'ai étudié la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre.

Mais, en ramenant ainsi la question à un problème de minimum, je n'ai pas donné, pour ce dernier, une solution assez satisfaisante.

Tout d'abord, cette solution n'était pas assez complète.

En effet, je m'occupais principalement des cas *ordinaires*, où l'on parvient à une conclusion décisive en se bornant à l'examen de la variation seconde de  $\Pi$ . Mais il y a des cas, que l'on peut appeler *singuliers*, où une pareille recherche ne suffit pas, et où l'on doit faire une étude plus approfondie de l'accroissement de  $\Pi$ .

Quand la déformation de la figure du liquide n'est assujettie à aucune condition spéciale, on rencontre deux cas de cette espèce, dont l'un est celui de l'ellipsoïde de révolution appartenant à la série des ellipsoïdes de Jacobi et l'autre est le cas de l'ellipsoïde de Jacobi par lequel on passe à ces figures d'équilibre non ellipsoïdales que M. Poincaré a appelées pyriformes.

En parlant d'un *minimum conditionnel* et en assujettissant, par suite, la déformation à certaines conditions, on rencontre encore d'autres cas de la même espèce.

De pareils cas demandent des recherches spéciales, pour lesquelles je n'ai donné dans le Mémoire cité aucune méthode générale; car tout ce qu'on y trouve à ce sujet se réduit à un exemple relatif au cas de l'ellipsoïde de révolution par lequel on entre dans la série des ellipsoïdes de Jacobi.

D'autre part, et c'est un défaut beaucoup plus grave, les conclusions que j'ai tirées de la considération de la variation seconde de  $\Pi$  n'avaient pas de fondement assez solide.

Le problème se complique ici par ce fait que,  $M$  n'étant pas nul, on ne peut pas parler

d'un *minimum absolu* de  $\Pi$ , en entendant par là la plus petite *parmi toutes les valeurs* possibles de  $\Pi$ .

En effet, quelle que soit la figure considérée, on peut toujours, en la déformant convenablement, augmenter le moment d'inertie  $S$  d'une quantité aussi grande qu'on veut en ne variant l'intégrale

$$\iint \frac{d\tau d\tau'}{r}$$

que d'une quantité aussi petite qu'on veut. On pourra donc toujours diminuer  $\Pi$ , et sa limite inférieure précise ne sera atteinte pour aucune figure du liquide\*).

Par suite, il ne peut être question que d'un *minimum relatif* de  $\Pi$ , c'est à dire, que d'un minimum vis-à-vis des valeurs que prend  $\Pi$  pour des figures suffisamment peu différentes de la figure d'équilibre.

Or, s'il en est ainsi, on doit d'abord préciser ce qu'on veut entendre par de pareilles figures; et je l'ai fait, en introduisant une certaine longueur que j'ai appelée *l'écart* entre la surface de la figure considérée et celle de la figure d'équilibre, et en exigeant que cette longueur soit assez petite.

Je vais rappeler ce que j'ai entendu par cet élément.

Soient:  $F_0$  la figure d'équilibre considérée et  $F$  une figure de même volume, à laquelle on veut comparer la figure d'équilibre.

On peut admettre que ces deux figures aient pour centre de gravité un seul et même point; car, d'une part, le centre de gravité, pour toutes les figures considérées, doit être situé sur une droite donnée servant de l'axe du moment d'inertie  $S$  et, d'autre part, en imprimant à la figure  $F$  un déplacement de translation parallèlement à cet axe, on ne changera pas la valeur de  $\Pi$ .

Cela posé, considérons un point  $P$  de la surface de  $F$  et désignons par  $P_0$  un point de la surface de  $F_0$  qui est le plus proche de  $P$ .

Quand on variera la position du point  $P$  et, par suite, aussi celle du point  $P_0$ , la distance  $PP_0$  variera et, pour une certaine position du point  $P$ , deviendra la plus grande possible.

C'est ce maximum de  $PP_0$  que j'ai appelé *l'écart* dans le cas où  $F_0$  est une figure de révolution autour de l'axe du moment d'inertie  $S$ .

Quant au cas où  $F_0$  n'est pas une telle figure, auquel cas le maximum de  $PP_0$  peut varier quand on fait tourner la figure  $F$  autour de l'axe du moment d'inertie  $S$ , j'ai pris pour mesure de l'écart la plus petite valeur que ce maximum peut alors atteindre, en fai-

---

\*) En effet, dans le cas de cette limite inférieure,  $S$  doit être infini et, en même temps, l'intégrale ci-dessus doit atteindre sa limite supérieure précise pour un volume donné. Or, j'ai établi ailleurs que cette limite supérieure ne peut correspondre à aucune figure autre que la sphère.



sant ainsi abstraction des changements produits par des rotations autour dudit axe, comme on le doit d'après la nature du problème.

Ayant ainsi défini l'écart et en le désignant par  $\epsilon$ , j'ai admis, comme une propriété caractéristique de minimum, l'existence d'un nombre  $E$  ne dépendant que de la figure d'équilibre considérée et tel que l'accroissement de  $\Pi$  dans le passage de  $F_0$  à  $F$  soit positif, toutes les fois que  $\epsilon < E$ .

Or, en même temps, j'ai admis qu'il y a un minimum, si la variation seconde de  $\Pi$  reste toujours positive en ne s'annulant que pour  $\epsilon = 0$ ; ce qui était, en réalité, une proposition qu'il fallait démontrer. J'ai introduit donc par là une sorte de postulat.

Je crois devoir m'arrêter un moment sur ce point.

Supposons que la figure  $F$  est susceptible de se déformer suivant une loi donnée, permettant de rendre  $\epsilon$  aussi petit qu'on veut et telle que,  $\epsilon$  étant fixé, cette figure devient parfaitement déterminée.

On peut alors considérer l'accroissement  $\Delta\Pi$  de  $\Pi$  dans le passage de  $F_0$  à  $F$  comme une fonction de  $\epsilon$ , et j'ai établi dans mon Mémoire cité que l'on aura une égalité de la forme

$$\Delta\Pi = a\epsilon^2 + b\epsilon^{2+\frac{1}{3}},$$

où  $a$  est un nombre indépendant de  $\epsilon$  et  $b$  est une fonction de  $\epsilon$  dont la valeur absolue ne dépasse pas une certaine limite, que l'on peut assigner indépendamment de la loi d'après laquelle la figure  $F$  doit se déformer\*).

Supposons maintenant que l'on se trouve dans le cas où  $a$  n'est jamais nul et où ce nombre reste positif, quelle que soit la loi de la déformation de  $F$ .

C'est précisément le cas où la variation seconde  $\delta^2\Pi$  de  $\Pi$  est toujours positive en ne s'annulant que si  $\epsilon = 0$ , puisque

$$\delta^2\Pi = 2a\epsilon^2.$$

Alors, pour toute loi *donnée* de la déformation, on pourra assigner à  $\epsilon$  une limite supérieure  $E'$ , telle qu'on ait  $\Delta\Pi > 0$ , dès que  $\epsilon < E'$ ; et c'est tout ce qu'on peut affirmer.

Or cette conclusion est bien différente de celle qui permettrait, d'après la définition admise, de conclure à l'existence d'un minimum. En effet, la limite  $E$ , qui figure dans cette définition, ne dépend d'aucune loi de déformation, tandis que la limite  $E'$  ne peut être évaluée qu'en admettant une loi déterminée.

C'est seulement si l'on pouvait assigner à  $a$  une limite inférieure positive fixe que l'on pourrait donner à  $E'$  une valeur indépendante de toute loi admise. Mais il n'en est pas ainsi, car, bien que  $a$  ne puisse jamais s'annuler, on peut toujours imaginer une loi de déforma-

---

\*) Dans le présent Mémoire on verra que l'exposant  $2 + \frac{1}{3}$  peut être remplacé par 3, de sorte que le terme complémentaire sera, au moins, du troisième ordre par rapport à  $\epsilon$ .

tion telle que ce nombre soit aussi petit qu'on veut. On ne pourra donc assigner à  $a$  aucune autre limite inférieure que zéro.

Outre le postulat qui vient d'être indiqué, j'en ai admis dans mon Mémoire encore un autre, dont je m'étais servi non pas dans la recherche des conditions de minimum, mais dans la démonstration d'un théorème à l'appui des conclusions sur la stabilité.

Pour énoncer ce postulat, je dois d'abord rappeler la signification d'un terme que j'ai employé.

Soit  $F'$  la partie de la figure  $F$  située à l'extérieur de la surface de la figure  $F_0$ . Quand on fera tourner la figure  $F$  autour de l'axe du moment d'inertie  $S$ , le volume de  $F'$ , si  $F_0$  n'est pas une figure de révolution, variera en général, et la plus petite valeur que ce volume pourra ainsi atteindre représente ce que j'ai appelé la *dévi*ation de la figure  $F$  à partir de la figure  $F_0$ .

Cela posé, j'ai admis que, dans le cas de minimum, si l'on considère l'ensemble des figures  $F$ , pour lesquelles l'écart est au-dessous d'un nombre assez petit et la déviation a une valeur donnée non nulle, l'accroissement  $\Delta\Pi$ , tout en restant positif, aura pour limite inférieure précise un nombre différent de zéro.

Or il est évident que c'est une proposition qui n'est pas de nature à pouvoir être admise sans démonstration.

Par ce que j'ai dit, on voit que mon analyse a laissé beaucoup à désirer et qu'elle demande à être complétée sous bien des rapports.

C'est ce qui m'a engagé à reprendre le problème, que je me propose de présenter maintenant sous un nouveau jour.

Je ferai voir que le problème de minimum de  $\Pi$  pour les figures ellipsoïdales est susceptible d'une solution complète et rigoureuse dans des suppositions les plus générales.

Je commencerai pour cela par quelques recherches préliminaires, qui permettront de présenter l'accroissement  $\Delta\Pi$  sous une telle forme que l'exactitude des deux postulats dont j'ai parlé plus haut en résultera immédiatement.

De cette façon les conclusions que j'ai tirées de la considération de la variation seconde de  $\Pi$  seront pleinement justifiées.

Je développerai ensuite une méthode générale pour résoudre le problème dans les cas singuliers où la variation seconde ne suffit pas.

Dans ces cas le problème a un lien intime avec celui que je viens d'étudier dans mon dernier Mémoire, consacré aux figures d'équilibre non ellipsoïdales qui dérivent des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi\*); et c'est seulement grâce aux résultats acquis dans ce Mémoire que j'ai pu aborder le problème de minimum dans les cas dont il s'agit.

Je traiterai enfin le problème de minimum pour le cas des figures d'équilibre que je

---

\*) Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, première Partie. — Édition de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg, 1906.

viens de mentionner et, ne considérant ces figures que tant qu'elles sont suffisamment peu différentes des ellipsoïdes, je montrerai que le problème se réduit, conformément à un principe de M. Poincaré, à l'examen du moment des quantités de mouvement qui correspond à la figure d'équilibre envisagée. Ainsi ce principe sera établi en toute rigueur.

Je terminerai cette étude par quelques remarques relatives aux conclusions sur la stabilité que l'on tire du principe de minimum de l'énergie.

Dans ce qui suit, je ferai de fréquents renvois à mon dernier Mémoire, que je citerai, pour abrégé le langage, sous le titre «*Sur les figures d'équilibre*».

Quand j'aurai l'occasion de renvoyer à mon ancien Mémoire dont j'ai parlé plus haut, je sous-entendrai toujours qu'il s'agit de la traduction française, où quelques erreurs de calcul qui s'étaient glissées dans l'original russe sont corrigées.

---

#### I. — NOTATIONS ET SUPPOSITIONS.

1. En supposant que toutes les figures que nous aurons à considérer aient, pour centre de gravité, un seul et même point, nous prendrons ce point pour origine des coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ . Nous supposerons d'ailleurs que l'axe des  $z$  est celui par rapport auquel doit être pris le moment d'inertie  $S$ , figurant dans l'expression de  $\Pi$ . Pour une figure d'équilibre, cet axe sera donc l'axe de rotation.

Cela posé, soit  $E$  un ellipsoïde de Maclaurin ou de Jacobi que l'on veut examiner, et dont les demi-axes, en fixant convenablement l'unité de longueur, nous désignerons par

$$\sqrt{\rho+1}, \quad \sqrt{\rho+q}, \quad \sqrt{\rho},$$

$q$  étant un nombre positif égal ou inférieur à 1.

En tenant compte de ce que le petit axe, qui servira de l'axe de rotation, doit coïncider avec l'axe des  $z$ , et en dirigeant le grand axe, s'il s'agit d'un ellipsoïde de Jacobi, suivant l'axe des  $x$ , nous pourrons poser, pour les points de la surface de notre ellipsoïde,

$$x = \sqrt{\rho+1} \sin \theta \cos \psi,$$

$$y = \sqrt{\rho+q} \sin \theta \sin \psi,$$

$$z = \sqrt{\rho} \cos \theta,$$

$\theta$  et  $\psi$  étant des variables auxiliaires.

D'une manière analogue, pour un point quelconque de l'espace, nous poserons

$$(1) \quad \begin{cases} x = \sqrt{\rho + 1 + u} \sin \theta \cos \psi, \\ y = \sqrt{\rho + q + u} \sin \theta \sin \psi, \\ z = \sqrt{\rho + u} \cos \theta, \end{cases}$$

en entendant par  $u$  un nombre assujetti à l'inégalité

$$u > -\rho.$$

Ainsi, ce nombre étant fixé, les équations (1) représenteront un ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde  $E$ , et si,  $\theta$  et  $\psi$  étant fixés, on donne à  $u$  une suite de valeurs différentes, ces équations donneront ce qu'on appelle des points correspondants.

Soit maintenant  $F$  une figure quelconque pour laquelle on veut déterminer l'accroissement de  $\Pi$  dans le passage de l'ellipsoïde  $E$ .

Pour définir cette figure, il suffit d'indiquer, pour les points de la surface de l'ellipsoïde, les points correspondants de la surface de la figure, et on le fera en admettant pour cette surface les équations de la forme

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\rho + 1 + Z} \sin \theta \cos \psi, \\ y &= \sqrt{\rho + q + Z} \sin \theta \sin \psi, \\ z &= \sqrt{\rho + Z} \cos \theta, \end{aligned}$$

où  $Z$  est une fonction donnée de  $\theta$  et  $\psi$ . Mais, en se plaçant à un point de vue général, on ne doit pas supposer que  $Z$  soit une fonction uniforme, car, en général, il faut admettre qu'à un point de la surface de l'ellipsoïde peuvent correspondre plusieurs points de la surface de  $F$ .

Ainsi la fonction  $Z$  pourra être multiforme, et nous supposerons seulement qu'elle soit définie pour toutes les valeurs de  $\theta$  et  $\psi$  de manière à vérifier toujours l'inégalité

$$Z > -\rho.$$

Nous supposerons d'ailleurs que les points, obtenus par les formules (1) en fixant  $\theta$  et  $\psi$  et en donnant à  $u$  toutes les valeurs entre  $-\rho$  et la valeur la plus petite de  $Z$  pour les valeurs considérées de  $\theta$  et  $\psi$ , soient intérieurs à la surface de la figure  $F$ .

Du reste nous ne considérerons que des figures suffisamment peu différentes de l'ellipsoïde  $E$ , en les définissant comme celles pour lesquelles la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z$  est assez petite.

2. Considérons l'intégrale de volume

$$\int \Phi d\tau,$$

où  $\Phi$  est une fonction donnée de  $x, y, z$ , et supposons que l'on veuille déterminer l'accroissement de cette intégrale dans le passage de l'ellipsoïde E à la figure F.

Par les surfaces de ces deux figures, l'espace sera divisé en plusieurs portions séparées que nous allons grouper en quatre domaines suivants: 1° le domaine  $D'_e$  dont les points se trouvent à l'extérieur des deux figures, 2° le domaine  $D'_i$  dont les points se trouvent à l'intérieur des deux figures, 3° le domaine  $D_e$  dont les points sont extérieurs à E et intérieurs à F, 4° le domaine  $D_i$  dont les points sont intérieurs à E et extérieurs à F.

Soient  $d\tau_e$  et  $d\tau_i$  les éléments de volume qui appartiennent respectivement à  $D_e$  et à  $D_i$ .

Alors, pour l'accroissement dont il s'agit, nous aurons

$$\int \Phi d\tau_e - \int \Phi d\tau_i,$$

les intégrations étant étendues à tout le domaine  $D_e$  et à tout le domaine  $D_i$ .

Or cette expression peut être présentée encore sous une autre forme.

Introduisons pour cela une fonction discontinue K que nous allons définir comme il suit:

|                 |          |          |
|-----------------|----------|----------|
| dans le domaine | $D'_e$ , | K = 0,   |
| » » »           | $D_e$ ,  | K = 1,   |
| » » »           | $D_i$ ,  | K = - 1. |
| » » »           | $D'_i$ , | K = 0.   |

Par ces conditions, la fonction K sera définie partout, sauf pour les points des frontières des quatre domaines considérés. Mais, quant à ces points, il est inutile de préciser les valeurs de K, et l'on pourra y attribuer à cette fonction une quelconque de ses valeurs limites.

Cela posé, l'expression de l'accroissement cherché pourra se mettre sous la forme

$$\int \Phi K d\tau,$$

l'intégrale s'étendant à une portion quelconque de l'espace qui renferme les domaines  $D_e$  et  $D_i$  tout entiers.

Supposons maintenant que l'on introduise, au lieu des coordonnées rectangulaires, les variables  $u, \theta, \psi$  à l'aide des équations (1).

Nous aurons alors, pour l'élément de volume, cette expression

$$d\tau = \frac{1}{2} G(\rho + u, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi du,$$

où

$$G(\rho, \theta, \psi) = \left\{ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \psi}{\rho + 1} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}{\rho + q} + \frac{\cos^2 \theta}{\rho} \right\} \sqrt{\rho(\rho + 1)(\rho + q)},$$

et, pour évaluer l'intégrale ci-dessus, nous pourrions intégrer,

|              |       |      |    |          |
|--------------|-------|------|----|----------|
| pour $u$ ,   | entre | $-L$ | et | $+L$ ,   |
| » $\theta$ , | »     | 0    | »  | $\pi$ ,  |
| » $\psi$ ,   | »     | 0    | »  | $2\pi$ , |

$L$  étant un nombre quelconque, plus petit que  $\rho$ , mais assez grand pour qu'on ait constamment

$$|Z| \leq L.$$

Or, en considérant des fonctions de  $\theta$  et  $\psi$ , nous rapporterons leurs valeurs à la surface de la sphère de rayon 1 et de centre à l'origine, en introduisant un point auxiliaire  $p$  ayant pour coordonnées

$$x = \sin \theta \cos \psi, \quad y = \sin \theta \sin \psi, \quad z = \cos \theta.$$

C'est cette sphère que nous sous-entendrons en parlant dans ce qui suit de la sphère  $\Sigma$ .

En désignant un élément superficiel contenant le point  $p$  par  $d\sigma$ , nous pourrions poser

$$d\tau = \frac{1}{2} G(\rho + u, \theta, \psi) d\sigma du,$$

et notre intégrale prendra la forme

$$\frac{1}{2} \int d\sigma \int_{-L}^{+L} \Phi G(\rho + u, \theta, \psi) K du,$$

où l'intégration relative à  $d\sigma$  doit être étendue à toute la surface de la sphère  $\Sigma$ .

C'est sous cette forme que nous présenterons les accroissements des intégrales de volume.

Mais, avant de passer à notre problème, nous devons nous arrêter à une difficulté qui se présente quand on veut se placer à un point de vue général, et qui consiste en ce que l'intégrale relative à  $u$  pourra alors ne pas avoir une valeur déterminée, à cause du facteur discontinu  $K$  que contient la fonction à intégrer.

Nous allons montrer que la difficulté qui en provient n'est qu'apparente.

**3.** Par la nature de notre problème, la figure F doit avoir un volume mesurable.

Or, s'il en est ainsi, la fonction K doit être intégrable dans tout domaine de l'espace qui a un volume mesurable.

En effet, si l'on a deux figures, dont chacune a un volume mesurable, les parties, en lesquelles l'une d'entre elles sera divisée par la surface de l'autre, auront encore des volumes mesurables. C'est ce qui résulte de la nature même de la condition qui exprime qu'un volume, limité par une surface donnée, soit mesurable\*).

Donc tout domaine de volume mesurable sera divisé, par les surfaces de la figure F et de l'ellipsoïde E, en des parties de volume mesurable; et de là, eu égard à la définition de la fonction K, on conclut immédiatement que cette fonction sera intégrable dans un domaine mesurable.

Par suite, si  $\Phi$  est une fonction continue, le produit  $\mathbf{K}\Phi$  y sera encore intégrable.

Cela posé et en entendant par  $\Phi$  une fonction continue, considérons l'intégrale

$$\int \Phi \mathbf{K} d\tau$$

étendue au domaine, limité par les surfaces de deux ellipsoïdes homofocaux ayant pour demi-axes

$$\sqrt{\rho + 1 - L}, \quad \sqrt{\rho + q - L}, \quad \sqrt{\rho - L}$$

et

$$\sqrt{\rho + 1 + L}, \quad \sqrt{\rho + q + L}, \quad \sqrt{\rho + L}.$$

C'est l'intégrale que nous avons envisagée plus haut.

D'après ce que nous venons de dire, cette intégrale aura toujours un sens déterminé comme limite d'une somme de la forme

$$\sum \Phi \mathbf{K} \Delta\tau,$$

obtenue en décomposant le domaine considéré en des éléments de volume  $\Delta\tau$  et en multipliant chaque élément par une valeur quelconque dont la fonction  $\Phi\mathbf{K}$  est susceptible dans l'étendue de cet élément. Il faut seulement que la décomposition en des éléments varie de telle manière que les plus grandes dimensions linéaires de tous les éléments tendent vers zéro.

---

\*) On peut, en effet, énoncer cette condition ainsi: quelle que soit la loi d'après laquelle on décompose l'espace en des éléments de volume, la somme des éléments, ayant des points communs avec la surface considérée, doit tendre vers zéro, quand, le nombre de ces éléments croissant indéfiniment, toutes les dimensions linéaires de chaque élément tendent vers zéro.

Or, prenons pour les éléments  $\Delta\tau$  ceux en lesquels le domaine considéré sera divisé par une série de surfaces appartenant à la famille des ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde  $E$  et par des surfaces quelconques orthogonales à cette famille.

Pour définir ces dernières surfaces, il suffit de donner leurs lignes d'intersection avec la surface de l'ellipsoïde  $E$ , et ces lignes peuvent être définies par des lignes correspondantes de la surface de la sphère  $\Sigma$ , décrites par le point  $p$  que nous avons introduit plus haut.

De cette façon, si nous décomposons la surface de la sphère  $\Sigma$  en des éléments  $\Delta\sigma$ , les contours de ces éléments définiront certaines surfaces orthogonales à la famille des ellipsoïdes, et ces surfaces, avec celles de la série des ellipsoïdes, définiront les éléments de volume que nous prendrons pour les  $\Delta\tau$ .

Cela posé, si nous désignons par  $\Delta u$  l'accroissement de  $u$  dans le passage de l'un de deux ellipsoïdes consécutifs de la série considérée à un autre, nous aurons

$$\Delta\tau = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) G \Delta\sigma \Delta u,$$

où  $G$  est la valeur de la fonction  $G(\rho + u, \theta, \psi)$  en un point quelconque de l'élément  $\Delta\tau$ ; quant à  $\varepsilon$ , c'est une quantité tendant vers zéro, et cela uniformément pour tous les éléments  $\Delta\tau$ , quand  $\Delta u$  et la plus grande dimension linéaire  $\delta$  de l'élément  $\Delta\sigma$  tendent tous les deux vers zéro.

D'après cela il viendra

$$(2) \quad \int \Phi K d\tau = \frac{1}{2} \lim \sum \Delta\sigma \sum \Phi G K \Delta u,$$

où l'une des deux sommations indiquées s'étend à tous les  $\Delta u$  pour un seul et même élément  $\Delta\sigma$ , l'autre, à tous les éléments  $\Delta\sigma$ , et où, en passant à la limite, on peut faire tendre vers zéro les  $\Delta u$  et les  $\delta$  *indépendamment les uns des autres*.

On peut supposer que les valeurs attribuées à  $\theta$  et  $\psi$ , pour tous les termes de la somme

$$(3) \quad \sum \Phi G K \Delta u,$$

soient les mêmes.

Alors, si  $K$  devient pour ces valeurs une fonction de  $u$  intégrable dans l'intervalle  $(-L, +L)$ , la somme ci-dessus tendra vers une limite déterminée, qui représentera l'intégrale

$$\int_{-L}^{+L} \Phi G K du.$$

D'ailleurs, si cela a lieu pour toutes les valeurs de  $\theta$  et  $\psi$ , cette limite représentera



une fonction de  $\theta$  et  $\psi$  qui sera nécessairement intégrable sur la surface de la sphère  $\Sigma$ , et l'expression (2) se réduira à celle du numéro précédent.

Mais bien que  $K$ , comme fonction de  $u$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , soit intégrable dans le domaine considéré, en général il n'est pas permis de supposer que, pour des valeurs données de  $\theta$  et  $\psi$ , ce soit aussi une fonction intégrable de  $u$ . Il faut donc admettre la possibilité des cas où la somme (3) ne tende vers aucune limite, tant qu'on ne précise pas les valeurs que l'on veut attribuer aux facteurs des  $\Delta u$ .

Or, ces valeurs étant, jusqu'à un certain point, en notre disposition, nous pourrions toujours faire en sorte qu'il y aura une limite pour la somme en question.

Nous pouvons, par exemple, supposer que chaque élément  $\Delta u$  soit multiplié par le maximum\*) de la fonction  $\Phi GK$  dans l'intervalle  $(u, u + \Delta u)$ . La somme (3) tendra alors vers une limite déterminée, représentant ce qu'on appelle *intégrale par excès*.

Rien n'empêche aussi de supposer que tous les  $\Delta u$  soient multipliés par les minima de  $\Phi GK$  dans les étendues de ces éléments, et l'on aura alors une limite, connue sous le nom de *l'intégrale par défaut*.

Ces deux limites, qui représenteront des fonctions parfaitement déterminées de  $\theta$  et  $\psi$ , seront en général distinctes. Mais cela importe peu et nous pourrions nous servir indifféremment de l'une ou de l'autre, dont chacune sera une fonction intégrable sur la surface de la sphère  $\Sigma$  et, étant intégrée, conduira à un même résultat.

Nous pourrions ainsi toujours écrire

$$\int \Phi K d\tau = \frac{1}{2} \int d\sigma \int_{-L}^{+L} \Phi GK du,$$

en entendant par le symbole

$$(4) \quad \int_{-L}^{+L} \Phi GK du$$

une intégrale par excès ou une intégrale par défaut.

D'ailleurs rien n'empêche d'adopter pour ce symbole une autre définition quelconque, résultant de la considération de la somme (3), et ce sera alors une fonction dont les valeurs seront toujours comprises entre celles des deux intégrales précédentes.

Comme dans la suite la fonction  $\Phi$  pourra varier d'une formule à une autre, il est à préférer une définition qui soit indépendante des propriétés de cette fonction, et l'on y parviendra en ne précisant, dans les termes de la somme (3), que les valeurs de la fonction  $K$ . Cela est permis, puisque, la fonction  $\Phi G$  étant continue, l'accroissement que recevra la somme (3) par suite d'un changement des valeurs de cette fonction dans les étendues des

---

\*) Pour abrégé, nous disons ici «maximum» au lieu de «limite supérieure précise». De même, nous disons «minimum» au lieu de «limite inférieure précise».

éléments  $\Delta u$  tendra nécessairement vers zéro. On pourra donc laisser ces valeurs indéterminées.

On aura une pareille définition en supposant que, dans tous les termes de la somme considérée, on prenne pour  $K$  soit ses maxima, soit ses minima dans les étendues des éléments correspondants  $\Delta u$ ; car il est facile d'établir que, dans chacune de ces deux suppositions, la somme (3) tendra vers une limite déterminée\*).

Plus généralement, en désignant le maximum et le minimum de la fonction  $K$  dans l'étendue de l'élément  $\Delta u$  respectivement par  $K'$  et par  $K_1$ , et en entendant par  $\vartheta$  une fraction positive ne dépendant point de  $u$ , mais pouvant dépendre de  $\theta$  et  $\psi$ , on pourra poser dans la somme (3)

$$K = \vartheta K' + (1 - \vartheta) K_1.$$

Cette somme tendra alors encore vers une limite déterminée qui peut être prise pour définition du symbole (4).

En s'arrêtant à une pareille définition, on pourra ensuite opérer avec le symbole (4) comme avec une véritable intégrale.

Par exemple,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  étant des fonctions continues dans l'intervalle  $(a, b)$ , on aura

$$\int_a^b (\Phi_1 + \Phi_2) K \, du = \int_a^b \Phi_1 K \, du + \int_a^b \Phi_2 K \, du,$$

où nous avons omis le facteur  $G$ , qui est ici inutile.

Dans la même supposition, si la fonction  $\Phi_2 K$  ne change pas de signe dans l'intervalle  $(a, b)$ , on pourra écrire

$$\int_a^b \Phi_1 \Phi_2 K \, du = (\Phi_1) \int_a^b \Phi_2 K \, du,$$

( $\Phi_1$ ) étant un certain nombre intermédiaire entre les valeurs, la plus grande et la plus petite, de la fonction  $\Phi_1$  dans l'intervalle  $(a, b)$ .

D'autre part, en remarquant que les symboles

$$\int_a^u \Phi_1 K \, du \quad \text{et} \quad \int_a^u \Phi_2 K \, du$$

représenteront des fonctions de  $u$  continues dans l'intervalle  $(a, b)$ , on aura une formule

---

\*) Pour cela on considérera d'abord le cas où la fonction  $\Phi$  est toujours positive dans l'intervalle  $(-L, +L)$ . Alors les deux limites dont il s'agit ne seront autre chose que les intégrales par excès et par défaut. Quant au cas général, on le ramènera au précédent, en présentant la fonction  $\Phi$  sous la forme d'une différence de deux fonctions positives, ce qui se peut d'une infinité de manières.

d'intégration par parties sous la forme

$$\int_a^b \left( \int_a^u \Phi_1 K du \right) \Phi_2 K du + \int_a^b \left( \int_a^u \Phi_2 K du \right) \Phi_1 K du = \int_a^b \Phi_1 K du \cdot \int_a^b \Phi_2 K du.$$

Si à ces formules, que l'on établit facilement en partant de la définition précédente, on en ajoute celle-ci

$$\int_a^c \Phi K du = \int_a^b \Phi K du + \int_b^c \Phi K du,$$

où la fonction  $\Phi$  est supposée être continue dans chacun des deux intervalles  $(a, b)$  et  $(b, c)$ , toutes les opérations seront épuisées que nous aurons à effectuer avec le symbole (4).

Nous pourrons ainsi envisager ce symbole comme une intégrale et, en même temps, supposer que ce soit une fonction du point  $p$  intégrable sur la surface de la sphère  $\Sigma$ .

En terminant remarquons que, bien que nous ayons supposé que la fonction  $\Phi$  soit continue dans le domaine envisagé, cela ne nous empêchera pas de considérer les intégrales de la forme

$$\int \Phi K d\tau,$$

étendues à un domaine  $D$  où cette fonction peut devenir infinie. En effet, une pareille intégrale n'est autre chose qu'une limite d'une intégrale de la même forme, que l'on obtient en remplaçant le domaine  $D$  par un domaine variable, tendant à se confondre avec  $D$ , et tel que la fonction  $\Phi$  n'y devienne jamais infinie. Donc, en réalité, nous n'aurons affaire qu'avec des intégrales où la fonction  $\Phi$  reste toujours continue\*).

4. Revenons à notre objet et commençons par écrire les conditions que la figure  $F$  devra remplir.

Tout d'abord, on a la condition que le volume de cette figure soit égal à celui de l'ellipsoïde  $E$ . En l'exprimant, nous aurons

$$\int d\sigma \int GK du = 0,$$

où, pour simplifier, nous n'avons pas écrit les limites,  $-L$  et  $+L$ , de l'intégrale relative à  $u$ .

---

\*) Les considérations que nous venons de développer sont évidemment applicables non seulement à la fonction  $K$  définie au n° 2, mais encore à toute autre fonction, qui est intégrable dans tout domaine mesurable de l'espace.

En exprimant ensuite que le centre de gravité de la figure F se trouve à l'origine des coordonnées, nous aurons encore ces trois égalités :

$$\int \sin \theta \cos \psi \, d\sigma \int \sqrt{\rho + 1 + u} \, GK \, du = 0,$$

$$\int \sin \theta \sin \psi \, d\sigma \int \sqrt{\rho + q + u} \, GK \, du = 0,$$

$$\int \cos \theta \, d\sigma \int \sqrt{\rho + u} \, GK \, du = 0.$$

A ces conditions, nous en ajouterons, dans certains cas, encore une, qui servira à empêcher de faire tourner la figure F autour de l'axe des  $z$ .

Ainsi, si l'ellipsoïde E a ses trois axes inégaux, nous supposerons que les axes de l'ellipse, suivant laquelle l'ellipsoïde central d'inertie de la figure F est coupé par le plan des  $xy$ , soient dirigés suivant les axes des  $x$  et des  $y$ , condition qui s'exprimera par l'égalité

$$\int \sin^2 \theta \sin 2\psi \, d\sigma \int \sqrt{\rho + 1 + u} \sqrt{\rho + q + u} \, GK \, du = 0.$$

Mais dans le cas où E est un ellipsoïde de révolution, cette condition pourra ne pas suffire, puisque l'ellipse considérée précédemment pourra alors se réduire à un cercle.

Or, dans ce cas, une rotation de la figure F autour de l'axe des  $z$  n'ayant d'autre influence sur la valeur de l'intégrale

$$\int GK \, du$$

que celle d'y remplacer  $\psi$  par  $\psi +$  constante, on pourra évidemment admettre toute condition de la forme

$$\int P \sin k\psi \, d\sigma \int GK \, du = 0,$$

où  $k$  est un nombre donné et  $P$  représente une fonction de  $\theta$ .

C'est une pareille condition que nous introduirons, quand, E étant un ellipsoïde de révolution, il nous sera utile de fixer complètement la position de la figure F pour ce qui concerne les déplacements qui ne changent pas la valeur de  $\Pi$ . Mais ce ne sera que dans des cas que nous avons appelés singuliers, et dans les cas ordinaires nous n'aurons besoin d'aucune condition de la nature considérée.

En admettant les conditions précédentes, nous allons chercher l'accroissement que recevra l'expression

$$\Pi = \frac{M}{S} - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\tau \, d\tau'}{r}$$

quand on passe de l'ellipsoïde E à la figure F, et cela se réduit à chercher les accroissements de ces deux intégrales:

$$S = \int (x^2 + y^2) d\tau$$

et

$$V = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\tau d\tau'}{r}.$$

Pour l'accroissement de la première, on a

$$(5) \quad S - S_0 = \frac{1}{2} \int \sin^2 \theta d\sigma \int (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + u) GK du,$$

$S_0$  étant la valeur de  $S$  pour l'ellipsoïde E, et il est aussi facile d'écrire une expression analogue, quoique plus compliquée, pour l'accroissement de la seconde intégrale. Mais nous ne le ferons pas, car ce n'est pas de cette expression que nous nous servirons dans notre recherche.

5. Pour obtenir l'accroissement de  $\Pi$ , il sera opportun, et parfois même nécessaire, de passer à la figure F non pas directement, mais bien, par l'intermédiaire d'une figure auxiliaire f choisie d'une manière convenable. Cet accroissement se décomposera alors en deux parties que l'on cherchera séparément, et dont l'une représentera l'accroissement dans le passage de l'ellipsoïde E à la figure f, l'autre, l'accroissement dans le passage de cette dernière à la figure F.

Suivant les cas, la figure f sera définie par des conditions spéciales différentes, dont il sera parlé plus loin. Mais, dans tous les cas, nous la supposerons telle que, sa surface étant représentée par les équations de la forme

$$x = \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin \theta \cos \psi,$$

$$y = \sqrt{\rho + q + \zeta} \sin \theta \sin \psi,$$

$$z = \sqrt{\rho + \zeta} \cos \theta,$$

$\zeta$  soit une fonction continue de  $\theta$  et  $\psi$ , n'ayant qu'une seule valeur en tout point de la surface de la sphère  $\Sigma$ . Nous supposerons d'ailleurs que la fonction  $\zeta$  soit toujours suffisamment petite en valeur absolue.

En introduisant cette figure auxiliaire, nous allons envisager, au lieu de la fonction K, une certaine autre fonction discontinue  $x$ , qui, de même que K, ne sera susceptible que des trois valeurs:  $-1, 0, +1$ . En la considérant comme fonction de  $u, \theta, \psi$ , nous la définirons comme il suit:

Pour tout point  $(\theta, \psi)$  de la surface de la sphère  $\Sigma$ , quand  $u$  se trouve dans l'intervalle  $(0, \zeta)$ , on a

$$x = K - \frac{\zeta}{|\zeta|}$$

et, dès que  $u$  est en dehors de cet intervalle,

$$x = K.$$

Ainsi, dans l'intervalle  $(0, \zeta)$ , il viendra

$$K = x \pm 1,$$

où l'on doit prendre celui des deux signes qui appartient à  $\zeta$ .

On voit par là, en se reportant à la définition de la fonction  $K$  (n° 2), que la fonction  $x$  jouera par rapport à la figure  $f$  un rôle tout semblable à celui que jouait la fonction  $K$  par rapport à l'ellipsoïde  $E$ . Elle sera, en effet, égale à zéro en tout point de l'espace qui se trouve, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur des deux figures  $f$  et  $F$ , et se réduira à  $\pm 1$  en des points qui sont extérieurs par rapport à une de ces deux figures et intérieurs par rapport à une autre, le signe  $+$  correspondant aux points extérieurs à la figure  $f$  et le signe  $-$ , aux points intérieurs à  $f$ .

De cette façon, si l'on pose

$$u = \zeta + \xi,$$

la fonction  $x$  sera égale: pour des valeurs positives de  $\xi$ , à 0 ou à 1 et, pour des valeurs négatives de  $\xi$ , à 0 ou à  $-1$ , de sorte que le produit  $x\xi$  ne sera jamais négatif.

Ayant ainsi défini  $x$ , que nous allons considérer comme une fonction de  $\xi, \theta, \psi$ , nous aurons évidemment

$$\int_{-L}^{+L} \Phi G K du = \int_0^{\zeta} \Phi G du + \int_{-\lambda}^{+\lambda} \Phi G x d\xi,$$

$\lambda$  étant la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z - \zeta$  sur la surface de la sphère  $\Sigma$ , cette valeur étant supposée suffisamment petite\*).

\*) Si l'intégrale qui figure au premier membre n'avait pas de sens direct, on lui attribuerait un certain sens conventionnel, conformément à ce qui a été dit au n° 3, et, en fixant ensuite le sens de l'intégrale

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} \Phi G x d\xi$$

d'après la relation qui existe entre les fonctions  $x$  et  $K$ , on aurait encore l'égalité précédente.

Cela posé, l'accroissement de l'intégrale

$$\int \Phi d\tau$$

dans le passage de l'ellipsoïde E à la figure F se présentera sous la forme

$$\frac{1}{2} \int d\tau \int_0^{\zeta} \Phi G du + \frac{1}{2} \int d\tau \int_{-\lambda}^{+\lambda} \Phi G x d\xi,$$

et le premier terme sera l'accroissement dans le passage de l'ellipsoïde à la figure f, tandis que le second représentera l'accroissement dans le passage de f à F.

**6.** Parmi les conditions auxquelles nous assujettirons la figure f, il y en aura un certain nombre qui seront remplies dans tous les cas. Ces conditions seront les suivantes:

- 1° Le volume de la figure f sera égal à celui de l'ellipsoïde E;
- 2° Le centre de gravité de cette figure se trouvera à l'origine des coordonnées;
- 3° Les plans des  $xy$  et des  $xz$  en seront des plans de symétrie;
- 4° Le moment d'inertie de la figure f par rapport à l'axe des  $z$  sera égal à  $S$ .

D'après la troisième condition, les axes des coordonnées seront des axes principaux d'inertie pour la figure f.

En tenant compte de ces conditions, on pourra présenter celles que nous avons données au n° 4 pour la figure F sous la forme:

$$\begin{aligned} \int d\tau \int G x d\xi &= 0, \\ \int \sin \theta \cos \psi d\tau \int \sqrt{\rho + 1 + \zeta + \xi} G x d\xi &= 0, \\ \int \sin \theta \sin \psi d\tau \int \sqrt{\rho + q + \zeta + \xi} G x d\xi &= 0, \\ \int \cos \theta d\tau \int \sqrt{\rho + \zeta + \xi} G x d\xi &= 0, \\ \int \sin^2 \theta \sin 2\psi d\tau \int \sqrt{\rho + 1 + \zeta + \xi} \sqrt{\rho + q + \zeta + \xi} G x d\xi &= 0, \\ \int P \sin k\psi d\tau \int G x d\xi &= 0, \end{aligned}$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons omis les limites  $-\lambda$  et  $+\lambda$  des intégrales relatives à  $\xi$ .

Nous allons considérer ces égalités comme des conditions que devra vérifier la fonction  $Z - \zeta$ .

Or, à ce point de vue, nous aurons encore une condition.

En effet, la quatrième condition pour la figure  $f$  s'écrit ainsi

$$(6) \quad \frac{1}{2} \int \sin^2 \theta \, d\sigma \int_0^\zeta (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + u) G \, du = S - S_0,$$

et d'après cela l'égalité (5) donne

$$\int \sin^2 \theta \, d\sigma \int (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta + \xi) G_x \, d\xi = 0.$$

Outre cette condition, nous en aurons, dans certains cas, encore une, qui résultera d'une supposition spéciale à l'égard de la figure  $f$ . Mais nous en parlerons en son temps et lieu.

Réduisons nos conditions à la forme, sous laquelle nous nous en servirons dans la suite. Posons pour cela

$$\int G_x \, d\xi = \chi, \quad \int G_x \xi \, d\xi = \chi_1.$$

Alors la première et les deux dernières conditions s'écriront ainsi:

$$(7) \quad \int \chi \, d\sigma = 0,$$

$$(8) \quad \int \sin^2 \theta (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta) \chi \, d\sigma + \int \sin^2 \theta \chi_1 \, d\sigma = 0,$$

$$(9) \quad \int P \sin k\psi \chi \, d\sigma = 0.$$

Quant aux quatre conditions qui restent, pour les présenter sous la forme requise, nous procéderons comme il suit.

Prenons, par exemple, la condition

$$\int \sin \theta \cos \psi \, d\sigma \int \sqrt{\rho + 1 + \zeta + \xi} G_x \, d\xi = 0.$$

En la présentant sous la forme

$$\int \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin \theta \cos \psi \chi \, d\sigma = - \int \sin \theta \cos \psi \, d\sigma \int \frac{G_x \xi \, d\xi}{\sqrt{\rho + 1 + \zeta + \sqrt{\rho + 1 + \zeta + \xi}}},$$

nous remarquons que, la fonction  $G_x \xi$  n'étant jamais négative, l'intégrale relative à  $\xi$  sera



au-dessous de

$$\frac{\zeta_1}{\sqrt{\rho-l} + \sqrt{\rho-l-\lambda}},$$

où  $l$  désigne la plus grande valeur absolue de la fonction  $\zeta$  sur la surface de la sphère  $\Sigma$ , les nombres  $l$  et  $\lambda$  étant supposés suffisamment petits pour qu'on ait  $l + \lambda < \rho$ .

On voit donc que le second membre de notre égalité sera, en valeur absolue, inférieur à

$$\frac{\int \zeta_1 d\sigma}{\sqrt{\rho-l} + \sqrt{\rho-l-\lambda}},$$

et que, par suite, cette égalité sera de la forme

$$(10) \quad \int \frac{\sqrt{\rho+1+\zeta}}{\sqrt{\rho+1}} \sin \theta \cos \psi \zeta d\sigma = h_1 \int \zeta_1 d\sigma,$$

$h_1$  étant un nombre dont la valeur absolue ne dépassera pas une certaine limite fixe, tant que  $l$  et  $\lambda$  sont au-dessous des nombres suffisamment petits.

Du reste, on pourra évidemment présenter le premier membre sous la forme

$$\int \sin \theta \cos \psi \zeta d\sigma - h'_1 l \int |\zeta| d\sigma,$$

$h'_1$  étant un nombre de la même nature que  $h_1$ .

En appliquant de pareilles considérations à chacune des quatre conditions dont il s'agit, on s'assure qu'elles peuvent être écrites comme il suit:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \sin \theta \cos \psi \zeta d\sigma = h_1 \int \zeta_1 d\sigma + h'_1 l \int |\zeta| d\sigma, \\ \int \sin \theta \sin \psi \zeta d\sigma = h_2 \int \zeta_1 d\sigma + h'_2 l \int |\zeta| d\sigma, \\ \int \cos \theta \zeta d\sigma = h_3 \int \zeta_1 d\sigma + h'_3 l \int |\zeta| d\sigma, \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \int \sin^2 \theta \sin 2\psi \zeta d\sigma = h_4 \int \zeta_1 d\sigma + h'_4 l \int |\zeta| d\sigma,$$

les  $h_i$  et les  $h'_i$  ne dépassant pas des nombres fixes, tant que  $l$  et  $\lambda$  sont assez petits.

Telle est la forme sous laquelle nous ferons usage de nos conditions, dont celles (7), (8) et (11) seront supposées être toujours remplies et les conditions (9) et (12) ne seront

admisses, la première, que dans certains cas des ellipsoïdes de révolution, la seconde, que pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux.

7. Revenons à l'expression de  $\Pi$  que l'on peut écrire ainsi

$$\Pi = \frac{M}{S} - V,$$

et, en attribuant à  $M$  la valeur que cette constante doit avoir pour l'ellipsoïde  $E$ , cherchons l'accroissement de  $\Pi$  dans le passage de l'ellipsoïde à la figure  $F$ .

Nous aurons pour cet accroissement

$$\Delta\Pi = \Delta_1\Pi + \Delta_2\Pi,$$

en employant les caractéristiques  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , la première, pour désigner les accroissements dans le passage de l'ellipsoïde  $E$  à la figure  $f$ , la seconde, pour représenter les accroissements dans le passage de  $f$  à  $F$ ; de sorte que, d'après le choix de la figure  $f$ , il viendra

$$\Delta_1\Pi = \frac{M}{S} - \frac{M}{S_0} - \Delta_1V,$$

$$\Delta_2\Pi = - \Delta_2V.$$

Nous ferons dans la suite, à l'égard de la figure  $f$ , de telles suppositions que, dans chaque cas particulier,  $\Delta_1\Pi$  deviendra une fonction parfaitement déterminée d'un ou de deux paramètres arbitraires, qui se réduiront à zéro pour l'ellipsoïde  $E$ ; et cet accroissement, que nous appellerons *l'accroissement restreint*, pourra être évalué avec une approximation voulue.

Quant à  $\Delta_2\Pi$ , qui sera appelé *l'accroissement réduit*, il dépendra d'une fonction arbitraire, et si l'on ne veut faire aucune restriction, on ne pourra l'évaluer qu'à un certain ordre près par rapport à  $l$  et  $\lambda$ ; ce qui toutefois nous suffira pleinement.

Ces deux parties de l'accroissement total joueront des rôles bien différents, et tandis que, dans les cas ordinaires, le rôle principal appartiendra à l'accroissement réduit, c'est au contraire l'accroissement restreint qui le jouera dans les cas singuliers.

Nous commencerons par chercher l'accroissement réduit, qui ne diffère de  $\Delta_2V$  que par un signe. Écrivons donc l'expression de  $\Delta_2V$  qui nous servira de point de départ.

Posons

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{d\tau'}{r} = U,$$

de sorte que nous aurons

$$V = \frac{1}{2} \int U d\tau,$$

les intégrales, dans les deux formules, étant étendues à un seul et même volume.

Les coordonnées rectangulaires étant exprimées au moyen des variables  $u, \theta, \psi$ , l'intégrale  $U$  en deviendra une fonction où il nous sera parfois nécessaire de mettre en évidence l'argument  $u$ . Nous la désignerons alors par  $U(u)$ .

D'ailleurs, quand il faudra indiquer le corps dont  $\pi U$  est le potentiel, nous employerons un indice, en désignant par  $U_0$  ce que devient  $U$  pour l'ellipsoïde  $E$  et par  $U_f$  ce que devient cette fonction pour la figure  $f$ .

Quand nous aurons à considérer simultanément deux points,  $(u, \theta, \psi)$  et  $(u', \theta', \psi')$ , les valeurs relatives à ces points d'une fonction quelconque de  $u, \theta, \psi$  seront désignées par la même lettre, mais pour le second point cette lettre sera affectée d'un accent. Ainsi  $\zeta'$  sera ce que devient  $\zeta$  en remplaçant  $\theta, \psi$  par  $\theta', \psi'$ . De même, en posant

$$\begin{aligned} u - \zeta &= \xi, & G(\rho + \zeta + \xi, \theta, \psi) &= G, \\ \text{nous poserons} & & u' - \zeta' &= \xi', & G(\rho + \zeta' + \xi', \theta', \psi') &= G'. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, nous désignerons par  $d\sigma'$  l'élément superficiel de la sphère  $\Sigma$  contenant le point  $(\theta', \psi')$ .

Cela posé, et en désignant la distance entre les points  $(u, \theta, \psi)$  et  $(u', \theta', \psi')$ , quand il faudra mettre en évidence les arguments  $u$  et  $u'$ , par  $D(u, u')$ , nous aurons

$$\Delta_2 V = \frac{1}{2} \int d\sigma \int U_f(\zeta + \xi) G_x d\xi + \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \int G_x d\xi \int d\sigma' \int \frac{G'_{x'} d\xi'}{D(\zeta + \xi, \zeta' + \xi')}.$$

## II. — RECHERCHE DE L'ACCROISSEMENT RÉDUIT.

8. Arrêtons-nous d'abord au premier terme de la formule que nous venons d'écrire. En entendant par  $U'(u)$  la dérivée par rapport à  $u$  de la fonction  $U(u)$ , nous aurons

$$U_f(\zeta + \xi) = U_f(\zeta) + U'_f(v) \xi,$$

où

$$v = \zeta + \vartheta \xi,$$

$\vartheta$  étant une fraction positive convenablement choisie.

Or, en faisant  $l$  et  $\lambda$  suffisamment petits, on pourra rendre  $U'_f(v)$  aussi peu différent de  $U'_0(0)$  que l'on veut, et il est facile d'obtenir, pour la valeur absolue de la différence

$$U'_f(v) - U'_0(0),$$

une limite supérieure ne dépendant que de  $l$  et de  $\lambda$  et tendant vers zéro pour  $l = \lambda = 0$ .

Cherchons donc une telle limite.

Nous avons

$$U_f(v) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma' \int_{-\rho}^{\zeta'} \frac{G' du'}{D(v, u')},$$

ce qu'on peut écrire ainsi

$$U_f(v) = \Phi(v, \zeta) + \frac{1}{2\pi} \int d\sigma' \int_{\zeta}^{\zeta'} \frac{G' du'}{D(v, u')},$$

en posant

$$\frac{1}{2\pi} \int d\sigma' \int_{-\rho}^{\zeta} \frac{G' du'}{D(v, u')} = \Phi(v, \zeta),$$

et nous aurons  $U_f'(v)$  en différentiant cette expression par rapport à  $v$ .

Considérons d'abord la dérivée de la fonction  $\Phi(v, \zeta)$ .

En remarquant que  $\pi\Phi(v, \zeta)$  est le potentiel de l'ellipsoïde ayant pour demi-axes

$$\sqrt{\rho + 1 + \zeta}, \quad \sqrt{\rho + q + \zeta}, \quad \sqrt{\rho + \zeta},$$

au point  $(v, \theta, \psi)$ , on trouve d'après une formule bien connue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = - \frac{1}{\sqrt{(\rho + \zeta)(\rho + 1 + \zeta)(\rho + q + \zeta)}} \int_{\tau}^{\infty} \frac{G(t, \theta, \psi) dt}{t(t+1)(t+q)},$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} \text{pour } v < \zeta, & \quad \tau = \rho + \zeta, \\ \text{pour } v > \zeta, & \quad \tau = \rho + v. \end{aligned}$$

D'après cela, en posant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \Phi'(v, \zeta),$$

on voit que pour la valeur absolue de la différence

$$\Phi'(v, \zeta) - \Phi'(0, 0)$$

on pourra assigner une limite supérieure sous une forme linéaire par rapport à  $|v|$  et à  $|\zeta|$ .

Donc, comme on a  $|v| < l + \lambda$ , nous aurons

$$|\Phi'(v, \zeta) - \Phi'(0, 0)| < Nl + N'\lambda,$$

$N$  et  $N'$  étant des nombres fixes suffisamment grands.

Or  $\Phi'(0, 0)$  n'est autre chose que  $U_0'(0)$ .

Par suite, en nous reportant à l'expression ci-dessus de  $U_f(v)$ , nous obtenons

$$|U'_f(v) - U'_0(0)| < Nl + N'\lambda + \frac{1}{2\pi} \int Q d\sigma',$$

où

$$Q = \left| \int_{\zeta}^{\zeta'} G' \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{D(v, u')} du' \right|.$$

Cherchons maintenant une limite supérieure pour  $Q$ .

En posant, pour abrégier,

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \psi &= \alpha, & \sin \theta \sin \psi &= \beta, & \cos \theta &= \gamma, \\ \sin \theta' \cos \psi' &= \alpha', & \sin \theta' \sin \psi' &= \beta', & \cos \theta' &= \gamma', \end{aligned}$$

nous aurons pour  $D^2(v, u')$  cette expression

$$\begin{aligned} (\sqrt{\rho+1+v} \alpha - \sqrt{\rho+1+u'} \alpha')^2 + (\sqrt{\rho+q+v} \beta - \sqrt{\rho+q+u'} \beta')^2 \\ + (\sqrt{\rho+v} \gamma - \sqrt{\rho+u'} \gamma')^2, \end{aligned}$$

d'où il vient

$$\frac{\partial D^2(v, u')}{\partial v} = (\sqrt{\rho+1+v} \alpha - \sqrt{\rho+1+u'} \alpha') \frac{\alpha}{\sqrt{\rho+1+v}} + \dots$$

et, par suite,

$$\left| \frac{\partial D^2(v, u')}{\partial v} \right| < \frac{D(v, u')}{\sqrt{\rho+v}}.$$

D'après cela on voit que,  $\rho+v$  étant supérieur à un nombre positif fixe, la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{D(v, u')}$$

ne dépassera pas, en valeur absolue, la quantité

$$\frac{1}{D^2(v, u')}$$

multipliée par un nombre fixe.

Or on trouve facilement cette inégalité

$$D^2(v, u') > \sqrt{\rho+v} \sqrt{\rho+u'} [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2],$$

où l'on a

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 = 2(1 - \cos \varphi),$$

en posant

$$\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi') = \cos \varphi.$$

Donc,  $\rho + v$  et  $\rho + u'$  étant supérieurs à des nombres positifs fixes, la dérivée en question sera, en valeur absolue, au-dessous de la quantité

$$\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

multipliée par un nombre fixe.

Comme, d'autre part,  $G'$  ne dépassera pas un nombre fixe, tant que  $|u'|$  est assez petit, on voit que,  $l$  et  $\lambda$  étant assez petits, on pourra trouver un nombre fixe  $N''$ , tel qu'on ait

$$Q < N'' \frac{|\zeta' - \zeta|}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Or la fonction  $\zeta$  sera toujours choisie de telle manière que l'on aura une inégalité de la forme

$$(1) \quad \frac{|\zeta' - \zeta|}{\sin \frac{\varphi}{2}} < cl,$$

$c$  étant un nombre fixe.

On aura donc

$$Q < \frac{N'' cl}{4 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Cela posé, nous aurons

$$\frac{1}{2\pi} \int Q d\sigma' < N'' cl,$$

et d'après cela, en prenant pour  $N$  un nombre suffisamment grand, nous pourrions écrire

$$|U_f'(v) - U_0'(0)| < Nl + N'\lambda.$$

De cette façon, pour le premier terme de l'accroissement  $\Delta_2 V$ , savoir

$$\frac{1}{2} \int d\sigma \int U_f(\zeta + \xi) G_n d\xi,$$

nous obtenons (en tenant compte de ce que  $x\xi$  ne change pas de signe) l'expression suivante:

$$\frac{1}{2} \int [U_f(\zeta)\chi + U'_0(0)\chi_1] d\sigma + (hl + h'\lambda) \int \chi_1 d\sigma,$$

en désignant, d'une manière générale, par la lettre  $h$ , affectée ou non d'un accent ou d'un indice, un nombre qui reste, en valeur absolue, au-dessous d'une limite fixe, tant que  $l$  et  $\lambda$  sont assez petits.

9. Passons à la considération du second terme de  $\Delta_2 V$ , savoir

$$\frac{1}{8\pi} \int d\sigma \int G x d\xi \int d\sigma' \int \frac{G' x' d\xi'}{D(\zeta + \xi, \zeta' + \xi')}.$$

En remarquant que l'on peut le présenter sous la forme

$$\frac{1}{8\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D(0, 0)} + R_1 + R_2,$$

où

$$R_1 = \frac{1}{8\pi} \int \chi d\sigma \int \left\{ \frac{1}{D(\zeta, \zeta')} - \frac{1}{D(0, 0)} \right\} \chi' d\sigma',$$

$$R_2 = \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \int G x d\xi \int d\sigma' \int \left\{ \frac{1}{D(\zeta + \xi, \zeta' + \xi')} - \frac{1}{D(\zeta, \zeta')} \right\} G' x' d\xi',$$

nous allons chercher des limites supérieures pour  $|R_1|$  et pour  $|R_2|$ .

Commençons par  $R_1$ .

Avec les notations du numéro précédent, on trouve, pour

$$D^2(\zeta, \zeta') - D^2(0, 0),$$

cette expression:

$$(1 - \cos \varphi)(\zeta + \zeta') + (\sqrt{\rho + 1 + \zeta} - \sqrt{\rho + 1 + \zeta'})^2 \alpha \alpha' \\ + (\sqrt{\rho + q + \zeta} - \sqrt{\rho + q + \zeta'})^2 \beta \beta' + (\sqrt{\rho + \zeta} - \sqrt{\rho + \zeta'})^2 \gamma \gamma',$$

et de là on conclut

$$|D^2(\zeta, \zeta') - D^2(0, 0)| < 2(1 - \cos \varphi) l + \frac{(\zeta - \zeta')^2}{4(\rho - l)}.$$

D'autre part, l'inégalité signalée au numéro précédent pour  $D^2(v, u')$  donne

$$D(\zeta, \zeta') > 2 \sqrt{\rho - l} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad D(0, 0) > 2 \sqrt{\rho} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

D'après cela, en tenant compte de l'inégalité (1), on obtient pour la quantité

$$\left| \frac{1}{D(\zeta, \zeta')} - \frac{1}{D(0, 0)} \right| = \frac{|D^2(\zeta, \zeta') - D^2(0, 0)|}{D(\zeta, \zeta') D(0, 0) [D(\zeta, \zeta') + D(0, 0)]}$$

cette limite supérieure

$$\frac{\left[ 4 + \frac{c^2 l}{4(\rho - l)} \right] l}{16 \sqrt{\rho} (\rho - l) \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

On aura donc,  $l$  étant assez petit,

$$\left| \frac{1}{D(\zeta, \zeta')} - \frac{1}{D(0, 0)} \right| < \frac{Nl}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

en entendant par  $N$  un nombre fixe.

Par suite, il vient

$$|R_1| < \frac{Nl}{8\pi} \iint \frac{|\chi| |\chi'| d\sigma d\sigma'}{\sin \frac{\varphi}{2}} < \frac{Nl}{16\pi} \iint \frac{(\chi^2 + \chi'^2) d\sigma d\sigma'}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

ce qui se réduit à

$$(2) \quad |R_1| < Nl \int \chi^2 d\sigma.$$

Considérons maintenant  $R_2$ .

En posant, pour abrégé,

$$D(\zeta + \xi, \zeta' + \xi') = D_{11}, \quad D(\zeta + \xi, \zeta') = D_{10},$$

$$D(\zeta, \zeta') = D_{00}, \quad D(\zeta, \zeta' + \xi') = D_{01},$$

nous remarquons que l'on peut écrire

$$D_{11}^2 - D_{00}^2 = P\xi + P'\xi',$$



où

$$P = \frac{1}{2\xi} (D_{11}^2 - D_{01}^2 + D_{10}^2 - D_{00}^2),$$

$$P' = \frac{1}{2\xi'} (D_{11}^2 - D_{10}^2 + D_{01}^2 - D_{00}^2).$$

Nous aurons ainsi

$$R_2 = -\frac{1}{8\pi} \int d\sigma \int G_x d\xi \int d\sigma' \int \frac{P\xi + P'\xi'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})} G' x' d\xi',$$

et comme, par une permutation simultanée des variables  $\xi$  et  $\xi'$ ,  $\theta$  et  $\theta'$ ,  $\psi$  et  $\psi'$ ,  $P'$  se change en  $P$ , cela se réduit à

$$R_2 = -\frac{1}{4\pi} \int d\sigma \int G_x \xi d\xi \int d\sigma' \int \frac{P G' x' d\xi'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})}.$$

Nous remarquons ensuite que pour  $D_{11}^2 - D_{01}^2$  on a cette expression:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \varphi) \xi + & \left\{ (\sqrt{\rho+1+\zeta+\xi} - \sqrt{\rho+1+\zeta'+\xi'})^2 - (\sqrt{\rho+1+\zeta} - \sqrt{\rho+1+\zeta'+\xi'})^2 \right\} \alpha \alpha' \\ & + \left\{ (\sqrt{\rho+q+\zeta+\xi} - \sqrt{\rho+q+\zeta'+\xi'})^2 - (\sqrt{\rho+q+\zeta} - \sqrt{\rho+q+\zeta'+\xi'})^2 \right\} \beta \beta' \\ & + \left\{ (\sqrt{\rho+\zeta+\xi} - \sqrt{\rho+\zeta'+\xi'})^2 - (\sqrt{\rho+\zeta} - \sqrt{\rho+\zeta'+\xi'})^2 \right\} \gamma \gamma', \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$(1 - \cos \varphi) \xi + \left\{ \frac{\sqrt{\rho+1+\zeta+\xi} + \sqrt{\rho+1+\zeta} - 2\sqrt{\rho+1+\zeta'+\xi'}}{\sqrt{\rho+1+\zeta+\xi} + \sqrt{\rho+1+\zeta}} \alpha \alpha' + \dots \right\} \xi,$$

et l'on en déduira  $D_{10}^2 - D_{00}^2$  en posant  $\xi' = 0$ .

D'après cela on trouve

$$P = 1 - \cos \varphi + P_1 + P_2,$$

où

$$P_1 = \frac{\sqrt{\rho+1+\zeta+\xi} - \sqrt{\rho+1+\zeta'+\xi'}}{\sqrt{\rho+1+\zeta+\xi} + \sqrt{\rho+1+\zeta}} \alpha \alpha' + \dots,$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{\rho+1+\zeta} - \sqrt{\rho+1+\zeta'}}{\sqrt{\rho+1+\zeta+\xi} + \sqrt{\rho+1+\zeta}} \alpha \alpha' + \dots$$

Par suite, comme on a

$$|R_2| < \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \int G \chi \xi d\xi \int d\sigma' \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|P| G' d\xi'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})},$$

on aura

$$(3) \quad |R_2| < (L' + L_1 + L_2) \int \chi_1 d\sigma,$$

$L', L_1, L_2$  étant des constantes, telles qu'on ait

$$\frac{1}{4\pi} \int d\sigma' \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{(1 - \cos \varphi) G'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})} d\xi' < L',$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\sigma' \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|P_1| G'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})} d\xi' < L_1,$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\sigma' \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|P_2| G'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})} d\xi' < L_2.$$

Cherchons donc les expressions que l'on peut donner à ces constantes, en supposant que  $l + \lambda$  reste au-dessous d'un nombre fixe moindre que  $\rho$ .

Pour ce qui concerne  $L'$ , il suffit, à cet effet, de se reporter aux inégalités

$$D_{11} > 2 \sqrt{\rho - l - \lambda} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad D_{00} > 2 \sqrt{\rho - l} \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$G' < \frac{\rho + 1 + l + \lambda}{\sqrt{\rho - l - \lambda}},$$

qui font voir que l'on peut prendre

$$L' = N' \lambda,$$

$N'$  étant un nombre fixe suffisamment grand.

En passant ensuite à l'évaluation de  $L_1$ , nous allons nous servir de l'inégalité

$$|P_1| < \frac{|\xi' - \xi + \zeta' - \zeta|}{4(\rho - l - \lambda)},$$

qui s'obtient immédiatement par l'expression donnée plus haut pour  $P_1$ . Mais nous devons encore chercher une limite inférieure pour  $D_{11}$ , car celle dont nous nous sommes servi précédemment ne suffira plus.

Pour cela nous remarquons que l'on peut écrire

$$D^2(u, u') = \frac{1}{2} (\sqrt{\rho+1+u} - \sqrt{\rho+1+u'})^2 (\alpha^2 + \alpha'^2) + \dots \\ + \sqrt{\rho+1+u} \sqrt{\rho+1+u'} (\alpha - \alpha')^2 + \dots$$

Nous aurons donc l'inégalité

$$D^2(u, u') > \frac{(u - u')^2}{(\sqrt{\rho+1+u} + \sqrt{\rho+1+u'})^2} + 4 \sqrt{\rho+u} \sqrt{\rho+u'} \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

d'où l'on conclut celle-ci:

$$D_{11}^2 > A^2 \left[ (\xi' - \xi + \zeta' - \zeta)^2 + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right],$$

$A$  et  $a$  étant des nombres positifs fixes suffisamment petits.

D'après cela, en posant, pour abrégé,

$$\xi + \zeta - \zeta' = v,$$

et en entendant par  $B$  un nombre fixe suffisamment grand, nous aurons

$$\int d\sigma' \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|P_1| G' d\xi'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})} < B \int \frac{d\sigma'}{\sin \frac{\varphi}{2}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|\xi' - v| d\xi'}{(\xi' - v)^2 + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Or,  $v$  ne dépassant pas, en valeur absolue, le nombre  $\lambda + 2l$ , l'intégrale

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|\xi' - v| d\xi'}{(\xi' - v)^2 + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

est inférieure à

$$2 \int_0^{2(l+\lambda)} \frac{z dz}{z^2 + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Par suite, comme

$$z \int \frac{d\sigma'}{(z^2 + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2}} = 8\pi z \int_0^1 \frac{dx}{z^2 + a^2 x^2} = \frac{8\pi}{a} \operatorname{arc tang} \frac{a}{z} < \frac{4\pi^2}{a},$$

le second membre de l'inégalité précédente sera inférieur à

$$16\pi^2 \frac{B}{a} (l + \lambda).$$

On voit donc que l'on peut prendre

$$L_1 = 4\pi \frac{B}{a} (l + \lambda).$$

Cherchons enfin une expression pour  $L_2$ .

En nous reportant à l'expression de  $P_2$ , nous obtenons

$$|P_2| < \frac{|\zeta' - \zeta|}{4\sqrt{\rho - l}\sqrt{\rho - l - \lambda}},$$

ou bien, en vertu de l'inégalité (1),

$$|P_2| < \frac{cl \sin \frac{\varphi}{2}}{4\sqrt{\rho - l}\sqrt{\rho - l - \lambda}}.$$

D'après cela, en faisant, comme plus haut,

$$\xi + \zeta - \zeta' = v,$$

nous aurons

$$\int d\sigma' \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{|P_2| G' d\xi'}{D_{11} D_{00} (D_{11} + D_{00})} < Cl \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{d\xi'}{(\xi' - v)^2 + a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$C$  étant un nombre fixe suffisamment grand; et le second membre, où l'intégrale relative à  $\xi'$  est évidemment inférieure à

$$\frac{\pi}{a \sin \frac{\varphi}{2}},$$

est plus petit que

$$\frac{\pi Cl}{a} \int \frac{d\sigma'}{\sin \frac{\varphi}{2}} = 8\pi^2 \frac{C}{a} l.$$

Nous pourrions, par suite, prendre

$$L_2 = 2\pi \frac{C}{a} l.$$

Ayant ainsi déterminé les constantes  $L'$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ , nous aurons pour leur somme une expression de la forme

$$N_1 l + N_1' \lambda,$$

$N_1$  et  $N_1'$  étant des nombres positifs fixes, et l'inégalité (3) deviendra

$$|R_2| < (N_1 l + N_1' \lambda) \int \chi_1 d\sigma.$$

Cela posé, et tenant compte de l'inégalité (2), on voit que le second terme de l'accroissement  $\Delta_2 V$  sera de la forme

$$\frac{1}{8\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D(0,0)} + h_0 l \int \chi^2 d\sigma + (h_1 l + h_1' \lambda) \int \chi_1 d\sigma,$$

les  $h$  ayant la signification définie à la fin du numéro précédent.

**10.** Dans la formule que nous venons d'obtenir, le terme complémentaire dépend de deux intégrales,

$$\int \chi^2 d\sigma \quad \text{et} \quad \int \chi_1 d\sigma.$$

Mais, de ces deux intégrales, on peut faire disparaître la première, car on peut montrer qu'elle ne dépasse pas la seconde multipliée par un nombre fixe.

Reportons-nous, en effet, aux expressions de  $\chi$  et  $\chi_1$  (n° 6), savoir

$$\chi = \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x d\xi, \quad \chi_1 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x \xi d\xi.$$

En tenant compte de ce qu'on a

$$\int_0^\lambda G x d\xi \cdot \int_{-\lambda}^0 G x d\xi < 0,$$

puisque  $x$  a toujours le même signe que  $\xi$ , nous avons

$$\chi^2 < \left( \int_0^\lambda G x d\xi \right)^2 + \left( \int_{-\lambda}^0 G x d\xi \right)^2.$$

Or on a

$$\left( \int_0^{\lambda} G x d\xi \right)^2 = 2 \int_0^{\lambda} G x d\xi \int_0^{\xi} G' x' d\xi',$$

ce qui donne

$$\left( \int_0^{\lambda} G x d\xi \right)^2 < 2 \int_0^{\lambda} G x d\xi \int_0^{\xi} G' d\xi',$$

et l'on trouve de même

$$\left( \int_{-\lambda}^0 G x d\xi \right)^2 < 2 \int_{-\lambda}^0 G x d\xi \int_0^{\xi} G' d\xi'.$$

On aura donc

$$(4) \quad \gamma^2 < 2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x d\xi \int_0^{\xi} G' d\xi' (*).$$

De là on tire

$$\gamma^2 < \frac{2(\rho + 1 + l + \lambda)}{\sqrt{\rho - l - \lambda}} \gamma_1,$$

et par suite,  $l + \lambda$  étant au-dessous d'un nombre fixe inférieur à  $\rho$ ,

$$\int \gamma^2 d\sigma < N \int \gamma_1 d\sigma,$$

$N$  désignant un nombre fixe suffisamment grand.

On voit donc que toute expression de la forme

$$h_0 \int \chi^2 d\sigma + h_1 \int \gamma_1 d\sigma$$

pourra être réduite à celle de la forme

$$h \int \gamma_1 d\sigma.$$

**11.** En réunissant les deux termes de l'accroissement  $\Delta_2 V$ , et tenant compte de ce que nous venons de montrer, nous aurons pour cet accroissement l'expression suivante:

$$\frac{1}{2} \int [U_f(\zeta) \gamma + U'_0(0) \gamma_1] d\sigma + \frac{1}{8\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D} + (hl + h'\lambda) \int \gamma_1 d\sigma,$$

$D$  étant une notation abrégée pour  $D(0, 0)$ .

\*) Si les intégrales dépendant de  $x$  n'existaient pas au point de vue ordinaire, on en préciserait le sens comme il a été expliqué au n° 3, et l'on parviendrait encore à l'inégalité (4).

Réduisons la maintenant autant que possible.

En entendant par  $\omega$  la vitesse angulaire pour une figure d'équilibre quelconque, nous poserons, comme nous l'avons déjà fait dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} = \Omega$$

et nous désignerons par  $\Omega_0$  la valeur de  $\Omega$  pour l'ellipsoïde E.

Si nous posons ensuite

$$\frac{\rho}{2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t(t+1)(t+q)}} = R$$

et si nous désignons  $G(\rho, \theta, \psi)$  par  $G_0$ , nous aurons, d'après ce que nous avons vu dans le Mémoire cité (n° 7),

$$U'_0(0) = - 2RG_0 - \Omega_0 \sin^2 \theta.$$

Portons donc cette valeur de  $U'_0(0)$  dans l'expression de  $\Delta_2 V$ .

En tenant compte de l'égalité (8) du n° 6, d'après laquelle on a

$$- \int \sin^2 \theta \gamma_1 d\sigma = \int (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta) \sin^2 \theta \gamma_2 d\sigma,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [U_f(\zeta) \gamma_2 + U'_0(0) \gamma_1] d\sigma &= - R \int G_0 \gamma_1 d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} \int [U_f(\zeta) + \Omega_0 (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta) \sin^2 \theta] \gamma_2 d\sigma. \end{aligned}$$

Or nous choisirons la figure f de telle manière que l'on aura une égalité de la forme

$$(5) \quad \int [U_f(\zeta) + \Omega_0 (x^2 + y^2)] \gamma_2 d\sigma = h_0 l \int \gamma_1 d\sigma,$$

les coordonnées  $x$  et  $y$  appartenant à un point de la surface de cette figure, de sorte que

$$x^2 + y^2 = (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta) \sin^2 \theta.$$

Vu cela, et en changeant convenablement les valeurs de  $h$  et de  $h'$ , nous pourrons réduire notre expression de  $\Delta_2 V$  à la forme

$$\Delta_2 V = - R \int G_0 \gamma_1 d\sigma + \frac{1}{8\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D} + (hl + h'\lambda) \int \gamma_1 d\sigma.$$

Cela posé, nous allons introduire, au lieu de la fonction  $\gamma_1$ , la fonction  $\varphi$  définie par la formule

$$(6) \quad \varphi^2 = 2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x d\xi \int_0^{\xi} G' d\xi' - \gamma^2,$$

où le second membre, en vertu de l'inégalité (4), est toujours positif \*).

Par cette formule, qui donne

$$\varphi^2 + \gamma^2 = 2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x d\xi \int_0^{\xi} G' d\xi',$$

on voit que,  $l + \lambda$  étant au-dessous d'un nombre fixe moindre que  $\rho$ , la différence

$$\int G_0 \gamma_1 d\sigma - \frac{1}{2} \int (\varphi^2 + \gamma^2) d\sigma$$

ne dépassera pas, en valeur absolue, une quantité de la forme

$$N(l + \lambda) \int \gamma_1 d\sigma,$$

où  $N$  est un nombre fixe, et que, d'autre part, l'intégrale  $\int \gamma_1 d\sigma$  ne dépassera pas celle-ci

$$\int (\varphi^2 + \gamma^2) d\sigma$$

multipliée par un certain nombre fixe.

Par conséquent, en changeant encore une fois les valeurs de  $h$  et de  $h'$ , nous pouvons écrire

$$\Delta_2 V = -\frac{1}{2} R \int \gamma^2 d\sigma + \frac{1}{8\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D} - \frac{1}{2} R \int \varphi^2 d\sigma + (hl + h'\lambda) \int (\gamma^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

ou bien, en passant à  $\Delta_2 \Pi$ ,

$$(7) \quad \Delta_2 \Pi = \frac{1}{2} \left( R \int \gamma^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D} \right) + \frac{1}{2} R \int \varphi^2 d\sigma - (hl + h'\lambda) \int (\gamma^2 + \varphi^2) d\sigma.$$

---

\*) Nous avons désigné par la lettre  $\varphi$  l'angle entre les directions  $(\theta, \psi)$  et  $(\theta', \psi')$ , et maintenant nous lui attribuons encore une autre signification. Mais il n'en résultera aucune confusion, puisque nous n'aurons à employer cette lettre, dans une seule et même formule, que dans un sens, qui sera clair, soit par cette formule elle-même, soit par la nature de la question considérée.



Telle est l'expression générale de  $\Delta_2 \Pi$ .

On voit qu'elle dépend de deux fonctions,  $\gamma$  et  $\varphi$ , et ces fonctions, à certaines conditions près, pourront être considérées comme arbitraires et indépendantes.

Dans le cas où la fonction  $Z$ , en tout point de la surface de la sphère  $\Sigma$ , n'a qu'une seule valeur, il ne restera, de ces deux fonctions, qu'une seule, car la fonction  $\varphi$  sera alors identiquement nulle. En effet, dans ce cas, on a

$$\gamma = \int_0^{Z-\zeta} G d\zeta$$

et le second membre de l'égalité (6) devient

$$2 \int_0^{Z-\zeta} G d\zeta \int_0^{\zeta} G' d\zeta' - \left( \int_0^{Z-\zeta} G d\zeta \right)^2,$$

ce qui est égal à zéro.

**12.** Nous allons maintenant tenir compte des conditions dont il a été parlé au n° 6.

Parmi ces conditions, les unes sont de la forme

$$\int F(\theta, \psi) \gamma d\sigma = 0,$$

les autres, de la forme

$$\int F(\theta, \psi) \gamma d\sigma = h \int \gamma_1 d\sigma + h'l \int |\gamma| d\sigma,$$

$F(\theta, \psi)$  étant une fonction donnée.

Or, en introduisant au lieu de  $\gamma$  une certaine autre fonction  $\tau$ , on pourra faire en sorte que toutes les conditions soient de la forme

$$\int F(\theta, \psi) \tau d\sigma = 0.$$

A cet effet nous poserons

$$\gamma = \tau + w,$$

en entendant par  $w$  une expression de la forme

$$w = a_1 \sin \theta \cos \psi + a_2 \sin \theta \sin \psi + a_3 \cos \theta + b \Theta + c \sin^2 \theta \sin 2\psi,$$

où

$$\Theta = (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta - \frac{1}{3} (2\rho + 1 + q),$$

$a_1, a_2, a_3, b, c$  étant des constantes. Nous admettrons d'ailleurs, dans tous les cas, les égalités

$$\int \sin\theta \cos\psi w d\sigma = \int \sin\theta \cos\psi \chi d\sigma,$$

$$\int \sin\theta \sin\psi w d\sigma = \int \sin\theta \sin\psi \chi d\sigma,$$

$$\int \cos\theta w d\sigma = \int \cos\theta \chi d\sigma,$$

$$\int \Theta w d\sigma = \int \Theta \chi d\sigma,$$

qui détermineront les quatre premières constantes. Quant à  $c$ , si l'ellipsoïde E est à trois axes inégaux, nous déterminerons cette constante par l'équation

$$\int \sin^2\theta \sin 2\psi w d\sigma = \int \sin^2\theta \sin 2\psi \chi d\sigma$$

et, si E est un ellipsoïde de révolution, nous poserons  $c = 0$ .

Alors, eu égard à ce qu'on a

$$\int \Theta d\sigma = 0,$$

nous aurons, dans tous les cas, ces conditions:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \tau d\sigma = 0, \\ \int \sin\theta \cos\psi \tau d\sigma = 0, \\ \int \sin\theta \sin\psi \tau d\sigma = 0, \\ \int \cos\theta \tau d\sigma = 0, \\ \int \Theta \tau d\sigma = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles, pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux, il faudra en ajouter celle-ci :

$$(9) \quad \int \sin^2 \theta \sin 2\psi \tau d\sigma = 0;$$

et ce seront les seules conditions que nous admettrons. quand il s'agira des cas ordinaires et du minimum non conditionnel. Quant aux cas singuliers, nous en aurons encore une qui sera signalée plus loin et en outre, si l'ellipsoïde E est de révolution, une condition de la forme

$$(10) \quad \int P \sin k\psi \tau d\sigma = 0$$

qui jouera alors le rôle de celle (9).

En même temps, pour ce qui concerne les constantes  $a_1, a_2, a_3, b, c$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} a_1 &= h_1 \int \gamma_1 d\sigma + h'_1 l \int |\gamma| d\sigma, \\ \frac{4\pi}{3} a_2 &= h_2 \int \gamma_1 d\sigma + h'_2 l \int |\gamma| d\sigma, \\ \frac{4\pi}{3} a_3 &= h_3 \int \gamma_1 d\sigma + h'_3 l \int |\gamma| d\sigma, \\ b \int \Theta^2 d\sigma &= - \int \sin^2 \theta \gamma_1 d\sigma - \int \sin^2 \theta \zeta \gamma d\sigma, \\ \frac{16\pi}{15} c &= h_4 \int \gamma_1 d\sigma + h'_4 l \int |\gamma| d\sigma; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que chacune de ces constantes sera de la forme

$$h \int \gamma_1 d\sigma + h'l \int |\gamma| d\sigma;$$

et il est à remarquer que toute expression de cette forme se réduit à celle-ci :

$$(hl + h'\lambda) \left[ \int (\gamma^2 + \varphi^2) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**13.** Reportons-nous maintenant à la formule (7) pour y introduire la fonction  $\tau$ .

Par le choix de la fonction  $w$  il vient

$$\int \chi^2 d\sigma = \int \tau^2 d\sigma + \int w^2 d\sigma,$$

et l'on a

$$\iint \frac{\chi\chi' d\sigma d\sigma'}{D} = \iint \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D} + 2 \int \chi d\sigma \int \frac{w' d\sigma'}{D} - \iint \frac{ww' d\sigma d\sigma'}{D}.$$

Or, de ce que nous venons d'observer au sujet des constantes  $a_i, b, c$ , on conclut que les intégrales

$$\int w^2 d\sigma, \quad \iint \frac{ww' d\sigma d\sigma'}{D}, \quad \int \chi d\sigma \int \frac{w' d\sigma'}{D}$$

seront des quantités de la forme

$$(hl + h'\lambda) \int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma^*).$$

On voit d'ailleurs que l'intégrale

$$\int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma$$

peut être remplacée, dans cette expression, par celle-ci:

$$\int (\tau^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

car l'égalité

$$\int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma = \int (\tau^2 + \varphi^2) d\sigma + \int w^2 d\sigma$$

montre que le rapport des deux intégrales en question peut être rendu, en faisant  $l$  et  $\lambda$  suffisamment petits, aussi peu différent de 1 que l'on veut.

Donc, en introduisant la fonction  $\tau$ , on aura pour  $\Delta_2\Pi$  une expression toute semblable à celle (7), savoir

$$(11) \quad \Delta_2\Pi = \frac{1}{2} \left( R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D} \right) + \frac{1}{2} R \int \varphi^2 d\sigma - (hl + h'\lambda) \int (\tau^2 + \varphi^2) d\sigma;$$

\*) Les deux premières intégrales seront même de la forme

$$(hl + h'\lambda)^2 \int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma.$$

mais la nouvelle expression a cet avantage que les deux fonctions  $\tau$  et  $\varphi$ , qui y figurent, peuvent être considérées comme entièrement indépendantes l'une de l'autre.

**14.** Par la formule (11) on voit que la recherche des conditions pour que  $\Delta_2\Pi$  soit toujours positif, tant que  $l$  et  $\lambda$  sont assez petits, se réduit à l'examen de l'expression

$$(12) \quad R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D},$$

qui n'est autre chose que la variation seconde de  $\Pi$ , obtenue dans la supposition d'invariabilité du moment d'inertie  $S$ .

Pour cela, en considérant le rapport de l'expression ci-dessus à l'intégrale

$$\int \tau^2 d\sigma,$$

on en cherchera le minimum sous les conditions que devra vérifier la fonction  $\tau$  (n° 12), et qui seront toutes linéaires et homogènes par rapport à cette fonction.

Soit  $t$  ce minimum, de sorte que, sous lesdites conditions, on ait toujours

$$R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D} \geq t \int \tau^2 d\sigma.$$

Alors il viendra

$$(13) \quad \Delta_2\Pi > \left(\frac{1}{2}t - hl - h'\lambda\right) \int (\tau^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

le nombre  $t$  étant évidemment plus petit que  $R^*$ ).

Donc, si  $t$  est un nombre positif,  $\Delta_2\Pi$  le sera encore, et cela quelles que soient les fonctions  $\tau$  et  $\varphi$ , pourvu que  $l$  et  $\lambda$  soient assez petits.

On voit aussi que, si  $t$  est négatif, on pourra toujours rendre  $\Delta_2\Pi$  négatif: il suffira de poser  $\varphi = 0$  et de prendre pour  $\tau$  une fonction pour laquelle on ait

$$R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D} = t \int \tau^2 d\sigma,$$

en faisant, en même temps,  $l$  et  $\lambda$  suffisamment petits.

\*) On sait, en effet, que l'intégrale

$$\iint \frac{\tau\tau' d\sigma d\sigma'}{D}$$

représente toujours un nombre positif.

Ainsi tout se réduit à chercher le nombre  $t$ , et ce ne serait que dans le cas de  $t = 0$  que cette recherche ne conduirait pas à une conclusion décisive. Mais, comme nous le verrons plus loin, on pourra toujours faire en sorte que ce cas ne se présente pas: il n'y aura, à cet effet, qu'à disposer convenablement de la figure auxiliaire  $f$ , que nous avons introduite précisément dans le but d'éviter le cas dont il s'agit.

Quant à la recherche du nombre  $t$ , on pourra se servir de la méthode que nous avons employée dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*.

Cette méthode consiste à développer la fonction  $\tau$  en une série de fonctions sphériques (sous la forme des produits de Lamé); et, bien qu'elle semble imposer ainsi à cette fonction certaines restrictions, elle est absolument générale, car l'expression qui en découle pour la formule (12) est valable dans tous les cas et ne dépend en aucune façon de la supposition que la fonction  $\tau$  soit réellement développable en ladite série. Cela résulte d'une proposition sur les fonctions sphériques que j'ai rencontrée depuis longtemps, et qui n'est aujourd'hui qu'un cas particulier d'un théorème général dû à M. Stekloff \*).

Je vais m'arrêter à cette proposition, en reproduisant l'analyse que j'ai développée dans les séances de la Société Mathématique de Kharkow en 1897, sans l'avoir encore publiée.

### III. — DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION AUXILIAIRE.

15. Soit  $F(\theta, \psi) = F$  une fonction donnée sur la surface de la sphère  $\Sigma$ .

Si cette fonction est développable en une série de fonctions sphériques, uniformément convergente sur ladite surface, nous aurons

$$(1) \quad F(\theta, \psi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots,$$

où

$$(2) \quad Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int F(\theta', \psi') P_n(\cos \varphi) d\sigma',$$

$P_n(x)$  étant le polynôme de Legendre d'ordre  $n$  à l'argument  $x$ , et  $\varphi$  représentant l'angle entre les directions  $(\theta, \psi)$  et  $(\theta', \psi')$ .

\*) Voir le Mémoire de M. Stekloff, *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions employées dans l'Analyse* (Mém. de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg, VIII<sup>e</sup> série, t. XV, 1904).

Nous aurons ensuite

$$(3) \quad \int F^2 d\sigma = \sum \int Y_n^2 d\sigma,$$

la somme étant étendue à  $n = 0, 1, 2, \dots$

Or on peut montrer que cette dernière formule ne dépend nullement de la possibilité du développement (1).

C'est ce que nous allons faire maintenant: en nous bornant à la supposition que la fonction  $F$  soit limitée, nous allons établir que l'égalité (3), où les  $Y_n$  sont donnés par la formule (2), a lieu toutes les fois que  $F$  est une fonction intégrable sur la surface de la sphère  $\Sigma$ , c'est-à-dire, toutes les fois que les intégrales qui figurent dans les formules (2) et (3) ont un sens communément adopté \*).

16. Soit

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(1-r^2) F(\theta', \psi') d\sigma'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$r$  étant le rayon vecteur d'un point à l'intérieur de la sphère  $\Sigma$ .

C'est une formule bien connue, qui donne la solution du problème de Dirichlet pour la sphère  $\Sigma$ , quand la fonction harmonique à l'intérieur de cette sphère doit se réduire sur la surface à la fonction  $F(\theta, \psi)$ ; et l'on sait, en effet, que, si  $F$  est une fonction continue,  $V$  tendra vers  $F$ , toutes les fois que  $r$  tend vers 1 en restant toujours moindre que 1.

Or, sans supposer que la fonction  $F$  soit continue, nous admettons seulement que c'est une fonction intégrable sur la surface de la sphère  $\Sigma$ .

Dans ce cas,  $r$  tendant vers 1,  $V$  ne tendra, en général, vers aucune limite.

Nonobstant cela, l'intégrale

$$\int |V - F| d\sigma$$

tendra toujours vers zéro, comme nous allons le prouver à l'instant.

Remarquons d'abord que l'égalité connue

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{(1-r^2) d\sigma'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

---

\*) Dans les raisonnements qui vont suivre, nous supposons que  $F$  soit une fonction réelle. Mais la proposition que nous voulons établir n'est pas, évidemment, sujette à cette restriction et, une fois établie pour les fonctions réelles, elle s'étend d'elle-même au cas des fonctions à des valeurs complexes.

permet d'écrire

$$V - F = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(1-r^2)(F' - F) d\sigma'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où, conformément aux notations que nous avons adoptées,  $F' = F(\theta', \psi')$ .

Nous aurons donc

$$\int |V - F| d\sigma < \frac{1-r^2}{4\pi} \iint \frac{|F - F'| d\sigma d\sigma'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cela posé, décomposons la surface de la sphère  $\Sigma$  en des portions mesurables quelconques,

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \dots, \quad \sigma_n,$$

dont les aires seront désignées par les mêmes notations, et désignons par

$$\bar{\sigma}_1, \quad \bar{\sigma}_2, \quad \bar{\sigma}_3, \quad \dots, \quad \bar{\sigma}_n$$

les régions de la même surface complémentaires à ces portions, de sorte que  $\bar{\sigma}_i$  représentera l'ensemble de tous les  $\sigma_j$ , autres que  $\sigma_i$ .

Nous pourrions alors présenter l'intégrale

$$\iint \frac{|F - F'| d\sigma d\sigma'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sous la forme

$$\sum_{i=1}^n \iint \frac{|F - F'| d\sigma_i d\sigma_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{i=1}^n \iint \frac{|F - F'| d\bar{\sigma}_i d\bar{\sigma}_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où, dans chaque terme de la première somme, les deux intégrations indiquées s'étendent à une seule et même portion superficielle  $\sigma_i$ , tandis que, dans chaque terme de la seconde somme, elles s'étendent à deux parties complémentaires,  $\sigma_i$  et  $\bar{\sigma}_i$ , de la surface de la sphère  $\Sigma$ .

Or, en remarquant que

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{(1-r^2) d\sigma_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} < 1,$$



NOUS AVONS

$$\frac{1-r^2}{4\pi} \iint \frac{|F-F'| d\sigma_i d\sigma_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} < \delta_i \sigma_i,$$

$\delta_i$  étant l'oscillation de la fonction  $F$  dans l'étendue de  $\sigma_i$ .

Par suite,  $L$  étant une limite supérieure pour la valeur absolue de la même fonction sur la surface de la sphère tout entière, il viendra

$$\int |V-F| d\sigma < \sum \delta_i \sigma_i + \frac{L}{2\pi} \sum \iint \frac{(1-r^2) d\bar{\sigma}_i d\sigma_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où les sommes s'étendent à  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Nous remarquons maintenant que, la fonction  $F$  étant intégrable, on pourra, en prenant le nombre  $n$  suffisamment grand et en faisant les plus grandes dimensions linéaires de tous les  $\sigma_i$  suffisamment petites, rendre la somme

$$\sum \delta_i \sigma_i$$

(qui ne dépend point de  $r$ ) aussi petite qu'on veut.

D'autre part, nous allons tout de suite montrer que, les  $\sigma_i$  étant fixés, la somme

$$(4) \quad \sum \iint \frac{(1-r^2) d\bar{\sigma}_i d\sigma_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pourra être rendue aussi petite qu'on veut, en faisant  $r$  suffisamment voisin de 1.

Or, s'il en est ainsi, on pourra, en choisissant convenablement les  $\sigma_i$ , prendre  $r$  assez peu différent de 1 pour qu'on ait

$$\sum \delta_i \sigma_i + \frac{L}{2\pi} \sum \iint \frac{(1-r^2) d\bar{\sigma}_i d\sigma_i'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif  $\varepsilon$ ; et l'on aura alors

$$\int |V-F| d\sigma < \varepsilon,$$

ce qui revient à dire que,  $r$  tendant vers 1, l'intégrale

$$\int |V - F| d\sigma$$

tendra vers zéro.

Il ne reste donc qu'à démontrer ce que nous avons dit au sujet de la somme (4) et, pour cela, il suffit d'établir que chaque terme de cette somme tend pour  $r = 1$  vers zéro.

Considérons donc l'intégrale

$$J = \iint \frac{(1-r^2) d\sigma d\sigma'}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en supposant cette fois-ci que les intégrations s'étendent non pas à toute la surface de la sphère, mais à des régions mesurables quelconques,  $\sigma$  et  $\sigma'$ , en lesquelles on pourra diviser cette surface en y traçant une ligne fermée.

En décomposant l'une de ces régions, par exemple  $\sigma$ , en deux portions mesurables  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ , nous aurons

$$J = J_0 + J_1,$$

$J_0$  et  $J_1$  étant des intégrales de la même forme que  $J$ , où les intégrations relatives à  $d\sigma$  sont étendues respectivement à  $\sigma_0$  et à  $\sigma_1$ .

Nous supposons que  $\sigma_1$  n'ait aucun point commun avec  $\sigma'$ .

Or, en même temps, on peut supposer que l'aire de  $\sigma_0$ , que nous désignerons encore par  $\sigma_0$ , soit aussi petite que l'on veut.

Alors, comme on a

$$J_0 < 4\pi\sigma_0,$$

on pourra rendre  $J_0$  aussi petit qu'on veut en faisant  $\sigma_0$  suffisamment petit et, d'autre part, comme dans l'intégrale  $J_1$  l'angle  $\varphi$  admettra une limite inférieure non nulle, on pourra rendre cette intégrale aussi petite qu'on veut en faisant, après avoir fixé  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ ,  $r$  suffisamment peu différent de 1.

On pourra donc satisfaire de cette manière à l'inégalité

$$J < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre  $\varepsilon$ , et de là on peut conclure que,  $r$  tendant vers 1,  $J$  tendra vers zéro.

Donc les termes de la somme (4), et par suite cette somme elle-même, tendront pour  $r = 1$  vers zéro.

17. Nous venons d'établir l'égalité

$$\lim_{r=1} \int |V - F| d\sigma = 0,$$

et l'on peut en conclure

$$\lim_{r=1} \int (V^2 - F^2) d\sigma = 0;$$

car,  $|V|$  étant inférieur à  $L$ , on a

$$\left| \int (V^2 - F^2) d\sigma \right| < 2L \int |V - F| d\sigma.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que,  $r$  tendant vers 1, l'intégrale

$$\int V^2 d\sigma$$

tendra vers celle-ci

$$\int F^2 d\sigma.$$

Or, comme  $r$  est supposé être moindre que 1, la fonction  $V$  est développable suivant les puissances entières et positives de  $r$ , et en effectuant ce développement on trouve

$$V = Y_0 + Y_1 r + Y_2 r^2 + \dots,$$

les  $Y_n$  ayant précisément les valeurs définies par la formule (2).

On a donc

$$\int V^2 d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \int Y_n^2 d\sigma,$$

et l'on peut, par suite, conclure que la série entière en  $r^2$  qui figure au second membre a une somme, tendant pour  $r^2 = 1$  vers l'intégrale

$$\int F^2 d\sigma.$$

Or la série que l'on en déduit en posant  $r^2 = 1$  est convergente.

En effet, en remarquant que la formule (2) donne

$$\int F Y_n d\sigma = \int Y_n^2 d\sigma,$$

et en faisant, pour abrégier,

$$Y_0 + Y_1 + \dots + Y_m = S_m,$$

on trouve

$$\int (F - S_m)^2 d\sigma = \int F^2 d\sigma - \sum_{n=0}^{n=m} \int Y_n^2 d\sigma;$$

ce qui fait voir que

$$\sum_{n=0}^{n=m} \int Y_n^2 d\sigma < \int F^2 d\sigma,$$

quelque grand que soit le nombre  $m$ ; et cela prouve bien que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int Y_n^2 d\sigma,$$

dont tous les termes sont positifs, est convergente.

Or, s'il en est ainsi, le théorème connu d'Abel nous apprend que l'on a

$$\sum \int Y_n^2 d\sigma = \lim_{r=1} \sum r^{2n} \int Y_n^2 d\sigma.$$

Nous parvenons donc à l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int Y_n^2 d\sigma = \int F^2 d\sigma$$

qu'il fallait établir.

**18.** Signalons une généralisation immédiate de notre proposition.

Soient  $F$  et  $\Phi$  des fonctions quelconques de  $\theta$  et  $\psi$ , intégrables sur la surface de la sphère  $\Sigma$ .

En posant

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int F' P_n(\cos\varphi) d\sigma' = Y_n,$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int \Phi' P_n(\cos\varphi) d\sigma' = Z_n,$$

nous aurons

$$\int F^2 d\sigma = \sum \int Y_n^2 d\sigma,$$

$$\int \Phi^2 d\sigma = \sum \int Z_n^2 d\sigma,$$

et l'on aura de même

$$\int (F + \Phi)^2 d\sigma = \sum \int (Y_n + Z_n)^2 d\sigma.$$

Or de là il vient

$$(5) \quad \int F\Phi d\sigma = \sum \int Y_n Z_n d\sigma.$$

C'est cette égalité que nous avons voulu signaler.

Remarquons que la série qui figure au second membre est *absolument convergente*, car on a

$$\left| \int Y_n Z_n d\sigma \right| < \frac{1}{2} \int (Y_n^2 + Z_n^2) d\sigma.$$

**19.** Nous allons maintenant présenter les égalités (3) et (5) sous une autre forme.

Soient

$$Y_{n,0}, \quad Y_{n,1}, \quad \dots, \quad Y_{n,2n}$$

des fonctions sphériques d'ordre  $n$  linéairement indépendantes, dont le nombre est égal, comme on sait, à  $2n+1$ .

On sait que ces fonctions peuvent être choisies de telle manière que l'on ait

$$\int Y_{n,i} Y_{n,j} d\sigma = 0,$$

toutes les fois que les nombres  $i$  et  $j$  sont inégaux.

En le supposant, nous aurons, pour toute fonction sphérique  $Y_n$  d'ordre  $n$ , cette égalité:

$$Y_n = A_{n,0} Y_{n,0} + A_{n,1} Y_{n,1} + \dots + A_{n,2n} Y_{n,2n},$$

où

$$A_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int Y_n Y_{n,s} d\sigma,$$

$\gamma_{n,s}$  représentant l'intégrale

$$\int (Y_{n,s})^2 d\sigma;$$

et nous aurons ensuite

$$\int Y_n^2 d\sigma = \sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s} (A_{n,s})^2.$$

Par suite, les  $Y_n$  étant donnés par la formule (2), il viendra, d'après (3),

$$(6) \quad \int F^2 d\sigma = \sum \gamma_{n,s} (A_{n,s})^2,$$

où la somme s'étend à  $s = 0, 1, 2, \dots, 2n$  et à toutes les valeurs de  $n$  à partir de  $n = 0$ . D'ailleurs, en vertu de (2), l'expression précédente de  $A_{n,s}$  se réduira à

$$(7) \quad A_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int F Y_{n,s} d\sigma.$$

Nous aurons donc l'égalité (6) pour toute fonction  $F$  intégrable sur la surface de la sphère  $\Sigma$ , en définissant les  $A_{n,s}$  par la formule (7).

De même, en partant de l'égalité (5), nous parviendrons à celle-ci

$$\int F \Phi d\sigma = \sum \gamma_{n,s} A_{n,s} B_{n,s},$$

où

$$A_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int F Y_{n,s} d\sigma,$$

$$B_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int \Phi Y_{n,s} d\sigma,$$

et cette égalité sera valable, quelles que soient les fonctions  $F$  et  $\Phi$ , intégrables sur la surface de la sphère  $\Sigma$ .

## IV. — APPLICATION DE LA PROPOSITION PRÉCÉDENTE.

20. Reportons-nous au n° 14 et profitons de la proposition établie pour présenter l'expression (12) sous forme d'une série.

A cet effet, en entendant, comme précédemment, par

$$Y_{n,0}, \quad Y_{n,1}, \quad \dots, \quad Y_{n,2n}$$

des fonctions sphériques d'ordre  $n$  linéairement indépendantes et telles qu'on ait

$$\int Y_{n,i} Y_{n,j} d\sigma = 0,$$

dès que  $i$  et  $j$  sont différents, posons

$$\int (Y_{n,s})^2 d\sigma = \gamma_{n,s}, \quad \int \tau Y_{n,s} d\sigma = \gamma_{n,s} a_{n,s}.$$

Alors il viendra

$$\int \tau^2 d\sigma = \sum \gamma_{n,s} (a_{n,s})^2,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs dont les indices  $s$  et  $n$  sont susceptibles.

En même temps, si nous posons encore

$$\int \left( \int \frac{\tau' d\sigma'}{D} \right) Y_{n,s} d\sigma = \gamma_{n,s} b_{n,s},$$

nous aurons

$$\iint \frac{\tau \tau' d\sigma d\sigma'}{D} = \sum \gamma_{n,s} a_{n,s} b_{n,s},$$

et les  $b_{n,s}$  pourront être exprimés linéairement au moyen des  $a_{n,s}$ .

Or, pour que ces expressions soient les plus simples possibles, il convient de spécialiser d'abord les  $Y_{n,s}$ , en prenant pour ces fonctions les produits de Lamé.

Faisons-le donc, en nous servant des notations que nous avons employées dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, auquel Mémoire nous renverrons pour tout ce qui concerne les fonctions de Lamé.

Nous poserons ainsi

$$Y_{n,s} = E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu),$$

$\mu$  et  $\nu$  étant des variables, liées à  $\theta$  et  $\psi$  par les équations

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\nu^2} &= \sqrt{1-q} \sin\theta \cos\psi, \\ \sqrt{q-\mu^2} \sqrt{\nu^2-q} &= \sqrt{q(1-q)} \sin\theta \sin\psi, \\ \mu\nu &= \sqrt{q} \cos\theta \end{aligned}$$

et assujetties aux inégalités

$$-\sqrt{q} < \mu < \sqrt{q}, \quad \sqrt{q} < \nu < 1.$$

Alors, en tenant compte des formules de Liouville, qui donnent

$$\int \frac{E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu)}{D} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \mathbf{E}_{n,s} \mathbf{F}_{n,s} E_{n,s}(\mu') E_{n,s}(\nu'),$$

on aura

$$b_{n,s} = \frac{4\pi}{2n+1} \mathbf{E}_{n,s} \mathbf{F}_{n,s} a_{n,s};$$

et il viendra ensuite

$$R \int \tau^2 d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\tau \tau' d\sigma d\sigma'}{D} = \sum T_{n,s} \gamma_{n,s} (a_{n,s})^2,$$

où

$$T_{n,s} = R - \frac{1}{2n+1} \mathbf{E}_{n,s} \mathbf{F}_{n,s}.$$

Les notations employées ici sont relatives au cas des ellipsoïdes à trois axes inégaux. Mais, dans le Mémoire cité plus haut, nous avons montré ce qu'elles représentent dans le cas des ellipsoïdes de révolution, qui est ici le cas limite auquel on passe en faisant tendre  $q$  vers 1.

Vu cela les formules précédentes s'appliquent non seulement au cas des ellipsoïdes de Jacobi, mais encore à celui des ellipsoïdes de Maclaurin.

**21.** Voyons maintenant à quoi se réduiront les conditions que doit vérifier la fonction  $\tau$ .

Parmi ces conditions, il y en a cinq qui doivent être remplies dans tous les cas: ce sont les conditions (8) du n° 12. Exprimons les au moyen des  $a_{n,s}$ .

Les quatre premières de ces conditions s'écriront alors simplement

$$(1) \quad a_{0,0} = 0, \quad a_{1,0} = 0, \quad a_{1,1} = 0, \quad a_{1,2} = 0.$$



Quant à la cinquième, elle se réduira à une relation linéaire entre  $a_{2,0}$  et  $a_{2,4}$ .

En effet, on a

$$\Theta = (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta - \frac{1}{3} (2\rho + 1 + q),$$

et l'on voit facilement que c'est une fonction sphérique de  $\theta$  et  $\psi$  du second ordre. On aura donc

$$\Theta = \sum_{s=0}^{s=4} g_s E_{2,s}(\mu) E_{2,s}(\nu),$$

les  $g_s$  étant des constantes. D'ailleurs,  $\Theta$  étant une fonction paire par rapport à chacun des deux arguments

$$\sin\theta \cos\psi \quad \text{et} \quad \sin\theta \sin\psi$$

dont elle dépend, le second membre ne renfermera que des produits de Lamé dépourvus des radicaux, et ces produits, avec les notations que nous avons employées dans le *Mémoire Sur les figures d'équilibre*, et que nous retenons ici, sont représentés par

$$E_{2,0}(\mu) E_{2,0}(\nu) \quad \text{et} \quad E_{2,4}(\mu) E_{2,4}(\nu).$$

Ainsi nous aurons

$$\Theta = g_0 E_{2,0}(\mu) E_{2,0}(\nu) + g_4 E_{2,4}(\mu) E_{2,4}(\nu),$$

d'où il vient

$$\int \Theta \tau d\sigma = g_0 \gamma_{2,0} a_{2,0} + g_4 \gamma_{2,4} a_{2,4}.$$

Donc la condition dont il s'agit s'exprime ainsi:

$$(2) \quad g_0 \gamma_{2,0} a_{2,0} + g_4 \gamma_{2,4} a_{2,4} = 0.$$

Remarquons que dans le cas de  $q = 1$  cette condition se réduira à  $a_{2,0} = 0$ , car dans ce cas on a

$$\Theta = (\rho + 1) \left( \frac{1}{3} - \cos^2\theta \right) = -\frac{2}{3} (\rho + 1) P_2(\cos\theta)$$

et la fonction  $P_2(\cos\theta)$  est celle, par laquelle,  $q$  étant égal à 1, on doit remplacer le produit  $E_{2,0}(\mu) E_{2,0}(\nu)$ .

Par suite, pour  $q = 1$  on aura  $g_4 = 0$ .

Outre les conditions précédentes, nous en aurons, dans certains cas, encore d'autres. Mais elles seront toujours de la forme

$$a_{n,s} = 0.$$

Telle sera, par exemple, la condition (9) du n° 12, qui sera admise dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi: avec les notations adoptées, elle s'écrira ainsi:

$$a_{2,3} = 0.$$

Telle sera aussi la condition (10) du même numéro, que nous admettrons dans certains cas des ellipsoïdes de révolution; car, en choisissant convenablement les nombres  $m$  et  $k$ , nous prendrons pour  $P$  la fonction  $P_{m,k}(\cos\theta)$  que l'on déduit du polynôme de Legendre  $P_m(x)$  par la formule

$$P_{m,k}(x) = (\sqrt{1-x^2})^k \frac{d^k P_m(x)}{dx^k},$$

et la fonction  $P_{m,k}(\cos\theta) \sin k\psi$  est celle, par laquelle sera remplacé, dans le cas de  $q = 1$ , le produit  $E_{m,2k-1}(\mu) E_{m,2k-1}(\nu)$ . Cette condition sera donc

$$a_{m,2k-1} = 0.$$

Enfin, de la même forme seront aussi les conditions que nous aurons à considérer en traitant certains problèmes de minimum conditionnel de II.

**22.** Il est facile maintenant de montrer comment on pourra déterminer le nombre  $t$  dont il a été parlé au n° 14.

Ce nombre doit être tel que, sous les conditions que doivent vérifier les  $a_{n,s}$ , on ait toujours

$$\sum T_{n,s} \gamma_{n,s} (a_{n,s})^2 - t \sum \gamma_{n,s} (a_{n,s})^2 \geq 0,$$

et que, d'ailleurs, le premier membre soit susceptible de s'annuler sans que tous les  $a_{n,s}$  se réduisent à zéro.

Or, d'après ce que nous venons de dire, toutes les conditions seront de la forme

$$a_{n,s} = 0,$$

sauf une seule, celle (2), en vertu de laquelle il viendra

$$T_{2,0} \gamma_{2,0} (a_{2,0})^2 + T_{2,t} \gamma_{2,t} (a_{2,t})^2 = T [\gamma_{2,0} (a_{2,0})^2 + \gamma_{2,t} (a_{2,t})^2],$$

où

$$(3) \quad T = \frac{g_0^2 \gamma_{2,0} T_{2,4} + g_4^2 \gamma_{2,4} T_{2,0}}{g_0^2 \gamma_{2,0} + g_4^2 \gamma_{2,4}}.$$

Donc, pour obtenir  $t$ , il faudra d'abord rechercher le plus petit nombre de l'ensemble des  $T_{n,s}$ , autres que  $T_{2,0}$  et  $T_{2,4}$ , et tels que les  $a_{n,s}$  correspondants ne soient pas assujettis à être nuls.

Soit  $T_0$  ce nombre.

Alors, si  $a_{2,0}$  et  $a_{2,4}$  ne sont pas assujettis à être *simultanément* nuls, le nombre  $t$  sera donné par le plus petit des nombres  $T_0$  et  $T$ . Si au contraire on a, parmi les conditions, chacune des deux égalités

$$a_{2,0} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2,4} = 0,$$

le nombre  $t$  sera égal à  $T_0$ .

Au reste, il n'est pas nécessaire d'avoir la valeur de  $t$ : il faut seulement en connaître le signe.

Or, si l'on se borne à la recherche de ce signe, on peut simplifier l'analyse, en rejetant, de l'ensemble des nombres dont on cherche le plus petit, tous ceux qui ne peuvent jamais s'annuler et qui restent toujours positifs. Voyons donc ce que deviendra cet ensemble ainsi réduit.

**23.** Examinons d'abord le signe du nombre  $T$  défini par la formule (3).

Si l'on se trouve dans le cas des ellipsoïdes de révolution, on aura

$$T = T_{2,4},$$

puisque  $g_4$  se réduit alors à zéro; et  $T_{2,4}$ , qui se réduit dans ce cas à ce que nous avons désigné dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre* par  $T'_{2,2}$ , est positif ou négatif, suivant que l'ellipsoïde considéré est moins aplati ou plus aplati que l'ellipsoïde de révolution appartenant à la série des ellipsoïdes de Jacobi.

Il n'y a donc à examiner que le cas des ellipsoïdes de Jacobi à trois axes inégaux.

Dans ce cas,  $T$  représente un certain nombre intermédiaire entre  $T_{2,0}$  et  $T_{2,4}$ . Mais cela ne nous apprend rien sur le signe de  $T$ , car dans le cas considéré on a toujours

$$(4) \quad T_{2,0} > 0, \quad T_{2,4} < 0^*).$$

Toutefois, en partant de la formule (3), on peut obtenir pour  $T$  une autre expression, qui permettra de faire à cet égard une conclusion déterminée.

---

\*) Voir le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, pages 108 et 109.

Pour y parvenir, nous allons considérer le moment d'inertie  $S$  pour les ellipsoïdes de Jacobi à un seul et même volume comme fonction du paramètre  $\Omega$  que nous avons considéré au n° 11; et, en formant la dérivée

$$\frac{dS}{d\Omega},$$

nous en chercherons la valeur pour  $\Omega = \Omega_0$ .

Représentons les équations des ellipsoïdes de Jacobi assez peu différents de l'ellipsoïde E par

$$x = \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin\theta \cos\psi,$$

$$y = \sqrt{\rho + q + \zeta} \sin\theta \sin\psi,$$

$$z = \sqrt{\rho + \zeta} \cos\theta.$$

Alors il viendra

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \int \sin^2\theta \, d\sigma \int_0^\zeta (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + u) G(\rho + u, \theta, \psi) \, du,$$

et, d'après ce que nous avons vu dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, la fonction  $\zeta$  vérifiera l'équation

$$R G_0 \zeta - \frac{1}{4\pi} \int \frac{G'_0 \zeta' d\sigma'}{D} = \frac{1}{2} W + \text{const.},$$

où

$$G_0 = G(\rho, \theta, \psi), \quad G'_0 = G(\rho, \theta', \psi')$$

et  $W$  est donné par la formule

$$W = \eta (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + \zeta) \sin^2\theta + U_2 + U_3 + \dots,$$

dans laquelle  $\eta$  désigne la différence  $\Omega - \Omega_0$ ; quant à  $U_2, U_3, \dots$ , ce sont certaines quantités dépendant de la fonction  $\zeta$ , quantités dont les ordres par rapport à cette fonction, supposée petite, sont indiqués par les indices.

En même temps, en vertu de la condition de l'invariabilité de volume, nous aurons

$$\int d\sigma \int_0^\zeta G(\rho + u, \theta, \psi) \, du = 0.$$

Si nous supposons d'ailleurs que les axes de tous les ellipsoïdes considérés coïncident avec les axes des coordonnées,  $\zeta$  sera une fonction parfaitement déterminée de  $\theta, \psi$  et du paramètre  $\eta$ , s'annulant pour  $\eta = 0$ .

Cela posé et en différentiant les équations précédentes, nous aurons

$$\frac{dS}{d\Omega} = \frac{1}{2} \int \sin^2\theta (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + \zeta) G(\rho + \zeta, \theta, \psi) \frac{\partial \zeta}{\partial r} d\sigma,$$

$$R G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{G'_0 \frac{\partial \zeta'}{\partial r} d\sigma'}{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial r} + \text{const.},$$

$$\int G(\rho + \zeta, \theta, \psi) \frac{\partial \zeta}{\partial r} d\sigma = 0.$$

Faisons maintenant  $\Omega = \Omega_0$  et, par suite,

$$r = 0, \quad \zeta = 0.$$

Alors, les valeurs correspondantes des dérivées  $\frac{dS}{d\Omega}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$  étant désignées respectivement par  $S'_0$  et par  $\zeta_1$ , il viendra

$$S'_0 = \frac{1}{2} \int \sin^2\theta (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) G_0 \zeta_1 d\sigma,$$

et, comme on aura

$$\int G_0 \zeta_1 d\sigma = 0,$$

cela se réduira à

$$S'_0 = \frac{1}{2} \int \Theta G_0 \zeta_1 d\sigma = \frac{1}{2} g_0 \int G_0 \zeta_1 Y_{2,0} d\sigma + \frac{1}{2} g_4 \int G_0 \zeta_1 Y_{2,4} d\sigma,$$

en écrivant, pour abrégier,  $Y_{n,s}$  au lieu de  $E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu)$ .

En remarquant ensuite que la dérivée  $\frac{\partial W}{\partial r}$  se réduit pour  $r = 0$

$$(\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta = \Theta + \text{const.},$$

nous aurons

$$R G_0 \zeta_1 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{G'_0 \zeta'_1 d\sigma'}{D} = \frac{1}{2} \Theta *),$$

---

\*) Nous n'avons pas ajouté la constante, qui sera nulle en vertu de la condition

$$\int G_0 \zeta_1 d\sigma = 0.$$

et de là il vient

$$T_{2,0} \int G_0 \zeta_1 Y_{2,0} d\sigma = \frac{1}{2} g_0 \gamma_{2,0},$$

$$T_{2,4} \int G_0 \zeta_1 Y_{2,4} d\sigma = \frac{1}{2} g_4 \gamma_{2,4}.$$

Par suite, nous obtenons

$$S'_0 = \frac{1}{4} \left( \frac{g_0^2 \gamma_{2,0}}{T_{2,0}} + \frac{g_4^2 \gamma_{2,4}}{T_{2,4}} \right).$$

D'après cela, en nous reportant à la formule (3), nous pouvons la présenter sous la forme

$$T = \frac{4T_{2,0}T_{2,4}S'_0}{g_0^2\gamma_{2,0} + g_4^2\gamma_{2,4}},$$

où l'on a d'ailleurs

$$g_0^2\gamma_{2,0} + g_4^2\gamma_{2,4} = \int \Theta^2 d\sigma.$$

Maintenant il est facile de voir quel est le signe de  $T$ .

En effet, par la théorie des ellipsoïdes de Jacobi, on sait que le moment d'inertie  $S$  croît constamment, quand la vitesse angulaire  $\omega$  décroît à partir de son maximum, qui correspond à l'ellipsoïde de révolution. On sait d'ailleurs que le moment des quantités de mouvement  $S\omega$  est dans le même cas.

De là il résulte que la dérivée  $\frac{dS}{d\omega}$  sera négative et que, d'ailleurs, elle ne s'annulera jamais. Il en sera donc de même de la dérivée  $\frac{dS}{d\Omega}$ , puisque  $\Omega$  n'est autre chose que  $\omega^2$  multiplié par une certaine constante.

Ainsi nous aurons, pour tous les ellipsoïdes de Jacobi,  $S'_0 < 0$  et, par suite, en vertu de (4),

$$T > 0,$$

où l'inégalité ne pourra se réduire à l'égalité que pour l'ellipsoïde de Jacobi de révolution, quand  $T = T_{2,4} = 0$ .

**24.** Par ce que nous venons de montrer, on voit que, dans le cas des ellipsoïdes à trois axes inégaux, on pourra, en recherchant le signe de  $t$ , faire abstraction du nombre  $T$  et ne considérer que les  $T_{n,s}$ , autres que  $T_{2,0}$  et  $T_{2,4}$ . Quant au cas des ellipsoïdes de révolution, en général, on devra encore prendre en considération le nombre  $T_{2,4} = T'_{2,2}$ .

Du reste, comme on devra rejeter tous les  $T_{n,s}$  pour lesquels les  $a_{n,s}$  correspondants sont assujettis à être nuls, il n'y aura à tenir compte, vu les conditions (1), que des  $T_{n,s}$  pour lesquels  $n \geq 2$ .

Cela posé, considérons d'abord le cas des ellipsoïdes de révolution.

Dans ce cas, on aura

$$T_{n,2l-1} = T_{n,2l},$$

et nous poserons, comme dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*,

$$T_{n,2l} = T'_{n,l}.$$

Nous aurons donc à considérer un ensemble des  $T'_{n,l}$  pour lesquels  $n \geq 2$ .

Or, d'après ce que nous avons montré dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*, ceux de ces  $T'_{n,l}$ , pour lesquels  $n + l$  est un nombre impair, ne s'annulent jamais et représentent des nombres positifs.

On pourra donc ne considérer que les  $T'_{n,l}$  pour lesquels

$$n \geq 2 \quad \text{et} \quad n + l = \text{nombre pair.}$$

Cela étant, on rejettera  $T'_{2,0}$ , ainsi que les autres  $T'_{n,l}$ , s'il en existe, tels que, parmi les conditions imposées aux  $a_{n,s}$ , on ait celles-ci :

$$\begin{aligned} \text{pour } l > 0, \quad a_{n,2l-1} = a_{n,2l} = 0, \\ \text{pour } l = 0, \quad a_{n,0} = 0. \end{aligned}$$

Alors les  $T'_{n,l}$  qui restent constitueront cet ensemble réduit dont la considération suffira pour déterminer le signe de  $t$ .

Pour cela, on cherchera celui des  $T'_{n,l}$  dont il s'agit, qui est algébriquement le plus petit, et l'on en déterminera le signe, qui sera celui de  $t$ .

Quant à cette recherche, il pourra être utile d'avoir égard à la proposition suivante, qui découle de ce qui a été montré dans le Mémoire cité ci-dessus :

*Si les nombres  $n, l, m, k$  vérifient les conditions*

$$\begin{aligned} n + l + m + k &= \text{nombre pair,} \\ n \geq m, \quad n^2 + n - l^2 &\geq m^2 + m - k^2, \end{aligned}$$

*on aura*

$$T'_{n,l} > T'_{m,k},$$

où l'inégalité ne se réduira pas à l'égalité, tant que l'on n'a pas simultanément  $n = m$ ,  $l = k^*$ ).

De cette proposition on déduit, entre autres, ces trois suites d'inégalités :

$$T'_{2,2} < T'_{3,3} < T'_{4,4} < \dots,$$

$$T'_{n,n} < T'_{n,n-2} < T'_{n,n-4} < \dots,$$

$$T'_{n,n} < T'_{n-2,n} < T'_{n-4,n} < \dots,$$

d'où l'on voit que, parmi les  $T'_{n,l}$ , pour lesquels  $n \geq 2$  et  $n - l$  est un nombre pair,  $T'_{2,2}$  est celui qui est algébriquement le plus petit.

Par suite, si au moins une des deux quantités  $a_{2,3}$ ,  $a_{2,4}$  n'est pas assujettie à être nulle, le signe de  $t$  sera celui de  $T'_{2,2}$ .

Rappelons enfin que, d'après ce que nous avons montré dans les deux Mémoires cités plus haut, chacun des  $T'_{n,l}$  en question s'annulera toujours pour un certain ellipsoïde de révolution, en devenant positif, pour les ellipsoïdes moins aplatis, et négatif, pour les ellipsoïdes plus aplatis; mais, pour un seul et même ellipsoïde, ce n'est qu'un seul d'entre eux qui pourra s'annuler.

## 25. Considérons maintenant le cas des ellipsoïdes de Jacobi à trois axes inégaux.

Dans ce cas, on aura toujours

$$T_{2,3} = 0,$$

ce qui est l'équation caractéristique, par laquelle les ellipsoïdes de Jacobi se distinguent de tous les autres ellipsoïdes à trois axes inégaux.

Or nous avons vu au n° 21 que, parmi les conditions qui seront admises dans le cas considéré, on aura toujours celle  $a_{2,3} = 0$ . Donc le nombre  $T_{2,3}$  ne doit pas être pris en considération.

Par suite,  $T_{2,0}$  et  $T_{2,4}$  étant dans le même cas, nous n'avons à tenir compte que de  $T_{2,1}$ , de  $T_{2,2}$  et des  $T_{n,s}$  pour lesquels  $n \geq 3$ .

Or, dans les deux Mémoires cités, nous avons vu que  $T_{2,1}$ ,  $T_{2,2}$  et les  $T_{n,s}$  pour lesquels

$$n \geq 3 \quad \text{et} \quad s < 2n$$

sont positifs, sans jamais devenir nuls.

\*) Dans l'énoncé de cette proposition que nous avons donné dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre* (n° 35), il s'est glissé une erreur: la condition  $n^2 + n - l \geq m^2 + m - k$ , que l'on y trouve, doit être remplacée par celle  $n^2 + n - l^2 \geq m^2 + m - k^2$ , qui figure dans le présent énoncé.



Nous pouvons donc réduire l'ensemble des  $T_{n,s}$  à celui des  $T_{n,2n}$  correspondants à  $n \geq 3$ , et au sujet de cet ensemble nous avons établi que l'on a toujours

$$T_{3,6} < T_{4,8} < T_{5,10} < \dots,$$

où les inégalités ne se réduisent pas à des égalités.

Ainsi tout aboutit à la recherche du signe de  $T_{n,2n}$  pour la plus petite valeur de  $n$  dans la suite

$$3, \quad 4, \quad 5, \quad \dots,$$

telle que  $a_{n,2n}$  ne soit pas assujéti à être nul, et ce signe sera celui de  $t$ .

Ajoutons que chacun des  $T_{n,2n}$  pour lesquels  $n \geq 3$  s'annule pour un des ellipsoïdes de Jacobi à trois axes inégaux et que, d'ailleurs, il est positif pour les ellipsoïdes moins allongés et négatif pour les ellipsoïdes plus allongés.

#### V. — ÉTUDE DES CAS ORDINAIRES.

**26.** Ayant étudié l'accroissement réduit, nous devons en venir maintenant à l'accroissement restreint.

Cet accroissement dépend essentiellement du choix de la figure auxiliaire  $f$ , et à l'égard de cette figure on peut faire une hypothèse quelconque qui soit compatible avec ce que nous avons admis dans ce qui précède.

Le plus simple est de prendre, pour  $f$ , une figure ellipsoïdale d'équilibre, appartenant à la même série que l'ellipsoïde  $E$ ; et cette figure sera déterminée, par la valeur du moment d'inertie  $S$ , d'une manière unique, le cas excepté où  $E$  représente l'ellipsoïde de Jacobi de révolution.

Cette hypothèse suffira dans la plupart des cas, et c'est à elle que nous nous arrêterons d'abord.

Supposons donc que  $f$  soit un ellipsoïde de Maclaurin ou de Jacobi, selon que  $E$  est l'un ou l'autre.

Pour que les quatre conditions du n° 6 soient satisfaites, nous allons supposer: 1° que le volume de cet ellipsoïde soit égal à celui de l'ellipsoïde  $E$ ; 2° que ses axes soient dirigés suivant les axes des coordonnées, le petit, suivant l'axe des  $z$ , le grand, suivant l'axe des  $x$ ; 3° que son moment d'inertie par rapport à l'axe des  $z$  ait la même valeur que pour la figure  $F$ .

Or, outre les conditions du n° 6, nous avons admis encore l'égalité (5) du n° 11. Il est facile de voir qu'elle aura effectivement lieu dans l'hypothèse considérée.

En effet, si nous désignons par  $\eta$  l'accroissement de  $\Omega$  dans le passage de l'ellipsoïde E à l'ellipsoïde f, nous aurons, sur la surface de ce dernier,

$$U_f(\zeta) + (\Omega_0 + \eta)(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Par suite, comme on a (n° 6)

$$\int \chi d\sigma = 0,$$

il viendra

$$\int [U_f(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma = -\eta \int (x^2 + y^2) \chi d\sigma,$$

et cela, vu qu'on a ici

$$x^2 + y^2 = (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + \zeta) \sin^2\theta,$$

se réduit, en vertu de l'égalité (8) du n° 6, à

$$\int [U_f(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma = \eta \int \sin^2\theta \chi_1 d\sigma.$$

Or, on peut évidemment assigner un nombre fixe  $N$ , tel qu'on ait

$$|\eta| < Nl^*),$$

et l'on aura alors

$$\left| \int [U_f(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma \right| < Nl \int \chi_1 d\sigma.$$

On aura donc bien une égalité telle que celle (5) du n° 11.

Cela posé, voyons comment s'exprimera l'accroissement  $\Delta_1\Pi$ .

**27.** Nous avons (n° 7)

$$\Delta_1\Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{M_0}{S_0} - \Delta_1V,$$

$M_0$  étant la valeur de  $M$  pour l'ellipsoïde E.

\*) Sur les figures d'équilibre, page 84.

Cherchons donc  $\Delta_1 V$ , qui est ici l'accroissement de  $V$  dans le passage de l'ellipsoïde  $E$  à un autre ellipsoïde de la même série de figures d'équilibre ellipsoïdales.

A cet effet, considérons, plus généralement, une série continue quelconque de figures d'équilibre ayant un seul et même volume, série à laquelle on arrive en concevant une figure variable, qui varie continûment avec un paramètre  $\alpha$ .

Pour cette série, les quantités  $V$ ,  $M$ ,  $S$  seront des fonctions de  $\alpha$ , et, en supposant que ces fonctions admettent les dérivées, nous allons chercher l'accroissement de  $V$ , correspondant à un accroissement quelconque de  $\alpha$  à partir de  $\alpha = \alpha_0$ .

Reportons-nous, pour cela, à l'égalité

$$\delta H = 0,$$

qui doit avoir lieu pour toute figure d'équilibre sous la condition d'invariabilité de volume,  $M$  ayant la valeur qui correspond à cette figure.

Nous aurons ainsi

$$\frac{M}{S^2} \delta S + \delta V = 0,$$

pour toutes les variations qui laissent le volume invariable.

Or, telles sont les variations, par lesquelles on passe de la figure considérée à une figure infiniment voisine de la série en question.

Nous aurons donc, pour cette série,

$$\frac{dV}{d\alpha} = - \frac{M}{S^2} \frac{dS}{d\alpha},$$

et de là il vient

$$(1) \quad V - V_0 = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{M}{S^2} \frac{dS}{d\alpha} d\alpha,$$

$V_0$  étant la valeur de  $V$  pour  $\alpha = \alpha_0$ .

Cela posé, revenons à notre problème.

En prenant pour le paramètre  $\alpha$  le moment d'inertie  $S$  lui-même, dont les valeurs définissent les ellipsoïdes de Maclaurin et les ellipsoïdes de Jacobi à un seul et même volume d'une manière unique, nous aurons

$$\Delta_1 V = - \int_{S_0}^S \frac{M}{S^2} dS.$$

Par suite, il viendra

$$\Delta_1 \Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{M_0}{S_0} + \int_{S_0}^S \frac{M}{S^2} dS,$$

et cela se réduit à

$$(2) \quad \Delta_1 \Pi = \int_{S_0}^S \frac{M - M_0}{S^2} dS.$$

Rappelons que  $M$  représente ici le carré du moment des quantités de mouvement, multiplié par un nombre invariable. On a d'ailleurs, avec le paramètre  $\Omega$  employé précédemment,

$$M = \Omega S^2.$$

Vu cela, on peut conclure de la formule (2) que, dans l'hypothèse que nous avons admise, on aura toujours

$$\Delta_1 \Pi > 0.$$

En effet, on sait que, tant pour la série des ellipsoïdes de Maclaurin, que pour celle des ellipsoïdes de Jacobi, le moment des quantités de mouvement et le moment d'inertie  $S$  varient toujours dans un même sens. Donc  $M - M_0$  aura toujours le même signe que  $S - S_0$ , et l'intégrale dans la formule (2) sera toujours positive.

28. Ce que nous avons développé précédemment suffit pour pouvoir résoudre le problème de minimum de  $\Pi$  dans la plupart des cas. Mais avant de le montrer, nous devons faire une remarque.

Notre analyse reposait sur la supposition que les nombres  $l$  et  $\lambda$ , représentant les plus grandes valeurs absolues respectivement des fonctions  $\zeta$  et  $Z - \zeta$  (nos 5 et 6), fussent assez petits.

Or, dans le problème considéré, on doit seulement supposer que la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z$  soit assez petite.

Donc, pour que notre analyse soit applicable à la solution du problème qui nous occupe, il faut que les deux suppositions soient équivalentes.

Dans l'hypothèse que nous avons faite à l'égard de la figure  $f$ , ce sera bien le cas.

En effet, soit  $L$  la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z$ .

On aura

$$L \leq l + \lambda,$$

et par suite,  $l$  et  $\lambda$  étant petits,  $L$  le sera encore.

Il ne reste donc qu'à montrer que,  $L$  étant petit,  $l$  et  $\lambda$  seront nécessairement petits.

A cet effet nous remarquons que,  $S$  étant le moment d'inertie de la figure  $F$ ,  $|S - S_0|$  deviendra aussi petit qu'on veut, en faisant  $L$  suffisamment petit.

Or  $S$  est également le moment d'inertie de la figure  $f$ , et cette figure tend à se confondre avec l'ellipsoïde  $E$  quand  $S - S_0$  tend vers zéro. Donc  $l$  tendra vers zéro avec  $S - S_0$ .

Par suite,  $L$  étant petit,  $l$  le sera aussi et, comme on a

$$\lambda \leq l + L,$$

$\lambda$  sera également petit.

Ainsi, la supposition que  $l$  et  $\lambda$  soient assez petits est équivalente à celle que  $L$  soit assez petit.

**29.** Voyons maintenant quelles sont les conclusions que l'on peut tirer de ce qui précède.

Pour que  $\Pi$  soit minimum pour l'ellipsoïde  $E$ , sous telles ou telles conditions, il faut et il suffit que son accroissement

$$\Delta\Pi = \Delta_1\Pi + \Delta_2\Pi$$

soit positif sous les mêmes conditions, toutes les fois que  $L$  est au-dessous d'un nombre suffisamment petit.

Or  $\Delta_1\Pi$  est ici une fonction de  $S - S_0$  qui reste toujours positive, en ne s'annulant que pour  $S - S_0 = 0$ , et  $\Delta_2\Pi$  est une quantité dont le signe,  $l$  et  $\lambda$  étant assez petits, ne dépend point de la valeur de  $S - S_0$ .

Par suite, pour qu'il y ait minimum, il faut et il suffit que  $\Delta_2\Pi$  soit positif tant que  $L$  est assez petit ou, ce qui revient au même, tant que  $l$  et  $\lambda$  sont assez petits.

Nous sommes donc amenés au problème qui a été posé au n° 14 et dont nous nous sommes occupés dans la Section précédente, problème où tout aboutit à la recherche du signe d'un nombre  $t$  ne dépendant que de l'ellipsoïde  $E$  et des conditions sous lesquelles on veut chercher le minimum.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion :

Pour que  $\Pi$  soit minimum, il faut que le nombre  $t$  ne soit pas négatif, et, quand ce nombre est positif, le minimum aura certainement lieu.

Quant au cas où  $t = 0$ , on ne pourra rien conclure sans une discussion spéciale.

C'est de pareils cas que nous avons appelés singuliers, et nous verrons dans ce qui suit comment on les pourra traiter.

Appliquons maintenant ce que nous venons de dire à quelques problèmes déterminés.

**30.** Supposons d'abord qu'il s'agisse de minimum non conditionnel.

Alors, en nous reportant au n° 12 et commençant par le cas des ellipsoïdes de Mac-

laurin, nous n'aurons que les conditions (8), qui se réduisent, d'après le n° 21, à

$$a_{0,0} = 0, \quad a_{1,0} = 0, \quad a_{1,1} = 0, \quad a_{1,2} = 0, \quad a_{2,0} = 0.$$

Par suite, d'après ce que nous avons remarqué au n° 24, le signe de  $t$  sera celui de  $T'_{2,2}$ , et nous pouvons ainsi énoncer cette conclusion:

*Pour les ellipsoïdes de révolution qui sont moins aplatis que celui appartenant à la série des ellipsoïdes de Jacobi, il y a toujours un minimum de  $\Pi$  et, pour ceux qui sont plus aplatis, il n'y en a pas\*).*

C'est un des principaux résultats obtenus dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*.

Passons ensuite au cas des ellipsoïdes de Jacobi.

Alors, outre les conditions (8) du n° 12, nous aurons encore celle (9), et ce seront les seules dont il faudra tenir compte.

Or ces conditions n'assujettissent à être nuls que les  $a_{n,s}$  suivants:

$$a_{0,0}, \quad a_{1,0}, \quad a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{2,3}.$$

Par suite, en nous reportant au n° 25, nous pouvons conclure que le signe de  $t$  sera celui de  $T'_{3,6}$ .

Nous parvenons donc au résultat suivant, qui a été également obtenu dans le Mémoire cité:

*Pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux de Jacobi qui sont moins allongés que celui satisfaisant à l'équation*

$$T_{3,6} = 0,$$

*il y a toujours un minimum de  $\Pi$  et, pour ceux qui sont plus allongés, il n'y en a pas.*

On voit que pour les ellipsoïdes de Maclaurin il n'y a qu'un cas singulier, celui où l'on a l'égalité  $T'_{2,2} = 0$ , qui définit l'ellipsoïde de Jacobi de révolution. Quant aux ellipsoïdes de Jacobi, il y en a deux: celui de l'ellipsoïde de révolution et celui de l'ellipsoïde pour lequel  $T_{3,6} = 0$ . C'est par ce dernier cas que l'on entre dans la série des figures d'équilibre non ellipsoïdales, appelées par M. Poincaré pyriformes.

### 31. Considérons à présent quelques problèmes de minimum conditionnel.

Parmi ces problèmes, il est à signaler, en premier lieu, celui où, E étant un ellipsoïde

\*) Il est à remarquer que le cas d'une sphère n'est pas embrassé par notre analyse. Toutefois ce n'est pas un cas singulier, et la conclusion énoncée y est applicable. Voir à ce sujet le n° 33.

de révolution, on ne le compare qu'à des figures qui sont encore de révolution autour de l'axe du moment d'inertie  $S$ .

Supposons donc que  $E$ ,  $f$  et  $F$  soient des figures de révolution autour de cet axe.

Alors les fonctions  $G$ ,  $\zeta$  et  $Z$  ne dépendront point de  $\psi$ .

Par suite, la fonction  $\gamma$  (n° 6) n'en dépendra pas non plus, et dans la fonction  $w$  du n° 12 il viendra

$$a_1 = a_2 = c = 0.$$

Donc cette dernière fonction, où l'on aura

$$\Theta = (\rho + 1) \left( \sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right),$$

sera encore indépendante de  $\psi$  et, par conséquent, la fonction  $\tau$  sera dans le même cas.

Or, s'il en est ainsi, tous les  $a_{n,s}$  pour lesquels  $s$  n'est pas nul se réduiront à zéro.

En effet, on a (n° 20)

$$a_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int \tau Y_{n,s} d\sigma,$$

et les  $Y_{n,s}$ , dans le cas des ellipsoïdes de révolution, sont donnés par les formules

$$Y_{n,2l-1} = P_{n,l}(\cos \theta) \sin l\psi,$$

$$Y_{n,2l} = P_{n,l}(\cos \theta) \cos l\psi,$$

Ainsi, dans la recherche du nombre  $t$ , il n'y aura à considérer que les  $T'_{n,0}$ , où l'on devra d'ailleurs supposer  $n > 2$ , puisqu'on a

$$a_{0,0} = a_{1,0} = a_{2,0} = 0.$$

Par suite, d'après ce que nous avons vu au n° 24, le signe de  $t$  coïncidera avec celui de  $T'_{4,0} = T_{4,0}$ ; d'où l'on tire cette conclusion, que nous avons déjà signalée dans le Mémoire cité plus haut:

*Sous la condition que la figure du liquide reste toujours celle de révolution,  $\Pi$  sera minimum pour les ellipsoïdes moins aplatis que celui défini par l'équation*

$$T'_{4,0} = 0,$$

*et ne le sera pas pour les ellipsoïdes plus aplatis.*

On voit que le cas singulier sera à présent celui où l'on a  $T'_{4,0} = 0$ .

Considérons encore le problème de minimum où, l'ellipsoïde E étant de révolution, on ne veut le comparer qu'à des figures qui ne changent pas quand on les tourne autour de l'axe du moment d'inertie S de l'angle  $\frac{2\pi}{k}$ , k étant un entier donné plus grand que 1.

Supposons donc que F soit une pareille figure.

Alors la fonction Z et, par suite, aussi celle  $\chi$  ne changeront pas quand on remplace  $\psi$  par  $\psi + \frac{2\pi}{k}$ .

Comme on suppose  $k > 1$ , il en résulte que la fonction w ne dépendra pas de  $\psi^*$ ), et, vu cela, on conclut ensuite que la fonction  $\tau$  ne changera pas quand on remplace  $\psi$  par  $\psi + \frac{2\pi}{k}$ .

Cela posé, reportons-nous aux formules qui donnent les  $a_{n,s}$ , et qui, si s n'est pas nul, peuvent s'écrire, pour les ellipsoïdes de révolution, comme il suit:

$$\gamma'_{n,l} a_{n,2l-1} = \int \tau P_{n,l}(\cos\theta) \sin l\psi d\sigma,$$

$$\gamma'_{n,l} a_{n,2l} = \int \tau P_{n,l}(\cos\theta) \cos l\psi d\sigma,$$

$\gamma'_{n,l}$  étant la valeur commune des deux intégrales

$$\int [P_{n,l}(\cos\theta)]^2 \sin^2 l\psi d\sigma, \quad \int [P_{n,l}(\cos\theta)]^2 \cos^2 l\psi d\sigma.$$

En remplaçant, dans ces formules, sous les signes des intégrales  $\psi$  par  $\psi + \frac{2\pi}{k}$ , on en déduit

$$\left(1 - \cos \frac{2\pi l}{k}\right) a_{n,2l-1} - \sin \frac{2\pi l}{k} a_{n,2l} = 0,$$

$$\sin \frac{2\pi l}{k} a_{n,2l-1} + \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{k}\right) a_{n,2l} = 0,$$

et de là, si  $\frac{l}{k}$  n'est pas un nombre entier, on tire

$$a_{n,2l-1} = a_{n,2l} = 0.$$

---

\*) Rappelons que, dans le cas des ellipsoïdes de révolution, on doit poser, dans l'expression de w du n° 12,  $c = 0$ .



Ainsi, tous les  $a_{n,2l-1}$  et les  $a_{n,2l}$  pour lesquels  $l$  n'est pas divisible par  $k$  seront nuls.

Quant à ceux où  $l$  est un multiple de  $k$ , ils pourront être quelconques, de même que les  $a_{n,0}$ .

D'après cela, et tenant compte de ce que nous avons dit au n° 24, nous pouvons conclure que le signe de  $t$  coïncidera avec celui

$$\text{de } T'_{k,k}, \quad \text{si } T'_{k,k} < T'_{4,0},$$

$$\text{de } T'_{4,0}, \quad \text{si } T'_{4,0} < T'_{k,k}.$$

Si donc on désigne par  $T'$  celle des deux quantités  $T'_{k,k}$  et  $T'_{4,0}$  qui s'annule pour la valeur la plus grande de  $\varphi$ , le minimum de  $\Pi$ , sous les conditions considérées, aura certainement lieu pour les ellipsoïdes qui sont moins aplatis que celui défini par l'équation

$$T' = 0,$$

et n'aura pas lieu pour les ellipsoïdes plus aplatis.

Le cas singulier sera ici celui où  $T' = 0$ .

Remarquons que, d'après la proposition signalée au n° 24, on aura, quel que soit  $\varphi$ ,

$$\text{pour } k \leq 4, \quad T'_{k,k} < T'_{4,0},$$

$$\text{pour } k \geq 20, \quad T'_{k,k} > T'_{4,0},$$

et que, par suite, on aura certainement:

$$\text{pour } k \leq 4, \quad T' = T'_{k,k},$$

$$\text{pour } k \geq 20, \quad T' = T'_{4,0}.$$

On voit que, pour  $k = 2$ , la conclusion est ici la même que dans le problème de minimum non conditionnel et que,  $k$  étant assez grand, elle coïncide avec celle qui se présente quand on ne considère que des figures de révolution.

Signalons enfin un problème de minimum conditionnel pour les ellipsoïdes de Jacobi.

Supposons que toutes les figures considérées doivent avoir deux plans de symétrie, passant par l'axe du moment d'inertie  $S$  et faisant entre eux un angle droit.

Alors, si l'on suppose encore, ce qui est évidemment permis, que ces deux plans coïncident avec les plans des  $xz$  et des  $yz$ ,  $\gamma$  sera une fonction paire de  $\psi$  et ne changera pas quand on remplace  $\psi$  par  $\pi - \psi$ .

Or on en conclut que la fonction  $w$  jouira des mêmes propriétés, et dès lors il en sera de même de la fonction  $\tau$ .

Cela posé, la formule

$$a_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int \tau E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu) d\sigma$$

fait voir que, si la fonction  $E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu)$  change de signe quand on remplace  $\psi$ , soit par  $-\psi$ , soit par  $\pi - \psi$ , on aura  $a_{n,s} = 0$ . On aura donc cette égalité toutes les fois que la fonction  $E_{n,s}(x)$  renferme, en facteur, au moins un des radicaux

$$\sqrt{x^2 - 1}, \quad \sqrt{x^2 - q};$$

et cela, avec les notations que nous avons adoptées, revient à dire que tous les  $a_{n,s}$  seront nuls pour lesquels l'indice  $s$  n'est pas divisible par 4\*).

Comme ce seront d'ailleurs les seuls  $a_{n,s}$  qui sont assujettis, par la condition considérée, à être nuls, nous pouvons en conclure, d'après le n° 25, que le signe de  $t$  sera celui de  $T_{4,8}$ .

Ainsi, sous la condition considérée,  $\Pi$  sera minimum pour les ellipsoïdes de Jacobi qui sont moins allongés que celui défini par l'équation

$$T_{4,8} = 0$$

et ne le sera pas pour les ellipsoïdes qui sont plus allongés.

Il y aura, du reste, deux cas singuliers: celui de l'ellipsoïde de révolution et celui où  $T_{4,8} = 0$ .

**32.** Les cas où, dans l'hypothèse considérée au sujet de la figure  $f$ , le nombre  $t$  est différent de zéro sont précisément ceux où, en suivant les règles du Calcul des variations, on pourrait se borner à la considération de la variation seconde de  $\Pi$ .

En effet, en formant cette variation, on verra que, dans le cas de  $t < 0$ , elle pourra devenir négative, tandis que, dans le cas de  $t > 0$ , elle sera toujours positive et ne s'annulera jamais.

Nous avons vu que dans le premier cas il n'y aura pas de minimum et que, dans le second, le minimum aura certainement lieu. Donc les conclusions que l'on pourrait tirer de l'examen de la variation seconde se trouvent justifiées.

Ainsi le premier des deux postulats, dont il a été parlé dans l'Introduction, peut être regardé comme établi.

Montrons maintenant que le second postulat,  $t$  n'étant pas nul, découle également de ce qui précède.

Cherchons, dans ce but, une limite inférieure pour

$$\Delta\Pi = \Delta_1\Pi + \Delta_2\Pi,$$

en évaluant une limite inférieure pour chacun des deux termes.

\*) Sur les figures d'équilibre, n° 11.

En commençant par  $\Delta_1\Pi$ , reportons-nous à la formule (2), où  $M$  est envisagé comme fonction de  $S$  en vertu des équations qui correspondent à la série considérée de figures ellipsoïdales d'équilibre. En entendant par  $\frac{dM}{dS}$  la dérivée de cette fonction, nous aurons d'après la formule en question

$$\Delta_1\Pi = \frac{1}{2[S]^2} \left[ \frac{dM}{dS} \right] (S - S_0)^2,$$

les crochets carrés désignant que l'on doit prendre, pour les quantités en crochets, certaines valeurs intermédiaires entre celles qui conviennent aux ellipsoïdes E et f.

Or on sait que la dérivée  $\frac{dM}{dS}$  ne s'annule jamais et représente un nombre positif. Donc, si l'on assujettit  $l$  à être au-dessous d'un nombre fixe, on pourra trouver un nombre positif fixe  $g$ , tel qu'on ait

$$\frac{1}{[S]^2} \left[ \frac{dM}{dS} \right] > g;$$

et dès lors on aura

$$\Delta_1\Pi > \frac{1}{2} g (S - S_0)^2.$$

En passant ensuite à  $\Delta_2\Pi$ , faisons usage de l'inégalité (13) du n° 14, où l'on peut d'ailleurs remplacer l'intégrale

$$\int (\tau^2 + \varphi^2) d\sigma$$

par celle-ci

$$\int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

car, d'après ce que nous avons vu au n° 13, le rapport de ces deux intégrales est de la forme

$$1 + hl + h'\lambda.$$

En faisant ce remplacement et en désignant par  $t_0$  un nombre quelconque inférieur à  $t$ , nous aurons, d'après cette inégalité,

$$\Delta_2\Pi > \frac{1}{2} t_0 \int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

dès que  $l$  et  $\lambda$  sont assez petits.

Ainsi, pour des valeurs assez petites de  $l$  et  $\lambda$ , il viendra

$$(3) \quad \Delta\Pi > \frac{1}{2} g (S - S_0)^2 + \frac{1}{2} t_0 \int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

quel que soit le nombre  $t_0$  inférieur à  $t$ .

Cela étant, supposons que l'on se trouve dans le cas où  $t$  est positif et, en prenant pour  $t_0$  encore un nombre positif, cherchons des limites inférieures, sous une forme convenable, pour

$$\int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma \quad \text{et} \quad (S - S_0)^2.$$

D'après le n° 11, on a

$$\chi^2 + \varphi^2 = 2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x d\xi \int_0^\xi G' d\xi',$$

et nous avons vu au n° 10 que le second membre de cette égalité est plus grand que

$$\left( \int_0^\lambda G x d\xi \right)^2 + \left( \int_{-\lambda}^0 G x d\xi \right)^2,$$

expression dans laquelle on peut remplacer  $x$  par  $|x|$ , puisque cette fonction a toujours le même signe que  $\xi$ .

Vu cela et tenant compte de l'inégalité

$$a^2 + b^2 > \frac{1}{2} (a + b)^2,$$

nous aurons

$$\chi^2 + \varphi^2 > \frac{1}{2} \left( \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi \right)^2,$$

et par suite, à plus forte raison,

$$\int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma > \frac{1}{8\pi} \left( \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi \right)^2.$$

Maintenant considérons  $(S - S_0)^2$  et cherchons à lui assigner une limite inférieure en fonction de l'intégrale

$$\int d\sigma \left| \int_0^\zeta G(\rho + u, \theta, \psi) du \right|.$$

La valeur de cette intégrale est évidemment inférieure au nombre

$$\frac{4\pi(\rho + 1 + l)}{\sqrt{\rho - l}} l.$$

D'autre part, la différence  $S - S_0$  est, en général, du même ordre que  $l^*$ , et l'on s'assure facilement qu'il n'y a qu'un cas où elle puisse devenir d'un ordre plus élevé: cela n'arrive que si, E et f étant des ellipsoïdes de Jacobi, l'ellipsoïde E est de révolution.

Or ce cas doit actuellement être exclu, puisque l'on aurait alors  $t = 0$ , et nous avons supposé que  $t$  soit un nombre positif.

Par suite, dans les cas que nous envisageons ici, on pourra toujours obtenir, pour la valeur absolue du rapport

$$\frac{S - S_0}{l},$$

une limite inférieure fixe non nulle, et l'on voit ainsi que,  $l$  étant assez petit, on aura une inégalité de la forme

$$(S - S_0)^2 > \varepsilon \left( \int d\sigma \left| \int_0^\zeta G du \right| \right)^2,$$

en entendant par  $\varepsilon$  un nombre positif fixe suffisamment petit.

D'après cela, si l'on désigne par  $p$  le plus petit des nombres

$$4g\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{t_0}{2\pi},$$

l'inégalité (3) conduira à celle-ci:

$$\Delta\Pi > \frac{p}{8} \left( \int d\sigma \left| \int_0^\zeta G du \right| \right)^2 + \frac{p}{8} \left( \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi \right)^2,$$

ou bien encore, à celle-ci:

$$\Delta\Pi > \frac{p}{16} \left( \int d\sigma \left| \int_0^\zeta G du \right| + \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi \right)^2.$$

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int d\sigma \int_{-L}^{+L} G |K| du,$$

où K désigne la fonction définie au n° 2.

---

\*) Pour ce qui concerne le nombre  $l$ , remarquons que, si l'on désigne les demi-axes correspondants des ellipsoïdes E et f respectivement par  $a_0, b_0, c_0$  et par  $a, b, c$ , ce nombre sera représenté par le plus grand des trois nombres

$$|a^2 - a_0^2|, \quad |b^2 - b_0^2|, \quad |c^2 - c_0^2|.$$

Dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi,  $a_0$  et  $a$  étant les grands demi-axes, on aura toujours  $l = |a^2 - a_0^2|$ .

Si l'ellipsoïde  $E$  est de révolution, le quart de cette intégrale représentera ce qui s'appellerait, en termes du Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*, la déviation de la figure  $F$  à partir de l'ellipsoïde  $E$ ; et, si cet ellipsoïde a ses trois axes inégaux, le quart de l'intégrale ci-dessus sera, en général, plus grand que la quantité représentant la déviation.

Donc, la déviation étant désignée par  $\vartheta$ , nous aurons, dans tous les cas,

$$\vartheta \leq \frac{1}{4} \int d\sigma \int_{-L}^{+L} G |K| du.$$

Or, en nous reportant au n° 5, nous pouvons conclure cette inégalité:

$$|K| \leq |x| + i,$$

où  $i$  est égal à 1 ou à 0, suivant que  $u$  se trouve ou non dans l'intervalle  $(0, \zeta)$ .

Par suite, en posant, comme nous l'avons fait,

$$u = \zeta + \xi,$$

nous aurons

$$\int_{-L}^{+L} G |K| du < \left| \int_0^\zeta G du \right| + \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi,$$

et il viendra ainsi

$$\vartheta < \frac{1}{4} \left( \int d\sigma \left| \int_0^\zeta G du \right| + \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi \right).$$

Nous aurons donc

$$\Delta\Pi > p\vartheta^2,$$

inégalité qui sera remplie, dès que  $L$  est au-dessous d'un nombre fixe suffisamment petit; et de là on conclut l'exactitude du postulat donc il s'agit.

**33.** Pour terminer l'étude des cas ordinaires, nous devons encore dire quelques mots au sujet du cas où l'ellipsoïde  $E$  se réduit à une sphère.

C'est un cas particulier des ellipsoïdes de Maclaurin, et cependant il a échappé à notre analyse, grâce aux notations que nous avons adoptées.

Or, pour rendre nos formules applicables à ce cas, il n'y a qu'à y introduire de petits changements.

A cet effet, au lieu de désigner les demi-axes d'un ellipsoïde de révolution par  $\sqrt{\rho + 1}$

et  $\sqrt{\rho}$ , comme nous l'avons fait précédemment, on devra les désigner par  $\varepsilon\sqrt{\rho+1}$  et  $\varepsilon\sqrt{\rho}$ , en posant ensuite, pour la surface de la figure F,

$$x = \sqrt{\varepsilon^2(\rho+1)+Z} \sin\theta \cos\psi,$$

$$y = \sqrt{\varepsilon^2(\rho+1)+Z} \sin\theta \sin\psi,$$

$$z = \sqrt{\varepsilon^2\rho+Z} \cos\theta.$$

On verra aisément quels seront les changements qui en résulteront pour l'expression de  $\Delta\Pi$ , et, après les avoir effectués, on fera tendre  $\rho$  vers l'infini et  $\varepsilon$  vers zéro, de manière que  $\varepsilon^2\rho$  tende vers une limite déterminée non nulle.

C'est ainsi qu'il faudrait procéder, si l'on voulait parvenir au cas de la sphère en partant des ellipsoïdes de révolution.

Mais il sera plus simple de traiter ce cas directement.

Pour cela, en désignant le rayon de la sphère par  $a$ , on définira la figure F par les équations

$$x = a(1+Z) \sin\theta \cos\psi,$$

$$y = a(1+Z) \sin\theta \sin\psi,$$

$$z = a(1+Z) \cos\theta,$$

et l'on cherchera ensuite l'accroissement  $\Delta\Pi$ , qui sera maintenant égal à  $-\Delta V$ , en supposant que la plus grande valeur absolue  $L$  de la fonction  $Z$  soit au-dessous d'un nombre fixe suffisamment petit.

Dans cette recherche il sera inutile d'introduire la figure auxiliaire  $f$ . On cherchera donc immédiatement l'accroissement total, pour lequel on aura cette expression

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = & -a^3 \int d\sigma \int U_0(u) (1+u)^2 \mathbf{K} du \\ & - \frac{a^6}{2\pi} \int d\sigma \int (1+u)^2 \mathbf{K} du \int d\sigma' \int \frac{(1+u')^2 \mathbf{K}' du'}{D(u,u')}, \end{aligned}$$

où les intégrales relatives à  $u$  et à  $u'$  doivent être prises entre les limites  $-L$  et  $+L$ , et où  $\mathbf{K}$  est une fonction de  $u, \theta, \psi$  définie pour les points de l'espace, dont les coordonnées rectangulaires sont représentées par

$$a(1+u) \sin\theta \cos\psi, \quad a(1+u) \sin\theta \sin\psi, \quad a(1+u) \cos\theta,$$

comme il a été expliqué au n° 2.

En remarquant que l'on a ici :

$$\text{pour } u > 0, \quad U_0(u) = \frac{4a^2}{3(1+u)},$$

$$\text{pour } u < 0, \quad U_0(u) = 2a^2 \left[ 1 - \frac{1}{3}(1+u)^2 \right],$$

et que la condition de l'invariabilité de volume s'exprime par l'égalité

$$\int d\sigma \int (1+u)^2 K du = 0,$$

on effectuera une suite de transformations, semblables à celles qui faisaient l'objet des nos 8, 9, 10 et 11.

Alors, en posant

$$\int_{-L}^{+L} (1+u)^2 K du = \chi,$$

$$\int_{-L}^{+L} (1+u)^2 K u du = \chi_1,$$

et en remarquant que la fonction K a toujours le même signe que u, on parviendra à cette formule

$$\Delta\Pi = \frac{4a^5}{3} \int \chi_1 d\sigma - \frac{a^6}{2\pi} \iint \frac{\chi \chi' d\sigma d\sigma'}{D(0,0)} + hL \int \chi_1 d\sigma,$$

où h désigne un nombre dont la valeur absolue ne dépasse pas un nombre fixe, tant que L est au-dessous d'une limite fixe.

Quant aux conditions, on n'aura à considérer que celles-ci :

$$\int \chi d\sigma = 0,$$

$$\int (\chi + \chi_1) \sin\theta \cos\psi d\sigma = 0,$$

$$\int (\chi + \chi_1) \sin\theta \sin\psi d\sigma = 0,$$

$$\int (\chi + \chi_1) \cos\theta d\sigma = 0,$$



dont la première est celle d'invariabilité de volume et les trois autres expriment que le centre de gravité de la figure  $F$  coïncide avec l'origine des coordonnées.

En posant

$$\chi = \tau + a_1 \sin \theta \cos \psi + a_2 \sin \theta \sin \psi + a_3 \cos \theta,$$

$a_1, a_2, a_3$  étant définis par les formules

$$a_1 = -\frac{3}{4\pi} \int \sin \theta \cos \psi \chi_1 d\sigma,$$

$$a_2 = -\frac{3}{4\pi} \int \sin \theta \sin \psi \chi_1 d\sigma,$$

$$a_3 = -\frac{3}{4\pi} \int \cos \theta \chi_1 d\sigma,$$

on réduira ces conditions à la forme

$$\int \tau d\sigma = 0,$$

$$\int \sin \theta \cos \psi \tau d\sigma = 0,$$

$$\int \sin \theta \sin \psi \tau d\sigma = 0,$$

$$\int \cos \theta \tau d\sigma = 0.$$

On introduira ensuite la fonction  $\tau$  dans l'expression de  $\Delta\Pi$ , où l'on pourra d'ailleurs remplacer  $\chi_1$  par l'intégrale

$$\int_{-L}^{+L} (1+u)^2 K du \int_0^u (1+u')^2 du',$$

Alors, en désignant la différence

$$2 \int_{-L}^{+L} (1+u)^2 K du \int_0^u (1+u')^2 du' - \chi^2,$$

qui est toujours positive, par  $\varphi^2$  et en changeant convenablement la valeur du nombre  $h$ , on aura, comme au n° 13,

$$\Delta\Pi = 2a^5 \left( \frac{1}{3} \int \tau^2 d\sigma - \frac{a}{4\pi} \iint \frac{\tau \tau' d\sigma d\sigma'}{D(0,0)} \right) + \frac{2a^5}{3} \int \varphi^2 d\sigma + hL \int (\tau^2 + \varphi^2) d\sigma.$$

On cherchera enfin le nombre  $t$  représentant le minimum, sous les conditions ci-dessus, du rapport de l'expression

$$\frac{1}{3} \int \tau^2 d\sigma - \frac{a}{4\pi} \iint \frac{\tau \tau' d\sigma d\sigma'}{D(0,0)}$$

à l'intégrale

$$\int \tau^2 d\sigma,$$

et l'on trouvera, en appliquant la proposition du n° 18,

$$t = \frac{2}{15}.$$

Ce nombre étant ainsi positif, on conclura que  $\Delta\Pi$  est toujours positif, du moins, tant que  $L$  est assez petit. D'ailleurs, en procédant comme au n° 32, l'on parviendra à une inégalité de la forme

$$\Delta\Pi > p\delta^2,$$

où  $\delta$  désigne la déviation de la figure  $F$  à partir de la sphère, et  $p$  représente un nombre positif fixe.

#### VI. — L'ACCROISSEMENT RESTREINT<sup>o</sup> DANS LES CAS SINGULIERS.

**34.** Passons aux cas singuliers, qui sont ceux où le nombre  $t$ , obtenu dans l'hypothèse précédente au sujet de la figure  $f$ , se réduit à zéro.

Dans ces cas, on aura toujours une égalité de la forme

$$(1) \quad T_{m,2k} = 0,$$

les nombres  $m$  et  $k$  vérifiant les conditions

$$m \geq 2, \quad m + k = \text{nombre pair.}$$

Tel est, par exemple, le cas de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, cas où l'on a

$$T_{2,4} = 0.$$

L'ellipsoïde  $E$  appartient alors à deux séries différentes de figures d'équilibre ellipsoïdales.

Dans tous les autres cas singuliers, le nombre  $m$  sera plus grand que 2, et l'ellipsoïde E appartiendra à une série de certaines figures d'équilibre non ellipsoïdales, étudiées dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*.

Pour traiter de pareils cas, nous ferons, à l'égard de la figure  $f$ , une telle hypothèse que la nouvelle valeur du nombre  $t$  soit différente de zéro.

A cet effet nous devons faire en sorte que, parmi les conditions, il s'en trouve celle-ci :

$$a_{m,2k} = 0.$$

D'ailleurs, dans le cas des ellipsoïdes de révolution, et si le nombre  $k$  n'est pas égal à zéro, il faudra encore qu'on ait

$$a_{m,2k-1} = 0.$$

Pour satisfaire à cette dernière condition, il n'y aura qu'à disposer convenablement de l'orientation de la figure  $f$ , et dès lors il ne restera qu'à satisfaire à deux conditions : à celle qui s'exprime par l'égalité  $a_{m,2k} = 0$  et à la condition que le moment d'inertie  $S$  pour la figure  $f$  ait une valeur donnée.

On voit donc que, dans les cas en question, la fonction  $\zeta$  devra dépendre de deux paramètres arbitraires, et nous allons maintenant montrer comment on pourra trouver une pareille fonction, laquelle, tout en permettant de satisfaire à deux conditions signalées par un choix convenable des paramètres, satisfasse à toutes les suppositions qui ont été faites précédemment.

**35.** Dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, en cherchant la fonction  $\zeta$  correspondant à une figure d'équilibre, nous avons décomposé le problème en deux autres, dont l'un consistait dans la recherche d'une certaine fonction dépendant de deux paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$ , l'autre, dans la recherche de la relation qui doit exister entre  $\alpha$  et  $\gamma$  pour que cette fonction convienne à une figure d'équilibre.

C'est à cette fonction, où les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  seront supposés rester indépendants l'un de l'autre, que nous nous arrêterons d'abord pour définir la figure auxiliaire  $f$ .

Nous verrons que cette hypothèse suffira dans bien des cas, et, quant à ceux où elle ne suffira plus, il n'y aura qu'à y introduire une petite modification, ainsi que nous le montrerons plus loin.

Examinons cette hypothèse de plus près.

En supposant que l'on ait l'égalité (1), désignons le produit

$$E_{m,2k}(\mu) E_{m,2k}(\nu),$$

pour les valeurs correspondantes des nombres  $m$  et  $k$ , par  $Y$ . Alors l'hypothèse dont il s'agit

s'exprimera par l'équation

$$(2) \quad U_f(\zeta) + (\Omega_0 + \eta)(x^2 + y^2) = \mathbf{A}Y + \text{const.}$$

qui devra être vérifiée sur la surface de la figure  $f$ .

Dans cette équation,  $\mathbf{A}$  désigne une constante, pour laquelle, en posant

$$\int Y^2 d\sigma = \gamma,$$

on aura cette expression:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\gamma} \int [U_f(\zeta) + (\Omega_0 + \eta)(x^2 + y^2)] Y d\sigma.$$

En développant  $U_f(\zeta)$  suivant les ordres par rapport à la fonction  $\zeta$ , posons, comme dans le Mémoire cité,

$$U_f(\zeta) = U_0 + U_1 + U_2 + \dots,$$

$U_n$  étant de  $n^{\text{ième}}$  ordre par rapport aux valeurs de  $\zeta$ , et portons cette série dans l'équation (2). Alors, en remplaçant  $x$  et  $y$  par leurs expressions, cette équation prendra la forme

$$R G_0 \zeta - \frac{1}{4\pi} \int \frac{G'_0 \zeta' d\sigma'}{D} = \frac{1}{2} (W - \mathbf{A}Y) + \text{const.},$$

où

$$W = \eta(\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + \zeta) \sin^2\theta + U_2 + U_3 + \dots,$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\gamma} \int W Y d\sigma.$$

Telle est l'équation qui nous a servi à déterminer la fonction à deux paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  dont nous avons parlé plus haut.

Quant à ces paramètres, l'un,  $\eta$ , figure explicitement dans l'équation, et l'autre, pour lequel on peut prendre

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} \int G_0 \zeta Y d\sigma^*),$$

s'introduit dans la suite des calculs.

Nous avons vu que cette fonction  $\zeta$  peut être supposée paire par rapport à  $\cos\theta$  et  $\psi$  et qu'elle devient alors parfaitement déterminée, si l'on suppose que le volume de la figure

---

\*) Remarquons que cette définition de  $\alpha$  ne coïncide pas entièrement avec celle que nous avons adoptée dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*: pour obtenir  $\alpha$  de ce Mémoire, on doit multiplier l'expression actuelle de  $\alpha$  par  $\sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)}$ .

qui y correspond soit égal à celui de l'ellipsoïde E. Nous avons d'ailleurs montré que, dans ces conditions,  $|\alpha|$  et  $|\eta|$  étant assez petits, la fonction  $\zeta$  est susceptible d'être présentée sous la forme d'une série entière en  $\alpha$  et  $\eta$ ,

$$\zeta = \zeta_{10} \alpha + \zeta_{01} \eta + \zeta_{20} \alpha^2 + \zeta_{11} \alpha \eta + \zeta_{02} \eta^2 + \dots,$$

où les  $\zeta_{rs}$  sont des fonctions de  $\theta$  et  $\psi$  ne renfermant rien d'arbitraire.

Pour que cette fonction corresponde à une figure d'équilibre, les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  doivent être liés par l'équation que l'on obtient en annulant la constante **A**. Mais à présent nous n'admettrons pas cette équation et, en nous arrêtant à l'expression ci-dessus de  $\zeta$ , nous y laisserons les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  indépendants.

Rappelons toutefois les principaux résultats que nous avons obtenus au sujet de l'équation **A** = 0.

Rappelons d'abord que pour la constante **A**, en la développant suivant les puissances de  $\alpha$  et  $\eta$ , on a une expression de la forme

$$\mathbf{A} = A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 + \dots + (B + \Sigma) \alpha \eta + C_3 \eta^3 + \dots *),$$

où  $\Sigma$  désigne une série entière en  $\alpha$  et  $\eta$ , s'annulant pour  $\alpha = \eta = 0$ , et les  $A_i$ , les  $C_i$  et  $B$  sont des nombres déterminés, parmi lesquels celui  $B$  n'est jamais nul.

De cette dernière circonstance nous avons conclu qu'il n'y a que deux manières différentes de satisfaire à l'équation **A** = 0, quand  $|\alpha|$  et  $|\eta|$  sont assez petits: l'une se réduit à supposer que  $\eta$  soit une fonction de  $\alpha$  développable suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$ , l'autre, si l'on considère  $\alpha$  comme fonction de  $\eta$ , donne pour cette fonction une série procédant suivant les puissances entières et positives de  $\eta$  où il n'y a pas de termes au-dessous du deuxième degré.

La première supposition conduit à des figures d'équilibre non ellipsoïdales, sauf dans le cas de  $m = k = 2$ , où elle donne les ellipsoïdes à trois axes inégaux de Jacobi; et, pour toutes ces figures, la fonction  $\zeta$  sera développable suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$ .

La seconde donne toujours des figures ellipsoïdales, qui, dans le cas de  $m = k = 2$ , sont celles de révolution. Pour ces figures, la fonction  $\zeta$  se présentera sous forme d'une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de  $\eta$ , où le terme du premier degré sera égal à  $\zeta_{01} \eta$ .

Cela posé, reportons-nous à l'expression générale de  $\zeta$ , où les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  ne sont liés par aucune relation, et cherchons à déterminer ces paramètres de manière à satisfaire aux deux conditions dont nous avons parlé au numéro précédent.

---

\*) Sauf dans le cas de  $m = 2$ ,  $k = 0$ , qui ne se présentera pas dans notre étude actuelle, puisque c'est toujours un cas ordinaire.

L'une de ces conditions est  $a_{m,2k} = 0$ .

Or nous avons (n° 20)

$$a_{m,2k} = \frac{1}{\gamma} \int \tau Y d\sigma,$$

ce qui se réduit à

$$a_{m,2k} = \frac{1}{\gamma} \int \chi Y d\sigma,$$

puisque, pour la fonction  $w$  du n° 12, on aura dans tous les cas

$$\int w Y d\sigma = 0.$$

D'autre part, en nous reportant au n° 5, nous pouvons écrire l'expression

$$\chi = \int_{-\lambda}^{+\lambda} G x d\xi$$

comme il suit:

$$\chi = \int_{-L}^{+L} G K du - \int_0^{\zeta} G du.$$

Donc la condition dont il s'agit prend la forme

$$(3) \quad \int Y d\sigma \int_0^{\zeta} G du = \int Y d\sigma \int_{-L}^{+L} G K du,$$

où l'intégrale qui figure au second membre doit être considérée comme une quantité donnée.

Quant à la deuxième condition, elle s'écrit:

$$(4) \quad \int \sin^2 \theta d\sigma \int_0^{\zeta} (\rho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + u) G du = 2(S - S_0),$$

le second membre étant encore une quantité donnée.

Ainsi nous devons satisfaire aux équations (3) et (4), dont les premiers membres sont des fonctions déterminées des paramètres  $\alpha$  et  $\eta$ , qui s'annulent pour  $\alpha = \eta = 0$  et sont développables suivant les puissances entières et positives de ces paramètres, tant qu'ils sont assez petits en valeurs absolues.

Cherchons les termes du premier degré dans les développements qui en proviennent.

Pour l'équation (3), ces termes s'obtiennent en développant l'intégrale

$$\int G_0 \zeta Y d\sigma.$$

Donc, par la définition même du paramètre  $\alpha$ , ils se réduisent à un seul terme, qui est égal à  $\gamma\alpha$ .

Quant à l'équation (4), les termes en question se trouveront en développant l'intégrale

$$\int G_0 \zeta (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta d\sigma.$$

Par suite, en remarquant que

$$G_0 \zeta_{10} = Y$$

et que l'intégrale

$$\int Y (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta d\sigma$$

sera toujours égal à zéro, on n'aura qu'un seul terme du premier degré, savoir

$$\eta \int G_0 \zeta_{01} (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi) \sin^2\theta d\sigma.$$

Ce terme ne sera d'ailleurs jamais nul.

En effet, d'après ce que nous avons observé plus haut, le coefficient de  $\eta$  n'est autre chose que  $2S'_0$ , en entendant par  $S'_0$  la valeur, pour  $\Omega = \Omega_0$ , de la dérivée  $\frac{dS}{d\Omega}$  relative à la série des ellipsoïdes de Maclaurin ou à celle des ellipsoïdes de Jacobi, selon que l'ellipsoïde E est ou n'est pas de révolution. Or on sait que cette dérivée ne s'annule jamais, quelle que soit celle des deux séries ellipsoïdales que l'on envisage.

Ainsi, les équations que nous avons à résoudre seront de la forme

$$\gamma\alpha + \dots = X, \quad S'_0\eta + \dots = S - S_0,$$

$X$  étant le second membre de l'équation (3) et les termes non écrits étant des dimensions, par rapport à  $\alpha$  et  $\eta$ , dépassant la première.

De là on voit que, quels que soient  $X$  et  $S - S_0$ , pourvu qu'ils soient assez petits en valeurs absolues, on pourra toujours satisfaire aux équations (3) et (4), et que cela donnera, pour  $\alpha$  et  $\eta$ , des expressions parfaitement déterminées sous la forme des séries entières en  $X$  et  $S - S_0$ , s'annulant quand on fait simultanément  $X = 0$  et  $S - S_0 = 0$ .

La possibilité de nos équations étant ainsi mise en évidence, nous pouvons prendre pour les quantités données, au lieu de  $X$  et  $S - S_0$ , les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  eux-mêmes, et nous pourrions leurs attribuer des valeurs quelconques, pourvu qu'elles soient suffisamment petites.

**36.** Voyons maintenant si la fonction  $\zeta$  que nous venons de définir satisfait aux conditions qui doivent être remplies d'après ce que nous avons admis dans ce qui précède.

Nous avons d'abord les quatre conditions du n° 6, savoir :

- 1° Le volume de la figure  $f$  doit être égal à celui de l'ellipsoïde  $E$ ;
- 2° Son centre de gravité doit se trouver à l'origine des coordonnées;
- 3° Les plans des  $xy$  et des  $xz$  doivent être, pour cette figure, des plans de symétrie;
- 4° Le moment d'inertie de cette figure par rapport à l'axe des  $z$  doit avoir une valeur donnée  $S$ .

Or, d'après ce que nous avons remarqué au numéro précédent, nous pouvons toujours supposer notre fonction  $\zeta$  telle que, pour la figure qui lui correspond, la première et la troisième de ces conditions soient remplies, et quant à la quatrième, elle est remplie en vertu de l'équation (4).

Nous n'avons donc à nous arrêter qu'à la deuxième condition.

Pour que cette condition soit remplie, il suffit que la figure considérée admette trois plans de symétrie passant par l'origine, et nous avons vu dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre* que cela aura lieu dans la plupart des cas.

Tout d'abord cela aura lieu dans tous les cas où  $m$  est un nombre pair, car alors les  $\zeta_{rs}$  seront des fonctions paires par rapport à  $\cos\psi$ , d'où il résulte que le plan des  $yz$  sera un plan de symétrie pour notre figure, et les deux autres plans coordonnés le sont déjà d'après la troisième condition.

D'autre part, cela aura lieu toutes les fois que l'ellipsoïde  $E$  est de révolution et que le nombre  $k$  n'est pas égal à 1; car alors, si  $k = 0$ , les  $\zeta_{rs}$  ne dépendront point de  $\psi$ , et la figure considérée sera, par suite, une figure de révolution autour de l'axe des  $z$ , et, si  $k$  n'est pas nul, les  $\zeta_{rs}$  seront des fonctions périodiques de  $\psi$  à période  $\frac{2\pi}{k}$ , d'où l'on conclut que la figure considérée admettra  $k$  plans de symétrie passant par l'axe des  $z$ . Elle en admettra donc, si  $k$  n'est pas égal à 1, au moins deux, et elle admet, en outre, le plan des  $xy$  pour plan de symétrie.

Dans tous les cas signalés la deuxième condition sera donc satisfaite.

Quant à d'autres cas possibles, la figure considérée n'admettra que les deux plans de symétrie exigés par la troisième condition, et tout ce qu'on peut alors affirmer, c'est que le centre de gravité sera situé sur l'axe des  $x$ .

Remarquons toutefois que, si notre figure devient une figure d'équilibre, auquel cas les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  vérifieront l'équation  $\mathbf{A} = 0$ , la deuxième condition sera remplie même dans les cas dont il s'agit.



Or, dans notre étude, ces paramètres doivent rester arbitraires. Il faudra donc, dans les cas en question, faire une autre hypothèse à l'égard de la fonction  $\zeta$ , ce de quoi nous parlerons au numéro suivant.

Outre les conditions du n° 6, nous en avons encore deux, dont l'une s'exprime par l'inégalité (1) du n° 8, l'autre, par l'égalité (5) du n° 11.

La première, pour notre choix de la fonction  $\zeta$ , sera remplie d'après ce que nous avons montré dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*.

Montrons que la deuxième le sera également.

A cet effet, en nous reportant à l'équation (2), multiplions-la par  $\chi d\sigma$  et intégrons sur toute la surface de la sphère  $\Sigma$ . Alors, comme on a

$$\int Y\chi d\sigma = a_{m,2k} = 0, \quad \int \chi d\sigma = 0,$$

il viendra

$$\int [U_f(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma = -\eta \int (x^2 + y^2) \chi d\sigma,$$

où d'ailleurs

$$x^2 + y^2 = (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + \zeta) \sin^2\theta.$$

Par suite, en vertu de l'égalité (8) du n° 6, nous aurons

$$\int [U_f(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma = \eta \int \sin^2\theta \chi_1 d\sigma,$$

ce qui est bien une égalité de la forme de celle (5) du n° 11, car il est facile de s'assurer que,  $l$  étant au-dessous d'un nombre fixe, on pourra assigner à  $|\eta|$  une limite supérieure de la forme  $Nl$ , où  $N$  est un nombre fixe.

En effet, par la définition même du paramètre  $\alpha$ , on peut assigner une pareille limite supérieure à  $|\alpha|$  et l'on aura évidemment, pour  $|S - S_0|$ , une limite supérieure de la même forme. Donc la même chose aura aussi lieu pour  $|\eta|$ , comme on le voit par l'équation (4), se réduisant à la forme

$$S'_0 \eta + \dots = S - S_0,$$

où  $S'_0$  ne sera jamais nul.

**37.** Nous allons à présent montrer comment il faudra modifier l'hypothèse précédente au sujet de la fonction  $\zeta$ , pour que toutes les conditions admises soient satisfaites même dans les cas d'exception dont nous avons parlé plus haut.

Quant à ces cas, ce seront, pour la série des ellipsoïdes de Jacobi, tous ceux où  $m$  est un nombre impair et, pour la série des ellipsoïdes de Maclaurin, ceux où  $k = 1$ , laquelle égalité ne pourra avoir lieu que si  $m$  est encore un nombre impair.

Pour pouvoir embrasser ces cas, nous allons introduire, outre  $\alpha$  et  $\eta$ , un troisième paramètre,  $\beta$ , en remplaçant l'équation (2) par celle-ci :

$$(5) \quad U_f(\zeta) + (\Omega_0 + \eta)(x^2 + y^2) = AY + \beta x + \text{const.},$$

où  $x$  et  $y$ , comme auparavant, sont donnés par les formules

$$x = \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin\theta \cos\psi,$$

$$y = \sqrt{\rho + q + \zeta} \sin\theta \sin\psi,$$

et où  $A$  est une constante, pour laquelle on aura à présent cette expression :

$$A = \frac{1}{Y} \int [U_f(\zeta) + (\Omega_0 + \eta)(x^2 + y^2) - \beta x] Y d\sigma.$$

Après avoir fait des transformations semblables à celles qui ont été faites avec l'équation (2), on réduira la nouvelle équation à

$$R G_0 \zeta - \frac{1}{4\pi} \int \frac{G'_0 \zeta' d\sigma'}{D} = \frac{1}{2} (W - AY - \beta \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin\theta \cos\psi) + \text{const.}$$

et l'expression de  $A$  prendra la forme

$$(6) \quad A = \frac{1}{Y} \int (W - \beta \sqrt{\rho + 1 + \zeta} \sin\theta \cos\psi) Y d\sigma,$$

$W$  étant donné, comme précédemment, par la formule

$$W = \eta(\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + \zeta) \sin^2\theta + U_2 + U_3 + \dots$$

On pourra ensuite traiter cette équation comme nous l'avons montré, sur l'équation (2), dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*.

Dans le cas actuel, en posant, comme auparavant,

$$\alpha = \frac{1}{Y} \int G_0 \zeta Y d\sigma,$$

on devra chercher la fonction  $\zeta$  sous la forme d'une série,

$$\zeta = \sum_{(r+s+t>1)} \zeta_{rst} \alpha^r \eta^s \beta^t,$$

procédant suivant les puissances entières et positives des trois paramètres  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ ; et en le faisant, on sera amené à des équations, qui permettront de calculer chacun des coefficients  $\zeta_{rst}$ , dès que tous ceux, pour lesquels la somme des indices est inférieure à  $r + s + t$ , sont déjà connus, les trois premiers coefficients  $\zeta_{100}$ ,  $\zeta_{010}$ ,  $\zeta_{001}$  se calculant immédiatement. En admettant d'ailleurs, ainsi que nous le supposons, que le volume de la figure cherchée  $f$  doit être égal à celui de l'ellipsoïde  $E$  et que la fonction  $\zeta$  doit être paire par rapport à  $\cos\theta$  et à  $\psi$ , on obtiendra pour tous les coefficients des expressions parfaitement déterminées en fonction de  $\theta$  et  $\psi$ , lesquelles expressions seront des fonctions uniformes de deux arguments,  $\cos\theta$  et  $\sin\theta \cos\psi$ , admettant les dérivées partielles de tous les ordres. D'ailleurs, les expressions des coefficients  $\zeta_{rso}$ , où le troisième indice est égal à zéro, se réduiront à celles des coefficients  $\zeta_{rs}$  considérés précédemment.

Remarquons que, le nombre  $m$  étant impair, les  $\zeta_{rst}$  seront des fonctions paires ou impaires par rapport à l'argument  $\sin\theta \cos\psi$ , selon que  $r + t$  est un nombre pair ou impair, et, si l'on voulait considérer le cas de  $m$  pair, on aurait pour ces coefficients des expressions paires ou impaires par rapport à l'argument en question, suivant que l'indice  $t$  est un nombre pair ou impair.

Les fonctions  $\zeta_{rst}$  étant ainsi définies, on en viendra à la question de la convergence du développement considéré, et, par la même méthode que dans le Mémoire cité, l'on parviendra à démontrer que,  $|\alpha|$ ,  $|\eta|$  et  $|\beta|$  étant au-dessous des nombres fixes suffisamment petits, ce développement sera convergent absolument et uniformément sur toute la surface de la sphère  $\Sigma$ , où il définira, par suite, une certaine fonction continue et uniforme. Cette fonction admettra les deux dérivées partielles,  $\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}$  et  $\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}$ , que l'on pourra former en différentiant le développement terme à terme, et ces dérivées seront encore continues sur la surface de la sphère  $\Sigma$ , sauf, peut-être, aux pôles,  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , où elles resteront toutefois finies, et où même la fonction  $\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\zeta}{\partial\psi}$  ne deviendra pas infinie. Du reste,  $|\alpha|$ ,  $|\eta|$  et  $|\beta|$  étant assez petits, on pourra assigner aux valeurs absolues des fonctions

$$\zeta, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\zeta}{\partial\psi}$$

des limites supérieures de la forme

$$N|\alpha| + N'|\eta| + N''|\beta|,$$

$N$ ,  $N'$ ,  $N''$  étant des nombres positifs fixes.

De cette façon on définira une certaine figure  $f$ , qui satisfera à la première et à la troisième des conditions du n° 6; et pour qu'elle satisfasse aux conditions qui restent, il n'y aura qu'à choisir convenablement les paramètres  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ .

Pour cela, on assujettira ces paramètres à vérifier trois équations, dont deux seront celles (3) et (4) et la troisième, qui exprimera que la coordonnée  $x$  du centre de gravité est égale à zéro, s'écrira ainsi:

$$(7) \quad \int \sin\theta \cos\psi \, d\sigma \int_0^\zeta \sqrt{\rho+1+u} \, G \, du = 0.$$

En développant les premiers membres de ces équations suivant les puissances de  $\alpha, \eta, \beta$ , on verra que, pour les équations (3) et (4), les termes du premier degré seront les mêmes qu'auparavant. On le conclura en remarquant que l'on a

$$G_0 \zeta_{001} = - \frac{\sqrt{\rho+1}}{2T_{1,2}} \sin\theta \cos\psi$$

et tenant compte des égalités

$$\zeta_{100} = \zeta_{10}, \quad \zeta_{010} = \zeta_{01}.$$

Quant à l'équation (7), les termes du premier degré s'y réduisent évidemment à celui-ci:

$$- \frac{2\pi(\rho+1)}{3T_{1,2}} \beta.$$

On aura donc, pour déterminer  $\alpha, \eta, \beta$ , les équations de la forme

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} X + F(\alpha, \eta, \beta),$$

$$\eta = \frac{1}{S_0'} (S - S_0) + \Phi(\alpha, \eta, \beta),$$

$$\beta = \Psi(\alpha, \eta, \beta),$$

$F, \Phi, \Psi$  étant des séries entières en  $\alpha, \eta, \beta$  qui ne contiennent pas de termes au-dessous de la deuxième dimension; et l'on en déduira, pour ces paramètres, des expressions parfaitement déterminées sous la forme des séries entières en  $X$  et  $S - S_0$ , s'annulant pour  $X = S - S_0 = 0$ .

Mais, au lieu de traiter directement les trois équations ci-dessus, on pourra ne considérer d'abord que l'équation (7), qui définira  $\beta$  comme fonction de  $\alpha$  et  $\eta$ , pour substituer ensuite cette fonction dans les équations (3) et (4).

Examinons de plus près cette fonction, qui se présentera, comme on voit, sous la forme

d'une série entière en  $\alpha$  et  $\eta$  où il n'y aura pas de termes au-dessous de la deuxième dimension.

**38.** Remplaçons d'abord l'équation (7) par une autre, qui lui sera équivalente, mais qui aura une autre forme, où une circonstance sur laquelle nous voulons attirer l'attention sera mise en évidence.

De ce que nous avons dit plus haut, il résulte que la surface de la figure qui vient d'être définie admettra un plan tangent déterminé, sauf, peut-être, aux points qui correspondent aux pôles de la sphère  $\Sigma^*$ ). Nous pouvons donc, en faisant abstraction de ces points, qui ne seront du reste qu'au nombre de deux, parler des normales à la surface de notre figure.

D'autre part, nous pouvons être certains que cette surface aura une aire mesurable.

Cela étant, désignons par  $n$  la direction de la normale extérieure, en un point  $(x, y, z)$  de notre surface, et par  $ds$  l'élément superficiel, contenant ce point.

Puis, en nous reportant à l'équation (5), multiplions les deux membres par  $\cos(n, x) ds$  et intégrons sur toute la surface. Comme les intégrales

$$\int \cos(n, x) ds \quad \text{et} \quad \int y^2 \cos(n, x) ds$$

se réduisent à zéro, nous aurons

$$\int U \cos(n, x) ds + (\Omega_0 + \eta) \int x^2 \cos(n, x) ds = A \int Y \cos(n, x) ds + \beta \int x \cos(n, x) ds,$$

en écrivant, pour abrégé,  $U$  au lieu de  $U_f(\zeta)$ .

Or on a (n° 7)

$$\int U \cos(n, x) ds = \frac{1}{\pi} \iint \frac{x' - x}{r^3} d\tau d\tau' = 0,$$

et, des deux intégrales

$$\int x^2 \cos(n, x) ds \quad \text{et} \quad \int x \cos(n, x) ds,$$

la première est encore nulle en vertu de la condition que le centre de gravité de la figure  $f$  doit se trouver à l'origine des coordonnées, tandis que la seconde représente le volume de cette figure, lequel doit être égal au volume de l'ellipsoïde  $E$ .

---

\*) On peut établir que, même en ces points, il y aura des plans tangents déterminés. Mais cela n'est d'aucune importance pour les calculs qui vont suivre.

Si donc on désigne ce volume par  $Q$ , notre équation se réduira à

$$(8) \quad Q\beta + \mathbf{A} \int Y \cos(n, x) ds = 0.$$

La question est ramenée ainsi à l'examen des quantités

$$\mathbf{A} \quad \text{et} \quad \int Y \cos(n, x) ds,$$

qu'il faudra développer suivant les puissances des paramètres  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ .

Considérons d'abord  $\mathbf{A}$  et, en supposant que son développement soit ordonné suivant les puissances de  $\beta$ , posons

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\beta + \mathbf{A}_2\beta^2 + \dots,$$

de sorte que les  $\mathbf{A}_i$  seront des séries entières en  $\alpha$  et  $\eta$ .

Pour ce qui concerne  $\mathbf{A}_0$ , nous aurons alors une expression identique à celle que l'on avait pour  $\mathbf{A}$  au n° 35, à savoir

$$\mathbf{A}_0 = A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 + \dots + (B + \Sigma)\alpha\eta + C_3\eta^3 + \dots.$$

Seulement, si nous supposons que  $m$  soit un nombre impair, cette expression ne contiendra que des puissances impaires de  $\alpha$ , de sorte qu'il viendra

$$A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0,$$

et tous les  $C_i$  seront nuls.

Quant aux autres  $\mathbf{A}_i$ , on voit aisément, par la formule (6), que, dans la même supposition à l'égard du nombre  $m$ , les  $\mathbf{A}_i$  à indice  $i$  impair ne contiendront que des puissances paires de  $\alpha$  et ceux à indice pair, que des puissances impaires de  $\alpha$ . D'ailleurs, comme l'intégrale

$$\int Y \sin\theta \cos\psi d\sigma$$

sera toujours égale à zéro,  $\mathbf{A}_1$  ne contiendra que des termes s'annulant pour  $\alpha = \eta = 0$ .

Considérons maintenant l'intégrale qui figure dans l'équation (8).

En y introduisant les variables  $\theta$  et  $\psi$ , on aura

$$\cos(n, x) ds = \pm \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) d\theta d\psi,$$

$y$  et  $z$  s'expriment en fonction de ces variables au moyen des formules

$$y = \sqrt{\rho + q + \zeta} \sin \theta \sin \psi,$$

$$z = \sqrt{\rho + \zeta} \cos \theta.$$

On voit d'ailleurs facilement que,  $n$  étant la direction de la normale extérieure, on devra prendre, en supposant  $d\theta$  et  $d\psi$  positifs, le signe  $-+$ .

Cela posé, nous remarquons que l'on peut écrire

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( y \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left( y \frac{\partial z}{\partial \theta} \right),$$

et que, l'intégrale

$$\int_0^\zeta \frac{\sqrt{\rho + q + u}}{\sqrt{\rho + u}} du$$

étant désignée par  $Z$ , de sorte qu'on ait

$$Z = \sqrt{(\rho + \zeta)(\rho + q + \zeta)} - \sqrt{\rho(\rho + q)} + q \log \frac{\sqrt{\rho + \zeta} + \sqrt{\rho + q + \zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho + q}},$$

il vient

$$y \frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \psi \frac{\partial Z}{\partial \psi},$$

$$y \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \psi \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \sqrt{(\rho + \zeta)(\rho + q + \zeta)} \sin^2 \theta \sin \psi.$$

On aura donc, pour la quantité

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

cette expression:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cos \theta \sin \psi \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \theta \cos \theta \sin \psi \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sqrt{(\rho + \zeta)(\rho + q + \zeta)} \sin^2 \theta \sin \psi \right), \end{aligned}$$

laquelle, en faisant la transformation exprimée par l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( U \frac{\partial V}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left( U \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( V \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( V \frac{\partial U}{\partial \psi} \right),$$

et tenant compte de ce qu'on a

$$\sqrt{(\rho + \zeta)(\rho + q + \zeta)} - Z = \sqrt{\rho(\rho + q)} - q \log \frac{\sqrt{\rho + \zeta} + \sqrt{\rho + q + \zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho + q}},$$

peut être présentée sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{2} Z \sin \psi - q \log \frac{\sqrt{\rho + \zeta} + \sqrt{\rho + q + \zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho + q}} \sin^2 \theta \sin \psi \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (Z \sin \theta \cos \theta \cos \psi) \\ + \sqrt{\rho(\rho + q)} \sin^2 \theta \cos \psi. \end{aligned}$$

D'après cela, et en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi Y \sin^2 \theta \cos \psi d\theta = \int Y \sin \theta \cos \psi d\sigma = 0,$$

on trouve, pour l'intégrale

$$\int Y \cos(n, x) ds,$$

l'expression

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} Y \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{2} Z \sin \psi - q \log \frac{\sqrt{\rho + \zeta} + \sqrt{\rho + q + \zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho + q}} \sin^2 \theta \sin \psi \right) d\psi \\ - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi Y \frac{\partial}{\partial \theta} (Z \sin \theta \cos \theta \cos \psi) d\theta, \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \left( q \log \frac{\sqrt{\rho + \zeta} + \sqrt{\rho + q + \zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho + q}} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} Z \right) \sin \psi \frac{\partial Y}{\partial \psi} d\theta \\ + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi Z \sin \theta \cos \theta \cos \psi \frac{\partial Y}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned}$$



On peut d'ailleurs la présenter sous une autre forme, en supposant que tout soit exprimé au moyen des arguments  $\cos\theta$  et  $\sin\theta \cos\psi$ , dont  $Y$  est une fonction entière. Alors, en posant, pour abrégé,

$$\cos\theta = v, \quad \sin\theta \cos\psi = w,$$

on aura

$$\int Y \cos(n, x) ds = -q \int \log \frac{\sqrt{\rho+\zeta} + \sqrt{\rho+q+\zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho+q}} (1-v^2-w^2) \frac{\partial Y}{\partial w} d\sigma \\ + \frac{1}{2} \int Z \left[ (1-w^2) \frac{\partial Y}{\partial w} - vw \frac{\partial Y}{\partial v} \right] d\sigma.$$

Il ne reste maintenant qu'à développer cette expression suivant les puissances de  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ , ce qui se réduit à développer ces deux fonctions:

$$Z = \int_0^\zeta \frac{\sqrt{\rho+q+u}}{\sqrt{\rho+u}} du = \frac{\sqrt{\rho+q}}{\sqrt{\rho}} \zeta + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} \frac{\sqrt{\rho+q}}{\sqrt{\rho}} \zeta^2 + \dots, \\ \log \frac{\sqrt{\rho+\zeta} + \sqrt{\rho+q+\zeta}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho+q}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho(\rho+q)}} \zeta + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\sqrt{\rho(\rho+q)}} \zeta^2 + \dots,$$

et l'on voit que la série que l'on obtient de cette manière pour notre intégrale ne contiendra que des termes s'annulant pour  $\alpha = \eta = \beta = 0$ . On voit d'ailleurs que,  $m$  étant un nombre impair, cette série ne contiendra que des termes où la somme des exposants de  $\alpha$  et  $\beta$  sera un nombre pair; car  $Y$  sera alors une fonction impaire de  $w$ , et  $\zeta$ , d'après ce que nous avons observé au numéro précédent, ne changera pas quand  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $w$  seront remplacés simultanément par  $-\alpha$ ,  $-\beta$ ,  $-w$ .

Nous ordonnerons le développement de notre intégrale suivant les puissances de  $\beta$ , en posant

$$\int Y \cos(n, x) ds = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \beta + \mathbf{B}_2 \beta^2 + \dots,$$

de sorte que les  $\mathbf{B}_i$  représenteront des séries entières en  $\alpha$  et  $\eta$ , qui seront paires ou impaires par rapport à  $\alpha$ , selon que  $i$  est un nombre pair ou impair. En particulier,  $\mathbf{B}_0$  ne contiendra que des termes s'annulant pour  $\alpha = \eta = 0$ .

Cela posé, revenons à l'équation (8), que nous pouvons maintenant écrire comme il suit:

$$Q\beta + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \beta + \mathbf{A}_2 \beta^2 + \dots) (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \beta + \mathbf{B}_2 \beta^2 + \dots) = 0.$$

Par cette équation on voit immédiatement que l'expression cherchée de  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  et  $\eta$  sera de la forme

$$(9) \quad \beta = - \frac{A_0 B_0}{Q} (1 + \Gamma),$$

$\Gamma$  étant une série, procédant suivant les puissances de  $\alpha$  et  $\eta$  et s'annulant pour  $\alpha = \eta = 0$ .

On voit d'ailleurs que la série  $\Gamma$  ne renfermera point de termes au-dessous de la deuxième dimension et que, par rapport à  $\alpha$ , ce sera une fonction paire.

Telle sera l'expression de  $\beta$ , si  $m$  est un nombre impair.

Quant au cas de  $m$  pair, il est facile de voir que  $B_0$  se réduira identiquement à zéro, et que, par suite,  $|\alpha|$ ,  $|\eta|$  et  $|\beta|$  étant assez petits, notre équation ne pourra être satisfaite qu'en posant  $\beta = 0$ .

Ajoutons que l'on aura  $B_0 = 0$  et, par conséquent,  $\beta = 0$  même dans le cas de  $m$  impair, si, l'ellipsoïde considéré étant de révolution, le nombre  $k$  est plus grand que 1.

Ainsi la nouvelle hypothèse au sujet de la fonction  $\zeta$  se réduit à celle du n° 35, dans tous les cas où cette dernière suffit.

Nous pourrions donc ne considérer que l'hypothèse du n° 37, en regardant  $\beta$  comme une fonction de  $\alpha$  et  $\eta$  définie par l'équation (8), et l'expression (9) sera pour cette fonction valable dans tous les cas.

**39.** Ayant déterminé  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  et  $\eta$  comme il vient d'être montré et substituant son expression dans les équations (3) et (4), nous les réduirons à la forme

$$(10) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{Y} X + F(\alpha, \eta), \\ \eta &= \frac{1}{S_0'} (S - S_0) + \Phi(\alpha, \eta), \end{aligned}$$

où les fonctions  $F(\alpha, \eta)$  et  $\Phi(\alpha, \eta)$ , qui seront données par certaines séries de puissances, ne contiendront pas de termes au-dessous de la deuxième dimension par rapport à  $\alpha$  et  $\eta$ ; et ces paramètres seront ainsi assujettis à des équations toutes semblables à celles que nous avons considérées au n° 35.

En admettant ces équations, nous aurons

$$a_{m,2k} = 0,$$

et en même temps les quatre conditions du n° 6 seront satisfaites.

Montrons que les deux autres conditions dont nous avons parlé au n° 36 seront également satisfaites.

Nous avons déjà remarqué au n° 37 que,  $|\alpha|$ ,  $|\eta|$  et  $|\beta|$  étant assez petits, on pourra assigner aux valeurs absolues des fonctions

$$(11) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \psi}$$

des limites supérieures de la forme

$$N|\alpha| + N'|\eta| + N''|\beta|,$$

en prenant pour  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$  des nombres positifs fixes suffisamment grands.

Or, en substituant l'expression de  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  et  $\eta$ , on pourra, si  $|\alpha|$  et  $|\eta|$  sont assez petits, remplacer ces limites supérieures par celles de la forme

$$N|\alpha| + N'|\eta|.$$

D'autre part, comme nous avons déjà observé au n° 36, on aura pour  $|\alpha|$  et  $|S - S_0|$ , si  $l$  est assez petit, des limites supérieures de la forme  $Nl$ , et l'équation (10) fait ensuite voir que l'on aura pour  $|\eta|$  une limite supérieure de la même forme.

Donc,  $l$  étant assez petit, on pourra trouver, pour les valeurs absolues des fonctions (11), des limites supérieures de la forme  $Nl$ ; et de là il est facile de conclure que l'on aura une inégalité telle que celle (1) du n° 8.

Ainsi, il ne reste plus qu'à vérifier l'égalité (5) du n° 11.

Reportons-nous, pour cela, à l'équation (5) du n° 37.

Au moyen du procédé employé au n° 36, nous en déduirons, pour l'intégrale

$$\int [U_r(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma,$$

cette expression:

$$\eta \int \sin^2 \theta \chi_1 d\sigma + \beta \int x \chi d\sigma.$$

Or, en vertu de l'égalité (10) du n° 6, l'intégrale

$$\int x \chi d\sigma = \int \sqrt{\rho^2 + 1 + \zeta} \sin \theta \cos \psi \chi d\sigma$$

est une quantité de la forme

$$h \int \chi_1 d\sigma.$$

Par suite,  $l$  et  $\lambda$  étant assez petits, on pourra trouver un nombre fixe  $N$ , tel qu'on ait

$$\left| \eta \int \sin^2\theta \chi_1 d\sigma + \beta \int x \chi d\sigma \right| < N(|\eta| + |\beta|) \int \chi_1 d\sigma.$$

On aura donc, en remplaçant  $|\eta| + |\beta|$  par une limite supérieure de la forme  $N'l$ ,

$$\left| \int [U_f(\zeta) + \Omega_0(x^2 + y^2)] \chi d\sigma \right| < N''l \int \chi_1 d\sigma,$$

$N''$  étant un nombre fixe, et cela est équivalent à l'égalité (5) du n° 11.

On voit ainsi que notre fonction  $\zeta$  satisfait bien à toutes les conditions que nous avons introduites.

**40.** En nous arrêtant à l'hypothèse du n° 37 et en supposant que  $\beta$  soit exprimé au moyen de  $\alpha$  et  $\eta$ , nous allons considérer ces deux paramètres comme des variables indépendantes, que l'on peut donner arbitrairement pour définir la figure  $f$ , et quant aux quantités  $S$  et

$$X = \int Y d\sigma \int_{-L}^{+L} G K du,$$

elles seront envisagées comme des fonctions de  $\alpha$  et  $\eta$ , définies par les équations (3) et (4). Du reste, de ces deux fonctions, nous n'aurons à considérer que celle  $S$ .

Développons cette fonction suivant les puissances de  $\alpha$  et  $\eta$ .

Comme nous le savons, ce développement sera de la forme

$$S = S_0 + S'_0 \eta + S_{20} \alpha^2 + S_{11} \alpha \eta + S_{02} \eta^2 + \dots,$$

où sont écrits tous les termes dont les degrés ne dépassent pas le deuxième.

Ces termes nous suffiront, mais il faut en déterminer les coefficients.

C'est ce que nous ferons plus loin pour ce qui concerne  $S_{20}$  et  $S_{11}$ . Quant à  $S_{02}$ , il est facile de voir que l'on aura

$$(12) \quad S_{02} = \frac{1}{2} S''_0,$$

$S''_0$  étant la valeur pour l'ellipsoïde  $E$  de la dérivée

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Omega^2}$$

relative à la série des figures d'équilibre ellipsoïdales, laquelle série, dans le cas de l'ellipsoïde de Jacobi de révolution, doit être celle de Maclaurin.

En effet, pour cette série de figures,  $\alpha$  sera une fonction de  $\eta$ , se présentant sous forme d'une série entière où il n'y aura pas de termes au-dessous du second degré; de sorte que, si l'on substitue cette fonction dans l'expression ci-dessus de  $S$  et que l'on développe le résultat suivant les puissances de  $\eta$ , il viendra

$$S = S_0 + S'_0 \eta + S_{02} \eta^2 + \dots$$

D'autre part, la fonction dont il s'agit satisfera à l'équation  $\mathbf{A}_0 = 0$ , en vertu de laquelle on a, d'après (9),  $\beta = 0$ .

Donc, pour la valeur considérée de  $\alpha$ , il viendra

$$\sum \zeta_{rst} \alpha^r \eta^s \beta^t = \sum \zeta_{rs} \alpha^r \eta^s,$$

et notre figure  $f$  se réduira, par suite, à une figure ellipsoïdale appartenant à la série en question. On devra donc avoir l'égalité (12).

Outre la fonction  $S$ , nous aurons encore à considérer celle que l'on aura pour  $\mathbf{A}$ , en exprimant cette constante au moyen de  $\alpha$  et  $\eta$ .

D'après ce que nous avons vu au n° 38, cette fonction sera de la forme

$$(13) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 (1 + \mathbf{H}),$$

$\mathbf{H}$  étant une série procédant suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$  et  $\eta$  où il n'y aura pas de termes au-dessous de la deuxième dimension.

Cela posé, nous pouvons en venir à la recherche de l'accroissement restreint,

$$\Delta_1 \Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{M_0}{S_0} - \Delta_1 V,$$

ce qui se réduit à la recherche de la fonction de  $\alpha$  et  $\eta$ , par laquelle s'exprimera l'intégrale

$$\iint \frac{d\tau d\tau'}{r} = 2\pi V,$$

quand les deux intégrations indiquées seront supposées être étendues au volume de notre figure  $f$ .

Dans ce but, nous allons d'abord chercher la différentielle de cette fonction.

**41.** Pour désigner les différentielles relatives à une variation des paramètres  $\alpha$  et  $\eta$ , nous emploierons la caractéristique  $\delta$ , de sorte que nous aurons par exemple

$$\delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} \delta\alpha + \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \delta\eta.$$

Cela posé, nous devons chercher  $\delta V$ .

En prenant pour variables d'intégration les variables  $u, \theta, \psi$  du n° 1, nous avons, pour la figure f,

$$V = \frac{1}{4} \int d\sigma \int_{-\rho}^{\zeta} U_f(u) G(u) du,$$

$G(u)$  représentant ce que nous avons désigné précédemment par  $G(\rho + u, \theta, \psi)$  ou, simplement, par  $G$ .

Par suite, il vient

$$\delta V = \frac{1}{4} \int d\sigma \int_{-\rho}^{\zeta} \delta U_f(u) G(u) du + \frac{1}{4} \int U_f(\zeta) G(\zeta) \delta\zeta d\sigma.$$

Or la formule

$$U_f(u) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma' \int_{-\rho}^{\zeta'} \frac{G'(u') du'}{D(u, u')}$$

donne

$$\delta U_f(u) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{G'(\zeta') \delta\zeta'}{D(u, \zeta')} d\sigma',$$

et nous pouvons en conclure que

$$\int d\sigma \int_{-\rho}^{\zeta} \delta U_f(u) G(u) du = \int U_f(\zeta) G(\zeta) \delta\zeta d\sigma.$$

Nous aurons donc

$$\delta V = \frac{1}{2} \int U_f(\zeta) G(\zeta) \delta\zeta d\sigma.$$

Maintenant, en nous reportant à l'équation (5), éliminons  $U_f(\zeta)$ .

Alors, en remarquant que, par le choix de la figure f, on doit avoir

$$\int G(\zeta) \delta\zeta d\sigma = 0, \quad \int x G(\zeta) \delta\zeta d\sigma = 0, \quad \int (x^2 + y^2) G(\zeta) \delta\zeta d\sigma = 2\delta S,$$

nous parviendrons à la formule suivante:

$$(14) \quad \delta V = \frac{1}{2} \mathbf{A} \int Y G(\zeta) \delta \zeta d\sigma - (\Omega_0 + \eta) \delta S,$$

qui est celle que nous voulions obtenir.

Signalons une conséquence immédiate, qui s'en déduit en exprimant que le second membre est une différentielle exacte: en le faisant, on trouve

$$(15) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \int Y G(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\sigma - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \int Y G(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\sigma,$$

égalité dont nous nous servirons pour déterminer les coefficients  $S_{20}$  et  $S_{11}$  du développement de  $S$  suivant les puissances de  $\alpha$  et  $\eta$ .

A cet effet, nous devons chercher les termes du premier degré dans le développement du second membre de (15).

Comme le développement de  $\mathbf{A}$  ne contient pas de termes au-dessous du deuxième degré, on peut, dans cette recherche, réduire les intégrales

$$\int Y G(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\sigma \quad \text{et} \quad \int Y G(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\sigma$$

à leurs valeurs pour  $\alpha = \eta = 0$ , et comme ces valeurs sont

$$\int Y G_0 \zeta_{10} d\sigma = \gamma, \quad \int Y G_0 \zeta_{01} d\sigma = 0^*),$$

les termes cherchés se trouveront en multipliant par  $\frac{1}{2} \gamma$  les termes du premier degré de la dérivée  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta}$ .

Or, par la formule (13), eu égard à l'expression de  $\mathbf{A}_0$  donnée au n° 38, on voit que ces derniers termes se réduisent à un seul, qui est égal à  $B\alpha$ . Donc les termes cherchés se réduiront également à un seul terme, qui sera  $\frac{1}{2} \gamma B\alpha$ .

D'après cela, l'égalité (15) fait voir que l'on aura

$$S_{20} = \frac{1}{4} \gamma B\alpha, \quad S_{11} = 0,$$

---

\*) Les termes du premier degré, et même ceux du second degré, dans le développement de  $\zeta$  suivant les puissances de  $\alpha$  et  $\eta$  ne dépendront point des coefficients du développement de  $\beta$ , car, d'après (9), ce dernier développement ne renferme pas de termes au-dessous du troisième degré.

et que, par suite, le développement de  $S$ , aux termes près du second ordre, sera

$$(16) \quad S = S_0 + S'_0 \eta + \frac{1}{4} \gamma B \alpha^2 + \frac{1}{2} S''_0 \eta^2 + \dots$$

42. Revenons à la formule (14), où nous poserons, pour abrégier,

$$\frac{1}{2} \int Y d\sigma \int_0^\zeta G(u) du = \Phi,$$

de sorte qu'elle deviendra

$$(17) \quad \delta V = \mathbf{A} \delta \Phi - (\Omega_0 + \eta) \delta S,$$

ou bien,

$$\delta (V + \Omega_0 S) = \left( \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \eta \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha + \left( \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \delta \eta.$$

D'après cette formule, en tenant compte de l'égalité (15), qui prend maintenant la forme

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},$$

on trouve

$$V = V_0 - \Omega_0 (S - S_0) + \int_0^\alpha \left( \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_{\eta=0} d\alpha + \int_0^\eta \left( \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) d\eta,$$

où, sous le signe de l'intégrale relative à  $\eta$ ,  $\alpha$  est considéré comme une constante.

Ayant ainsi déterminé la fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\eta$ , par laquelle s'exprime  $V$  pour la figure  $f$ , nous en déduisons tout de suite une expression pour l'accroissement restreint de  $\Pi$ , qui est

$$\Delta_1 \Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{M_0}{S_0} - (V - V_0).$$

De cette façon, en remarquant que  $M_0 = \Omega_0 S_0^2$ , nous obtenons

$$(18) \quad \Delta_1 \Pi = \frac{\Omega_0}{S} (S - S_0)^2 - \int_0^\alpha \left( \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_{\eta=0} d\alpha + \int_0^\eta \left( \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} - \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta,$$

d'où l'on tire sans peine le développement de  $\Delta_1 \Pi$  suivant les puissances de  $\alpha$  et  $\eta$ .

Voyons, quels sont les termes principaux de ce développement, dans la supposition que  $\alpha$  et  $\eta$  soient des quantités infiniment petites arbitraires.



Nous appelons ainsi tout terme qui n'est divisible par aucun des autres termes du développement.

Considérons successivement chacune des trois parties dont est composé le second membre de la formule (18).

En commençant par l'expression

$$\frac{\Omega_0}{S} (S - S_0)^2,$$

on voit immédiatement, eu égard à (16), que les termes principaux s'y réduisent à ceux de la formule

$$\frac{\Omega_0}{S_0} \left( S_0' \eta + \frac{1}{4} \gamma B \alpha^2 \right)^2.$$

Il y en aura donc trois: un terme en  $\alpha^4$ , un terme en  $\alpha^2 \eta$  et un terme en  $\eta^2$ .

En passant ensuite à l'intégrale

$$\int_0^{\alpha} \left( \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_{\eta=0} d\alpha,$$

qui ne dépend que de  $\alpha$ , et qui ne peut avoir, par suite, qu'un seul terme principal, nous remarquons que la dérivée  $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$  se réduit, pour  $\alpha = \eta = 0$ , à

$$\frac{1}{2} \int G_0 \zeta_{10} Y d\sigma = \frac{1}{2} \gamma,$$

et que, d'après (13), on a

$$(\mathbf{A})_{\eta=0} = (A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 + \dots) (1 + \mathbf{H})_{\eta=0},$$

où du reste quelques-uns des  $A_i$  peuvent être nuls.

Si donc on désigne par  $n$  le plus petit nombre de la suite 2, 3, ..., tel que  $A_n$  ne soit pas nul, le terme principal de notre intégrale sera

$$\frac{\gamma}{2(n+1)} A_n \alpha^{n+1}.$$

Considérons enfin l'intégrale

$$\int_0^{\eta} \left( \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} - \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta,$$

qui ne contient que des termes s'annulant avec  $\eta$ .

Parmi ces termes, ceux qui proviennent de l'intégrale

$$\int_0^\eta \eta \frac{\partial S}{\partial \eta} d\eta$$

auront évidemment, pour terme principal,

$$\frac{1}{2} S'_0 \eta^2.$$

Quant aux termes provenant de l'intégrale

$$\int_0^\eta \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\eta,$$

ils seront divisibles, les uns par  $\eta^2$ , les autres par  $\alpha^2 \eta$ , tout en étant des dimensions supérieures à la troisième; car,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$  s'annulant pour  $\alpha = \eta = 0$ , cette intégrale ne contiendra pas de termes au-dessous de la quatrième dimension, et tous ses termes s'annulent pour  $\eta = 0$ . Nous n'avons donc pas à les considérer.

Cela posé, nous pouvons conclure que les termes principaux du développement de  $\Delta_1 \Pi$  se trouveront par la considération de l'expression

$$\frac{\Omega_0}{S'_0} \left( S'_0 \eta + \frac{1}{4} \gamma B \alpha^2 \right)^2 - \frac{\gamma}{2(n+1)} A_n \alpha^{n+1} + \frac{1}{2} S'_0 \eta^2,$$

si toutefois quelques termes semblables dans celle-ci ne se détruisent pas mutuellement.

Or il y en a là deux termes en  $\eta^2$  et, si  $n = 3$ , deux termes en  $\alpha^4$ .

Les deux premiers ne se détruiront jamais, car en les réunissant en un seul on trouve

$$\frac{S'_0 M'_0}{2 S_0^2} \eta^2,$$

où

$$M'_0 = S_0^2 + 2\Omega_0 S_0 S'_0,$$

ce qui représente la valeur pour l'ellipsoïde E de la dérivée

$$\frac{dM}{d\Omega}$$

relative à la série des figures ellipsoïdales d'équilibre, et cette dérivée, comme on le sait par la théorie de ces figures, ne s'annule jamais.

Quant aux termes en  $\alpha^4$ , dont il y en aura deux quand  $n = 3$ , ils donneront en résultat le terme

$$\frac{\gamma}{16} \left( \frac{\Omega_0}{S_0} \gamma B^2 - 2A_3 \right) \alpha^4,$$

qui pourra, peut-être, se réduire à zéro; et, si c'est le cas, l'expression précédente ne donnera pas, en général, tous les termes principaux du développement de  $\Delta_1 \Pi$ . Mais, dans la recherche qui va suivre, nous n'aurons pas à considérer le terme qui manque.

Pour cette recherche, les termes que nous venons de signaler ne suffiront pas seulement dans le cas où,  $n$  étant égal à 3, l'expression envisagée, savoir

$$(19) \quad \frac{S'_0 M'_0}{2S_0^2} \eta^2 + \frac{\Omega_0 S'_0}{2S_0} \gamma B \eta \alpha^2 + \frac{\gamma}{16} \left( \frac{\Omega_0}{S_0} \gamma B^2 - 2A_3 \right) \alpha^4,$$

se réduit à un carré. Mais dans ce cas nous pourrions nous servir d'une autre expression pour  $\Delta_1 \Pi$ , que nous allons maintenant signaler.

**43.** Soit  $\eta_\alpha$  la valeur de  $\eta$  pour une figure d'équilibre correspondant à une valeur donnée de  $\alpha$ , cette figure étant, dans le cas de  $m = k = 2$ , un ellipsoïde à trois axes inégaux et, dans les autres cas singuliers, une figure d'équilibre non ellipsoïdale.

D'après ce que nous avons vu dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, cette valeur  $\eta_\alpha$  représentera une fonction parfaitement déterminée de  $\alpha$ , satisfaisant à l'équation  $\mathbf{A}_0 = 0$  et développable, tant que  $|\alpha|$  est assez petit, suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$ .

Cela étant, posons

$$\eta = \eta_\alpha + \varepsilon$$

et cherchons le développement de  $\Delta_1 \Pi$  suivant les puissances de  $\varepsilon$ , en nous bornant toutefois aux termes dont les degrés ne dépassent pas le second.

En entendant par  $\Delta \Pi_\alpha$  l'accroissement de  $\Pi$  dans le passage de l'ellipsoïde E à la figure d'équilibre en question, nous aurons

$$\Delta_1 \Pi = \Delta \Pi_\alpha + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} \right) \varepsilon^2 + \dots,$$

où l'on doit entendre par  $\Pi$  son expression pour la figure f, et où les parenthèses servent à désigner que  $\eta$  doit être remplacé par  $\eta_\alpha$ .

On a ici

$$\Delta \Pi_\alpha = \frac{M_0}{S_\alpha} - \frac{M_0}{S_0} - (V_\alpha - V_0),$$

en employant l'indice  $\alpha$  pour désigner qu'il s'agit des quantités relatives à la figure d'équilibre considérée.

Or, en nous reportant au n° 27, nous pouvons écrire immédiatement une expression pour  $V_\alpha - V_0$ : elle s'obtient par la formule (1), d'après laquelle on a

$$V_\alpha - V_0 = - \int_0^\alpha \frac{M_\alpha}{S_\alpha^2} \frac{dS_\alpha}{d\alpha} d\alpha,$$

où

$$M_\alpha = (\Omega_0 + \eta_\alpha) S_\alpha^2.$$

Il vient donc

$$\Delta\Pi_\alpha = \int_0^\alpha \frac{M_\alpha - M_0}{S_\alpha^2} \frac{dS_\alpha}{d\alpha} d\alpha.$$

En passant ensuite à la recherche des quantités

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\eta}\right), \quad \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2}\right), \quad \dots,$$

nous les obtiendrons en partant de la formule (18).

Par cette formule, ne considérant que les deux premières dérivées, on trouve

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\eta} = \left(\Omega_0 + \eta - \Omega_0 \frac{S_0^2}{S^2}\right) \frac{\partial S}{\partial\eta} - \mathbf{A} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2} = \left(1 + 2\Omega_0 \frac{S_0^2}{S^3} \frac{\partial S}{\partial\eta}\right) \frac{\partial S}{\partial\eta} + \left(\Omega_0 + \eta - \Omega_0 \frac{S_0^2}{S^2}\right) \frac{\partial^2 S}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\eta} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \mathbf{A} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2},$$

et il ne reste plus qu'à remplacer  $\eta$  par  $\eta_\alpha$ .

En remarquant que l'on a

$$\Omega_0 + \eta_\alpha - \Omega_0 \frac{S_0^2}{S_\alpha^2} = \frac{M_\alpha - M_0}{S_\alpha^2}$$

et que  $\mathbf{A}$  se réduit pour  $\eta = \eta_\alpha$  à zéro, nous aurons ainsi

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\eta}\right) = \frac{M_\alpha - M_0}{S_\alpha^2} \left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2}\right) = \left[1 + 2\Omega_0 \frac{S_0^2}{S_\alpha^3} \left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)\right] \left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right) + \frac{M_\alpha - M_0}{S_\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial\eta^2}\right) - \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\eta}\right) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right),$$

les parenthèses relatives aux dérivées désignant toujours que l'on doit y remplacer  $\eta$  par  $\eta_\alpha$ .

Les seconds membres peuvent être présentés ici sous la forme des séries entières en  $\alpha$ , dans lesquelles il nous suffira de retenir les premiers termes seuls.

En le faisant, pour ce qui concerne la seconde formule, et en remarquant que

$$1 + 2\Omega_0 \frac{S_0^2}{S_\alpha^3} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 1 + 2\Omega_0 \frac{S_0'}{S_0} + \dots = \frac{M_0'}{S_0^2} + \dots,$$

nous obtenons

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \right) = \frac{M_0' S_0'}{S_0^2} + \dots,$$

les termes qui suivent s'annulant avec  $\alpha$ .

Quant à la première formule, nous nous bornerons à la présenter sous la forme

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) = \frac{S_0'}{S_0^2} (M_\alpha - M_0) (1 + \dots),$$

puisque le premier terme du développement de la différence  $M_\alpha - M_0$  ne peut pas être assigné d'une façon générale.

D'après tout cela, et en entendant par  $f_1(\alpha)$  et  $f_2(\alpha)$  certaines fonctions s'annulant avec  $\alpha$ , nous aurons pour  $\Delta_1 \Pi$  l'expression suivante :

$$(20) \quad \Delta_1 \Pi = \int_0^\alpha \frac{M_\alpha - M_0}{S_\alpha^2} \frac{dS_\alpha}{d\alpha} d\alpha + \frac{S_0'}{S_0^2} (M_\alpha - M_0) [1 + f_1(\alpha)] \varepsilon + \frac{M_0' S_0'}{2S_0^2} [1 + f_2(\alpha)] \varepsilon^2 + \dots$$

## VII. — EXAMEN DES CAS SINGULIERS.

**44.** Nous allons maintenant rechercher les conditions de minimum de  $\Pi$  dans les cas singuliers.

Si, par la nature du problème considéré, la figure  $F$  n'est assujettie à aucunes conditions spéciales, il n'y aura, comme nous avons vu (n° 30), que deux cas singuliers, dont l'un, où  $m = k = 2$ , est relatif aux ellipsoïdes de révolution, l'autre, où  $m = k = 3$ , se rapporte aux ellipsoïdes à trois axes inégaux. Le premier cas est celui par lequel on passe de la série des ellipsoïdes de Maclaurin à celle des ellipsoïdes de Jacobi; le deuxième, celui par lequel on passe de cette dernière série à celle de certaines figures d'équilibre non ellipsoïdales, dites les figures pyriformes.

Si, au contraire, on ne doit prendre pour  $F$  que des figures satisfaisant à certaines conditions spéciales, ce qui arrive dans les problèmes de minimum conditionnel, il y aura de nouveaux cas singuliers, où l'on pourra passer des ellipsoïdes à certaines autres séries de figures d'équilibre non ellipsoïdales.

Au n° 31, nous avons signalé les principaux problèmes de cette espèce.

En passant en revue ces problèmes, on ne manquera pas de remarquer que, dans les cas singuliers qui leur correspondent, la figure  $f$ , telle que nous l'avons définie dans la Section précédente, satisfera toujours aux conditions imposées à la figure  $F$ .

C'est ainsi que dans le cas de  $m = 4$ ,  $k = 0$ , qui devient un cas singulier des ellipsoïdes de révolution quand on introduit la condition que  $F$  doit être une figure de révolution, la figure  $f$  sera encore de révolution, comme on s'en assure aisément en remarquant que  $\beta$  se réduit alors à zéro.

Dans ce qui suit, nous supposons toujours que, s'il s'agit d'un minimum conditionnel, on ne considère que des problèmes tels que ceux du n° 31, c.-à-d. tels que, dans les cas singuliers correspondants, la figure  $f$ , quels que soient  $\alpha$  et  $\eta$ , satisfasse aux conditions que doit vérifier la figure  $F$ . Par suite de cela, la figure  $f$  ne sera qu'une forme particulière de la figure  $F$ , et cette dernière pourra s'y réduire.

Outre les conditions qui peuvent se présenter dans les problèmes de minimum conditionnel, et qui varient d'un problème à un autre, nous en avons encore un certain nombre de telles qui seront admises dans tous les problèmes considérés. Ce sont les conditions dont il a été parlé au n° 4.

Parmi ces conditions, il y en a une qui a été introduite pour empêcher de faire tourner la figure  $F$  autour de l'axe des  $z$ , et qui a une forme différente, selon que l'ellipsoïde considéré est ou n'est pas de révolution.

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé cette condition que dans le cas des ellipsoïdes à trois axes inégaux, auquel cas elle avait pour conséquence l'égalité  $a_{2,3} = 0$ .

Maintenant nous en tiendrons compte dans le cas aussi des ellipsoïdes de révolution, en lui donnant alors, si le nombre  $k$  n'est pas égal à zéro, la forme suivante:

$$\int P_{m,k}(\cos\theta) \sin k\psi \, d\sigma \int_{-L}^{+L} GK \, du = 0.$$

Quant au cas de  $k = 0$ , nous n'aurons besoin d'aucune pareille condition.

En admettant cette condition, nous aurons, comme il a été déjà observé au n° 21,

$$a_{m,2k-1} = 0,$$

laquelle égalité aura ainsi lieu dans les cas singuliers des ellipsoïdes de révolution, quand le nombre  $k$  n'est pas nul.

En même temps, d'après le choix de la figure  $f$ , nous aurons l'égalité

$$a_{m,2k} = 0,$$

qui aura lieu dans tous les cas singuliers.

Cela posé, passons à notre étude, où nous ne ferons pas de distinction entre les problèmes de minimum conditionnel et ceux de minimum non conditionnel, en les embrassant tous par une seule analyse.

**45.** Nous devons, en nous plaçant dans un des cas singuliers, et tenant compte des conditions qui correspondent au problème considéré, examiner l'accroissement de  $\Pi$  dans la seule supposition que le nombre  $L$ , représentant la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z$ , soit au-dessous d'une certaine limite, qui peut du reste être prise aussi petite que l'on veut.

Or, dans notre hypothèse au sujet de la figure  $f$ , cette supposition est équivalente à celle que les nombres  $l$  et  $\lambda$  soient assez petits, ou bien encore, à celle que les trois nombres

$$(1) \quad |\alpha|, \quad |\eta|, \quad \lambda$$

soient assez petits.

En effet, les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  sont liés à la fonction  $Z$  par les équations (3) et (4) du n° 35, dont les seconds membres tendent vers zéro avec  $L$ . Donc  $\alpha$  et  $\eta$  tendront encore vers zéro avec  $L$ , et il en sera dès lors de même du nombre  $l$ , qui représente la plus grande valeur absolue de la fonction  $\zeta$ . Or,  $l$  tendant vers zéro avec  $L$ , le nombre  $\lambda$ , qui ne dépasse pas la somme  $l + L$ , sera dans le même cas.

Nous pouvons donc traiter notre problème dans la supposition que les trois nombres (1) (et, par suite, aussi le nombre  $l$ ) soient au-dessous des limites telles que l'on veut.

Cela posé, nous devons rechercher quels sont les cas où, dans cette supposition, l'expression

$$\Delta\Pi = \Delta_1\Pi + \Delta_2\Pi$$

n'est susceptible que des valeurs positives.

Voyons à quoi se réduira cette question.

Le second terme,  $\Delta_2\Pi$ , est ici l'accroissement réduit, et il est facile de voir ce qu'il devient actuellement: pour en avoir une expression relative aux cas considérés, il n'y a qu'à poser dans celle, qui se rapportait aux cas ordinaires,

$$a_{m,2k} = 0,$$

en faisant encore, si l'ellipsoïde dont il s'agit est de révolution, et que le nombre  $k$  ne soit pas nul,

$$a_{m,2k-1} = 0.$$

Par suite de cela, en nous reportant à ce qui a été montré dans les Sections IV et V,

nous pouvons conclure que, dans les suppositions actuelles, le nombre  $t$  sera positif, quel que soit le cas singulier que l'on veut examiner.

Donc à présent l'accroissement réduit sera toujours positif, dès que  $l$  et  $\lambda$  sont assez petits, et il ne pourra d'ailleurs s'annuler que si l'intégrale

$$\int (\varphi^2 + \chi^2) d\sigma$$

est nulle, ce qui arrive, quand la figure  $F$  se réduit à  $f$ .

Par là on voit que notre question dépendra exclusivement de l'accroissement restreint  $\Delta_1\Pi$ , et nous pouvons ainsi énoncer cette conclusion :

Toutes les fois que,  $|\alpha|$  et  $|\eta|$  étant assez petits,  $\Delta_1\Pi$  ne sera susceptible que des valeurs positives, il y aura un minimum de  $\Pi$ , et toutes les fois que, dans les mêmes conditions, cet accroissement pourra devenir négatif, il n'y en aura pas.

**46.** La question étant ramenée à l'examen de l'accroissement restreint, nous pouvons la résoudre d'après les formules développées dans la Section précédente. Mais d'abord nous devons faire quelques remarques au sujet de certaines quantités qui figurent dans ces formules.

Entre autres, on y rencontre les quantités  $S'_0$  et  $M'_0$ , qui représentent, à des facteurs positifs près, les dérivées, par rapport à la vitesse angulaire, du moment d'inertie et du moment des quantités de mouvement pour les figures ellipsoïdales d'équilibre.

On sait que pour les ellipsoïdes de Jacobi ces dérivées sont toujours négatives. Quant aux ellipsoïdes de Maclaurin, elles sont, toutes les deux, positives ou négatives, suivant que l'ellipsoïde considéré est moins aplati ou plus aplati que celui qui correspond au maximum de la vitesse angulaire, et qui est défini par l'équation

$$T'_{2,0} = 0.$$

Dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, nous avons recherché toutes les équations de la forme

$$T'_{m,k} = 0,$$

qui donnent des ellipsoïdes moins aplati que celui-là, et nous avons trouvé que ces équations sont les suivantes :

$$T'_{2,2} = 0 \quad \text{et} \quad T'_{3,3} = 0.$$

Donc, pour les ellipsoïdes de révolution, il y aura deux cas singuliers où l'on aura

$$S'_0 > 0 \quad \text{et} \quad M'_0 > 0,$$



savoir,

$$m = k = 2 \quad \text{et} \quad m = k = 3.$$

Quant à d'autres cas singuliers relatifs à ces ellipsoïdes, on aura toujours

$$S'_0 < 0, \quad M'_0 < 0,$$

et les mêmes inégalités auront aussi lieu pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux.

Arrêtons-nous ensuite aux quantités  $A_i, B$ , représentant les coefficients de l'expression

$$A_0 = A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 + \dots + (B + \Sigma) \alpha \eta + C_3 \eta^3 + \dots$$

Nous avons déjà dit que  $B$  ne sera jamais nul. Maintenant ajoutons que, d'après ce que nous avons montré dans le Mémoire cité, ce coefficient sera toujours négatif, sauf dans les deux cas des ellipsoïdes de révolution, signalés plus haut, dans lesquels il sera positif\*).

De cette façon, en tout cas, les trois nombres

$$B, \quad S'_0, \quad M'_0$$

auront le même signe.

Pour ce qui concerne les  $A_i$ , nous pouvons dire a priori que ceux à indice  $i$  pair seront nuls dans tous les cas où  $m$  est un nombre impair et en outre, dans tous les cas des ellipsoïdes de révolution où le nombre  $k$  n'est pas égal à zéro.

Or, comme nous verrons, il nous sera avant tout nécessaire de savoir, quel est le premier terme non nul que l'on rencontre dans la série

$$A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad \dots$$

en la parcourant dans l'ordre des indices croissants. Il nous suffira du reste de ne distinguer, sous ce rapport, que les trois classes de cas, caractérisées par les conditions suivantes:

- 1°  $A_2$  n'est pas nul;
- 2°  $A_2 = 0$ ,  $A_3$  n'est pas nul;
- 3°  $A_2 = A_3 = 0$ .

---

\*) Comme la définition adoptée ici pour  $\alpha$  ne coïncide pas avec celle admise dans le Mémoire *Sur les figures d'équilibre*, les valeurs des coefficients  $A_i, B$  considérés ici ne coïncideront pas non plus avec celles des coefficients, désignés par les mêmes lettres dans ce Mémoire. Mais on voit facilement qu'elles n'en différeront que par des facteurs positifs: pour obtenir les  $A_i$  et  $B$  considérés actuellement, il suffit de multiplier les  $A_i$  et  $B$  du Mémoire en question respectivement par

$$\left\{ \sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)} \right\}^i \quad \text{et} \quad \sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)}.$$

Dans la deuxième Partie du Travail, dont la première est citée ici sous le titre *Sur les figures d'équilibre*, nous verrons que, pour les ellipsoïdes de révolution, les cas de la troisième classe ne se présenteront jamais. Nous verrons d'ailleurs que les cas où  $k = 0$  appartiendront toujours à la première classe et que ceux où  $k$  n'est pas nul seront de la deuxième classe.

Quant aux cas des ellipsoïdes à trois axes inégaux, dont nous nous proposons de nous occuper dans la troisième Partie dudit Travail, nous ne pourrions énoncer, en ce moment, que quelques résultats particuliers, et nous nous bornerons à dire que le cas de  $m = k = 3$  appartiendra à la deuxième classe.

Après ces remarques, revenons à notre objet.

47. Nous avons signalé, pour l'accroissement restreint, deux expressions différentes. Arrêtons-nous d'abord à celle du n° 42, d'où l'on peut tirer immédiatement plusieurs conclusions décisives.

Tout d'abord, on peut en conclure que dans les cas de la première classe il n'y aura pas de minimum.

En effet, si nous posons  $\eta = 0$ , en développant ensuite  $\Delta_1 \Pi$  suivant les puissances croissantes de  $\alpha$ , nous aurons, d'après ce que nous avons vu,

$$\Delta_1 \Pi = -\frac{1}{6} \gamma A_2 \alpha^3 + \dots,$$

les termes qui suivent étant des degrés supérieurs au troisième.

Donc,  $A_2$  n'étant pas nul,  $\Delta_1 \Pi$  pourra changer de signe et  $\Pi$  ne sera pas minimum.

D'après ce que nous avons remarqué plus haut, tel sera, par exemple, le cas de  $m = 4$ ,  $k = 0$ , qui devient un cas singulier pour les ellipsoïdes de révolution dans certains problèmes de minimum conditionnel (n° 31).

Puis, nous pouvons conclure que dans les cas de la troisième classe, si l'on pouvait jamais les rencontrer, il n'y aurait pas non plus de minimum.

Pour s'en assurer, reportons-nous à l'expression que nous avons trouvée au n° 42 pour l'ensemble des termes principaux dans le développement de  $\Delta_1 \Pi$ .

Comme, dans les cas dont il s'agit, on a

$$A_2 = A_3 = 0,$$

cette expression devient

$$\frac{\Omega_0}{S_0} \left( S'_0 \eta + \frac{1}{4} \gamma B \alpha^2 \right)^2 + \frac{1}{2} S'_0 \eta^2.$$

De là on voit que, si l'on exprime  $\eta$  en fonction de  $\alpha$  d'après l'égalité

$$S'_0 \eta + \frac{1}{4} \gamma B \alpha^2 = 0,$$

et que l'on développe ensuite  $\Delta_1\Pi$  suivant les puissances croissantes de  $\alpha$ , il viendra

$$\Delta_1\Pi = \frac{1}{32} \frac{\gamma^2 B^2}{S_0'} \alpha^4 + \dots,$$

les termes suivants étant des degrés supérieurs au quatrième.

Or, dans les cas en question,  $S_0'$  sera toujours un nombre négatif.

En effet, nous avons déjà dit que de pareils cas ne se présentent pas pour les ellipsoïdes de révolution, et, pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux, on a toujours  $S_0' < 0$ .

Donc,  $|\alpha|$  étant assez petit, l'expression ci-dessus de  $\Delta_1\Pi$  sera négative. Il n'y aura donc pas de minimum.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que le minimum de  $\Pi$  ne pourra avoir lieu que dans les cas de la deuxième classe.

Arrêtons-nous donc à ces cas, où l'on aura  $A_2 = 0$ , et où  $A_3$  ne sera pas nul.

Nous aurons alors, pour l'ensemble des termes principaux de  $\Delta_1\Pi$ , l'expression (19) du n° 42 et, en la désignant par  $K$ , nous pourrions écrire

$$\Delta_1\Pi = K + \varepsilon_1 \eta^2 + \varepsilon_2 \eta \alpha^2 + \varepsilon_3 \alpha^4,$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  représentent certaines séries entières en  $\alpha$  et  $\eta$ , qui s'annulent pour  $\alpha = \eta = 0$ .

Comme  $K$  est une forme quadratique en  $\eta$  et  $\alpha^2$  et que d'autre part,  $|\alpha|$  et  $|\eta|$  étant assez petits,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  deviennent aussi petits en valeurs absolues que l'on veut, on voit par là que, pour qu'il y ait minimum,  $K$  ne doit pas être susceptible des valeurs négatives. D'ailleurs, on peut affirmer que le minimum aura certainement lieu, si  $K$  est une forme définie positive.

Voyons à quoi cette condition se réduira.

Comme

$$K = \frac{S_0' M_0'}{2S_0'^2} \eta^2 + \frac{\Omega_0 S_0'}{2S_0'} \gamma B \eta \alpha^2 + \frac{\gamma}{16} \left( \frac{\Omega_0}{S_0'} \gamma B^2 - 2A_3 \right) \alpha^4,$$

on voit qu'elle s'exprimera par ces inégalités:

$$S_0' M_0' > 0, \quad \frac{S_0' M_0'}{8S_0'^2} \gamma \left( \frac{\Omega_0}{S_0'} \gamma B^2 - 2A_3 \right) - \frac{\Omega_0^2 S_0'^2}{4S_0'^2} \gamma^2 B^2 > 0.$$

Or la première, d'après ce que nous avons vu au numéro précédent, sera toujours remplie.

Quant à la seconde inégalité, en la multipliant par  $\frac{8}{\gamma} S_0'^2$  et en tenant compte de ce que

$$M_0' = S_0'^2 + 2\Omega_0 S_0' S_0',$$

on pourra la présenter sous la forme

$$S'_0 (\gamma \Omega_0 S_0 B^2 - 2M'_0 A_3) > 0,$$

ou bien encore, sous la forme

$$(2) \quad \gamma \Omega_0 S_0 B - 2M'_0 \frac{A_3}{B} > 0,$$

le produit  $BS'_0$ , d'après le numéro précédent, étant toujours positif.

Ainsi, dans les cas de la deuxième classe, si l'on a l'inégalité (2), on pourra être certain qu'il y a un minimum de  $\Pi$ ; et, si l'on a

$$\gamma \Omega_0 S_0 B - 2M'_0 \frac{A_3}{B} < 0,$$

on conclura que la valeur correspondante de  $\Pi$  n'est pas un minimum.

Il y a du reste un cas d'incertitude: si l'on a l'égalité

$$\gamma \Omega_0 S_0 B - 2M'_0 \frac{A_3}{B} = 0,$$

on ne peut rien conclure, tant que l'on ne tient pas compte, dans le développement de  $\Delta_1 \Pi$ , des termes qui ont été négligés.

Nous ne ferons pas toutefois les calculs que cette recherche demanderait, puisque nous allons maintenant exposer une méthode, qui permet d'embrasser tous les cas et qui conduit à des calculs beaucoup plus simples.

**48.** Reportons-nous à l'expression que nous avons trouvée pour  $\Delta_1 \Pi$  au n° 43, et qui est donnée par la formule (20). C'est cette expression que nous prendrons maintenant pour point de départ.

Signalons d'abord une conclusion immédiate.

Supposons que, dans la série des figures d'équilibre non ellipsoïdales qui dérive de l'ellipsoïde considéré, le moment des quantités de mouvement ne change pas quand on passe d'une figure à une autre

Alors nous aurons

$$M_\alpha = M_0,$$

quel que soit  $\alpha$ , et la formule (20) deviendra

$$\Delta_1 \Pi = \frac{M'_0 S'_0}{2S_0^2} [1 + f_2(\alpha)] \varepsilon^2 + \dots,$$

les termes suivants contenant, en facteurs, des puissances de  $\varepsilon$  supérieures à la seconde.

On voit donc que, dans ce cas,  $\Delta_1\Pi$  s'annulera toutes les fois que  $\varepsilon$  se réduit à zéro.

Quant à d'autres valeurs de  $\varepsilon$ , on aura,  $|\alpha|$  et  $|\varepsilon|$  étant assez petits,  $\Delta_1\Pi > 0$ , puisque le produit  $M'_0 S'_0$  est toujours positif.

De cette façon, si le cas dont il s'agit était possible,  $\Pi$  ne changerait pas quand on passe de l'ellipsoïde à une autre figure de la série considérée, mais, sitôt qu'on exclurait les figures de cette série, la valeur de  $\Pi$  pour l'ellipsoïde deviendrait un minimum.

Il est toutefois peu vraisemblable qu'un pareil cas puisse jamais se présenter.

Supposons donc que  $M_\alpha - M_0$  ne soit pas identiquement nul et voyons quelles sont alors les conditions de minimum.

Ecrivons la formule (20) comme il suit:

$$\Delta_1\Pi = F_0(\alpha) + F_1(\alpha)\varepsilon + F_2(\alpha)\varepsilon^2 + \dots,$$

de sorte que

$$F_0(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{M_\alpha - M_0}{S_\alpha^2} \frac{dS_\alpha}{dx} dx,$$

$$F_1(\alpha) = \frac{S'_0}{S_0^2} (M_\alpha - M_0) [1 + f_1(\alpha)],$$

$$F_2(\alpha) = \frac{M'_0 S'_0}{2S_0^2} [1 + f_2(\alpha)],$$

$f_1(\alpha)$  et  $f_2(\alpha)$  étant des séries entières en  $\alpha$  dont tous les termes s'annulent pour  $\alpha = 0$ .

On voit que

$$F_0(0) = F_1(0) = 0, \quad F_2(0) = \frac{M'_0 S'_0}{2S_0^2} > 0.$$

Cela posé, désignons par  $c$  un nombre arbitraire fixe (c.-à-d. indépendant de  $\alpha$  et  $\varepsilon$ ) et présentons l'expression de  $\Delta_1\Pi$  sous la forme

$$\Delta_1\Pi = F_0(\alpha) + F_1(\alpha)\varepsilon + [F_2(0) - c]\varepsilon^2 + R,$$

en sorte qu'il vienne

$$R = [c + F_2(\alpha) - F_2(0)]\varepsilon^3 + \dots$$

Comme, dans cette dernière formule, les termes remplacés par des points dépendent des puissances de  $\varepsilon$  plus élevées que la seconde, il est clair que,  $|\alpha|$  et  $|\varepsilon|$  étant assez petits, le signe de  $R$  sera celui de  $c$ .

Quant à l'expression

$$F_0(\alpha) + F_1(\alpha)\varepsilon + [F_2(0) - c]\varepsilon^2 = 0,$$

elle ne conservera, dans ces conditions, un signe invariable que si les racines de l'équation du second degré en  $x$

$$F_0(\alpha) + F_1(\alpha)x + [F_2(0) - c]x^2 = 0,$$

$|\alpha|$  étant assez petit, sont égales ou imaginaires, auquel cas elle aura le signe de  $F_2(0) - c$ .

De là on peut conclure que, pour qu'il y ait minimum, il faut qu'on se trouve dans le cas des racines imaginaires pour toute valeur négative de  $c$ , dès que,  $c$  étant fixé,  $\alpha$  devient assez petit en valeur absolue sans être nul. On voit d'ailleurs que, si l'on se trouve dans ce cas pour une valeur positive de  $c$  moindre que  $F_2(0)$ , le minimum aura certainement lieu.

De cette manière, on est conduit à chercher les conditions, sous lesquelles on ait,  $|\alpha|$  étant assez petit,

$$(3) \quad 4 [F_2(0) - c] F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2 > 0,$$

dans ces deux suppositions:

1°  $c$  est un nombre négatif quelconque;

2°  $c$  est un nombre positif, plus petit que  $F_2(0)$  et d'ailleurs aussi petit que l'on veut.

La première supposition servira à trouver les conditions nécessaires, la seconde, celles suffisantes. Mais nous verrons qu'en définitive tout se réduira à une seule condition, laquelle sera ainsi une condition nécessaire et suffisante.

Venons donc à l'examen de l'inégalité (3).

49. On a

$$[F_1(\alpha)]^2 = 2 \int_0^\alpha F_1(\alpha) F_1'(\alpha) d\alpha,$$

et l'on trouve, en différentiant l'expression de  $F_1(\alpha)$  signalée plus haut,

$$F_1'(\alpha) = \frac{S_0'}{S_0^2} M_\alpha' \left[ 1 + f_1(\alpha) + \frac{M_\alpha - M_0}{M_\alpha'} f_1'(\alpha) \right],$$

$M_\alpha'$  représentant la dérivée  $\frac{dM_\alpha}{d\alpha}$ .

Donc, si l'on pose, pour abrégier,

$$[1 + f_1(\alpha)] \left[ 1 + f_1(\alpha) + \frac{M_\alpha - M_0}{M_\alpha'} f_1'(\alpha) \right] - 1 = f(\alpha),$$

en désignant ainsi par  $f(\alpha)$  une certaine fonction s'annulant pour  $\alpha = 0$ , il viendra

$$[F_1(\alpha)]^2 = \frac{2S_0'^2}{S_0^4} \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) M_\alpha' [1 + f(\alpha)] d\alpha.$$

D'autre part, en posant

$$\frac{S_0^2}{S_\alpha^2} - 1 = \varphi(\alpha),$$

et en entendant par  $S_\alpha'$  la dérivée  $\frac{dS_\alpha}{d\alpha}$ , on a

$$4F_2(0)F_0(\alpha) = \frac{2M_0'S_0'}{S_0^4} \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) S_\alpha' [1 + \varphi(\alpha)] d\alpha.$$

Par suite, pour la quantité

$$(4) \quad 4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2,$$

on obtient cette expression

$$\frac{2S_0'}{S_0^4} \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) [M_0'S_\alpha' - S_0'M_\alpha' + F(\alpha)] d\alpha,$$

où

$$F(\alpha) = M_0'S_\alpha'\varphi(\alpha) - S_0'M_\alpha'f(\alpha).$$

On voit que,  $|\alpha|$  étant assez petit, les fonctions  $f(\alpha)$  et  $\varphi(\alpha)$  sont développables suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$ .

Donc la fonction

$$M_0'S_\alpha' - S_0'M_\alpha' + F(\alpha)$$

sera dans le même cas, et nous allons maintenant chercher le terme de degré le moins élevé dans son développement, en nous bornant toutefois à la supposition que  $A_2 = 0$ , ce qui est permis, puisque le cas où  $A_2$  n'est pas nul a déjà été examiné.

Dans cette supposition, en développant  $\eta_\alpha$  suivant les puissances de  $\alpha$ , on aura

$$\eta_\alpha = -\frac{A_3}{B} \alpha^3 + \dots,$$

les termes qui suivent étant des degrés supérieurs au deuxième.

Par conséquent, en nous reportant à la formule (16) du n° 41 et en n'écrivant que les termes dont les degrés ne dépassent pas le deuxième, nous aurons

$$S_\alpha = S_0 + \left( \frac{1}{2} \gamma B - \frac{A_3}{B} S'_0 \right) \alpha^2 + \dots,$$

et ensuite,

$$M_\alpha = (\Omega_0 + \eta_\alpha) S_\alpha^2 = \Omega_0 S_0^2 + \left[ \frac{1}{2} \gamma B \Omega_0 S_0 - \frac{A_3}{B} (S_0^2 + 2\Omega_0 S_0 S'_0) \right] \alpha^2 + \dots,$$

ce qu'on peut écrire ainsi

$$M_\alpha = M_0 + \left( \frac{1}{2} \gamma B \Omega_0 S_0 - \frac{A_3}{B} M'_0 \right) \alpha^2 + \dots.$$

De là, au terme près du premier degré, il vient

$$M'_0 S'_\alpha - S'_0 M'_\alpha = \frac{1}{2} \gamma B (M'_0 - 2\Omega_0 S_0 S'_0) \alpha + \dots = \frac{1}{2} \gamma B S_0^2 \alpha + \dots.$$

Quant à la fonction  $F(\alpha)$ , elle ne pourra donner lieu qu'à des termes des degrés supérieurs au premier.

Par suite, le terme cherché est

$$\frac{1}{2} \gamma B S_0^2 \alpha.$$

Cela posé, l'expression trouvée plus haut pour la quantité (4) pourra être présentée sous la forme

$$(5) \quad \frac{\gamma B S'_0}{S_0^2} \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) (\alpha + \dots) d\alpha,$$

où les points remplacent des termes dont les degrés dépassent le premier.

En même temps, en remarquant que

$$\frac{dS_\alpha}{d\alpha} = \left( \frac{1}{2} \gamma B - 2S'_0 \frac{A_3}{B} \right) \alpha + \dots$$

et en posant, pour abrégier,

$$\frac{1}{2} \gamma B - 2S'_0 \frac{A_3}{B} = g,$$



nous aurons

$$(6) \quad F_0(\alpha) = \frac{1}{S_0^2} \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0)(g\alpha + \dots) d\alpha,$$

où d'ailleurs  $g$  pourra se réduire à zéro.

De là on voit que, si l'on développe les fonctions

$$4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2 \quad \text{et} \quad F_0(\alpha)$$

suivant les puissances croissantes de  $\alpha$ , le premier terme de  $F_0(\alpha)$  ne pourra jamais être de degré moins élevé que le premier terme de  $4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2$ .

Par suite, en revenant à l'inégalité (3), nous pouvons conclure que, pour qu'elle puisse être satisfaite quand on prend pour  $c$  un nombre suffisamment petit en valeur absolue, il faut et il suffit que l'on ait

$$4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2 > 0,$$

dès que  $|\alpha|$  est assez petit.

Donc cette dernière inégalité représente une condition nécessaire et suffisante de minimum.

Elle se réduit d'ailleurs à une forme très simple.

En effet, nous avons, pour le premier membre, l'expression (5), où  $BS'_0$ , comme nous le savons, est un nombre positif. Notre inégalité est donc équivalente à celle-ci

$$\int_0^\alpha (M_\alpha - M_0)(\alpha + \dots) d\alpha > 0,$$

et, comme il ne s'agit que des valeurs assez petites de  $|\alpha|$ , on peut la remplacer par la suivante

$$\int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) \alpha d\alpha > 0.$$

Or,  $|\alpha|$  étant assez petit, la fonction  $M_\alpha - M_0$  ne changera pas de signe entre les limites de l'intégrale, et celle-ci aura, par suite, le même signe que  $M_\alpha - M_0$ , quel que soit le signe de  $\alpha$ .

Donc, pour qu'il y ait minimum il faut et il suffit que l'on ait

$$M_\alpha - M_0 > 0,$$

toutes les fois que  $\alpha$  est assez petit en valeur absolue.

50. Le résultat précédent a été obtenu dans la supposition que  $A_2 = 0$ . Mais le cas où  $A_2$  n'est pas nul ne présente pas d'exception.

En effet, dans ce cas, en se bornant aux termes du premier degré, on a

$$\eta_\alpha = -\frac{A_2}{B}\alpha + \dots,$$

$$S_\alpha = S_0 - S_0' \frac{A_2}{B} \alpha + \dots$$

et, par suite,

$$M_\alpha = M_0 - M_0' \frac{A_2}{B} \alpha + \dots$$

Donc  $M_\alpha - M_0$  changera de signe avec  $\alpha$ , et nous avons vu au n° 47 que, dans le cas considéré, il n'y a pas de minimum.

Supposons maintenant que  $A_2 = 0$ .

Alors, d'après ce que nous avons trouvé au numéro précédent,

$$M_\alpha - M_0 = \left( \frac{1}{2} \gamma \Omega_0 S_0 B - M_0' \frac{A_3}{B} \right) \alpha^2 + \dots,$$

et de là, en appliquant la proposition que nous venons d'obtenir, on pourra déduire tous les autres résultats du n° 47.

La même proposition fait d'ailleurs voir comment il faudra procéder dans le cas d'incertitude signalé dans ce numéro: tout se réduit à reconnaître si la valeur  $M_0$ , que la fonction  $M_\alpha$  prend pour l'ellipsoïde E, est ou n'est pas minimum, et pour cela il n'y a qu'à rechercher le premier terme du développement de  $M_\alpha - M_0$  suivant les puissances croissantes de  $\alpha$ . Si ce terme est de degré impair, on conclura que  $\Pi$  n'est pas minimum pour l'ellipsoïde E, et, si l'on arrive dans cette recherche à un terme de degré pair, tout dépendra du signe de son coefficient, et il y aura un minimum de  $\Pi$  ou non, selon que ce coefficient est positif ou négatif.

51. Appliquons la proposition obtenue au cas singulier le plus important, à celui de l'ellipsoïde de Jacobi de révolution.

La fonction  $M_\alpha$  est proportionnelle au carré du moment des quantités de mouvement pour une figure d'équilibre, et dans le cas actuel cette figure sera un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Or on sait que, pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux, le moment des quantités de mouvement est toujours plus grand que celui qui correspond à l'ellipsoïde de révolution dont

il s'agit. On aura donc, quel que soit  $\alpha$ ,

$$M_\alpha - M_0 > 0.$$

Par suite, dans le cas considéré, il y aura un minimum de  $\Pi$ .

Ce résultat a déjà été indiqué dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*, où je l'ai obtenu en ramenant la question, par une méthode semblable à celle employée ici, à l'examen d'une certaine forme quadratique, qui n'est au fond que la forme  $K$ , considérée au n° 47. Mais je n'y ai pas remarqué que le problème est susceptible d'une grande simplification, tout se réduisant à l'examen de l'accroissement du moment des quantités de mouvement, et, par suite de cela, j'ai été conduit à des calculs très compliqués\*).

Un autre cas singulier important est celui de l'ellipsoïde de Jacobi par lequel on peut passer à la série des figures d'équilibre pyriformes.

Dans ce cas, où l'on a  $m = k = 3$ ,  $A_2$  est nul. La question dépend donc tout d'abord de l'examen de l'expression

$$\gamma \Omega_0 S_0 B - 2M'_0 \frac{A_3}{B},$$

et se résout par là complètement, si cette expression ne se réduit pas à zéro (n° 47).

Dans le cas considéré  $B$  et  $M'_0$  sont des nombres négatifs (n° 46).

Donc, si  $A_3$  était positif, l'expression dont il s'agit représenterait un nombre négatif, et l'on pourrait conclure qu'il n'y a pas de minimum.

J'ai recherché le signe de  $A_3$  (ce qui exige une longue suite de calculs numériques fort compliqués), et j'ai été conduit à la conclusion que  $A_3$  est effectivement un nombre positif.

Ce résultat, que j'ai déjà indiqué dans le Mémoire *Sur un problème de Tchebychef*, est toutefois en contradiction avec celui qu'à obtenu M. Darwin.

Dans le Mémoire qui vient d'être cité, j'ai essayé d'expliquer d'où provenait, selon mon avis, la contradiction. Mais M. Darwin ne veut pas admettre cette explication et, dans son

\*) J'ai exprimé les coefficients de la forme quadratique en question au moyen de certains polynômes  $\mathfrak{D}(x)$  et  $\varphi(x)$ , où l'argument  $x$  doit être remplacé par un certain nombre transcendant  $\xi$ , et j'ai montré que la condition de minimum se réduit à

$$(5\xi - 8) \mathfrak{D}(\xi) - [\varphi(\xi)]^2 > 0.$$

Or, de la proposition établie ici, on peut tirer la conclusion que le polynôme  $\mathfrak{D}(x)$  doit être divisible par  $\varphi(x)$ . Et en effet, par les expressions que j'ai trouvées pour ces polynômes, on peut vérifier l'exactitude de cette égalité:

$$\mathfrak{D}(x) = (87x^3 - 306x^2 + 300x - 88) \varphi(x).$$

Si j'avais remarqué cette circonstance, j'en aurais déjà pu profiter pour simplifier considérablement les calculs.

dernier Travail *On the figure and stability of a liquid satellite*\*), il se déclare en faveur de son propre résultat.

Vu cela, bien que j'ai vérifié mes calculs très soigneusement, sans y avoir aperçu une erreur, je me propose de les refaire encore une fois, en en variant la marche autant que possible, et je compte les publier ensuite dans la troisième Partie du Mémoire *Sur les figures d'équilibre*.

52. En considérant les cas ordinaires, nous avons vu au n° 32 que les deux postulats, admis dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*, peuvent être établis en toute rigueur.

Le premier de ces postulats, par sa nature même, ne se rapporte qu'aux cas ordinaires. Quant au second postulat, il a un sens précis indépendamment de la nature du cas envisagé, et nous allons maintenant montrer comment il peut être établi pour les cas singuliers.

Nous devons montrer que, si, pour l'ellipsoïde considéré,  $\Pi$  est un minimum, l'accroissement  $\Delta\Pi$  admettra une limite inférieure non nulle et positive, toutes les fois que,  $L$  étant assez petit, la déviation de la figure  $F$  à partir de l'ellipsoïde a une valeur donnée non nulle.

Supposons donc que,  $|\alpha|$  étant assez petit, on a

$$M_\alpha - M_0 > 0,$$

et cherchons une limite inférieure pour  $\Delta\Pi$  \*\*).

Soit  $t_0$ , comme au n° 32, un nombre positif plus petit que  $t$  et d'ailleurs arbitraire. En fixant ce nombre et en faisant ensuite  $L$  suffisamment petit, nous aurons, pour ce qui concerne l'accroissement réduit, une limite inférieure de la même forme qu'auparavant, savoir

$$\frac{1}{2} t_0 \int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma,$$

où d'ailleurs

$$\int (\chi^2 + \varphi^2) d\sigma > \frac{1}{4\pi} \left( \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G|x| d\xi \right)^2.$$

Il ne reste donc qu'à chercher une limite inférieure pour l'accroissement restreint; et nous allons montrer que, pour cette limite inférieure, quand  $|\alpha|$  et  $|\varepsilon|$  sont assez petits, on

\*) *Philosophical Transactions*, Series A, Vol. 206, 1906; (A 405).

\*\*) Nous excluons le cas où l'on aurait  $M_\alpha - M_0 = 0$ , quel que soit  $\alpha$ . Alors, quelque petit que soit  $L$  et quelle que soit la valeur donnée de la déviation, on ne pourrait assigner à  $\Delta\Pi$  aucune limite inférieure, autre que zéro. Mais, dans ce cas, il n'y aurait pas, à proprement parler, de minimum (voir le n° 48).

peut obtenir une expression de la forme

$$n \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) \alpha d\alpha + n' \varepsilon^2,$$

$n$  et  $n'$  étant des nombres positifs fixes suffisamment petits.

Reprenons pour cela l'expression de  $\Delta_1 \Pi$  considérée au n° 48 et écrivons-la comme il suit:

$$\Delta_1 \Pi = F_0(\alpha) + F_1(\alpha) \varepsilon + F_2(0) \varepsilon^2 + [F_2(\alpha) - F_2(0)] \varepsilon^2 + \dots$$

On a ici

$$F_2(0) = \frac{M'_0 S'_0}{2S_0^2} > 0$$

et, dans le cas de minimum où nous nous sommes placés, on aura,  $|\alpha|$  étant assez petit,  $F_0(\alpha) > 0$ .

Or, toutes les fois que  $a$  et  $c$  sont des nombres positifs, on a

$$a + 2bx + cx^2 > \frac{ac - b^2}{2c} + \frac{ac - b^2}{2a} x^2.$$

Par suite, en posant, pour abrégier,

$$\frac{4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2}{8F_2(0)} = \Phi_0(\alpha),$$

$$\frac{4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2}{8F_0(\alpha)} = \Phi_1(\alpha),$$

nous aurons, tant que  $|\alpha|$  est assez petit,

$$F_0(\alpha) + F_1(\alpha) \varepsilon + F_2(0) \varepsilon^2 > \Phi_0(\alpha) + \Phi_1(\alpha) \varepsilon^2.$$

Reportons-nous maintenant aux expressions qui ont été obtenues au n° 49 pour les fonctions

$$4F_2(0)F_0(\alpha) - [F_1(\alpha)]^2 \quad \text{et} \quad F_0(\alpha),$$

et qui sont données par les formules (5) et (6).

D'après ces expressions, on trouve

$$\Phi_0(\alpha) = \frac{\gamma}{4} \frac{B}{M_0'} \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) (\alpha + \dots) d\alpha,$$

$$\Phi_1(\alpha) = \frac{\gamma}{8} BS_0' \frac{\int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) (\alpha + \dots) d\alpha}{\int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) (g\alpha + \dots) d\alpha},$$

où les points sont écrits au lieu des termes dont les degrés par rapport à  $\alpha$  excèdent le premier.

Rappelons que  $g$  représente ici la valeur pour  $\alpha = 0$  de la dérivée

$$\frac{d^2 S_\alpha}{d\alpha^2}.$$

Or, dans le cas actuel, cette valeur ne sera pas nulle et représentera un nombre positif.

En effet, en différentiant l'égalité

$$M_0' S_\alpha' - S_0' M_\alpha' = \frac{\gamma}{2} BS_0'^2 \alpha + \dots,$$

signalée au n° 49, et en faisant ensuite  $\alpha = 0$ , on trouve

$$g = \frac{\gamma}{2} \frac{B}{M_0'} S_0'^2 + \frac{S_0'}{M_0'} \left( \frac{d^2 M_\alpha}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=0};$$

d'où l'on voit que dans le cas de minimum, quand on a nécessairement

$$\left( \frac{d^2 M_\alpha}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=0} \geq 0,$$

on aura toujours

$$g \geq \frac{\gamma}{2} \frac{B}{M_0'} S_0'^2.$$

Vu cela, l'expression de  $\Phi_1(\alpha)$  fait voir que,  $|\alpha|$  étant assez petit, cette fonction sera développable suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$  et que, pour  $\alpha = 0$ , elle se réduira à un nombre positif, savoir

$$\frac{\gamma}{8} \frac{BS_0'}{g}.$$

Cela posé, soient  $n$  et  $p$  des nombres positifs quelconques, vérifiant les inégalités

$$n < \frac{\gamma}{4} \frac{B}{M_0}, \quad n' < \frac{\gamma}{8} \frac{BS'_0}{g},$$

et  $n''$  un nombre positif, tel qu'on ait

$$\frac{\gamma}{8} \frac{BS'_0}{g} - n' > n''.$$

Alors, tant que  $|\alpha|$  est assez petit, on aura

$$\Phi_0(\alpha) > n \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) \alpha d\alpha,$$

$$\Phi_1(\alpha) > n' + n''.$$

On pourra donc prendre  $\alpha$  et  $\varepsilon$  suffisamment petits en valeurs absolues pour qu'on ait

$$\Delta_1 \Pi > n \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) \alpha d\alpha + n' \varepsilon^2.$$

D'après cela, en revenant à l'accroissement total et en posant, pour abrégé,

$$\frac{1}{4} \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G |x| d\xi = \vartheta,$$

nous aurons,  $L$  étant assez petit, cette inégalité:

$$(7) \quad \Delta \Pi > n \int_0^\alpha (M_\alpha - M_0) \alpha d\alpha + n' \varepsilon^2 + \frac{2t_0}{\pi} \vartheta^2.$$

Cela posé, soit  $\vartheta$  la déviation.

Nous avons vu au n° 32 que l'on a

$$\vartheta < \frac{1}{4} \int \left| \int_0^\zeta G du \right| d\sigma + \vartheta.$$

Nous aurons donc

$$\vartheta^2 < \frac{1}{8} \left( \int \left| \int_0^\zeta G du \right| d\sigma \right)^2 + 2\vartheta^2.$$

Or la fonction  $\zeta$  peut être présentée sous la forme d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de  $\alpha$  et  $\varepsilon$ .

Par suite,  $|\alpha|$  et  $|\varepsilon|$  étant assez petits, on pourra trouver des nombres fixes  $N$  et  $N'$ , tels qu'on ait

$$\frac{1}{8} \left( \int \left| \int_0^\zeta G du \right| d\sigma \right)^2 < N\alpha^2 + N'\varepsilon^2.$$

Cela étant, il viendra

$$(8) \quad \partial^2 < N\alpha^2 + N'\varepsilon^2 + 2\partial^2;$$

et le rapprochement des inégalités (7) et (8) conduit à la proposition qu'il fallait établir.

---

### VIII. — EXAMEN DES FIGURES D'ÉQUILIBRE NON ELLIPSOÏDALES.

**53.** Si nous laissons de côté le cas de l'ellipsoïde de Jacobi de révolution, dans chacun des autres cas singuliers, l'ellipsoïde E appartiendra à une certaine série continue de figures d'équilibre non ellipsoïdales, où l'on passe d'une figure à une autre en variant le paramètre  $\alpha$  considéré précédemment.

Soit  $f_0$  une figure de cette série.

En désignant par  $\alpha_0$  la valeur correspondante de  $\alpha$  et en supposant  $|\alpha_0|$  suffisamment petit, nous allons nous occuper maintenant de la question sur les conditions de minimum de l'expression

$$(1) \quad \Pi = \frac{M_{\alpha_0}}{S} - V$$

pour la figure  $f_0$ .

Il est clair que, s'il s'agit de minimum non conditionnel, il n'y aura à considérer dans cette question que les figures d'équilibre dites pyriformes, qui seront alors les seules pour lesquelles il y aura une incertitude.

Au contraire, dans les problèmes de minimum conditionnel on pourra rencontrer d'autres séries de figures d'équilibre, et, quand il s'agira d'un tel problème, nous supposerons toujours que la figure  $f_0$  appartient à la même série que l'ellipsoïde représentant pour ce problème un cas singulier.

Nous aurons principalement en vue les problèmes considérés au n° 31, où l'ellipsoïde sera remplacé par la figure  $f_0$ . Mais notre analyse s'appliquera également à un tout autre



problème, où les conditions imposées à la figure  $F$  se réduisent à des égalités de la forme

$$a_{n,s} = 0,$$

et où d'ailleurs elles sont remplies pour la figure  $f$  considérée précédemment, quels que soient  $\alpha$  et  $\eta$ .

Cela posé, nous allons traiter notre question d'une manière toute semblable à la précédente.

Pour obtenir l'accroissement  $\Delta\Pi$ , qui sera à présent l'accroissement que reçoit l'expression (1) quand on passe de la figure  $f_0$  à la figure  $F$ , nous introduirons une figure auxiliaire  $f$ , définie comme il a été montré dans la Section VI, et nous poserons

$$\Delta\Pi = \Delta_1\Pi + \Delta_2\Pi,$$

$\Delta_1\Pi$  étant l'accroissement dans le passage de  $f_0$  à  $f$  et  $\Delta_2\Pi$  celui dans le passage de  $f$  à  $F$ .

Comme, dans ce dernier passage, le moment d'inertie  $S$  ne change pas,  $\Delta_2\Pi$  aura la même expression que dans les problèmes que nous avons traités dans la Section précédente. Nous aurons donc

$$\Delta_2\Pi > 0,$$

toutes les fois que le nombre  $L$ , représentant la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z$ , est assez petit.

De là on peut conclure que, si la figure  $f_0$  est assez peu différente de l'ellipsoïde  $E$ , notre question ne dépendra que du terme  $\Delta_1\Pi$ , auquel se réduira l'accroissement  $\Delta\Pi$  quand les figures  $F$  et  $f$  coïncideront.

En effet, soit  $\zeta_0$  ce que devient la fonction  $\zeta$  quand on a

$$\alpha = \alpha_0, \quad \eta = \eta_{\alpha_0},$$

auquel cas la figure  $f$  se réduit à celle  $f_0$ .

Soient ensuite:  $l_0$  la plus grande valeur absolue de la fonction  $\zeta_0$  et  $\lambda_0$  la plus grande valeur absolue de la fonction  $Z - \zeta_0$ .

Nous devons traiter notre problème dans la supposition que le nombre  $\lambda_0$  soit assez petit, et nous pouvons d'ailleurs le supposer aussi petit que l'on veut.

Or on a évidemment

$$L \leq l_0 + \lambda_0.$$

Si donc on suppose le nombre  $l_0$  suffisamment petit pour qu'on puisse trouver un nombre positif  $\lambda_1$ , tel que, sous la condition

$$L < l_0 + \lambda_1,$$

on ait toujours

$$\Delta_2\Pi > 0,$$

la question se réduira à l'examen de  $\Delta_1\Pi$ .

D'ailleurs, en recherchant le signe de  $\Delta_1\Pi$ , on ne devra considérer, pour  $\alpha$  et  $\eta$ , que des valeurs qui sont assez peu différentes respectivement de  $\alpha_0$  et de  $\eta_{\alpha_0}$ ; car, en tenant compte des relations, par lesquelles les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  sont liés à la figure F, on s'assure facilement que la supposition que les nombres  $|\alpha - \alpha_0|$  et  $|\eta - \eta_{\alpha_0}|$  soient assez petits est une conséquence nécessaire de celle que le nombre  $\lambda_0$  soit assez petit.

En effet, les relations dont il s'agit sont représentées par les équations (3) et (4) du n° 35, qui s'écrivent ainsi

$$\int Y d\sigma \int_0^\zeta G du = \int Y d\sigma \int_{-L}^{+L} GK du,$$

$$\int d\sigma \int_0^\zeta \Psi G du = \int d\sigma \int_{-L}^{+L} \Psi GK du,$$

si l'on pose, pour abrégé,

$$\sin^2\theta (\rho + \cos^2\psi + q \sin^2\psi + u) = \Psi.$$

Or, si l'on désigne par  $x_0$  ce que devient la fonction  $x$  quand la figure f est remplacée par  $f_0$ , on aura, en posant  $u = \zeta_0 + \xi_0$ ,

$$\int_{-L}^{+L} \Phi K du = \int_0^{\zeta_0} \Phi du + \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} \Phi x_0 d\xi_0,$$

quelle que soit la fonction  $\Phi$ , supposée continue.

On pourra donc présenter nos équations sous la forme

$$\int Y d\sigma \int_{\zeta_0}^\zeta G du = \int Y d\sigma \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} G x_0 d\xi_0,$$

$$\int d\sigma \int_{\zeta_0}^\zeta \Psi G du = \int d\sigma \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} \Psi G x_0 d\xi_0,$$

où les seconds membres s'annulent avec  $\lambda_0$ . Quant aux premiers membres, on pourra les considérer comme des fonctions de ces trois arguments

$$\alpha - \alpha_0, \quad \eta - \eta_{\alpha_0}, \quad \alpha_0,$$

et ces fonctions jouissent des propriétés suivantes:

1° Elles s'annulent lorsqu'on pose  $\alpha - \alpha_0 = 0$  et  $\eta - \eta_{\alpha_0} = 0$ ;

2° Elles sont développables suivant les puissances entières et positives des trois arguments ci-dessus, quand ils sont assez petits en valeurs absolues;

3° Les termes du premier degré dans leurs développements se réduisent respectivement à

$$\gamma(\alpha - \alpha_0) \quad \text{et} \quad 2S'_0(\eta - \eta_{\alpha_0}).$$

De là on conclut immédiatement que,  $\lambda_0$  tendant vers zéro,  $\alpha - \alpha_0$  et  $\eta - \eta_{\alpha_0}$  seront dans le même cas.

Cela posé, nous arrivons, en résumé, à la conclusion que, si la figure  $f_0$  est assez peu différente de l'ellipsoïde  $E$ , on peut, en recherchant les conditions de minimum de  $\Pi$ , réduire la figure  $F$  à la figure  $f$ , en se bornant ainsi à la considération de la fonction de  $\alpha$  et  $\eta$ , que devient  $\Pi$  pour cette dernière figure.

C'est seulement dans cette supposition que nous allons traiter notre problème.

**54.** La question étant ramenée à celle de minimum d'une certaine fonction, on pourrait y appliquer la théorie générale, développée par M. Poincaré dans son Mémoire connu *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*. Mais nous préférons d'aborder directement le problème que nous avons à résoudre.

Reportons-nous donc à la formule (1), en supposant que  $S$  et  $V$  soient les fonctions de  $\alpha$  et  $\eta$  représentant ces quantités pour la figure  $f$ .

En nous servant, pour désigner les différentielles relatives aux paramètres  $\alpha$  et  $\eta$ , comme précédemment, de la caractéristique  $\delta$ , nous aurons

$$\delta\Pi = -\frac{M_{\alpha_0}}{S^2} \delta S - \delta V.$$

Or, pour  $\delta V$ , nous avons déjà trouvé une expression, qui est donnée par la formule (17) du n° 42.

D'après cette formule, il vient

$$\delta\Pi = \left( \Omega_0 + \eta - \frac{M_{\alpha_0}}{S^2} \right) \delta S - \mathbf{A} \delta\Phi,$$

où

$$(2) \quad \Phi = \frac{1}{2} \int Y d\sigma \int_0^\zeta G du,$$

et, si nous posons encore

$$(\Omega_0 + \eta) S^2 = M,$$

cela s'écrira ainsi :

$$\delta\Pi = \frac{M - M_{\alpha_0}}{S^2} \delta S - \mathbf{A} \delta\Phi.$$

Cette expression doit se réduire à zéro, quels que soient  $\delta\alpha$  et  $\delta\eta$ , et en effet, on a pour la figure  $f_0$

$$\mathbf{A} = 0, \quad M = M_{\alpha_0}.$$

En différentiant encore une fois et en tenant compte de ces égalités, nous aurons ensuite

$$\delta^2\Pi = \frac{\delta M \delta S}{S^2} - \delta\mathbf{A} \delta\Phi.$$

Le second membre se réduit ici à une forme quadratique en  $\delta\alpha$  et  $\delta\eta$ , et nous allons chercher les conditions pour que cette forme soit définie positive.

Mais introduisons d'abord, au lieu de  $\delta\eta$ , une autre quantité arbitraire,  $\varepsilon$ , en posant

$$\delta\eta = \eta' \delta\alpha + \varepsilon,$$

où  $\eta'$  désigne la dérivée  $\frac{d\eta_\alpha}{d\alpha}$ ; de sorte que,  $\eta$  étant égal à la fonction  $\eta_\alpha$ , qui vérifie l'équation  $\mathbf{A} = 0$ , il viendra

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \eta' = 0.$$

En posant ensuite

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{\partial M}{\partial \eta} \eta' = M',$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \eta' = S',$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \eta' = \Phi',$$

nous aurons

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial \eta} \varepsilon + M' \delta\alpha, \quad \delta S = \frac{\partial S}{\partial \eta} \varepsilon + S' \delta\alpha,$$

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \varepsilon + \Phi' \delta\alpha, \quad \delta \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \varepsilon,$$

et la formule obtenue ci-dessus deviendra

$$\delta^2 \Pi = \frac{1}{S^2} (P \varepsilon^2 + Q \varepsilon \delta \alpha + M' S' \delta \alpha^2),$$

où

$$P = \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial \eta} - S^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad Q = S' \frac{\partial M}{\partial \eta} + M' \frac{\partial S}{\partial \eta} - S^2 \Phi' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta}.$$

On peut d'ailleurs présenter l'expression de  $Q$  sous une forme plus simple.

A cet effet, reportons-nous à la formule

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},$$

signalée au n° 42.

En vertu de l'égalité (3), elle peut être écrite

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \Phi' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta},$$

ou bien encore,

$$\Phi' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} = S' - \eta' \frac{\partial S}{\partial \eta},$$

et d'après cela il vient

$$S' \frac{\partial M}{\partial \eta} - S^2 \Phi' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial M}{\partial \eta} - S^2 \right) S' + S^2 \eta' \frac{\partial S}{\partial \eta}.$$

Or on a

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = S^2 + 2 (\Omega_0 + \eta) S \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad M' = S^2 \eta' + 2 (\Omega_0 + \eta) S S',$$

ce qui donne

$$\left( \frac{\partial M}{\partial \eta} - S^2 \right) S' - (M' - S^2 \eta') \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0.$$

Par suite, il vient

$$S' \frac{\partial M}{\partial \eta} - S^2 \Phi' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} = M' \frac{\partial S}{\partial \eta},$$

et nous obtenons ainsi

$$Q = 2 M' \frac{\partial S}{\partial \eta}.$$

Nous avons donc

$$\delta^2 \Pi = \frac{1}{S^2} \left( P \varepsilon^2 + 2 M' \frac{\partial S}{\partial \eta} \varepsilon \delta \alpha + M' S' \delta \alpha^2 \right).$$

Cela posé, voyons à quoi se réduisent les conditions pour que la forme qui figure en parenthèses au second membre soit définie positive.

Ces conditions sont

$$P > 0, \quad M' \left[ PS' - M' \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \right] > 0,$$

et l'on s'assure tout de suite que,  $|\alpha|$  et  $|\eta|$  étant assez petits, la première sera toujours remplie.

En effet, d'après la formule (16) du n° 41,  $\frac{\partial S}{\partial \eta}$  se réduit, pour  $\alpha = \eta = 0$ , à  $S'_0$ . Par suite,  $\frac{\partial M}{\partial \eta}$  se réduira, dans la même supposition, à

$$S_0^2 + 2\Omega_0 S_0 S'_0 = M'_0,$$

et, comme  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta}$  s'annule quand on pose  $\alpha = \eta = 0$  (n° 38),  $P$  se réduira alors à  $M'_0 S'_0$ , ce qui représente un nombre positif (n° 46).

Il ne reste donc qu'à examiner la condition

$$M' \left[ PS' - M' \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \right] > 0,$$

où l'expression en crochets est égale à

$$\left( S' \frac{\partial M}{\partial \eta} - M' \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \frac{\partial S}{\partial \eta} - S^2 S' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

En remarquant que

$$S' \frac{\partial M}{\partial \eta} - M' \frac{\partial S}{\partial \eta} = S^2 \left( S' - \eta' \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) = S^2 \Phi' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta},$$

$$\Phi' \frac{\partial S}{\partial \eta} - S' \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},$$

on la réduira à la forme

$$M' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) > 0,$$

et l'on pourra encore la simplifier, en développant

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},$$

après y avoir remplacé  $\eta$  par  $\eta_\alpha$ , suivant les puissances croissantes de  $\alpha$  et ne retenant que les termes de degré le moins élevé. Faisons le donc.

En se reportant à l'expression de  $\mathbf{A}$  (n° 38), on trouve

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \eta} = B\alpha + \dots.$$

D'autre part, eu égard à ce que la formule (2) donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \gamma + \dots,$$

et tenant compte de ce que  $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$  ne contiennent que des termes s'annulant avec  $\alpha$ , on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \gamma S'_0 + \dots.$$

Par suite,  $|\alpha|$  étant assez petit, notre condition se réduit à

$$BS'_0 M' \alpha > 0,$$

et cela,  $BS'_0$  étant un nombre positif (n° 46), est équivalent à

$$M' \alpha > 0.$$

Or  $M'$  n'est autre chose que la dérivée  $\frac{dM_\alpha}{d\alpha}$ , et le produit  $\alpha \frac{dM_\alpha}{d\alpha}$ , quand  $|\alpha|$  est assez petit, a le même signe que  $M_\alpha - M_0$ .

Nous pouvons donc affirmer que, si pour la figure d'équilibre considérée, supposée assez peu différente d'un ellipsoïde, on a

$$M_\alpha - M_0 > 0,$$

il y aura un minimum de  $\Pi$ .

En même temps nous pouvons conclure que, si pour cette figure

$$M_\alpha - M_0 < 0,$$

le minimum n'aura pas lieu.

Ainsi il y aura un minimum de  $\Pi$  ou non, selon que le moment des quantités de mouvement, correspondant à la figure d'équilibre considérée, est plus grand ou plus petit que celui qui correspond à l'ellipsoïde.

C'est en cela que consiste le principe de M. Poincaré dont il a été parlé dans l'Introduction.

**55.** En revenant aux notations du n° 53, supposons que l'on se trouve dans le cas où la figure  $f_0$  correspond à un minimum de  $\Pi$  et, en supposant que les nombres  $|\alpha_0|$  et  $\lambda_0$  soient assez petits, cherchons à assigner à  $\Delta\Pi$  une limite inférieure en fonction de la déviation de la figure  $F$  à partir de la figure  $f_0$ .

En faisant abstraction du cas où  $M_\alpha - M_0$  serait égal à zéro quel que soit  $\alpha$ , et où il n'y aurait pas à proprement parler de minimum\*), nous allons donc supposer que l'on ait

$$M_\alpha - M_0 > 0,$$

tant pour  $\alpha = \alpha_0$  que pour d'autres valeurs suffisamment petites de  $\alpha$  de même signe que  $\alpha_0$ .

Alors la forme quadratique en  $\delta\alpha$  et  $\delta\eta$ , par laquelle s'exprimait la différentielle  $\delta^2\Pi$  considérée au numéro précédent, sera définie positive.

Par suite,  $|\alpha - \alpha_0|$  et  $|\eta - \eta_{\alpha_0}|$  étant assez petits, on pourra assigner à  $\Delta_1\Pi$  une limite inférieure de la forme

$$n(\alpha - \alpha_0)^2 + n'(\eta - \eta_{\alpha_0})^2,$$

où  $n$  et  $n'$  sont des nombres positifs, indépendants de  $\alpha$  et  $\eta$ .

D'autre part,  $L$  étant assez petit, on aura pour  $\Delta_2\Pi$  une limite inférieure de la même forme qu'au n° 52, à savoir,  $\frac{2t_0}{\pi}\mathfrak{S}^2$ , où

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4} \int d\sigma \int_{-\lambda}^{+\lambda} G|x| d\xi.$$

On aura donc

$$\Delta\Pi > n(\alpha - \alpha_0)^2 + n'(\eta - \eta_{\alpha_0})^2 + \frac{2t_0}{\pi}\mathfrak{S}^2.$$

Or, en entendant par  $\vartheta$  la déviation de la figure  $F$  à partir de la figure  $f_0$ , on aura évidemment

$$\vartheta < \frac{1}{4} \int \left| \int_{\zeta_0}^{\zeta} G du \right| d\sigma + \mathfrak{S}$$

\*) Dans ce cas, si l'on pouvait jamais le rencontrer,  $\Pi$  ne changerait pas quand on passe d'une figure à une autre, dans la série considérée de figures d'équilibre, et il n'y aurait de minimum que si la figure  $F$  était assujettie à la condition de ne se réduire point à des figures de cette série.



et, par suite,

$$\partial^2 < \frac{1}{8} \left( \int \left| \int_{\zeta_0}^{\zeta} G du \right| d\sigma \right)^2 + 2\vartheta^2.$$

D'ailleurs,  $|\alpha - \alpha_0|$  et  $|\eta - \eta_{\alpha_0}|$  étant au-dessous des nombres fixes suffisamment petits, on pourra trouver des nombres fixes  $N$  et  $N'$ , tels que le premier terme du second membre soit inférieur à

$$N(\alpha - \alpha_0)^2 + N'(\eta - \eta_{\alpha_0})^2,$$

et que l'on ait par conséquent

$$\partial^2 < N(\alpha - \alpha_0)^2 + N'(\eta - \eta_{\alpha_0})^2 + 2\vartheta^2.$$

Cela posé, si l'on désigne par  $p$  celui des trois nombres

$$\frac{n}{N}, \quad \frac{n'}{N'}, \quad \frac{t_0}{\pi}$$

qui est le plus petit, il viendra

$$\Delta\Pi > p\partial^2.$$

De cette façon le postulat relatif à la déviation, admis dans le *Mémoire Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre* et démontré dans ce qui précède pour les ellipsoïdes, est maintenant démontré aussi pour les figures d'équilibre non ellipsoïdales, tant qu'elles sont assez peu différentes des ellipsoïdes.

#### IX. — CONCLUSIONS SUR LA STABILITÉ.

**56.** Nous nous sommes occupé jusqu'ici d'un problème de minimum sans avoir rien parler du problème de la stabilité qui y a conduit. Il serait donc naturel de nous arrêter à présent à ce dernier problème. Malheureusement nous ne pouvons rien ajouter d'essentiel à ce que nous avons dit à ce sujet dans le *Mémoire Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*, bien que ce ne fût que très peu de chose. Tout ce que nous pouvons faire en ce moment c'est de simplifier l'analyse développée dans ce *Mémoire*; et c'est cela ce que nous allons montrer ici, en nous bornant toujours au cas des figures d'équilibre ellipsoïdales et de celles qui en sont assez peu différentes.

Tout d'abord, au lieu de l'élément *écart* considéré dans le *Mémoire* cité, il convient d'en introduire un autre, qui soit plus approprié à l'analyse précédente.

Soit  $F_0$  la figure d'équilibre envisagée, que l'on suppose être soit un ellipsoïde, soit une de ces figures d'équilibre non ellipsoïdales dont il a été question dans la Section précédente.

En voulant comparer à cette figure une figure quelconque  $F$  du liquide, nous supposons que la figure  $F$  soit placée par rapport à la figure  $F_0$  de manière que les conditions admises dans ce qui précède soient remplies, et nous allons ensuite considérer, quand  $F_0$  est un ellipsoïde, l'élément désigné précédemment par  $L$  (n° 28) et, quand  $F_0$  est une figure non ellipsoïdale, l'élément désigné par  $\lambda_0$  (n° 53). C'est cet élément, qui sera désigné maintenant par  $l^*$ , que nous allons introduire ici au lieu de ce que nous avons appelé écart.

En même temps nous allons considérer un autre élément, que nous désignerons par  $\delta$ , et qui représentera, pour la même position de la figure  $F$  par rapport à  $F_0$ , le volume de la partie de la figure  $F$  qui se trouve à l'extérieur de la figure  $F_0$  ou, ce qui revient au même, le volume de la partie de  $F_0$  qui se trouve à l'extérieur de  $F$ .

Si  $F_0$  est une figure de révolution,  $\delta$  ne sera autre chose que l'élément appelé précédemment la déviation et désigné par  $\delta$ . Dans le cas contraire,  $\delta$  sera en général plus grand que  $\delta$ . Toutefois les inégalités établies dans les numéros 32, 52 et 55 subsisteront, comme on le voit immédiatement, si l'on y remplace  $\delta$  par  $\delta$ ; de sorte que,  $\Pi$  étant minimum pour la figure  $F_0$ , on aura, en supposant  $l$  suffisamment petit,

$$(1) \quad \Delta\Pi > p\delta^{2n},$$

où  $p$  est un nombre positif fixe suffisamment petit et  $n$  un entier que l'on pourra prendre égal à 1, excepté dans les cas singuliers des ellipsoïdes où  $n$  sera toujours plus grand que 1.

Il est évident que,  $l$  ayant une valeur donnée,  $\delta$  admettra un certain maximum de la forme  $l\varphi(l)$ , où  $\varphi(l)$  est une fonction positive dont toutes les valeurs sont au-dessous d'une certaine limite fixe. Cette fonction sera d'ailleurs telle que,  $l$  ne dépassant pas un nombre donné quelconque, elle admettra un minimum non nul.

Quant au minimum de  $\delta$  pour une valeur donnée de  $l$ , il est clair qu'il sera toujours égal à zéro.

Cela posé, venons à la question de stabilité.

**57.** Concevons une masse fluide homogène, dont les particules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, et qui tourne uniformément autour d'un axe avec une vitesse angulaire  $\omega_0$ , en gardant une figure invariable  $F_0$ .

Si l'on veut examiner la stabilité de cette figure, on doit supposer que le mouvement de rotation dont le liquide est ainsi animé éprouve une petite perturbation, et étudier ensuite le mouvement troublé du liquide.

\*) Nous n'aurons plus à considérer la figure auxiliaire  $f$  et la fonction  $\zeta$  qui lui correspond, de sorte que la lettre  $l$ , employée précédemment pour représenter la plus grande valeur absolue de la fonction  $\zeta$ , ne se rencontrera plus dans ce sens.

Si le liquide considéré est dénué de toute viscosité, on aura dans ce mouvement l'équation des forces vives, qui s'écrira, en désignant la demi-force vive par  $T$  et en prenant la densité du liquide pour unité, comme il suit:

$$T - \frac{f}{2} \iiint \frac{d\tau d\tau'}{r} = \text{constante.}$$

Une pareille équation aura lieu non seulement pour le mouvement absolu, mais encore pour le mouvement relatif par rapport au centre de gravité du liquide, et c'est exclusivement de ce dernier mouvement que nous parlerons dans la suite.

Voyons quelles sont les conclusions que l'on peut tirer de cette équation au sujet de la stabilité, quand l'expression désignée précédemment par  $\Pi$  est minimum pour la figure  $F_0$ .

Pour plus de simplicité, nous nous bornerons au cas de minimum non conditionnel. Mais les raisonnements qui vont suivre pourront s'étendre à tous les cas de minimum conditionnel, où les conditions imposées à la figure  $F$  sont telles que, dès qu'elles sont remplies pour la figure du liquide à l'instant initial, elles le seront pendant toute la durée du mouvement, pourvu que les vitesses initiales soient choisies d'une manière convenable.

Comme précédemment, nous prendrons pour origine des coordonnées le centre de gravité du liquide et pour axe des  $z$ , l'axe auquel est rapporté le moment d'inertie  $S$ , et qui sert de l'axe de rotation pour la figure d'équilibre  $F_0$ .

En désignant par  $u$ ,  $v$ ,  $w$  les projections sur les axes des  $x$ , des  $y$ , des  $z$  de la vitesse d'un point  $(x, y, z)$  du liquide, dans le mouvement par rapport au centre de gravité, nous aurons

$$T = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau.$$

Or, outre ce mouvement, qu'on suppose être rapporté à des axes de directions fixes, nous allons encore considérer le mouvement par rapport à des axes mobiles, tournant autour de l'axe des  $z$  avec une vitesse angulaire *variable*  $\omega$ .

Soient  $u$  et  $v$  les projections sur nos axes des  $x$  et des  $y$  de la vitesse du point  $(x, y, z)$  du liquide dans ce mouvement relatif.

Nous aurons

$$u = u - \omega y, \quad v = v + \omega x,$$

et par suite,  $\mathbf{T}$  étant la demi-force vive du liquide dans le même mouvement relatif,

$$T = \mathbf{T} + \omega \int (vx - uy) d\tau + \frac{1}{2} \omega^2 S.$$

Nous choisirons  $\omega$  de manière à avoir

$$\int (vx - uy) d\tau = 0,$$

ce qui revient à poser

$$\omega S = \int (vx - uy) d\tau,$$

où le second membre, d'après le principe des aires, représente une quantité constante.

Ainsi  $\omega S$  sera une constante, et sa valeur, les perturbations étant petites, différera peu du produit  $\omega_0 S_0$ , représentant le moment des quantités de mouvement qui correspond à la figure d'équilibre considérée  $F_0$  (dont le moment d'inertie sera désigné par  $S_0$ ).

Pour nous conformer aux notations employées précédemment, nous désignerons cette constante par  $\sqrt{2\pi fM}$ , de sorte qu'on ait

$$\frac{1}{2} \omega^2 S^2 = \pi f M.$$

En choisissant de cette manière  $\omega$ , nous aurons

$$T = \mathbf{T} + \frac{\pi f M}{S},$$

et l'équation des forces vives deviendra

$$\mathbf{T} + \frac{\pi f M}{S} - \frac{f}{2} \iint \frac{d\tau d\tau'}{r} = \text{const.}$$

Or on a

$$\Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\tau d\tau'}{r},$$

où

$$M_0 = \frac{\omega_0^2 S_0^2}{2\pi f}.$$

On pourra donc présenter l'équation précédente sous la forme

$$(2) \quad \frac{1}{\pi f} \mathbf{T} + \Pi + \frac{M - M_0}{S} = \frac{1}{\pi f} \mathbf{T}^{(0)} + \Pi^{(0)} + \frac{M - M_0}{S^{(0)}},$$

en entendant par  $\mathbf{T}^{(0)}$ ,  $\Pi^{(0)}$ ,  $S^{(0)}$  les valeurs initiales des quantités  $\mathbf{T}$ ,  $\Pi$ ,  $S$ .

Cela posé, soient:  $l_1$  une valeur fixe de  $l$ , aussi petite que l'on veut, et  $\varepsilon$  un nombre positif fixe, plus petit que le minimum de la fonction  $\varphi(l)$  sous la condition  $l \leq l_1$  (n° 56).

Soient ensuite  $\Pi_0$  la valeur de  $\Pi$  pour la figure  $F_0$  et  $\Pi_1$  la plus petite valeur possible que puisse prendre  $\Pi$  sous les conditions

$$l = l_1, \quad \delta \geq \varepsilon l_1.$$

Comme, par hypothèse, la figure  $F_0$  répond à un minimum de  $\Pi$ , nous aurons d'après (1), en supposant  $l_1$  suffisamment petit,

$$\Pi_1 > \Pi_0.$$

Or, en faisant  $l$  suffisamment petit, on peut rendre  $\Pi$  aussi peu différent de  $\Pi_0$  que l'on veut. On pourra donc prendre la valeur initiale de  $l$  assez petite pour qu'on ait

$$(3) \quad \Pi^{(0)} < \Pi_1.$$

En choisissant de cette façon la figure initiale du liquide, nous la supposerons telle que les valeurs correspondantes de  $l$  et de  $\delta$  satisfassent à l'inégalité

$$\delta > \varepsilon l.$$

Nous supposerons d'ailleurs la valeur initiale de  $l$  inférieure à  $l_1$ .

Or, quelle que soit la figure initiale du liquide, on peut prendre les vitesses initiales telles que les constantes

$$|M - M_0| \quad \text{et} \quad \Gamma^{(0)}$$

soient aussi petites que l'on veut, et, comme on a l'inégalité (3), on pourra, en faisant ces constantes assez petites, arriver à ce qu'on ait

$$(M - M_0) \left[ \frac{1}{S^{(0)}} - \frac{1}{S} \right] + \frac{1}{\pi f} \Gamma^{(0)} + \Pi^{(0)} < \Pi_1,$$

pour toutes les valeurs dont  $S$  est susceptible sous la condition  $l \leq l_1$ .

Supposons donc que les vitesses initiales soient choisies de cette manière.

Alors, pendant le mouvement qui s'ensuivra, tant que la figure du liquide sera assez peu différente de la figure  $F_0$  pour qu'on ait  $l \leq l_1$ , on aura, en vertu de l'équation (2), l'inégalité

$$\frac{1}{\pi f} \Gamma + \Pi < \Pi_1,$$

d'où il résulte

$$\Pi < \Pi_1.$$

De là, eu égard à la définition de  $\Pi_1$ , on conclut que  $l$  ne pourra devenir égal à  $l_1$ , tant que  $\delta$  ne devient pas inférieur à  $\varepsilon l$ .

Donc, si le mouvement se fait d'une manière continue, de sorte que  $l$  et  $\delta$  varient continûment avec le temps, on aura, à partir de l'instant initial, ces deux inégalités

$$l < l_1, \quad \delta > \varepsilon l,$$

et l'on pourra être certain que la première ne cessera d'avoir lieu, tant que la deuxième est remplie. On voit d'ailleurs que le mouvement troublé jouira de cette propriété, quelque petits que soient les nombres  $l_1$  et  $\varepsilon$ , pourvu que les perturbations soient assez petites.

C'est une pareille circonstance que j'ai prise pour signe de la stabilité dans le *Mémoire Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*.

Le liquide a été supposé dans ce qui vient d'être développé sans viscosité. Mais dans le cas d'un liquide visqueux on arrivera à la même conclusion, car alors il faudra seulement remplacer l'équation (2) par l'inégalité

$$\frac{1}{\pi f} \mathbf{T} + \Pi + \frac{M - M_0}{S} < \frac{1}{\pi f} \mathbf{T}^{(0)} + \Pi^{(0)} + \frac{M - M_0}{S^{(0)}},$$

et il n'y aura ensuite rien à changer dans les raisonnements précédents\*).

58. La conclusion que nous avons obtenue est bien incomplète. Mais l'équation des forces vives, à elle seule, ne peut donner rien de plus, et ce n'est que par une étude approfondie de toutes les équations du problème que l'on puisse espérer en obtenir une véritable solution. Or, une pareille étude n'a pas encore été faite.

Il est vrai que M. Poincaré, dans son *Mémoire Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, s'est occupé de la question des petites oscillations et en a tiré plusieurs conclusions au sujet de la stabilité. Mais, comme on le fait d'ordinaire dans ces sortes de recherches, il s'est borné aux équations linéaires, que l'on obtient en négligeant, dans les équations différentielles du problème, certains termes censés être petits, et les conclusions obtenues par cette voie ne peuvent être considérées comme rigoureusement établies.

Donc, quand on dit qu'une figure d'équilibre correspondant à un minimum de  $\Pi$  est stable, il ne faut pas croire qu'il ait été démontré que, les perturbations étant assez petites, les figures que prendra le liquide, pendant le mouvement qui s'ensuit, différeront peu de la figure d'équilibre, *quelque loin que l'on suive ce mouvement*. Tout ce qui est démontré, c'est

\*) L'analyse précédente ne diffère au fond pas de celle que j'avais l'intention d'exposer dans le premier Chapitre du *Mémoire Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*, mais que j'ai ensuite remplacée par celle qu'on y trouve développée. Dans l'Introduction de ce *Mémoire* j'ai expliqué ce qui m'a engagé à faire ce changement de rédaction. Mais je n'ai rien gagné par là pour ce qui concerne les conclusions sur la stabilité, et cependant l'analyse en est devenue beaucoup plus compliquée.

que ces figures en différeront peu tant que l'inégalité

$$\delta > \varepsilon l$$

reste remplie.

Toutefois, si l'on était certain que cette inégalité ne cessera d'avoir lieu tant que  $l$  ne dépasse pas  $l_1$ , on pourrait affirmer que la figure du liquide différera toujours peu de la figure d'équilibre. Mais, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que les perturbations satisfissent à certaines conditions, et de pareilles conditions ne sont pas encore connues. C'est donc seulement en les recherchant qu'on pourra ajouter quelque chose à la conclusion que nous avons obtenue.

A propos de cela, remarquons d'une façon générale que la nécessité d'introduire telles ou telles conditions, pour y assujettir les perturbations, est inévitable dans la question considérée, et que, si l'on ne voulait imposer aux perturbations que la condition d'être suffisamment petites, on ne pourrait arriver à aucune conclusion. Même la conclusion précédente, quelque incomplète qu'elle soit, est basée sur certaines hypothèses: elle suppose, en effet, une certaine continuité du mouvement.

59. Dans ce qui précède, en parlant des figures qui diffèrent peu d'une figure d'équilibre, nous avons supposé qu'il s'agisse des figures pour lesquelles  $l$  est suffisamment petit.

Or on pourrait attribuer à l'expression *différer peu* un autre sens, en considérant, au lieu de  $l$ , certaines autres quantités qui ne pussent s'annuler que pour la figure d'équilibre envisagée, et en entendant par des figures peu différentes de la figure d'équilibre celles pour lesquelles ces quantités fussent petites. Seulement, pour qu'on puisse en tirer parti, il faudra que, dans le cas de minimum, l'inégalité

$$\Delta\Pi > 0$$

ait lieu, quel que soit  $l$ , pourvu que les quantités considérées soient assez petites.

C'est ainsi que M. Duhem, dans ses recherches sur la stabilité de l'équilibre d'un liquide (*Journal de Mathématiques*, 5<sup>e</sup> série, t. VII et VIII), introduit certaines intégrales de volume, en regardant comme petit tout changement de l'état du liquide pour lequel ces intégrales sont petites. Seulement le choix de ces intégrales n'est pas assez bien approprié à la question considérée.

Dans les *Recherches sur l'Hydrodynamique*, M. Duhem s'arrête à un autre choix, en remplaçant les intégrales considérées auparavant par une seule qui, dans le cas d'un liquide incompressible et homogène, se réduit à ce qui serait représenté, avec nos notations, par  $2\delta$ .

Supposons donc que l'on considère, au lieu de  $l$ , l'élément  $\delta$  et que, pour la figure d'équilibre envisagée,  $\Pi$  soit minimum dans ce sens que  $\Delta\Pi$  soit positif toutes les fois que  $\delta$  est au-dessous d'une certaine limite fixe.

Alors, en partant de l'équation des forces vives, on pourra démontrer que, les perturbations étant assez petites,  $\delta$  restera au-dessous d'une limite assignée à l'avance, si petite qu'elle soit, pendant toute la durée du mouvement.

C'est du reste ce que j'ai déjà indiqué dans une des quatre thèses qu'on trouve dans le *Mémoire Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre*.

Mais la question se pose: y a-t-il une figure d'équilibre pour laquelle  $\Pi$  soit minimum dans le sens défini ci-dessus?

D'après ce qui a été observé dans l'Introduction, si  $M$  n'est pas nul,  $\Pi$  ne peut atteindre sa limite inférieure précise pour aucune figure, et il est facile aussi de voir que, pour aucune figure, il ne pourra non plus être minimum dans le sens qui nous intéresse.

Supposons donc que l'on ait

$$M = 0.$$

Dans cette hypothèse, les figures ellipsoïdales d'équilibre se réduisent à une sphère, et  $\Pi$  devient certainement un minimum pour cette figure.

Mais ce minimum sera-t-il tel que  $\Delta\Pi$  soit positif toutes les fois que  $\delta$  est assez petit?

Ce sera bien le cas, si la limite inférieure précise de  $\Pi$  correspond à une figure déterminée, car j'ai établi autrefois que cette figure ne peut être qu'une sphère.

Donc, si l'on pouvait démontrer l'existence d'une telle figure, on pourrait affirmer que dans le cas de la sphère il y a *stabilité par rapport à  $\delta$*  \*).

Mais on ne l'a pas encore fait; et si la figure dont il s'agit n'existe pas, le minimum de  $\Pi$  correspondant à la sphère ne sera qu'un minimum relatif et l'on ne pourra rien dire au sujet du signe de  $\Delta\Pi$ , dès que  $l$  cesse d'être assez petit. Donc la conclusion que nous venons de signaler est loin d'être indubitable.

Ainsi, même dans le cas de la sphère, le remplacement de  $l$  par  $\delta$  ne donne presque rien; et quant à d'autres figures d'équilibre, ce remplacement n'est d'aucune utilité: la raison en est que,  $M$  n'étant pas nul,  $\Pi$  dépend du moment d'inertie  $S$ , dont l'accroissement peut devenir aussi grand qu'on veut, quelque petite que soit la valeur attribuée à  $\delta$ .

Mais ne pourrait-on pas arriver à des conclusions utiles, en considérant un certain autre élément, choisi de telle façon que l'accroissement de  $S$  fût petit, sitôt que cet élément serait petit?

Peut-être; mais on aurait dû trouver d'abord une méthode, permettant d'examiner l'accroissement de  $\Pi$  sans supposer  $l$  suffisamment petit. Et à présent nous ne pouvons le faire que dans cette dernière hypothèse, de sorte qu'en la rejetant nous serions obligé de renoncer à toute possibilité de résoudre le problème de minimum.

**60.** Revenons à la stabilité par rapport à  $l$  et supposons que, pour la figure d'équilibre considérée,  $\Pi$  ne soit pas minimum.

Pourra-t-on affirmer alors que cette figure d'équilibre n'est pas stable?

---

\*) Dans le *Mémoire Problème général de la stabilité du mouvement*, j'ai insisté sur la nécessité d'indiquer les quantités qu'on suppose demeurer petites quand on parle de la stabilité, puisque la notion de stabilité n'a en elle-même rien d'absolu; et j'y ai introduit l'expression *stabilité par rapport à telles ou telles quantités*.



S'il s'agit d'un liquide parfait, il ne semble pas que cette affirmation soit exacte, et, peut-être, la stabilité pourra alors avoir lieu tout aussi bien que l'instabilité, selon les circonstances. On se trouve donc dans une complète incertitude.

Il est vrai que dans le cas de minimum de  $\Pi$  la question n'est pas non plus résolue d'une manière satisfaisante; mais alors, en admettant qu'il y a stabilité, on peut du moins s'appuyer sur les analogies que présentent les systèmes matériels dont la position est définie par un nombre limité de paramètres.

Quant au cas actuel, de pareilles analogies ne servent à rien.

En effet,  $\Pi$  n'étant pas minimum, l'énergie totale ne sera certainement pas minimum sous la condition de l'invariabilité du moment des quantités de mouvement \*), et dans ce cas, quand il s'agit d'un équilibre *relatif* par rapport à des axes doués d'un mouvement de rotation, on ne peut arriver à aucune conclusion générale même pour les systèmes à un nombre limité de paramètres. Tout ce qu'on peut affirmer pour de tels systèmes, c'est que l'instabilité n'aura pas *nécessairement* lieu, quand l'énergie cesse d'être minimum; car on sait que, dans les problèmes où les équations différentielles du mouvement troublé sont *linéaires*, il peut y avoir stabilité sans que l'énergie soit minimum.

Ce que nous venons de dire suppose qu'il n'y a pas, dans le système considéré, de résistances passives.

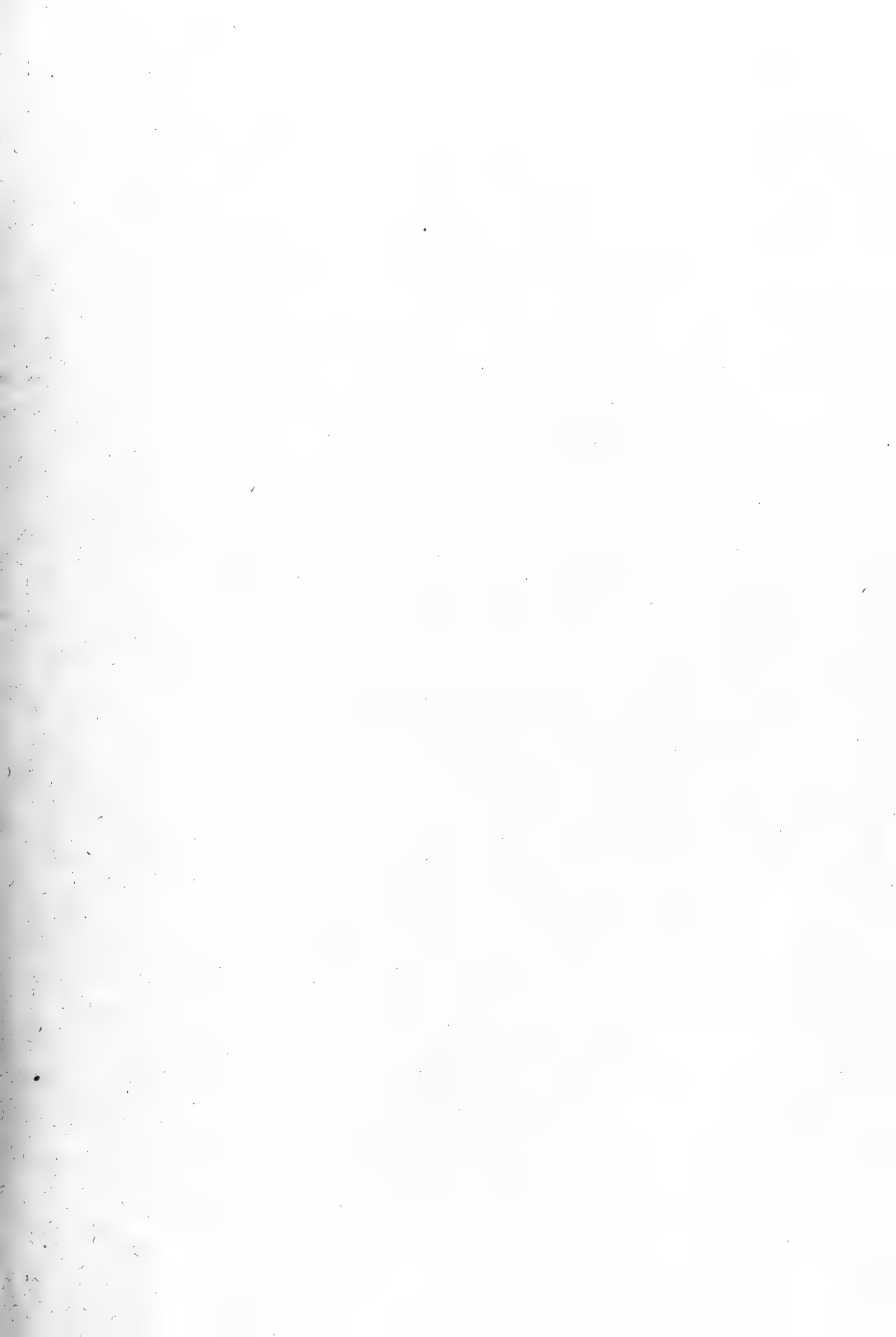
Or, si nous en venons au cas où le système est soumis à de pareilles résistances, la chose devient toute différente. Alors, si l'on fait abstraction de certains cas singuliers, les équations différentielles du mouvement troublé seront telles que, dans le cas où l'énergie n'est pas un minimum, l'équation déterminante aura des racines à parties réelles positives et, s'il en est ainsi, il y aura certainement instabilité, comme je l'ai démontré dans le Mémoire *Problème général de la stabilité du mouvement* \*\*).

Pour ce qui concerne le problème qui nous intéresse, on se trouvera dans des conditions analogues, si le liquide considéré est visqueux. Donc alors,  $\Pi$  n'étant pas minimum, l'instabilité devient très vraisemblable, et l'on pourra, peut-être, la démontrer rigoureusement, en admettant, pour exprimer l'effet de la viscosité, les formules de Navier, et en se servant des considérations analogues à celles qui ont été développées dans le Mémoire cité ci-dessus. Il suffira pour cela d'établir que les équations différentielles du mouvement troublé admettent une solution particulière de la nature de ces solutions que M. Poincaré a appelées *asymptotiques*, et il ne semble pas qu'on se heurte dans cette voie à des difficultés insurmontables, du moins pour ce qui concerne les cas ordinaires, où la non-existence de minimum se reconnaît par un examen de la variation seconde de  $\Pi$ .

\*) *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre.*

\*\*\*) Une traduction française de ce Mémoire, faite par M. Davaux, vient de paraître dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (2<sup>e</sup> série, t. IX).





Цѣна: 1 руб. 35 к.; Prix: 3 Mrk.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и Н. Л. Риннера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петерб., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Ключкина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Биевѣ, Н. Киммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зергенфрей) въ Лейпцигѣ, Лозанѣ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou  
N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Lelpsic, Luzac & Cie à Londres.

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**  
**MÉMOIRES**  
**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.**  
**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 6.**

**Volume XXII. № 6.**

**МНОГОЛѢТНІЯ КОЛЕБАНИЯ РАСХОДА**  
**НѢКОТОРЫХЪ**  
**СѢВЕРО-АМЕРИКАНСКИХЪ РѢКЪ.**

**Е. В. Оппокова.**

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 11 апрѣля 1907 года).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**



**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 6.**

**Volume XXII. № 6.**

**МНОГОЛѢТНЯЯ КОЛЕБАНИЯ РАСХОДА**

НѢКОТОРЫХЪ

**СѢВЕРО-АМЕРИКАНСКИХЪ РѢКЪ.**

**Е. В. Оппокова.**

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 11 апрѣля 1907 года).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**

Мартъ 1908.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Непрѣмѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ*.

Свѣдѣнія о годовой величинѣ расхода рѣкъ за сколько-нибудь продолжительные періоды времени пока еще такъ скудны въ современной потамологической литературѣ (т. е. въ литературѣ о рѣкахъ), что каждый научный трудъ, въ которомъ только такія данныя приводятся, заслуживаетъ вниманія и представляетъ большой интересъ. Въ особенности это должно сказать въ томъ случаѣ, если многолѣтнія данныя о расходахъ рѣкъ приводятся не сами по себѣ, а наряду съ такими же многолѣтними данными о количествѣ атмосферныхъ осадковъ, выпавшихъ въ разные годы въ бассейнахъ рѣкъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ представляется возможность изучить ближе тѣ соотношенія, которыя существуютъ въ данномъ рѣчномъ бассейнѣ между колеблющимися въ разные годы атмосферными осадками въ бассейнѣ рѣки и непостояннымъ же въ разные годы рѣчнымъ стокомъ.

Въ монографіи: *The relation of rainfall to run-off by G. W. Rafter*<sup>1)</sup>, мы какъ разъ находимъ интересующія насъ данныя объ осадкахъ и стока въ бассейнахъ нѣкоторыхъ, къ сожалѣнію только небольшихъ, сѣверо-американскихъ рѣчекъ и проточныхъ озеръ, частью притомъ за довольно продолжительный періодъ наблюденій. Наиболѣе продолжительныя изъ этихъ наблюденій будутъ использованы ниже, путемъ сопоставленія ихъ особымъ образомъ, что позволитъ намъ освѣтить эти данныя съ такой стороны, съ какой они не были затронуты въ подлинникѣ, и позволитъ извлечь изъ нихъ нѣкоторые выводы, отсутствующіе у Рафтера и частью даже колеблющіе основную точку зрѣнія послѣдняго на роль различныхъ мѣстныхъ факторовъ рѣчного стока, въ родѣ лѣсовъ и т. п.

Рафтеръ приводитъ, между прочимъ, данныя объ осадкахъ и стока:

I) въ бассейнѣ озера Кочитуатъ (Cochituate Lake, близъ г. Бостона), съ площадью бассейна въ 48 кв. км., за время съ 1863 по 1900 г.;

---

1) *Water-Supply and Irrigation Paper* № 80. U. S. Geolog. Survey. 1903.



II) въ бассейнѣ озера Мистикъ (Mystic Lake), съ площадью бассейна въ 69 кв. клм., за время съ 1878 по 1895 г.;

III) въ бассейнѣ рѣчки Зюдбюри (Sudbury River, въ 25 миляхъ къ з. отъ г. Бостона) съ площадью бассейна въ 193 кв. клм., за время съ 1875 по 1900 г. и

IV) въ бассейнѣ рѣчки Кротонъ (Croton River), съ площадью бассейна въ 869 кв. клм., за время съ 1868 по 1899 г.

Къ сожалѣнію, данныя объ атмосферныхъ осадкахъ въ началѣ наблюденій, въ 60-хъ и 70-хъ годахъ прошлаго столѣтія, не всегда оказываются надежными; это указываетъ, по отношенію къ р. Кротону за періодъ 1868—76 г., и самъ Рафтеръ; ненадежность этихъ послѣднихъ данныхъ для атмосферныхъ осадковъ очень характерно обнаружилась и на нашихъ графикахъ и выразилась въ совершенномъ несоотвѣтствіи именно за этотъ періодъ времени между общимъ ходомъ колебаній осадковъ и ходомъ колебаній рѣчного стока, измѣняющихся за дальнѣйшее время, а равно и въ другихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, совершенно согласно. Такимъ же образомъ можно было убѣдиться въ ненадежности данныхъ Рафтера объ осадкахъ и въ бассейнѣ озера Кочитуатъ за періодъ времени 1863—1869 г.<sup>1)</sup> Въ обоихъ случаяхъ мы не приводимъ ниже ни въ таблицахъ, ни на графикѣ этихъ ненадежныхъ данныхъ.

Что касается данныхъ о расходѣ рѣкъ и озеръ, то, подобно даннымъ объ осадкахъ, они приводятся въ подлинникѣ въ дюймахъ, но ниже они перечислены нами въ мм; кромѣ того, необходимо имѣть въ виду, что тѣ и другія данныя относятся къ гидрографическому году, считанному Рафтеромъ съ 1 декабря по 30 ноября новаго стиля.

### Таблица I.

Озеро Кочитуатъ, 1863—1900 г. Пл. бассейна = 48 кв. клм.

| Годовыя суммы. |               |              |                 | Пятилѣтнія среднія. |               |              |                 |
|----------------|---------------|--------------|-----------------|---------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Козф.<br>стока. | Пятилѣтіе.          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Козф.<br>стока. |
| 1863           |               | 678          |                 | 1863—67             |               | 531          |                 |
| 1864           |               | 487          |                 | 1864—68             |               | 522          |                 |
| 1865           |               | 526          |                 | 1865—69             |               | 527          |                 |
| 1866           |               | 396          |                 | 1866—70             |               | 566          |                 |

1) Осадки за это время въ бассейнѣ оз. Кочитуатъ даны у Рафтера слишкомъ большими, по сравненію съ послѣдующимъ періодомъ и съ величиной рѣчного стока въ данный періодъ; въ бассейнѣ р. Кротонъ осадки за 1868—1876 г., приводимые Рафтеромъ по Фреешап'у, оказываются, наоборотъ, слишкомъ малыми.

| Г о д о в ы я с у м м ы . |               |              |                 | П я т и л ѣ т н і я с р е д н і я . |               |              |                 |
|---------------------------|---------------|--------------|-----------------|-------------------------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.                     | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коеф.<br>стока. | Пятилѣтіе.                          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коеф.<br>стока. |
| 1867                      |               | 570          |                 | 1867—71                             |               | 562          |                 |
| 1868                      |               | 633          |                 | 1868—72                             |               | 535          |                 |
| 1869                      |               | 508          |                 | 1869—73                             |               | 539          |                 |
| 1870                      | 1491          | 723          | 0,485           | 1870—74                             | 1196          | 547          | 0,461           |
| 1871                      | 1151          | 374          | 0,325           | 1871—75                             | 1133          | 488          | 0,437           |
| 1872                      | 1227          | 437          | 0,356           | 1872—76                             | 1138          | 514          | 0,457           |
| 1873                      | 1140          | 652          | 0,571           | 1873—77                             | 1125          | 539          | 0,483           |
| 1874                      | 970           | 551          | 0,568           | 1874—78                             | 1149          | 532          | 0,467           |
| 1875                      | 1175          | 428          | 0,365           | 1875—79                             | 1156          | 528          | 0,458           |
| 1876                      | 1176          | 502          | 0,427           | 1876—80                             | 1108          | 497          | 0,444           |
| 1877                      | 1166          | 564          | 0,484           | 1877—81                             | 1075          | 475          | 0,436           |
| 1878                      | 1257          | 616          | 0,490           | 1878—82                             | 1055          | 441          | 0,414           |
| 1879                      | 1005          | 529          | 0,526           | 1879—83                             | 957*          | 369          | 0,382           |
| 1880                      | 936           | 273          | 0,291*          | 1880—84                             | 977           | 357*         | 0,362*          |
| 1881                      | 1011          | 395          | 0,391           | 1881—85                             | 1026          | 383          | 0,371           |
| 1882                      | 1066          | 394          | 0,370           | 1882—86                             | 1045          | 413          | 0,391           |
| 1883                      | 768*          | 256*         | 0,334           | 1883—87                             | 1053          | 459          | 0,430           |
| 1884                      | 1102          | 466          | 0,422           | 1884—88                             | 1179          | 542          | 0,460           |
| 1885                      | 1185          | 400          | 0,338           | 1885—89                             | 1229          | 602          | 0,489           |
| 1886                      | 1105          | 545          | 0,493           | 1886—90                             | 1239          | 653          | 0,527           |
| 1887                      | 1106          | 625          | 0,565           | 1887—91                             | 1265          | 709          | 0,562           |
| 1888                      | 1399          | 673          | 0,481           | 1888—92                             | 1252          | 666          | 0,528           |
| 1889                      | 1350          | 766          | 0,567           | 1889—93                             | 1182          | 617          | 0,513           |
| 1890                      | 1236          | 652          | 0,527           | 1890—94                             | 1114          | 533          | 0,467           |
| 1891                      | 1232          | 828          | 0,671           | 1891—95                             | 1124          | 498          | 0,436           |
| 1892                      | 1042          | 409          | 0,392           | 1892—96                             | 1098          | 440          | 0,400           |
| 1893                      | 1052          | 427          | 0,406           | 1893—97                             | 1104          | 441          | 0,398           |
| 1894                      | 1009          | 314          | 0,340           | 1894—98                             | 1178          | 472          | 0,399           |
| 1895                      | 1286          | 480          | 0,373           | 1895—99                             | 1182          | 506          | 0,431           |
| 1896                      | 1101          | 539          | 0,489           | 1896—1900                           | 1181          | 503          | 0,429           |
| 1897                      | 1070          | 411          | 0,384           |                                     |               |              |                 |
| 1898                      | 1424          | 581          | 0,408           |                                     |               |              |                 |
| 1899                      | 1028          | 514          | 0,500           |                                     |               |              |                 |
| 1900                      | 1284          | 465          | 0,362           |                                     |               |              |                 |

## Таблица II.

Озеро Мистикъ, 1878—1895 г. Пл. бассейна = 69 кв. клм.

| Годовыя суммы. |               |              |                 | Пятилѣтнія среднія. |               |              |                 |
|----------------|---------------|--------------|-----------------|---------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. | Пятилѣтіе.          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. |
| 1878           | 1339          | 605          | 0,452           | 1878—82             | 1047          | 456          | 0,434           |
| 1879           | 925           | 505          | 0,546           | 1879—83             | 934*          | 383          | 0,406           |
| 1880           | 906           | 313          | 0,345           | 1880—84             | 967           | 381*         | 0,388*          |
| 1881           | 1044          | 467          | 0,447           | 1881—85             | 1024          | 401          | 0,388           |
| 1882           | 1021          | 390          | 0,382           | 1882—86             | 1033          | 428          | 0,409           |
| 1883           | 774*          | 240*         | 0,310*          | 1883—87             | 1071          | 465          | 0,427           |
| 1884           | 1088          | 494          | 0,454           | 1884—88             | 1195          | 554          | 0,464           |
| 1885           | 1193          | 415          | 0,348           | 1885—89             | 1246          | 595          | 0,477           |
| 1886           | 1088          | 600          | 0,551           | 1886—90             | 1249          | 647          | 0,520           |
| 1887           | 1210          | 576          | 0,476           | 1887—91             | <b>1278</b>   | <b>680</b>   | <b>0,534</b>    |
| 1888           | <b>1393</b>   | 685          | 0,490           | 1888—92             | 1246          | 646          | 0,515           |
| 1889           | 1341          | 698          | 0,521           | 1889—93             | 1175          | 607          | 0,511           |
| 1890           | 1207          | 676          | 0,560           | 1890—94             | 1108          | 543          | 0,482           |
| 1891           | 1235          | <b>767</b>   | <b>0,621</b>    | 1891—95             | 1122          | 490          | 0,434           |
| 1892           | 1050          | 406          | 0,384           |                     |               |              |                 |
| 1893           | 1041          | 490          | 0,470           |                     |               |              |                 |
| 1894           | 1006          | 375          | 0,373           |                     |               |              |                 |
| 1895           | 1280          | 413          | 0,322           |                     |               |              |                 |
| Среднее        | 1120          | 508          | 0,454           |                     |               |              |                 |

## Таблица III.

Рѣчка Зюдбюри, 1875—1900. Пл. бассейна = 193 кв. клм.

| Годовыя суммы. |               |              |                 | Пятилѣтнія среднія. |               |              |                 |
|----------------|---------------|--------------|-----------------|---------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. | Пятилѣтіе.          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. |
| 1875           | 1225          | 539          | 0,440           | 1875—79             | 1208          | 610          | 0,505           |
| 1876           | 1191          | 613          | 0,515           | 1876—80             | 1165          | 557          | 0,482           |
| 1877           | 1189          | 610          | 0,513           | 1877—81             | 1145          | 543          | 0,469           |
| 1878           | 1332          | 689          | 0,517           | 1878—82             | 1116          | 517          | 0,459           |

| Г о д о в ы я с у м м ы . |               |              |                 | П я т и л ѣ т н і я с р е д н і я . |               |              |                 |
|---------------------------|---------------|--------------|-----------------|-------------------------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.                     | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. | Пятилѣтіе.                          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. |
| 1879                      | 1103          | 600          | 0,544           | 1879—83                             | 1010*         | 438          | 0,428           |
| 1880                      | 1008          | 322          | 0,320*          | 1880—84                             | 1020          | 430*         | 0,418*          |
| 1881                      | 1093          | 495          | 0,453           | 1881—85                             | 1052          | 461          | 0,434           |
| 1882                      | 1043          | 481          | 0,461           | 1882—86                             | 1056          | 479          | 0,449           |
| 1883                      | 801*          | 290*         | 0,362           | 1883—87                             | 1070          | 510          | 0,471           |
| 1884                      | 1156          | 571          | 0,494           | 1884—88                             | 1194          | 611          | 0,512           |
| 1885                      | 1169          | 469          | 0,402           | 1885—89                             | 1228          | 652          | 0,529           |
| 1886                      | 1113          | 586          | 0,527           | 1886—90                             | 1253          | 707          | 0,563           |
| 1887                      | 1113          | 632          | 0,569           | 1887—91                             | 1390          | <b>734</b>   | <b>0,569</b>    |
| 1888                      | 1421          | <b>799</b>   | 0,561           | 1888—92                             | <b>1393</b>   | 692          | 0,530           |
| 1889                      | 1326          | 774          | 0,584           | 1889—93                             | 1235          | 639          | 0,513           |
| 1890                      | 1291          | 742          | 0,575           | 1890—94                             | 1172          | 567          | 0,478           |
| 1891                      | 1299          | 722          | 0,556           | 1891—95                             | 1178          | 532          | 0,448           |
| 1892                      | 1128          | 421          | 0,373           | 1892—96                             | 1147          | 507          | 0,442           |
| 1893                      | 1130          | 536          | 0,475           | 1893—97                             | 1140          | 521          | 0,456           |
| 1894                      | 1010          | 415          | 0,410           | 1894—98                             | 1208          | 566          | 0,465           |
| 1895                      | 1324          | 566          | 0,428           | 1895—99                             | 1202          | 601          | 0,503           |
| 1896                      | 1142          | 596          | 0,522           | 1896—1900                           | 1190          | 596          | 0,503           |
| 1897                      | 1095          | 490          | 0,445           |                                     |               |              |                 |
| 1898                      | <b>1468</b>   | 764          | 0,520           |                                     |               |              |                 |
| 1899                      | 983           | 591          | <b>0,601</b>    |                                     |               |              |                 |
| 1900                      | 1262          | 537          | 0,426           |                                     |               |              |                 |
| Среднее                   | 1170          | 571          | 0,488           |                                     |               |              |                 |

Таблица IV.

Рѣка Кротонъ, 1868—1899 г. Пл. бассейна = 869 кв. клм.

| Г о д о в ы я с у м м ы . |               |              |                 | П я т и л ѣ т н і я с р е д н і я . |               |              |                 |
|---------------------------|---------------|--------------|-----------------|-------------------------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.                     | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. | Пятилѣтіе.                          | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Коэф.<br>стока. |
| 1868                      |               | 965          |                 | 1868—72                             |               | 576          |                 |
| 1869                      |               | 563          |                 | 1869—73                             |               | 522          |                 |
| 1870                      |               | 547          |                 | 1870—74                             |               | 547          |                 |
| 1871                      |               | 457          |                 | 1871—75                             |               | 560          |                 |

| Г о д о в ы я с у м м ы . |               |              |                 | П я т и л ѣ т н я с р е д н я . |               |              |                 |
|---------------------------|---------------|--------------|-----------------|---------------------------------|---------------|--------------|-----------------|
| Годъ.                     | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Козф.<br>стока. | Пятилѣтн.                       | Осадки.<br>мм | Стокъ.<br>мм | Козф.<br>стока. |
| 1872                      |               | 450          |                 | 1872—76                         |               | 582          |                 |
| 1873                      |               | 591          |                 | 1873—77                         |               | 588          |                 |
| 1874                      |               | 692          |                 | 1874—78                         |               | 580          |                 |
| 1875                      |               | 612          |                 | 1875—79                         |               | 571          |                 |
| 1876                      |               | 567          |                 | 1876—80                         |               | 518          |                 |
| 1877                      | 1248          | 478          | 0,383           | 1877—81                         | 1170          | 494          | 0,419           |
| 1878                      | 1245          | 553          | 0,444           | 1878—82                         | 1205          | 526          | 0,432           |
| 1879                      | 1276          | 643          | 0,504           | 1879—83                         | 1163          | 486          | 0,410           |
| 1880                      | 985*          | 348*         | 0,354           | 1880—84                         | 1154*         | 464*         | 0,396*          |
| 1881                      | 1095          | 450          | 0,411           | 1881—85                         | 1196          | 492          | 0,406           |
| 1882                      | 1423          | 638          | 0,448           | 1882—86                         | 1215          | 508          | 0,413           |
| 1883                      | 1035          | 349*         | 0,331*          | 1883—87                         | 1213          | 511          | 0,416           |
| 1884                      | 1233          | 535          | 0,434           | 1884—88                         | 1313          | 607          | 0,458           |
| 1885                      | 1193          | 487          | 0,408           | 1885—89                         | 1364          | 663          | 0,481           |
| 1886                      | 1192          | 531          | 0,446           | 1886—90                         | 1395          | 711          | 0,507           |
| 1887                      | 1412          | 654          | 0,463           | 1887—91                         | 1389          | 724          | 0,520           |
| 1888                      | 1533          | 828          | 0,540           | 1888—92                         | 1354          | 683          | 0,501           |
| 1889                      | 1488          | 814          | 0,547           | 1889—93                         | 1305          | 654          | 0,483           |
| 1890                      | 1352          | 727          | 0,538           | 1890—94                         | 1253          | 602          | 0,464           |
| 1891                      | 1161          | 596          | 0,514           | 1891—95                         | 1187          | 544          | 0,441           |
| 1892                      | 1234          | 452          | 0,366           | 1892—96                         | 1200          | 542          | 0,434           |
| 1893                      | 1291          | 680          | 0,448           | 1893—97                         | 1208          | 575          | 0,458           |
| 1894                      | 1225          | 556          | 0,453           | 1894—98                         | 1251          | 586          | 0,466           |
| 1895                      | 1023          | 434          | 0,424           | 1895—99                         | 1236          | 601          | 0,485           |
| 1896                      | 1228          | 588          | 0,479           |                                 |               |              |                 |
| 1897                      | 1273          | 617          | 0,485           |                                 |               |              |                 |
| 1898                      | 1507          | 734          | 0,487           |                                 |               |              |                 |
| 1899                      | 1149          | 633          | 0,551           |                                 |               |              |                 |
| Ср. 1877—99               | 1253          | 579          | 0,462           |                                 |               |              |                 |

Въ четырехъ прилагаемыхъ таблицахъ приведены для четырехъ вышеназванныхъ бассейновъ, съ одной стороны, годовыя суммы, съ другой — пятилѣтнія среднія для атмосферныхъ осадковъ, рѣчного стока и коэффициента стока, подъ которымъ понимается, какъ извѣстно, отношеніе стока къ осадкамъ за то же время (или, что то же, *относительная* величина стока, въ противоположность абсолютной его величинѣ). Пятилѣтнія среднія вычислены особымъ образомъ, а именно послѣдовательно за каждый годъ и за четыре года, непосредственно слѣдующихъ за нимъ по порядку, такъ наприм. за 1863—67, потомъ за

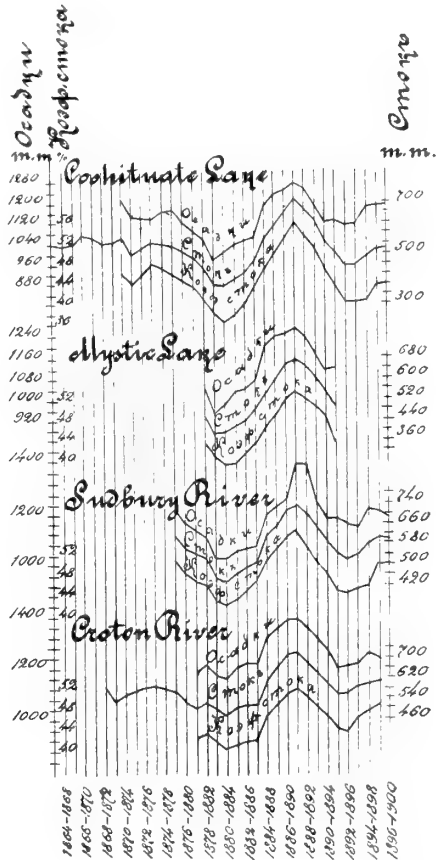
1864—68, 1865—69 и т. д. Такія пятилѣтнія среднія сопоставлены затѣмъ графически на прилагаемомъ чертежѣ.

Чертежь позволяетъ сразу видѣть не только общій многолѣтній ходъ атмосферныхъ осадковъ, рѣчного стока и коэффиціента стока въ каждомъ изъ четырехъ бассейновъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ онъ позволяетъ сравнить *одновременный* ходъ всѣхъ этихъ элементовъ въ данныхъ четырехъ бассейнахъ.

Изъ разсмотрѣнія чертежа видно, что общій ходъ измѣненій пятилѣтнихъ среднихъ для абсолютной и относительной величины стока совершенно соответствуетъ такому же ходу измѣненій пятилѣтнихъ среднихъ атмосферныхъ осадковъ въ рѣчномъ бассейнѣ, будучи, очевидно, непосредственно и всецѣло обусловленъ послѣднимъ. Тѣ рѣзкія колебанія, которыя настолько замѣтны при сопоставленіи годовыхъ суммъ осадковъ и стока, что почти исключаютъ рѣчь о соответствіи между годовыми суммами стока и годовыми суммами атмосферныхъ осадковъ, здѣсь совершенно сглаживаются, и взаимнѣ того ясно выступаютъ одновременныя, совершенно соответствующія другъ другу, *многолѣтнія* колебанія осадковъ и стока. Такъ, во всѣхъ четырехъ бассейнахъ въ пятилѣтіе 1880—84 гг. наблюдался рѣзко выраженный минимумъ атмосферныхъ осадковъ и рѣчного стока, тогда какъ пятилѣтіе 1887—91 г., наоборотъ, характеризовалось весьма рѣзкимъ максимумомъ атмосферныхъ осадковъ и стока, вслѣдъ за которымъ послѣдовало уменьшеніе осадковъ и стока, съ минимумомъ около пятилѣтія

1892—96 гг., выраженнымъ однако нѣсколько слабѣе, чѣмъ минимумъ 1880—84 г. Максимуму осадковъ и стока, бывшему около 1887—91 гг., предшествовалъ, насколько можно судить по даннымъ для стока р. Кротона, оз. Кочитутатъ, а отчасти и р. Зюдбюри, максимумъ около пятилѣтія 1873—77 гг., выраженный, повидимому, слабѣе позднѣйшаго максимума.

Отмѣченныя выше колебанія атмосферныхъ осадковъ и рѣчного стока являются, несомнѣнно, частнымъ выраженіемъ тѣхъ болѣе общихъ колебаній метеорологическихъ элементовъ, существованіе которыхъ, подъ именемъ *колебаній климата*, было указано еще въ 1887 г.<sup>1)</sup> проф. Эд. Брикнеромъ (Ed. Brückner), коснувшимся, въ частности,



1) Ed. Brückner. Klimaschwankungen seit 1700. Geograph. Abhandlungen, herausgegeben von Prof. Dr. A. Penck in Wien. Bd. IV. H. 2. 1890.

въ одной изъ своихъ позднѣйшихъ работъ<sup>1)</sup>, и вопроса о колебаніяхъ атмосферныхъ осадковъ въ Сѣв. Америкѣ, гдѣ, по его словамъ, съ половины 80-хъ годовъ до конца прошлаго столѣтія наблюдается на большей части территоріи Соединенныхъ Штатовъ убыль атмосферныхъ осадковъ<sup>2)</sup>.

Нашъ графикъ подтверждаетъ справедливость этого указанія по отношенію къ 4-мъ разсматриваемымъ бассейнамъ лишь въ общихъ чертахъ, такъ какъ въ этихъ бассейнахъ послѣ максимума осадковъ и рѣчнаго стока, бывшаго въ пятилѣтіе 1887—91 гг., послѣдовало уменьшеніе атмосферныхъ осадковъ вплоть до пятилѣтія 1892—96 гг., а затѣмъ количество ихъ немного увеличилось, по сравненію съ предыдущимъ минимумомъ, но до конца наблюденій далеко не достигало высоты предшествовавшаго максимума.

Продолжительность болѣе надежныхъ данныхъ объ осадкахъ и стока для 4-хъ выше-названныхъ бассейновъ, разумѣется, не настолько велика, чтобы можно было говорить о томъ, что отмѣченныя выше многолѣтнія колебанія осадковъ и стока непосредственно совпадаютъ, какъ по времени наступленія, такъ и по продолжительности своихъ періодовъ, съ указанными Брикнеромъ колебаніями климата, средняя продолжительность которыхъ въ теченіе двухъ послѣднихъ столѣтій составляетъ около 35 лѣтъ. Приведенный выше графикъ говоритъ о колебаніяхъ значительно меньшей продолжительности, съ длиною періодовъ всего около 12 лѣтъ. Опубликованныя нами раньше данныя о многолѣтнихъ колебаніяхъ стока и осадковъ въ бассейнѣ Богемской Эльбы, р. Залы и верхняго Днѣпра выше г. Кіева<sup>3)</sup> также ясно обнаруживаютъ существованіе параллельныхъ колебаній осадковъ и стока меньшей продолжительности, чѣмъ Брикнеровскія, и въ бассейнахъ европейскихъ рѣкъ, причемъ максимумы и минимумы этихъ колебаній не совпадаютъ по времени наступленія съ вышеуказанными для 4-хъ с.-америк. рѣкъ, а частью также и между собою (рѣзко обнаруживается всюду только максимумъ осадковъ и стока въ концѣ 70-хъ и въ началѣ 80-хъ годовъ). Во всякомъ случаѣ, если принять во вниманіе, что длительность Брикнеровскихъ періодовъ не есть величина постоянная, а колеблется въ широкихъ предѣлахъ, что сопоставленіе пятилѣтнихъ среднихъ у Брикнера иное, чѣмъ привѣенное выше, и, наконецъ, что данныя о многолѣтнихъ колебаніяхъ рѣчного стока пока еще довольно скудны и,

1) Его же: Zur Frage der 35-jährigen Klimaschwankungen. Petermann's Geograph. Mitteilungen. 1902. H. VIII.

2) Въ своемъ большомъ трудѣ о колебаніяхъ климата проф. Брикнеръ пользовался нѣкоторыми данными о колебаніяхъ уровня большихъ сѣверо-американскихъ озеръ (Мичиганъ, Эри и Онтарио) и колебаніяхъ расхода р. Миссиссиппи у Natchez (см. Klimaschwankungen, S. 128), изъ которыхъ можно заключить, что минимумъ стока наблюдался здѣсь около пятилѣтія 1871—75 гг. или, можетъ быть даже (для Миссиссиппи и Мичигана), около пятилѣтія 1866—70 г.; затѣмъ стокъ, по крайней мѣрѣ р. Миссиссиппи, въ общемъ все возрасталъ непрерывно до пятилѣтія 1881—85 г. Авторъ

сопоставляетъ пятилѣтнія среднія не такъ, какъ выше, а по пятилѣтіямъ: 1866—70, 1871—75, 1876—80 и т. д., при чемъ для р. Миссиссиппи онъ пользовался данными только по 1881—85 гг. включительно, что не исключаетъ наступленія максимума стока для этой рѣки въ 1886—90 гг.

3) Е. Оппокъ. Zur Frage der vieljährigen Abflussschwankungen in den Bassins grosser Flüsse etc. Zeitschr. für Gewässerkunde. Bd. 5, 1904. H. 6; Bd. 6, 1905. H. 1, 3. То же на русскомъ языкѣ см. Журналъ Мин. Путей Сообщенія 1906. кн. 7 и 8. До этого данныя для р. Эльбы были опубликованы въ «Метеорол. Вѣстн.» 1902 г. № 12, а для р. Залы — ibidem, 1903, № 12.

главное, непродолжительны, то можно полагать, что указанныя выше колебанія осадковъ и рѣчного стока, со сравнительно небольшой продолжительностью періодовъ, не противорѣчатъ болѣе общимъ и болѣе продолжительнымъ колебаніямъ климата, указаннымъ Брикнеромъ, относясь къ послѣднимъ, быть можетъ лишь, какъ составная часть къ цѣлому.

Обнаруженіе существованія одновременныхъ колебаній рѣчного стока и атмосферныхъ осадковъ позволяетъ сдѣлать нѣкоторые выводы о природѣ рѣчного стока и о его режимѣ. Оказывается, что ни абсолютная, ни относительная величина рѣчного стока (т. е. коэффициентъ стока, или еще иначе, модуль водоносности рѣкъ), не остается постояннымъ, даже въ пятилѣтнихъ среднихъ, а колеблется периодически, въ широкихъ предѣлахъ, находясь въ зависимости отъ такихъ же колебаній въ разные годы и періоды лѣтъ количества выпадающихъ въ рѣчныхъ бассейнахъ атмосферныхъ осадковъ. Связь между колебаніями рѣчного стока и атмосферныхъ осадковъ въ бассейнѣ рѣки столь тѣсна, что обнаруженіе ея является однимъ изъ наилучшихъ фактическихъ доказательствъ правильности апріорнаго заключенія, высказаннаго проф. А. И. Воейковымъ еще въ 1884 г., о томъ, что «рѣки являются продуктомъ климата страны»<sup>1)</sup>. Это заключеніе, получившее признаніе и самое широкое распространеніе въ новѣйшихъ потамологическихъ изслѣдованіяхъ, можетъ быть сформулировано еще болѣе конкретно, по крайней мѣрѣ тогда, когда дѣло идетъ лишь о количественной сторонѣ стока, въ видѣ слѣдующаго положенія:

*«рѣчной стокъ является функцией главнымъ образомъ атмосферныхъ осадковъ въ бассейнѣ рѣки».*

Это послѣднее положеніе доказывается не только тѣмъ, что многолѣтнія колебанія рѣчного стока въ отдѣльныхъ бассейнахъ, по ихъ какъ абсолютной, такъ и относительной величинѣ, происходятъ совершенно параллельно колебаніямъ атмосферныхъ осадковъ, но также и тѣмъ, что въ одномъ и томъ же бассейнѣ зависимость величинъ рѣчного стока отъ атмосферныхъ осадковъ въ разные годы выражается многими авторами уравненіемъ прямой линіи (П. Шрейберомъ<sup>2)</sup> для р. Эльбы при вступленіи въ Саксонію, проф. А. Пенкомъ<sup>3)</sup> для той же Эльбы въ Богеміи, П. Вуйевичемъ<sup>4)</sup> для р. Тиссы въ нѣсколькихъ пунктахъ по теченію), а въ разныхъ бассейнахъ большихъ рѣкъ средней Европы, занимающихъ въ совокупности пл. бас. свыше 830,000 кв. км., можетъ быть выражена, по даннымъ Г. Келлера<sup>5)</sup>, уравненіемъ прямой линіи зависимость многолѣтнихъ среднихъ годовыхъ величинъ рѣчного стока отъ такихъ же величинъ атмосферныхъ осадковъ; это

1) А. И. Воейковъ. Климаты земнаго шара, въ особенностяхъ Россіи. 1884. Стр. 98.

2) P. Schreiber. Beiträge zur meteorolog. Hydrologie der Elbe. Zivilingenieur. 1896. S. 604. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. Der Wasserbau. I Bd. 1906. S. 283. Шрейберъ даетъ собственно не прямую, но очень близкую къ ней кривую линію. Meteor. Zeitschr. 1904. S. 451.

3) A. Penck. Untersuchungen über Verdunstung und

Abfluss von grösseren Landflächen. Geograph. Abhandlungen herausgeg. von A. Penck in Wien. Bd. V. H. 5. 1896. S. 483.

4) P. Vujevic. Die Theiss. Eine potamologische Studie. Geogr. Abhandl. von A. Penck. Bd. VII. H. 4. 1906. S. 71.

5) H. Keller. Niederschlag, Abfluss und Verdunstung in Mitteleuropa. Jahrbuch für die Gewässerkunde Norddeutschlands. Bes. Mitt. Bd. 1. № 4. 1906. S. 9.



же уравненіе хорошо выражаетъ и многолѣтнія соотношенія между осадками и стокомъ въ крупномъ бассейнѣ нашего верхняго Днѣпра до г. Кіева (пл. бассейна 335,940 кв. клм.), что указываетъ, повидимому, на то, что закономерность, указываемая Келлеромъ, можетъ имѣть распространеніе и за предѣлами Средней Европы<sup>1)</sup>.

При столь ясно выраженной зависимости отъ атмосферныхъ осадковъ не только абсолютной, но даже и относительной величины рѣчного стока (которая также бываетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше выпадаетъ атмосферныхъ осадковъ), и при указанныхъ выше многолѣтнихъ колебаніяхъ рѣчного стока, происходящихъ въ зависимости, опять таки, все отъ колебаній тѣхъ же атмосферныхъ осадковъ, — слѣдуетъ, безъ сомнѣнія, относиться съ большей осторожностью, чѣмъ это дѣлалось до сихъ поръ, и къ раздающимся періодически, въ зависимости отъ наступленія минимума въ колебаніяхъ атмосферныхъ осадковъ и рѣчного стока, жалобамъ на «необычное» обмелѣніе рѣкъ; послѣднее приурочивалось всегда къ «самому послѣднему времени» и объяснялось до сихъ поръ обыкновенно вліяніемъ истребленія лѣсовъ, увеличившагося испаренія съ поверхности земель, завоевываемыхъ все болѣе и болѣе земледѣльческой культурой, и другими *измѣненіями мѣстныхъ условій рѣчного стока*. Такія объясненія однако всегда игнорировали наличность установленныхъ только въ недавнее время многолѣтнихъ колебаній климата и указанныхъ выше періодическихъ колебаній рѣчного стока, происходящихъ въ зависимости отъ такихъ же періодическихъ колебаній атмосферныхъ осадковъ (въ общемъ ходѣ послѣднихъ, замѣтимъ, прогрессивной убыли нигдѣ до сихъ поръ констатировано не было). Мало того, не подлежитъ сомнѣнію, что при доказательствахъ яко-бы происшедшаго, отъ истребленія лѣсовъ и т. д., уменьшенія рѣчного стока, пользовались обычно тѣми фактами, которые нынѣ объясняются вліяніемъ колебаній климата и на самомъ дѣлѣ не имѣютъ никакого отношенія къ измѣненію мѣстныхъ факторовъ стока.

Къ той же категоріи смѣшенія двухъ совершенно различныхъ явленій долженъ относиться, повидимому, и указанный на X-мъ международномъ судоходномъ конгрессѣ въ Миланѣ инж. В. М. Лохтинымъ, со словъ Schriener'a и Copeland'a, примѣръ обмелѣнія рѣкъ на участкѣ Мовроэ въ Штатѣ Висконсинъ, на границѣ лѣсовъ и прерій Сѣв. Америки, послѣдовавшаго будто бы вслѣдствіе истребленія здѣсь лѣсовъ; «до 1887 г., говорится въ докладѣ г. Лохтина, рѣки здѣсь продолжали существовать, хотя ихъ уровень и понизился; но съ этого времени послѣдствія лѣсоистребленія стали поразительны: болѣе 40 км. рѣки сдѣлалось совершенно сухо не только въ теченіе лѣта, но въ теченіе круглаго года, а тамъ, гдѣ теченіе рѣки искусственно задержано, расходъ сильно уменьшился; много водяныхъ мельницъ перестало существовать совсѣмъ, а другія были обращены въ паровыя.»<sup>2)</sup>

1) Е. Оппоковъ. О водоносности рѣкъ въ связи съ осадками и другими факторами стока. Сборникъ, изд. Метеор. Коммисіей И. Р. Географ. Общ. въ 1908 г., а также рефераты автора о работѣ Келлера въ «Ежем. метеор. бюллетенѣ Никол. Гл. Физ. Обсерв.» 1907.

№ 5, стр. 9—10 и въ журн. «Почвовѣдѣніе» 1907. Стр. 329—333.

2) M. Lokhtine. Influence de la destruction des forêts et du dessèchement des marais sur le régime et le débit des rivières. 1905. Bruxelles. p. 13.

Изъ вышеприведеннаго графика можно видѣть, что именно пятилѣтіе 1887—91 г. въ бассейнахъ 4-хъ разсмотрѣнныхъ сѣверо-американскихъ рѣкъ отличалось максимальнымъ увеличеніемъ и осадковъ, и стока, подобно тому, какъ у насъ въ бассейнѣ р. Днѣпра такимъ было пятилѣтіе 1876—80 г. За этими пятилѣтіями послѣдовало сравнительно продолжительное уменьшеніе стока, какъ это всегда бываетъ, идя отъ максимума къ минимуму; у насъ это дѣлалось до пятилѣтія 1890—94 гг., а въ бассейнахъ въ 4-хъ сѣверо-американскихъ рѣкъ не менѣе, какъ до пятилѣтія 1892—96 г., если еще не долѣе. При такихъ условіяхъ появленіе жалобъ на убыль рѣчного стока, раздававшихся у насъ въ бассейнѣ р. Днѣпра подъ вліяніемъ мелководья 1891 и 1892 г., обусловленнаго, какъ оказывается, выпаденіемъ въ эти годы въ бассейнѣ минимальнаго количества атмосферныхъ осадковъ<sup>1)</sup>, какъ и въ С. Америкѣ — подъ вліяніемъ такого же мелководья и минимума осадковъ, послѣдовавшаго около половины 90-хъ годовъ, — должно быть вполне естественнымъ и понятнымъ и помимо вліянія лѣсоистребленія; во всякомъ случаѣ въ Штатѣ Висконсинъ на убыли стока въ 90-хъ годовъ должно было отразиться прежде и главнѣе всего вліяніе колебаній климата, именно вліяніе нисходящей волны атм. осадковъ, которое между тѣмъ принято во вниманіе не было, а его послѣдствія были приписаны вліянію вырубки лѣсовъ.

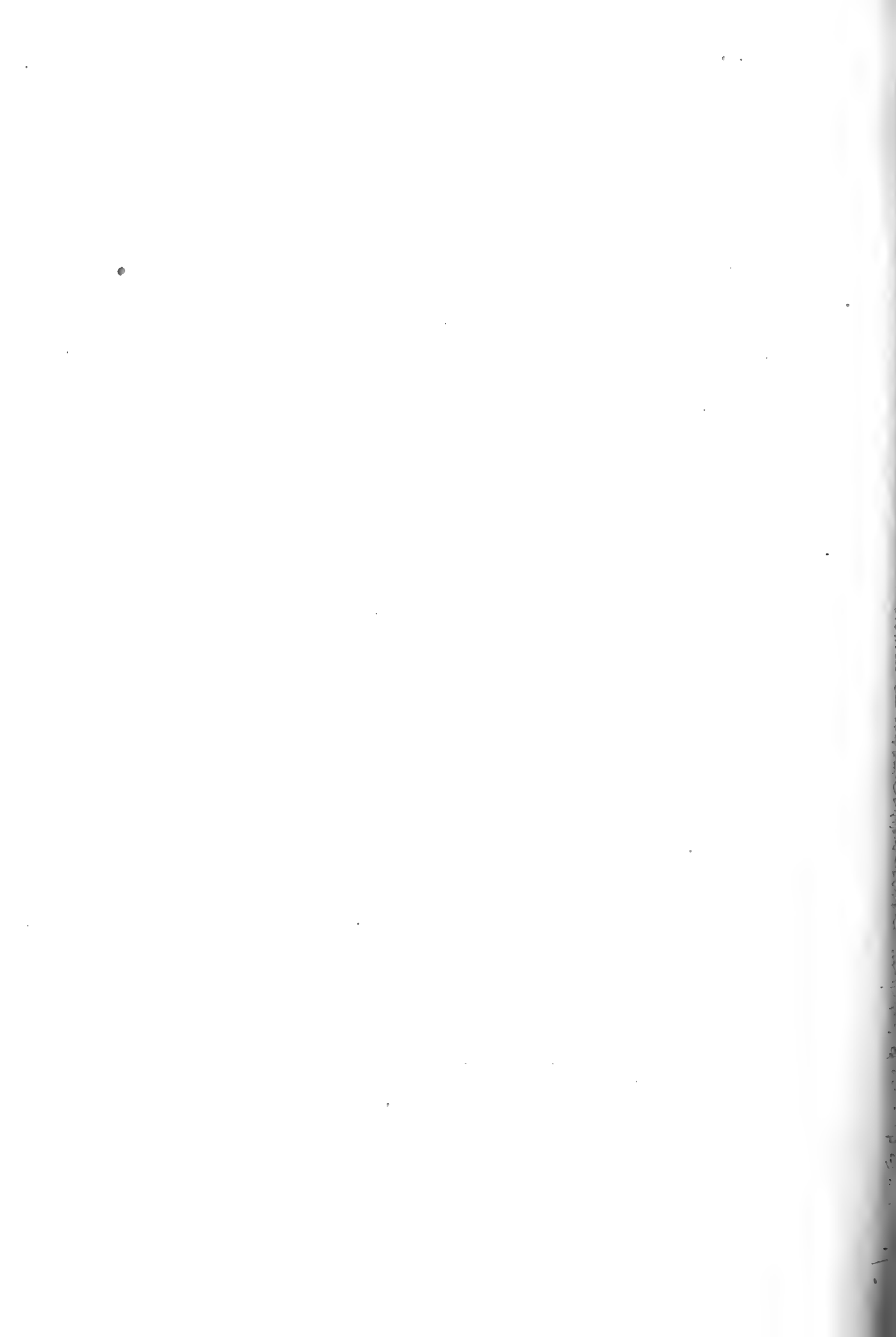
Мы не сомнѣваемся поэтому, что и Рафтеръ, также не принимающій во вниманіе въ своей книгѣ существованія многолѣтнихъ колебаній рѣчного стока и атмосферныхъ осадковъ, преувеличиваетъ роль лѣсовъ въ водоносности рѣкъ, подобно тому, какъ это дѣлали и другіе изслѣдователи, часто приписывавшіе существованію лѣсовъ такія вліянія<sup>2)</sup>, а ихъ уничтоженію такія послѣдствія, которыхъ тѣ вовсе не имѣли, и которыя объясняются совершенно другими причинами, остававшимися до недавняго времени неизвѣстными, а потому и не принимавшимися въ расчетъ.



1) Болѣе подробно вопросъ объ обмелѣніи рѣкъ разсматривается въ гл. I-й книги автора: «Режимъ рѣчного стока въ бассейнѣ верхняго Днѣпра» 1904 г. и въ брошюрѣ: «Вопросъ объ обмелѣніи рѣкъ въ его современномъ и прошломъ состояніи» 1900.

2) Нѣкоторыя соображенія по этому предмету приводятся въ статьѣ автора: «Къ вопросу о вліяніи лѣсовъ и болотъ на питаніе рѣкъ, въ связи съ новѣйшими данными по изслѣдованію рѣчного стока». «Земледѣніе», 1905. Кн. 3—4.







Цѣна: 20 к.; Prix: 50 Pf.

Продається у комиссіонерівъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и К. Л. Риннера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петербургѣ, Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Ключина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Киевѣ, Н. Ниммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Дейшицѣ, Люзанѣ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sörgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

PRESENTED

16 NOV. 1908

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**  
**MÉMOIRES**  
**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.**  
**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

Томъ XXII. № 7.

Volume XXII. № 7.

КЪ ГИСТОЛОГИИ  
КРОВЕНОСНОЙ СИСТЕМЫ  
У  
ARACHNOIDEA.

Витольда Гондзикевича.

(СЪ 1 ТАБЛ. И 7 РИС. ВЪ ТЕРСТЪ).

(Travaux du Laboratoire Zoologique et de la Station Biologique de Sébastopol près l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg).

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 25 октября 1906 года).



С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.



**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 7.**

**Volume XXII. № 7.**

КЪ ГИСТОЛОГИИ  
КРОВЕНОСНОЙ СИСТЕМЫ

У

**ARACHNOIDEA.**

Витольда Гондзикевича. — *Съ 1 табл. и 7 рис. въ текстъ.* (105)

(СЪ 1 ТАБЛ. И 7 РИС. ВЪ ТЕКСТЪ).

(Travaux du Laboratoire Zoologique et de la Station Biologique de Sébastopol près l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg).

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 25 октября 1906 года).



С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.



Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.  
С.-Петербургъ, Мартъ 1908.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ*.

## Къ гистологіи кровеносной системы у *Arachnoidea*.

Не имѣя, къ сожалѣнію, всего необходимаго для меня матерьяла, особенно относящагося къ различнымъ видамъ сольпугъ и скорпіоновъ, и не имѣя возможности достать его въ ближайшемъ будущемъ, я рѣшился опубликовать тѣ данныя, которыя я получилъ отъ изученія того матерьяла, который находился въ моемъ распоряженіи.

Не только гистологія, но даже анатомія кровеносной системы паукообразныхъ въ общемъ очень мало изучена. Мы находимъ только отдѣльныя гистологическія указанія, встрѣчаемыя при анатомическомъ описаніи нѣкоторыхъ отдѣльныхъ формъ. Специальныхъ работъ почти не существуетъ. Болѣе обширно, хотя все же сравнительно мало разработана эмбриологія кровеносной системы у этихъ животныхъ. Во многихъ работахъ объ эмбриологіи какого-либо изъ паукообразныхъ, мы находимъ, обыкновенно, нѣкоторыя указанія о развитіи кровеносной системы и специально о развитіи ихъ сердца. Я не буду перечислять здѣсь всей литературы, а ограничусь указаніями въ соответствующихъ мѣстахъ въ текстѣ на тѣ работы, которыя имѣютъ прямое отношеніе къ данной работѣ.

Что касается техники, то я выпрепарировывалъ сердце и артеріи изъ живаго, слегка анестезированнаго, или изъ консервированнаго животнаго, или же отдѣлялъ наружную оболочку (chitin) животнаго и разрѣзалъ сердце вмѣстѣ съ окружающими тканями. Для фиксированія обыкновенно употреблялъ: насыщенный водный растворъ сулемы съ ледяною уксусною кислотою, жидкость Woltereck'a, Flemming'a, а также смѣсь Kleinenberg'a.

Для окрашиванія препаратовъ, главнымъ образомъ, мнѣ служили слѣдующія краски: Haemalaun, Haematox. Apathy, Eisenhaematoxylin и Safranin; для подкрашиванія — обыкновенно краска Van Gieson'a, Orange, Eosin и Erythrosin. Orange и Eosin я употреблялъ, обыкновенно, слабо подкисленнымъ уксусною или соляною кислотою.

Мною изслѣдованы представители слѣдующихъ отдѣловъ:

1) **Scorpionidae.**

*Euscorpіus europеus.*

2) **Solifugidae.**

*Galeodes araneoides.*

3) **Araneidae.**

*Pholcus, Tegenaria, Tarantula.*

4) **Phalangidae.**

*Opilio.*

*Euscorpium* былъ мнѣ присланъ моимъ другомъ D-r Fernandez'омъ изъ южной Франціи и проф. Godlewski'мъ изъ Неаполя; остальные же формы были собраны мною въ Крыму. Также я получилъ много матерьяла по наукообразнымъ отъ проф. Rasiborski, который былъ собранъ имъ на Явѣ и предназначался для другихъ цѣлей; но, къ большому моему сожалѣнію, я не могъ воспользоваться этимъ послѣднимъ матерьяломъ, такъ какъ онъ былъ законсервированъ въ слабомъ спирту, а потому и не годился для гистологическихъ изслѣдованій. Всѣмъ упомянутымъ лицамъ я выражаю мою искреннюю благодарность за ихъ содѣйствіе въ собираніи матерьяла.

## Scorpionidae.

### *Euscorpium europeus.*

Для изученія стѣнокъ кровяносовой системы у *Euscorpium* я дѣлалъ продольные и поперечные разрѣзы черезъ выпрепарированное сердце, а также черезъ аорту и боковыя артеріи. Къ сожалѣнію я ограничился изученіемъ строенія сосудовъ только на разрѣзахъ и не имѣлъ возможности дѣлать у этого животнаго ни инъекцій, ни импрегнацій, такъ какъ въ моемъ распоряженіи находился заранѣе фиксированный, а не свѣжій матерьялъ.

*Строеніе стѣнокъ сердца.* Стѣнки сердца скорпіона состоятъ изъ трехъ другъ на другѣ лежащихъ слоевъ (рис. 1 въ текстѣ). Наружный слой состоитъ изъ продольныхъ волоконъ

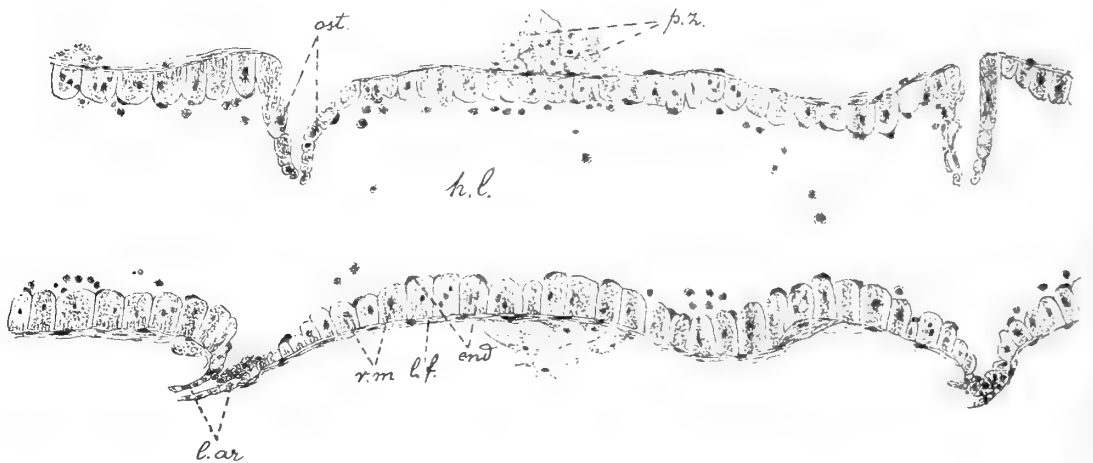


Рис. 1. Продольный разрѣзъ черезъ трубку сердца у *Euscorpium* (полусхем. рисун.) *l. f.* — продольныя волокна наружной оболочки; *p. z.* — перикардіальныя клетки; *r. m.* — волокна кольцевой мускулатуры; *end.* — ядра эндот. клетокъ; *ost.* — остьевыя клапаны; *l. ar.* — начала боковыхъ артерій; *h. l.* — полость сердца (увел. приб. 100 разъ).

(*l. f.*), а также частью изъ такъ называемыхъ перикардіальныхъ клетокъ (*p. z.*). Второй слой состоитъ изъ кольцеобразно расположенныхъ мускульныхъ волоконъ и составляетъ самую главную составную часть стѣнокъ сосудовъ (рис. 1, *r. m.*). Внутренній слой —

endocardium — состоитъ только изъ клѣтокъ эндотелія (на рисунокѣ представлены только разбросанныя продолговатыя ядра, принадлежащія этому слою).

Перейдемъ теперь къ болѣе точному описанію каждой изъ этихъ составныхъ частей стѣнокъ сердца.

Къ наружной части кольцевой мускулатуры плотно прилегаетъ *слой продольныхъ волоконъ* съ сильно удлинненными ядрами (рис. 1, *l. fk.*). При первомъ взглядѣ на эту ткань намъ кажется что мы имѣемъ дѣло съ слоемъ мускульныхъ волоконъ, однако при болѣе тщательномъ изученіи начинаетъ являться сомнѣніе. Полосатости мы никакой здѣсь не наблюдаемъ, такъ что ни въ коемъ случаѣ не могутъ быть поперечно-полосатыя мускульныя волокна. Примѣняя окраску van Gieson'a мы видимъ, что волокна эти красятся всегда въ красный цвѣтъ въ противоположность кольцевымъ мускульнымъ волокнамъ сердца и вообще мускульнымъ волокнамъ другихъ тканей. Уже одинъ этотъ фактъ хотя бы отчасти говоритъ противъ мускульнаго характера продольныхъ волоконъ. — Большинство ихъ безъ сомнѣнія принадлежитъ къ волокнамъ соединительной ткани.

Въ этомъ отношеніи я расхожусь со взглядами Ковалевскаго (1893), который говоритъ, какъ о фактѣ, о существованіи наружной продолговатой мускулатуры, въ которую и проникаютъ мускульныя фибриллы, расположенныя между «adipеuses» клѣтками. Въ работѣ Переяславцевой (1902) о эмбриональномъ развитіи скорпіона (*Antroctenus ornatus*) также говорится о существованіи продольной мускулатуры сердца.

Отрицая существованіе въ этомъ слое исключительно продольной мускулатуры и рассматривая ее какъ волокнистую соединительную ткань, я долженъ однако замѣтить, что между соединительно-тканными волокнами изрѣдка встрѣчаются и волокна другого рода, которыя можно рассматривать какъ гладкія мускульныя волокна. При окрашиваніи Eisenhaematoxylin'омъ эти послѣднія очень отчетливо выступаютъ среди окружающихъ ихъ соединительно-тканныхъ волоконъ причѣмъ замѣтенъ ихъ переходъ въ крыловидныя связи, прикрѣпляющія сердце къ стѣнкамъ тѣла. Vosseler (1891) говоритъ о постепенномъ превращеніи гладкихъ мускульныхъ волоконъ въ соединительно-тканныя волокна въ adventitia насѣкомыхъ, — возможно, что съ аналогичнымъ явленіемъ имѣемъ мы дѣло и въ данномъ случаѣ, только я считаю болѣе правильнымъ говорить о замѣщеніи гладкихъ мускульныхъ волоконъ, волокнистою соединительною тканью. Въ виду того, что эти продольныя мускульныя волокна не образуютъ плотнаго слоя, но расположены между основною массою соединительно-тканныхъ волоконъ, я ихъ и не выдѣляю въ отдѣльный слой, а причисляю къ наружной оболочкѣ сердца.

Кромѣ описаннаго слоя соединительно-тканныхъ и мускульныхъ продольныхъ волоконъ къ составнымъ частямъ наружной оболочки можно причислить и такъ называемыя перикардіальныя клѣтки и именно тѣ изъ нихъ, которыя плотно прилегаютъ къ волокнамъ и даже встрѣчается между ними. Эти перикардіальныя клѣтки можно на разрѣзахъ иногда принять за наружныя эндотеліальныя клѣтки (рис. 2 въ текстѣ), выстилающія наружную стѣнку сердца, какъ я это и принялъ ошибочно въ моей предварительной замѣткѣ (1905).

Это по большей части круглыя или овальныя кѣтки со свѣтлою плазмою и круглыми ядрами (рис. 2); обыкновенно въ этихъ кѣткахъ встрѣчается одно или два ядра. Иногда



Рис. 2.

эти кѣтки соединяются (анастомозируютъ) между собою. О функции ихъ Ковалевскій (1893) говоритъ: (стр. 39) «...les cellules péricardiales des insectes et des Scorpions possèdent la même réaction acide et absorbent de la même manière le carmin, ce qui indique la conformité de leur rôle physiologique». Пространства между перикардіальными кѣтками часто заполнены массами кровяныхъ тѣлецъ, которыя, судя по содержанию ихъ плазмы, въ сильной степени обладаютъ фагоцитарной функцией.

Перикардіальныя кѣтки, особенно тѣ, которыя немного отдалены отъ сердца имѣютъ болѣе или менѣе выдающіеся протоплазматическіе отростки, изъ которыхъ какъ будто «выходятъ» длинныя фибриллы (рис. 2), переходящія въ волокна крыловидныхъ связокъ сердца, а частью также и въ волокна наружной оболочки сердца. Ковалевскій (1893) объ этомъ ничего не говоритъ.

Тѣсную связь между перикардіальными кѣтками и фибриллами открылъ у наѣкомыхъ Vosseler, который (стр. 132) говоритъ: «Die Pericardialzellen können mit einer Haut umgeben sein, welche kontinuierlich in die Fibrillen übergeht...» и (стр. 130) «Diese Haut ist unzweifelhaft ein Produkt der Pericardialzelle». Подобная связь между перикардіальными кѣтками и фибриллами вполне возможна и у скорпіона.

*Кольцевая мускулатура.* Самую главную составную часть стѣнокъ сердца скорпіона является мускулатура, которая состоитъ изъ цѣлаго ряда, расположенныхъ другъ возлѣ друга массивныхъ поперечно-полосатыхъ волоконъ. Эти волокна въ поперечномъ разрѣзѣ,

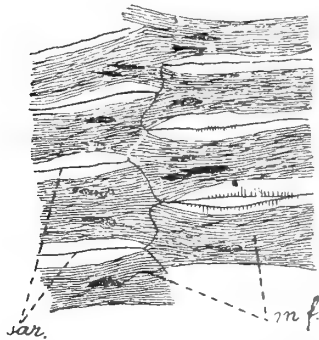


Рис. 3. Соединеніе волоконъ кольцевой мускулатуры сердца *Euscorpis* на спинной поверхности. *m f.* — пучки мускульныхъ фибриллей; *sar.* — сарколемма (увел. 400 разъ).

т. е. въ продольномъ разрѣзѣ черезъ стѣнку сердца, имѣютъ видъ почти четырехъугольныхъ массивныхъ скопленій мускульныхъ фибриллей (рис. 6). Мускулатура (кольцевая) состоитъ изъ двухъ рядовъ дугообразно расположенныхъ мускульныхъ волоконъ, лежащихъ съ лѣвой и правой стороны сердца и соединяющихся между собою на спинной и брюшной средней линіи. Соединеніе это происходитъ такимъ образомъ, что каждое волокно каждой стороны соединяется съ двумя волокнами противоположной стороны (рис. 3 въ текстѣ), причемъ на мѣстѣ соединенія часто ясно видна сарколемма въ видѣ сильно преломляющей лучи свѣта полоски. Мускульныя волокна имѣютъ сильно удлиненныя ядра, которыя лежатъ или въ центрѣ поперечнаго разрѣза волокна,

что встрѣчается довольно часто, или же болѣе периферически, но всегда въ сократимой субстанціи (рис. 3, 4, 5). Ядра эти содержатъ часто нѣсколько ядрышекъ, расположенныхъ одно за другимъ.

При сильныхъ увеличеніяхъ видно, что мускульныя фибриллы расположены въ довольно сильно гранулированной протоплазматической субстанціи. Каждое волокно, или точнѣе каждый пучекъ фибриллъ окруженъ со всѣхъ сторонъ сарколеммой (рис. 4, 6 *sar.*). Эта послѣдняя не всегда прилегаетъ плотно къ фибрилламъ, но часто отдѣлена отъ нихъ, такъ что между сарколеммой и фибриллами въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ волокна примыкаютъ другъ къ другу, находится какъ будто пустое пространство (рис. 3, 4, 5). Образование этого пустаго пространства, можетъ быть, можно здѣсь объяснить такимъ образомъ, что при растяженіи сократимыхъ волоконъ во время діастолы сердца, пучекъ этихъ послѣднихъ, дѣлаясь тоньше, отстаетъ въ этихъ мѣстахъ отъ сарколеммы; наоборотъ при сокращеніи ихъ онъ, дѣлаясь толще, плотно прилегаетъ къ ней. Тѣмъ не менѣе присутствіе пустаго пространства между сарколеммой и фибриллами возбуждаетъ сомнѣніе относительно того, что имѣемъ ли мы здѣсь дѣло съ настоящею сарколеммой, тѣмъ болѣе, что и при окрашиваніи препаратовъ по van Gieson'у она окрашивается, въ противоположность къ мускульнымъ фибрилламъ, въ красный цвѣтъ. Но съ другой стороны, если бы мы имѣли дѣло не съ сарколеммой, а съ оболочкою другого характера, то должны бы были находиться въ ней ядра, присутствія которыхъ однако я не обнаружилъ.

Въ мѣстахъ, гдѣ волокна примыкаютъ другъ къ другу, мы видимъ на поперечныхъ разрѣзахъ не отдѣльныя сарколеммы для каждаго волокна, но общую для двухъ сосѣднихъ волоконъ, отдѣльныя сарколеммы которыхъ сливаясь другъ съ другомъ, и образуютъ тонкую перегородку между ними. Эта послѣдняя особенно ясно видна въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ волокна находятся въ растянутомъ состояніи (рис. 6 *sar.*).

Иногда приходится встрѣчаться съ своеобразнымъ явленіемъ, которому подвергается мускульное волокно и на которое я смотрю какъ на искусственное образование (*Kunst-product*). Оно состоитъ въ томъ, что иногда на поперечныхъ разрѣзахъ черезъ волокна, пучокъ фибриллей выпадаетъ совершенно изъ своего мѣста и видна только сарколемма, окружающая въ видѣ оболочки пустое пространство, въ которомъ должны бы были находиться фибриллы.

Та часть сарколеммы каждаго мускульнаго волокна, которая обращена къ полости сердца, нѣсколько утолщена и, соединяясь съ такою же частью сарколеммы сосѣднихъ волоконъ, образуетъ однообразную гомогенную мембрану, которую и можно считать *Intim'ою*<sup>1)</sup> (рис. 6 *int.*). Часть сарколеммы, обращенная къ наружной оболочкѣ тоже немного утолщена и, благодаря своей способности преломлять лучи свѣта, хорошо видна, не смотря на то, что къ ней прилегаютъ очень плотно продольныя волокна наружной оболочки.

Особое вниманіе заслуживаетъ поперечная полосатость мускульныхъ волоконъ. На продольномъ разрѣзѣ черезъ волокно въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ въ разрѣзѣ встрѣчается часть

1) Ее можно хорошо видѣть при сильныхъ увеличеніяхъ.

волокна, расположенная болѣе или менѣе близко къ его поверхности, поперечная полосатость волокна очень хорошо замѣтна и проходитъ черезъ всю его ширину; наоборотъ, въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ разрѣзь прошелъ черезъ середину волокна, поперечная полосатость замѣтна уже очень слабо и при этомъ только на отдѣльныхъ фибриллахъ, не проходя черезъ всю ширину волокна. Вслѣдствіе этой очень слабо выраженной поперечной полосатости на фибриллахъ, расположенныхъ внутри волокна, получается такое впечатлѣніе, какъ будто мы имѣемъ дѣло только съ поверхностною полосатостью волокна, что особенно хорошо и видно на тангенціальныхъ разрѣзахъ черезъ сердце скорпіона (рис. 3). Эта паружная полосатость имѣетъ близкое отношеніе къ сарколеммѣ волокна. На многихъ тангенціальныхъ разрѣзахъ черезъ сердце видна тѣсная связь между полосатостью фибриллей и сарколеммы (рис. 3 *q. sar.*). Сама сарколемма, по крайней мѣрѣ внутренняя, образующая *Intim'u* и наружная, обращенная къ наружной оболочкѣ, образуетъ какъ бы мелкія волны (рис. 4 *w. s.*), причемъ отъ каждаго углубленія волны отходятъ полоски. Эти полоски, проходя черезъ всю ширину волокна и образуютъ вмѣстѣ съ слабо выраженною полосатостью фибриллей упомянутую наружную поперечную полосатость.

Доказательствомъ того, что сарколемма принимаетъ участіе въ образованіи наружной поперечной полосатости волокна служитъ еще тотъ фактъ, что на нѣкоторыхъ тангенціальныхъ разрѣзахъ, гдѣ сарколемма удалена отъ фибриллей, тѣмъ не менѣе, при примѣненіи нѣкоторыхъ анилиновыхъ красокъ напр. Orange, на ней очень рѣзко окрашиваются поперечныя полоски. Употребляя другія краски напр. желѣзный гематоксинъ, результаты получаемъ иные, такъ какъ при этомъ поперечныя полоски, въ противоположность полосатости мускульныхъ фибриллей, очень слабо или даже вовсе не окрашиваются, такъ что при примѣненіи подобнаго рода окрасокъ участіе сарколеммы въ образованіи наружной полосатости волокна доказать почти невозможно.

Между прочимъ слѣдуетъ замѣтить, что поперечная полосатость внутреннихъ фибриллей окрашивается отдѣльно на каждомъ изъ нихъ. Я не могъ точно прослѣдить расположенія темныхъ дисковъ самыхъ фибриллей по отношенію къ полоскамъ образованныхъ сарколеммою, но по всей вѣроятности эти послѣднія проходятъ по срединѣ поперечной полосатости фибриллей. Поэтому то на фибриллахъ, лежащихъ ближе къ поверхности волокна мы замѣчаемъ поперечную полосатость лучше, чѣмъ на расположенныхъ внутри его.

Я могъ точно опредѣлить участіе сарколеммы въ образованіи полосатости только на внутренней части ея (*Intima*) и наружной, обращенной къ наружной оболочкѣ; менѣе яснымъ однако осталось для меня принимаетъ ли участіе въ образованіи полосатости та часть сарколеммы, которая разграничиваетъ отдѣльныя волокна (т. е. та часть, которая на рис. 6 обозначена буквами *sar.*).

Такъ какъ, къ сожалѣнію, я не былъ въ состояніи достать всей литературы о поперечной полосатости у артроподъ, то я и не могу сравнить наблюденія всѣхъ предъиду-

сихъ авторовъ въ этомъ отношеніи съ моими собственными. Мои наблюденія о припятіи участія сарколеммы въ образованіи поперечной полосатости волокна совпадаютъ съ выводами Enderlein'a (1900), который тоже вполне признаетъ этотъ фактъ (у насѣкомыхъ). Онъ считаетъ даже «Kraussche Querscheibe», какъ образованіе сарколеммы, чего однако у скорпіона не наблюдается.

На основаніи того, что поперечная полосатость фибриллей (независима отъ таковой, образованной сарколеммою) здѣсь слабо замѣтна, совершенно не типична, а иногда даже и вовсе не замѣтна, то мускульныя волокна и можно разсматривать, по совершенно справедливому выраженію Vosseler'a (1891), какъ «atypisch oder unvollkommengestreifte Muskelfaser».

Кольцевая мускулатура сердца у нѣкоторыхъ экземпляровъ заслуживаетъ еще вниманія въ томъ отношеніи, что мы встрѣчаемъ здѣсь довольно странныя образованія, которыя, по всей вѣроятности, отчасти можно отнести къ искусственнымъ образованіямъ, а отчасти къ паталогическимъ явленіямъ. Иногда по срединѣ волокна среди сократимыхъ фибриллей образуются какъ бы трещины, занимающія иногда довольно большое пространство. Ядра волокна иногда лежатъ въ такихъ трещинахъ. Иногда эти трещины бываютъ совершенно пустыя, иногда же заполнены кровяною гранулою и даже изрѣдка встрѣчаются здѣсь и кровеносныя тѣльца.

Образованія другого рода заключаются въ томъ, что въ мускульныхъ волокнахъ между фибриллами и частью сарколеммы, обращенной къ полости сердца (рис. 7) образуется пространство, выполненное кровяною гранулою, а также иногда и кровяными тѣльцами въ состояніи распада (*m. w.*). У одного экземпляра я наблюдалъ такія образованія положительно во всѣхъ волокнахъ сердца. Возможно, что образованія перваго рода — искусственныя образованія, полученныя благодаря консервировкѣ; другія же образованія вѣроятнѣе всего представляютъ паталогическое явленіе, тѣмъ болѣе, что и клѣтки эндотелія въ этихъ случаяхъ тоже измѣнены — здѣсь онѣ лучше замѣтны и значительно больше нормальныхъ (рис. 7 *end. z.*).

*Эндокардъ.* Уже Newport (1843) замѣтилъ на внутренней поверхности сердца тонкую мембрану, черезъ которую просвѣчиваютъ фибриллы кольцевой мускулатуры. — Эта «мембрана» безъ сомнѣнія состоитъ изъ эндотеліальныхъ клѣтокъ, присутствіе которыхъ въ сердцѣ скорпіона не подлежитъ никакому сомнѣнію.

Ковалевскій и Шульгинъ (1886) признаютъ существованіе эндотелія въ сердцѣ скорпіона, который по ихъ мнѣнію образуется изъ мезодерма. A. Schneider (1892) дѣлалъ импрегнацію сосудовъ азотистымъ серебромъ и, благодаря этому методу, констатировалъ присутствіе эндотелія въ ихъ стѣнкахъ.

Эндокардъ состоитъ исключительно изъ очень тонкаго, не вездѣ замѣтнаго слоя эндотеліальныхъ клѣтокъ, и при этомъ тамъ, гдѣ онъ виденъ, развитъ неравномѣрно: въ однихъ мѣстахъ сильнѣе, въ другихъ очень слабо. Форма клѣтокъ продолговатая, приплюснутая и даже плоская; ихъ удлиненныя ядра, расположены по длинѣ сердца. Изрѣдка



можно замѣтить дѣленіе ядра, которое происходитъ простымъ амитотическимъ способомъ. Плазма, а также и оболочки клѣтокъ очень слабо или совершенно не окрашиваются, такъ что иногда получается впечатлѣніе, какъ будто только одни продолговатыя ядра «сидятъ» на Intim'ѣ (т. е. на утолщенной сарколеммѣ волоконъ кольцевой мускулатуры). Въ видѣ слабого окрашиванія плазмы и мембраны, границы клѣтокъ на разрѣзахъ почти нельзя отличить, и только изрѣдка на нѣкоторыхъ препаратахъ ихъ можно замѣтить (рис. 6 *end. z.*).

Напротивъ очень хорошо видны клѣтки эндотелія при паталогическихъ процессахъ, происходящихъ въ мускульныхъ волокнахъ (рис. 7 *end. z.*). Въ этихъ случаяхъ клѣтки эндотелія гораздо лучше развиты чѣмъ въ нормальномъ состояніи; плазма ихъ здѣсь не окрашивается, но мембрана очень хорошо видна.

Заслуживаетъ вниманія тотъ фактъ, что при обыкновенныхъ способахъ окрашиванія (Haematoxylin Böhm. и Delaf.) эндотелій сравнительно лучше виденъ, чѣмъ при примѣненіи другихъ красокъ (Eisenhaematoxylin, Safranin). По Van Gieson'у окрашиваются клѣтки эндотелія (также какъ и клѣтки кровяныхъ тѣлецъ) въ красный цвѣтъ.

На тангенціальныхъ разрѣзахъ черезъ внутреннюю часть сердца (рис. 5 *end.*) намъ кажется, какъ будто клѣтки эндотелія состоятъ изъ ряда продолговатыхъ волоконъ съ продольными ядрами. Это происходитъ съ одной стороны влѣдствіе того, что самыя эндотеліальныя клѣтки имѣютъ продолговатую форму, а съ другой — потому что онѣ плотно прилегаютъ къ утолщенной сарколеммѣ (Intim'ѣ), а эта послѣдняя, благодаря своему волнообразному расположенію и придаетъ эндотелію упомянутый выше видъ.

Повидимому эндотелій не имѣетъ ничего общаго съ кровяными тѣльцами. Его совершенно нельзя принять за «приставшія» къ стѣнкамъ сердца кровяныя тѣльца уже по одному тому, что удлиненная форма ядеръ эндотеліальныхъ клѣтокъ, а также и плазма ихъ совершенно отличаются отъ таковыхъ же у кровяныхъ клѣтокъ. Переходныхъ стадій между эндотеліемъ и кровяными тѣльцами я тоже не наблюдалъ. Этотъ фактъ указываетъ на то, что у скорпіона имѣемъ дѣло съ настоящимъ эндотеліемъ, а не съ псевдо-эндотеліемъ, какъ это встрѣчается у нѣкоторыхъ ракообразныхъ, напр. Gammarus'a (смотри мою работу 1904), а также у нѣкоторыхъ аранеидъ.

Присутствіе эндотелія въ сердцѣ скорпіона является однимъ изъ важныхъ отличій строенія его сердца отъ строенія сердца другихъ арахноидъ, у которыхъ эндотелій въ сердцѣ не наблюдается.

*Остія.* Остія сердца представляютъ собою щели, края которыхъ защищены очень длинными клапанами (рис. 1) свободно опускающимися внутрь полости сердца. Клапаны бывають иногда такъ хорошо развиты, что достигаютъ противоположной стѣнки сердца и оканчиваются вблизи начала боковыхъ артерій, придавая сердечной трубкѣ такой видъ какъ будто она раздѣлена на отдѣльныя камеры, какъ это и было ошибочно описано старыми авторами. На продольныхъ разрѣзахъ видно, что клапаны, состоятъ изъ продолженія кольцевого слоя мускульныхъ волоконъ сердца. Волокна наружной оболочки

сердца не принимаютъ совершенно участія въ ихъ образованіи; они, по описанію А. Schneider'a (1892) раздѣляютъ каждое остье на три наружныя отверстія.

*Строеніе стѣнокъ артерій.* По своему строенію стѣнки боковыхъ артерій и аорты почти одинаковы.

Стѣнки артерій состоятъ изъ наружныхъ продольныхъ волоконъ и кольцевой мускулатуры (рис. 8, 9). Что же касается существованія эндотелія, то этотъ вопросъ остался для меня неразрѣшеннымъ.

Наружный слой стѣнокъ артерій образуютъ продольныя волокна (рис. 8 *l. f.*) о которыхъ я могу сказать тоже самое, что и о таковыхъ же волокнахъ сердца. Это довольно массивный слой продольныхъ волоконъ съ удлиненными ядрами; по всей вѣроятности большинство волоконъ принадлежитъ здѣсь также соединительной ткани. Перикардіальныя клѣтки (особенно вокругъ аорты) встрѣчаются довольно часто.

Къ продольнымъ волокнамъ съ внутренней стороны примыкаетъ кольцевая мускулатура артерій (рис. 8 *r. m.*), которая по своему строенію значительно отличается отъ таковой же мускулатуры сердца. Она здѣсь сравнительно гораздо слабѣе развита, не образуетъ компактнаго слоя; сократимая субстанція волоконъ по всей окружности удалена отъ сарколеммы; та часть сарколеммы, которая отдѣляетъ отдѣльныя волокна, довольно часто совершенно отсутствуетъ; мускульныя кольцевыя волокна въ артеріяхъ совершенно гладкія.

Какъ это видно на продольныхъ разрѣзахъ черезъ сосуды, внутренняя поверхность артерій состоитъ какъ бы изъ продолговатыхъ волоконъ (рис. 8 *i. l. f.*) среди которыхъ очень рѣдко встрѣчаются ядра. Внутренняго эндотелія я не замѣтилъ, хотя и не утверждаю, что онъ не существуетъ, такъ какъ изучалъ этотъ вопросъ только на разрѣзахъ, тѣмъ болѣе что Schneider, применяя методъ импрегнаціи сосудомъ  $\text{AgNO}_3$  утверждаетъ присутствіе эндотелія въ ихъ стѣнкахъ. Быть можетъ, что упомянутыя мною «продольныя волокна» и имѣютъ какое-нибудь отношеніе къ эндотелію, но навѣрное этого опредѣлить я не могъ, — вѣроятнѣе это есть рѣзко выраженная продольная складчатость полученная въ моментъ суженія сосуда.

Артеріальные клапаны сердца (рис. 9 *ar. kl.*) состоятъ почти исключительно изъ мускулатуры, которая является здѣсь въ видѣ утолщеннаго, какъ бы набухшаго слоя. Эти клапаны, по крайней мѣрѣ боковыхъ артерій, образуются изъ кольцевой мускулатуры сердца.

*Кровяныя тѣльца* (рис. 5 *bl. k.*) представляютъ изъ себя круглыя клѣтки съ сильно гранулированной плазмой и небольшими круглыми ядрами, лежащими въ центрѣ тѣльца. Довольно часто наблюдаю я распадъ кровяныхъ тѣлецъ въ полости сердца. Продуктомъ распада является гранула, которая по своему виду не отличается отъ обыкновенной гранулы крови.

Кромѣ кровяныхъ тѣлецъ въ полости сердца довольно часто встрѣчаются клѣтки сильно окрашивающіяся нѣкоторыми красками (Safranin etc.), съ гомогенною плазмой и периферически лежащими ядрами (рис. 3 *par*). По своей величинѣ онѣ часто въ нѣсколько

разъ превосходятъ кровяныя тѣльца. Форма этихъ клѣтокъ разнообразна, но часто кругловата съ протоплазматическимъ отросткомъ. По первому впечатлѣнію можно ихъ принять за видоизмѣненныя кровяныя тѣльца, но при болѣе точномъ наблюденіи я пришелъ къ убѣжденію, что мы имѣемъ здѣсь дѣло съ совершенно чуждыми элементами. За это говорить я то, что клѣтки эти встрѣчаются не у всѣхъ животныхъ, хотя всетаки довольно часто. По всей вѣроятности мы имѣемъ здѣсь дѣло съ паразитическими простѣйшими.

## Solifugidae.

### *Galeodes araneoides.*

Сердце *Galeodes* представляетъ собою длинную тонкую трубку, лежащую сейчасъ же подъ питегументомъ на спинной сторонѣ тѣла. Если вскрыть слабо анестезированное животное, то можно замѣтить перистальтическое пульсированіе (*peristaltische contraction*) сердца. Стѣнки сердца не смотря на значительную величину животного чрезвычайно тонки и слабо развиты. Это обуславливается тѣмъ, что у этого животного замѣчательно хорошо развита система трахей, которая распространена по всему тѣлу. При подобнаго рода развитіи трахейной системы, какъ это уже указалъ Bernard (1896) сердце не имѣетъ большаго значенія. Оно также окружено плотно прилегающей къ нему сѣтью развѣтвленныхъ трахей.

Гистологически стѣнки сердца состоятъ изъ двухъ слоевъ: кольцеобразно расположенной мускулатуры (рис. 11 *r. m.*) и наружнаго слоя продольныхъ волоконъ (рис. 11 *l. f.*). Внутренняго слоя (эндокарда) не существуетъ, за него врядъ-ли можно принять тѣ немногія кровяныя тѣльца, которыя потерявъ свою первоначальную форму плотно примыкаютъ или даже приклеиваются къ мускулатурѣ сердца. Форма этихъ клѣтокъ обыкновенно болѣе или менѣе приплюснута, часто продолговатая (рис. 11<sup>a</sup>, 11<sup>b</sup> *e. bl.*). Въ нѣкоторыхъ мѣстахъ онѣ располагаются по нѣскольку въ рядъ и здѣсь производятъ впечатлѣнія эндотеліальныхъ клѣтокъ. Въ послѣднемъ случаѣ ихъ плазма часто отличается отъ плазмы кровяныхъ тѣлецъ: она совершенно прозрачна, границы клѣтокъ часто вовсе незамѣтны, такъ что кажется, какъ будто только одни ядра лежатъ на внутренней поверхности мускулатуры сердца (рис. 12 *e. bl.*). Но такъ какъ клѣтки эти выстилаютъ далеко не всю внутреннюю поверхность сердца, но расположены только мѣстами — въ одиночку, или самое большее, по нѣскольку въ рядъ, то ихъ и нельзя считать за отдѣльный составной слой сердца.

Морфологически однако эти клѣтки представляютъ сравнительно большой интересъ, такъ какъ, возможно, что онѣ являются переходящей стадіей отъ кровяныхъ тѣлецъ къ эндотеліальнымъ образованіямъ.

Мускулатура сердца у *Galeodes* состоитъ изъ слоя кольцеобразно пробѣгающихъ мускульныхъ волоконъ. Эти послѣднія состоятъ изъ пучка, или вѣрнѣе нѣсколькихъ мелкихъ

пучковъ сократимыхъ фибриллѣй, расположенныхъ въ саркоплазмѣ и окруженныхъ сарколеммою (рис. 11). Мускульныя ядра лежатъ въ центрѣ поперечнаго разрѣза волокна и имѣютъ очень удлиненную форму (рис. 13). Довольно часто центральная часть волокна, въ которой лежитъ ядро, заполнена только саркоплазмой, сократимыя же фибриллы занимаютъ его периферическую часть. Обыкновенно въ продолговатыхъ ядрахъ мускулатуры замѣчается рядъ довольно крупныхъ ядрышекъ, расположенныхъ одно за другимъ вдоль ядра, — и даже часто можно видѣть, что одно или нѣсколько ядрышекъ мускульнаго ядра отдѣлены ядерною оболочкою отъ сосѣднихъ (рис. 13).

Здѣсь мы имѣемъ дѣло, безъ сомнѣнія, съ дѣленіемъ ядра, тѣмъ болѣе, что во многихъ мускульныхъ волокнахъ находится, вмѣсто одного удлиненнаго ядра, цѣлый рядъ одинъ за другимъ лежащихъ маленькихъ овальныхъ или круглыхъ ядеръ. Прилагаемыя фигуры въ текстѣ (рис. 4) показываютъ хорошо эти отношенія.



Рис. 4. Ядра кольцевой мускулатуры въ сердцѣ *Galeodes*.

Мускульныя волокна этого слоя поперечно-полосаты. Полосатость здѣсь двоякаго происхожденія: одна образована сарколеммою, другая же — собственная полосатость фибриллей. Участіе сарколеммы въ образованіи поперечной полосатости внѣ всякаго сомнѣнія; эти отношенія здѣсь можно видѣть даже лучше, чѣмъ у скорпіона и особенно хорошо замѣтны на тангенціальныхъ продольныхъ разрѣзахъ черезъ волокна (рис. 13 *g. sar.*). Поперечную полосатость, образованную сарколеммою можно здѣсь видѣть почти на каждомъ срѣзѣ, благодаря очень тонкому слою мускулатуры у этого животнаго. Она проходитъ здѣсь (въ противоположность этимъ отношеніямъ у скорпіона) черезъ изотропные диски и потому ее можно сравнить съ «Krausesche Scheibe». Наоборотъ, собственная полосатость мускульныхъ фибриллей, которая тоже хорошо видна на тангенціальныхъ разрѣзахъ, не совпадаетъ (подобно тому, какъ это наблюдается у скорпіона) съ полосатостью, образованною сарколеммою, а лежитъ между полосками этой послѣдней (рис. 13).

Спеціальная «Intim'a» въ сердцѣ не существуетъ. Этою послѣднею здѣсь можно считать ту часть сарколеммы мускульныхъ волоконъ, которая ограничиваетъ полость сосуда. Сарколемма довольно сильно преломляетъ свѣтъ. Привожу выдержку о сердцѣ у этого животнаго изъ работы Bernard'a (стр. 365): «The heart itself is very delicate, and consists of but a single layer of striated muscles lined on the inner side by a fine refractive membrane». Эта «fine refractive membrane», конечно, не представляетъ собою какой-нибудь отдѣльной оболочки, — это просто, описанная мною выше, та часть сарколеммы отдѣльных мускульныхъ волоконъ сердца, которая ограничиваетъ полость этого сосуда.

Наружная оболочка сердца состоитъ изъ слоя продольныхъ волоконъ, а также отчасти изъ перекардіальныхъ клѣтокъ (рис. 10). Въ общемъ эти отношенія напоминаютъ выше описанныя у скорпіона.

Слой продольныхъ волоконъ тѣсно примыкаетъ къ кольцевой мускулатурѣ сердца. Онъ окрашивается краскою van Gieson'a, подобно тому, какъ и у скорпіона, въ красный

цвѣтъ, что и говоритъ противъ его мускульнаго характера. Вѣроятно и здѣсь мы имѣемъ дѣло отчасти съ гладкими мускульными волокнами, но въ главной своей массѣ они принадлежатъ къ волокнистой соединительной ткани. У Bernard'a (1896) о этихъ волокнахъ мы находимъ слѣдующее: «Outside the heart ventrally there is a single layer of nerve — fibres closely applied to it and running longitudinally». Не отрицая возможности существованія отдѣльныхъ нервныхъ фибриллей въ этомъ слоѣ, я не нахожу совершенно никакихъ оснований разсматривать его состоящимъ исключительно изъ нервныхъ фибриллей. Уже на основаніи сравненія съ другими наукообразными это является невозможнымъ, такъ какъ нигдѣ слой продольныхъ волоконъ не состоитъ исключительно изъ нервныхъ фибриллей.

Перикардіальныя клѣтки (рис. 11 *p. z.*), какъ и у скорпіона, находятся здѣсь въ большемъ количествѣ. Это безъ сомнѣнія тѣ клѣтки, которыя Bernard пашель около сердца и функція которыхъ осталась для него неизвѣстною. Ковалевскій (1889 на рус. яз.) приписываетъ имъ выдѣлительную функцію<sup>1)</sup>. Клѣтки эти имѣютъ одно или два ядра, плазма ихъ окрашивается очень слабо. Въ плазмѣ часто наблюдается нѣсколько, иногда и довольно много круглыхъ ядрышекъ, имѣющихъ большое сходство съ дегенерированными ядрами и окрашивающихся только плазматическою краскою. Иногда кажется, какъ будто въ перикардіальныя клѣтки включены клѣтки меньшаго размѣра, ядра которыхъ и есть эти только что упомянутыя слабо окрашивающіяся ядрышки. И здѣсь (какъ и у скорпіона) перикардіальныя клѣтки имѣютъ отростки, съ тою только разницею, что у *Galeodes* они не такъ хорошо видны. Между группами перикардіальныхъ клѣтокъ проходятъ одиночныя волокна, или даже ихъ пучки, которые незамѣтно переходятъ въ продольныя волокна наружной оболочки сердца.

Какъ я уже сказалъ раньше, къ сердцу *Galeodes* тѣсно прилегаютъ развѣтленные трахеи. Вѣтки ихъ не только прилегаютъ къ стѣнкамъ, но даже проникаютъ между продольными волокнами наружной оболочки сердца и развѣтляются между ними на самыя мельчайшія вѣточки. Ихъ очень хорошо можно наблюдать, если инъецировать животное растворомъ Мetylenblau; при этомъ мы видимъ на вырепарированномъ сердцѣ пробѣгающія въ различномъ направленіи, но преимущественно продольно, окрашенныя въ синій цвѣтъ мельчайшія трахеи, которыя на первый взглядъ можно принять за нервныя волокна, такъ какъ они до неузнаваемости напоминаютъ ихъ.

Кровяныя тѣльца у *Galeodes* довольно большаго размѣра, имѣютъ сравнительно хорошо окрашивающуюся протоплазму и богатое хроматиномъ ядро (рис. 14). Они встрѣчаются въ очень большомъ количествѣ въ щеляхъ между перикардіальными клѣтками. Кровяныя тѣльца обладаютъ въ высокой степени фагоцитарной функціей. Достаточно живому животному вспрыснуть немного раствора туши, чтобы уже черезъ незначительной

1) Правда Ковалевскій говоритъ о перикардіальныхъ клѣткахъ у фаланга (не называя его научнымъ латинскимъ названіемъ), но безъ сомнѣнія здѣсь идетъ рѣчь о *Galeodes*, такъ какъ въ Южной Россіи *Galeodes* и называютъ фалангомъ. Что здѣсь говорится о *Galeodes*, это уже видно изъ того, что въ той же работѣ онъ описываетъ отдѣльно перикардіальныя клѣтки у *Phalangidae*.

промежутокъ времени найти ее, поглощенною плазмой кровяныхъ тѣлецъ. При этомъ особенно много кровяныхъ тѣлецъ съ очень большимъ количествомъ туши мы находимъ въ щеляхъ между перикардіальными клѣтками, хотя и многія другія кровяныя тѣльца, даже въ полости сердца, тоже заключаютъ въ своей плазмѣ тушь.

Здѣсь я долженъ прибавить еще нѣсколько словъ относительно формы кровяныхъ тѣлецъ. Большинство изъ нихъ имѣетъ болѣе или менѣе кругловатый видъ. Одни содержатъ довольно мало плазмы, другія же, наоборотъ, значительно бѣльшихъ размѣровъ и съ бѣльшимъ количествомъ плазмы. Мы уже видѣли, что кровяныя тѣльца, похожія на эндотеліи имѣютъ продолговатую форму. Здѣсь среди кровяныхъ тѣлецъ встрѣчаются переходныя стадіи между обыкновенными круглыми кровяными тѣльцами и продолговатыми, которыя можно бы назвать эндотеліальными кровяными тѣльцами. Этотъ переходъ первыхъ во вторыя и показываетъ рис. 14, на которомъ мы видимъ пять кровяныхъ тѣлецъ съ постепенно увеличивающимся количествомъ протоплазмы. «Эндотеліальныя» кровяныя тѣльца обладаютъ наравнѣ съ другими кровяными тѣльцами фагоцитарной функціей.

### Araneidae.

Хотя строеніе сердца, изслѣдованнаго мною у трехъ различныхъ пауковъ и отличается въ нѣкоторыхъ подробностяхъ между собою, но все же основныя черты ихъ строенія одинаковы.

Въ общемъ сердце всѣхъ этихъ трехъ пауковъ состоитъ изъ двухъ слоевъ, а именно: изъ внутренняго слоя кольцевой мускулатуры и изъ внѣшняго слоя въ составъ котораго входятъ соединительно-тканныя и гладкія мускульныя волокна. Главною составною частью сердца является кольцевая мускулатура. Всѣ протоплазматическія внутреннія образования являются, какъ мы это увидимъ ниже, составною частью волоконъ этой мускулатуры. Специальныхъ эндотеліальныхъ образований здѣсь не встрѣчается; за нихъ врядъ ли можно принять только изрѣдка встрѣчающіяся плоскія продольныя клѣтки, плотно прилегающія къ сарколеммѣ кольцевыхъ мускульныхъ волоконъ. По происхожденію своему однако, эти клѣтки являются измѣнившими только свою первоначальную форму кровяными тѣльцами, подобно выше описаннымъ у *Galeodes*.

### Pholcus.

Наружная оболочка сердца (рис. 15 *l. f.*) этого животнаго состоитъ изъ слоя продольныхъ соединительно-тканныхъ и мускульныхъ волоконъ съ круглыми и овальными ядрами. Между отдѣльными фибриллами находится протоплазматическая субстанція, въ которой по большей части и лежатъ ядра волоконъ. При примѣненіи краски van Gieson'a этотъ слой окрашивается въ красный цвѣтъ, что и говоритъ за соединительно-тканный характеръ большинства этихъ волоконъ.

Кольцевая мускулатура *Pholcus* (также и другихъ аранеидъ) обладаетъ особыми образованиями, отличающими ее совершенно отъ таковой же мускулатуры другихъ артроподъ. Она состоитъ изъ отдѣльныхъ мускульныхъ волоконъ, которыя не составляютъ здѣсь однороднаго слоя кольцевой мускулатуры, какъ у *Scorpion'a*, *Galeodes*; она устроена такимъ образомъ, что внутренняя поверхность каждаго волокна (обращенная къ полости сердца) болѣе или менѣе отдѣлена отъ сосѣднихъ волоконъ и свободно выступаетъ далеко въ полость сердца (рис. 15 *m. w.*). Каждое волокно окружено со всѣхъ сторонъ сарколеммою (*sar.*). На внутренней поверхности сердца сарколемма каждаго волокна отдѣлена отъ пучка сократимыхъ фибриллей и часто отстаетъ отъ него довольно далеко. Между такою, сильно отодвинутою сарколеммою и пучкомъ сократимыхъ фибриллей находится протоплазматическая субстанція (*sarkoplasma?*), въ которой встрѣчаются ядра, вакуоли, кровяныя тѣльца, а также и продукты распада послѣднихъ въ видѣ грапули. Такія, какъ-бы разбухшія выдавшіяся части внутренней поверхности мускульныхъ волоконъ очень часто, особенно во время сокращенія сердца значительно увеличиваются и выступаютъ въ видѣ грушеобразнаго расширенія далеко въ полость сердца, при чемъ получается впечатлѣніе, какъ будто онѣ не составляютъ одного цѣлаго съ мускульными волокнами, а скорѣе «свѣдятъ» на послѣднихъ; на самомъ же дѣлѣ они, будучи окружены одною общею съ сократимыми фибриллами сарколеммою составляютъ нераздѣльную часть волокна (рис. 15). При своемъ основаніи (т. е. части, прилегающей къ продольнымъ волокнамъ) каждое волокно кольцевой мускулатуры прилегаетъ къ сосѣднимъ волокнамъ, при чемъ сарколемма каждаго изъ нихъ не только тѣсно примыкаетъ къ сосѣдней сарколеммѣ, но даже часто сливается съ нею. Отъ слоя продольныхъ наружныхъ волоконъ кольцевая мускулатура отдѣляется только сарколеммою послѣдней. На продольныхъ разрѣзахъ сердца очень хорошо видно эту сильно преломляющую лучи свѣта сарколемму въ видѣ тонкой полоски, которую морфологически ни въ коемъ случаѣ нельзя считать за отдѣльную мембрану. Ядра кольцевой мускулатуры имѣютъ удлиненную форму и находятся, какъ это хорошо можно видѣть на тагенціальныхъ разрѣзахъ черезъ волокно, или посрединѣ пучка сократимыхъ фибриллей, или же на ихъ периферіи.

Поперечная полосатость фибриллей кольцевой мускулатуры довольно слабо развита. Во многихъ мѣстахъ она совершенно незамѣтна; лучше же всего видна на фибриллахъ, расположенныхъ вблизи основанія волоконъ. Полосатость въ этихъ мѣстахъ состоитъ изъ широкаго темнаго диска, по обѣимъ сторонамъ котораго лежатъ изотропные диски, и изъ тонкихъ промежуточныхъ дисковъ. Эти послѣдніе непосредственно продолжаются отъ одной группы фибриллей въ другія, въ то время какъ темный широкій дискъ встрѣчается въ каждой группѣ фибриллей отдѣльно. На другихъ же фибриллахъ (т. е. на болѣе удаленныхъ отъ основанія волоконъ) видны только промежуточные диски. Участія сарколеммы въ образованіи полосатости кольцевыхъ мускульныхъ волоконъ я здѣсь не наблюдалъ.

*Стѣнки артерій и артеріальные клапаны.* Строепіе стѣнокъ какъ аорты, такъ и боковыхъ артерій очень просто. Внутренняя часть этихъ сосудовъ ограничена гомогенною,

довольно тонкою мембраною (Intima); къ ней примыкаетъ средній слой, состоящій изъ довольно сильно гранулированныхъ клѣтокъ съ овальными ядрами, и далѣе наружный соединительно-тканый слой (Adventitia). Мускульныхъ волоконъ я не нашель.

Боковые артеріальные клапаны сердца, а также и клапаны остій состоятъ изъ мускульныхъ волоконъ, которыя можно разсматривать какъ продолженіе кольцевой мускулатуры сердца. Клапаны остій у *Pholcus* построены по тому же самому образцу какъ и у скорпіона и также далеко проникаютъ въ глубь полости сердца.

*Кровяныя тѣльца.* Особое вниманіе заслуживаютъ кровяныя тѣльца у *Pholcus*. Мы встрѣчаемъ здѣсь очень разнообразныя по своей величинѣ и формѣ кровяныя тѣльца. У однихъ ядра лежатъ въ центрѣ клѣтки, у другихъ периферически; часто встрѣчаются кровяныя тѣльца съ двумя ядрами (рис. 5 въ текстѣ), иногда замѣчается дѣленіе ядра amitotическимъ путемъ. Плазма однихъ изъ нихъ вполне гомогенна, сильно окрашивается протоплазматическими красками; у другихъ она заключаетъ много крупной гранулы, которая окрашивается ядреными красками.

Нѣкоторыя изъ кровяныхъ тѣлецъ имѣютъ грушеобразную форму съ длиннымъ болѣе или менѣе тонкимъ протоплазматическимъ отросткомъ на одномъ концѣ (рис. 5 въ текстѣ). Такое разнообразіе кровяныхъ тѣлецъ можно наблюдать въ большемъ количествѣ въ полости сердца. Часто встрѣчаются переходныя стадіи между однѣми и другими разновидностями, которыя и доказываютъ, что мы имѣемъ здѣсь дѣло съ морфологически одинаковыми образованіями. Происхожденіе протоплазматическихъ выступовъ у многихъ кровяныхъ тѣлецъ можно объяснить отчасти слѣдующимъ образомъ: отдѣльныя кровяныя тѣльца или цѣлыя ихъ группы часто наблюдаются на продольныхъ разрѣзахъ сердца въ углубленіяхъ, между выдавшимися въ полость сердца отдѣльными волокнами кольцевой мускулатуры, и притомъ, когда сердце находится въ состояніи растяженія. Во время сокращенія сердца кровяныя тѣльца сдавливаются приближающимися другъ къ другу стѣнками волоконъ, которыя и вытѣсняютъ ихъ въ полость сердца. Благодаря тому, что сокращеніе сердца происходитъ быстро, многія, сравнительно большихъ размѣровъ кровяныя тѣльца, будучи сдавливаемы и одновременно выталкиваемы въ полость сердца, принимаютъ удлиненную форму съ болѣе или менѣе тонкимъ, въ видѣ отростка, выступомъ на одномъ концѣ.

Это объясненіе тѣмъ болѣе вѣроятно, что такія грушеобразныя кровяныя тѣльца встрѣчаются на разрѣзахъ (рис. 15 *bl. k. f.*), какъ разъ въ тѣхъ мѣстахъ, въ которыхъ волокна, благодаря сокращенію сердца придвинуты другъ къ другу; при этомъ выступы кровяныхъ тѣлецъ находятся еще между ними, или же все кровяное тѣльце имѣетъ такое положеніе какъ будто оно только что было вытѣснено этими волокнами.



Рис. 5. Разрѣзы черезъ кровяныя тѣльца *Pholcus* (увел. приб. 1000 разъ).



Плазма нѣкоторыхъ, особенно большихъ клѣтокъ гомогенна и сильно окрашивается плазматическими красками. Иногда случается видѣть такимъ образомъ окрашенную одну или нѣсколько клѣтокъ, окруженныхъ группою болѣе маленькихъ кровеносныхъ тѣлецъ. Эти крупныя гомогенныя клѣтки производятъ впечатлѣніе совершенно постороннихъ тѣлъ (напр. паразитовъ), не имѣющихъ ничего общаго съ кровяными тѣльцами. Однако въ послѣднее время мнѣ удалось найти рядъ переходныхъ стадій между этими клѣтками и обыкновенными кровяными тѣльцами. Постепенный переходъ состоитъ въ томъ, что, съ одной стороны, мы замѣчаемъ въ гомогенной плазмѣ нѣкоторыхъ изъ этихъ клѣтокъ постепенное увеличиваніе гранулы, и съ другой — меньшую способность ихъ окрашиваться плазматическими красками. Дальнѣйшей стадіей этого перехода являются кровяныя тѣльца съ большимъ количествомъ гранулы, окрашивающіяся ядерными красками. Между сравнительно маленькими кровяными тѣльцами и большими, заключающими крупныя зернышки (гранулы) наблюдается также переходная стадія, которая выражается въ томъ, что въ маленькихъ кровяныхъ тѣльцахъ замѣчается постепенное увеличеніе крупныхъ зеренъ и одновременное увеличеніе объема плазмы. Schimkewitsch (1888) о кровяныхъ тѣльцахъ у *Pholcus'a* говоритъ, что они имѣютъ такую же форму, какъ и кровяныя тѣльца *Epeira*, — т. е. одни изъ нихъ круглыя, другія амебодныя, причемъ содержимое послѣднихъ наполнено сильно преломляющей свѣтъ гранулей. О переходѣ однихъ клѣтокъ въ другія авторъ ничего не говоритъ.

Безъ сомнѣнія, кровяныя тѣльца въ высокой степени обладаютъ фагоцитарной способностью; постепенное увеличеніе ихъ объема и количества гранулы тѣсно связано съ этою функціей.

Кровяныя тѣльца обладаютъ способностью провѣивать внутрь мускульныхъ волоконъ и въ особенности въ плазматическія расширенія кольцевыхъ мускульныхъ волоконъ. Здѣсь мы можемъ иногда наблюдать распаденіе этихъ тѣлецъ, которое и происходитъ такимъ образомъ, что сначала распадается плазма, а потомъ ядра, причемъ, какъ результатъ этого распаденія является скопленіе гранулы въ этихъ мѣстахъ. Очень возможно, что упомянутыя выше расширенія волоконъ кольцевой мускулатуры отчасти обязаны своимъ возникновеніемъ этому распаду кровяныхъ тѣлецъ.

### **Tegenaria.**

Строеніе стѣнокъ сердца у *Tegenaria* въ общемъ отличается очень мало отъ вышеописаннаго у *Pholcus*. Конечно только стѣнки здѣсь значительно толще, солиднѣе, благодаря сравнительно большому размѣру этого животнаго.

Наружный слой сердца по своему строенію не отличается отъ такового же у *Pholcus'a*, только здѣсь онъ сравнительно сильнѣе развитъ. Волокна этого слоя показаны на рис. 18.

Между слоемъ продольныхъ волоконъ и кольцевой мускулатуры не встрѣчается никакой особой специальной оболочки (*Häutchen aus Längsfasern* по Franz'у). Здѣсь подобно

тому, какъ и у *Pholcus*, отчетливо видна только сильно преломляющая лучи свѣта мембрана, которая состоитъ изъ той части сарколеммы волоконъ кольцевой мускулатуры, которая прилегаетъ къ продольнымъ волокнамъ. Въ томъ, что эта «мембрана» дѣйствительно сарколемма кольцевой мускулатуры, можно легко убѣдиться при изученіи продольныхъ разрѣзовъ стѣнокъ сердца, предварительно импрегнированныхъ азотнокислымъ серебромъ (рис. 6 въ текстѣ).

Кольцевая мускулатура (рис. 16 *r. m.*) образована, какъ и у *Pholcus*, выдающимися въ полость сердца болѣе или менѣе отдаленными другъ отъ друга мускульными волокнами, которые только во время систолы сердца придвигаются другъ къ другу. У изслѣдованныхъ мною *Tegenaria* они значительно сильнѣе выступаютъ въ полость сердца, чѣмъ у описанной Franz'омъ *Tegenaria derhami*<sup>1)</sup>.

Сарколемма (16 *sar.*) на внутренней поверхности волоконъ (обращенной къ полости сердца) всегда отодвинута отъ пучка сократимыхъ фибриллей и такимъ образомъ каждое волокно какъ-бы

разбухаетъ подобно тому, какъ и у *Pholcus*, но только содержимое такой «разбухшей» части волокна отличается отъ вышеописаннаго у *Pholcus*. У *Tegenaria* въ этихъ расширеніяхъ замѣчаются отдѣльныя мускульныя фибриллы, которые, переплетаясь между собою, часто образуютъ цѣлую сѣть фибриллей (рис. 16, 17 *e. con. f.*). Здѣсь же можно наблюдать и распаденіе нѣкоторыхъ фибриллей, а какъ результатъ распада образованіе гранулы.

Кромѣ мускульныхъ фибриллей и гранулы, (образовавшейся вслѣдствіе распаденія нѣкоторыхъ фибриллей) въ протоплазматическихъ мускульныхъ расширеніяхъ встрѣчаются также, хотя и въ меньшемъ количествѣ чѣмъ у *Pholcus*, кровяныя тѣльца, которые тоже часто подвергаются распаду и со своей стороны образуютъ гранулу. Такимъ образомъ мы видимъ, что образованіе гранулы въ протоплазмѣ описанныхъ мускульныхъ утолщеній происходитъ отъ разложенія двухъ морфологически различныхъ элементовъ, а именно: мускульныхъ фибриллей и кровяныхъ тѣлецъ.

Я увѣренъ, что замѣченная уже Leydig'омъ (1855) внутренняя «Innenhaut», которая образуетъ «zahlreiche circuläre Vorsprünge», а также описанная Franz'омъ «Innenschicht» — есть ничто иное, какъ описанныя мною внутреннія (обращенныя къ полости сердца) разбухшія расширенія кольцевыхъ мускульныхъ волоконъ. Привожу выдержку изъ работы Franz'a (1904): «Auf den das Herzlumen treffenden Schnitten sieht man, dass den Muskelringen nach innen zu eine sich nicht färbende, Kerne enthaltende Schicht aufliegt. Zwischen ihr und der Muskelschicht scheint keine scharfe Grenze zu bestehen,

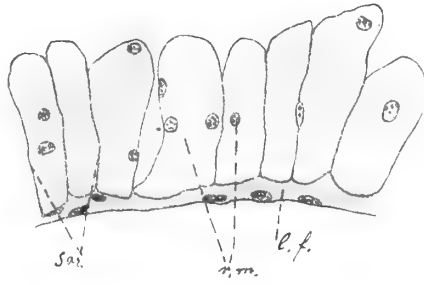


Рис. 6. Продольный разрѣзъ черезъ стѣнку сердца *Tegenaria* импрегнир. азот. серебромъ; *r. m.* — попер. разр. волокна кольц. мускулатуры; *l. f.* — прод. волокна; *sar.* — сарколемма (сердце во время систолы). — Увел. прибл. 500 разъ.

1) Къ сожалѣнію, по недостатку литературы, я не былъ въ состояніи точно опредѣлить вида изслѣдованной мною *Tegenaria*.

vielmehr scheinen beide bald ziemlich plötzlich, bald aber ganz allmählich und verwaschen ineinander überzugehen. Die «Innenschicht» ist in ihrem dem Herzlumen zugewandten Teil zellig ausgebildet. Fast immer liegt eine Zelle nur über einer Muskelfaser selten überspannt sie zwei benachbarte». И далѣ: «Möglihenfalls aber besteht auch die «Innenschicht» aus den zu den kontraktiven Fasern gehörigen Sarkteilen...». Последнее предположеніе автора совершенно правильно; оно вполне подтверждается моими наблюденіями, а именно: въ 1-хъ, присутствіемъ въ такой «Innenschicht» отдѣльныхъ мускульныхъ фибриллей и во 2-хъ, тѣмъ фактомъ, что этотъ-же «Innenschicht» окруженъ вмѣстѣ съ мускульными фибриллами общею сарколеммою. Съ мнѣніемъ же автора о возможности образованія изъ «Innenschicht» кровяныхъ тѣлецъ на основаніи его данныхъ, что: «zwischen den Bestandteilen der «Innenschicht» und den Blutzellen finden sich Übergänge», я никакъ не могу согласиться. На моихъ препаратахъ никакихъ переходныхъ стадій между этими элементами я не нашелъ. Здѣсь я долженъ замѣтить, что иногда на сагитальныхъ разрѣзахъ сердца захватываются расширенныя плазматическія утолщенія («Innenschicht» по Franz'y) принадлежащія къ выше лежащимъ мускульнымъ волокнамъ; эти расширения на данныхъ разрѣзахъ и имѣютъ видъ большихъ свѣтлыхъ клѣтокъ, — однако достаточно прослѣдить всю серію разрѣзовъ до конца, чтобы убѣдиться въ принадлежности такихъ «клѣтокъ» къ плазмѣ мускульныхъ волоконъ. Къ вопросамъ затронутымъ въ работѣ Franz'a вернемся еще ниже.

Что касается поперечной полосатости фибриллей кольцевой мускулатуры, то кромѣ темныхъ тонкихъ полосокъ, лежащихъ на равномъ другъ отъ друга разстояніи, я никакихъ другихъ темныхъ дисковъ не наблюдалъ. Объ участіи сарколеммы въ поперечной полосатости волоконъ не могу сказать ничего опредѣленнаго.

*Артеріи и артеріальные клапаны.* Стѣнки артерій (по крайпей мѣрѣ боковыхъ) по своему строенію не отличаются отъ таковыхъ-же, описанныхъ у *Pholcus*. Leydig утверждаетъ, что въ ихъ образованіи между прочемъ принимаютъ участіе продольныя и кольцевыя волокна, совершенно не упоминая о томъ какого происхожденія эти послѣднія — мускульнаго или соединительно-тканнаго. Я же, со своей стороны, ни продольныхъ, ни кольцевыхъ волоконъ въ стѣнкахъ боковыхъ артерій не наблюдалъ, но здѣсь рѣзко бросается въ глаза, довольно хорошо развитая, гомогенная «Intima», которую можно наблюдать въ стѣнкахъ артерій даже у самого ихъ выхода изъ сердца.

Боковые артеріальные клапаны (рис. 19), какъ и у *Pholcus*, образованы продолженіемъ кольцевой мускулатуры сердца.

*Кровяныя тѣльца* по своему строенію не представляютъ большаго интереса. Они гораздо меньше, чѣмъ описанныя у *Pholcus*, не имѣютъ никакихъ протоплазматическихъ выступовъ и не разнятся особенно по своему содержимому. Blanchard (1849) различаетъ два рода кровяныхъ клѣтокъ у *Tegearia*: большихъ и сравнительно маленькихъ, изъ которыхъ вторыя — это еще недоразвившіяся, находящіяся только въ періодъ своего образованія, кровяныя клѣтки.

### Tarantula.

Благодаря тому, что я дѣлалъ разрѣзы сердца *Tarantula* вмѣстѣ съ окружающими тканями, мнѣ удалось болѣе точно изслѣдовать его наружную оболочку и опредѣлять отношенія ея къ окружающимъ тканямъ. При очень сильныхъ увеличеніяхъ (Ziess Arch. 1,5  $\frac{m}{m}$  Comp. Okul. 4—6) на поперечныхъ разрѣзахъ черезъ сердце, ясно видно, что она образована изъ одного ряда, тѣсно прилегающихъ къ кольцевой мускулатурѣ продольныхъ волоконъ. Эти послѣдніе состоятъ изъ сильно преломляющей лучи свѣта темно-окрашенной (сократимой?) субстанции и окружающей ее гомогенной плазмы (рис. 22); ядра волоконъ всегда расположены въ этой плазмѣ. На продольныхъ разрѣзахъ видно, что волокна эти совершенно гладки и имѣютъ продолговатая ядра. Большинство продольныхъ волоконъ показываютъ уже сравнительно гораздо больше мускульный характеръ, чѣмъ это наблюдается у выше описанныхъ формъ, хотя все же окрашиваются по van Gieson'у въ красный цвѣтъ. Снаружи къ продольнымъ волокнамъ тѣсно примыкаютъ громадныя кѣтки жироваго тѣла (Fettgewebe). Въ тѣхъ же мѣстахъ, гдѣ онѣ не прилегаютъ плотно къ продольнымъ волокнамъ и между прочимъ тамъ, гдѣ находятся крыловидныя связки сердца, прикрѣпляющія его къ тѣлу животнаго, образуются пространства въ видѣ щелей, заполненныя соединительною тканью.

Что касается кольцевой мускулатуры, то въ зависимости отъ возраста животнаго мы находимъ на разрѣзахъ двѣ разныя картины. Въ общемъ хорошо видно, что волокна этой мускулатуры далеко выступаютъ въ полость сердца, причемъ, также какъ и у *Tegenaria* и *Pholcus*, сосѣднія волокна отдалены другъ отъ друга. У болѣе взрослыхъ, а также старыхъ *Tarantula*, кольцевая мускулатура лишена совершенно сарколеммы и мускульныя волокна состоятъ только изъ пучковъ сократимыхъ фибриллей (рис. 20), причемъ они будучи совершенно отдалены другъ отъ друга соединяются лишь у своего основанія (т. е. поверхности, примыкающей къ наружной оболочкѣ). Внутренняя поверхность кольцевой мускулатуры у взрослой *Tarantula* выстлана на всемъ своемъ протяженіи кровяными тѣльцами (рис. 20), которыя такимъ образомъ и образуютъ почти непрерывный слой, напоминающій эндотелій сердца.

У молодой *Tarantula* мы видимъ также, выдающіеся въ полость сердца пучки сократимыхъ фибриллей кольцевой мускулатуры, которая конечно здѣсь сравнительно гораздо слабѣе развита (рис. 21). Пучки мускульныхъ фибриллей окружены сарколеммою, которая въ однихъ мѣстахъ примыкаетъ къ нимъ, въ другихъ же отдалена отъ нихъ на довольно большое разстояніе (рис. 21 *sar.*). Во многихъ мѣстахъ можно видѣть, что такая удаленная сарколемма разрывается и находится на пути къ распаду. Иногда замѣчается полное отсутствіе сарколеммы и въ этомъ случаѣ получается картина похожая на описанную у взрослой *Tarantula*. Однимъ словомъ, мы находимъ здѣсь всѣ переходныя стадіи отъ волоконъ, окруженныхъ сарколеммою, къ волокнамъ вполне лишеннымъ ея.

По всей вѣроятности мускульныя кольцевыя волокна у этого животнаго въ молодости имѣютъ сарколемму и только со временемъ лишаются ея. Если это предположеніе вѣрно, то молодая форма, которую я изслѣдовалъ находится какъ-разъ въ періодѣ потери сарколеммы.

На границѣ между кольцевою мускулатурою и наружною оболочкою находится сильно преломляющая свѣтъ мембрана, которую можно считать за остатки сарколеммы волоконъ кольцевой мускулатуры.

Ядра этихъ волоконъ лежатъ въ серединѣ сократимыхъ фибриллей; они имѣютъ сильно удлиненную форму, иногда замѣчается, подобно тому, какъ и у *Galcodes*, вмѣсто одного удлиненнаго ядра нѣсколько круглыхъ или овальныхъ ядеръ, лежащихъ одно за другимъ — вѣроятно мы имѣемъ здѣсь дѣло съ дѣленіями ядра.

Что касается поперечной полосатости мускульныхъ фибриллей кольцевой мускулатуры, то здѣсь мы наблюдаемъ болѣе сложную картину, чѣмъ у вышеописанныхъ формъ, хотя и у этого животнаго она не можетъ быть отнесена къ категоріи типичной поперечной полосатости. Во время сокращенія мускула мы видимъ только чередующіеся темныя и свѣтлыя диски, а при болѣе сильномъ увеличеніи среди темныхъ дисковъ различаемъ еще болѣе темную полоску, расположенную по срединѣ темныхъ дисковъ. Однако въ мускулѣ, находящемся въ состояніи растяженія, картина усложняется и при очень сильномъ увеличеніи (Aposch. Zeiss 1,5<sup>m</sup>/<sub>m</sub>. Comp. Ok. 8—12) мы видимъ, что по обѣимъ сторонамъ темнаго диска находятся еще свѣтлыя тонкія полоски (изотропные диски), которыя въ свою очередь ограничены темными полосками. Такіе сложные темные диски волокна чередуются съ широкими свѣтлыми дисками.

И здѣсь, также, участія сарколеммы въ образованіи поперечной полосатости мускульныхъ фибриллей я не наблюдаю.

*Кровяныя тѣльца.* Довольно большое разнообразіе представляютъ у *Tarantula* кровяныя тѣльца (рис. 20). Ихъ можно подраздѣлить на двѣ группы: одни изъ небольшого размѣра, заключающія въ своей плазмѣ въ большинствѣ случаевъ много гранули, и другія большія съ прозрачною плазмой и большими вакуолями (рис. 20 *b. bl. k.*). Форма какъ тѣхъ, такъ и другихъ очень различна; мы встрѣчаемъ здѣсь продолговатыя, овальныя, круглыя, амебоядныя и т. п. кровяныя тѣльца. Какъ я уже упоминалъ, кровяныя тѣльца у взрослой *Tarantula* выстилаютъ почти всю внутреннюю поверхность кольцевой мускулатуры и, за отсутствіемъ сарколеммы, плотно прилегаютъ къ пучкамъ сократимыхъ фибриллей. У молодаго животнаго они тоже часто приближаются къ пучкамъ мускульныхъ фибриллей и особенно въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ сарколемма или распадается, или же совершенно уже не существуетъ, хотя здѣсь они, въ противоположность тому, какъ это наблюдается у взрослыхъ, не образуютъ непрерывнаго сплошнаго слоя.

Между различной формы кровяными тѣльцами, окружающими у взрослой *Tarantula* мускульныя фибриллы, можно наблюдать извѣстнаго рода постепенный переходъ. Чаше всего встрѣчаются здѣсь небольшія овальныя клѣтки съ большимъ количествомъ гранули.

Затѣмъ, у многихъ наблюдается увеличеніе объема плазмы при одновременномъ появленіи вакуоль. Дальнѣйшая переходная стадія состоитъ въ томъ, что вакуоли начинаютъ увеличиваться и такимъ образомъ вся клѣтка постепенно принимаетъ форму клѣтки, принадлежащей къ вышеупомянутой второй группѣ кровяныхъ тѣлецъ съ прозрачною плазмой и большими вакуолями. Во время появленія и увеличенія вакуоль, кровяныя тѣльца по большей части отдѣляются отъ стѣнокъ сердца и проникаютъ въ его полость. Небольшія кровяныя тѣльца иногда такъ плотно прилегаютъ къ пучкамъ сократимыхъ фибриллей, что границы между этими послѣдними и кровяными тѣльцами очень трудно отличить, и получается такое впечатлѣніе, что какъ будто такое тѣлце и особенно его ядро входятъ въ составъ мускульныхъ волоконъ. — Иногда кровяныя тѣльца могутъ проникать вглубь сократимыхъ фибриллей, гдѣ они, повидимому, и подвергаются распаду.

У всѣхъ трехъ описанныхъ арениеидъ, наружная оболочка сердца состоитъ изъ продольныхъ волоконъ соединительно-тканнаго и мускульнаго характера. Однако Schimke-witsch (1884) при описаніи *Epeira*, и Franz (1904) при описаніи нѣкоторыхъ другихъ арениеидъ упоминаютъ еще о наружной соединительно-тканной adventiti'i, которая существуетъ независимо отъ слоя продольныхъ волоконъ; послѣднія они разсматриваютъ исключительно какъ мускульный слой. Прежніе же авторы Pappenheim (1848) и Leydig (1855) ничего не говорятъ о наружной «adventiti'i», а только о наружныхъ продольныхъ волокнахъ. Соединительно-тканной adventiti'i, которая бы существовала независимо отъ слоя продольныхъ волоконъ, я также не наблюдалъ. Возможно однако, что у другихъ пауковъ въ слой наружныхъ продольныхъ волоконъ мускулатура развита сравнительно сильнѣе и такимъ образомъ наступаетъ въ немъ постепенная дифференціація на слой продольной мускулатуры и окружающей ее соединительно-тканной adventiti'i.

Что же касается самихъ наружныхъ продольныхъ волоконъ, то я не могу согласиться съ мнѣніемъ предъидущихъ авторовъ и не могу принимать ихъ за исключительно мускульные волокна — противъ этого говоритъ окраска по van Gieson'у. На основаніи изслѣдованныхъ мною формъ въ общемъ я прихожу къ заключенію, что слой продольныхъ волоконъ состоитъ какъ изъ соединительно-тканныхъ, такъ и изъ мускульныхъ волоконъ, причемъ очень возможенъ переходъ resp. замѣщеніе однихъ другими. Въ данномъ случаѣ мои наблюденія совпадаютъ со взглядами Vosseler'a, высказанные имъ относительно сердца у насѣкомыхъ.

Между слоемъ продольныхъ наружныхъ волоконъ и кольцевой мускулатурою я нашелъ только сильно преломляющую свѣтъ сарколемму волоконъ кольцевой мускулатуры, имѣющей иногда видъ отдѣльной оболочки. Такъ какъ Franz различаетъ между продольными волокнами и кольцевой мускулатурой «ein feines Häutchen aus Längsfasern», то у меня невольно возникаетъ вопросъ, не принялъ ли онъ упомянутой сарколеммы за описываемую имъ «Häutchen».

Что же касается строения кольцевой мускулатуры, или точнѣе внутренней ея поверхности (разбуханіе волоконъ, отдѣленіе сарколеммы отъ пучковъ мускульныхъ фибриллей и т. п.), то на эти явленія до сихъ поръ обращено очень мало вниманія. Leydig (1855) находитъ (у *Tegeparia*, *Lycosa*, *Epeira* и *Salticus*) гомогенную «Innenhaut»; Schimke-witsch (1884) говоритъ о томъ, что третьею составною частью въ стѣнкахъ сердца у *Epeir*'ы является «d'une tunique interne homogene», и только одинъ Franz обратилъ болѣе вниманія на эти, почти исключительно у арениидъ встрѣчаемыя, очень интересныя явленія. Однако упомянутый авторъ иначе объясняетъ ихъ, чѣмъ я.

Хотя я могу только до нѣкоторой степени возражать Franz'у, такъ какъ мною изслѣдованы другія формы, по все-же я думаю, что результаты, полученные мною отъ изученія моихъ формъ могутъ объяснить хоть до нѣкоторой степени ту интересную картину, которую Franz наблюдалъ у изслѣдованныхъ имъ арениидъ. Я викакъ не могу согласиться съ мнѣніемъ автора о возможности происхожденія кровяныхъ тѣлецъ изъ волоконъ кольцевой мускулатуры, наоборотъ, я часто наблюдалъ (особенно у *Tegeparia*, а также у *Pholcus*) прониканіе кровяныхъ тѣлецъ изъ полости сердца въ мускульныя кольцевыя волокна, въ которыхъ они и распадаются.

Очень возможно, что «stielförmige Fortsätze» кровяныхъ клѣтокъ, которые между прочимъ служатъ Franz'у однимъ изъ доказательствъ о происхожденія кровяныхъ тѣлецъ изъ кольцевой мускулатуры, образованы такимъ же образомъ, какъ и выступы кровяныхъ тѣлецъ, описанные мною у *Pholcus*'а, а именно: сдавливаніемъ и одновременнымъ выталкиваніемъ ихъ стѣнками мускульныхъ волоконъ въ полость сердца.

Противъ мнѣнія Franz'a говорить до нѣкоторой степени, между прочимъ, и тотъ фактъ, что ядра кольцевой мускулатуры у всѣхъ изслѣдованныхъ мною формъ имѣютъ удлинненную форму (если они иногда круглыя, то благодаря разрѣзу), въ то время какъ ядра кровяныхъ тѣлецъ круглыя. Мускульныя ядра можно довольно легко отличить отъ ядеръ кровяныхъ тѣлецъ, проникшихъ въ мускульныя волокна.

Къ сказанному еще слѣдуетъ прибавить, что Franz, описанную имъ «Innenschicht», разсматриваетъ какъ переходную стадію между кровяными тѣльцами и мускульными волокнами; по моимъ же наблюденіямъ она является только расширенною частью внутренней поверхности кольцевыхъ мускульныхъ волоконъ (см. выше *Tegeparia*), не имѣющихъ ничего общаго съ образованіемъ кровяныхъ тѣлецъ.

Возможно еще, что Franz былъ введенъ въ заблужденіе тѣмъ, что онъ не обратилъ вниманія на сарколемму, окружающую пучки фибриллей кольцевой мускулатуры и на возможность ея распада. — Распадъ сарколеммы, — это фактъ имѣющій большое значеніе въ томъ отношеніи, что кровяныя тѣльца могутъ плотно прилегать къ самымъ пучкамъ сократимыхъ фибриллей, даже проникать въ ихъ толщу и тамъ распадаться (впрочемъ послѣднее наблюдается и при наличности сарколеммы). — И такъ, если Franz не обратилъ вниманія на возможность распада сарколеммы, а также на распадъ кровяныхъ тѣлецъ въ толщѣ мышцы, то могло случиться, что прилеганіе кровяныхъ тѣлецъ къ пучкамъ

сократимыхъ волоконъ и прониканіе въ ихъ толщу кровяныхъ тѣлецъ было принято имъ за образованіе послѣднихъ.

Здѣсь я хочу еще замѣтить, что мое мнѣніе, высказанное въ предварительной замѣткѣ (1905) по поводу описанной Franz'омъ «Innenschicht», присутствіе которой я ставилъ въ связи съ остатками эмбриональнаго эндотелія сердца, оказалось неправильнымъ. При изученіи данныхъ аренеидъ я пришелъ къ заключенію, что мы имѣемъ здѣсь дѣло не съ эндотеліемъ, какъ я это думалъ раньше, а съ составными частями мускульныхъ волоконъ и кровяными тѣльцами. Настоящій эндотелій сердца у взрослыхъ животныхъ этихъ формъ совершенно отсутствуетъ. Относительно же того, находится ли онъ у эмбрионовъ этихъ животныхъ, вопросъ остается пока открытымъ.

## Phalangidae.

### Opilio.

Winkler (1886) разсматриваетъ сердце *Phalangidea* какъ редуцированный органъ. Не смотря на это у данной формы оно развито довольно хорошо, какъ по толщинѣ своихъ стѣнокъ, такъ и потому, что обѣ составныя части сердца (какъ и у аренеидъ), здѣсь существуютъ. Существенное отличіе наблюдается только въ ядрахъ кольцевой мускулатуры.

Составными частями стѣнокъ сердца является наружная оболочка, заключающая продольныя волокна, и внутренняя, состоящая изъ сильно развитаго слоя кольцевой мускулатуры. Intim'ы съ продольными ядрами, о которой говоритъ Tulk (по Winkler'у) если рѣчь идетъ о специальной внутренней Intim'ѣ сердца — я не наблюдалъ. За Intim'у сердца можно считать только сарколемму волоконъ кольцевой мускулатуры, но въ ней отсутствуютъ ядра.

Переходя къ описанію наружной оболочки сердца, я долженъ замѣтить, что очень часто она можетъ совершенно отдѣлиться отъ кольцевой мускулатуры (рис. 26 *e. f.*), причемъ такое отдѣленіе можетъ произойти очень равномерно по всей длинѣ сердца. Хотя это явленіе можно считать за «Kunstprodukt», тѣмъ не менѣе оно довольно характерно именно для *Opilio*, такъ какъ у другихъ арахноидъ я никогда такого равномернаго отдѣленія не наблюдалъ.

На поперечныхъ разрѣзахъ сердца видно (рис. 25 *l. f.*), что наружная оболочка по своему составу почти не отличается отъ таковой же у *Tarantula*. Мы видимъ также и у *Opilio*, что большинство волоконъ состоитъ изъ сильно преломляющей лучи свѣта сократимой субстанціи и окружающей ее плазмы съ ядрами. Продольные разрѣзы показываютъ, что волокна этой оболочки совершенно гладки. Ядра ихъ имѣютъ удлиненную форму. Въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ волокна наружной оболочки переходятъ въ крыловидныя связки сердца.



Возможность перехода сократимыхъ волоконъ въ соединительно-тканныя и здѣсь вполне допустима. Наружная оболочка у *Opilio* окрашивается по van Gieson'у въ красный цвѣтъ; однако, при сильномъ увеличеніи видно, что, среди такъ окрашенныхъ волоконъ, находятся также и волокна, окрашенные въ желтый цвѣтъ.

Кольцевая мускулатура состоитъ изъ хорошо развитыхъ поперечно-полосатыхъ мускульныхъ волоконъ. Сарколемма ихъ почти совершенно не отстаётъ отъ компактныхъ пучковъ сократимыхъ фибриллей и окружаетъ ихъ со всѣхъ сторонъ. Эти отношенія очень напоминаютъ описанныя у скорпиона. Большое отличіе отъ всѣхъ вышеописанныхъ формъ представляютъ ядра волоконъ кольцевой мускулатуры. На поперечномъ разрѣзѣ черезъ сердце (рис. 23) мы видимъ, симметрично расположенныя на правой и лѣвой сторонѣ сердца, по одному на каждой, большія ядра, которыя болѣе или менѣе сильно выдаются въ полость сердца. Обыкновенно ядра лежатъ на внутренней поверхности сократимыхъ фибриллей, иногда же встрѣчаются и по срединѣ ихъ. Кромѣ этихъ ядеръ, никакихъ другихъ въ волокнахъ не встрѣчается. Собственно каждое волокно (если разсматривать, что сердце составлено генетически изъ двухъ рядовъ дугообразныхъ волоконъ, которыя расположены совершенно симметрично по правой и лѣвой сторонѣ сердца и соединяются между собою на брюшной и спинной медіальной линіи) имѣетъ одно ядро. Если на разрѣзѣ попадаетъ иногда и по два ядра на одной сторонѣ, то это происходитъ, благодаря величинѣ ядеръ, причемъ ядро нижележащаго волокна захватывается разрѣзомъ. Это особенно часто наблюдается, если разрѣзъ произведенъ нѣсколько косо (рис. 24).

Что касается поперечной полосатости кольцевой мускулатуры, то мы видимъ здѣсь, подобно какъ и у описанныхъ выше формъ, не типично выраженную поперечную полосатость, «atypische Querstreifung». Она состоитъ изъ чередующихся свѣтлыхъ и темныхъ дисковъ. У этой формы хорошо наблюдается участіе сарколеммы въ образованіи поперечной полосатости (рис. 24, 26 *q. sar.*). Какъ видно на поперечныхъ разрѣзахъ (рис. 25 *w. s.*)

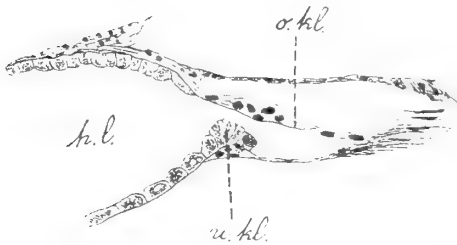


Рис. 7. Продольный разрѣзъ черезъ переднюю часть сердца и часть аорты у *Opilio*; *o. kl.* — верхній клапанъ; *u. kl.* — нижній клапанъ; *h. l.* — полость сердца. (Увел. приб. 150 разъ).

сарколемма образуетъ равномерныя волнообразныя складки, изъ каждаго углубленія которыхъ отходятъ тонкія полоски. Эти послѣднія или сливаются съ темною полоскою собственной поперечной полосатости фибриллей, или же проходятъ по срединѣ ихъ — также, какъ это наблюдалось и у скорпиона.

Эндотеліальныхъ образований въ сердцѣ *Opilio* я не наблюдалъ.

Клапаны (рис. 7 въ текстѣ), ограничивающіе полость сердца отъ аорты значительно разнятся отъ таковыхъ у другихъ арахноидъ. Верхній клапанъ (*o. kl.*) представляетъ собою длинную пластинку, далеко выступающую въ полость аорты, и дѣйствующую какъ

падающій клапанъ. Нижній клапанъ (*u. kl.*) состоитъ только изъ складкообразно приподнятой кольцевой мускулатуры сердца.

Въ *кровеныхъ тѣлцахъ* видны небольшія вакуоли, которыя иногда встрѣчаются по нѣскольку въ каждомъ тѣлцѣ. Онѣ часто расположены звѣздообразно вокругъ ядра, которое обыкновенно лежитъ въ центрѣ кровянаго тѣльца.

### Общiе выводы.

Стѣнки сердца у всѣхъ описанныхъ формъ состоятъ изъ сильно развитаго слоя кольцевой мускулатуры и окружающей его наружной, сравнительно тонкой оболочки, состоящей изъ продольныхъ волоконъ. У скорпиона различаемъ еще внутреннiй слой, состоящiй изъ эндотелиальныхъ клѣтокъ.

Наружная оболочка состоитъ изъ продольныхъ соединительно-тканныхъ и гладкихъ мускульныхъ волоконъ, причемъ возможно постепенное замѣщенiе мускульныхъ волоконъ соединительно-тканными. Ее нельзя разсматривать, какъ состоящую изъ отдѣльнаго слоя мускульныхъ волоконъ и окружающей его соединительно-тканной adventitia. — У *Euscorpious* и *Galeodes* часто прилегаютъ къ волокнамъ, или даже лежатъ между ними, перикардiальные клѣтки. Последнiя имѣютъ нерѣдко протоплазматическiе отростки, изъ которыхъ какъ бы выходятъ продольныя волокна (подобно, какъ это описано Vosseler'омъ у насѣкомыхъ).

Кольцевая мускулатура всегда является основнымъ слоемъ стѣнокъ сердца. Она состоитъ изъ двухъ рядовъ дугообразно расположенныхъ волоконъ, лежащихъ на правой и лѣвой сторонѣ сердца и соединяющихся между собою въ медиальной линiи на брюшной и спинной поверхности сердца (*Euscorpious*). Удлиненныя ядра этихъ волоконъ часто расположены почти въ центрѣ поперечнаго разрѣза волокна (*Euscorpious*, *Galeodes*); они способны дѣлиться, причемъ возникшiя отъ дѣленiя ядра располагаются въ длину волокна. У *Opilio* въ каждомъ волокнѣ видно одно большое ядро. Этотъ послѣднiй фактъ въ особенности говоритъ въ пользу мнѣнiя A. Lang'a (1903) (высказаннаго имъ въ 59 тезѣ о филогенетическомъ началѣ и морфологическомъ значенiи главныхъ составныхъ частей кровеносной системы), что сердце у Arachnoidea состоитъ также, какъ это принимаетъ Bergh (1902) для другихъ членистоногихъ, «aus zwei symmetrischen Reihen von halbringsförmigen oder hufeisenförmigen Zellen, welche in den dorsalen und ventralen Linien miteinander verlötet sind». — Мускульныя волокна окружены сарколеммою (исключенiе составляетъ *Tarantula*, у которой она существуетъ только у молодыхъ животныхъ), которая на наружной сторонѣ волоконъ образуетъ сильно преломляющую лучи свѣта мембрану, а на внутренней (*Galeodes*, *Euscorpious* и *Opilio*) образуетъ оболочку, которую можно считать, какъ это дѣлаетъ Bergh для Insekta и Myriapoda, гомогенной «intim'ою».

Спеціальныя образования, встрѣчающіяся всегда у аранеидъ между пучками фибриллей и сарколеммою на внутренней поверхности кольцевой мускулатуры, образованы частью изъ распада мускульныхъ фибриллей, частью же изъ проникшихъ сюда и распавшихся кровяныхъ тѣлецъ. Ихъ можно сравнить съ описанными выше патологическими образованиями у *Euscorpius*, хотя у аранеидъ они, по всей вѣроятности, представляютъ нормальное явленіе и находятся въ связи съ какою-нибудь загадочною физиологическою функціей у этихъ животныхъ.

Эти образования очень напоминаютъ утолщенія въ саркоплазмѣ мускульныхъ волоконъ сердца, происшедшихъ отъ распада кровяныхъ тѣлецъ, которыя я описалъ у *Malacostraca* (особенно у *Nebalia*) въ своей прежней работѣ (1904).

Поперечная полосатость кольцевой мускулатуры, хотя представляетъ собою довольно большое разнообразіе, но ни въ одномъ случаѣ не наблюдается здѣсь всѣхъ полосъ, характерныхъ для поперечной полосатости артроподъ, а потому я причисляю ее къ нетипичной (*atypische*) поперечной полосатости Vosseler'a. Сарколемма, безъ сомнѣнія, принимаетъ участіе въ образованіи поперечной полосатости; особенно ясно это выражено у *Galeodes*, гдѣ она образуетъ равнобѣрно расположенныя полоски, которыя нельзя считать за «*falsche Querstreifung*» какъ это дѣлаетъ Vosseler у насѣкомыхъ, а скорѣе можно принять, подобно Enderlein'у (1900), за полосатость, существующую независимо отъ фибриллей.

Внутренняя поверхность сердца только у скорпіона выстлана слоемъ эндотеліальныхъ клѣтокъ, которыя плотно прилегаютъ къ утолщенной сарколеммѣ (*intim'ѣ*); у всѣхъ же другихъ она ограничена сарколеммою кольцевой мускулатуры. Такъ какъ у нѣкоторыхъ формъ мы встрѣчаемъ плоскія продолговатыя кровяныя тѣльца, тѣсно прилегающія къ внутренней поверхности кольцевой мускулатуры (*Galeodes*, *Tegenaria*, *Tarantula*), то является предположеніе, не происходитъ-ли эндотелій сердца скорпіона изъ подобныхъ кровяныхъ тѣлецъ? Хотя у изслѣдованной мною формы я не нашелъ никакого отношенія между эндотеліемъ сердца и кровяными тѣльцами, тѣмъ не менѣе не исключается возможность, что такое превращеніе кровяныхъ тѣлецъ въ эндотелій сердца могло произойти во время эмбриональнаго развитія животнаго.

Однако можно высказать и другое предположеніе, а именно: если признать, что отсутствіе эндотелія въ сердцѣ (у *Arachnoidea*) есть вторичное явленіе, то присутствіе эндотелія въ сердцѣ скорпіона указывало бы на болѣе филогенетически-примитивный характеръ строенія его сердца среди всѣхъ другихъ *Arachnoidea*. Такое мнѣніе, рассматривающее отсутствіе эндотелія въ сердцѣ какъ вторичное явленіе, а самый эндотелій сердца — какъ первобытную составную часть кровеносной системы у цѣлаго ряда животныхъ, мы находимъ въ новѣйшихъ работахъ — Fernandez (1904), Vejdowski (1905) и Marcinowski (1906).

### Литература.

1902. Bergh. Beiträge zur vergleichenden Histologie III. Über die Gefässwandung bei Artropoden. Anatom. Hefte Bd. XIX, Heft II.
1849. Blanchard. Note sur le sang des Arachnides. Ann. des Sc. nat. Zoologie. 3 série, t. XII.
1896. Bernard. The Comparative Morphology of the Galeodidae. Trans. Linn. Soc. London. Vol. 6.
1900. Enderlein. Beitrag zur Kenntniss des Baues der quergestreiften Muskeln bei den Insekten. Arch. f. micros. Anatomie 55. Bd.
1904. Franz. Über die Struktur des Herzens und die Entstehung der Blutzellen bei Spinnen Zoolog. Anzeiger XXVII. Bd.
1904. Fernandez. Zur mikroskop. Anatomie des Blutgefässsystems der Tunikaten. Nebst Bemerkungen zur Phylogense des Blutgefässsystems im allgemeinen. Jenaische Zeitschrift für Naturw. XXXIX Bd. N. F. XXXII Bd.
1904. Gądzikiewicz. Über den feineren Bau des Herzens bei Malakostraken. Jenaische Zeitsch. für Natur. XXXIX Bd. N. F. XXXII Bd.
1905. — Zur Phylogenie des Blutgefässsystems bei Arthropoden. Zoolog. Anzeiger XXIX Bd.
1889. Ковалевскій. О выдѣлительныхъ органахъ нѣкоторыхъ насѣкомыхъ, пауковъ и многоножекъ. Записки Новоросс. Общ. Естествоисп. XIV.
1903. Kowalewsky. Sur les organes excréteurs des Artropodes terrestres. Congr. inter. de Zoologie à Moscou.
1886. Kowalewsky & Schulgin. Zur Entwicklungsgesch. des Scorpions (Androctonus ornatus) Biolog. Centralblatt. VI Bd.
1903. Lang. Beiträge zur einer Trophocoeltheorie. Jenaische Zeitsch. für Naturwissensch. XXXVIII Bd. N. F. XXXI Bd.
1855. Leydig. Zum feineren Bau der Arthropoden. Müller's Archiv für Anatomie und Physiologie.
1903. Loman. Vergleich.-anatom. Untersuchungen an chilenischen und anderen Opilioniden. Zool. Jahrbüch. Suppl. 6 Bd. 3.
1906. Marcinowski. Zur Entstehung der Gefässendothelien und des Blutes bei Amphibien. Jenaische Zeitschr. für Naturwiss. XLI Bd. N. F. XXXIV.

1843. Newport. On the structure, relations and development of the nervous and circulatory systems etc. in Myriapoda and macrourous Arachnida. Philos. Transact. I.
1848. Pappenheim. Sur le coeur des Araignées. Comptes-rendue de l'Acad. des Sciens, t. XXVII.
1902. Переяславцева. Къ исторiя развитiя скорпиона *Androctonus ornatus*. Отзвъвъ въ днев. зоолог. отдѣл. любит. естест. и антроп., т. III, № 4.
1884. Schimkewitsch. Étude sur l'anatomie de l'Epeire. Ann. des Sciens natur. 6 serie, t. XVII.
1906. — Über die Entwicklung von *Thelyphonus caudatus*, verglichen mit derjenigen einiger anderer Arachniden. Zeit. f. wiss. Zoologie. 81 Bd.
1892. Schneider, A. Mélanges arachnologiques. Tablettes Z. Poitiers. Tome 2. (Рефератъ въ «Zoolog. Jahresbericht». Neapol 1892).
1843. Tulk. Upon the Anatomy of *Phalangium Opilio*. Annal of Nat. Hist. Ser. I, t. XII (по Winkler'y (1886)).
1905. Vejdovsky. Zur Haemocoeltheorie. Zeit. f. wiss. Zoologie. 82 Bd.
1891. Vosseler. Untersuchungen über glatte und unvollkommen quergeschtreifte Muskeln der Arthropoden. — Tübingen.
1886. Winkler. Das Herz der Acarinen nebst vergleichenden Bemerkungen über das Herz der Phalangiiden und Chernetiden. Arbeiten Zoolog. Inst. Wien. Bd. 7. Heft. 1.
-

## Объясненіе рисунковъ.

- ar. kl.* — артеріальные клапаны.  
*art.* — стѣнки боковыхъ артерій.  
*b. bl. k.* — большія кровяныя тѣльца (съ вакуолями).  
*bl. k.* — кровяныя тѣльца.  
*bl. k. f.* — отростки кровяныхъ тѣлецъ.  
*con. f.* — пучки сократимыхъ фибриллей.  
*e. bl.* — плоскія, продолговатыя кровяныя тѣльца.  
*e. con. f.* — отдѣльныя сократимыя фибриллы.  
*end. k.* — ядра эндотеліальныхъ клѣтокъ.  
*end. z.* — эндотеліальныя клѣтки.  
*i. l. f.* — внутреннія продольныя волокна.  
*int.* — *intima* (образованная утолщеною сарколеммою кольц. мускулатуры).  
*l. f.* — слой наружныхъ продольныхъ волоконъ.  
*l. f. k.* — ядра продольныхъ волоконъ.  
*m. v.* — внутреннія расширенныя (разбухшія) части волоконъ кольц. мускулатуры.  
*par.* — паразиты?  
*pr. f.* — протоплазматическіе отростки перикардіальныхъ клѣтокъ.  
*p. z.* — перикардіальныя клѣтки.  
*p. z. k.* — ядра перикардіальныхъ клѣтокъ.  
*q. sar.* — поперечная полосатость, образованная сарколеммою.  
*sar.* — сарколемма волоконъ кольцевой мускулатуры.  
*s. pl.* — саркоплазма.  
*v.* — вакуоли.  
*v. m. k.* — ядра волоконъ кольцевой мускулатуры.  
*w. s.* — волнообразно-расположенная сарколемма.  
*z. bl.* — распадающіяся кровяныя тѣльца.

---

(Всѣ рисунки дѣланы при помощи рисовальной камеры «Abbe»).

---

Фиг. 1. **Euscorpium**. Часть продольныхъ волоконъ наружной оболочки. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 2. — Перикардiальные клѣтки съ отростками. — Naemalaun. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 3. — Продольный (сагитальный) разрѣзь черезъ сердце. — Naemalaun, van Gieson. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 4. — Поперечный разрѣзь черезъ часть стѣнки сердца. — Safranin, Anilinblau. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 5. — Продольный (почти тангенциальный) разрѣзь черезъ стѣнку сердца. — Boraxcarmin, Picrin. — Aroch. Zeiss  $1,5 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 4.

Фиг. 6. — Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца. — Safranin. — Aroch. Zeiss  $2 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 7. — Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца; волокна кольцевой мускулатуры имѣють на внутренней сторонѣ плазматическіе расширения (патол. явл.?) — Желѣз. Haematoxylin, Erythrozin. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 8. — Продольный разрѣзь черезъ aorta abdominalis. — Naemalaun. — Aroch. Zeiss  $1,5 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 4.

Фиг. 9. — Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца на мѣстѣ начала боковой артерii. — Haematoxylin, van Gieson. — Aroch. Zeiss  $16 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 10. **Galeodes**. Продольный разрѣзь черезъ наружную оболочку сердца. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 11. — а) Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца. б) Такой-же разрѣзь на внутренней сторонѣ стѣнки сердца, причемъ видно продолговатое, плоское кровяное тѣльце. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 12. — Разрѣзь черезъ стѣнку сердца. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 13. — Разрѣзь черезъ волокна кольцевой мускулатуры. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $1,5 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 14. — Кровяныя тѣльца различной формы. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $1,5 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 15. **Pholcus**. Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца. — Haematoxylin Arathy, van Gieson. — Aroch. Zeiss.  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 16. **Tegenaria**. Продольный разрѣзь черезъ сердце. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $16 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 17. — Поперечный (немного косою) разрѣзь черезъ отдѣльное волокно кольцевой мускулатуры. — Naemalaun, van Gieson. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 4.

Фиг. 18. — Продольныя волокна наружной оболочки. — Naemalaun, Orange. — Aroch. Zeiss  $4 \frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 19. — Разрѣзь черезъ начало боковой артеріи, на мѣстѣ ея выхода изъ сердца. — Haemalaun, van Gieson. — Arch. Zeiss 16  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 20. **Tarantula**. Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца взрослого животнаго. — Haemalaun, Orange. — Arch. Zeiss 16  $\frac{m}{m}$ . Oc. 8.

Фиг. 21. — Продольный разрѣзь черезъ стѣнку сердца молодого животнаго. — Haematoxylin Apathy, van Gieson. — Arch. Zeiss 4  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 22. — Поперечный разрѣзь черезъ волокна наружной оболочки. — Haemalaun, van Gieson. — Arch. Zeiss 1,5  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.

Фиг. 23. **Opilio**. Поперечный разрѣзь черезъ сердце. — Haemalaun, Orange. — Arch. Zeiss 4  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 4.

Фиг. 24. — Поперечный (немного косою) разрѣзь черезъ часть стѣнки сердца. — Haemalaun, Orange. — Arch. Zeiss 4  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 25. — Поперечный разрѣзь черезъ часть сердца. — Haemalaun, van Gieson. — Arch. Zeiss 4  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 8.

Фиг. 26. — Продольный разрѣзь черезъ часть сердца. — Haemalaun, Orange. — Arch. Zeiss 4  $\frac{m}{m}$ . Comp. Oc. 6.



PRESENTED

16 NOV. 1908



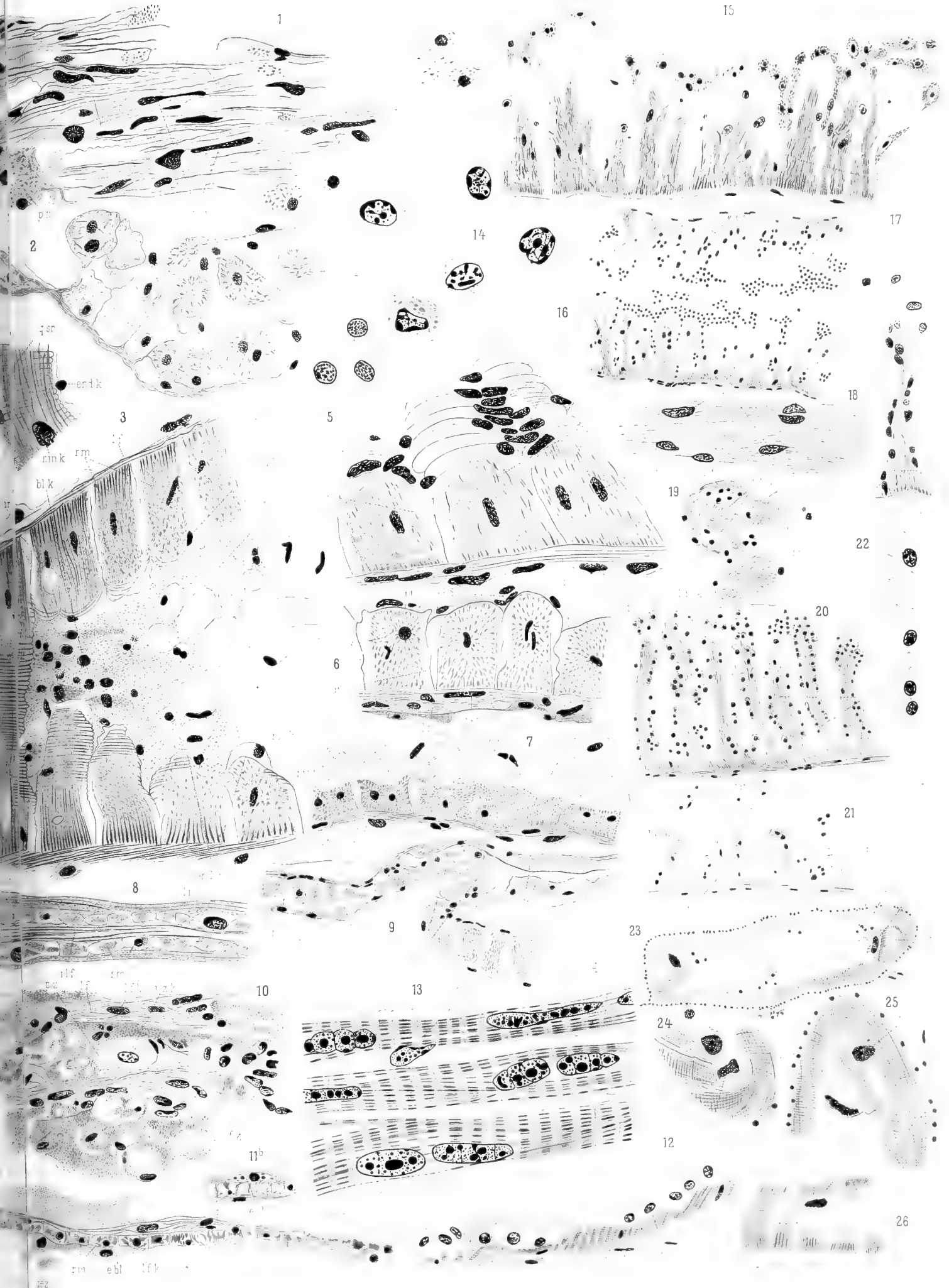


## ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

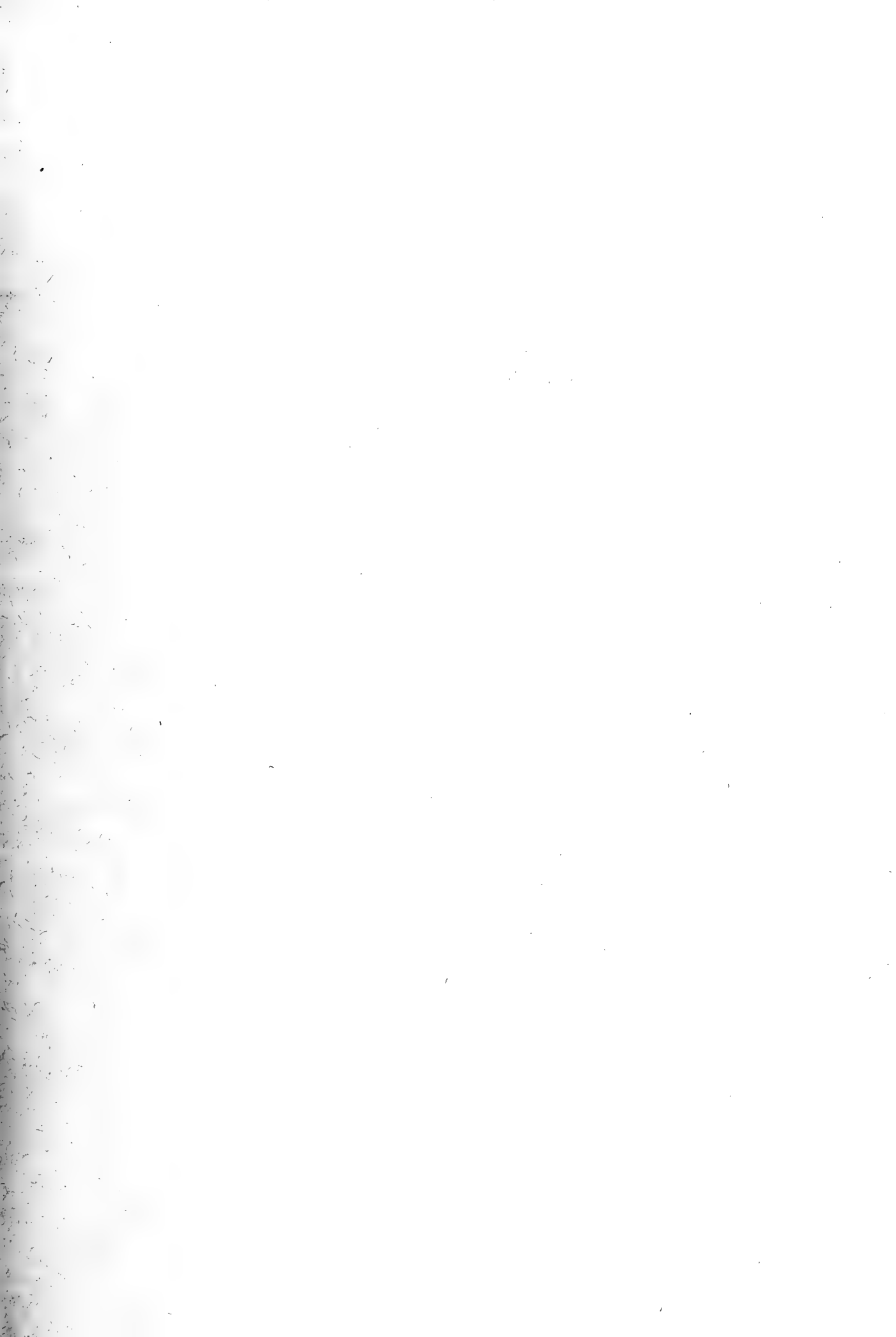
---

| СТРАНИЦА: | СТРОКА:   | НАПЕЧАТАНО:           | ДОЛЖНО БЫТЬ:          |
|-----------|-----------|-----------------------|-----------------------|
| 3         | 20 сверху | слое                  | слоѣ                  |
| 7         | 6 снизу   | азотистымъ            | азотнокислымъ         |
| 9         | 17 »      | сосудомъ              | сосудовъ              |
| 9         | 14 »      | складчатъ             | складчатость          |
| 16        | 3 сверху  | кровеносныхъ          | кровеныхъ             |
| 20        | 14 снизу  | изъ небольшого        | небольшого            |
| 21        | 12 »      | мускульные            | мускульныя            |
| 21        | 2 »       | упомянутой сарколеммы | упомянутую сарколемму |

---







Цѣна: 50 к.; Prix: 1 Mrk. 10 Pf.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и Н. Л. Ринкера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петерб., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Илюмина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Киммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Лозанѣ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Ogloblina à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

8 JUN. 1916

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДЕЛЕНИЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 8.**

**Volume XXII. № 8.**

DIE BEWEGUNG

**DER KOMETENSCHWEIFMATERIE**

**AUF HYPERBOLISCHEN BAHNEN.**

VON

**Richard Jaegermann.**

*(Der Akademie vorgelegt am 13. (26.) September 1906.)*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**



**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.**

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 8.**

**Volume XXII. № 8.**

DIE BEWEGUNG

**DER KOMETENSCHWEIFMATERIE**

**AUF HYPERBOLISCHEN BAHNEN.**

VON

**Richard Jaegermann.**

*(Der Akademie vorgelegt am 13. (26.) September 1906.)*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**



Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.  
St. Petersburg, März 1908. Beständiger Sekretär Akademiker *S. v. Oldenburg*.

**BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.**  
Wass. Ostr., 9. Linie, № 12.

DEM ANDENKEN

DES AKADEMIKERS

**THEODOR ALEXANDROWITSCH BREDICHIN**



EHRFURCHTSVOLL

GEWIDMET.



## § 1. Einleitung.

Die in dem letzten Jahrzehnt bei allen Kometenerscheinungen so häufig und möglichst erschöpfend angewandte Kometenschweifphotographie hat Thatsachen aufgedeckt, welche den gewöhnlichen Augebeobachtungen der Feinheit und Zartheit der Objekte wegen natürlich entgehen mussten. Nicht allein die allgemeine Form und Lage am Himmelszelte eines Kometenschweifes wird jetzt genau fixiert, sondern es können auf mehreren in einer bestimmten Aufeinanderfolge erhaltenen Photographien die stetigen Änderungen dieser Formen und sogar die Bewegungen einzelner Teile eines Kometenschweifes recht genau nachgewiesen und verfolgt werden. Solche Bewegungen der Schweifmaterie und zwar in der Richtung *von der Sonne weg*, sind mit einer grösseren oder geringeren Genauigkeit bei den Kometen 1892 I Swift<sup>1)</sup>, 1893 II Rordame, 1893 IV Brooks, 1899 I Swift, 1903 IV Borrelly<sup>2)</sup> in der krassesten Form auf photographischem Wege festgestellt.

Bei einer näheren Untersuchung dieser Bewegungen der Schweifmaterie in bezug zum Kometenkerne und zur Sonne genügt es aber nicht mehr nur eine graphische Konstruktion von Syndynamen und Isochronen vorzunehmen, welche zur Erklärung der ganzen Schweifform oder des ganzen Schweifsystems nach Bredichin mit grossem Erfolge angewandt werden. Es handelt sich in diesem Falle, — soviel es die gegenwärtig vorhandenen Beobachtungen erlauben, — um eine möglichst genaue Bahnbestimmung der Kometenschweifmaterie, um zugleich auf Grund dieser Bahn die auf die Schweifmaterie wirkenden Kräfte möglichst genau und jedenfalls genauer, als mit Hilfe der Syndynamen und Isochronen zu bestimmen.

Die Bahn — gewöhnlich Hyperbel — einer vom Kerne des Kometen ausgeströmten Materie hängt von vier Grössen ab.

---

1) R. Jaegermann. Die Bewegung der Schweifmaterie des Kometen 1892 I auf einem zur Sonne konvexen Bogen. *Astron. Nachr.* Bd. 171. № 4081.

2) R. Jaegermann. Die Bewegung der Schweifmaterie des Kometen 1903 IV auf einem zur Sonne konvexen Bogen. *Astron. Nachr.* Bd. 166. № 3978; Bd. 168 № 4025. *The Astrophysical Journal.* Vol. XXI. № 4. May 1905. pg. 323—336.

*Erstens* von den sogenannten Anfangsbedingungen:

1. *Ausströmungsmoment*  $M_0$  und folglich auch wahre Anomalie  $v_0$  und Radiusvektor  $r_0$  des Kometenkerns.
2. *Anfangsgeschwindigkeit*  $g$  in  $\frac{1}{k} = 58.13244\dots$  mittleren Sonnentagen der Schweifmaterie in bezug auf den Kometenkern.
3. *Winkel*  $G$  zwischen der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit  $g$  (der in der Kometenbahnebene und in der Sonnenrichtung sich vollziehenden Ausströmung) und dem Radiusvektor  $r_0$  des Kometenkerns. Dieser Winkel  $G$  ist negativ vor dem Radiusvektor im Sinne der Kernbewegung.

*Zweitens* hängt die obige Hyperbel von der *effektiven Sonnenenergie*  $\mu$ , ausgedrückt in den Einheiten der gewöhnlichen newtonianischen Attraktion, ab. Die effektive Sonnenenergie  $\mu$  kann sowohl *attraktiv* sein:  $1 > \mu > 0$  (zur Sonne *konkave* Hyperbel), als auch *repulsiv*:  $\mu < 0$  (zur Sonne *konvexe* Hyperbel). In beiden Fällen existiert also neben der gewöhnlichen, als Einheit angenommenen Attraktion, eine von der Sonne ausgehende *repulsive Energie*, deren *absoluter* Wert in denselben Einheiten durch  $1 - \mu$  ausgedrückt ist. Das eigentliche Wesen der repulsiven Sonnenenergie kann ebenso unbekannt bleiben, wie das Wesen der gewöhnlichen Attraktion.

Wir werden in den folgenden Auseinandersetzungen stets beide Fälle:  $1 > \mu > 0$  und  $\mu > 0$  oder auch  $1 > 1 - \mu > 0$  und  $1 - \mu > 1$  gleichzeitig untersuchen.

Sind auf mehreren durch keine allzu grossen Zeiträume von einander getrennten Kometenschweifphotographien unter einander identische Objekte, sogenannte Schweifverdichtungen entdeckt, so muss durch möglichst genaue Triangulation nahe liegender Vergleichsterne die Position dieser Objekte bestimmt und dann nach den bekannten Bessel'schen Formeln<sup>1)</sup> auf die Kometenbahnebene reduziert werden. Es ergeben sich dann für eine Reihe Beobachtungsmomente  $M$  die Radienvektore  $R$  und die Winkel  $\omega$  zwischen  $R$  und der Kometenbahnachse (negativ vor dem Perihel des Kometenkerns). Ebenso werden die Entfernungen  $\Delta$  vom Kometenkerne und die Winkel  $\varphi$  zwischen  $\Delta$  und dem verlängerten Radiusvektor  $r$  des Kerns (negativ vor demselben im Sinne der Bewegungsrichtung des Kometen) bekannt sein. Man hat demnach auf Grund direkter Beobachtungen:

| <i>Momente:</i> | <i>Kometozentrische<br/>Koordinaten:</i> | <i>Heliozentrische<br/>Koordinaten:</i> |
|-----------------|--|---|
| $M_1:$          | $\Delta_1, \varphi_1;$                   | $R_1, \omega_1;$                        |
| $M_2:$          | $\Delta_2, \varphi_2;$                   | $R_2, \omega_2;$                        |
| $M_3:$          | $\Delta_3, \varphi_3;$                   | $R_3, \omega_3;$                        |
| .....           | .....                                    | .....                                   |
| $M_n:$          | $\Delta_n, \varphi_n;$                   | $R_n, \omega_n.$                        |

wobei im Minimum  $n = 3$  sein muss.

1) R. Jaegermann. Über die beim Kometen Borrelly 1903 IV beobachtete hyperbolische Bewegung der Schweifmaterie. Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg. VIII Série. Vol. XVI. № 12. 1905; pg. 20—22.

Es ist nun die Aufgabe der theoretischen Untersuchungen eine solche Hyperbel abzuleiten, welche gleichzeitig allen obigen Beobachtungen am besten genügt. Der primitive Weg wäre derjenige der Hypothesen. Mit anfangs willkürlich gewählten  $M_0(v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  wird nach den strengen Bredichin'schen Formeln<sup>1)</sup> eine Hyperbel abgeleitet; darauf werden die den obigen Momenten  $M_1, M_2, M_3 \dots M_n$  entsprechenden theoretischen Werte  $R_1', \omega_1'; R_2', \omega_2'; R_3', \omega_3'; \dots R_n', \omega_n'$  bestimmt und mit den beobachteten verglichen. Natürlich werden im Anfange die Differenzen  $R_1 - R_1', \omega_1 - \omega_1'; R_2 - R_2', \omega_2 - \omega_2'; R_3 - R_3', \omega_3 - \omega_3'; \dots R_n - R_n', \omega_n - \omega_n'$  recht gross sein. Es müssen also die Anfangsbedingungen und der Wert von  $\mu$  in der einen oder andern Richtung so geändert werden, dass die obigen Differenzen kleinere und möglichst kleine Werte erhalten. Es ist aber klar, dass diese primitive Methode, wiewgleich sie auch zum gewünschten Ziel führen kann, doch wenigstens sehr mühsam und zeitraubend ist, namentlich wenn man in Betracht zieht, dass die Hyperbel-elemente Funktionen von vier, völlig von einander unabhängigen, verschiedenen und ganz unbekanntem Grössen  $M_0(v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  sind.

Man muss sich demnach zu allererst nach einer Methode umsehen, welche auf Grund wenigstens dreier Beobachtungen  $R_1, \omega_1; R_2, \omega_2; R_3, \omega_3$  die obigen Grössen  $M_0(v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  direkt so genau als möglich innerhalb gewisser Fehlergrenzen anzugeben imstande ist, so dass die Bestimmung der noch übrig bleibenden Differenzen  $\delta M_0(\delta v_0, \delta r_0)$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$  bei bekannten  $\delta R$  und  $\delta \omega$  keine grosse Schwierigkeiten mehr bereiten kann.

Eine solche Methode ist die bereits von mir in der oben zitierten Abhandlung «Über die beim Kometen Borrelly 1903 IV beobachtete hyperbolische Bewegung der Schweifmaterie» angegebene<sup>2)</sup>. Sie bezieht sich, wie dort ausdrücklich bemerkt wurde, eigentlich nur auf den idealen Fall absolut genauer Beobachtungen, d. h. dass die beobachteten Positionen der Schweifmaterie streng den angenommenen Beobachtungsmomenten entsprechen und dass die abgeleiteten Koordinaten  $R_1, \omega_1; R_2, \omega_2; R_3, \omega_3$  sich äusserst wenig von der Wirklichkeit unterscheiden.

Trotzdem kann diese Methode, wie es sich bei den Untersuchungen über die Bewegung der Schweifmaterie des Kometen 1892 I herausstellte, mit grossem Erfolge angewandt werden, wenn es sich nur um eine erste Annäherung der Werte  $M_0(v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  handelt, welche alsdann leicht durch speziell für diesen Zweck abgeleitete, strenge Differentialformeln unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate korrigiert werden können. Es ist leicht möglich, dass in der Zukunft, bei grösserer Genauigkeit der Beobachtungen, zur Ableitung der ersten genäherten Bahn aus dreien Beobachtungen auch andere, genauere Methoden zur Anwendung gelangen werden können, welche mit denen der ersten Bahnbestimmung von Planeten und Kometen eine völlige Analogie besitzen und welche zugleich die Kontrolle liefern würden, ob die Schweifmaterie sich auch wirklich innerhalb gewisser

1) loc. cit. pg. 22—25.

2) loc. cit. pg. 13—19.

Fehlergrenzen in der Kometenbahnebene befindet. Doch wird im Falle genauerer Beobachtungen auch die hier angeführte Methode um so bessere Dienste leisten. Sie ist hier im allmeinen reproduziert und zugleich für den Fall beliebiger Kometenbahnen erweitert.

## § 2. Genäherte Hyperbelbahn auf Grund dreier Beobachtungen. Die effektive Sonnenkraft und die Anfangsbedingungen der Ausströmung.

Nach Reduktion dreier Beobachtungen  $\alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2; \alpha_3, \delta_3$  der Kometenschweifmaterie auf die Kometenbahnebene ergeben sich drei Paar heliozentrische Koordinaten:

| <i>Moment:</i> | <i>Radiusvektor:</i> | <i>Winkel:</i> |
|----------------|----------------------|----------------|
| $M_1:$         | $R_1;$               | $\omega_1;$    |
| $M_2:$         | $R_2;$               | $\omega_2;$    |
| $M_3:$         | $R_3;$               | $\omega_3.$    |

Sie genügen irgend einer Hyperbelbahn:

$$R = \frac{P}{E \cdot \cos V \pm 1} \dots \dots \dots (1)$$

$P$  ist der halbe Parameter,  $E$  — die Exzentrizität,  $V$  — die wahre Anomalie der Hyperbel. Das obere Zeichen bezieht sich, wie auch stets weiter unten, auf die zur Sonne konkave ( $1 > \mu > 0$ ) Hyperbel, während das untere Zeichen für die zur Sonne konvexe ( $\mu < 0$ ) Hyperbel gilt. Die erste oder die zweite Hyperbel ist zu nehmen, je nachdem die beobachteten Positionen ein und derselben Stelle der Schweifmaterie sich auf einem zur Sonne konkaven oder konvexen Bogen gruppieren.

Da stets:

$$V = \omega - \omega_n, \dots \dots \dots (2)$$

wobei der Winkel  $\omega_n$  zwischen der Hyperbelbahnachse und Kometenbahnachse stets negativ vor dem Perihel der Kometenbahn ist, so folgt:

$$R_1 = \frac{P}{E \cdot \cos (\omega_1 - \omega_n) \pm 1}; \quad R_2 = \frac{P}{E \cdot \cos (\omega_2 - \omega_n) \pm 1}; \quad R_3 = \frac{P}{E \cdot \cos (\omega_3 - \omega_n) \pm 1};$$

Nach geringfügigen Transformationen erhält man die Gleichungen

$$[R_1 \cdot \cos \omega_1 - R_2 \cdot \cos \omega_2] \cdot E \cdot \cos \omega_n + [R_1 \cdot \sin \omega_1 - R_2 \cdot \sin \omega_2] \cdot E \cdot \sin \omega_n = \mp (R_1 - R_2);$$

$$[R_1 \cdot \cos \omega_1 - R_3 \cdot \cos \omega_3] \cdot E \cdot \cos \omega_n + [R_1 \cdot \sin \omega_1 - R_3 \cdot \sin \omega_3] \cdot E \cdot \sin \omega_n = \mp (R_1 - R_3);$$

woraus sich ergeben:

$$E \cdot \sin \omega_n = \mp 2 \cdot \frac{\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_2)}{R_1} - \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_1)}{R_2} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{R_3}}{\frac{\sin(\omega_3 - \omega_2)}{R_1} - \frac{\sin(\omega_3 - \omega_1)}{R_2} + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{R_3}} \dots (3)$$

$$E \cdot \cos \omega_n = \mp 2 \cdot \frac{\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_2)}{R_1} - \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_1)}{R_2} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{R_3}}{\frac{\sin(\omega_3 - \omega_2)}{R_1} - \frac{\sin(\omega_3 - \omega_1)}{R_2} + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{R_3}} \dots (4)$$

und folglich auch der Perihelwinkel  $\omega_n$  und die Exzentrizität nebst dem Exzentrizitäts- oder Asymptotenwinkel  $\psi$ :

$$\sec \psi = E \dots \dots \dots (5)$$

Zur Ableitung des halben Parameters erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{P}{R_1} &= E \cdot \cos(\omega_1 - \omega_n) \mp 1 \\ \frac{P}{R_2} &= E \cdot \cos(\omega_2 - \omega_n) \mp 1 \\ \frac{P}{R_3} &= E \cdot \cos(\omega_3 - \omega_n) \mp 1 \end{aligned}$$

nach entsprechender Multiplikation mit:

$$+ \sin(\omega_3 - \omega_2), \quad - \sin(\omega_3 - \omega_1), \quad + \sin(\omega_2 - \omega_1)$$

folgt unter Berücksichtigung der Formel:

$$\cos \alpha \cdot \sin(\gamma - \beta) - \cos \beta \cdot \sin(\alpha - \gamma) + \cos \gamma \cdot \sin(\beta - \alpha) = 0$$

nach Addition:

$$P = \mp \frac{\frac{\sin(\omega_3 - \omega_2) - \sin(\omega_3 - \omega_1) + \sin(\omega_2 - \omega_1)}{\frac{\sin(\omega_3 - \omega_2)}{R_1} - \frac{\sin(\omega_3 - \omega_1)}{R_2} + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{R_3}}}$$

Der Zähler verwandelt sich in:

$$\begin{aligned} &2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) - 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \omega_3 + \frac{1}{2} \omega_2 - \omega_1 \right) \\ &= 4 \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \end{aligned}$$



folglich ist

$$P = \pm 4 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_2) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)}{\frac{\sin(\omega_3 - \omega_2)}{R_1} - \frac{\sin(\omega_3 - \omega_1)}{R_2} + \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{R_3}} \dots \dots \dots (6)$$

Die grosse Halbachse und die Periheldistanz sind entsprechend:

$$A = P : (E^2 - 1) = P \cdot \cotg^2 \psi \dots \dots \dots (7)$$

$$Q = P : (E \pm 1) = A \cdot (E \pm 1) \dots \dots \dots (8)$$

Die wahren Anomalien  $v_0$  und  $V_0$  der Schnittpunkte zwischen Kometen- und Hyperbelbahn ergeben sich aus der gleichzeitigen Lösung ihrer Gleichungen für den Ausströmungsmoment  $M_0$ :

$$r_0 = \frac{p}{e \cos v_0 \pm 1}; \quad R_0 = \frac{P}{E \cdot \cos V_0 \pm 1}; \quad r_0 = R_0.$$

Die wahre Anomalie  $v_0$  auf der Kometenbahn ergibt sich unter Beachtung der Beziehung:

$$V_0 = v_0 - \omega_\pi \dots \dots \dots (9)$$

aus der Gleichung:

$$\frac{e \cdot \cos v_0 \pm 1}{p} = \frac{E \cdot \cos(v_0 - \omega_\pi) \pm 1}{P}$$

indem man setzt:

$$\begin{aligned} -\cos(v_0 - \omega_\pi) &= \cos^2 \frac{1}{2} v_0 \cdot \cos \omega_\pi - \sin^2 \frac{1}{2} v_0 \cdot \cos \omega_\pi + 2 \cdot \sin \frac{1}{2} v_0 \cdot \cos \frac{1}{2} v_0 \cdot \sin \omega_\pi; \\ 1 &= \cos^2 \frac{1}{2} v_0 + \sin^2 \frac{1}{2} v_0 \end{aligned}$$

und beide Seiten der Gleichung durch  $\cos^2 \frac{1}{2} v_0$  dividiert. Man erhält demnach die quadratische Gleichung:

$$\left[ \frac{E \cdot \cos \omega_\pi \pm 1}{P} + \frac{1 - e}{p} \right] \cdot \tg^2 \frac{1}{2} v_0 - 2 \cdot \frac{E \cdot \sin \omega_\pi}{P} \cdot \tg \frac{1}{2} v_0 - \left[ \frac{E \cdot \cos \omega_\pi \pm 1}{P} - \frac{1 + e}{p} \right] = 0.$$

Die wahre Anomalie auf der Hyperbel erhält man analog aus:

$$\frac{e \cdot \cos(V_0 + \omega_\pi) + 1}{p} = \frac{E \cdot \cos V \pm 1}{P}$$

oder nach ähnlichen Transformationen, wie oben, aus:

$$\left[ \frac{E \mp 1}{P} + \frac{1 - e \cdot \cos \omega_\pi}{p} \right] \cdot \tg^2 \frac{1}{2} V_0 - 2 \cdot \frac{e \cdot \sin \omega_\pi}{p} \cdot \tg \frac{1}{2} V_0 - \left[ \frac{E \pm 1}{P} - \frac{1 + e \cdot \cos \omega_0}{P} \right] = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 &= \frac{\frac{E \cdot \sin \omega_\pi \pm \frac{1}{\sqrt{P \cdot p}} \cdot \sqrt{\frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos \omega_\pi \mp 1) - \frac{P}{a}}}{\frac{E \cdot \cos \omega_\pi \mp 1 - \frac{1-e}{p}}{P}}}{\frac{E \cdot \cos \omega_\pi \mp 1 - \frac{1-e}{p}}{P}} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} V_0 &= \frac{\frac{e \cdot \sin \omega_\pi \pm \frac{1}{\sqrt{P \cdot p}} \cdot \sqrt{\frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos \omega_\pi \mp 1) - \frac{P}{a}}}{\frac{E \mp 1 - \frac{1-e \cdot \cos \omega_\pi}{p}}{P}}}{\frac{E \mp 1 - \frac{1-e \cdot \cos \omega_\pi}{p}}{P}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

Die beiden Zeichen vor der Wurzel weisen auf die Existenz zweier Schnittpunkte hin. Da die in der Sonnenrichtung ausgeströmte Materie gewöhnlich zuerst in die Kometenbahn hineintritt, sich innerhalb derselben in der Richtung des Kerns fortbewegt und erst dann wieder aus der Kometenbahn, dieselbe zum zweiten Male schneidend, unter dem Einflusse der repulsiven Sonnenenergie hinaustritt, so ist für den Ausströmungsmoment  $M_0$  der Schnittpunkt mit dem Zeichen — vor der Wurzel zu nehmen, während das andere Zeichen + sich auf den zweiten (im Sinne der Kernbewegung) weiter gelegenen Schnittpunkt bezieht. Die beiden Schnittpunkte sind stets reell, da der Ausdruck unter der Wurzel einen absolut positiven Wert darstellt, was sich auf folgende Weise nachweisen lässt. Es sei:

$$\Omega = \frac{1}{P \cdot p} \cdot \left[ \frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos \omega_\pi \mp 1) - \frac{P}{a} \right] \dots\dots\dots(11)$$

Man erhält unter Beachtung der Beziehung (9)

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{P \cdot p} \cdot \left[ p \cdot \frac{E^2 - 1}{P} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos (v_0 - V_0) \mp 1) - P \cdot \frac{1 - e^2}{p} \right] = \\ &= \frac{1}{P \cdot p} \cdot \left[ \frac{p}{P} \cdot (E^2 \cdot \cos^2 V_0 - 1) + \frac{p}{P} \cdot E^2 \cdot \sin^2 V_0 + \frac{P}{p} (e^2 \cdot \cos^2 v_0 - 1) + \frac{P}{p} \cdot e^2 \cdot \sin^2 v_0 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos v_0 \cdot \cos V_0 \mp 1) - 2 \cdot E \cdot \sin v_0 \cdot \sin V_0 \right]. \end{aligned}$$

Die algebraische Summe des ersten, dritten und fünften Gliedes in der grossen Klammer ist gleich Null. In der That sie verwandelt sich in:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_0} \cdot (E \cdot \cos V_0 \mp 1) - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos v_0 \cdot \cos V_0 \mp 1) + \frac{P}{r_0} \cdot (e \cdot \cos v_0 - 1) &= \\ = (e \cdot \cos v_0 + 1) \cdot (E \cdot \cos V_0 \mp 1) - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos v_0 \cdot \cos V_0 \mp 1) + \\ + (E \cdot \cos V_0 \pm 1) \cdot (e \cdot \cos v_0 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Der übrig bleibende Ausdruck verwandelt sich in:

$$\Omega = \left[ \frac{E \cdot \sin V_0}{P} - \frac{e \cdot \sin v_0}{p} \right]^2 = [\cotg \beta_1 - \cotg \beta]^2 \cdot r_0^{-2} = \left[ \frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{r_0 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta} \right]^2, \dots (12)$$

wobei  $\beta_1$  und  $\beta$  die Tangentwinkel zur Hyperbel- und Kometenbahn im Ausströmungspunkte ( $v_0, r_0$ ) bedeuten. Die beiden Schnittpunkte müssen also in der That stets reell sein. Als Kontrolle für die abgeleiteten  $v_0$  und  $V_0$  kann wiederum die Formel (9) dienen.

Die wahren Anomalien der auf der Hyperbel beobachteten Punkte sind:

$$V_1 = \omega_1 - \omega_\pi; \quad V_2 = \omega_2 - \omega_\pi; \quad V_3 = \omega_3 - \omega_\pi, \dots (13)$$

folglich erhält man die transzendenten Winkel  $F$ :

*Konkave Hyperbel:*

*Konvexe Hyperbel:*

$$\begin{aligned} \text{tg } \frac{1}{2} F_0 &= \text{tg } \frac{1}{2} V_0 \cdot \text{tg } \frac{1}{2} \psi; & \text{tg } \frac{1}{2} F_0 &= \text{tg } \frac{1}{2} V_0 \cdot \cotg \frac{1}{2} \psi \dots (14) \\ \text{tg } \frac{1}{2} F_1 &= \text{tg } \frac{1}{2} V_1 \cdot \text{tg } \frac{1}{2} \psi; & \text{tg } \frac{1}{2} F_1 &= \text{tg } \frac{1}{2} V_1 \cdot \cotg \frac{1}{2} \psi \end{aligned}$$

u. s. w.

und somit auch den Wert der effektiven Sonnenenergie:

$$\begin{aligned} k \cdot \sqrt{\mu} &= \frac{A^{3/2}}{M_3 - M_1} \cdot \left[ E \cdot \frac{\sin(F_3 - F_1)}{\cos F_1 \cdot \cos F_3} \mp \lg_e \frac{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_3 \right)}{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_1 \right)} \right] \\ &= \frac{A^{3/2}}{M_3 - M_2} \cdot \left[ E \cdot \frac{\sin(F_3 - F_2)}{\cos F_2 \cdot \cos F_3} \mp \lg_e \frac{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_3 \right)}{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_2 \right)} \right] \\ &= \frac{A^{3/2}}{M_2 - M_1} \cdot \left[ E \cdot \frac{\sin(F_2 - F_1)}{\cos F_1 \cdot \cos F_2} \mp \lg_e \frac{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_2 \right)}{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_1 \right)} \right] \dots (15) \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel dieser drei Werte wird der Wahrheit natürlich am nächsten sein. Die Tangentwinkel  $\beta$  und  $\beta_1$  ergeben sich aus den Formeln:

$$\text{tg } \beta = \frac{p}{e \cdot r_0 \cdot \sin v_0}; \quad \text{tg } \beta_1 = \frac{F}{E \cdot r_0 \cdot \sin V_0} \dots (16)$$

$$- \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + v_0)} = e; \quad \mp \frac{\cos \beta_1}{\cos(\beta_1 + V_0)} = E; \dots (17)$$

$$- \text{tg}(\beta + v_0) = \frac{e + \cos v_0}{\sin v_0}; \quad \mp \text{tg}(\beta_1 + V_0) = \frac{E \pm \cos V_0}{\sin V_0} \dots (18)$$

$$\beta_1 - \beta = \gamma.$$

Hieraus ergibt sich folgende Regel:

|                   | <i>Vor dem Perihel:</i>      | <i>Nach dem Perihel:</i>     |
|-------------------|------------------------------|------------------------------|
| Kometenbahn:      | $\beta + v_0 < 90^\circ$ ;   | $\beta + v_0 > 90^\circ$ ;   |
| Konkave Hyperbel: | $\beta_1 + V_0 < 90^\circ$ ; | $\beta_1 + V_0 > 90^\circ$ ; |
| Konvexe Hyperbel: | $\beta_1 + V_0 > 90^\circ$ ; | $\beta_1 + V_0 < 90^\circ$ . |

Bei den ferneren Entwicklungen werden folgende bekannte Formeln<sup>1)</sup> zur Anwendung gelangen:

$$\left. \begin{aligned} \sec F - 1 &= \frac{R}{P} \cdot (E \mp 1) \cdot (1 - \cos V) \\ \sec F + 1 &= \frac{R}{P} \cdot (E \pm 1) \cdot (1 + \cos V) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$$\sec F = \frac{R}{P} (E \pm \cos V) \dots\dots\dots(20)$$

$$R \cdot \sin V = A \cdot \sqrt{E^2 - 1} \cdot \operatorname{tg} F = \sqrt{A \cdot P} \cdot \operatorname{tg} F \dots\dots\dots(21)$$

$$R \cdot \cos V = A \cdot (E \mp \sec F) \dots\dots\dots(22)$$

$$R = A \cdot (E \cdot \sec F \mp 1) \dots\dots\dots(23)$$

Für den Ausströmungsmoment  $M_0$  erhält man aus den Formeln (20) und (21) unter Berücksichtigung der Formeln (16) und (18)

$$E \cdot \sec F_0 = \mp \operatorname{cotg} \beta_1 \cdot \operatorname{tg} (\beta_1 + V_0) \dots\dots\dots(24)$$

$$E \cdot \operatorname{tg} F_0 = + \operatorname{cotg} \beta_1 \cdot \operatorname{tg} \psi \dots\dots\dots(25)$$

Ferner ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_0 \right) = \operatorname{tg} F_0 + \sec F_0 = E \cdot \frac{\sin (\beta_1 + V_0 \mp \Psi)}{\sin \beta_1} = \Theta_0 \dots\dots\dots(26)$$

Demnach wird der Periheldurchgangsmoment:

$$M_\pi = M_0 - \frac{A^{3/2}}{K \cdot \sqrt{\mu}} \left[ E \cdot \operatorname{tg} F_0 \mp \operatorname{lg}_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_0 \right) \right] \dots\dots\dots(27)$$

wobei  $M_0$  bei bekannten  $v_0, r_0$  abgeleitet und  $E \cdot \operatorname{tg} F_0$  und  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_0 \right)$  direkt nach den Formeln (25) und (26) bestimmt werden kann.

1) Prof. Dr. Th. Bredichin's Mechanische Untersuchungen über die Kometenformen. In systematischer Darstellung von R. Jaegermann. 1903. Leipzig. Voss' Sortiment. Pg. 294, 295.

Die Orbitalgeschwindigkeiten im Ausströmungsmomente sind entsprechend auf der Kometen- und Hyperbelbahn:

$$h_0 = \frac{\sqrt{p}}{r_0 \cdot \sin \beta} = \sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}} \dots \dots \dots (28)$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{P\mu}}{r_0 \cdot \sin \beta_1} = \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta} \pm \frac{2}{r_0}} \dots \dots \dots (29)$$

Den Ausströmungswinkel erhält man nach der Formel:

$$\operatorname{tg} G = \frac{H_0 \cdot \sin \beta_1 - h_0 \cdot \sin \beta}{H_0 \cdot \cos \beta_1 - h_0 \cdot \cos \beta} = \frac{\sqrt{P\mu} - \sqrt{p}}{\sqrt{P\mu} \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 - \sqrt{p} \cdot \operatorname{ctg} \beta} \dots \dots \dots (30)$$

Zur Bestimmung der Quadranten dient:

$$\left. \begin{aligned} g \cdot r_0 \cdot \sin G &= h_0 \cdot r_0 \cdot \sin \beta - H_0 \cdot r_0 \cdot \sin \beta_1 = \sqrt{p} - \sqrt{P\mu} \\ g \cdot r_0 \cdot \cos G &= h_0 \cdot r_0 \cdot \cos \beta - H_0 \cdot r_0 \cdot \cos \beta_1 = \sqrt{p} \cdot \operatorname{ctg} \beta - \sqrt{P\mu} \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots (31)$$

Die Ausströmungsgeschwindigkeit ist:

$$g = h_0 \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta_1 - G)} = H_0 \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta - G)} = \frac{\sqrt{p} - \sqrt{P\mu}}{r_0 \cdot \sin G} \dots \dots \dots (32)$$

Es kann endlich noch eine Relation festgestellt werden, welche stets zwischen den Kometen- und Hyperbelbahnelementen einerseits und den Anfangsbedingungen  $\beta (v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$  und der effektiven Sonnenkraft  $\mu$  andererseits besteht.

Der Ausdruck (12) verwandelt sich nach Multiplikation des Zählers und des Nenners in der Klammer mit  $H_0$  gemäss den Formeln (29) und (32) in:

$$\Omega = \left[ \frac{g}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{\sin(\beta - G)}{\sin \beta} \right]^2$$

oder nach Vergleich dieses Ausdrucks mit der Formel (11) erhält man:

$$\frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos \omega_\pi - 1) - \frac{P}{a} = p \cdot \left[ \frac{g}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin(\beta - G)}{\sin \beta} \right]^2 \dots \dots \dots (33)$$

was die gesuchte Relation darstellt.

Die auf diesem Wege erhaltenen Werte  $M_0 (v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  werden um so genauer sein, je korrekter die hierbei benutzten Beobachtungen sind. Jedenfalls werden aber auch im Falle nicht besonders genügender Beobachtungen die durch diese Methode ermittelten Anfangsbedingungen und die effektive Sonnenkraft nicht mehr völlig willkürlich sein und

wird, umgekehrt, mit diesen Werten  $M_0(v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  nach den Formeln hyperbolischer Bewegung eine Hyperbel abgeleitet, so wird letztere wenigstens schon annähernd die Beobachtungen darstellen, und als *erste genäherte Bahn, welche aber durchaus den Bewegungsgesetzen streng genügt*, anzusehen sein.

### § 3. Die den Bewegungsgesetzen streng genügende Hyperbel.

Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten genäherten Werte von  $M_0(v_0, r_0)$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  liefern eine zwar ebenfalls genäherte, aber den Bewegungsgesetzen streng genügende Hyperbel auf folgende Weise.

Zunächst ergeben sich der Tangentenwinkel  $\beta$  und die Orbitalgeschwindigkeit  $h_0$  des Kometenkerns im Ausströmungsmomente  $M_0$  nach den Formeln (16) resp. (28). Die Orbitalgeschwindigkeit  $H_0$  der Schweifmaterie auf der Hyperbel in demselben Momente beträgt:

$$H_0^2 = h_0^2 + g^2 - 2 \cdot h_0 \cdot g \cdot \cos(\beta - G) \dots\dots\dots(34)$$

wobei der entsprechende Tangentenwinkel  $\beta_1$  zur Hyperbel sich ergibt nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} H_0 \cdot \sin \beta_1 &= h_0 \cdot \sin \beta - g \cdot \sin G \\ H_0 \cdot \cos \beta_1 &= h_0 \cdot \cos \beta - g \cdot \cos G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

Als Kontrolle kann dienen:

$$\sin \gamma = \frac{g}{H_0} \cdot \sin(\beta - G); \quad \beta_1 = \beta + \gamma \dots\dots\dots(36)$$

Die vom Radiusvektor in  $\frac{1}{k}$  mittleren Sonnentagen beschriebene doppelte Fläche beträgt:

$$C = H_0 \cdot r_0 \cdot \sin \beta_1 = \sqrt{p} - r_0 \cdot g \cdot \sin G \dots\dots\dots(37)$$

Die Hilfsgrösse von Norton ist:

$$m = \frac{H_0^2 \cdot r_0}{\mu} \dots\dots\dots(38)$$

Der halbe Parameter, die Exzentrizität, der Asymptotenwinkel, die grosse Halbachse sind entsprechend:

$$P = \frac{C^2}{\mu} = m \cdot r_0 \cdot \sin^2 \beta_1; \dots\dots\dots(39)$$

$$E^2 - 1 = m \cdot (m \mp 2) \cdot \sin^2 \beta_1; \dots\dots\dots(40)$$

$$\text{tg } \psi = \sin \beta_1 \cdot \sqrt{m \cdot (m \mp 2)}; \dots\dots\dots(41)$$

$$A = r_0 : (m \mp 2) \dots\dots\dots(42)$$

Die Periheldistanz  $Q$  ergibt sich nach der früheren Formel (8).  
 Die wahre Anomalie  $V_0$  des Ausströmungspunkts auf der Hyperbel ist:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \sin V_0 &= \frac{P}{r_0} \cdot \operatorname{cotg} \beta_1 \\ E \cdot \cos V_0 &= \frac{P}{r_0} \mp 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

Der Perihelwinkeln  $\omega_\pi$  kann nun nach der Formel (9) bestimmt werden:

$$\omega_\pi = v_0 - V_0$$

oder auch direkt in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \sin \omega_\pi &= \sin v_0 \cdot \cos V_0 - \cos v_0 \cdot \sin V_0; \\ \cos \omega_\pi &= \cos v_0 \cdot \cos V_0 \mp \sin v_0 \cdot \sin V_0; \end{aligned}$$

nach Substitution von  $\sin v_0$  und  $\cos V_0$  aus den Formeln (43) folgt:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \sin \omega_\pi &= \mp \sin v_0 - \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot H_0 \cdot \cos (\beta_1 \mp v_0) \\ E \cdot \cos \omega_\pi &= \mp \cos v_0 - \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot H_0 \cdot \sin (\beta_1 \mp v_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

Der zweite und zur Kontrolle, zugleich auch der erste, schon gegebene Schnittpunkt zwischen Kometen- und Hyperbelbahn können nach den Formeln (10) abgeleitet werden. Als Hauptkontrolle aller obigen Rechnungen kann die Relation (33) angesehen werden.

Der Periheldurchgangsmoment  $M_\pi$  ergibt sich nach Formel (27) in der dort angegebenen Weise. Es sei hier nur eine Formel angeführt, welche es erlaubt den Winkel  $\beta_1 \mp V_0$  direkt zu bestimmen. Aus der Formel (23) erhält man für den Ausströmungsmoment  $M_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_0}{A} &= E \cdot \sec F_0 \mp 1; \\ m = \frac{H_0 \cdot r_0}{\mu} &= E \cdot \sec F_0 \mp 1; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

Hieraus folgt:

$$E \cdot \sec F_0 = \frac{r_0}{A} \pm 1 = m \mp 1 \dots\dots\dots (46)$$

Ein Vergleich der Ausdrücke (46) und (24) ergibt:

$$\operatorname{tg} (\beta_1 \mp V_0) = \mp (m \mp 1) \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \dots\dots\dots (47)$$

der Quadrant von  $\beta_1 + V_0$  ist bestimmt durch die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \sin(\beta_1 + V_0) &= (m \mp 1) \cdot \sin \beta_1 \\ E \cdot \cos(\beta_1 + V_0) &= \mp \cos \beta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

und der Periheldurchgangsmoment ist:

$$M_\pi = M_0 - \frac{A^{3/2}}{K \cdot \sqrt{\mu}} \cdot \left[ \cotg \beta_1 \cdot \operatorname{tg} \psi \pm \operatorname{lg}_e E \cdot \frac{\sin(\beta_1 + V_0 \pm \Psi)}{\sin \beta_1} \right] \dots\dots\dots(49)$$

welche Formel die Berechnung von  $V_0$  und  $F_0$  unnötig macht

$$\operatorname{lg}_{10} k = 2.235\ 5814\ 414.$$

Dem Zeitintervall  $t = M - M_\pi$  zwischen dem Beobachtungs- und dem Periheldurchgangsmomente entspricht die transzendente Gleichung mit dem Argumente  $\Theta$ :

$$\frac{K \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot t = E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \mp \Theta \dots\dots\dots(50)$$

Diese transzendente Gleichung liefert nach der im nächsten Paragraphen gegebenen Lösung die Grössen:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{hyp} \Theta &= \operatorname{tg} F \\ \cos \operatorname{hyp} \Theta &= \sec F \\ \Theta &= \operatorname{lg}_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F \right). \end{aligned}$$

Zur schnellen und genauen Ableitung der wahren Anomalie  $V$  und des Radiusvektors  $R$  dienen die Formeln

$$\left. \begin{aligned} R \cdot \sin V &= \sqrt{A \cdot P} \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \\ R \cdot \cos V &= A \cdot (E \mp \cos \operatorname{hyp} \Theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

$$R = A \cdot (E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1) \dots\dots\dots(52)$$

Der Winkel  $\omega$  ist:

$$\omega = \omega_\pi + V \dots\dots\dots(53)$$

Die Besselschen Koordinaten sind:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Delta \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos(v - \omega) - r; \\ \eta &= \Delta \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin(v - \omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)$$



Um diese erste genäherte, aber den Bewegungsgesetzen streng genügende Bahn noch einigen Korrekturen unterziehen zu können, bedarf es strenger Differentialformeln, welche die Variationen der Hyperbelelemente einerseits und die Variationen der heliozentrischen Koordinaten ( $R$ ,  $\omega$ ) andererseits, als Funktionen der Variationen von  $M_0$  ( $v_0$ ,  $r_0$ ),  $g$ ,  $G$  und  $\mu$  darstellen. Auf Grund solcher Formeln kann unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate eine definitive Bahn für die beobachtete Schweifmaterie abgeleitet werden. Der Entwicklung dieser Formeln soll aber zuerst eine sehr bequeme und äusserst korrekte Lösung der transzendenten Gleichung (50) vorangehen.

#### § 4. Die Lösung der transzendenten Gleichung in der hyperbolischen Bewegung.

Es sei der Kürze wegen:

$$N = \frac{K \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot t = \frac{K \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot (M - M_{\pi}) \dots \dots \dots (55)$$

dann nimmt die transzendente Gleichung (50) eine der Keplerschen Gleichung analoge Form an:

$$N = E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \mp \Theta. \dots \dots \dots (56)$$

Es muss jetzt bei bekannten  $N$  und  $E$  das Argument  $\Theta$  und folglich auch der transzendente Winkel  $F$ , welcher nach Hoüel als die hyperbolische Amplitude des Arguments  $\Theta$  bezeichnet wird, bestimmt werden.

Die Lösung vollzieht sich am bequemsten mit Hilfe von Tafeln der Hyperbelfunktionen, wobei jedoch bemerkt werden muss, dass die bisher benutzten Tafeln von Hoüel<sup>1)</sup> infolge ihrer Vierstelligkeit nicht die gewünschte Genauigkeit liefern können. Viel bessere Dienste leisten schon die «Tafeln der Hyperbelfunktionen von Dr. W. Ligowski<sup>2)</sup>», erstens, weil sie fünfstellig sind und zweitens namentlich, weil in denselben die Logarithmen der Hyperbelfunktionen nach den Argumenten  $\Theta$  und  $F$  (bei Ligowski entsprechend  $\psi$  und  $\varphi$ ) gleichzeitig gegeben sind. Noch grössere Genauigkeit erreicht man in der Bestimmung von  $\Theta$  und  $F$ , bei bekannten  $N$  und  $E$ , wenn die Hyperbelfunktionen wenigstens bis auf sechs Stellen genau berechnet sind, was an der Hand der Ligowski'schen Tafeln in jedem Spezialfalle leicht und bequem mit Hilfe der siebenstelligen Logarithmentafeln von Dr. Ludwig Schrön ausgeführt werden kann.

1) J. Hoüel. Recueil de formules et de tables numériques. Paris 1901.

2) Verlag von Ernst und Korn. Berlin. 1890.

Die theoretische Seite der Lösung obiger transzendenter Gleichung ist folgende. Bei jeder Änderung von  $\Theta$  um  $\Delta\Theta$  ändert sich bei konstantem  $E$  der Wert von  $N$  etwa um  $\Delta N$ , man erhält:

$$N + \Delta N = E \cdot \sin \operatorname{hyp} (\Theta + \Delta\Theta) \mp (\Theta + \Delta\Theta)$$

oder nach Subtraktion der Gleichung (56):

$$\Delta N = E \cdot [\sin \operatorname{hyp} (\Theta + \Delta\Theta) - \sin \operatorname{hyp} \Theta] \mp \Delta\Theta \dots \dots \dots (57)$$

Andererseits ist bekannt, dass:

$$\left. \begin{aligned} \sin \operatorname{hyp} \Delta\Theta &= \Delta\Theta + \frac{(\Delta\Theta)^3}{3!} + \frac{(\Delta\Theta)^5}{5!} + \dots \\ \cos \operatorname{hyp} \Delta\Theta &= 1 + \frac{(\Delta\Theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\Theta)^4}{4!} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

Die Gleichung (57) verwandelt sich auf Grund bekannter Formeln der Hyperbelfunktionen in:

$$\Delta N = E \cdot [\sin \operatorname{hyp} \Theta \cdot (\cos \operatorname{hyp} \Delta\Theta - 1) + \cos \operatorname{hyp} \Theta \cdot \sin \operatorname{hyp} \Delta\Theta] \mp \Delta\Theta,$$

wobei  $\sin \operatorname{hyp} \Delta\Theta$  und  $\cos \operatorname{hyp} \Delta\Theta$  durch die Formeln (58) bestimmt sind.

In den Tafeln von Ligowski sind die Hyperbelfunktionen für die Argumente  $\Theta$  von 0 bis 2, von Tausendstel zu Tausendstel gegeben. Es kann demnach  $\Delta\Theta$  im Maximum nur 0,001, was einem Winkel  $\Delta F = 0^\circ 3' 26''$  entspricht, erreichen und infolge dessen im Maximum schon die Glieder:

$$\frac{(\Delta\Theta)^2}{2!} = 0.000\ 000\ 5;$$

$$\frac{(\Delta\Theta)^3}{3!} = 0.000\ 000\ 000\ 2$$

verschwindend kleine Werte repräsentieren, so kann in der obigen Formel für  $\Delta N$  ohne merklichen Fehler gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{hyp} \Delta\Theta &= \Delta\Theta, \\ \cos \operatorname{hyp} \Delta\Theta &= 1 + \frac{(\Delta\Theta)^2}{2!} \end{aligned}$$

und man erhält zur Bestimmung von  $\Delta\Theta$  die quadratische Gleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \cdot \Delta\Theta^2 + (E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1) \cdot \Delta\Theta - \Delta N = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \cdot \Delta\Theta = - (E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1) \pm \sqrt{(E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1)^2 + 2 \cdot E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \cdot \Delta N}.$$

Da  $\Delta\Theta$  nur eine positive Grösse sein muss, wenn vorwärts interpoliert wird, so gilt nur das obere Zeichen vor der Wurzel, also:

$$\Delta\Theta = \frac{E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1}{E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta} \cdot \left( \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta}{(E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1)^2} \cdot \Delta N} - 1 \right) \dots \dots \dots (59)$$

Der Ausdruck für  $\Delta\Theta$  kann auch in eine Reihe entwickelt werden. Es ist:

$$\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha - \frac{1}{8} \cdot \alpha^2 + \frac{1}{16} \cdot \alpha^3 - \frac{5}{128} \cdot \alpha^4 + \frac{7}{256} \cdot \alpha^5 - \frac{21}{1024} \cdot \alpha^6 + \dots$$

wobei:

$$\alpha = 2 \cdot \frac{E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta}{(E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1)^2} \cdot \Delta N,$$

da stets  $\alpha^2 < 1$ , so ist die obige Reihe konvergent. Man erhält:

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta N}{E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha + \frac{1}{8} \cdot \alpha^2 - \frac{5}{64} \cdot \alpha^3 + \frac{7}{128} \cdot \alpha^4 - \dots \right] \dots \dots (60)$$

Die Praxis lehrt, dass  $\Delta N$  und folglich auch  $\alpha$  und um so mehr die Glieder in der Reihe (60) immer recht kleine Werte repräsentieren, folglich kann mit sehr grossem Erfolge auch die Näherungsformel:

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta N}{E \cdot \cos \operatorname{hyp} \Theta \mp 1} \dots \dots \dots (61)$$

angewandt werden, wenn  $\Theta$  sich zwischen 0 und 2 befindet.

Für die Argumente  $\Theta > 2$  sind in den Tafeln von Ligowski die Logarithmen der Hyperbelfunktionen nur von Hundertstel zu Hundertstel von  $\Theta$  gegeben, infolge dessen wird im Maximum:

$$\frac{(\Delta\Theta)^2}{2!} = 0.000\ 05; \quad \frac{(\Delta\Theta)^3}{3!} = 0.000\ 000\ 17; \quad \frac{(\Delta\Theta)^4}{4!} = 0.000\ 000\ 000\ 4$$

und in diesem Falle muss stets die genaue Formel (60) angewandt werden.

Die Lösung der transzendenten Gleichung (56) wird in der Praxis in folgender Weise ausgeführt. Gegeben sind  $E$  und  $N$ , gesucht wird ein solcher Wert von  $\Theta$ , welcher der transzendenten Gleichung streng genügt. Mit den Tafeln von Ligowski können leicht durch einige Versuche solche zwei aufeinander folgende Werte  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  gefunden werden, dass

$$N_1 = E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta_1 \mp \Theta_1,$$

$$N_2 = E \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta_2 \mp \Theta_2,$$

wobei

$$N_1 < N < N_2; \quad \Theta_1 < \Theta < \Theta_2;$$

da jetzt:

$$\Delta N_1 = N - N_1; \quad \Delta N_2 = N - N_2$$

bekannt sind, so erhält man nach der Formel (60):

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Theta_1 &= \frac{\Delta N_1}{E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 \mp 1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{8} \cdot \alpha_1^2 - \dots \right) \\ \Delta \Theta_2 &= \frac{\Delta N_2}{E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 \mp 1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha_2 + \frac{1}{8} \cdot \alpha_2^2 - \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62)$$

wobei:

$$\alpha_1 = 2 \cdot \frac{E \cdot \sin \text{hyp } \Theta_1}{(E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 \mp 1)^2} \cdot \Delta N_1; \quad \alpha_2 = 2 \cdot \frac{E \cdot \sin \text{hyp } \Theta_2}{(E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 \mp 1)^2} \cdot \Delta N_2,$$

folglich wird:

$$\Theta = \Theta_1 + \Delta \Theta_1 = \Theta_2 + \Delta \Theta_2 = \lg_e \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F \right),$$

ferner:

$$\begin{aligned} \sin \text{hyp } \Theta &= \left( 1 + \frac{\Delta \Theta_1^2}{2} \right) \cdot \sin \text{hyp } \Theta_1 + \Delta \Theta_1 \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 \\ &= \left( 1 + \frac{\Delta \Theta_2^2}{2} \right) \cdot \sin \text{hyp } \Theta_2 + \Delta \Theta_2 \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 = \text{tg } F \dots \dots (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \text{hyp } \Theta &= \left( 1 + \frac{\Delta \Theta_1^2}{2} \right) \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 + \Delta \Theta_1 \cdot \sin \text{hyp } \Theta_1 \\ &= \left( 1 + \frac{\Delta \Theta_2^2}{2} \right) \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 + \Delta \Theta_2 \cdot \sin \text{hyp } \Theta_2 = \sec F \dots \dots (65) \end{aligned}$$

Es ist natürlich stets zu beachten, dass  $\Delta \Theta_1 > 0$  und  $\Delta \Theta_2 < 0$ , da  $\Delta N_1 > 0$  und  $\Delta N_2 < 0$ . Durch die Formeln (63), (64), (65) ist zugleich der transzendente Winkel  $F$  bestimmt, dessen Kenntniss übrigens infolge der Formeln (51) und (52) für die Bestimmung von  $R$  und  $V$  nicht erforderlich ist.

Da die Grössen  $\Delta \Theta_1$  und  $\Delta \Theta_2$  von  $\Delta N_1$  und  $\Delta N_2$  abhängen, so ist es von grösster Wichtigkeit zuerst die Werte  $N_1$  und  $N_2$  und dann die Differenzen  $\Delta N_1 = N - N_1$  und  $\Delta N_2 = N - N_2$  möglichst genau abzuleiten. Die Differenzen  $\Delta N_1$  und  $\Delta N_2$  ergeben sich am bequemsten mit den Subtraktionslogarithmen. Grösstenteils versagen hier die Subtraktionslogarithmen  $C$  von Zech, da die entsprechenden Werte  $B$  klein sind. Deshalb müssen die Subtraktionslogarithmen  $C$  nach folgendem Schema berechnet werden.

Gegeben ist  $\log a$  und  $\log b$ , wobei  $a > b$ ; ferner ist bekannt:

$$B = \lg a - \lg b,$$

alsdann erhält man den Logarithmus der Differenz von  $a$  und  $b$  in folgender Weise:

$$\lg(a - b) = \lg a - C = \lg a + A,$$

wobei:

$$C = \frac{1}{2}B - (\lg B + \lg \lambda^{-1} + k)$$

oder

$$A = \lg B + \lg \lambda^{-1} + k - \frac{1}{2}B$$

und:

$$k = \frac{B^2}{24\lambda} - \frac{B^4}{2880\lambda^3} + \dots$$

---


$$\lg \lambda^{-1} = 0.362\ 2156\ 887;$$

$$\lg \frac{1}{24\lambda} = \bar{2}.982\ 0044\ 470;$$

$$\lg \frac{1}{2880\lambda^3} = \bar{3}.627\ 2545\ 8.$$

Die hier entwickelte Theorie soll an einigen Beispielen illustriert werden.

*I. Beispiel.* Die Elemente einer beim Kometen 1892 I Swift beobachteten Hyperbelbewegung der Schweifmaterie sind:

$$M_{\pi} = 5.111\ 8339 \text{ April } 1892 \text{ M. Z. Berlin.}$$

$$1 - \mu = 36.0; \quad \mu = -35.0 \text{ (repulsiv)}$$

$$\lg P = \bar{2}.783\ 8110; \quad \lg E = 0.024\ 9700;$$

$$\lg A = \bar{1}.697\ 9380; \quad \omega_{\pi} = -2^{\circ} 6' 35''.59.$$

Es soll die Lage der Schweifmaterie im Momente  $M = 1892$  April 5.906 654 M. Z. B. festgestellt werden. Für diesen Moment ist auf Grund der Hyperbelelemente  $\lg N = \bar{1}.360\ 9773$ .

Mit den Tafeln von Ligowski erhält man nach einigen Versuchen, dass  $\Theta$  sich zwischen folgenden Grössen befindet:

$$\Theta_1 = 0.111; \quad F_1 = 6^{\circ} 20' 48''.522;$$

$$\Theta_2 = 0.112; \quad F_2 = 6^{\circ} 24' 13''.511.$$

und berechnet mit den Logarithmen von Schrön:

$$\lg \sin \text{hyp } \Theta_1 = \bar{1}.046\ 2144; \quad \lg \cos \text{hyp } \Theta_1 = 0.002\ 6700; \quad \lg (E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 + 1) = 0.315\ 0698;$$

$$\lg \sin \text{hyp } \Theta_2 = \bar{1}.050\ 1256; \quad \lg \cos \text{hyp } \Theta_2 = 0.002\ 7182; \quad \lg (E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 + 1) = 0.315\ 0947.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \lg N_1 &= \bar{1}.359\ 4761; & \lg \Delta N_1 &= \bar{4}.898\ 8580 \\ \lg N_2 &= \bar{1}.363\ 3795; & \lg \Delta N_2 &= \bar{3}.105\ 0088_n \end{aligned}$$

und nach der genäherten Formel (62) bei  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$\begin{aligned} \lg \Delta \Theta_1 &= \bar{4}.583\ 7882; & \Delta \Theta_1 &= +0.000\ 3835; & \Theta &= 0.111\ 3835. \\ \lg \Delta \Theta_2 &= \bar{4}.789\ 9141_n; & \Delta \Theta_2 &= -0.000\ 6165; \end{aligned}$$

Die Anwendung der strengen Formel (62) erweist sich von keinem besonderen Nutzen, da sie fast dasselbe Resultat ergibt:

$$\begin{aligned} \lg \alpha_1 &= \bar{5}.640\ 933; & \lg \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha_1 + \dots\right) &= \bar{1}.999\ 9952; \\ \lg \alpha_2 &= \bar{5}.850\ 945_n; & \lg \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha_2 + \dots\right) &= 0\ 000\ 0077; \end{aligned}$$

folglich genauer:

$$\begin{aligned} \lg \Delta \Theta_1 &= \bar{4}.583\ 7834; & \Delta \Theta_1 &= +0.000\ 3835\ 16; & \Theta &= 0.111\ 3835\ 16. \\ \lg \Delta \Theta_2 &= \bar{4}.789\ 9218_n; & \Delta \Theta_2 &= -0.000\ 6164\ 84; \end{aligned}$$

Mit den genaueren Werten  $\Delta \Theta_1$  und  $\Delta \Theta_2$  erhält man nach den Formeln (64) und (65)

$$\begin{aligned} \lg \sin \text{hyp } \Theta &= \bar{1}.047\ 7186 = \lg \text{tg } F; \\ \lg \cos \text{hyp } \Theta &= 0.002\ 6884 = \lg \text{sec } F; \end{aligned}$$

und endlich nach den Formeln (51), (52) und (53):

$$\begin{aligned} \lg R \cdot \sin V &= \bar{2}.288\ 5930; & \lg R &= 0.013\ 0173; & \omega &= -1^\circ 1' 44''.9 \\ \lg R \cdot \cos V &= 0.012\ 9401; & V &= +1^\circ 4' 50''.69; \end{aligned}$$

Zur Kontrolle erhält man in der That:

$$\lg E \cdot \sin \text{hyp } \Theta = \bar{1}.072\ 6886; \quad \lg \Theta = \bar{1}.046\ 8210$$

und

$$\lg (E \cdot \sin \text{hyp } \Theta + \Theta) = \lg N = \bar{1}.360\ 9773.$$

*II. Beispiel.* Gegeben ist eine zur Sonne konkave Hyperbelbahn mit grosser Exzentrizität:

$$\begin{aligned} M_{\pi} &= 2.6287 \text{ Februar } 1744 \text{ M. Z. Berlin (Komet Chéseaux)} \\ 1 - \mu &= 0.8; & \mu &= + 0.2 \text{ (attraktiv)} \\ \lg P &= 0.397\,9400; & \lg E &= 0.806\,3920 \\ \lg A &= \bar{2}.795\,8799; & \omega_{\pi} &= + 38^{\circ} 39' 35''. \end{aligned}$$

Es soll die Lage der Schweifmaterie im Momente 1744 Februar 24.6543 M. Z. B. bestimmt werden. Man erhält  $\lg N = 1.035\,2044$ . Mit den Tafeln von Ligowski ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= 1.403; & F_1 &= 62^{\circ} 22' 28''.68; \\ \Theta_2 &= 1.404; & F_2 &= 62^{\circ} 24' 4''.28; \end{aligned}$$

olglich:

$$\begin{aligned} \lg \sin \text{hyp } \Theta_1 &= 0.281\,2067; & \lg \cos \text{hyp } \Theta_1 &= 0.333\,7738; & \lg(E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 - 1) &= 1.107\,5191; \\ \lg \sin \text{hyp } \Theta_2 &= 0.281\,6969; & \lg \cos \text{hyp } \Theta_2 &= 0.334\,1586; & \lg(E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 - 1) &= 1.107\,9340. \end{aligned}$$

Demnach ist:

$$\begin{aligned} \lg N_1 &= 1.034\,7027\,4; & \lg \Delta N_1 &= \bar{2}.097\,5788; \\ \lg N_2 &= 1.035\,2162\,7; & \lg \Delta N_2 &= \bar{4}.471\,8767_n. \end{aligned}$$

und nach der genäherten Formel ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \lg \Delta \Theta_1 &= \bar{4}.990\,0597; & \Delta \Theta_1 &= + 0.000\,9773\,7; & \Theta &= 1.403\,977. \\ \lg \Delta \Theta_2 &= \bar{5}.363\,9427_n; & \Delta \Theta_2 &= - 0.000\,0231\,2; \end{aligned}$$

Die Anwendung der genauen Formel führt wiederum zu keinem wesentlich genaueren Resultate. In der That:

$$\begin{aligned} \lg \alpha_1 &= \bar{3}.271\,169; & \lg\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha_1 + \dots\right) &= \bar{1}.999\,7972; \\ \lg \alpha_2 &= \bar{5}.645\,128_n; & \lg\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha_2 + \dots\right) &= 0.000\,0048; \\ \lg \Delta \Theta_1 &= \bar{4}.989\,8569; & \Delta \Theta_1 &= + 0.000\,9769\,1; & \Theta &= 1.403\,9769. \\ \lg \Delta \Theta_2 &= \bar{5}.363\,9475_n; & \Delta \Theta_2 &= - 0.000\,0231\,1; \end{aligned}$$

Weiter erhält man:

$$\lg \sin \text{hyp } \Theta = \lg . \operatorname{tg} F = 0.281\ 6855;$$

$$\lg \cos \text{hyp } \Theta = \lg . \operatorname{sec} F = 0.334\ 1497$$

und zuletzt

$$\begin{aligned} \lg R . \sin V &= \bar{1}.878\ 5955; & \lg R &= \bar{1}.903\ 8042; & \omega &= +109^\circ 19' 34''.2. \\ \lg R . \cos V &= \bar{1}.423\ 7205; & V &= +70^\circ 39' 59''.15; \end{aligned}$$

Die Kontrolle liefert:

$$\lg E . \sin \text{hyp } \Theta = 1.088\ 0775; \quad \lg \Theta = 0.147\ 3599$$

und

$$\lg (E . \sin \text{hyp } \Theta - \Theta) = \lg N = 1.035\ 2044.$$

*III. Beispiel.* Bestimmt soll werden die Position der Schweifmaterie auf der im I. Beispiel gegebenen Hyperbel 30 Tage nach dem Periheldurchgange. Für diesen Moment erhält man  $\lg N = 0.937\ 8297$ .

Mit den Tafeln von Ligowski erhält man:

$$\Theta_1 = 2.46; \quad F_1 = 80^\circ 14' 0''.930;$$

$$\Theta_2 = 2.47; \quad F_2 = 80^\circ 19' 49''.102;$$

und mit den Schrön'schen Logarithmentafeln:

$$\lg \sin \text{hyp } \Theta_1 = 0.764\ 1528; \quad \lg \cos \text{hyp } \Theta_1 = 0.770\ 4929; \quad \lg (E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_1 + 1) = 0.859\ 9784;$$

$$\lg \sin \text{hyp } \Theta_2 = 0.768\ 5590; \quad \lg \cos \text{hyp } \Theta_2 = 0.774\ 7735; \quad \lg (E \cdot \cos \text{hyp } \Theta_2 + 1) = 0.863\ 6707.$$

Ferner ist:

$$\lg N_1 = 0.935\ 1801; \quad \lg \Delta N_1 = \bar{2}.721\ 8982;$$

$$\lg N_2 = 0.938\ 8327; \quad \lg \Delta N_2 = \bar{2}.301\ 8427_n.$$

nach der genäherten Formel (62) bei  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ergibt sich  $\Theta$  nur bis auf 4 Stellen genau:

$$\lg \Delta \Theta_1 = \bar{3}.861\ 9197; \quad \Delta \Theta_1 = +0.007\ 2764; \quad \Theta = 2.4673.$$

$$\lg \Delta \Theta_2 = \bar{3}.438\ 1721_n; \quad \Delta \Theta_2 = -0.002\ 7426;$$



Viel genauer schon erhält man  $\Theta$  bei Anwendung der korrekten Formel (62):

$$\lg \alpha_1 = \bar{2}.092\ 0941; \quad \lg \frac{1}{4} \alpha_1 = \bar{3}.490\ 034; \quad \lg \frac{1}{8} \alpha_1^2 = \bar{5}.281\ 098; \quad \lg \frac{5}{64} \alpha_1^3 = 7.169\ 07;$$

$$\lg \alpha_2 = \bar{3}.669\ 0604_n; \quad \lg \frac{1}{4} \alpha_2 = \bar{3}.067\ 000_n; \quad \lg \frac{1}{8} \alpha_2^2 = \bar{6}.435\ 031; \quad \lg \frac{5}{64} \alpha_2^2 = \bar{9}.999\ 97_n;$$

und:

$$\lg \left( 1 - \frac{1}{4} \alpha_1 + \frac{1}{8} \alpha_1^2 - \frac{5}{64} \alpha_1^3 + \dots \right) = \bar{1}.998\ 6641;$$

$$\lg \left( 1 - \frac{1}{4} \alpha_2 + \frac{1}{8} \alpha_2^2 - \frac{5}{64} \alpha_2^3 + \dots \right) = 0.000\ 5076;$$

folglich bis auf sieben Stellen genau:

$$\lg \Delta \Theta_1 = \bar{3}.860\ 5838; \quad \Delta \Theta_1 = +0.007\ 2541; \quad \Theta = 2.467\ 2541.$$

$$\lg \Delta \Theta_2 = \bar{3}.438\ 6797_n; \quad \Delta \Theta_2 = -0.002\ 7459;$$

Mit diesen genaueren Werten erhält man nach den Formeln (64) und (65)

$$\lg \sin \text{hyp } \Theta = 0.767\ 3492 = \lg \text{tg } F;$$

$$\lg \cos \text{hyp } \Theta = 0.773\ 5980 = \lg \sec F;$$

und endlich nach den Formeln (51), (52) und (53)

$$\lg R \cdot \sin V = 0.008\ 2237; \quad \lg R = 0.560\ 5942; \quad \omega = +14^\circ 10' 6''.5.$$

$$\lg R \cdot \cos V = 0.542\ 8253; \quad V = +16^\circ 16' 42''.08;$$

Zur Kontrolle erhält man:

$$\lg E \cdot \sin \text{hyp } \Theta = 0.792\ 3192; \quad \lg \Theta = 0.392\ 2139;$$

und mit den Additionslogarithmen:

$$\lg [E \cdot \sin \text{hyp } \Theta + \Theta] = \lg N = 0.937\ 8297.$$

Wie namentlich aus diesem letzten Beispiele zu ersehen ist, genügt die Formel (60) den grössten Anforderungen einer korrekten und einfachen Lösung der transzendenten Gleichung in der hyperbolischen Bewegung.

**§ 5. Die Variationen der den Ausströmungspunkt betreffenden Grössen.**

Die auf Grund dreier Beobachtungen abgeleitete und den Bewegungsgesetzen streng genügende Hyperbel liefert für alle Beobachtungen gewisse Differenzen  $\delta R$  und  $\delta \omega$  (Beobachtung — Theorie), welche bei einer definitiven Bahnbestimmung auf ein Minimum zu reduzieren sind. Es müssen deshalb solche Variationen  $\delta M_0$  ( $\delta v_0, \delta r_0$ ),  $\delta g, \delta G$  und  $\delta \mu$  abgeleitet werden, dass die hierdurch verbesserte Hyperbel die Fehlerquadratsumme der übrig bleibenden Differenzen  $\delta R, \delta \omega$  zu einem Minimum macht. Zu diesem Zwecke sind Differentialformeln abzuleiten, welche die Variationen  $\delta R$  ( $\delta \lg_e R$ ),  $\delta \omega$  als Funktionen der Variationen der Anfangsbedingungen  $\delta M_0$  ( $\delta v_0, \delta r_0$ ),  $\delta g, \delta G$  und der Variation der effektiven Sonnenkraft  $\delta \mu$  darstellen. Diese Formeln liefern im Falle von  $n$  Beobachtungen  $2n$  Gleichungen, welche letztere nach der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden. Mit den neuen Werten  $M_0 + \delta M_0$  ( $v_0 + \delta v_0, r_0 + \delta r_0$ ),  $g + \delta g, G + \delta G$  und  $\mu + \delta \mu$  wird nach § 3 eine Hyperbel abgeleitet, welche als definitive Bahn der beobachteten Schweifmaterie angesehen werden kann.

Vor Ableitung der eben erwähnten Formeln müssen zuerst die Variationen, welche sich direkt auf den Ausströmungspunkt beziehen, darauf die Variationen der Hyperbelelemente als Funktionen der Variationen  $\delta M_0$  ( $\delta v_0, \delta r_0$ ),  $\delta g, \delta G, \delta \mu$  dargestellt werden.

Wir beginnen mit den Variationen, welche sich direkt auf den Ausströmungspunkt, sowohl auf der Kometenbahn, als auch auf der Hyperbelbahn beziehen.

Der Radiusvektor und die wahre Anomalie:

$$r_0 = \frac{p}{e \cdot \cos v_0 + 1}.$$

Nach Differentiation des logarithmischen Ausdrucks erhält man:

$$\frac{\delta r_0}{r_0} = - \frac{e \cdot \delta \cos v_0}{e \cdot \cos v_0 + 1} = + \frac{e \cdot r_0 \cdot \sin v_0}{p} \cdot \delta v_0$$

oder auf Grund der Formel (16):

$$\frac{\delta r_0}{r_0} = + \cotg \beta \cdot \delta v_0; \quad \delta v_0 = + \tg \beta \cdot \frac{\delta r_0}{r_0} \dots \dots \dots (66)$$

Die Variation des Ausströmungsmoments auf der Kometenbahn ergibt sich aus der Relation:

$$(M_0 - T_\pi) \cdot \frac{K}{a^{3/2}} = E_0 - e \cdot \sin E_0$$

$a$  — grosse Halbachse,  $E_0$  — die exzentrische Anomalie im Momente  $M_0$ ,  $T_\pi$  — Periheldurchgangsmoment des Kometenkerns. Die Differentiation liefert:

$$k \cdot \delta M_0 = a^{3/2} \cdot (1 - e \cdot \cos E_0) \cdot \delta E_0 = r_0 \cdot \sqrt{a} \cdot \delta E_0.$$

Nach Differentiation des logarithmischen Ausdrucks von

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_0 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0$$

und unter Berücksichtigung der Formel:

$$r_0 \cdot \sin v_0 = \sqrt{a \cdot p} \cdot \sin E_0$$

folgt:

$$\delta E_0 = \frac{\sin E_0}{\sin v_0} \cdot \delta v_0 = \frac{r_0}{\sqrt{a \cdot p}} \cdot \delta v_0,$$

also ist:

$$k \cdot \delta M_0 = + \frac{r_0^2}{\sqrt{p}} \cdot \delta v_0 = + \frac{r_0}{\sqrt{p}} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \delta r_0$$

oder:

$$r_0 \cdot \delta v_0 = \frac{\sqrt{p}}{r_0} \cdot k \cdot \delta M_0 = h_0 \cdot \sin \beta \cdot k \cdot \delta M_0 \dots \dots \dots (67)$$

$$\delta r_0 = \frac{\sqrt{p}}{r_0} \cdot \operatorname{cotg} \beta \cdot k \cdot \delta M_0 = h_0 \cdot \cos \beta \cdot k \cdot \delta M_0 \dots \dots \dots (68)$$

andererseits ist nach Formel (16):

$$\delta r_0 = + \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \sin v_0 \cdot k \cdot \delta M_0 \dots \dots \dots (69)$$

Die Variation des Tangentenwinkels zur Kometenbahn im Ausströmungspunkte ergibt sich aus dem logarithmischen Ausdrucke der Formel:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p}{e \cdot r_0 \cdot \sin v_0}$$

und zwar:

$$\frac{\delta \beta}{\sin \beta \cdot \cos \beta} = - \frac{\delta r_0}{r_0} - \operatorname{cotg} v_0 \cdot \delta v_0 = - (\operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} v_0) \cdot \delta v_0 = - \frac{\sin (\beta + v_0)}{\sin \beta \cdot \sin v_0} \cdot \delta v_0$$

folglich wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \beta}{\cos \beta} &= - \frac{\sin (\beta + v_0)}{\sin v_0} \cdot \delta v_0 \\ \frac{\delta \beta}{\sin \beta} &= - \frac{\sin (\beta + v_0)}{\sin v_0} \cdot \frac{\delta r_0}{r_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

Andererseits ist:

$$h_0 \cdot \delta \beta = - \sin (\beta + v_0) \cdot \frac{h_0 \cos \beta}{\sin v_0} \cdot \delta v_0$$

und weil:

$$\frac{h_0 \cdot \cos \beta}{\sin v_0} = + \frac{e}{\sqrt{p}} = \text{konst.},$$

so folgt:

$$h_0 \cdot \delta \beta = - \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \sin (\beta + v_0) \delta v_0 = - \frac{e}{r_0^2} \sin (\beta + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0. \dots (71)$$

Die Variation der Orbitalgeschwindigkeit des Kometenkerns im Ausströmungsmomente erhält nach Differenziation der Formel:

$$h_0^2 = \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}$$

und zwar ergibt sich:

$$\delta h_0 = - \frac{1}{h_0 \cdot r_0} \cdot \frac{\delta r_0}{r_0}$$

oder:

$$\delta h_0 = - \frac{\sin \beta}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\delta r_0}{r_0} = - \frac{\cos \beta}{\sqrt{p}} \cdot \delta v_0. \dots (72)$$

also auch:

$$\delta h_0 = + \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \cos (\beta + v_0) \cdot \delta v_0 = + \frac{e}{r_0^2} \cdot \cos (\beta + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0. \dots (73)$$

Die Variation des Tangentenwinkels auf der Hyperbelbahn im Ausströmungspunkte ergibt sich durch Differenziation des logarithmischen Ausdrucks von:

$$\frac{\sin (\beta_1 - G)}{\sin \gamma} = \frac{h_0}{g}; \quad \gamma = \beta_1 - \beta.$$

Man erhält:

$$[\cotg (\beta_1 - G) - \cotg \gamma] \cdot \delta \beta_1 = - \cotg \gamma \cdot \delta \beta + \frac{\delta h_0}{h_0} - \frac{\delta g}{g} + \cotg (\beta_1 - G) \delta G,$$

da:

$$\cotg (\beta_1 - G) - \cotg \gamma = - \frac{\sin (\beta - G)}{\sin (\beta_1 - G) \cdot \sin \gamma} = - \frac{H_0}{h_0 \cdot \sin \gamma}$$

so folgt nach beiderseitiger Multiplikation mit  $- h_0 \cdot \sin \gamma$ :

$$H_0 \cdot \delta \beta_1 = + \cos \gamma \cdot h_0 \cdot \delta \beta - \sin \gamma \cdot \delta h_0 + \frac{h_0}{g} \cdot \sin \gamma \cdot \delta g - h_0 \cdot \sin \gamma \cdot \cotg (\beta_1 - G) \cdot \delta G.$$

Da ferner:

$$\frac{h_0}{g} \cdot \sin \gamma = \sin (\beta_1 - G); \quad h_0 \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin (\beta_1 - G)} = g$$

so erhält man nach Substitution der Ausdrücke für  $h_0 \cdot \delta\beta$  und  $\delta h_0$  aus (71) und (73) nach einer geringen trigonometrischen Transformation:

$$\begin{aligned} H_0 \cdot \delta\beta_1 &= -\frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \sin (\beta_1 + v_0) \cdot \delta v_0 + \sin (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \cos (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G \\ &= -\frac{e}{r_0^2} \cdot \sin (\beta_1 + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0 + \sin (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \cos (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G \dots (74) \end{aligned}$$

Die Variation der Orbitalgeschwindigkeit der Kometenschweifmaterie im Ausströmungsmomente  $M_0$  erhält man aus der Formel:

$$H_0^2 = h_0^2 + g^2 - 2 \cdot h_0 \cdot g \cdot \cos (\beta - G).$$

Nach Differenziation und beiderseitiger Division durch  $2H_0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= \left[ \frac{h_0}{H_0} - \frac{g}{H_0} \cdot \cos (\beta - G) \right] \cdot \delta h_0 + \frac{g}{H_0} \cdot \sin (\beta - G) \cdot h_0 \cdot \delta\beta + \left[ \frac{g}{H_0} - \frac{h_0}{H_0} \cdot \cos (\beta - G) \right] \cdot \delta g - \\ &\quad - \frac{h_0}{H_0} \cdot \sin (\beta - G) \cdot g \cdot \delta G \end{aligned}$$

infolge der Beziehungen:

$$\frac{h_0}{H_0} = \frac{\sin (\beta_1 - G)}{\sin (\beta - G)}; \quad \frac{g}{H_0} = \frac{\sin \gamma}{\sin (\beta - G)}; \quad \gamma = \beta_1 - \beta$$

ergibt sich einfacher:

$$\delta H_0 = + \sin \gamma \cdot h_0 \cdot \delta\beta + \cos \gamma \cdot \delta h_0 - \cos (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \sin (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G$$

oder nach Substitution von  $h_0 \cdot \delta\beta$  und  $\delta h_0$  aus (71) und (73)

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= + \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \cos (\beta_1 + v_0) \cdot \delta v_0 - \cos (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \sin (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G \\ &= + \frac{e}{r_0^2} \cdot \cos (\beta_1 + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0 - \cos (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \sin (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G. \dots (75) \end{aligned}$$

Wie die folgende Zusammenstellung zeigt, besitzen die in diesem Paragraphen entwickelten Formeln eine grosse Symmetrie:

$$r_0^2 \cdot \delta v_0 = + \sqrt{p} \cdot k \cdot \delta M_0;$$

$$\delta r_0 = + \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \sin v_0 \cdot k \cdot \delta M_0;$$

$$h_0 \cdot \delta \beta = - \frac{e}{r_0^2} \cdot \sin (\beta + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0;$$

$$\delta h_0 = + \frac{e}{r_0^2} \cdot \cos (\beta + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0;$$

$$H_0 \cdot \delta \beta_1 = - \frac{e}{r_0^2} \cdot \sin (\beta_1 + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0 + \sin (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \cos (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G;$$

$$\delta H_0 = + \frac{e}{r_0^2} \cdot \cos (\beta_1 + v_0) \cdot k \cdot \delta M_0 - \cos (\beta_1 - G) \cdot \delta g - \sin (\beta_1 - G) \cdot g \cdot \delta G.$$

### § 6. Die Variationen der Hyperbelelemente.

Die Variationen der Hyperbelelemente ergeben sich in folgender Weise als Funktionen der Variationen  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$ .

Die Variation der vom Radiusvektor in der Zeiteinheit  $1/k$  mittlere Sonnenlage beschriebenen *doppelten Fläche* erhält man aus der Formel:

$$C = \sqrt{p} - r_0 \cdot g \cdot \sin G.$$

Nach Differenziation und Substitution von  $\delta r_0$  aus der Formel (69)

$$\delta C = - g \cdot \sin G \cdot \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \sin v_0 \cdot k \cdot \delta M_0 - r_0 \cdot \sin G \cdot \delta g - r_0 \cdot \cos G \cdot g \cdot \delta G. \dots (76)$$

Die Variation des *halben Parameters* ergibt sich nach Differenziation des logarithmischen Ausdrucks von:

$$P = C^2 : \mu, \quad \text{wobei} \quad C = \sqrt{P\mu} = H_0 \cdot r_0 \cdot \sin \beta_1.$$

Man erhält zuerst:

$$\frac{\delta P}{P} = 2 \cdot \frac{\delta C}{C} - \frac{\delta \mu}{\mu}$$

oder nach Substitution von  $\delta C$  aus der Formel (76):

$$\frac{\delta P}{P} = p_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + p_2 \cdot \delta g + p_3 \cdot g \cdot \delta G + p_4 \cdot \delta \mu. \dots (77)$$

wobei:

$$\begin{aligned} p_1 &= -2 \cdot g \cdot \frac{\sin G}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \sin v_0 = -2 \cdot g \cdot \frac{\sin G}{\sqrt{P\mu}} \cdot h_0 \cos \beta; \\ p_2 &= -2 \cdot r_0 \cdot \frac{\sin G}{\sqrt{P\mu}} = -2 \cdot \frac{\sin G}{H_0 \cdot \sin \beta_1}; \\ p_3 &= -2 \cdot r_0 \cdot \frac{\cos G}{\sqrt{P\mu}} = -2 \cdot \frac{\cos G}{H_0 \cdot \sin \beta_1}; \\ p_4 &= -\frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Die Variation der *grossen Halbachse* erhält man aus dem logarithmischen Ausdruck der Formel:

$$A = \frac{r_0}{m \mp 2}; \quad \text{wobei } m = \frac{H_0^2 r_0}{\mu}.$$

Es ist:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{m}{m \mp 2} \cdot \frac{\delta m}{m} = \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{A \cdot H_0^2}{\mu} \cdot \left( 2 \cdot \frac{\delta H_0}{H_0} + \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{\delta \mu}{\mu} \right)$$

da

$$1 - \frac{A \cdot H_0^2}{\mu} = 1 - \left( 1 \pm 2 \frac{A}{r_0} \right) = \mp 2 \cdot \frac{A}{r_0}$$

so folgt:

$$\frac{\delta A}{A} = -2 \cdot \frac{A H_0}{\mu} \cdot \delta H_0 \mp 2 \cdot \frac{A}{r_0} \cdot \frac{\delta r_0}{r_0} + A \cdot \left( \frac{H_0}{\mu} \right)^2 \cdot \delta \mu$$

nach Substitution von  $\delta H_0$  und  $\delta r_0$  aus den Formeln (75) und (69) ergibt sich:

$$\frac{\delta A}{A} = a_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + a_2 \cdot \delta g + a_3 \cdot g \cdot \delta G + a_4 \cdot \delta \mu \dots \dots \dots (78)$$

wobei:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \cdot A \cdot \left[ \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 + v_0) \pm \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} \right] \cdot \frac{e}{r_0^2}; \\ a_2 &= +2 \cdot A \cdot \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 - G); \\ a_3 &= +2 \cdot A \cdot \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 - G); \\ a_4 &= +A \cdot \left( \frac{H_0}{\mu} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Variation der *Exzentrizität* lässt sich aus dem logarithmischen Ausdruck der Formel:

$$E^2 - 1 = m \cdot (m \mp 2) \cdot \sin^2 \beta_1$$

ableiten.

Man erhält:

$$\frac{E}{E^2 - 1} \cdot \delta E = \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{\delta m}{m} + \cotg \beta_1 \cdot \delta \beta_1$$

oder

$$\frac{AE}{P} \cdot \delta E = \frac{m-1}{m-2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{\delta H_0}{H_0} + \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{\delta \mu}{\mu} \right) + \cotg \beta_1 \cdot \delta \beta_1.$$

Nach Einführung des Ausdrucks für  $\delta r_0$  aus (69):

$$\begin{aligned} \delta E &= \frac{P}{A \cdot E} \cdot \left( 2 \cdot \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{\delta H_0}{H_0} + \cotg \beta_1 \cdot \delta \beta_1 \right) + \frac{P}{A \cdot E} \cdot \frac{m-1}{m-2} \cdot \left( \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{\delta \mu}{\mu} \right) \\ &= \frac{P}{E \cdot \sqrt{P\mu}} \cdot \left[ 2 \cdot (m-1) \cdot \sin \beta_1 \cdot \delta H_0 + (m-2) \cdot \cos \beta_1 \cdot H_0 \cdot \delta \beta_1 \right] + \\ &\quad + \frac{P}{E} \cdot \frac{m-1}{r_0} \cdot \left( \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sin v_0}{r_0} \cdot k \cdot \delta M_0 - \frac{\delta \mu}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der ersten grossen Klammer verwandelt sich nach der Substitution von  $\delta H_0$  und  $H_0 \cdot \delta \beta_1$  aus den Formeln (75) resp. (74) in:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ 2 \cdot (m-1) \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos(\beta_1 + v_0) - (m-2) \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin(\beta_1 + v_0) \right] \cdot \frac{e}{r_0^2} \cdot k \cdot \delta M_0 - \\ & - \left[ 2 \cdot (m-1) \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos(\beta_1 - G) - (m-2) \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin(\beta_1 - G) \right] \cdot \delta g - \\ & - \left[ 2 \cdot (m-1) \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin(\beta_1 - G) + (m-2) \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] \cdot g \cdot \delta G. \end{aligned} \right\} \dots (79)$$

Wird nun in diesem Ausdrucke gesetzt:

$$m-2 = 2(m-1) - m$$

so verwandelt sich  $\delta E$  in:

$$\begin{aligned} \delta E &= - \frac{P}{E \cdot \sqrt{P\mu}} \cdot \left[ 2(m-1) \cdot \sin v_0 - m \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin(\beta_1 + v_0) \right] \cdot \frac{e}{r_0^2} \cdot k \cdot \delta M_0 + \\ &\quad + \frac{P}{E} \cdot (m-1) \cdot \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} \cdot \frac{e}{r_0^2} \cdot k \cdot \delta M_0 - \\ & - \frac{P}{E \cdot \sqrt{P\mu}} \cdot \left[ 2 \cdot (m-1) \cdot \sin G + m \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin(\beta_1 - G) \right] \cdot \delta g - \\ & - \frac{P}{E \cdot \sqrt{P\mu}} \cdot \left[ 2 \cdot (m-1) \cdot \cos G - m \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] \cdot g \cdot \delta G - \\ & - \frac{P}{E} \cdot \frac{m-1}{r_0} \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} \end{aligned}$$



und ist gemäss den Formeln (16) und (47):

$$\begin{aligned} \frac{P}{E} \cdot (m \mp 1) &= \mp \frac{P}{E} \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) \cdot \operatorname{cotg} \beta_1 = \mp \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) \cdot r_0 \cdot \sin V_0; \\ \frac{P}{E} \cdot \frac{m}{\sqrt{P\mu}} \cdot \cos \beta_1 &= \mp \frac{P}{E} \cdot \frac{H_0}{\mu} \cdot \operatorname{cotg} \beta_1 = \mp \frac{H_0}{\mu} \cdot r_0 \cdot \sin V_0, \end{aligned}$$

folglich wird:

$$\delta E = \varepsilon_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \varepsilon_2 \cdot \delta g + \varepsilon_3 \cdot g \cdot \delta G + \varepsilon_4 \cdot \delta \mu \dots \dots \dots (80)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left[ \mp \left( \frac{2}{\sqrt{P\mu}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \sin v_0 \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) + \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 + v_0) \right] \cdot \frac{e}{r_0} \cdot \sin V_0; \\ \varepsilon_2 &= \left[ \mp \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \sin G \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) - \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 - G) \right] \cdot r_0 \cdot \sin V_0; \\ \varepsilon_3 &= \left[ \mp \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \cos G \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) + \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] \cdot r_0 \cdot \sin V_0; \\ \varepsilon_4 &= \mp \frac{\sin V_0}{\mu} \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0). \end{aligned}$$

Der Ausdruck (79) lässt eine zweite Transformation zu, wenn man setzt:

$$2 \cdot (m \mp 1) = (m \mp 2) + m.$$

Übrigens kann das sich hieraus ergebende Resultat auch einfacher aus der Formel:

$$E^2 - 1 = P : A$$

erhalten werden. Die Differenziation des logarithmischen Ausdrucks liefert:

$$\delta E = \frac{P}{2AE} \cdot \left( \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta A}{A} \right).$$

Nach Substitution von  $\delta P$  und  $\delta A$  folgt:

$$\delta E = \delta_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \varepsilon_2 \cdot \delta g + \varepsilon_3 \cdot g \cdot \delta G + \varepsilon_4 \cdot \delta \mu \dots \dots \dots (81)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mp \frac{P}{2 \cdot A \cdot E} \cdot (p_1 - a_1) = -\frac{P}{E} \cdot \left[ \left( \frac{r_0}{A} \cdot \frac{g \sin G}{H_0 \cdot \sin \beta_1} \mp 1 \right) \cdot \frac{\sin v_0}{\sqrt{P}} - \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 + v_0) \right] \cdot \frac{e}{r_0^2} \\ \varepsilon_2 &= \mp \frac{P}{2 \cdot A \cdot E} \cdot (p_2 - a_2) = -\frac{P}{E} \cdot \left[ \frac{r_0}{A} \cdot \frac{\sin G}{\sqrt{P\mu}} + \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 - G) \right]; \\ \varepsilon_3 &= \mp \frac{P}{2 \cdot A \cdot E} \cdot (p_3 - a_3) = -\frac{P}{E} \cdot \left[ \frac{r_0}{A} \cdot \frac{\cos G}{\sqrt{P\mu}} + \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 - G) \right]; \\ \varepsilon_4 &= -\frac{P}{\mu} \cdot \frac{\sec F_0}{r_0} = -(E \mp \cos V_0) \cdot \mu^{-1}. \end{aligned}$$

Der neue Ausdruck des Koeffizienten  $\varepsilon_4$  ist, wie folgt, erhalten:

$$\varepsilon_4 = + \frac{P}{2AE} \cdot (p_4 - a_4) = - \frac{P}{2AE} \cdot \left[ 1 + \frac{AH_0^2}{\mu} \right] \cdot \mu^{-1} = - \frac{P}{2E \cdot r_0} \cdot \left[ \frac{r_2}{A} + \frac{H_0^2 \cdot r_0}{\mu} \right] \cdot \mu^{-1}.$$

Nach Berücksichtigung der Formeln (45) und (20) ergeben sich die obigen Resultate, welche natürlich mit dem früheren Werte  $\varepsilon_4$  identisch sind.

Die Variation des *Perihelwinkels*  $\omega_\pi$  entwickelt sich aus den Formeln

$$\omega_\pi = v_0 - V_0; \quad \cotg V_0 = \left( 1 + \frac{r_0}{P} \right) \operatorname{tg} \beta_1.$$

Die Differenziation des logarithmischen Ausdrucks von  $\cotg V_0$  ergibt:

$$- \frac{\delta V_0}{\sin V_0 \cdot \cos V_0} = + \left( \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{\delta P}{P} \cdot \frac{1}{\frac{P}{r_0} + 1} + \frac{\delta \beta_1}{\sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1} \right),$$

da:

$$\frac{P}{r_0} + 1 = E \cdot \cos V_0$$

und:

$$\sin V_0 = \frac{P}{E \cdot r_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1} = \frac{(H_0 \cdot r_0 \cdot \sin \beta_1)^2}{\mu \cdot E \cdot r_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1} = \frac{H_0^2 \cdot r_0}{\mu} \cdot \frac{\sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1}{E},$$

so folgt:

$$- \delta V_0 = + \left( \frac{\delta r_0}{r_0} - \frac{\delta P}{P} \right) \cdot \frac{\sin V_0}{E} + \frac{H_0 \cdot r_0}{\mu} \cdot \frac{\cos V_0}{E} \cdot H_0 \cdot \delta \beta_1.$$

Nach Substitution  $\delta r_0$ ,  $\delta P$ ,  $H_0 \cdot \delta \beta_1$  aus den Formeln (69), (77) und (74) wird:

$$\begin{aligned} - \delta V_0 = & \left[ + \frac{\sin V_0}{E} \cdot \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot r_0 \cdot g \cdot \sin G \right) \cdot \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} - \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 + v_0) \cdot \frac{\cos V_0}{E} \right] \cdot \frac{e}{r_0} \cdot k \cdot \delta M_0 \\ & + \left[ + \frac{\sin V_0}{E} \cdot \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \sin G + \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 - G) \cdot \frac{\cos V_0}{E} \right] \cdot r_0 \cdot \delta g \\ & + \left[ + \frac{\sin V_0}{E} \cdot \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \cos G - \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 - G) \cdot \frac{\cos V_0}{E} \right] \cdot r_0 \cdot g \cdot \delta G \\ & + \frac{\sin V_0}{E} \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} \end{aligned}$$

oder da:

$$\left( 1 + \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot r_0 \cdot g \cdot \sin G \right) \cdot \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{P\mu} + 2(\sqrt{p} - \sqrt{P\mu})}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} = \left( \frac{2}{\sqrt{P\mu}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \cdot \sin v_0$$

so erhält man für  $\delta\omega_\pi$  einen Ausdruck, der mit dem von  $\delta E$  (80) eine grosse Analogie besitzt:

$$\delta\omega_\pi = \pi_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \pi_2 \cdot \delta g + \pi_3 \cdot g \cdot \delta G + \pi_4 \cdot \delta\mu \dots \dots \dots (82)$$

$$\pi_1 = \left[ \mp \left( \frac{2}{\sqrt{P\mu}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \cdot \sin v_0 \cdot \operatorname{tg} V_0 - \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 + v_0) \right] \cdot \frac{e}{r_0} \cdot \frac{\cos V_0}{E} - \frac{\sqrt{p}}{r_0^2};$$

$$\pi_2 = \left[ \mp \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \sin G \cdot \operatorname{tg} V_0 + \frac{H_0}{\mu} \cdot \sin(\beta_1 - G) \right] \cdot r_0 \cdot \frac{\cos V_0}{E};$$

$$\pi_3 = \left[ \mp \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \cos G \cdot \operatorname{tg} V_0 + \frac{H_0}{\mu} \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] \cdot r_0 \cdot \frac{\cos V_0}{E};$$

$$\pi_4 = \mp \frac{\sin V_0}{\mu} \cdot E^{-1}.$$

Den Koeffizienten  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  und  $\pi_4$  kann der Kontrolle wegen noch eine andere Form gegeben werden. Zu diesem Zwecke werden folgende zwei Variationen für  $\delta\omega_\pi$  entwickelt.

I. Es ist:

$$r_0 = \frac{P}{E \cos V_0 \pm 1}.$$

Nach Differenziation des logarithmischen Ausdrucks folgt unter Berücksichtigung der Formel (16) und Hinzuziehung von (66):

$$\frac{\delta r_0}{r_0} = \operatorname{cotg} \beta_1 \cdot \delta V_0 - \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E + \frac{\delta P}{P} \dots \dots \dots (83)$$

$$\frac{\delta r_0}{r_0} = \operatorname{cotg} \beta \cdot \delta v_0,$$

demnach ist:

$$\delta\omega_\pi = \delta v_0 - \delta V_0 = \left( \frac{\delta P}{P} - \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E \right) \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - \frac{\sin \gamma}{r_0 \cdot \cos \beta \cdot \cos \beta_1} \cdot \delta r_0 \dots \dots (84)$$

II. Man erhält aus der Formel (17):

$$E \cdot \cos(\beta_1 + V_0) = \mp \cos \beta_1$$

nach Differenziation des logarithmischen Ausdrucks:

$$- \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) \cdot \delta V_0 = [\operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) - \operatorname{tg} \beta_1] \cdot \delta \beta_1 - \frac{\delta E}{E}$$

oder:

$$- \delta V_0 = \frac{\sin V_0}{\sin(\beta_1 + V_0)} \cdot \frac{\delta \beta_1}{\cos \beta_1} - \operatorname{cotg}(\beta_1 + V_0) \cdot \frac{\delta E}{E}.$$

Das erste Glied kann transformiert werden, indem man Zähler und Nenner mit  $H_0$  multipliziert und  $\sin V_0$  aus der Formel (16) bestimmt.

Es ergibt sich:

$$\delta\omega_\pi = \left[ \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot H_0 \cdot \delta\beta_1 - \cos(\beta_1 + V_0) \cdot \delta E \right] : E \cdot \sin(\beta_1 + V_0) + \frac{\sqrt{p}}{r_0^2} \cdot k \cdot \delta M_0 \dots (85)$$

Die beiden Formeln (84) und (85) können zur Bestimmung neuer Formen für  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  dienen. Doch soll, aus Ursachen, die in der Bequemlichkeit des Rechnens liegen, die Formel (84) nur zur Bestimmung von  $\pi_1$ , und die Formel (85) zur Ableitung anderer Ausdrücke für  $\pi_2$  und  $\pi_3$  benutzt werden. Der Koeffizient  $\pi_4$  von  $\delta\mu$  ergibt sich aus beiden Formeln (84) und (85) identisch mit dem früher in der Formel (82) erhaltenen.

Nach Substitution von  $\delta P, \delta E, \delta r_0$  aus den entsprechenden Formeln (77), (80) und (69), nimmt der Koeffizient  $\pi_1$  von  $k \cdot \delta M_0$  folgende Form an:

$$\pi_1 = \left( p_1 - \varepsilon_1 \cdot \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \right) \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - \frac{\sin \gamma}{r_0 \cdot \cos \beta \cdot \cos \beta_1} \cdot \frac{e \sin v_0}{\sqrt{p}}$$

und kann bedeutend vereinfacht werden. In der That:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 - \frac{\sin \gamma}{r_0 \cdot \cos \beta \cdot \cos \beta_1} \cdot \frac{e \sin v_0}{\sqrt{p}} &= \left[ p_1 - \frac{H_0 \cdot \sin \gamma}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{e \sin v_0}{\cos \beta \cdot \sqrt{p}} \right] \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = \\ &= \left[ p_1 - \frac{g}{\sqrt{P\mu}} \cdot h_0 \sin(\beta - G) \right] \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \end{aligned}$$

oder nach Substitution von  $p_1$  und einigen einfachen Transformationen erhält man:

$$- \frac{g}{\sqrt{P\mu}} \cdot h_0 \cdot [2 \cdot \cos \beta \cdot \sin G + \sin(\beta - G)] \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = - \frac{g}{\sqrt{P\mu}} \cdot h_0 \cdot \sin(\beta + G) \cdot \operatorname{tg} \beta_1$$

demnach wird:

$$\pi_1 = - \left[ \varepsilon_1 \cdot \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 + \frac{g}{\sqrt{P\mu}} \cdot h_0 \cdot \sin(\beta + G) \right] \cdot \operatorname{tg} \beta_1.$$

Die Koeffizienten  $\pi_2$  und  $\pi_3$  erhält man direkt aus (85) durch einfache Substitution von  $H_0 \cdot \delta\beta_1$  und  $\delta E$  aus den Formeln (74) und (80). Der Koeffizient  $\pi_4$  ergibt sich aus (84) nach Substitution von  $\varepsilon_4$  aus (81) und  $p_4$  aus (77):

$$\begin{aligned} \pi_4 &= \left[ -1 + \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot (E \pm \cos V_0) \right] \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\mu} \\ &= \left[ - (E \cdot \cos V_0 \pm 1) + \cos V_0 \cdot (E \pm \cos V_0) \right] \cdot \frac{r_0}{P} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\mu} \\ &= \pm \frac{\sin V_0}{\mu} \cdot E^{-1}. \end{aligned}$$

Derselbe Koeffizient wird aus (84) erhalten, indem man  $\varepsilon_4$  aus (80) substituiert:

$$\pi_4 = \mp \cdot \frac{\cotg(\beta_1 + V_0)}{E} \cdot \frac{\sin V_0}{\mu} \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 + V_0) = \mp \frac{\sin V_0}{\mu} \cdot E^{-1}.$$

Zur Kontrollrechnung erhält man demnach folgenden einfacheren Ausdruck für  $\delta\omega_\pi$ :

$$\delta\omega_\pi = \pi_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \pi_2 \cdot \delta g + \pi_3 \cdot g \cdot \delta G + \pi_4 \cdot \delta\mu \dots \dots \dots (86)$$

wobei:

$$\pi_1 = - \left[ \varepsilon_1 \cdot \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 + \frac{g}{\sqrt{P\mu}} \cdot h_0 \cdot \sin(\beta + G) \right] \cdot \operatorname{tg} \beta_1;$$

$$\pi_2 = - \left[ \varepsilon_2 \cdot \cos(\beta_1 + V_0) - \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot \sin(\beta_1 - G) \right] : E \cdot \sin(\beta_1 + V_0);$$

$$\pi_3 = - \left[ \varepsilon_3 \cdot \cos(\beta_1 + V_0) + \sqrt{\frac{P}{\mu}} \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] : E \cdot \sin(\beta_1 + V_0);$$

$$\pi_4 = \mp \frac{\sin V_0}{\mu} \cdot \cos \psi.$$

Die Variation der *Periheldistanz* erhält man durch Differenziation des logarithmischen Ausdrucks von:

$$Q = P : (E \pm 1) = A \cdot (E \mp 1).$$

Es folgt:

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta E}{E \pm 1} = \frac{\delta A}{A} + \frac{\delta E}{E \mp 1}$$

da andererseits:

$$\delta E = \frac{E^2 - 1}{2E} \cdot \left( \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta A}{A} \right)$$

so wird:

$$\delta Q = \frac{Q}{2} \cdot \left[ \left( 1 \pm \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\delta P}{P} + \left( 1 \mp \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\delta A}{A} \right].$$

Nach Substitution von  $\delta P$  und  $\delta A$  aus den Formeln (77) und (78) erhält man die Koeffizienten von  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  direkt. Der Koeffizient von  $\delta\mu$  lässt wiederum eine bedeutende Vereinfachung zu. Man erhält für letzteren:

$$\frac{Q}{2} \cdot \left[ - \left( 1 \pm \frac{1}{E} \right) + \left( 1 \mp \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{AH_0^2}{\mu} \right] \cdot \frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{A}{r_0} \cdot \left[ - \frac{r_0}{A} \left( 1 \pm \frac{1}{E} \right) + \frac{H_0^2 \cdot r_0}{\mu} \cdot \left( 1 \mp \frac{1}{E} \right) \right] \cdot \frac{\delta\mu}{\mu}$$

oder nach Substitution der Formeln (45) und Berücksichtigung der Formel (19):

$$\mp Q \cdot \frac{A}{r_0} \cdot (\sec F_0 - 1) \cdot \frac{\delta\mu}{\mu} = \mp Q \cdot \frac{A}{P} \cdot (E \mp 1) (1 - \cos V_0) \cdot \frac{\delta\mu}{\mu} = \mp 2 \cdot \left[ \frac{Q \cdot \sin \frac{1}{2} V_0}{\sqrt{P\mu}} \right]^2 \cdot \frac{\delta\mu}{\mu}$$

folglich ist:

$$\delta Q = q_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + q_2 \cdot \delta g + q_3 \cdot g \cdot \delta G + q_4 \cdot \delta \mu \dots \dots \dots (87)$$

wobei:

$$q_1 = \frac{Q}{2} \cdot \left[ p_1 \cdot \left( 1 \pm \frac{1}{E} \right) + a_1 \cdot \left( 1 \mp \frac{1}{E} \right) \right];$$

$$q_2 = \frac{Q}{2} \cdot \left[ p_2 \cdot \left( 1 \pm \frac{1}{E} \right) + a_2 \cdot \left( 1 \mp \frac{1}{E} \right) \right];$$

$$q_3 = \frac{Q}{2} \cdot \left[ p_3 \cdot \left( 1 \pm \frac{1}{E} \right) + a_3 \cdot \left( 1 \mp \frac{1}{E} \right) \right];$$

$$q_4 = \mp 2 \cdot \left[ \frac{Q \cdot \sin \frac{1}{2} V_0}{\sqrt{P\mu}} \right]^2.$$

Einfacher ist:

$$\frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{E} \right) = \sin^2 \frac{\psi}{2}; \quad \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{E} \right) = \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

Die Variation des *Periheldurchgangsmoments*  $M_\pi$  ergibt sich aus der transzendenten Gleichung:

$$\frac{k \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot (M_0 - M_\pi) = E \cdot \operatorname{tg} F_0 \mp \lg_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_0 \right)$$

oder abgekürzt:

$$n \cdot t_0 = N_0; \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}}; \quad t_0 = M_0 - M_\pi;$$

nach der Differenziation folgt:

$$n \cdot \delta M_\pi - t_0 \cdot \delta n - \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot k_0 \cdot \delta M_0 + \delta N_0 = 0.$$

Ferner ist, bei Berücksichtigung der Formel (23):

$$\delta N_0 = \operatorname{tg} F_0 \cdot \delta E + \frac{r_0}{A} \cdot \operatorname{sec} F_0 \cdot \delta F_0.$$

Aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F_0 = \sqrt{\frac{E \mp 1}{E \pm 1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} V_0$$

erhält man nach Differenziation des logarithmischen Ausdrucks:

$$\frac{\delta F_0}{\sin F_0} = \frac{\delta V_0}{\sin V_0} \pm \frac{\delta E}{E^2 - 1} = \frac{\delta V_0}{\sin V_0} \pm \frac{A}{P} \cdot \delta E \dots \dots \dots (SS)$$

folglich wird:

$$\delta N_0 = \left(1 \pm \frac{r_0}{P}\right) \cdot \operatorname{tg} F_0 \cdot \delta E + \frac{r_0}{A} \cdot \operatorname{tg} F_0 \cdot \frac{\delta V_0}{\sin V_0}$$

und endlich gemäss der Formel (21):

$$n \cdot \delta M_\pi - t_0 \cdot \delta n - \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot k \cdot \delta M_0 + \left(1 \pm \frac{r_0}{P}\right) \cdot \operatorname{tg} F_0 \cdot \delta E + \frac{r_0^2}{A^{3/2}} \cdot \frac{\delta V_0}{\sqrt{P}} = 0 \dots (89)$$

$\delta V_0$  ergibt sich aus der Formel (83), indem man zuvor setzt

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta A}{A} + \frac{2AE}{P} \cdot \delta E$$

und die Formel (22) berücksichtigt:

$$\delta V_0 = \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \frac{\delta r_0}{r_0} - \left[\frac{\delta A}{A} + \frac{A}{P} \cdot (E \pm \sec F_0) \cdot \delta E\right] \cdot \operatorname{tg} \beta_1$$

und nach Substitution in (89):

$$\begin{aligned} n \cdot \delta M_\pi - t_0 \cdot \delta n - \frac{r_0^2}{A^{3/2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sqrt{P}} \cdot \frac{\delta A}{A} + \left[\left(1 \pm \frac{r_0}{P}\right) \cdot \operatorname{tg} F_0 - \frac{A}{P} \cdot (E \pm \sec F_0) \cdot \frac{r_0^2}{A^{3/2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sqrt{P}}\right] \cdot \delta E \\ + \frac{r_0}{A^{3/2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sqrt{P}} \cdot \delta r_0 - \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot k \cdot \delta M_0 = 0 \dots \dots \dots (90) \end{aligned}$$

Der Koeffizient von  $\delta E$  kann bedeutend vereinfacht werden. Nach Substitution von  $\operatorname{tg} F_0$  und  $\operatorname{tg} \beta_1$  aus den Formeln (21) und (16) erhält man sofort:

$$\frac{r_0}{\sqrt{A \cdot P} \cdot E \cdot \sin V_0} \cdot \left[\left(1 \pm \frac{r_0}{P}\right) \cdot E \cdot \sin^2 V_0 - (E \pm \sec F_0)\right]$$

nach nochmaliger Ersetzung von  $\sec F_0$  durch den Ausdruck (20) und gleichzeitiger Berücksichtigung der Formel (1), erhält man nach geringen Transformationen:

$$- \frac{r_0^2}{P \cdot E} \cdot \frac{\operatorname{cotg} V_0}{\sqrt{A \cdot P}} \cdot (E \cdot \cos V_0 \pm 1)^2 = - \frac{P}{E} \cdot \frac{\operatorname{cotg} V_0}{\sqrt{A \cdot P}} = - \operatorname{cotg} V_0 \cdot \sin \psi.$$

Demnach existiert die Relation:

$$\left(1 \pm \frac{r_0}{P}\right) \cdot \operatorname{tg} F_0 - (E \pm \sec F_0) \cdot \frac{r_0^2}{\sqrt{A \cdot P}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{P} = - \operatorname{cotg} V_0 \cdot \sin \psi. \dots \dots (91)$$

Ferner ist auf Grund der Formeln (68) und (35)

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{A^{3/2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\sqrt{P}} \cdot \delta r_0 - \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot k \cdot \delta M_0 &= \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \left[ \frac{r_0}{\sqrt{P\mu}} \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \cdot h_0 \cdot \cos \beta - 1 \right] \cdot k \cdot \delta M_0 = \\ &= \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{g \cdot \cos G}{H_0 \cdot \cos \beta_1} \cdot k \cdot \delta M_0. \end{aligned}$$

Wird noch der Einfachheit wegen eine zeitweilige Bezeichnung:

$$\frac{r_0^2}{A^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{P}} = \left(\frac{r_0}{A}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{A}{P}} = \left(\frac{r_0}{A}\right)^2 \cdot \operatorname{cotg} \psi = T_0 \dots \dots \dots (92)$$

eingeführt und beachtet man, dass:

$$-t_0 \cdot \delta n = -N_0 \cdot \frac{\delta n}{n} = -\frac{1}{2} N_0 \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} + \frac{3}{2} N_0 \cdot \frac{\delta A}{A},$$

so verwandelt sich die Gleichung (90) in:

$$\begin{aligned} n \cdot \delta M_\pi + \left(\frac{3}{2} N_0 - T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1\right) \cdot \frac{\delta A}{A} - \operatorname{cotg} V_0 \cdot \sin \psi \cdot \delta E + \\ + \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{g \cos G}{H_0 \cdot \cos \beta_1} \cdot k \cdot \delta M_0 - \frac{1}{2} N_0 \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = 0. \dots \dots \dots (93) \end{aligned}$$

Nach vollzogener Substitution von  $\delta A$  und  $\delta E$  lässt der Koeffizient von  $\delta \mu$  eine kleine Vereinfachung zu. Man erhält für denselben zuerst:

$$\begin{aligned} \left[ \left(\frac{3}{2} N_0 - T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1\right) \cdot \frac{A H_0^2}{\mu} + \operatorname{cotg} V_0 \cdot \sin \psi \cdot (E \pm \cos V_0) - \frac{1}{2} \cdot N_0 \right] \cdot \mu^{-1} \\ = \left[ \frac{1}{2} N_0 \left( 3 \cdot \frac{A H_0^2}{\mu} - 1 \right) - \frac{\sin \psi}{\sin V_0} \cdot \left( \frac{H_0^2 \cdot r_0}{\mu} - \cos V_0 \cdot (E \pm \cos V_0) \right) \right] \cdot \mu^{-1}. \end{aligned}$$

Nach den Formeln (29) und (45) ergibt sich:

$$3 \cdot \frac{A H_0^2}{\mu} - 1 = 2 \cdot \left( 1 \pm 3 \cdot \frac{A}{r_0} \right)$$

$$\frac{H_0^2 \cdot r_0}{\mu} = E \sec F_0 \pm 1 = \frac{r_0}{P} \cdot (E^2 \pm 2E \cdot \cos V_0 + 1)$$



folglich verwandelt sich der in Rede stehende Ausdruck in:

$$\begin{aligned} & \left[ N_0 \cdot \left( 1 \pm 3 \cdot \frac{A}{r_0} \right) - \frac{r_0 \cdot \sin V_0}{P} \cdot \sin \psi \cdot \left( E^2 \pm (E \cdot \cos V_0 \pm 1) \right) \right] \cdot \mu^{-1} \\ & = \left[ N_0 \cdot \left( 1 \pm 3 \cdot \frac{A}{r_0} \right) - \cotg \beta_1 \cdot \operatorname{tg} \psi \pm \sin V_0 \cdot \sin \psi \right] \cdot \mu^{-1} \end{aligned}$$

oder endgültig infolge der Relation (25) und (26):

$$\mp \left( \Theta_0 \mp \sin V_0 \cdot \sin \psi - 3 \cdot \frac{A}{r_0} \cdot N_0 \right) \cdot \mu^{-1}$$

wobei:

$$\Theta_0 = \operatorname{lg}_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{2} F_0 \right) = \operatorname{lg}_e E \cdot \frac{\sin (\beta_1 \mp V_0 \mp \psi)}{\sin \beta_1};$$

Demgemäss wird:

$$k \cdot \delta M_\pi = \mu_1 \cdot k \cdot \delta M_0 \mp \mu_2 \cdot \delta g \mp \mu_3 \cdot g \cdot \delta G \mp \mu_4 \cdot \delta \mu \dots \dots \dots (94)$$

$$\mu_1 = - \frac{A^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot [a_1 \cdot \Delta_0 \mp \varepsilon_1 \cdot \Gamma_0] - \frac{g \cdot \cos G}{H_0 \cdot \cos \beta_1};$$

$$\mu_2 = - \frac{A^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot [a_2 \cdot \Delta_0 \mp \varepsilon_2 \cdot \Gamma_0];$$

$$\mu_3 = - \frac{A^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot [a_3 \cdot \Delta_0 \mp \varepsilon_3 \cdot \Gamma_0];$$

$$\mu_4 = \pm \left( \frac{A}{\mu} \right)^{3/2} \cdot \left[ \Theta_0 \mp \sin V_0 \cdot \sin \psi - 3 \cdot \frac{A}{r_0} \cdot N_0 \right],$$

wobei folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$\Delta_0 = \frac{3}{2} N_0 - T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{3}{2} \cdot N_0 - \frac{r_0}{A} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin V_0};$$

$$\Gamma_0 = - \cotg V_0 \cdot \sin \psi.$$

Zur endgültigen Kontrolle aller vorigen Rechnungen kann noch ein anderer Ausdruck für  $\delta M_\pi$  abgeleitet werden. Als Ausgang gilt die Gleichung (89). Letztere verwandelt sich gemäss der Formel (67) in:

$$n \cdot \delta M_\pi - t_0 \cdot \delta n \mp \left( 1 \pm \frac{r_0}{P} \right) \cdot \operatorname{tg} F_0 \cdot \delta E \mp \frac{r_0^2 \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \left( \frac{\delta V_0}{\sqrt{P\mu}} - \frac{\delta v_0}{\sqrt{P}} \right) = 0 \dots \dots (95)$$

Aus der Formel (83) erhält man:

$$\cotg \beta_1 \cdot \delta V_0 = \cotg \beta \cdot \delta v_0 - \frac{\delta P}{P} + \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E.$$

Setzt man das eine Mal  $\delta V_0 = \delta v_0 - \delta \omega_\pi$  und das andere Mal  $\delta v_0 = \delta V_0 + \delta \omega_\pi$ , so folgt entsprechend:

$$(\cotg \beta_1 - \cotg \beta) \cdot \delta v_0 = \cotg \beta_1 \cdot \delta \omega_\pi - \frac{\delta P}{P} + \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E;$$

$$(\cotg \beta_1 - \cotg \beta) \cdot \delta V_0 = \cotg \beta \cdot \delta \omega_\pi - \frac{\delta P}{P} + \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E;$$

und:

$$-\delta v_0 = \frac{\sin \beta \cdot \sin \beta_1}{\sin \gamma} \cdot \left[ \cotg \beta_1 \cdot \delta \omega_\pi - \frac{\delta P}{P} + \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E \right];$$

$$-\delta V_0 = \frac{\sin \beta \cdot \sin \beta_1}{\sin \gamma} \cdot \left[ \cotg \beta \cdot \delta \omega_\pi - \frac{\delta P}{P} + \frac{r_0}{P} \cdot \cos V_0 \cdot \delta E \right];$$

also:

$$\begin{aligned} & \frac{r_0^2 \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \left( \frac{\delta V_0}{\sqrt{P\mu}} - \frac{\delta v_0}{\sqrt{p}} \right) = \\ & - \frac{r_0 \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2} \cdot \sin \gamma} \cdot \left[ \left( \frac{\cos \beta}{H_0} - \frac{\cos \beta_1}{h_0} \right) \cdot \delta \omega_\pi - \left( \frac{\sin \beta}{H_0} - \frac{\sin \beta_1}{h_0} \right) \cdot \frac{\delta P}{P} + \left( \frac{\sin \beta}{H_0} - \frac{\sin \beta_1}{h_0} \right) \cdot \frac{r_0}{P} \cos V_0 \cdot \delta E \right]. \end{aligned}$$

Jetzt ist gemäss den Formeln (35):

$$\frac{\cos \beta}{H_0} - \frac{\cos \beta_1}{h_0} = \frac{h_0 \cdot \cos \beta - H_0 \cdot \cos \beta_1}{H_0 \cdot h_0} = + \frac{g \cdot \cos G}{H_0 \cdot h_0};$$

$$\frac{\sin \beta}{H_0} - \frac{\sin \beta_1}{h_0} = \frac{h_0 \cdot \sin \beta - H_0 \cdot \sin \beta_1}{H_0 \cdot h_0} = + \frac{g \cdot \sin G}{H_0 \cdot h_0};$$

folglich erhält man nach Einführung der provisorischen Bezeichnung:

$$\frac{r_0 \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{g}{H_0 \cdot h_0 \cdot \sin \gamma} = \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{r_0}{H_0 \cdot \sin(\beta_1 - G)} = \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{r_0}{h_0 \cdot \sin(\beta - G)} = T_0' \dots \dots (96)$$

und indem man noch  $\delta P$  durch  $\delta A$  und  $\delta E$  ersetzt:

$$\frac{r_0^2 \cdot \sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \left( \frac{\delta V_0}{\sqrt{P\mu}} - \frac{\delta v_0}{\sqrt{p}} \right) = T_0' \cdot \sin G \cdot \frac{\delta A}{A} + \frac{A}{P} \cdot (E \pm \sec F_0) \cdot T_0' \cdot \sin G \cdot \delta E - T_0' \cdot \cos G \cdot \delta \omega_\pi.$$

Die Gleichung (95) verwandelt sich nun, nachdem  $\delta n$  wieder durch  $\delta A$  und  $\delta \mu$  ersetzt ist, in:

$$n \cdot \delta M_\pi + \left[ \frac{3}{2} N_0 + T_0' \cdot \sin G \right] \cdot \frac{\delta A}{A} + \left[ \left( 1 \pm \frac{r_0}{P} \right) \cdot \operatorname{tg} F_0 + \frac{A}{P} \cdot (E \pm \sec F_0) \cdot T_0' \cdot \sin G \right] \cdot \delta E - \\ - T_0 \cdot \cos G \cdot \delta \omega_\pi - \frac{1}{2} \cdot N_0 \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = 0 \dots \dots \dots (97)$$

wobei:

$$T_0' = \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{r_0^2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - G)} = T_0 \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - G)} \dots \dots \dots (98)$$

bei  $G = 0^\circ$  ist  $T_0' = T$ .

Dem Koeffizienten von  $\delta E$  kann wiederum eine einfachere Form verliehen werden. Unter Berücksichtigung der Formel (98) verwandelt er sich in

$$\left( 1 \mp \frac{r_0}{P} \right) \cdot \operatorname{tg} F_0 + \frac{A}{P} \cdot (E \pm \sec F_0) \cdot T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \frac{\cos \beta_1}{\sin(\beta_1 - G)} \cdot \sin G = \\ \left[ \left( 1 \pm \frac{r_0}{P} \right) \cdot \operatorname{tg} F_0 \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos G - \right. \\ \left. - \left( \left( 1 \pm \frac{r_0}{P} \right) \cdot \operatorname{tg} F_0 - \frac{A}{P} \cdot (E \pm \sec F_0) \cdot T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \right) \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin G \right] : \sin(\beta_1 - G).$$

Der Ausdruck in der runden fetten Klammer ist der Formel (91) gemäss schon bekannt. Man erhält also:

$$\left[ \left( 1 \pm \frac{r_0}{P} \right) \cdot \operatorname{tg} F_0 \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos G + \operatorname{cotg} V_0 \cdot \sin \psi \cdot \cos \beta_1 \cdot \sin G \right] : \sin(\beta_1 - G)$$

oder nach Substitution der Ausdrücke für  $\operatorname{tg} F_0$  und  $\operatorname{cotg} V_0$  aus den Formeln (25) und (43):

$$\left[ \left( 1 \pm \frac{r_0}{P} \right) \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos G + \left( 1 \mp \frac{r_0}{P} \right) \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin G \right] \cdot \frac{\sin \psi}{\sin(\beta_1 - G)} = \\ \left[ 1 \pm \frac{r_0}{P} \cdot \frac{\cos(\beta_1 + G)}{\cos(\beta_1 - G)} \right] \cdot \operatorname{cotg}(\beta_1 - G) \cdot \sin \psi = \Gamma_0' \dots \dots \dots (99)$$

Nach Substitution der Werte  $\delta A$ ,  $\delta E$ ,  $\delta \omega_\pi$  in den Ausdruck (97) für  $\delta M_\pi$  erhält man die Koeffizienten von  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$ , wobei letzterer wieder auf die frühere Form reduziert werden kann.

Die Variation  $\delta M_\pi$  ist demnach andererseits:

$$k \cdot \delta M_\pi = \mu_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \mu_2 \cdot \delta g + \mu_3 \cdot g \cdot \delta G + \mu_4 \cdot \delta \cdot \mu \cdot \dots \dots \dots (100)$$

$$\mu_1 = -\frac{A^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot [a_1 \cdot \Delta_0' + \varepsilon_1 \cdot \Gamma_0'] + \pi_1 \cdot v;$$

$$\mu_2 = -\frac{A^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot [a_2 \cdot \Delta_0' + \varepsilon_2 \cdot \Gamma_0'] + \pi_2 \cdot v;$$

$$\mu_3 = -\frac{A^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot [a_3 \cdot \Delta_0' + \varepsilon_3 \cdot \Gamma_0'] + \pi_3 \cdot v;$$

$$\mu_4 = \pm \left(\frac{A}{\mu}\right)^{3/2} \cdot \left[\Theta_0 + \sin V_0 \cdot \sin \psi - 3 \cdot \frac{A}{r_0} \cdot N_0\right].$$

Es sind folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\Delta_0' = \frac{3}{2} \cdot N_0 + T_0' \cdot \sin G = \frac{3}{2} \cdot N_0 + \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{r_0}{h_0} \cdot \frac{\sin G}{\sin(\beta - G)};$$

$$\Gamma_0' = \left[1 \pm \frac{r_0}{P} \cdot \frac{\cos(\beta_1 + G)}{\cos(\beta_1 - G)} \cdot \cotg(\beta_1 - G) \cdot \sin \psi\right];$$

$$v = \frac{r_0}{h_0} \cdot \frac{\cos G}{\sin(\beta - G)}.$$

Die Berechnung der Koeffizienten in dem Ausdrucke (100) erweist sich als das beste Mittel die früheren Rechnungen zu kontrollieren.

## § 7. Die Variationen der heliozentrischen Koordinaten als Funktionen der Variationen der Hyperbelelemente.

Die Variationen der heliozentrischen Koordinaten  $R$  und  $\omega$  können in folgender Weise als Funktionen der Variationen der Hyperbelelemente dargestellt werden.

Die Variation des Radiusvektors erhält man aus der Formel:

$$R = A \cdot (E \cdot \sec F \mp 1).$$

Nach Differenziation des logarithmischen Ausdrucks ist:

$$\delta \lg_e R = \frac{\delta A}{A} + \frac{A}{R} \cdot \sec F \cdot \delta E + \frac{A}{R} \cdot E \cdot \tg F \cdot \sec F \cdot \delta F.$$

Aus der Formel:

$$n \cdot (M - M_\pi) = E \cdot \operatorname{tg} F \mp \operatorname{lg}_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{1}{2} F \right)$$

ergibt sich nach Differenziation:

$$-n \cdot \delta M_\pi \mp t \delta n = \operatorname{tg} F \cdot \delta E \mp (E \cdot \sec \mp 1) \cdot \sec F \cdot \delta F,$$

hieraus folgt:

$$\sec F \cdot \delta F = -\frac{A}{R} \cdot \operatorname{tg} F \cdot \delta E \mp \frac{A}{R} \cdot (t \cdot \delta n - n \cdot \delta M_\pi), \dots \dots \dots (101)$$

also wird:

$$\delta \cdot \operatorname{lg}_e R = \frac{\delta A}{A} \mp \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \left( \frac{R}{A} \cdot \sec F - E \cdot \operatorname{tg}^2 F \right) \cdot \delta E \mp \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot E \operatorname{tg} F \cdot (t \cdot \delta n - n \cdot \delta M_\pi).$$

Der Koeffizient von  $\delta E$  wird auf Grund der Formeln (22) und (23) bedeutend vereinfacht. Er verwandelt sich in:

$$\left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot [(E \cdot \sec F \mp 1) \cdot \sec F - E \cdot \operatorname{tg}^2 F] = \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot (E \mp \sec F) = \frac{A}{R} \cdot \cos V.$$

Es sei provisorisch:

$$\left( \frac{R}{A} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{cotg} F}{E} = S, \dots \dots \dots (102)$$

alsdann erhält man, indem man beachtet, dass nach der Formel (21):

$$S \cdot \frac{A}{R} \cdot \cos V = \frac{R}{A} \cdot \frac{\operatorname{cotg} F}{E} \cdot \cos V = \operatorname{cotg} V \cdot \sin \psi,$$

nach Multiplikation des Ausdrucks für  $\delta \operatorname{lg}_e R$  mit  $S$ :

$$\operatorname{cotg} V \cdot \sin \psi \cdot \delta E \mp S \cdot \frac{\delta A}{A} = t \cdot \delta n - n \cdot \delta M_\pi = S \cdot \delta \operatorname{lg}_e R. \dots \dots \dots (103)$$

Die Variation des Winkels  $\omega$  folgt aus der Formel:

$$\omega = \omega_\pi \mp V;$$

also:

$$\delta \omega = \delta \omega_\pi \mp \delta V$$

aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} V = \sqrt{\frac{E \pm 1}{E \mp 1}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} F$$

ergibt sich analog der Formel (88):

$$\frac{\delta V}{\sin V} = \frac{\delta F}{\sin F} \mp \frac{A}{P} \cdot \delta E.$$

Demnach wird:

$$\delta \omega = \delta \omega_\pi + \frac{\sin V}{\sin F} \delta F \mp \frac{A}{P} \sin V \cdot \delta E$$

oder nach Substitution von  $\delta F$  aus der Formel (101):

$$\delta \omega = \delta \omega_\pi - \frac{A}{R} \cdot \sin V \cdot \left(1 \pm \frac{R}{P}\right) \cdot \delta E + \frac{A}{R} \cdot \sin V \cdot \operatorname{cotg} F \cdot (t \cdot \delta n - n \cdot \delta M_\pi)$$

nach nochmaliger Substitution von  $\sin V$  aus der Formel (21) nach Einführung der provisorischen Bezeichnung:

$$\left(\frac{R}{A}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{A}{P}} = \left(\frac{R}{A}\right)^2 \cdot \operatorname{cotg} \psi = T \dots \dots \dots (104)$$

folgt:

$$- \left(1 \pm \frac{R}{P}\right) \cdot \operatorname{tg} F \cdot \delta E + T \cdot \delta \omega_\pi + t \cdot \delta n - n \cdot \delta M_\pi = T \cdot \delta \omega \dots \dots (105)$$

### § 8. Die Variationen der heliozentrischen Koordinaten $R, \omega$ als Funktionen von $\delta M_0, \delta g, \delta G$ und $\delta \mu$ .

Die Variationen der heliozentrischen Koordinaten können als Funktionen von  $\delta M_0, \delta g, \delta G$  und  $\delta \mu$  dargestellt werden, indem man  $\delta M_\pi, \delta E, \delta A$  aus den Ausdrücken (103) und (105) mit Hilfe der in § 6 entwickelten Formeln eliminiert. — Die Elimination von  $\delta M_\pi$  aus den Formeln (103) und (105) geschieht mit Hilfe der Formel (93). Man erhält nach Addition der Ausdrücke (103) und (105), in welchen zuvor  $\delta n$  durch  $\delta A$  und  $\delta \mu$  ersetzt wird, mit der Gleichung (93) entsprechend:

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin(V - V_0)}{\sin V} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin V_0} \cdot \delta E + \left[ S - \left( T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{3}{2} \cdot (N - N_0) \right) \right] \cdot \frac{\delta A}{A} + \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{g \cdot \cos G}{H_0 \cdot \cos \beta_1} \cdot k \cdot \delta M_0 + \\ & + \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = S \cdot \delta \lg_e R; \\ & - \left[ \operatorname{cotg} V_0 \cdot \sin \psi + \left( 1 \pm \frac{R}{P} \right) \cdot \sin \operatorname{hyp} \Theta \right] \cdot \delta E - \left[ T_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{3}{2} \cdot (N - N_0) \right] \cdot \frac{\delta A}{A} + \\ & + \frac{\sqrt{\mu}}{A^{3/2}} \cdot \frac{g \cdot \cos G}{H_0 \cdot \cos \beta_1} \cdot k \cdot \delta M_0 + T \cdot \delta \omega_\pi + \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = T \cdot \delta \omega \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Form, nach entsprechender beiderseitiger Division durch  $S$  und  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi \cdot \delta E + \eta \cdot \frac{\delta A}{A} + \zeta \cdot k \cdot \delta M_0 + \vartheta \cdot \delta \mu &= \delta \lg_e R \\ \xi' \cdot \delta E + \eta' \cdot \frac{\delta A}{A} + \zeta' \cdot k \cdot \delta M_0 + \vartheta' \cdot \delta \mu + \delta \omega_\pi &= \delta \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(106)$$

wobei folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{A}{R} \cdot \frac{\sin(V-V_0)}{\sin V_2}; \\ \eta &= 1 - \left[ \frac{r_0}{\sin V_0} + \frac{3}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \right] \cdot \frac{\sin V}{R}; \\ \zeta &= \frac{g \cdot \cos G}{\sin V_0} \cdot \frac{\sin V}{R}; \\ \vartheta &= \frac{1}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \cdot \frac{\sin V}{R} \cdot \mu^{-1}. \\ \xi' &= -\left[ \cotg V_0 \cdot \sin \psi + \left(1 \pm \frac{R}{P}\right) \cdot \sin \text{hyp } \Theta \right] \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \text{tg } \psi; \\ \eta' &= -\left[ \frac{r_0}{\sin V_0} + \frac{3}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \right] \cdot \frac{P \cdot \cos \psi}{R^2}; \\ \zeta' &= \frac{g \cdot \cos G}{\sin V_0} \cdot \frac{P \cdot \cos \psi}{R^2}; \\ \vartheta' &= \frac{1}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \cdot \frac{P \cdot \cos \psi}{R^2} \cdot \mu^{-1}. \end{aligned}$$

Nach Substitution von  $\delta A$ ,  $\delta E$  und  $\delta \omega_\pi$  entsprechend aus den Formeln (78), (80) und (82), ergeben sich die Grundgleichungen mit den Variationen  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \rho_2 \cdot \delta g + \rho_3 \cdot g \cdot \delta G + \rho_4 \cdot \delta \mu &= \delta \lg_e R \\ \omega_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \omega_2 \cdot \delta g + \omega_3 \cdot g \cdot \delta G + \omega_4 \cdot \delta \mu &= \delta \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(107)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \varepsilon_1 \cdot \xi + a_1 \cdot \eta + \zeta; & \omega_1 &= \varepsilon_1 \cdot \xi' + a_1 \cdot \eta' + \pi_1 + \zeta'; \\ \rho_2 &= \varepsilon_2 \cdot \xi + a_2 \cdot \eta; & \omega_2 &= \varepsilon_2 \cdot \xi' + a_2 \cdot \eta' + \pi_2; \\ \rho_3 &= \varepsilon_3 \cdot \xi + a_3 \cdot \eta; & \omega_3 &= \varepsilon_3 \cdot \xi' + a_3 \cdot \eta' + \pi_3; \\ \rho_4 &= \varepsilon_4 \cdot \xi + a_4 \cdot \eta + \vartheta; & \omega_4 &= \varepsilon_4 \cdot \xi' + a_4 \cdot \eta' + \pi_4 + \vartheta'. \end{aligned} \right\} \dots\dots(108)$$

Zur endgültigen Kontrolle der Grössen  $\rho$  und  $\omega$  in den Gleichungen (107) können noch andere Formeln entwickelt werden. Die Elimination von  $\delta M_\pi$  aus den Formeln (103) und (105) wird zu diesem Zwecke mit der Gleichung (97) ausgeführt. Ersetzt man zuerst

$\delta n$  durch  $\delta A$  und  $\delta \mu$ , so ergibt sich nach Addition der Formeln (103) und (105) mit der Gleichung (97) entsprechend:

$$[\Gamma_0' + \cotg V \cdot \sin \psi] \cdot \delta E + [S + T_0' \cdot \sin G - \frac{3}{2} \cdot (N - N_0)] \frac{\delta A}{A} - T_0' \cdot \cos G \cdot \delta \omega_\pi + \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = S \cdot \delta \lg_e R$$

$$[\Gamma_0' - (1 \pm \frac{R}{P}) \cdot \sin \text{hyp } \Theta] \cdot \delta E + [T_0' \cdot \sin G - \frac{3}{2} \cdot (N - N_0)] \cdot \frac{\delta A}{A} + [T - T_0' \cdot \cos G] \cdot \delta \omega_\pi + \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = T \cdot \delta \omega$$

oder wiederum in gekürzter Form nach beiderseitiger Division entsprechend durch  $S$  und  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} \chi \cdot \delta E + \varphi \cdot \frac{\delta A}{A} + \psi \cdot \delta \omega_\pi + \vartheta \cdot \delta \mu &= \delta \lg_e R \\ \chi' \cdot \delta E + \varphi' \cdot \frac{\delta A}{A} + \psi' \cdot \delta \omega_\pi + \vartheta' \cdot \delta \mu &= \delta \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (109)$$

wobei folgende Bezeichnungen gelten:

$$\begin{aligned} \chi &= [\Gamma_0' + \cotg V \cdot \sin \psi] \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\cos \psi}; \\ \varphi &= 1 + \left[\tau \cdot \sin G - \frac{3}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \text{tg } \psi\right] \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\cos \psi}; \\ \psi &= -\tau \cos G \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\sin \psi}; \\ \vartheta &= \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\cos \psi} \cdot \mu^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi' &= [\Gamma_0' - (1 \pm \frac{R}{P}) \cdot \sin \text{hyp } \Theta] \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \text{tg } \psi; \\ \varphi' &= \left[\tau \sin G - \frac{3}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \text{tg } \psi\right]; \\ \psi' &= 1 - \tau \cos G; \\ \vartheta' &= \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 \cdot \text{tg } \psi \cdot \mu^{-1}. \end{aligned}$$

$$\tau = \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - G)}; \quad \Gamma_0' = \left[1 \pm \frac{r_0}{P} \cdot \frac{\cos(\beta_1 + G)}{\cos(\beta_1 - G)}\right] \cdot \cotg(\beta_1 - G) \cdot \sin \psi.$$

Die Ausdrücke  $\vartheta$  und  $\vartheta'$  sind mit den früheren identisch.



Nach Substitution von  $\delta A$ ,  $\delta E$  und  $\delta \omega_\pi$  aus den Formeln (78), (80) und (82), ergeben sich dieselben Grundgleichungen (107), wobei:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \varepsilon_1 \cdot \chi + a_1 \cdot \varphi + \pi_1 \cdot \psi; & \omega_1 &= \varepsilon_1 \cdot \chi' + a_1 \cdot \varphi' + \pi_1 \cdot \psi'; \\ \rho_2 &= \varepsilon_2 \cdot \chi + a_2 \cdot \varphi + \pi_2 \cdot \psi; & \omega_2 &= \varepsilon_2 \cdot \chi' + a_2 \cdot \varphi' + \pi_2 \cdot \psi'; \\ \rho_3 &= \varepsilon_3 \cdot \chi + a_3 \cdot \varphi + \pi_3 \cdot \psi; & \omega_3 &= \varepsilon_3 \cdot \chi' + a_3 \cdot \varphi' + \pi_3 \cdot \psi'; \\ \rho_4 &= \varepsilon_4 \cdot \chi + a_4 \cdot \varphi + \pi_4 \cdot \psi + \mathfrak{D}. & \omega_4 &= \varepsilon_4 \cdot \chi' + a_4 \cdot \varphi' + \pi_4 \cdot \psi' + \mathfrak{D}'. \end{aligned} \right\} \dots(110)$$

### § 9. Definitive Bahnbestimmung der Kometenschweifmaterie.

Bei der definitiven Bahnbestimmung der Kometenschweifmaterie muss noch folgender, *sehr wichtiger* Umstand berücksichtigt werden. Die mit den Formeln (107) nach der Methode der kleinsten Quadrate abzuleitenden Variationen  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  sind nicht völlig willkürlich, sondern sind streng an die Bedingung gebunden, dass die durch die Variationen  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$  hervorgerufenen neuen Hyperbelelemente  $A$ ,  $E$ ,  $P$ ,  $\omega_\pi$  den Ausdruck unter der Wurzel in den Formeln (10), — welche die Schnittpunkte zwischen der Kometen- und der abzuleitenden, definitiven Hyperbelbahn angeben, — positiv erhalten, was für die Realität der Schnittpunkte und gemäss der Relation (33):

$$\frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cos \omega_\pi \mp 1) - \frac{P}{a} = p \cdot \left[ \frac{g}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin(\beta - G)}{\sin \beta} \right]^2 \dots\dots\dots(33)$$

streng erfüllt sein muss. Um dieser Forderung zu genügen, beachten wir, dass der Ausdruck unter der Wurzel in den Formeln (10), oder, was dasselbe ist, der *absolut positive* Ausdruck auf der rechten Seite der Relation (33) eine verhältnissmässig kleine Grösse darstellen muss, da  $g$  im Vergleich zu  $\sqrt{\mu}$  recht klein ist und  $\sin(\beta - G)$  im allgemeinen sich wenig von  $\sin \beta$  unterscheidet. — Bei dem weiter unten untersuchten Kometen 1892 I Swift z. B. war der Wert dieses Ausdrucks gleich 0.000 1702. Infolge dessen dürfen die negativen Änderungen des Ausdrucks unter der erwähnten Wurzel nicht den eben angeführten Wert 0.000 1702 übersteigen, da sonst die Schnittpunkte imaginär werden, d. h. die Schweifmaterie gar nicht von dem betreffenden Kometen ausgeströmt ist. Andererseits kann man auch keine allzu grossen positiven Änderungen desselben Ausdrucks voraussetzen, da dieses zu der Annahme unwahrscheinlich grosser — im Vergleich zu  $\mu$  — Anfangsgeschwindigkeiten  $g$ , welche selbst in den Nebelhüllen sehr stark entwickelter Kometen nicht beobachtet sind, führt. Aus diesen Gründen kann man die sehr berechtigte Forderung

stellen, dass der Ausdruck unter der Wurzel in den Formeln (10) bei den durch die veränderten  $M_0$ ,  $g$ ,  $G$  und  $\mu$  hervorgerufenen Änderungen von  $A$ ,  $E$ ,  $P$  und  $\omega_\pi$  konstant bleiben muss. Diese Bedingung ist erfüllt durch:

$$\frac{g}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin(\beta - G)}{\sin \beta} = C \text{ (konst.)} \dots \dots \dots (111)$$

Die Variation des logarithmischen Ausdrucks von (111) ergibt:

$$\frac{\sin G}{\sin(\beta - G)} \cdot \frac{\delta \beta}{\sin \beta} + \frac{\delta g}{g} - \cotg(\beta - G) \cdot \delta G - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = 0.$$

Gemäss der Formel (71) ist:

$$\frac{\delta \beta}{\sin \beta} = - \frac{e}{r_0^2} \cdot \frac{\sin(\beta + v_0)}{h_0 \cdot \sin \beta} \cdot k \cdot \delta M_0 = - \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sin(\beta + v_0)}{r_0} \cdot k \cdot \delta M_0,$$

folglich müssen die Variationen  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  folgender Bedingungsgleichung genügen:

$$- \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sin(\beta + v_0)}{r_0} \cdot \frac{g \cdot \sin G}{\sin(\beta - G)} \cdot k \cdot \delta M_0 + \delta g - \cotg(\beta - G) \cdot g \cdot \delta G - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{\delta \mu}{\mu} = 0. \dots (112)$$

Da vier veränderliche Grössen  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  nur durch eine Gleichung (112) mit einander verbunden sind, so ist es klar, dass sie sich in den beliebigsten Richtungen ändern können, je nach den Forderungen der aus den Beobachtungen abgeleiteten  $\delta \lg_e R$  und  $\delta \omega$ . — Andererseits ist noch zu bemerken, dass infolge der Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung von  $\delta M_0$ ,  $\delta g$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$ , der neue Ausdruck von (111) und folglich auch der neue Ausdruck unter der Wurzel in den Formeln (10), streng genommen, nicht mehr derselbe ist, d. h. den früheren Wert nicht besitzt. Letzterer ändert sich in der That. Somit wird eigentlich durch die Gleichung (112) nicht die Unveränderlichkeit des Wertes von (111) gefordert, was übrigens auch gar nicht nötig ist, sondern nur die Realität der Schnittpunkte, d. h. die Änderung des Ausdrucks innerhalb gewisser enger Grenzen.

Zur Einführung dieser Forderung der Realität der Schnittpunkte in die Gleichungen (107) genügt es eine Veränderliche z. B.  $\delta g$  zu eliminieren. Man erhält aus (112):

$$\delta g = x \cdot k \cdot \delta M_0 + y \cdot g \cdot \delta G + z \cdot \delta \mu \dots \dots \dots (113)$$

wobei:

$$x = + \frac{e}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sin(\beta + v_0)}{r_0} \cdot \frac{g \cdot \sin G}{\sin(\beta - G)};$$

$$y = + \cotg(\beta - G)$$

$$z = + \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\mu}$$

und nach Substitution in die Gleichungen (107):

$$\left. \begin{aligned} (\rho_1 + x \cdot \rho_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (\rho_3 + y \cdot \rho_2) \cdot g \cdot \delta G + (\rho_4 + z \cdot \rho_2) \cdot \delta \mu &= \delta \lg_e R \\ (\omega_1 + x \cdot \omega_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (\omega_3 + y \cdot \omega_2) \cdot g \cdot \delta G + (\omega_4 + z \cdot \omega_2) \cdot \delta \mu &= \delta \omega. \end{aligned} \right\} \dots (114')$$

Dieses sind endlich die Grundgleichungen in welchen  $\delta M_0$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  völlig von einander unabhängig sind. Die Koeffizienten von  $\delta M_0$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  können, ohne dass die Werte von  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  und  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  bekannt sind, in doppelter Weise direkt abgeleitet werden. Wir bezeichnen deshalb die entsprechenden Koeffizienten einfacher und schreiben die Gleichungen (114') in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} R_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + R_2 \cdot g \cdot \delta G + R_3 \cdot \delta \mu &= \delta \lg_e R \\ \Omega_1 \cdot k \cdot \delta M_0 + \Omega_2 \cdot g \cdot \delta G + \Omega_3 \cdot \delta \mu &= \delta \omega \end{aligned} \right\} \dots (114)$$

wobei:

I.

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (\varepsilon_1 + x \cdot \varepsilon_2) \cdot \xi + (a_1 + x \cdot a_2) \cdot \eta + \zeta; \\ R_2 &= (\varepsilon_3 + y \cdot \varepsilon_2) \cdot \xi + (a_3 + y \cdot a_2) \cdot \eta; \\ R_3 &= (\varepsilon_4 + z \cdot \varepsilon_2) \cdot \xi + (a_4 + z \cdot a_2) \cdot \eta + \vartheta. \\ \Omega_1 &= (\varepsilon_1 + x \cdot \varepsilon_2) \cdot \xi' + (a_1 + x \cdot a_2) \cdot \eta' + (\pi_1 + x \cdot \pi_2) + \zeta'; \\ \Omega_2 &= (\varepsilon_3 + y \cdot \varepsilon_2) \cdot \xi' + (a_3 + y \cdot a_2) \cdot \eta' + (\pi_3 + y \cdot \pi_2); \\ \Omega_3 &= (\varepsilon_4 + z \cdot \varepsilon_2) \cdot \xi' + (a_4 + z \cdot a_2) \cdot \eta' + (\pi_4 + z \cdot \pi_2) + \vartheta'. \end{aligned} \right\} \dots (115)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{A}{\sin V_0} \cdot \frac{\sin(V-V_0)}{R}; \\ \eta &= 1 - \left( \frac{r_0}{\sin V_0} + \frac{3}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \right) \cdot \frac{\sin V}{R}; \\ \zeta &= \frac{g \cdot \cos G}{\sin V_0} \cdot \frac{\sin V}{R}; \\ \vartheta &= \frac{1}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \cdot \frac{\sin V}{R} \cdot \mu^{-1}. \\ \xi' &= -\left( \cotg V_0 \cdot \sin \psi + \left( 1 \pm \frac{R}{P} \right) \cdot \sin \text{hyp } \Theta \right) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \text{tg } \psi; \\ \eta' &= -\left( \frac{r_0}{\sin V_0} + \frac{3}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \right) \cdot \frac{P \cdot \cos \psi}{R^2}; \\ \zeta' &= \frac{g \cdot \cos G}{\sin V_0} \cdot \frac{P \cdot \cos \psi}{R^2}; \\ \vartheta' &= \frac{1}{2} \cdot (N-N_0) \cdot \frac{A}{\sin \psi} \cdot \frac{P \cdot \cos \psi}{R^2} \cdot \mu^{-1}. \end{aligned} \right\} \dots (116)$$

II.

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 &= (\varepsilon_1 + x \cdot \varepsilon_2) \cdot \chi + (a_1 + x \cdot a_2) \cdot \varphi + (\pi_1 + x \cdot \pi_2) \cdot \psi; \\
 R_2 &= (\varepsilon_3 + y \cdot \varepsilon_2) \cdot \chi + (a_3 + y \cdot a_2) \cdot \varphi + (\pi_3 + y \cdot \pi_2) \cdot \psi; \\
 R_3 &= (\varepsilon_4 + z \cdot \varepsilon_2) \cdot \chi + (a_4 + z \cdot a_2) \cdot \varphi + (\pi_4 + z \cdot \pi_2) \cdot \psi + \vartheta. \\
 \Omega_1 &= (\varepsilon_1 + x \cdot \varepsilon_2) \cdot \chi' + (a_1 + x \cdot a_2) \cdot \varphi' + (\pi_1 + x \cdot \pi_2) \cdot \psi'; \\
 \Omega_2 &= (\varepsilon_3 + y \cdot \varepsilon_2) \cdot \chi' + (a_3 + y \cdot a_2) \cdot \varphi' + (\pi_3 + y \cdot \pi_2) \cdot \psi'; \\
 \Omega_3 &= (\varepsilon_4 + z \cdot \varepsilon_2) \cdot \chi' + (a_4 + z \cdot a_2) \cdot \varphi' + (\pi_4 + z \cdot \pi_2) \cdot \psi' + \vartheta'.
 \end{aligned} \right\} \dots (115')$$

und

$$\left. \begin{aligned}
 \chi &= \left( \Gamma_0' + \cotg V \cdot \sin \psi \right) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\cos \psi}; \\
 \varphi &= 1 + \left( \tau \cdot \sin G - \frac{3}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \text{tg } \psi \right) \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\sin \psi}; \\
 \psi &= -\tau \cdot \cos G \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\sin \psi}; \\
 \vartheta &= \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \frac{\sin \text{hyp } \Theta}{\cos \psi} \cdot \mu^{-1}. \\
 \chi' &= \left( \Gamma_0' - \left( 1 \pm \frac{R}{P} \right) \cdot \sin \text{hyp } \Theta \right) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \text{tg } \psi; \\
 \varphi' &= \tau \cdot \sin G - \frac{3}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \text{tg } \psi; \\
 \psi' &= 1 - \tau \cdot \cos G; \\
 \vartheta' &= \frac{1}{2} \cdot (N - N_0) \cdot \left( \frac{A}{R} \right)^2 \cdot \text{tg } \psi \cdot \mu^{-1}.
 \end{aligned} \right\} \dots (117)$$

$$\tau = \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin (\beta_1 - G)};$$

$$\Gamma_0' = \left( 1 \pm \frac{\cos (\beta_1 + G)}{\cos (\beta_1 - G)} \right) \cdot \cotg (\beta_1 - G) \cdot \sin \psi.$$

Die Werte von  $a_1 + x \cdot a_2$ ,  $a_3 + y \cdot a_2$ ,  $a_4 + z \cdot a_2$  u. s. w. können entweder einfach mit Hilfe der bekannten Grössen  $a_1, a_2, a_3, a_4$  u. s. w. und  $x, y, z$  berechnet werden oder auch zur Kontrolle, nach recht vereinfachten direkten Formeln. Eine Ausnahme bilden nur die Ausdrücke von  $\varepsilon_1 + x \cdot \varepsilon_2$  und  $\pi_1 + x \cdot \pi_2$ , für welche sich keine besonders einfache und bequemere Formeln ableiten lassen.

Wir beginnen mit den analogen Werten für  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , welche bei der Ableitung von  $\epsilon_1 + x \cdot \epsilon_2, \epsilon_3 + y \cdot \epsilon_2, \epsilon_4 + z \cdot \epsilon_2$  wesentliche Dienste leisten. Es ist:

$$p_1 + x \cdot p_2 = - \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{c}{\sqrt{p}} \cdot \frac{g \cdot \sin G}{\sin(\beta - G)} \cdot [\sin v_0 \cdot \sin(\beta - G) + \sin(\beta + v_0) \cdot \sin G]$$

$$= - \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{c}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - G)} \cdot \sin(v_0 + G) \cdot g \cdot \sin G \dots \dots \dots (118)$$

$$p_3 + y \cdot p_2 = - \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot \frac{r_0}{\sin(\beta - G)} \cdot [\sin(\beta - G) \cdot \cos G + \cos(\beta - G) \cdot \sin G]$$

$$= - \frac{2}{\sqrt{P\mu}} \cdot r_0 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - G)} \dots \dots \dots (119)$$

$$p_4 + z \cdot p_2 = - \frac{1}{\mu} \cdot \left[ 1 + \frac{r_0 \cdot g \cdot \sin G}{\sqrt{P\mu}} \right] = - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{P\mu}} \dots \dots \dots (120)$$

Ferner ist:

$$a_1 + x \cdot a_2 =$$

$$- 2 \cdot A \cdot \frac{c}{r_0^2} \cdot \left[ \frac{H_0}{\mu \cdot \sin(\beta - G)} \cdot (\cos(\beta_1 + v_0) \cdot \sin(\beta - G) - \cos(\beta_1 - G) \cdot \sin(\beta + v_0)) \cdot \frac{r_0 \cdot g \cdot \sin G}{\sqrt{p}} \pm \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} \right]$$

da:

$$r_0 \cdot g \cdot \sin G = \sqrt{p} - \sqrt{P\mu}$$

und

$$\cos(\beta_1 + v_0) \cdot \sin(\beta - G) - \cos(\beta_1 - G) \cdot \sin(\beta + v_0) = - \cos \gamma \cdot \sin(v_0 + G),$$

so folgt:

$$a_1 + x \cdot a_2 =$$

$$- 2 \cdot A \cdot \frac{c}{r_0^2} \cdot \left[ \frac{H_0}{\mu \cdot \sin(\beta - G)} \cdot \left( \frac{\sqrt{P\mu}}{\sqrt{p}} \cos(\beta_1 - G) \cdot \sin(\beta + v_0) - \cos \gamma \cdot \sin(v_0 + G) \right) \pm \frac{\sin v_0}{\sqrt{p}} \right] \dots (121)$$

$$a_3 + y \cdot a_2 =$$

$$+ 2 \cdot A \cdot \frac{H_0}{\mu} \cdot [\sin(\beta_1 - G) + \cos(\beta_1 - G) \cdot \cotg(\beta - G)] = + 2 \cdot A \cdot \frac{H_0}{\mu} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin(\beta - G)} \dots (122)$$

$$a_4 + z \cdot a_2 =$$

$$+ A \cdot \left( \frac{H_0}{\mu} \right)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{g}{H_0} \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] = + A \cdot \left( \frac{H_0}{\mu} \right)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta - G)} \cdot \cos(\beta_1 - G) \right] =$$

$$= A \cdot \left( \frac{H_0}{\mu} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta_1 - G) \cdot \cos \gamma}{\sin(\beta - G)} = A \cdot \frac{H_0 \cdot h_0}{\mu^2} \cdot \cos \gamma \dots \dots \dots (123)$$



woraus man die drei bekannten Normalgleichungen mit den drei Unbekannten  $\delta M_0$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$  erhält:

$$\left. \begin{aligned} [aa] \cdot \delta M_0 + [ab] \cdot \delta G + [ac] \cdot \delta \mu &= [an]; \\ [ab] \cdot \delta M_0 + [bb] \cdot \delta G + [bc] \cdot \delta \mu &= [bn]; \\ [ac] \cdot \delta M_0 + [bc] \cdot \delta G + [cc] \cdot \delta \mu &= [cn]. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (131)$$

Die Lösung der Normalgleichungen (131) vollzieht sich am bequemsten mit Determinanten. Es ist die Determinante des Systems der Normalgleichungen:

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix} = \begin{aligned} &+ [aa] \cdot D_{11} - [ab] \cdot D_{12} + [ac] \cdot D_{13}; \\ &- [ab] \cdot D_{12} + [bb] \cdot D_{22} - [bc] \cdot D_{23}; \\ &+ [ac] \cdot D_{13} - [bc] \cdot D_{23} + [cc] \cdot D_{33}; \end{aligned}$$

wobei  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$ ,  $\dots$ ,  $D_{33}$  die den Elementen  $[aa]$ ,  $[ab]$ ,  $[ac]$ ,  $\dots$ ,  $[cc]$  entsprechenden Minore sind. Die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind:

$$\left. \begin{aligned} \delta M_0 &= + [an] \cdot \nabla_{11} - [bn] \cdot \nabla_{12} + [cn] \cdot \nabla_{13} \\ \delta G &= - [an] \cdot \nabla_{12} + [bn] \cdot \nabla_{22} - [cn] \cdot \nabla_{23} \\ \delta \mu &= + [an] \cdot \nabla_{13} - [bn] \cdot \nabla_{23} + [cn] \cdot \nabla_{33} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (132)$$

wobei die Bezeichnung gilt:

$$\nabla_{ik} = \frac{D_{ik}}{D}.$$

Die Fehlerquadratsumme  $[vv]$  und der wahrscheinliche mittlere Fehler  $\epsilon$  einer jeden aus den Beobachtungen abgeleiteten Grössen  $n_1, n_2, n_3 \dots n_m$ , reduziert auf die Gewichtseinheit, sind entsprechend:

$$[vv] = [nn] - [an] \cdot \delta M_0 - [bn] \cdot \delta G - [cn] \cdot \delta \mu$$

und

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{m-3}}.$$

$m$  — ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen und 3 — die der Unbekannten. Die Gewichte der Unbekannten sind entsprechend:

$$P_{\delta M_0} = \frac{D}{D_{11}}; \quad P_{\delta G} = \frac{D}{D_{22}}; \quad P_{\delta \mu} = \frac{D}{D_{33}}$$

und ihre wahrscheinlichen mittleren Fehler:

$$\varepsilon_{\delta M_0} = \pm \varepsilon \cdot \sqrt{\nabla_{11}}; \quad \varepsilon_{\delta G} = \pm \varepsilon \cdot \sqrt{\nabla_{22}}; \quad \varepsilon_{\delta \mu} = \pm \varepsilon \cdot \sqrt{\nabla_{33}} \dots (133)$$

Hiermit sind die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten  $\delta M_0$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$  und ihre wahrscheinlichen, mittleren Fehler bestimmt.

Die Variation  $\delta g$  und die Variationen der Hyperbelemente ergeben sich ferner mit Hilfe folgender Formeln:

$$\delta g = \alpha \cdot k \cdot \delta M_0 + y \cdot g \cdot \delta G + z \cdot \delta \mu \dots (113)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta P}{P} &= (p_1 + x \cdot p_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (p_3 + y \cdot p_2) \cdot g \cdot \delta G + (p_4 + z \cdot p_2) \cdot \delta \mu; \\ \frac{\delta A}{A} &= (a_1 + x \cdot a_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (a_3 + y \cdot a_2) \cdot g \cdot \delta G + (a_4 + z \cdot a_2) \cdot \delta \mu; \\ \delta Q &= (q_1 + x \cdot q_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (q_3 + y \cdot q_2) \cdot g \cdot \delta G + (q_4 + z \cdot q_2) \cdot \delta \mu; \\ \delta E &= (\varepsilon_1 + x \cdot \varepsilon_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (\varepsilon_3 + y \cdot \varepsilon_2) \cdot g \cdot \delta G + (\varepsilon_4 + z \cdot \varepsilon_2) \cdot \delta \mu; \\ \delta \omega_\pi &= (\pi_1 + x \cdot \pi_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (\pi_3 + y \cdot \pi_2) \cdot g \cdot \delta G + (\pi_4 + z \cdot \pi_2) \cdot \delta \mu; \\ k \cdot \delta M_\pi &= (\mu_1 + x \cdot \mu_2) \cdot k \cdot \delta M_0 + (\mu_3 + y \cdot \mu_2) \cdot g \cdot \delta G + (\mu_4 + z \cdot \mu_2) \cdot \delta \mu. \end{aligned} \right\} \dots (134)$$

Mit den verbesserten Werten  $M_0 + \delta M_0$ ,  $g + \delta g$ ,  $G + \delta G$ ,  $\mu + \delta \mu$  kann nun nach den Formeln (34) bis (54) eine neue Hyperbel abgeleitet werden, welche als definitive Bahn der beobachteten Schweifmaterie betrachtet werden kann. Es erübrigt nur noch die wahrscheinlichen mittleren Fehler von  $\delta g$  und der Variationen der Hyperbelemente abzuleiten.

Die Variationen von  $g$  und der Hyperbelemente sind Funktionen von  $\delta M_0$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$ , welche letztere in der Hinsicht von einander abhängen, als sie alle Funktionen der aus den Beobachtungen abgeleiteten Grössen  $n_1, n_2, n_3 \dots n_m$  sind. Die Variationen  $\delta M_0, \delta G, \delta \mu$  müssen also zuerst durch die Grössen  $n_1, n_2, n_3 \dots n_m$  ausgedrückt werden. Es sei zu diesem Zwecke  $F$  irgend eine lineare Funktion von  $\delta M_0, \delta G$  und  $\delta \mu$ :

$$F = k_1 \cdot \delta M_0 + k_2 \cdot \delta G + k_3 \cdot \delta \mu,$$

so erhält man nach Substitution von  $\delta M_0, \delta G$  und  $\delta \mu$  aus den Formeln (132):

$$F = f_1 \cdot [an] + f_2 \cdot [bn] + f_3 \cdot [cn];$$



wobei:

$$f_1 = + k_1 \cdot \nabla_{11} - k_2 \cdot \nabla_{12} + k_3 \cdot \nabla_{13};$$

$$f_2 = - k_1 \cdot \nabla_{12} + k_2 \cdot \nabla_{22} - k_3 \cdot \nabla_{23};$$

$$f_3 = + k_1 \cdot \nabla_{13} - k_2 \cdot \nabla_{23} + k_3 \cdot \nabla_{33};$$

da  $[an]$ ,  $[bn]$ ,  $[cn]$  die von einander unabhängigen Beobachtungsgrößen  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$  enthalten, so ist der wahrscheinliche mittlere Fehler von  $F$ :

$$\epsilon_F^2 = f_1^2 \cdot \epsilon_{[an]}^2 + f_2^2 \cdot \epsilon_{[bn]}^2 + f_3^2 \cdot \epsilon_{[cn]}^2$$

oder da:

$$[an] = a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2 + a_3 \cdot n_3 + \dots + a_m \cdot n_m$$

so folgt:

$$\epsilon_{[an]}^2 = a_1^2 \cdot \epsilon^2 + a_2^2 \cdot \epsilon^2 + \dots + a_m^2 \cdot \epsilon^2 = [aa] \cdot \epsilon^2$$

analog ist:

$$\epsilon_{[bn]}^2 = [bb] \cdot \epsilon^2; \quad \epsilon_{[cn]}^2 = [cc] \cdot \epsilon^2$$

wobei:

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{m-3}}$$

demnach wird:

$$\epsilon_F^2 = \pm \epsilon \cdot \sqrt{[aa] \cdot f_1^2 + [bb] \cdot f_2^2 + [cc] \cdot f_3^2} \dots \dots \dots (135)$$

oder das Gewicht der Funktion  $F (\delta M_0, \delta G, \delta \mu)$  ist:

$$P_F = \frac{1}{[aa] \cdot f_1^2 + [bb] \cdot f_2^2 + [cc] \cdot f_3^2}$$

Die hier entwickelte Theorie einer definitiven Bahnbestimmung der Kometenschweifmaterie soll gleich an dieser Stelle eine praktische Anwendung bei der beim Kometen 1892 I Swift, im Laufe von sechs Tagen, beobachteten Bewegung einer Schweifverdichtung, auf einem sowohl zur Kometenbahn, als auch zur Sonne konvexen Bogen finden.

## § 10. Die beim Kometen 1892 I Swift beobachtete Bewegung einer Schweifverdichtung.

Der Komet 1892 I wurde von Swift in Rochester am 6. März 1892 entdeckt. Die ersten Spuren eines Schweifes sah Finlay am 26. März. Vom 29. März an konnte der Schweif schon mit dem blossen Auge beobachtet werden. William H. Pickering erhielt auf dem «Astronomical Observatory of Harvard College» am 29. März bis zum 8. Mai eine ganze Reihe photographischer Aufnahmen dieses Kometen, welche er in seinem Artikel «Swifts Comet 1892 I»<sup>1)</sup> einer eingehenden Besprechung unterzieht. Im gegenwärtigen Falle interessieren uns nur die vom 5. bis zum 10. April 1892 erhaltenen Photographien des Kometen Swift. W. H. Pickering teilt folgendes über dieselben mit<sup>2)</sup>:

«It has been said that it was in general impossible to identify any particular region of the tail upon two successive days. A striking exception to this rule occurred on the dates of April 6, 7 and 8. On April 6 an unusually bright detailed structure was noted in the tail not far from the head. By April 7 it had increased its distance materially, and by April 8 was still farther removed. Upon the better one of the two negatives taken on April 10, a faint marking was detected at a considerable distance from the head of the comet. It was in the right position angle, and its distance was such that it seemed possible that it might be the same structure that was photographed upon the earlier dates. A careful examination of the plate taken on April 5 now showed a minute bright elongated region in the northern branch of the tail, not far from the nucleus, and measuring about 3' by 45". It was in a somewhat different position angle from the objects seen upon the other four plates, but the difference was not greater than might be accounted for by the *rotation of the tail*<sup>3)</sup>. The objects of April 6, 7, and 8 were, owing to their conspicuous appearance, *evidently identical*, whether those of April 5 and 10 were also, could only be *determined by a computation of the theoretical places in which they should fall.*»

«The chief difficulty in measuring the distance from the bright region to the nucleus upon the different negatives lay, not in the measurement itself, which was comparatively simple, but rather in deciding upon the portion of the bright region from which the measurement should be made. This was due to the fact that this region was in general irregular both in shape and density. Owing to the diffused character of the markings it was quite impossible to use a dividing engine, but in some cases a pocket magnifier was employed,

1) *Annales of the Astronomical Observatory of Harvard College*. Vol. XXXII. — Part. II. 1900. pg. 267—295.

2) *Loc. cit.* pg. 276—277.

3) Die hier von W. H. Pickering vorausgesetzte Drehung des Schweifes ist, wie schon von Bredichin öfters hingewiesen, vom rein mechanischen Standpunkte aus, völlig unmöglich.

while in others the markings could best be seen with the naked eye. The negatives were placed upon a retouching frame and measured with a steel scale. To obtain as unbiased a result as possible, three observers each made upon two days two independent measures, separated by a short interval. The other observers besides myself were Messrs. O. C. Wendell and E. S. King. In table LXX the first and second columns give the time of the middle of the exposure expressed in days, hours and minutes, and also in fractions of a day, the third column gives the mean of the twelve measures of the distance expressed in millimeters, and the fourth the same reduced to arc. The negatives were taken upon a scale 179/1 to the millimeter, but a slight correction was necessary for the position of the comet upon the plate. The maximum value of this correction never exceeded 20".

Table LXX.

Distance of the bright region from the nucleus.

| Greenwich Mean Time. |                                 |                     | Millimeters.  | Arc.             |
|----------------------|---------------------------------|---------------------|---------------|------------------|
| April 5;             | 21 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> | 5 <sup>d</sup> .914 | 5.50 ± 0.07   | 0° 16' 20" ± 13" |
| » 6;                 | 21 48                           | 6.908               | 15.00 ± 0.20  | 0 44 46 ± 36     |
| » 7;                 | 22 30                           | 7.937               | 34.47 ± 0.20  | 1 42 32 ± 36     |
| » 8;                 | 21 21                           | 8.889               | 59.53 ± 0.24  | 2 57 29 ± 43     |
| » 10;                | 22 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> | 10.951              | 138.43 ± 0.30 | 6° 52' 39" ± 54" |

Auf Grund einer mir von Herrn W. H. Pickering in einem Briefe vom 23. Dez. 1904 freundlichst gemachten Mitteilung unter genauer Angabe der bei den obigen Messungen benutzten Plattennummern<sup>1)</sup> sind diese Beobachtungsmomente in der folgenden Weise etwas abgeändert:

| Platte<br>N <sup>o</sup> | Expositions-<br>dauer. | Mittlere Zeit<br>Greenwich:                     | Mittlere Zeit<br>Berlin: |
|--------------------------|------------------------|---|--------------------------|
| 7364:                    | 133 <sup>m</sup> ;     | 1892 April 5; 20 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> ; | 1892 April 5-906 654;    |
| 7365:                    | 55 ;                   | » 6; 21 48 ;                                    | » 6-945 543;             |
| 7367:                    | 61 ;                   | » 7; 21 22 ;                                    | » 7-927 488;             |
| 7387:                    | 55 ;                   | » 8; 20 10 ;                                    | » 8-877 488;             |
| 7397:                    | 65 <sup>m</sup> ;      | » 10; 21 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> .         | » 10-933 738.            |

1) Loc. cit. pg. 268.

Es ist zu bedauern, dass nicht die Koordinaten  $\alpha$ ,  $\delta$  der Schweifverdichtung haben bestimmt werden können, sondern nur ihre Winkelentfernung  $s$  vom Kerne, wobei jedoch ihre Lage zum verlängerten Radiusvektor des Kometenkerns unbestimmt bleibt. Man ist deshalb gezwungen in der ersten Annäherung anzunehmen, dass die Schweifverdichtung sich auf dem verlängerten Radiusvektor ( $\varphi = 0$ ) befunden habe, was aber, wie es auch Herr W. H. Pickering in seinem Briefe zugiebt, durchaus nicht streng gewesen zu sein braucht, und, wie es weiter unten gezeigt werden wird, auch nicht an allen Tagen bis zum 10. April inklusive gewesen sein kann. — Nichtsdestoweniger sind diese photographischen Aufnahmen des Kometen 1892 I und die sorgfältigen Messungen derselben, ausgeführt von den Herren W. H. Pickering, O. C. Wendell und E. S. King, für die mechanische Kometentheorie von äusserster Wichtigkeit, da es, abgesehen von den Schmidt'schen Wolken im Schweife des grossen Kometen 1882 II, noch bei keinem Kometen gelungen ist, die Bewegung einer Schweifverdichtung während der langen Zeitdauer von fünf Tagen zu verfolgen.

Wie gewöhnlich werden wir nun die vorhandenen Beobachtungen auf die Kometenbahnebene reduzieren und die heliozentrischen Koordinaten  $R$ ,  $\omega$  bestimmen.

Die elliptischen Elemente des Kometen 1892 I sind nach Prof. A. Berberich<sup>1)</sup>.

$$\begin{array}{l}
 T_{\pi} = 1892 \text{ April } 6.69025 \text{ M. Z. Berlin.} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \omega = 24^{\circ} 31' 11''.1 \\
 \Omega = 240 \ 54 \ 15.4 \\
 i = 38 \ 42 \ 20.6
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Mittl.} \\
 \text{Aequin.} \\
 1892.0.
 \end{array} \quad \begin{array}{l}
 \log q = 0.011 \ 499; \\
 \log e = \bar{1}.999 \ 397; \\
 U = 20 \ 000 \text{ Jahre.}
 \end{array}
 \end{array}$$

Heliozentrische Äquatorealkoordinaten:

$$x = [\bar{1}.922 \ 9939] \cdot r \cdot \sin(349^{\circ} \ 1' \ 34''.9 + v);$$

$$y = [\bar{1}.999 \ 7825] \cdot r \cdot \sin(257 \ 50 \ 35.5 + v);$$

$$z = [\bar{1}.738 \ 2457] \cdot r \cdot \sin(345^{\circ} \ 4' \ 9''.2 + v).$$

Mittlere Schiefe der Ekliptik (1892.0):

$$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 11''.8.$$

Koordinaten des Pols der Kometenbahn:

$$A = 183^{\circ} 18' 48''.3; \quad D = + 56^{\circ} 48' 58''.6.$$

1) *Astronom. Nachrichten.* Band 130, № 3110, pg. 215—216.

Die wahre Anomalie  $v$ , der Radiusvektor  $r$ , ferner die Koordinaten  $\alpha_{\odot}$ ,  $\delta_{\odot}$  des Kometenkerns und die Entfernung  $\rho$  des Kerns von der Erde sind für die obigen Momente:

| 1892 M. Z. B. | $v$                       | $\log r$    | $\alpha_{\odot}$           | $\delta_{\odot}$         | $\log \rho$ |
|---------------|---------------------------|-------------|----------------------------|--------------------------|-------------|
| 1. April 5·9: | $-1^{\circ} 2' 57''.4$ ;  | 0·011 5354; | $316^{\circ} 49' 32''.0$ ; | $-2^{\circ} 2' 28''.0$ ; | 0·028 5679; |
| 2. » 6·9:     | $+0 20 30.7$ ;            | 5029;       | $317 47 33.6$ ;            | $-0 57 55.7$ ;           | 0·030 0954; |
| 3. » 7·9:     | $+1 39 23.7$ ;            | 5896;       | $318 41 55.6$ ;            | $+0 2 38.4$ ;            | 0·031 6644; |
| 4. » 8·9:     | $+2 55 39.7$ ;            | 0·011 7823; | $319 34 5.2$ ;             | $+1 0 47.9$ ;            | 0·033 2943; |
| 5. » 10·9:    | $+5^{\circ} 40' 23''.8$ ; | 0·012 5633; | $321^{\circ} 25' 33''.3$ ; | $+3^{\circ} 5' 1''.5$ ;  | 0·037 1775. |

Die Sonnenkoordinaten  $\alpha_{\odot}$ ,  $\delta_{\odot}$ , der Positionswinkel  $p_0$  des verlängerten Radiusvektors am Kometenkern:

|    | $\alpha_{\odot}$           | $\delta_{\odot}$          | $p_0$                      |
|----|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. | $+15^{\circ} 41' 26''.7$ ; | $+6^{\circ} 41' 31''.6$ ; | $260^{\circ} 59' 35''.3$ ; |
| 2. | $16 38 26.0$ ;             | $7 4 55.9$ ;              | $261 10 12.8$ ;            |
| 3. | $17 32 21.0$ ;             | $7 26 55.9$ ;             | $261 20 20.8$ ;            |
| 4. | $18 24 34.1$ ;             | $7 48 6.0$ ;              | $261 30 11.8$ ;            |
| 5. | $+20^{\circ} 17' 47''.7$ ; | $+8^{\circ} 33' 30''.2$ ; | $261^{\circ} 51' 29''.5$ . |

Die Bessel'schen Winkel  $P$ ,  $S$ , die perspektivische Verkürzung auf dem verlängerten Radiusvektor  $T_0$ :

|    | $P$                        | $S$                       | $T_0$                      | $T_0 + s$                         |
|----|----------------------------|---------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 1. | $334^{\circ} 15' 3''.4$ ;  | $66^{\circ} 1' 14''.3$ ;  | $122^{\circ} 55' 42''.5$ ; | $123^{\circ} 12' 2'' \pm 13''$ ;  |
| 2. | $334 48 42.6$ ;            | $66 34 33.7$ ;            | $123 1 39.8$ ;             | $123 46 26 \pm 36''$ ;            |
| 3. | $335 20 16.7$ ;            | $67 6 34.6$ ;             | $123 8 22.3$ ;             | $124 50 54 \pm 36''$ ;            |
| 4. | $335 50 34.7$ ;            | $67 37 59.0$ ;            | $123 15 50.9$ ;            | $126 13 20 \pm 43''$ ;            |
| 5. | $336^{\circ} 55' 16''.7$ ; | $68^{\circ} 47' 10''.6$ ; | $123^{\circ} 35' 11''.6$ ; | $130^{\circ} 27' 51'' \pm 54''$ . |

Die Entfernungen  $\Delta$  und  $R = r + \Delta$  der Schweifverdichtung vom Kometenkern und von der Sonne, in der Voraussetzung, dass die Schweifverdichtung sich auf dem verlängerten Radiusvektor des Kometenkerns befindet:

|    | $\log \Delta$                       | $\log R = \log (r + \Delta)$  |
|----|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1. | $\bar{3}.782 7668 \pm 0.005 7792$ ; | $0.014 0925 \pm 0.000 0339$ ; |
| 2. | $\bar{2}.225 0387 \pm 0.005 8714$ ; | $0.018 5415 \pm 0.000 0944$ ; |
| 3. | $\bar{2}.592 0240 \pm 0.002 5935$ ; | $0.027 8108 \pm 0.000 0951$ ; |
| 4. | $\bar{2}.839 2562 \pm 0.001 8184$ ; | $0.040 0347 \pm 0.000 1145$ ; |
| 5. | $\bar{1}.234 1647 \pm 0.001 0396$ ; | $0.079 4748 \pm 0.000 1485$ . |

Hieraus ergibt sich  $\Delta$  in Kilometern,  $R$  in astron. Einheiten und der Winkel  $\omega = v$ :

|    | $\Delta$ (km.)           | $R$ (astr. Einh.)          | $\omega = v$           |
|----|--------------------------|----------------------------|------------------------|
| 1. | 906 469 $\pm$ 12 062;    | 1.032 981 $\pm$ 0.000 081; | $- 1^\circ 2' 57.4$ ;  |
| 2. | 2 509 716 $\pm$ 33 930;  | 1.043 630 $\pm$ 0.000 227; | $+ 0 20 30.7$ ;        |
| 3. | 5 842 650 $\pm$ 34 886;  | 1.066 132 $\pm$ 0.000 234; | $+ 1 39 23.7$ ;        |
| 4. | 10 323 860 $\pm$ 43 220; | 1.096 566 $\pm$ 0.000 289; | $+ 2 55 39.7$ ;        |
| 5. | 25 630 120 $\pm$ 61 350; | 1.200 811 $\pm$ 0.000 401. | $+ 5^\circ 40' 23.8$ . |

Der Gang der Werte  $R$  und  $\omega$  beweist schon an dieser Stelle auf das deutlichste, dass die uns interessierende Schweifverdichtung sich, gleichwie beim Kometen 1903 IV Borrelly, auf einem zur Sonne konvexen Bogen bewegt hat und also ebenfalls einer von der Sonne ausgehenden repulsiven Kraft unterworfen gewesen ist. Diese Kraft wird aber beim Kometen Swift 1892 I infolge der recht langen Sichtbarkeit der Schweifverdichtung viel kleiner als im Falle des Kometen Borrelly 1903 IV sein, bei welchem die betreffende Schweifstelle nur innerhalb 7 Stunden verfolgt wurde und am folgenden Tage nicht mehr zu sehen war.

Zum Zweck einer genaueren Bestimmung der Lage der Schweifmaterie in bezug auf den verlängerten Radiusvektor wenden wir uns an das Flächengesetz. Für den Kometenkern beträgt die in 1 mittl. Sonnentage vom Radiusvektor beschriebene doppelte Fläche  $c = k \cdot \sqrt{p} = 0.024 643$ . Die vom Radiusvektor  $R$  der Schweifmaterie während der verschiedenen Zeitintervalle beschriebenen doppelten Flächen (in 1. mittl. Sonnentag) sind nach der Näherungsformel:

$$C = R_1 \cdot R_2 \cdot \sin(\omega_2 - \omega_1) : [M_2 - M_1],$$

wobei  $M_1, M_2, \dots$  die Beobachtungsmomente bedeuten:

| Zeitintervall. | $C$        | Diff.      |
|----------------|------------|------------|
| April 5— 6     | 0.025 193; |            |
| 6— 7           | 0.025 998; | 0.000 805, |
| 7— 8           | 0.027 299; | 0.001 301; |
| 8—10           | 0.030 675; | 0 003 376. |

Das stetige Wachsen der Werte  $C$  ist nur auf inkorrekte Winkel  $\omega$  zurückzuführen, d. h. die Schweifmaterie hat sich nicht stets (wie es auch zu erwarten war) auf dem verlängerten Radiusvektor des Kometenkerns befunden, sondern ist allmählich hinter demselben zurückgeblieben. Die Winkel  $\omega$  wachsen nicht ebenso schnell wie die Winkel  $v$ . Die obige

Näherungsformel für  $C$  kann zur Korrektur der Winkel  $\omega$  und einer wenigstens annähernden Bestimmung der Winkel  $\varphi$  benutzt werden. Da die Schweifmaterie an den Tagen April 5 und 6 sich noch recht nahe vom Kern befunden hat, so werden an diesen Tagen die Differenzen  $v_1 - \omega_1$ ,  $v_2 - \omega_2$  noch sehr gering sein; wir nehmen deshalb  $C = 0.025193 = \text{konst.}$  Eine etwaige Ungenauigkeit dieser Annahme wird, laut der strengen Formel (37), nur einen kleinen Einfluss auf die abzuleitenden Werte  $g$  und  $G$  besitzen. Man erhält für die drei letzten Beobachtungen genäherte Winkel  $v - \omega$  und darauf genäherte  $\Delta_1$  und Winkel  $\varphi$  nach den Formeln:

$$\Delta_1^2 = R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos(v - \omega);$$

$$\sin \varphi = \frac{R}{\Delta_1} \cdot \sin(v - \omega).$$

|    | $v - \omega$     | $\lg \Delta_1$ | $\lg \Delta_1 - \lg \Delta$ | $\varphi$       |
|----|------------------|----------------|-----------------------------|-----------------|
| 3. | + 0° 2' 26".68;  | 2.592 0669;    | + 0.000 0429;               | + 1° 6' 40".7;  |
| 4. | + 0 8 19.80;     | 2.839 5600;    | + 0.000 3038;               | + 2 12 11.9;    |
| 5. | + 0° 37' 47".22; | 1.235 2672;    | + 0.001 1025;               | + 5° 24' 13".3. |

Mit diesen verhältnismässig kleinen genäherten Winkeln  $\varphi$  kann man, unter Berücksichtigung der früheren aus den Beobachtungen abgeleiteten  $\Delta$ , korrigierte Werte  $R$  und  $\omega$  nach den Formeln:

$$R^2 = \Delta^2 + r^2 + 2 \cdot \Delta \cdot r \cdot \cos \varphi;$$

$$\sin(v - \omega) = \frac{A}{R} \cdot \sin \varphi$$

erhalten, welche zugleich dem Flächengesetze annähernd genügen:

|    | $\lg R_{(\text{korr})}$ : | $\lg R_{(\text{korr})} - \lg R$ : | $\omega_{(\text{korr})}$ : | $v - \omega_{(\text{korr})}$ : | $C$        |
|----|---------------------------|-----------------------------------|----------------------------|--------------------------------|------------|
| 1. | 0.014 0925;               | 0.000 0000;                       | - 1° 2' 57".4;             | 0° 0' 0".0;                    | 0.025 193; |
| 2. | 0.018 5465;               | 0.000 0000;                       | + 0 20 30.7;               | 0 0 0.0;                       | 0.025 193; |
| 3. | 0.027 8079;               | - 0.000 0029;                     | + 1 36 57.0;               | 0 2 26.7;                      | 0.025 194; |
| 4. | 0.040 0157;               | - 0.000 0190;                     | + 2 47 20.2;               | 0 8 19.5;                      | 0.025 197; |
| 5. | 0.079 3178;               | - 0.000 1570;                     | + 5° 2' 41".5;             | 0° 37' 42".3;                  |            |

Auf Grund dieser Koordinaten erhält man nun sowohl die Bahnlänge  $L$ , als auch die mittlere Orbitalgeschwindigkeit  $H$  der Schweifmaterie in den verschiedenen Zeitintervallen:

| 1892.       | Zeitintervall: | $L$            | $H$            | $\delta R$     |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| April 5— 6: | 1.038 889 Tage | 4 089 800 klm. | 45.6 klm.-sek. | 17.7 klm.-sek. |
| 6— 7:       | 0.981 945 »    | 4 856 400 »    | 57.2 »         | 39.6 »         |
| 7— 8:       | 0.950 000 »    | 5 619 600 »    | 68.5 »         | 55.4 »         |
| 8—10:       | 2.056 250 »    | 16 929 500 »   | 95.3 »         | 87.7 »         |





Mit diesen Werten erhält man den für die Bahn der Schweifmaterie äusserst wichtigen Ausdruck:

$$\log \left[ \frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos \omega_{\pi} + 1) - \frac{P}{a} \right] = \bar{4}.245\ 9896,$$

welcher sich als positiv erweist, infolge dessen die Schnittpunkte nach den Formeln (10) reell sind, d. h. die beobachtete Schweifmaterie ist wirklich vom Kometenkerne ausgeströmt. Da ferner:

$$\begin{aligned} \lg \frac{E \cdot \sin \omega_{\pi}}{P} &= \bar{1}.792\ 7611_n; & \lg \frac{E \cdot \cos \omega_{\pi} + 1}{P} &= 1.516\ 6011; & \lg \frac{1-e}{p} &= \bar{4}.830\ 004; \\ \lg \frac{e \cdot \sin \omega_{\pi}}{p} &= \bar{2}.251\ 5311_n; & \lg \frac{E+1}{P} &= 1.516\ 7516; & \lg \frac{1-e \cdot \cos \omega_{\pi}}{p} &= \bar{3}.001\ 509; \end{aligned}$$

so ergibt sich für den Ausströmungspunkt (erster Schnittpunkt im Sinne der Kernbewegung) sowohl auf der Kometen- als auch Hyperbelbahn:

$$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 = \bar{2}.301\ 3224_n; \quad \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} V_0 = \bar{3}.222\ 4105_n;$$

folglich sind die wahren Anomalien des Ausströmungspunkts auf der Kometenbahn und der Hyperbel, sowie der entsprechende Radiusvektor und der Ausströmungsmoment entsprechend:

$$\begin{aligned} v_0 &= -2^{\circ} 17' 35''.0; & V_0 &= -0^{\circ} 11' 28''.4; \\ \lg r_0 &= 0.011\ 6728; & M_0 &= 1892 \text{ April } 4.97742 \text{ M. Z. B.} \end{aligned}$$

Die wahren Anomalien  $V$  und die entsprechenden transzendenten Winkel  $F$  der beobachteten Positionen der Schweifmaterie sind den drei Momenten entsprechend, gemäss den Formeln (13) und (14) folgende:

$$\begin{aligned} V_1 &= + 2^{\circ} 26' 37''.0; & V_2 &= + 3^{\circ} 43' 3''.3; & V_3 &= + 4^{\circ} 53' 6''.5; \\ F_1 &= + 14^{\circ} 7' 40''.8; & F_2 &= + 21^{\circ} 21' 24''.2; & F_3 &= + 27^{\circ} 52' 13''.2. \end{aligned}$$

Nach den Formeln (15) erhält man drei Werte für die effektive Sonnenkraft:

$$\begin{aligned} \lg \sqrt{\mu} &= 0.766\ 4223; & \mu &= -34.107; & \text{Zeitintervall: } & M_2 - M_1; \\ &= 0.766\ 5193; & &= -34.122; & & \text{„ } M_3 - M_2; \\ &= 0.766\ 4701; & &= -34.115; & & \text{„ } M_3 - M_1; \end{aligned}$$

welche in sehr gutem Einklange zu einander stehen. Mit dem mittleren Werte  $\lg \sqrt{\mu} = 0.766\ 4706$  und dem transzendenten Winkel  $F_0 = -1^{\circ} 6' 39''.8$ , welcher der

wahren Anomalie  $V_0$  des Ausströmungspunkts auf der Hyperbel entspricht, erhält man nach der Formel (27) den Periheldurchgangsmoment:

$$M_{\pi} = 1892 \text{ April } 5 \cdot 11738 \text{ M. Z. Berlin.}$$

Die Tangentenwinkel  $\beta$  und  $\beta_1$ , sowie die entsprechenden Orbitalgeschwindigkeiten  $h_0$  und  $H_0$  im Ausströmungspunkte  $(v_0, r_0)$  sind nach den Formeln (16), resp. (28) und (29):

$$\beta = 91^{\circ} 8' 44''.66; \quad \lg h_0 = 0.144 5278;$$

$$\beta_1 = 93^{\circ} 19' 12''.27; \quad \lg H_0 = 0.154 1961.$$

Endlich erhält man den Ausströmungswinkel  $G$  und die Anfangsgeschwindigkeit der Ausströmung inbezug auf den Kometenkern nach den Formeln (30) resp. (32):

$$\lg \operatorname{tg} G = 1.728 5962_n; \quad G = -20^{\circ} 9' 36''.3;$$

$$\lg g = 2.792 7697; \quad g = 0.062 054 = 1846.8 \text{ mtr./sek.}$$

Zur Kontrolle der Rechnungen benutzen wir die Relation (33). Man erhält mit den direkt aus den Beobachtungen abgeleiteten Werten von  $\beta, \mu, g, G$ :

$$\lg p \cdot \left[ \frac{g}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin(\beta - G)}{\sin \beta} \right]^2 = 4.246 0516.$$

Der Logarithmus dieses Ausdrucks unterscheidet sich also von dem Logarithmus des auf der linken Seite der Relation (33) sich befindenden und schon oben abgeleiteten Ausdrucks nur um 0.000 062, welche Differenz durch die Unsicherheit der siebenten Dezimale hervorgerufen ist.

Ogleich die auf diesem Wege abgeleiteten Werte  $M_0(v_0, r_0), g, G, \mu$ , der Natur der Sache gemäss, keine grosse Ansprüche auf Genauigkeit machen können, so sind sie dennoch, wie an seiner Stelle schon bemerkt wurde, nicht völlig willkürlich, sondern unterscheiden sich im Gegenteil, wie weiter unten zu ersehen sein wird, recht wenig von den gesuchten Werten  $M_0(v_0, r_0), g, G, \mu$ . Mit Hilfe derselben Formeln (3) bis (8) kann man sich schon an dieser Stelle überzeugen, dass die erste Beobachtung ungenau ist, da bei einer Kombination dieser Beobachtung mit irgend welchen zweien andern sich stets nach Formel (10) imaginäre Schnittpunkte ergeben, welcher Umstand darauf hindeutet, dass der Winkel  $s$  von Pickering etwas zu gross abgeleitet ist, infolge dessen sich auch ein etwas zu grosser Radiusvektor ergeben hat.

Es kann nun eine erste genäherte, den Bewegungsgesetzen streng genügende Bahn abgeleitet und mit den fünf Beobachtungen verglichen werden.

Der hierbei angenommene Ausströmungsmoment, sowie die Grössen  $g$ ,  $G$ ,  $\mu$  schliessen sich völlig den aus den drei Beobachtungen abgeleiteten Werten an und sind nur der Einfachheit wegen etwas abgerundet:

$$M_0 = 1892 \text{ April } 4.975 \text{ } 67 \text{ M. Z. Berlin}$$

$$\mu = -35.0; \quad 1 - \mu = 36.0;$$

$$g = 0.06; \quad G = -25^\circ.$$

Mit den Formeln (34) bis (49) erhält man die Elemente der genäherten Bahn. Zugleich sind einige Werte berechnet, welche bei den späteren Rechnungen erforderlich sind.

|  |   |  |
|--|---|--|
| $\lg k \cdot \sqrt{\mu} = 1.007 \text{ } 6155;$    | $\lg m = 2.773 \text{ } 5943;$            | $\lg E \cdot \sin(\beta_1 + V_0) = 0.024 \text{ } 3209;$   |
| $v_0 = -2^\circ 17' 43''.50;$                      | $\lg(m+1) = 0.025 \text{ } 0492;$         | $\lg E \cdot \cos(\beta_1 + V_0) = 2.762 \text{ } 3939_n;$ |
| $\lg r_0 = 0.011 \text{ } 6732;$                   | $\lg(m+2) = 0.313 \text{ } 7352;$         | $\beta_1 + V_0 = 93^\circ 7' 53''.67;$                     |
| $\lg h_0 = 0.144 \text{ } 5277;$                   | $\lg P = 2.783 \text{ } 8110;$            | $\lg E \sin \omega_\pi = 2.591 \text{ } 0082_n;$           |
| $\beta = 91^\circ 8' 48''.88;$                     | $\lg A = 1.697 \text{ } 9380;$            | $\lg E \cos \omega_\pi = 0.024 \text{ } 6754;$             |
| $\lg \sin(\beta + G) = 1.961 \text{ } 2242;$       | $\lg E = 0.024 \text{ } 9700;$            | $\omega_\pi = -2^\circ 6' 35''.59;$                        |
| $\lg H_0 = 0.152 \text{ } 9946;$                   | $\psi = 19^\circ 14' 36''.76;$            | $\lg Q = 0.011 \text{ } 6324;$                             |
| $\beta_1 = 93^\circ 19' 1''.58;$                   | $\lg(E-1) = 2.772 \text{ } 1786;$         | $\lg \sin(\beta_1 + V_0 + \psi) = 1.966 \text{ } 0062;$    |
| $\lg \sin(\beta_1 + v_0) = 1.999 \text{ } 9310;$   | $\lg(E+1) = 0.313 \text{ } 6944;$         | $\lg n = 1.460 \text{ } 7085;$                             |
| $\lg \cos(\beta_1 + v_0) = 2.251 \text{ } 1730_n;$ | $\lg E \sin V_0 = 3.535 \text{ } 2599_n;$ | $\lg N_0 = 2.594 \text{ } 7700_n;$                         |
| $\lg \cos(\beta_1 + G) = 1.567 \text{ } 5784;$     | $\lg E \cos V_0 = 0.024 \text{ } 9677;$   | $\lg t_0 = 1.134 \text{ } 0615_n;$                         |
| $\lg \sqrt{P\mu} = 0.163 \text{ } 9395;$           | $V_0 = -0^\circ 11' 7''.91;$              | $M_\pi = 5.111 \text{ } 8338 \text{ Apr. M. Z. B.}$        |

Für die Kontrolle ergibt sich nach der Relation (33):

$$\lg \left( \frac{p}{A} - \frac{P}{a} \right) = 0.614 \text{ } 2809$$

und identisch andererseits:

$$\lg \left[ 2 \cdot (Ee \cos \omega_\pi + 1) + p \cdot \left( \frac{g \cdot \sin(\beta - G)}{\sqrt{\mu} \cdot \sin \beta} \right)^2 \right] = 0.614 \text{ } 2809.$$

Für die Beobachtungsmomente ergeben sich nun gemäss den Formeln (50) bis (53) folgende theoretische Positionen der Schweifmaterie:

| April:                          | 5.9:            | 6.9:             | 7.9:             | 8.9:             | 10.9:           |
|---------------------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| $M - M_\pi:$                    | 0.794 8202;     | 1.833 7092;      | 2.815 6542;      | 3.765 6542;      | 5.821 9042;     |
| $\lg N:$                        | 1.360 9774;     | 1.724 0390;      | 1.910 2378;      | 0.036 5489;      | 0.225 7735;     |
| $\lg \Theta:$                   | 1.046 8211;     | 1.407 9072;      | 1.590 9280;      | 1.712 9110;      | 1.889 5958;     |
| $\lg \sin \text{ hyp } \Theta:$ | 1.047 7187;     | 1.412 6333;      | 1.601 8753;      | 1.732 0379;      | 1.932 2886;     |
| $\lg \cos \text{ hyp } \Theta:$ | 0.002 6884;     | 0.014 0568;      | 0.032 2035;      | 0.055 4837;      | 0.119 2878;     |
| $\lg R \cdot \sin V:$           | 2.288 5932;     | 2.653 5078;      | 2.842 7497;      | 2.972 9123;      | 1.173 1630;     |
| $\lg R \cdot \cos V:$           | 0.012 9400;     | 0.018 5157;      | 0.027 5697;      | 0.039 4627;      | 0.073 6522;     |
| theor.: $\lg R:$                | 0.013 0173;     | 0.018 9196;      | 0.028 4949;      | 0.041 0552;      | 0.077 0592;     |
| beob.: $\lg R:$                 | 0.014 0925;     | 0.018 5465;      | 0.027 8079;      | 0.040 0157;      | 0.079 3178;     |
| $\delta \lg R:$                 | +0.001 0752;    | -0.000 3731;     | -0.000 6870;     | -0.001 0395;     | +0.002 2586;    |
| $V:$                            | +1° 4' 50''.69; | +2° 28' 15''.04; | +3° 44' 18''.24; | +4° 54' 12''.76; | +7° 10' 2''.53; |
| theor.: $\omega:$               | -1° 1' 44''.90; | +0° 21' 30''.45; | +1° 37' 42''.65; | +2° 47' 37''.17; | +5° 3' 26''.94; |
| beob.: $\omega:$                | -1° 2' 57''.4;  | +0° 20' 30''.7;  | +1° 36' 57''.0;  | +2° 47' 20''.2;  | +5° 2' 41''.5;  |
| $\delta \omega:$                | -0° 1' 12''.5;  | -0° 1' 8''.7;    | -0° 0' 45''.6;   | -0° 0' 17''.0;   | -0° 0' 45''.4.  |

Am schlechtesten dargestellt sind die erste und letzte Beobachtungen, welche übrigens von keiner grossen Genauigkeit sind; wir werden ihnen auch weiterhin aus diesem Grunde das Gewicht  $\frac{1}{2}$  zuerteilen. Im allgemeinen sind aber die Differenzen (Beobachtung—Theorie)  $\delta \lg R$ ,  $\delta \omega$  genügend gering, dass gleich zu einer definitiven Bahnbestimmung mit Hilfe der oben entwickelten Formeln (114) bis (117) unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate übergangen werden kann.

## § 12. Definitive Bahn der Kometenschweifmaterie.

Zuerst berechnet man nach den Formeln (77), (78), (80), (82), (87), (94) und (100) folgende Werte:

$$\lg p_1 = \bar{4}.987\ 0958_n; \quad \lg a_1 = \bar{2}.410\ 1233_n; \quad \lg \varepsilon_1 = \bar{3}.153\ 2820;$$

$$\lg p_2 = \bar{1}.774\ 7119; \quad \lg a_2 = \bar{2}.283\ 9944_n; \quad \lg \varepsilon_2 = \bar{2}.548\ 3933;$$

$$\lg p_3 = 0.106\ 0394_n; \quad \lg a_3 = \bar{2}.552\ 5428; \quad \lg \varepsilon_3 = \bar{2}.877\ 8876_n;$$

$$\lg p_4 = \bar{2}.455\ 9320_n; \quad \lg a_4 = \bar{4}.915\ 7911; \quad \lg \varepsilon_4 = \bar{3}.228\ 1490_n;$$

$$\lg \pi_1 = 0.120\ 6973; \quad \lg \Gamma_0 = 2.007\ 6743;$$

$$\lg \pi_2 = \bar{2}.562\ 4778; \quad \lg \Delta_0 = 2.321\ 2895;$$

$$\lg \pi_3 = \bar{2}.170\ 0396; \quad \lg \Gamma'_0 = 0.400\ 5602_n;$$

$$\lg \pi_4 = \bar{5}.941\ 2520_n; \quad \lg \Delta'_0 = 0.769\ 4842_n.$$

Ferner ergeben sich die in den Formeln (113), (115) und (134) auftretenden Ausdrücke:

$$\lg x = \bar{2}.282\ 5070_n; \quad \lg (p_1+x \cdot p_2) = \bar{2}.092\ 6846_n; \quad \lg (a_1+x \cdot a_2) = \bar{2}.403\ 8529_n;$$

$$\lg y = \bar{1}.691\ 0024_n; \quad \lg (p_3+y \cdot p_2) = 0.195\ 5614_n; \quad \lg (a_3+y \cdot a_2) = \bar{2}.654\ 4676;$$

$$\lg z = \bar{4}.933\ 0532; \quad \lg (p_4+z \cdot p_2) = \bar{2}.448\ 1062; \quad \lg (a_4+z \cdot a_2) = \bar{4}.107\ 0125.$$

$$\lg (\varepsilon_1+x \cdot \varepsilon_2) = \bar{4}.872\ 6030; \quad \lg (\pi_1+x \cdot \pi_2) = 0.120\ 4671;$$

$$\lg (\varepsilon_3+y \cdot \varepsilon_2) = \bar{2}.967\ 7517_n; \quad \lg (\pi_3+y \cdot \pi_2) = \bar{3}.496\ 0211_n;$$

$$\lg (\varepsilon_4+z \cdot \varepsilon_2) = \bar{3}.220\ 2966_n; \quad \lg (\pi_4+z \cdot \pi_2) = \bar{5}.748\ 5660_n.$$

Die Werte der in den Formeln (116) und (117) auftretenden Grössen sind:

| April | $\lg \xi$   | $\lg \eta$  | $\lg \zeta$               | $\lg \vartheta$       |
|-------|-------------|-------------|---------------------------|-----------------------|
| 5.    | 0.519 0017; | 0.832 2336; | $\bar{1}.487\ 6956_n$ ;   | $\bar{1}.027\ 0826$ ; |
| 6.    | 0.834 7395; | 1.147 3690; | $\bar{1}.840\ 8056_n$ ;   | $\bar{1}.705\ 6887$ ; |
| 7.    | 0.994 4122; | 1.306 4766; | 0.010 8970 <sub>n</sub> ; | $\bar{3}.051\ 4315$ ; |
| 8.    | 1.094 5378; | 1.406 0615; | 0.115 9389 <sub>n</sub> ; | $\bar{3}.277\ 6507$ ; |
| 10.   | 1.217 7321; | 1.528 1129; | 0.244 1817 <sub>n</sub> ; | $\bar{3}.589\ 7320$ . |

| April | $\lg \xi'$  | $\lg \eta'$ | $\lg \zeta'$            | $\lg \vartheta'$      |
|-------|-------------|-------------|-------------------------|-----------------------|
| 5.    | 0.927 9831; | 1.233 3529; | $\bar{1}.957\ 9434_n$ ; | $\bar{4}.497\ 3304$ ; |
| 6.    | 0.926 1474; | 1.220 6129; | $\bar{1}.946\ 1388_n$ ; | $\bar{4}.811\ 0219$ ; |
| 7.    | 0.916 8781; | 1.200 5762; | $\bar{1}.926\ 9882_n$ ; | $\bar{4}.967\ 5227$ ; |
| 8.    | 0.902 0228; | 1.174 5966; | $\bar{1}.901\ 8676_n$ ; | $\bar{3}.063\ 5794$ ; |
| 10.   | 0.855 6031; | 1.100 7235; | $\bar{1}.829\ 8596_n$ ; | $\bar{3}.175\ 4099$ . |

| April | $\lg \chi$            | $\lg \varphi$           | $\lg \psi$                | $\lg \vartheta$ |
|-------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------|
| 5.    | $\bar{1}.617\ 3366$ ; | $\bar{1}.917\ 7806$ ;   | $\bar{1}.538\ 9630_n$ ;   |                 |
| 6.    | $\bar{1}.505\ 1457$ ; | $\bar{1}.765\ 6533$ ;   | $\bar{1}.892\ 0730_n$ ;   |                 |
| 7.    | $\bar{1}.368\ 6810$ ; | $\bar{1}.536\ 2192$ ;   | 0.062 1644 <sub>n</sub> ; | idem.           |
| 8.    | $\bar{1}.193\ 4852$ ; | $\bar{1}.063\ 3662$ ;   | 0.167 2064 <sub>n</sub> ; |                 |
| 10.   | $\bar{1}.223\ 5131$ ; | $\bar{1}.517\ 1335_n$ ; | 0.295 4491 <sub>n</sub> ; |                 |

| April | $\lg \chi'$             | $\lg \varphi'$          | $\lg \psi'$             | $\lg \vartheta'$ |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------|
| 5.    | $\bar{2}.778\ 9029_n$ ; | $\bar{1}.706\ 9767_n$ ; | $\bar{2}.331\ 1287_n$ ; |                  |
| 6.    | $\bar{1}.123\ 6742$ ;   | $\bar{1}.725\ 4905_n$ ; | $\bar{3}.774\ 8484$ ;   |                  |
| 7.    | $\bar{1}.495\ 5200$ ;   | $\bar{1}.733\ 1729_n$ ; | $\bar{2}.688\ 7354$ ;   | idem.            |
| 8.    | $\bar{1}.682\ 8771$ ;   | $\bar{1}.732\ 5239_n$ ; | $\bar{1}.009\ 8421$ ;   |                  |
| 10.   | $\bar{1}.913\ 0300$ ;   | $\bar{1}.709\ 1875_n$ ; | $\bar{1}.279\ 2172$ .   |                  |

Die Koeffizienten  $R$  und  $\Omega$  in den Gleichungen (114) werden nun nach den Formeln (115) oder auch (115') berechnet:

| April | $\lg R_1$               | $\lg R_2$               | $\lg R_3$             |
|-------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 5.    | $\bar{1}.678\ 6563_n$ ; | $\bar{5}.565\ 3383_n$ ; | $\bar{4}.024\ 3915$ ; |
| 6.    | $0.018\ 6302_n$ ;       | $\bar{4}.980\ 3093_n$ ; | $\bar{4}.690\ 8169$ ; |
| 7.    | $0.185\ 0594_n$ ;       | $\bar{3}.409\ 9888_n$ ; | $\bar{3}.033\ 3218$ ; |
| 8.    | $0.288\ 3035_n$ ;       | $\bar{3}.669\ 1944_n$ ; | $\bar{3}.258\ 0793$ ; |
| 10.   | $0.414\ 5224_n$ ;       | $\bar{2}.009\ 1190_n$ ; | $\bar{3}.568\ 8331$ . |

| April | $\lg \Omega_1$          | $\lg \Omega_2$          | $\lg \Omega_3$          |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 5.    | $\bar{2}.188\ 2331_n$ ; | $\bar{2}.238\ 9880_n$ ; | $\bar{6}.619\ 8955$ ;   |
| 6.    | $\bar{2}.330\ 9503$ ;   | $\bar{2}.560\ 4784_n$ ; | $\bar{6}.475\ 5742_n$ ; |
| 7.    | $\bar{2}.894\ 2607$ ;   | $\bar{2}.729\ 3714_n$ ; | $\bar{5}.495\ 1269_n$ ; |
| 8.    | $\bar{1}.173\ 3052$ ;   | $\bar{2}.841\ 5549_n$ ; | $\bar{5}.925\ 7347_n$ ; |
| 10.   | $\bar{1}.517\ 9626$ ;   | $\bar{2}.999\ 3351_n$ ; | $\bar{4}.459\ 9133_n$ . |

Indem der ersten und fünften Beobachtung das Gewicht  $\frac{1}{2}$ , den andern besseren das Gewicht 1 erteilt wird, erhält man folgende zehn Bedingungsgleichungen, entsprechend den beiden Gleichungen (114):

$$\begin{aligned}
 & [\bar{3}.763\ 7227_n] \cdot \delta M_0 + [\bar{6}.192\ 9746_n] \cdot \delta G + [\bar{5}.873\ 8765] \cdot \delta \mu = [\bar{3}.243\ 1899] ; \\
 & [\bar{2}.254\ 2117_n] \quad + [\bar{5}.758\ 4606_n] \quad + [\bar{4}.690\ 8169] \quad = [\bar{4}.934\ 0409_n] ; \\
 & [\bar{2}.420\ 6408_n] \quad + [\bar{4}.188\ 1401_n] \quad + [\bar{3}.033\ 3218] \quad = [\bar{3}.199\ 1724_n] ; \\
 & [\bar{2}.523\ 8850_n] \quad + [\bar{4}.447\ 3456_n] \quad + [\bar{3}.258\ 0793] \quad = [\bar{3}.379\ 0402_n] ; \\
 & [\bar{2}.499\ 5888_n] \quad + [\bar{4}.636\ 7552_n] \quad + [\bar{3}.418\ 3180] \quad = [\bar{3}.565\ 5400] ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\bar{4}.273\ 2995_n] \cdot \delta M_0 + [\bar{4}.866\ 6242_n] \cdot \delta G + [\bar{6}.469\ 3805] \cdot \delta \mu = [\bar{4}.395\ 3979_n] ; \\
 & [\bar{4}.566\ 5318] \quad + [\bar{3}.338\ 6297_n] \quad + [\bar{6}.475\ 5742_n] \quad = [\bar{4}.522\ 5316_n] ; \\
 & [\bar{3}.129\ 8422] \quad + [\bar{3}.507\ 5227_n] \quad + [\bar{5}.495\ 1269_n] \quad = [\bar{4}.344\ 5397_n] ; \\
 & [\bar{3}.408\ 8867] \quad + [\bar{3}.619\ 7062_n] \quad + [\bar{5}.925\ 7347_n] \quad = [\bar{5}.916\ 0238_n] ; \\
 & [\bar{3}.603\ 0291] \quad + [\bar{3}.626\ 9713_n] \quad + [\bar{4}.309\ 3983_n] \quad = [\bar{4}.192\ 1157_n] .
 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [3.503\ 6539] \cdot \delta M_0 + [6.655\ 0751_n] \cdot \delta G + [4.260\ 2388_n] \cdot \delta \mu &= [6.978\ 4263]; \\ [6.655\ 0751_n] &+ [5.709\ 6302] &+ [7.714\ 0580_n] &= [6.299\ 0358]; \\ [4.260\ 2388_n] &+ [7.714\ 0580_n] &+ [5.064\ 7943] &= [6.524\ 5319]. \end{aligned}$$

Die Determinante  $D$  des Systems der Normalgleichungen und die den Elementen der Determinante  $D$  entsprechenden Minore sind:

$$\begin{aligned} \lg D &= \bar{1}3.293\ 2289 \\ \lg D_{11} &= \bar{1}0.774\ 2288; & \lg D_{12} &= \bar{1}0.166\ 4843_n; & \lg D_{13} &= \bar{9}.969\ 9778; \\ \lg D_{12} &= \bar{1}0.166\ 4843_n; & \lg D_{22} &= \bar{9}.587\ 8745; & \lg D_{23} &= \bar{9}.393\ 3477_n; \\ \lg D_{13} &= \bar{9}.969\ 9778; & \lg D_{23} &= \bar{9}.393\ 3477_n; & \lg D_{33} &= \bar{7}.213\ 2298. \end{aligned}$$

Die durch die Determinante  $D$  dividierten Minore sind:

$$\begin{aligned} \lg \nabla_{11} &= 3.480\ 9999; & \lg \nabla_{12} &= 2.873\ 2554_n; & \lg \nabla_{13} &= 4.676\ 7489; \\ \lg \nabla_{12} &= 2.873\ 2554_n; & \lg \nabla_{22} &= 4.294\ 6456; & \lg \nabla_{23} &= 4.100\ 1187_n; \\ \lg \nabla_{13} &= 4.676\ 7489; & \lg \nabla_{23} &= 4.106\ 1187_n; & \lg \nabla_{33} &= 5.920\ 0009. \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten erhält man mit den Formeln (132):

$$\begin{aligned} \lg \delta M_0 &= \bar{1}.277\ 0280; & \delta M_0 &= +0.189\ 247; \\ \lg \delta G &= \bar{2}.946\ 8370; & \delta G &= +5^\circ 4' 10''.0; \\ \lg \delta \mu &= 0.513\ 2487; & \delta \mu &= +3.260\ 23. \end{aligned}$$

Die Fehlerquadratsumme  $[vv]$  und der wahrscheinliche, mittlere Fehler  $\varepsilon$  einer jeden aus den Beobachtungen abgeleiteten Grössen  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{10}$ , reduziert auf die Gewichtseinheit, sind, da

$$\lg [nn] = \bar{5}.411\ 7854, .$$

folgende:

$$\lg [vv] = \bar{5}.111\ 3989; \quad \lg \varepsilon = \bar{3}.133\ 1505.$$

Die wahrscheinlichen mittleren Fehler der abgeleiteten Unbekannten sind demnach gemäss den Formeln (133)

$$\begin{aligned} \lg \varepsilon_{\delta M_0} &= \bar{2}.873\ 6504; & \varepsilon_{\delta M_0} &= \pm 0.074\ 757; \\ \lg \varepsilon_{\delta G} &= \bar{1}.280\ 4732; & \varepsilon_{\delta G} &= \pm 10^\circ 55' 45''.8; \\ \lg \varepsilon_{\delta \mu} &= 0.093\ 1509; & \varepsilon_{\delta \mu} &= \pm 1.239\ 23. \end{aligned}$$

Die für die Ableitung der definitiven Hyperbelbahn noch erforderliche Variation der Anfangsgeschwindigkeit der Ausströmung  $g$  wird mit der Formel (113) abgeleitet; man erhält zuerst:

$$\delta g = [4.518\ 0885_n] \cdot \delta M_0 + [2.469\ 1537_n] \cdot \delta G + [4.933\ 0532] \cdot \delta \mu$$

und nach Substitution der obigen Werte von  $\delta M_0$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  folgt:

$$\lg \delta g = 4.100\ 3624; \quad \delta g = +0.000\ 126.$$

Der wahrscheinliche mittlere Fehler von  $\delta g$ , als Funktion der aus den Normalgleichungen abgeleiteten Grössen  $\delta M_0$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$ , ergibt sich nach der Formel (135). Es ist zuerst:

$$\lg f_1 = 1.248\ 5191; \quad \lg f_2 = 2.755\ 8357_n; \quad \lg f_3 = 2.513\ 7060$$

und folglich:

$$\lg \varepsilon_{\delta g} = 3.771\ 1953; \quad \varepsilon_{\delta g} = \pm 0.005\ 905 = \pm 175.7 \text{ mtr./sek.}$$

Die definitiven Werte der Anfangsbedingungen und der effektiven Sonnenkraft sind:

$$M_0 = 1892 \text{ April } 5.164\ 917 \pm 0.074\ 757 \text{ M. Z. Berlin};$$

$$g = 0.060\ 126 \pm 0.005\ 905 = 1789.4 \text{ mtr./sek. } \pm 175.7 \text{ mtr./sek.}$$

$$G = -19^\circ 55' 50'' \pm 10^\circ 55' 46'';$$

$$\mu = -38.260\ 23 \pm 1.239\ 23.$$

Mit diesen korrigierten Grössen erhält man endlich die definitive Bahn vermittelt der Formeln (34) bis (49) wie folgt:

|   |                                 |  |
|---|---------------------------------|--|
| $\lg k \cdot \sqrt{\mu} = 1.026\ 9552;$       | $\lg H_0 = 0.151\ 5294;$        | $\lg E \cdot \sin(\beta_1 + V_0) = 0.022\ 1011;$   |
| $v_0 = -2^\circ 2' 31.32;$                    | $\beta_1 = 93^\circ 17' 26.07;$ | $\lg E \cdot \cos(\beta_1 + V_0) = 2.758\ 9104_n;$   |
| $\lg r_0 = 0.011\ 6369;$                      | $\lg m = 2.731\ 9480;$          | $\beta_1 + V_0 = 93^\circ 7' 20.98;$   |
| $\lg h_0 = 0.144\ 5458;$                      | $\lg(m+1) = 0.022\ 8177;$       | $\lg E \cdot \sin V_0 = 3.490\ 1417_n;$  |
| $\beta = 91^\circ 1' 13.36;$                  | $\lg(m+2) = 0.312\ 5887;$       | $\lg E \cdot \cos V_0 = 0.022\ 7446;$  |
| $\lg h_0 \cdot \sin \beta = 0.144\ 4770;$     | $\lg P = 2.742\ 1516;$          | $V_0 = -0^\circ 10' 5.09;$   |
| $\lg h_0 \cdot \cos \beta = 2.395\ 1612_n;$   | $\lg A = 1.699\ 0481;$          | $\omega_\pi = -1^\circ 52' 26.73;$   |
| $\lg g \cdot \sin G = 2.311\ 6650_n;$         | $\lg E = 0.022\ 7464;$          | $\lg_{10} E \cdot \operatorname{tg} F_0 = 2.281\ 1787_n;$  |
| $\lg g \cdot \cos G = 2.752\ 2393;$           | $\psi = 18^\circ 22' 56.98;$    | $\lg_{10} \lg_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_0 \right) = 2.258\ 4102_n;$ |
| $\lg H_0 \cdot \sin \beta_1 = 0.150\ 8128;$   | $\lg(E-1) = 2.730\ 5514;$       | $\lg N_0 = 2.570\ 9736_n;$   |
| $\lg H_0 \cdot \cos \beta_1 = 2.910\ 4397_n;$ | $\lg(E+1) = 0.312\ 5521;$       | $\lg n = 1.478\ 3830;$   |
| $\lg \sqrt{E\mu} = 0.162\ 4496;$              | $\lg Q = 0.011\ 6002;$          | $M_\pi = 5.288\ 680 \text{ Apr. M. Z. B.}$   |



Als Kontrolle der vorigen Rechnungen gilt die Relation (33):

$$\lg\left(\frac{p}{A} - \frac{P}{a}\right) = \lg\left[2 \cdot (E \cdot e \cos \omega_{\pi} + 1) + p \cdot \left(\frac{g \cdot \sin(\beta - G)}{\sqrt{\mu} \cdot \sin \beta}\right)^2\right] = 0.613\ 1536.$$

Zu erwähnen ist noch, dass der zweite Ausdruck in der eckigen Klammer in der That nicht konstant geblieben ist, sondern der Logarithmus ist jetzt:  $\bar{4}.228\ 3309$ , während er früher gleich:  $\bar{4}.230\ 8666$  war. Es ist demnach zu beachten, dass die oben eingeführte Realitätsbedingung der Schnittpunkte (113) durchaus nicht eine Unveränderlichkeit des Ausdrucks unter der Wurzel in den Formeln (10) nach sich zieht.

Die heliozentrischen Koordinaten ergeben sich für die Beobachtungsmomente, auf der definitiven Hyperbelbahn, wieder nach den Formeln (50) bis (53), wie folgt:

| 1892, April:                    | 5.9:            | 6.9:            | 7.9:            | 8.9:            | 10.9:           |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $M - M_{\pi}$ :                 | 0.617 974;      | 1.656 863;      | 2.638 808;      | 3.588 808;      | 5.645 058;      |
| $\lg N$ :                       | 1.269 3532;     | 1.697 6696;     | 1.899 7908;     | 0.033 3333;     | 0.230 0514;     |
| $\lg \Theta$ :                  | 2.956 4972;     | 1.382 9503;     | 1.581 8197;     | 1.710 9515;     | 1.894 5507;     |
| $\lg \sin \text{hyp } \Theta$ : | 2.957 0893;     | 1.387 1642;     | 1.592 5193;     | 1.729 9080;     | 1.938 2096;     |
| $\lg \cos \text{hyp } \Theta$ : | 0.001 7750;     | 0.012 5452;     | 0.030 9111;     | 0.055 0052;     | 0.121 8102;     |
| $\lg R \cdot \sin V$ :          | 2.177 6892;     | 2.607 7641;     | 2.812 9192;     | 2.950 5078;     | 1.158 8095;     |
| $\lg R \cdot \cos V$ :          | 0.012 4654;     | 0.017 7538;     | 0.026 9261;     | 0.039 2534;     | 0.075 1749;     |
| theor.: $\lg R$ :               | 0.012 5118;     | 0.018 0822;     | 0.027 7350;     | 0.040 6916;     | 0.078 3434;     |
| beob.: $\lg R$ :                | 0.014 0925;     | 0.018 5465;     | 0.027 8079;     | 0.040 0157;     | 0.079 3178;     |
| $\delta \lg R$ :                | +0.001 5807;    | +0.000 4643;    | +0.000 0729;    | -0.000 6759;    | +0.000 9744;    |
| $V$ :                           | +0° 50' 17".30; | +2° 13' 40".77; | +3° 29' 45".74; | +4° 39' 37".23; | +6° 54' 45".44; |
| theor.: $\omega$ :              | -1° 2' 9".43;   | +0° 21' 14".04; | +1° 37' 19".01; | +2° 47' 10".50; | +5° 2' 18".71;  |
| beob.: $\omega$ :               | -1° 2' 57".4;   | +0° 20' 30".7;  | +1° 36' 57".0;  | +2° 47' 20".2;  | +5° 2' 41".5;   |
| $\delta \omega$ :               | -0° 0' 48".0;   | -0° 0' 43".3;   | -0° 0' 22".0;   | +0° 0' 9".7;    | +0° 0' 22".8.   |

Ein Vergleich der neuen Differenzen  $\delta \omega$  und  $\delta \lg R$  mit den früheren Werten derselben zeigt, dass erstens die Differenzen  $\delta \omega$  völlig symmetrisch verteilt und alle durchweg bedeutend kleiner geworden sind, dass, zweitens, die Differenzen  $\delta \lg R$  zwar bei den ersten beiden Beobachtungen (namentlich bei der ersten) etwas grösser geworden sind, dafür aber die drei letzten Beobachtungen unvergleichlich besser dargestellt sind. Besondere Beachtung verdient die letzte Beobachtung und auch die dritte, bei welchen die Differenzen  $\delta \lg R$  um ein Bedeutendes verringert sind.<sup>1)</sup>

Auch die den obigen fünf Momenten entsprechenden Orbitalgeschwindigkeiten sind, wie aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen, in völligem Einklange mit den

1) Die in den Astronomischen Nachrichten № 4081 zuerst publizierten und im August 1905 abgeleiteten Resultate waren mit etwas komplizierteren Formeln erhalten, in welchen die Variationen  $\delta M_0$ ,  $\delta G$ ,  $\delta \mu$  und auch  $\delta g$  nicht direkt abgeleitet wurden. Infolge dessen erklärt sich die etwas schlechtere Darstellung der Beobachtungen, welche damals erzielt wurde.

Beobachtungen. Die Orbitalgeschwindigkeit auf der Hyperbel wird bestimmt durch die Formel:

$$H = V_{\mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{A} \pm \frac{2}{R}} \dots \dots \dots (136)$$

und man erhält:

|                 |                                 |                               |
|-----------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 1892 April 5.9: | $H = 43.7$ klm./sek. (Theorie). | $H = 45.6$ klm./sek. (Beob.). |
| 6.9:            | 52.5 »                          | 57.2 »                        |
| 7.9:            | 64.7 »                          | 68.5 »                        |
| 8.9:            | 77.8 »                          | 95.3 »                        |
| 10.9:           | 105.7 »                         |                               |

Es erübrigt noch die wahrscheinlichen, mittleren Fehler der Hyperbelemente abzuleiten. Zu diesem Zwecke müssen die Variationen der Hyperbelemente, gemäss den Formeln (134), als Funktionen der aus den Normalgleichungen abgeleiteten Grössen  $\delta M_0$ ,  $\delta G$  und  $\delta \mu$  dargestellt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \delta P &= [5.112\ 0770_n] \cdot \delta M_0 + [3.757\ 5236_n] \cdot \delta G + [3.231\ 9172_n] \cdot \delta \mu \\ \delta A &= [4.337\ 3723_n] \quad + [3.130\ 5569] \quad + [4.604\ 9505] \\ \delta E &= [5.108\ 1844] \quad + [3.745\ 9030_n] \quad + [3.220\ 2966_n] \\ \delta \omega_{\pi} &= [2.356\ 0485] \quad + [4.274\ 1723_n] \quad + [5.748\ 5660_n] \\ \delta Q &= [4.644\ 8156_n] \quad + [6.419\ 4222] \quad + [7.893\ 7960] \\ \delta M_{\pi} &= [1.987\ 8765] \quad + [3.175\ 2309_n] \quad + [3.378\ 6653_n]. \end{aligned}$$

Es ist zuerst:

|                         | $\lg f_1$                 | $\lg f_2$                 | $\lg f_3$                 |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $\delta P$ :            | 1.931 1853 <sub>n</sub> ; | 2.127 9253 <sub>n</sub> ; | 3.173 6105 <sub>n</sub> ; |
| $\delta A$ :            | 1.289 5869;               | 1.498 6959;               | 2.533 5260;               |
| $\delta E$ :            | 1.919 1621 <sub>n</sub> ; | 2.116 2417 <sub>n</sub> ; | 3.161 6285 <sub>n</sub> ; |
| $\delta \omega_{\pi}$ : | 1.818 9605;               | 1.098 4423;               | 3.012 6080;               |
| $\delta Q$ :            | 0.112 8950 <sub>n</sub> ; | 1.428 1898 <sub>n</sub> ; | 1.307 1527 <sub>n</sub> ; |
| $\delta M_{\pi}$ :      | 3.451 6109;               | 2.823 9355;               | 4.645 3264.               |

und nach der Formel (135):

$$\begin{aligned}
 \lg \varepsilon_{\delta P} &= \bar{3}.982\ 5302; & \varepsilon_{\delta P} &= \pm 0.009\ 6057; \\
 \lg \varepsilon_{\delta A} &= \bar{3}.341\ 9497; & \varepsilon_{\delta A} &= \pm 0.002\ 1976; \\
 \lg \varepsilon_{\delta E} &= \bar{3}.970\ 5346; & \varepsilon_{\delta E} &= \pm 0.009\ 3440; \\
 \lg \varepsilon_{\delta \omega_{\pi}} &= \bar{3}.842\ 0111; & \varepsilon_{\delta \omega_{\pi}} &= \pm 0^{\circ} 23' 53''.6; \\
 \lg \varepsilon_{\delta \varrho} &= \bar{4}.136\ 2448; & \varepsilon_{\delta \varrho} &= \pm 0.000\ 1368; \\
 \lg \varepsilon_{\delta M_{\pi}} &= \bar{1}.474\ 7292; & \varepsilon_{\delta M_{\pi}} &= \pm 0.298\ 352.
 \end{aligned}$$

Die Hyperbel, welche alle Beobachtungen am besten darstellt, ist definitiv:

$$M_0 = 1892 \text{ April } 5.164\ 917 \pm 0.074\ 757 \text{ M. Z. Berlin.}$$

$$g = 0.060\ 126 \pm 0.005\ 905 = 1789.4 \text{ mtr./sek. } \pm 175.7 \text{ mtr./sek.}$$

$$G = -19^{\circ} 55' 50'' \pm 10^{\circ} 55' 46''$$

$$\mu = -38.260\ 23 \pm 1.239\ 23.$$

$$P = 0.055\ 2270 \pm 0.009\ 6057; \quad \omega_{\pi} = -1^{\circ} 52' 26''.73 \pm 0^{\circ} 23' 53''.6;$$

$$A = 0.500\ 0899 \pm 0.002\ 1976; \quad Q = 1.027\ 0705 \pm 0.000\ 1368;$$

$$E = 1.053\ 7714 \pm 0.009\ 3440; \quad M_{\pi} = 1892 \text{ April } 5.288\ 68 \pm 0.298\ 35.$$

Der besseren Übersicht wegen wird noch folgende graphische Konstruktion gegeben. Berechnet sind die theoretischen, als auch beobachteten Koordinaten der Schweifverdichtung und des Kometenkerns für ein konstantes Bessel'sches System, nach den Formeln:

$$\xi = R \cdot \cos(v - \omega) - r; \quad \eta = R \cdot \sin(v - \omega),$$

wobei angenommen wurde:

$$\lg r = \lg q = 0.011\ 499; \quad v = 0^{\circ} 0' 0''.0,$$

d. h. der Koordinatenanfang befindet sich im Perihel der Kometenbahn.

Die Berechnungen sind für folgende Momente ausgeführt: Ausströmungsmoment  $M_0$ , Periheldurchgangsmoment, und zum Zweck einer genaueren graphischen Konstruktion, noch für den Moment 1892 April 9.9. Für diesen Moment erhält man:

$$\begin{aligned}
 M - M_{\pi}^{\circ} &= 4.611\ 320; & \lg R \cdot \sin V &= \bar{1}.064\ 7412; \\
 \lg N &= 0.142\ 2083; & \lg R \cdot \cos V &= 0.055\ 7515; \\
 \lg \Theta &= \bar{1}.813\ 8506; & \lg R &= 0.058\ 0030; \\
 \lg \sin \text{hyp } \Theta &= \bar{1}.844\ 1413; & V &= +5^{\circ}49'45''.18; \\
 \lg \cos \text{hyp } \Theta &= 0.086\ 2790; & \omega &= +3^{\circ}57'18''.45.
 \end{aligned}$$

Zuerst sind die Polarkoordinaten des Kometenkerns und der theoretischen Lage der Schweifmaterie nebst ihren Orbitalgeschwindigkeiten zusammengestellt:

| 1892:       | $\lg r$ :   | $v$ :                    | $\lg R$ :   | $\omega$ :               | $h$ :           | $H$ :          |
|-------------|-------------|--------------------------|-------------|--------------------------|-----------------|----------------|
| $M_0$ :     | 0.011 6369; | $-2^{\circ} 2' 31''.8$ ; | 0.011 6369; | $-2^{\circ} 2' 31''.8$ ; | 41.51 klm./sek. | 42.2 klm./sek. |
| $M_{\pi}$ : | 0.011 6154; | $-1\ 52\ 35.5$ ;         | 0.011 6002; | $-1\ 52\ 26.7$ ;         | 41.52 »         | 42.1 »         |
| April 5.9:  | 0.011 5334; | $-1\ 2\ 57.4$ ;          | 0.012 5118; | $-1\ 2\ 9.4$ ;           | 41.52 »         | 43.7 »         |
| » 6.9:      | 0.011 5029; | $+0\ 20\ 30.7$ ;         | 0.018 0822; | $+0\ 21\ 14.0$ ;         | 41.52 »         | 52.5 »         |
| » 7.9:      | 0.011 5896; | $+1\ 39\ 23.7$ ;         | 0.027 7350; | $+1\ 37\ 19.0$ ;         | 41.52 »         | 64.7 »         |
| » 8.9:      | 0.011 7823; | $+2\ 55\ 39.7$ ;         | 0.040 6916; | $+2\ 47\ 10.5$ ;         | 41.51 »         | 77.8 »         |
| » 9.9:      | 0.012 1090; | $+4\ 17\ 38.7$ ;         | 0.058 0030; | $+3\ 57\ 18.4$ ;         | 41.49 »         | 92.0 »         |
| » 10.9:     | 0.012 5633; | $+5^{\circ}40' 23''.8$ ; | 0.078 3434; | $+5^{\circ} 2' 18''.7$ ; | 41.47 »         | 104.7 »        |

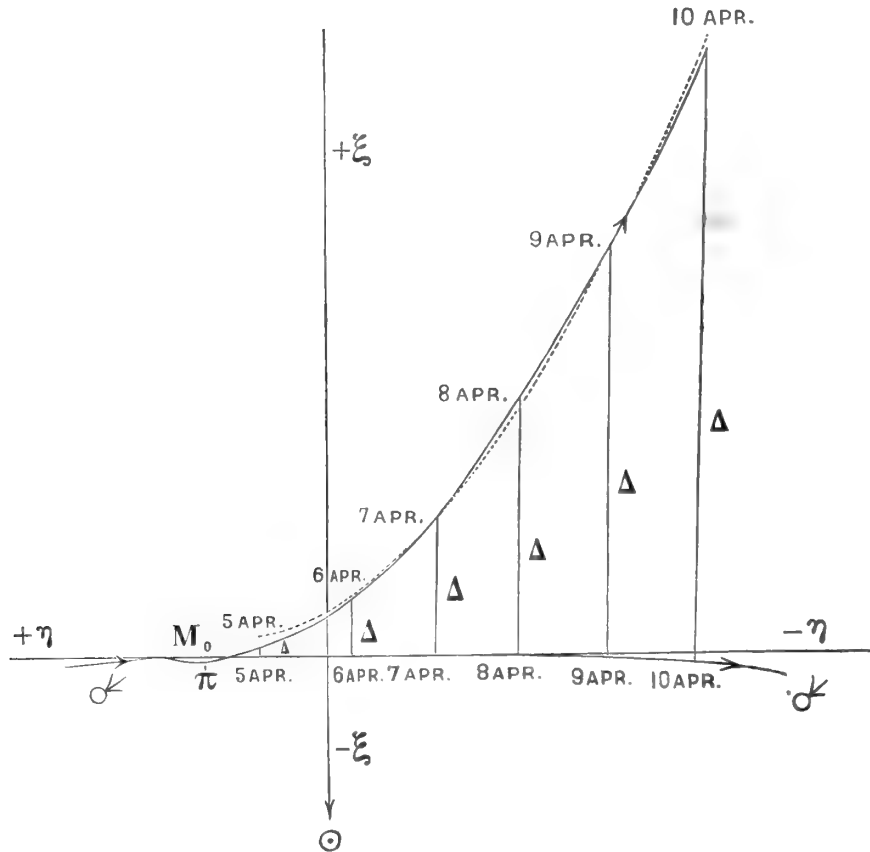
Die Besselschen Koordinaten sind nun:

|             | $\xi$ :         | $\eta$ :         | $\xi$ (theor.): | $\eta$ (theor.): | $\xi$ (beob.):  | $\eta$ (beob.): |
|-------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| $M_0$ :     | $-0.000\ 326$ ; | $+0\ 036\ 603$ ; | $-0.000\ 326$ ; | $+0.036\ 603$ ;  | —               | —               |
| $M_{\pi}$ : | $-0.000\ 276$ ; | $+0.033\ 633$ ;  | $-0.000\ 310$ ; | $+0.033\ 588$ ;  | —               | —               |
| April 5.9:  | $-0.000\ 087$ ; | $+0.018\ 805$ ;  | $+0.002\ 229$ ; | $+0.018\ 608$ ;  | $+0.005\ 976$ ; | $+0.018\ 916$ ; |
| 6.9:        | $-0.000\ 009$ ; | $-0.006\ 127$ ;  | $+0.015\ 664$ ; | $-0.006\ 439$ ;  | $+0.016\ 778$ ; | $-0.006\ 227$ ; |
| 7.9:        | $-0.000\ 215$ ; | $-0.029\ 691$ ;  | $+0.038\ 687$ ; | $-0.030\ 171$ ;  | $+0.038\ 869$ ; | $-0.030\ 063$ ; |
| 8.9:        | $-0.000\ 671$ ; | $-0.052\ 480$ ;  | $+0.070\ 096$ ; | $-0.053\ 385$ ;  | $+0.068\ 388$ ; | $-0.053\ 353$ ; |
| 9.9:        | $-0.001\ 443$ ; | $-0.076\ 993$ ;  | $+0.113\ 333$ ; | $-0.078\ 830$ ;  | —               | —               |
| 10.9:       | $-0.002\ 524$ ; | $-0.101\ 757$ ;  | $+0.166\ 228$ ; | $-0.105\ 188$ ;  | $+0.168\ 898$ ; | $-0.105\ 557$ ; |

Alle diese Koordinaten sind mit dem Masstabe 1 astron. Einheit = 500 mm. auf der beifolgenden Zeichnung aufgetragen und mit den entsprechenden Linien verbunden und zwar: die beobachteten Punkte mit einer Punktierlinie und die theoretischen mit einer kontinuierlichen Linie. Aus dieser Zeichnung ist zu ersehen, dass: 1) die Schweifmaterie, ganz

wie beim Kometen Borrelly 1903 IV<sup>1)</sup>, sich auf einem zur Sonne und zur Kometenbahn *konvexen* Bogen bewegt hat, dass 2) die theoretische definitive Hyperbelbahn, in Anbetracht der Ungenauigkeit der Beobachtungen, verhältnissmässig recht gut den beobachteten *konvexen* Bogen darstellt.

## Komet 1892 I.



Maasstab: 1 astr. Einheit = 500 mm.

Die Abweichungen der theoretischen Positionen von den beobachteten finden zu allererst eine Erklärung in den Worten von W. H. Pickering<sup>2)</sup>: «The chief difficulty in measuring the distance from the bright region to the nucleus upon the different negatives lay, not in the measurement itself, which was comparatively simple, but rather in deciding upon the

1) R. Jaegermann. Die Bewegung der Schweifmaterie des Kometen 1903 IV auf einem zur Sonne konvexen Bogen. *Astron. Nachrichten*, Bd. 168, 17.

2) *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College*. Vol. XXXII. Part. II, 1900, pg. 276.

portion of the bright region from which the measurement should be made. This was due to the fact that this region was in general irregular both in shape and density.»

Es kann somit mit einer recht grossen Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass die Messungen sich nicht streng auf eine und dieselbe Stelle der Schweifverdichtung beziehen, sondern im allgemeinen nur eine genäherte Lage einer ganzen Ausströmungswolke angeben. Letzteres bezieht sich hauptsächlich auf die Beobachtungen vom 5. und 10. April 1892, wie aus folgenden Worten von W. H. Pickering zu ersehen<sup>1)</sup>: «The objects of April 6, 7 and 8 were, owing to their conspicuous appearance, *evidently identical*, whether those of April 5 and 10 were also, could only be *determined by a computation of the theoretical places* in which they should fall.»

Es ist auf Grund der zuletzt angeführten Bemerkungen von W. H. Pickering von grossem Interesse jetzt die ungenaueren Beobachtungen von 5. und 10. April zu vernachlässigen und nur die drei genaueren Beobachtungen von 6., 7. und 8. April zu berücksichtigen, um eine genauere Vorstellung von den wahren Hyperbelelementen und namentlich der effektiven Sonnenkraft  $\mu$  zu erhalten, da die an den obigen drei Tagen beobachteten Objekte als identisch bezeichnet werden.

Zu diesem Zwecke werden neue Normalgleichungen aus den sechs auf die Tage 6., 7., 8. April sich beziehenden Bedingungsgleichungen gebildet. Dieselben sind:

$$\begin{aligned} [3.330\ 6360] \cdot \delta M_0 + [6.137\ 3789_n] \cdot \delta G + [5.991\ 4107_n] \cdot \delta \mu &= [4.134\ 9177]; \\ [6.137\ 3789_n] &+ [5.512\ 8009] &+ [7.387\ 2165_n] &= [6.438\ 5002]; \\ [5.991\ 4107_n] &+ [7.387\ 2165_n] &+ [6.671\ 8098] &= [6.809\ 6291_n]. \end{aligned}$$

Die Determinante  $D$  und die durch die Determinante  $D$  dividierten Minore sind gemäss den früheren Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \lg D &= \overline{14.154\ 3831}; \\ \lg \nabla_{11} &= 4.030\ 0586; & \lg \nabla_{12} &= 3.327\ 8774_n; & \lg \nabla_{13} &= 5.349\ 8740; \\ \lg \nabla_{12} &= 3.327\ 8774_n; & \lg \nabla_{22} &= 4.493\ 2995; & \lg \nabla_{23} &= 4.663\ 0101_n; \\ \lg \nabla_{13} &= 5.349\ 8740; & \lg \nabla_{23} &= 4.663\ 0101_n; & \lg \nabla_{33} &= 7.689\ 0420. \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind:

$$\begin{aligned} \lg \delta M_0 &= \overline{2.382\ 9205}; & \delta M_0 &= +0.024\ 150; \\ \lg \delta G &= \overline{2.896\ 5958}; & \delta G &= +4^\circ 30' 56''.3; \\ \lg \delta \mu &= \overline{1.937\ 1527_n}; & \delta \mu &= -0.865\ 27. \end{aligned}$$

1) Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College. Vol. XXXII. Part. II. 1900. Pg. 276.

Die Fehlerquadratsumme  $[vv]$  und der wahrscheinliche mittlere Fehler  $\epsilon$  sind, da:

$$\lg [nn] = \bar{6} \cdot 960\ 7558,$$

folgende:

$$\lg [vv] = \bar{8} \cdot 632\ 5404; \quad \lg \epsilon = \bar{4} \cdot 077\ 7096.$$

Die wahrscheinlichen mittleren Fehler der Unbekannten sind:

$$\begin{aligned} \lg \epsilon_{\delta M_0} &= \bar{2} \cdot 092\ 7387; & \epsilon_{\delta M_0} &= \pm 0 \cdot 012\ 380; \\ \lg \epsilon_{\delta G} &= \bar{2} \cdot 324\ 3592; & \epsilon_{\delta G} &= \pm 1^\circ 12' 33''; \\ \lg \epsilon_{\delta \mu} &= \bar{1} \cdot 422\ 2305; & \epsilon_{\delta \mu} &= \pm 0 \cdot 264\ 38. \end{aligned}$$

Die Variation der Anfangsgeschwindigkeit der Ausströmung wird gemäss der Formel (113) folgenden Wert besitzen:

$$\lg \delta g = \bar{3} \cdot 487\ 2827_n; \quad \delta g = -0 \cdot 003\ 071.$$

ihr wahrscheinlicher mittlerer Fehler beträgt:

$$\lg \epsilon_{\delta g} = \bar{3} \cdot 065\ 8607; \quad \epsilon_{\delta g} = \pm 0 \cdot 001\ 164 = \pm 34 \cdot 6 \text{ mtr./sek.}$$

Die definitiven Werte der Anfangsbedingungen und der repulsiven Kraft  $1 - \mu$  sind:

$$\begin{aligned} M_0 &= 1892 \text{ April } 4 \cdot 999\ 82 \pm 0 \cdot 012\ 38 \text{ M. Z. Berlin;} \\ g &= 0 \cdot 056\ 929 \pm 0 \cdot 001\ 164 = 1694 \cdot 3 \text{ mtr./sek. } \pm 34 \cdot 6 \text{ mtr./sek.} \\ G &= -20^\circ 29' 3 \cdot 7 \pm 1^\circ 12' 33''; \\ 1 - \mu &= 35 \cdot 1347 \pm 0 \cdot 2644. \end{aligned}$$

Mit diesen Grössen erhält man eine definitive Bahn der drei Beobachtungen vom 6., 7. und 8. April:

$$\begin{array}{lll} \lg k \cdot \sqrt{\mu} = \bar{1} \cdot 002\ 1797; & \lg H_0 = 0 \cdot 151\ 3140; & \lg E \cdot \sin(\beta_1 + V_0) = 0 \cdot 024\ 7649; \\ v_0 = -2^\circ 15' 47 \cdot 22; & \beta_1 = 93^\circ 16' 17 \cdot 67; & \lg E \cdot \cos(\beta_1 + V_0) = \bar{2} \cdot 756\ 3981_n; \\ \lg r_0 = 0 \cdot 011\ 6683; & \lg m = \bar{2} \cdot 781\ 1000; & \beta_1 + V_0 = 93^\circ 5' 8 \cdot 06; \\ \lg h_0 = 0 \cdot 144\ 5301; & \lg(m+1) = 0 \cdot 025\ 4733; & \lg E \cdot \sin V_0 = \bar{3} \cdot 536\ 7897_n; \\ \beta = 91^\circ 7' 50 \cdot 78; & \lg(m+2) = 0 \cdot 313\ 9533; & \lg E \cdot \cos V_0 = 0 \cdot 025\ 3927; \\ \lg h_0 \cdot \sin \beta = 0 \cdot 144\ 4455; & \lg P = \bar{2} \cdot 791\ 3516; & V_0 = -0^\circ 11' 9 \cdot 61; \\ \lg h_0 \cdot \cos \beta = \bar{2} \cdot 439\ 7548_n; & \lg A = \bar{1} \cdot 697\ 7150; & \omega_\pi = -2^\circ 4' 37 \cdot 61; \\ \lg g \cdot \sin G = \bar{2} \cdot 299\ 3417_n; & \lg E = 0 \cdot 025\ 3950; & \lg_{10} E \cdot \operatorname{tg} F_0 = \bar{2} \cdot 303\ 9247_n; \\ \lg g \cdot \cos G = \bar{2} \cdot 726\ 9653; & \psi = 19^\circ 24' 12 \cdot 46; & \lg_{10} \lg_e \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F_0 \right) = \bar{2} \cdot 278\ 5044_n; \\ \lg H_0 \cdot \sin \beta_1 = 0 \cdot 150\ 6057; & \lg(E-1) = \bar{2} \cdot 779\ 7235; & \lg N_0 = \bar{2} \cdot 592\ 4306_n; \\ \lg H_0 \cdot \cos \beta_1 = \bar{2} \cdot 907\ 7121_n; & \lg(E+1) = 0 \cdot 313\ 9131; & \lg n = \bar{1} \cdot 455\ 6072; \\ \lg \sqrt{P\mu} = 0 \cdot 162\ 2740; & \lg Q = 0 \cdot 011\ 6281; & M_\pi = 5 \cdot 136\ 852 \text{ Apr. M. Z. B.} \end{array}$$

Zur Kontrolle erhält man nach der Relation (33):

$$\frac{p}{A} - 2 \cdot (E \cdot e \cdot \cos \omega_{\pi} + 1) - \frac{P}{a} = p \cdot \left[ \frac{g \cdot \sin(\beta - G)}{\sqrt{\mu \cdot \sin \beta}} \right]^2 = [4 \cdot 226 \ 5333].$$

Wie zu ersehen, hat sich der Logarithmus des Ausdrucks unter der Wurzel in den Formeln (10) wieder etwas geändert und ist nicht konstant geblieben, während die Bedingung der Realität der Schnittpunkte erfüllt ist.

Die heliozentrischen Koordinaten sind für alle fünf Beobachtungsmomente folgende:

| 1892 April:                     | 5·9:         | 6·9:          | 7·9:          | 8·9:          | 10·9:        |
|---------------------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| $M - M_{\pi}$ :                 | 0·769 802;   | 1·808 691;    | 2·790 636;    | 3·740 636;    | 5·796 886;   |
| $\lg N$ :                       | 1·341 9862;  | 1·712 9716;   | 1·901 3104;   | 0·028 5527;   | 0·218 8020;  |
| $\lg \Theta$ :                  | 1·027 6500;  | 1·396 7422;   | 1·581 9589;   | 1·705 0460;   | 1·883 0642;  |
| $\lg \sin \text{hyp } \Theta$ : | 1·028 4718;  | 1·401 2319;   | 1·592 4652;   | 1·723 4981;   | 1·924 5151;  |
| $\lg \cos \text{hyp } \Theta$ : | 0·002 4617;  | 0·013 3594;   | 0·030 9305;   | 0 053 5373;   | 0·116 0362;  |
| $\lg R \cdot \sin V$ :          | 2·273 0051;  | 2·645 7652;   | 2·836 9985;   | 2·968 0314;   | 1·169 0484;  |
| $\lg R \cdot \cos V$ :          | 0·012 8246;  | 0·018 1638;   | 0·026 9166;   | 0·038 4648;   | 0·071 8210;  |
| theor.: $\lg R$ :               | 0·012 8966;  | 0·018 5543;   | 0·027 8202;   | 0·040 0291;   | 0·075 1926;  |
| beob.: $\lg R$ :                | 0·014 0925;  | 0·018 5465;   | 0·027 8079;   | 0·040 0157;   | 0·079 3178;  |
| $\delta \lg R$ :                | +0·001 1959; | -0·000 0078;  | -0·000 0123;  | -0·000 0134;  | +0·004 1252; |
| $V$ :                           | +1°2'34".55; | +2°25'45".13; | +3°41'41".61; | +4°51'36".41; | +7°7'48".62; |
| theor.: $\omega$ :              | -1°2' 3".07; | +0°21' 7".52; | +1°37' 4".0;  | +2°46'58".80; | +5°3'11".01; |
| beob.: $\omega$ :               | -1°2'57".4;  | +0°20'30".7;  | +1°36'57".0;  | +2°47'20".2;  | +5°2'41".5;  |
| $\delta \omega$ :               | -0°0'54".3;  | -0° 0'36".3;  | -0° 0' 7".0;  | +0° 0'21".4;  | -0°0'29".5.  |

Die an den Tagen April 6·9, 7·9 und 8·9 beobachteten Positionen der Schweifmaterie sind durch die neue, speziell auf diese Beobachtungen sich beziehende Hyperbel ausgezeichnet dargestellt, womit die strenge Identität der an diesen Tagen beobachteten Objekte bewiesen ist. Die an den Tagen 5·9 und 10·9 April gemessenen Objekte befinden sich zwar in derselben Richtung (vergl. Winkel  $\omega$ ) mit den theoretischen Positionen, doch sind sie etwas weiter vom Kerne entfernt, als es von der Theorie gefordert wird. Nach den bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 &= R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos(v - \omega) \\ \operatorname{tg} s &= \frac{\Delta \cdot \sin T}{\rho - \Delta \cdot \cos T} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(137)$$

kann die Winkelentfernung  $s$  der theoretischen Objekte, sowohl auf der ersten, wie auch auf der zweiten Hyperbel, mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten  $s$  (Entfernung der Schweifmaterie vom Kerne) verglichen werden.



Man erhält:

| 1892<br>April: | Theoretische $s$ : |              | Beob. $s$ :        | Beob. $s$ — theor. $s$ : |              |
|----------------|--------------------|--------------|--------------------|--------------------------|--------------|
|                | Hyperbel I:        | Hyperbel II: |                    | Hyperbel I:              | Hyperbel II: |
| 5·9:           | 0° 6' 14'';        | 0° 8' 42'';  | 0°16' 20'' ± 13''; | +0°10' 6'';              | +0° 7' 38''; |
| 6·9:           | 0 41 49 ;          | 0 44 49 ;    | 0 44 46 ± 36 ;     | +0 2 57 ;                | -0 0 3 ;     |
| 7·9:           | 1 42 4 ;           | 1 42 37 ;    | 1 42 32 ± 36 ;     | +0 0 28 ;                | -0 0 5 ;     |
| 8·9:           | 3 1 43 ;           | 2 57 35 ;    | 2 52 29 ± 43 ;     | -0 4 14 ;                | -0 0 6 ;     |
| 10·9:          | 6°46' 47'';        | 6°27' 39'';  | 6°52' 39'' ± 54''; | +0° 5' 52'';             | +0°25' 0''.  |

Die theoretischen Winkel  $s$  auf der Hyperbel II sind für die Tage 6·9, 7·9 und 8·9 April als völlig dargestellt und mit den Beobachtungen als ganz übereinstimmend zu betrachten. Die Differenzen  $s$  (beob.) —  $s$  (theor.) betragen dagegen am 5·9 April — 7' 38'' und am 10·9 April — 25', oder beim Massstabe  $179''1 = 1\text{mm}$ , auf den photographischen Platten entsprechend: 2·5mm und 8·3mm, welche Grössen es beweisen, dass die am 5·9 und 10·9 April gemessenen Objekte zwar derselben Ausströmungswolke, wie die Objekte vom 6·9, 7·9 und 8·9 April gehört haben, aber mit den letzteren nicht völlig identisch sind, welche Möglichkeit auch von W. H. Pickering als sehr wahrscheinlich gehalten wird. Die den Beobachtungen 6·9, 7·9, 8·9 April entsprechende Stelle der Ausströmungswolke hat sich am 5·9 April viel näher vom Kerne und der Nebelhülle befunden, als es aus den Beobachtungen folgt. Der von Pickering am 5·9 April gemessene Teil der Ausströmungswolke ist dagegen an den folgenden Tagen so zerstreut und lichtschwach geworden, dass er den Beobachtungen entgehen musste. Bei der ferneren Bewegung der Ausströmungswolke auf auseinander gehenden Hyperbeln dehnt sich dieselbe bedeutend aus, wobei verschiedene Teile derselben zu verschiedenen Zeiten unsichtbar werden und andere Teile bedeutender hervortreten, welche früher eine geringere Aufmerksamkeit auf sich lenkten. Aus diesem Grunde kann auch auf keine völlige Identität der Objekte vom 8·9 und 10·9 April bei zweitägiger Unterbrechung der Beobachtungen und bei einer so grossen repulsiven Kraft gerechnet werden.

Auf Grund der folgenden Zusammenstellung der Differenzen  $s$  (beob.) —  $s$  (theor), ausgedrückt in Millimetern der photographischen Platte, für die beiden Hyperbeln:

| 1892 April: | Hyperbel I: | Hyperbel II: |
|-------------|-------------|--------------|
| 5·8:        | +3·3 mm.    | +2·5 mm.     |
| 6·9:        | +1·0 »      | 0·0 »        |
| 7·9:        | +0·2 »      | 0·0 »        |
| 8·9:        | -1·4 »      | 0·0 »        |
| 10·9:       | +2·0 »      | +8·3 »       |

ist man berechtigt die Hyperbel I als definitive Bahn der ganzen Ausströmungswolke anzusehen, während die Hyperbel II als definitive Bahn eines speziellen Teils dieser Wolke, laut den Beobachtungen vom 6.9, 7.9, 8.9 April betrachtet werden kann.

Betreffs Ableitung der wahrscheinlichen mittleren Fehler der Elemente der Hyperbel II sind zuerst, ganz wie bei der Hyperbel I, die Werte von  $f_1, f_2, f_3$  abgeleitet:

|                       | $\lg f_1$                 | $\lg f_2$                 | $\lg f_3$                 |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $\delta P$ :          | 2.595 5760 <sub>n</sub> ; | 2.409 4313 <sub>n</sub> ; | 3.934 6134 <sub>n</sub> ; |
| $\delta A$ :          | 1.957 4345;               | 1.779 0893;               | 3.296 9616;               |
| $\delta E$ :          | 2.583 6469 <sub>n</sub> ; | 2.397 7168 <sub>n</sub> ; | 3.922 6975 <sub>n</sub> ; |
| $\delta \omega_\pi$ : | 2.362 3624;               | 1.600 5770;               | 3.681 0715;               |
| $\delta Q$ :          | 0.657 9445 <sub>n</sub> ; | 1.914 4613 <sub>n</sub> ; | 1.976 9776 <sub>n</sub> ; |
| $\delta M_\pi$ :      | 3.994 8977;               | 3.281 5518;               | 5.313 6350.               |

nach der Formel (135) ergibt sich:

|  |   |
|--|---|
| $\lg \varepsilon_{\delta P} = 3.494 6682$ ;          | $\varepsilon_{\delta P} = \pm 0.003 1237$ ;                 |
| $\lg \varepsilon_{\delta A} = 4.856 8012$ ;          | $\varepsilon_{\delta A} = \pm 0.000 7191$ ;                 |
| $\lg \varepsilon_{\delta E} = 3.482 7466$ ;          | $\varepsilon_{\delta E} = \pm 0.003 0391$ ;                 |
| $\lg \varepsilon_{\delta \omega_\pi} = 3.250 6696$ ; | $\varepsilon_{\delta \omega_\pi} = \pm 0^\circ 6' 7''.36$ ; |
| $\lg \varepsilon_{\delta Q} = 5.546 4142$ ;          | $\varepsilon_{\delta Q} = \pm 0.000 0352$ ;                 |
| $\lg \varepsilon_{\delta M_\pi} = 2.883 2314$ ;      | $\varepsilon_{\delta M_\pi} = \pm 0.076 424$ .              |

Die definitive Bahn der speziell an den Tagen 6.9, 7.9 und 8.9 April 1892 gemessenen Schweifverdichtung des Kometen Swift 1892 I ist demnach folgende:

$$M_0 = 1892 \text{ April } 4.999 82 \pm 0.012 38 \text{ M. Z. Berlin.}$$

$$g = 0.056 929 \pm 0.001 164 = 1694.3 \text{ mtr./sek. } \pm 34.6 \text{ mtr./sek.}$$

$$G = -20^\circ 29' 3''.7 \pm 1^\circ 12' 33''$$

$$\mu = -34.1347 \pm 0.2644.$$

$$P = 0.061 8517 \pm 0.003 1237; \quad \omega_\pi = -2^\circ 4' 37''.61 \pm 0^\circ 6' 7''.4;$$

$$A = 0.498 5572 \pm 0.000 7191; \quad Q = 1.027 1364 \pm 0.000 0352;$$

$$E = 1.060 2176 \pm 0.003 0391; \quad M_\pi = 1892 \text{ April } 5.136 852 \pm 0.076 424.$$

Die Elemente dieser Hyperbel besitzen durchweg bedeutend geringere wahrscheinliche mittlere Fehler, als die Elemente der Hyperbel I, welche die Bewegung der ganzen Ausströmungswolke darstellt. Die absolute repulsive Sonnenkraft beträgt bei der Hyperbel II:  $1 - \mu = 35.1347 \pm 0.2644$ , während sie bei der Hyperbel I den Wert  $1 - \mu = 39.2602 \pm 1.2392$  erreicht. Es ist bemerkenswert, dass die Realität der von Th. Bredichin beim Kometen Rordame 1893 II abgeleitete repulsive Kraft  $1 - \mu = 36$  durch obigen Wert von  $1 - \mu$  eine glänzende Bestätigung erhält.

Interessant ist noch zu bemerken, dass die bis jetzt bekannten repulsiven Kräfte I Typus:  $1 - \mu = 18$  (Bredichin),  $1 - \mu = 36$  (Komet 1892 I, 1893 II),  $1 - \mu = 89$  (Komet 1903 IV) sich verhalten, wie die ganzen Zahlen 1 : 2 : 5. Die Ursache hiervon ist gewiss in einer entweder rein physischen oder chemischen Verschiedenheit der diesen Kräften entsprechenden Schweifmaterie zu suchen.



PRESENTED

18 JUN. 1916

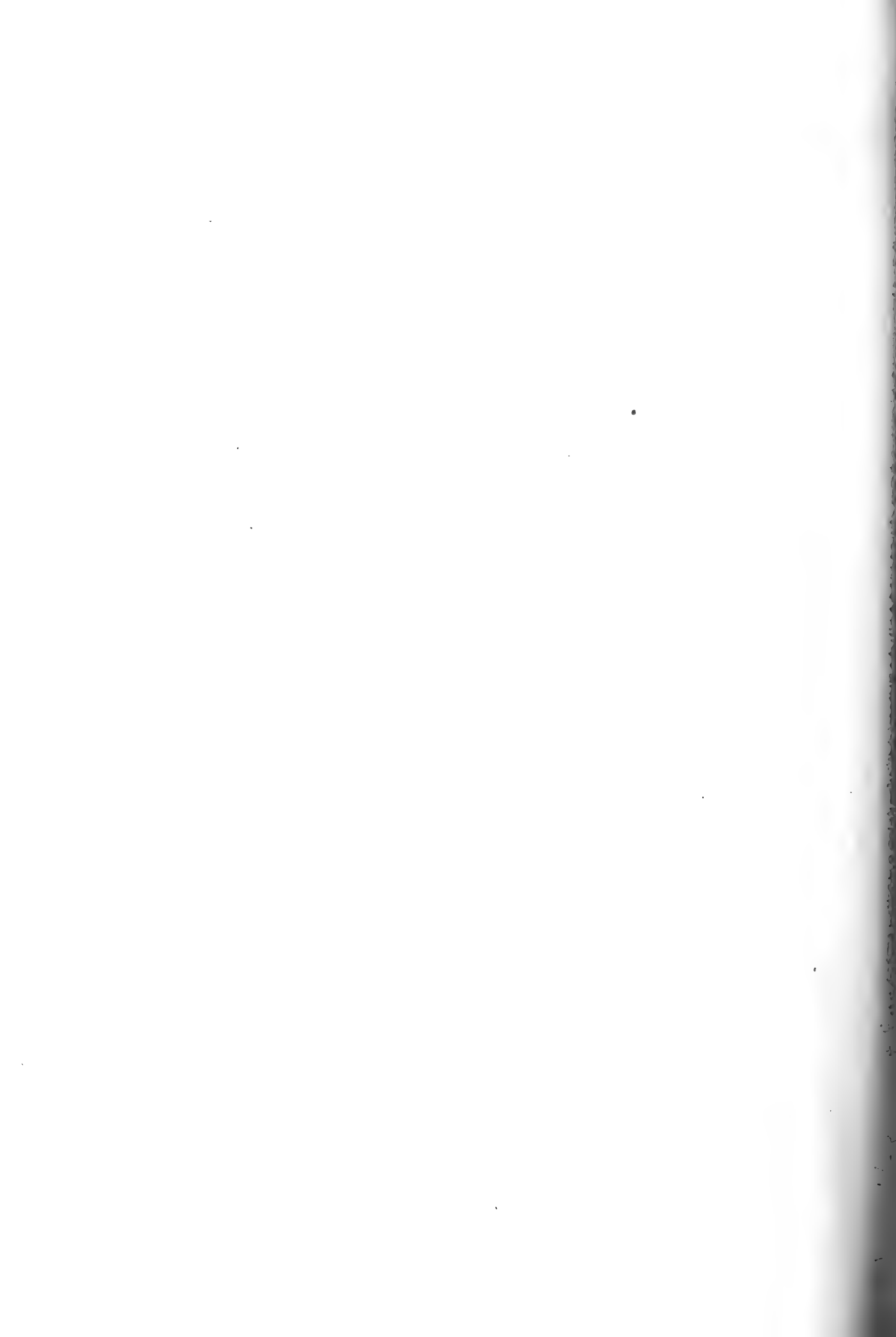
HISTORICAL

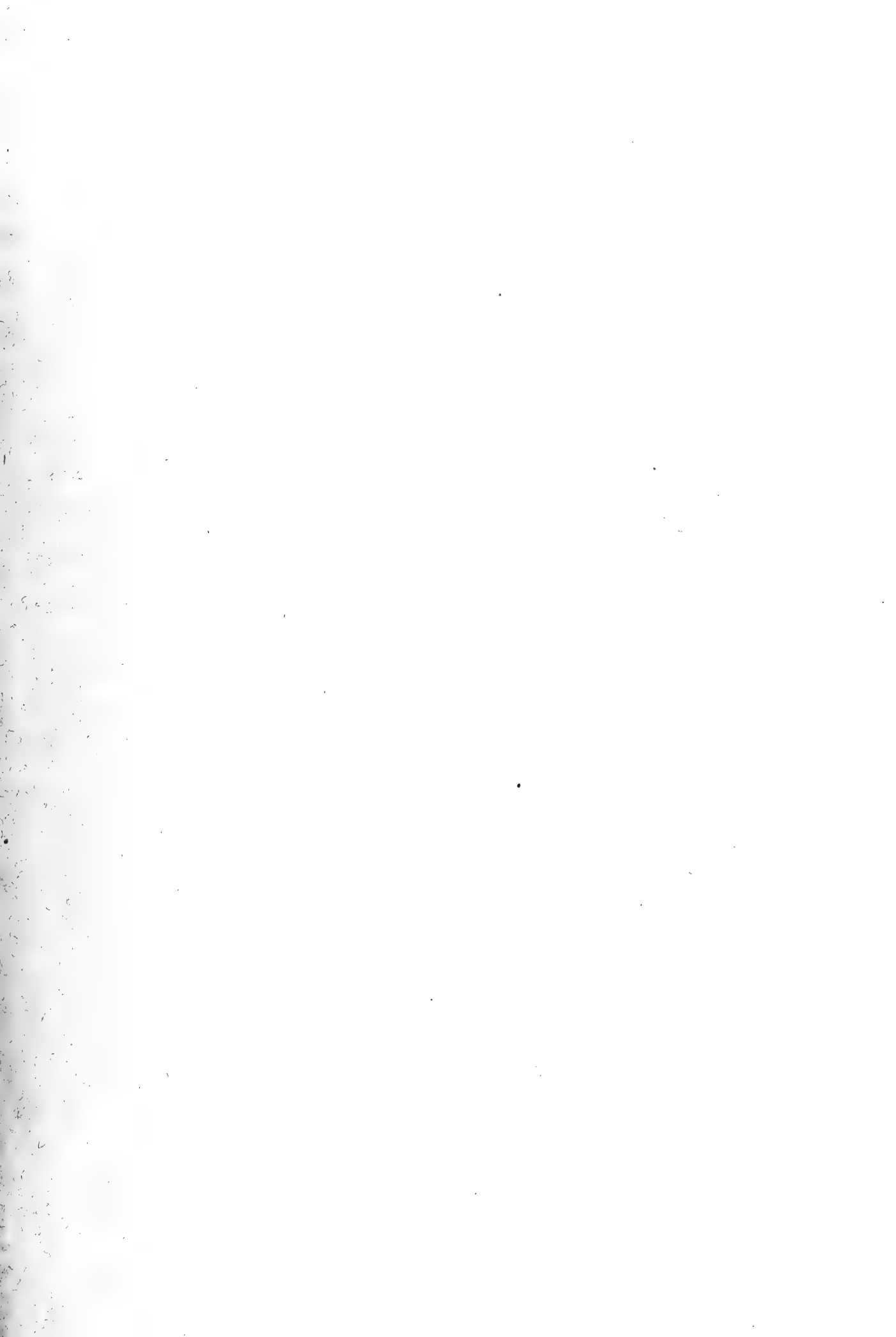
## INHALTSVERZEICHNISS.

---

|  | Seite: |
|--|--------|
| § 1. Einleitung.....   | 1      |
| § 2. Genäherte Hyperbelbahn auf Grund dreier Beobachtungen. Die effektive<br>Sonnenkraft und die Anfangsbedingungen der Ausströmung.....                 | 4      |
| § 3. Die den Bewegungsgesetzen streng genügende Hyperbel.....  | 11     |
| § 4. Die Lösung der transzendenten Gleichung in der hyperbolischen Bewegung..  | 14     |
| § 5. Die Variation der den Ausströmungspunkt betreffenden Grössen.....   | 23     |
| § 6. Die Variationen der Hyperbelemente.....   | 27     |
| § 7. Die Variationen der heliozentrischen Koordinaten als Funktionen der Varia-<br>tionen der Hyperbelemente.....  | 41     |
| § 8. Die Variationen der heliozentrischen Koordinaten $R$ , $\omega$ als Funktionen von<br>$\delta M_0$ , $\delta g$ , $\delta G$ und $\delta \mu$ ..... | 43     |
| § 9. Definitive Bahnbestimmung der Kometenschweifmaterie.....  | 46     |
| § 10. Die beim Kometen 1892I Swift beobachtete Bewegung einer Schweifverdichtung   | 55     |
| § 11. Genäherte Bahn der Kometenschweifmaterie.....  | 61     |
| § 12. Definitive Bahn der Kometenschweifmaterie.....   | 65     |

---





Цѣна: 1 руб. 80 к.; Prix: 4 Mrk.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и Н. Л. Риннера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петербург., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Ключина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Киммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзанѣ и Нонп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sörgentfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

8 JUN. 1908

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 9.**

**Volume XXII. № 9.**

**РАСПРОСТРАНЕНІЕ ПРЕДѢЛЬНЫХЪ ТЕОРЕМЪ**

**ИСЧИСЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ**

**НА СУММУ ВЕЛИЧИНЪ СВЯЗАННЫХЪ ВЪ ЦѢПЬ.**

**А. Маркова.**

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 5 декабря 1907 года).*



**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**





**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**  
**MÉMOIRES**  
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.  
**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

**Томъ XXII. № 9.**

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Volume XXII. № 9.**

---

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕДѢЛЬНЫХЪ ТЕОРЕМЪ**

**ИСЧИСЛЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ**

**НА СУММУ ВЕЛИЧИНЪ СВЯЗАННЫХЪ ВЪ ЦѢПЬ.**

---

**А. Маркова.**

---

*(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 5 декабря 1907 года).*



---

**С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.**

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.  
С.-Петербургъ, Апрель 1908.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Олденбургъ*.

**ТИПОГРАФІА ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.**

Вас. Остр., 9 лин., № 12.

Въ статьѣ «Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга», помѣщенной въ XV-мъ томѣ 2-ой серіи Извѣстій физ.-мат. общества при Казанскомъ университетѣ, я показалъ, что извѣстный законъ большихъ чиселъ, установленный Чебышевымъ для независимыхъ величинъ, распространяется и на многіе случаи зависимыхъ величинъ.

Изъ этихъ случаевъ особеннаго вниманія, по моему мнѣнію, заслуживаютъ случаи величинъ связанныхъ въ цѣпь такимъ образомъ, что, когда значеніе одной изъ нихъ становится извѣстнымъ, слѣдующія за ней оказываются независимыми отъ предшествующихъ ей.

Разсматривая одинъ изъ такихъ случаевъ, можно сказать простѣйшій, въ статьѣ \*) «Исслѣдованіе замѣчательнаго случая зависимыхъ испытаній», я доказалъ для него теорему о предѣлѣ математическаго ожиданія, изъ которой вытекаетъ предѣльное выраженіе вѣроятности въ видѣ извѣстнаго интеграла Лапласа.

Этотъ результатъ наводитъ на мысль, что теорема о предѣлѣ математическаго ожиданія должна имѣть мѣсто и въ другихъ случаяхъ величинъ связанныхъ въ цѣпь.

Мое доказательство было основано на одной особенноти даннаго случая: на симметричности искомыхъ выраженій относительно  $p$  и  $q$ ; но достаточно небольшихъ измѣненій, чтобы сдѣлать его независимымъ отъ указанной особенноти частнаго случая, и станеть ясною возможность перенесенія подобныхъ разсужденій и соответствующихъ выводовъ на другіе случаи.

Мы не будемъ возвращаться къ разобранному случаю, а разсмотримъ другой, болѣе общій случай и на немъ выяснимъ доказательство, имѣющее общій характеръ.

## § 1. Пусть будетъ

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$$

рядъ величинъ связанныхъ въ цѣпь.

---

\*) Извѣстія Академіи Наукъ за 1907 годъ.

Зап. Физ.-Мат. Отд.

Пусть далѣе для каждой изъ этихъ величинъ возможно только три значенія

$$- 1, \quad 0, \quad + 1,$$

и система чиселъ

$$\begin{array}{ccc} p, & q, & r, \\ p', & q', & r', \\ p'', & q'', & r'' \end{array}$$

представляетъ соотвѣтственно: въ первой строкѣ вѣроятности равенствъ

$$x_{k+1} = - 1, \quad x_{k+1} = 0, \quad x_{k+1} = + 1$$

при  $x_k = - 1$ , во второй строкѣ вѣроятности тѣхъ же равенствъ при  $x_k = 0$  и наконецъ въ третьей строкѣ вѣроятности ихъ при  $x_k = + 1$ .

Эти вѣроятности, конечно, не могутъ быть числами отрицательными и должны удовлетворять условіямъ

$$(1) \quad \begin{array}{l} p + q + r = 1, \\ p' + q' + r' = 1, \\ p'' + q'' + r'' = 1. \end{array}$$

Мы предположимъ кромѣ того, что ни одна изъ нихъ не равна единицѣ; такое предположеніе особенно важно сдѣлать относительно

$$p, \quad q', \quad r'',$$

чтобы нашъ рядъ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \dots$$

не могъ оказаться простымъ повтореніемъ одного числа.

Наконецъ мы должны ввести еще три числа

$$P, \quad Q, \quad R,$$

соотвѣтственно равныя вѣроятностямъ для  $x_1$  имѣть значенія

$$- 1, \quad 0, \quad + 1.$$

При такихъ условіяхъ мы займемся разсмотрѣніемъ вѣроятностей различныхъ предположеній о величинѣ суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

для любого даннаго значенія  $n$ , и начнемъ съ малыхъ значеній  $n$ , а затѣмъ перейдемъ къ большимъ и къ возрастающимъ безпредѣльно.

При  $n = 1$  наша сумма сводится къ одному числу  $x_1$  и соотвѣтственно этому можетъ имѣть только три значенія

$$- 1, \quad 0, \quad + 1,$$

вѣроятности которыхъ, по условію, равны

$$P, \quad Q, \quad R.$$

При  $n = 2$  имѣемъ сумму двухъ чиселъ

$$x_1 + x_2,$$

для которой возможно пять значеній

$$- 2, \quad - 1, \quad 0, \quad + 1, \quad + 2,$$

и вѣроятности этихъ значеній, какъ не трудно видѣть, соотвѣтственно равны

$$Pp, \quad Pq + Qp', \quad Pr + Qq' + Rp'', \quad Qr' + Rq'', \quad Rr''.$$

Для суммы

$$x_1 + x_2 + x_3$$

возможно уже семь значеній

$$- 3, \quad - 2, \quad - 1, \quad 0, \quad + 1, \quad + 2, \quad + 3$$

и вѣроятностями ихъ по порядку будутъ

$$Ppp, \quad P(pq + qp') + Qp'p, \quad P(pr + qq' + rp'') + Q(p'q + q'p') + Rp''p,$$

$$P(qr' + r'q') + Q(p'r + q'q' + r'p'') + R(p''q + q'p')$$

$$Prr'' + Q(q'r' + r'q'') + R(p''r + q''q' + r''p''), \quad Qr'r'' + R(q''r' + r''q''), \quad Rr''r''.$$

Поступая затѣмъ подобно тому, какъ въ упомянутой статьѣ «Исслѣдованіе замѣчательнаго случая...», для послѣдовательнаго увеличенія числа  $n$  на единицу представимъ вѣроятность равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m,$$

для любыхъ данныхъ значеній  $n$  и  $m$ , въ видѣ суммы

$$\bar{P}_{m,n} + P_{m,n} + \overset{+}{P}_{m,n},$$

обозначая символами

$$\bar{P}_{m,n}, \quad P_{m,n}, \quad \overset{+}{P}_{m,n}$$

вѣроятности выполненія того же равенства и добавочнаго условія, которое соотвѣтственно порядку вѣроятностей выражается равенствами

$$x_n = -1, \quad x_n = 0, \quad x_n = +1.$$

При такихъ обозначеніяхъ не трудно установить слѣдующія уравненія

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{m,n+1} &= p \bar{P}_{m+1,n} + p' P_{m+1,n} + p'' \overset{+}{P}_{m+1,n}, \\ P_{m,n+1} &= q \bar{P}_{m,n} + q' P_{m,n} + q'' \overset{+}{P}_{m,n}, \\ \overset{+}{P}_{m,n+1} &= r \bar{P}_{m-1,n} + r' P_{m-1,n} + r'' \overset{+}{P}_{m-1,n}, \end{aligned}$$

при

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \dots$$

Этими уравненіями можно пользоваться для послѣдовательнаго вычисленія вѣроятностей

$$\bar{P}_{m,n}, \quad P_{m,n}, \quad \overset{+}{P}_{m,n}$$

при

$$n = 2, \quad 3, \quad 4, \dots;$$

надо только принять во вниманіе основныя равенства

$$(3) \quad \bar{P}_{-1,1} = P, \quad P_{0,1} = Q, \quad \overset{+}{P}_{1,1} = R$$

и замѣтить, что всё остальныя выраженія

$$\bar{P}_{m,1}, \quad P_{m,1}, \quad \overset{+}{P}_{m,1}$$

должны равняться нулю, какъ вѣроятности невозможныхъ предположеній.

Мы находимъ такимъ образомъ

$$\begin{aligned} \bar{P}_{-2,2} &= pP, & \bar{P}_{-1,2} &= p'Q, & \bar{P}_{0,2} &= p''R, \\ P_{-1,2} &= qP, & P_{0,2} &= q'Q, & P_{1,2} &= q''R, \\ \bar{P}_{0,2}^{\dagger} &= rP, & \bar{P}_{1,2}^{\dagger} &= r'Q, & \bar{P}_{2,2}^{\dagger} &= r''R, \end{aligned}$$

остальныя же выраженія

$$\bar{P}_{m,2}, \quad P_{m,2}, \quad \bar{P}_{m,2}^{\dagger}$$

равны нулю; затѣмъ получаемъ

$$\begin{aligned} \bar{P}_{-2,3} &= ppP, & \bar{P}_{-2,3}^{\dagger} &= pp'Q + p'qP, & P_{-2,3} &= qpP, & \bar{P}_{-2,3}^{\dagger\dagger} &= 0 \\ \bar{P}_{-2,3} + P_{-2,3} + \bar{P}_{-2,3}^{\dagger} &= P(pq + qp') + Qp'p \end{aligned}$$

и т. д.

Устраняя изъ нашихъ рассмотрѣннй случай, когда определитель

$$\begin{vmatrix} p, & p', & p'' \\ q, & q', & q'' \\ r, & r', & r'' \end{vmatrix}$$

равенъ нулю, мы можемъ ввести еще три числа

$$\bar{P}_{0,0}, \quad P_{0,0}, \quad \bar{P}_{0,0}^{\dagger},$$

опредѣляя ихъ уравненіями

$$P = p\bar{P}_{0,0} + p'P_{0,0} + p''\bar{P}_{0,0}^{\dagger},$$

$$Q = q\bar{P}_{0,0} + q'P_{0,0} + q''\bar{P}_{0,0}^{\dagger},$$

$$R = r\bar{P}_{0,0} + r'P_{0,0} + r''\bar{P}_{0,0}^{\dagger},$$

въ силу которыхъ имѣемъ

$$\bar{P}_{0,0} + P_{0,0} + \bar{P}_{0,0}^{\dagger} = 1.$$



Если вмѣстѣ съ тѣмъ символамъ

$$\bar{P}_{m,0}, P_{m,0}, \bar{P}_{m,0}^+$$

при  $m$  отличномъ отъ нуля мы придадимъ значеніе нуль, то можемъ распространить найденныя нами уравненія и на случай  $n = 0$ .

§ 2. Введя вспомогательное переменное  $t$  и его функціи

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi}_n &= \Sigma \bar{P}_{m,n} t^m, \quad \varphi_n = \Sigma P_{m,n} t^m, \quad \varphi_n^+ = \Sigma \bar{P}_{m,n}^+ t^m, \\ \Phi_n &= \bar{\varphi}_n + \varphi_n + \varphi_n^+, \end{aligned}$$

мы, во-первыхъ, можемъ опредѣлять вѣроятность равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

какъ коэффициентъ при  $t^m$  въ разложеніи  $\Phi_n$  по степенямъ  $t$  и, во-вторыхъ, изъ уравненій (2) вывести

$$(5) \quad \begin{aligned} t \bar{\varphi}_{n+1} &= p \bar{\varphi}_n + p' \varphi_n + p'' \varphi_n^+, \\ \varphi_{n+1} &= q \bar{\varphi}_n + q' \varphi_n + q'' \varphi_n^+, \\ \frac{1}{t} \varphi_{n+1}^+ &= r \bar{\varphi}_n + r' \varphi_n + r'' \varphi_n^+. \end{aligned}$$

А изъ этихъ послѣднихъ уравненій вытекаетъ для всѣхъ функцій

$$\bar{\varphi}_n, \varphi_n, \varphi_n^+, \Phi_n$$

одно и то же линейное уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, которое мы можемъ представить для функціи  $\Phi_n$  довольно просто въ символическомъ видѣ

$$(6) \quad \begin{vmatrix} p - t\Phi, & p', & p'' \\ q, & q' - \Phi, & q'' \\ r, & r', & r'' - \frac{1}{t}\Phi \end{vmatrix} \Phi^n = 0,$$

гдѣ по выполненіи указанныхъ выкладокъ слѣдуетъ вмѣсто

$$\Phi^{n+3}, \Phi^{n+2}, \Phi^{n+1}, \Phi^n$$

поставить

$$\Phi_{n+3}, \quad \Phi_{n+2}, \quad \Phi_{n+1}, \quad \Phi_n,$$

при чемъ

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \dots$$

Мы обращаемъ вниманіе на символическій видъ уравненія на томъ основаніи, что онъ ясно обнаруживаетъ, какъ распространяются наши выводы на другіе случаи, болѣе общаго характера, когда  $x_k$  можетъ имѣть болѣе трехъ различныхъ значеній.

Въ обыкновенномъ видѣ уравненіе (6) представится такъ

$$\Phi_{n+3} - A\Phi_{n+2} + B\Phi_{n+1} - D\Phi_n = 0,$$

гдѣ

$$(7) \quad \begin{aligned} A &= \frac{p}{t} + q' + r''t, \quad B = \frac{pq' - p'q}{t} + pr'' - p''r + (q'r'' - q''r')t \\ D &= pq'r'' - pq''r' + p'q''r - p'qr'' + p''qr' - p''q'r. \end{aligned}$$

Съ другой стороны, согласно нашимъ обозначеніямъ, имѣемъ

$$\Phi_0 = 1$$

и прямое разсмотрѣніе случаевъ  $n = 1$  и  $n = 2$  даетъ намъ

$$\Phi_1 = P \frac{1}{t} + Q + Rt$$

$$\Phi_2 = Pp \frac{1}{t^2} + (Pq + Qp') \frac{1}{t} + Pr + Qq' + Rp'' + (Qr' + Rq'')t + Rr''t^2.$$

По этимъ даннымъ мы можемъ найти, на основаніи уравненія (6), всѣ остальные функціи  $\Phi_n$ . И не трудно видѣть, что всѣ функціи  $\Phi_n$  можно опредѣлить какъ коэффициенты при  $z^n$  въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ новаго вспомогательнаго перемѣннаго  $z$  нѣкоторой раціональной его функціи

$$\frac{f(t, z)}{F(t, z)},$$

знаменатель которой опредѣляется формулою

$$(8) \quad F(t, z) = - \begin{vmatrix} pz - t, & p'z, & p''z \\ qz, & q'z - 1, & q''z \\ rz, & r'z, & r''z - \frac{1}{t} \end{vmatrix} = 1 - Az + Bz^2 - Dz^3,$$

а числитель представляетъ цѣлую функцію второй степени относительно  $z$ .

Функция  $f(t, z)$  определяется тремя первыми членами правой части формулы

$$(9) \quad \frac{f(t, z)}{F(t, z)} = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots + \Phi_n z^n + \dots:$$

простое умножение ряда, стоящаго въ правой части формулы (9), на  $F(t, z)$  даетъ намъ

$$f(t, z) = \Phi_0 + (\Phi_1 - A\Phi_0) z + (\Phi_2 - A\Phi_1 + B\Phi_0) z^2.$$

Для нашей цѣли важно замѣтить, что при  $t = 1$  всѣ функции  $\Phi_n$  должны приводиться къ единицѣ и слѣдовательно

$$(10) \quad \frac{f(1, z)}{F(1, z)} = \frac{1}{1 - z}.$$

§ 3. Найденныя формулы мы приложимъ къ вычисленію математическихъ ожиданій различныхъ степеней суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na,$$

при чемъ число  $a$  подберемъ такимъ образомъ, чтобы математическое ожиданіе первой степени этой суммы оставалось конечнымъ при безпредѣльномъ возрастаніи числа  $n$ .

Такъ какъ въ функции  $\Phi_n$ , согласно опредѣленію ея, коэффициентомъ при любой данной степени  $t$  служитъ вѣроятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

равна показателю этой степени, то вѣроятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na$$

равна данному числу, мы можемъ опредѣлить разложеніемъ по степенямъ  $t$  произведенія

$$t^{-na} \Phi_n,$$

какъ коэффициентъ въ этомъ произведеніи при той степени  $t$ , показатель которой равенъ данному числу.

Отсюда не трудно заключить, что математическое ожиданіе

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i,$$

гдѣ  $i$  любое цѣлое положительное число, можно получить при помощи произведенія

$$t^{-na} \Phi_n$$

слѣдующимъ образомъ.

Полагаемъ

$$t = e^u,$$

затѣмъ составляемъ производную

$$\frac{d^i (t^{-na} \Phi_n)}{du^i}$$

и въ ней приравниваемъ  $u$  нулю; полученный такимъ образомъ результатъ

$$\left\{ \frac{d^i t^{-na} \Phi_n}{du^i} \right\}_{u=0}$$

дастъ намъ искомое математическое ожиданіе; переходъ отъ  $t$  къ  $e^u$  намъ нуженъ для того, чтобы при дифференцированіи не измѣнялись показатели.

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно видѣть, что рядъ

$$\Phi_0 + t^{-a} \Phi_1 z + t^{-2a} \Phi_2 z^2 + \dots + t^{-na} \Phi_n z^n + \dots$$

получается изъ ряда

$$\Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots + \Phi_n z^n + \dots$$

посредствомъ замѣны числа  $z$  произведеніемъ

$$t^{-a} z.$$

Слѣдовательно, на основаніи формулы (9), имѣемъ

$$(11) \quad \frac{f(t, zt^{-a})}{F(t, zt^{-a})} = \Phi_0 + t^{-a} \Phi_1 z + t^{-2a} \Phi_2 z^2 + \dots$$

и математическое ожиданіе

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i$$

можемъ опредѣлить какъ коэффициентъ при  $z^n$  въ разложеніи выраженія

$$(12) \quad \frac{d^i}{du^i} \left( \frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right)_{u=0}$$

по возрастающимъ степенямъ  $z$ .

§ 4. Остановимся на математическомъ ожиданіи первой степени

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = na,$$

чтобы найти число  $a$ .

Это математическое ожиданіе, согласно нашимъ выводамъ, выражается коэффициентомъ при  $z^n$  въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ числа  $z$  такой его функціи

$$(13) \quad \frac{f'_{u=0}(e^u, ze^{-au})}{F(1, z)} = \frac{f(1, z)}{F(1, z)} \frac{F'_{u=0}(e^u, ze^{-au})}{F(1, z)},$$

гдѣ символы

$$f'_{u=0}(e^u, ze^{-au}) \quad \text{и} \quad F'_{u=0}(e^u, ze^{-au})$$

означаютъ соотвѣтственно значенія производныхъ

$$\frac{df(e^u, ze^{-au})}{du} \quad \text{и} \quad \frac{dF(e^u, ze^{-au})}{du}$$

при  $u = 0$ .

Для изслѣдованія разложенія указанной функціи по возрастающимъ степенямъ  $z$  мы прежде всего займемся разложеніемъ ея на простѣйшія дроби, при чемъ для нашей цѣли важно выдѣлить только одну дробь со знаменателемъ  $(1 - z)^2$ .

Знаменателями искомымъ простѣйшихъ дробей, очевидно, могутъ быть только простые множители цѣлой функціи  $F(1, z)$ .

Однимъ изъ множителей функціи  $F(1, z)$  служитъ

$$1 - z,$$

такъ какъ ея значеніе при  $z = 1$  выражается опредѣлителемъ

$$= \begin{vmatrix} p - 1, & p', & p'' \\ q, & q' - 1, & q'' \\ r, & r', & r'' - 1 \end{vmatrix},$$

который въ силу основныхъ условій

$$p + q + r = p' + q' + r' = p'' + q'' + r'' = 1$$

равенъ нулю.

Обращаясь къ другимъ простымъ множителямъ функціи  $F(1, z)$ , положимъ

$$(14) \quad F(1, z) = (1 - z)(1 - y_1 z)(1 - y_2 z);$$

здѣсь числа

$$1, y_1, y_2$$

представляютъ три корня уравненія

$$(15) \quad \begin{vmatrix} p - y, & p', & p'' \\ q, & q' - y, & q'' \\ r, & r', & r'' - y \end{vmatrix} = 0.$$

Относительно этого уравненія мы докажемъ, что корень его единица простой и что модули остальныхъ его корней меньше единицы.

Для этой цѣли составляемъ производную по  $y$  отъ лѣвой части уравненія (15) и полагаемъ  $y = 1$ ; результатъ мы можемъ представить въ видѣ суммы трехъ разностей

$$\{q''r' - (1 - q')(1 - r'')\} + \{p''r - (1 - p)(1 - r'')\} + \{p'q - (1 - p)(1 - q')\},$$

ни одна изъ которыхъ не можетъ быть положительнымъ числомъ и которыя могутъ всѣ одновременно обратиться въ нуль только въ исключенныхъ нами случаяхъ, когда по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ

$$p, q', r''$$

равно единицѣ.

Убѣдившись такимъ образомъ, что единица простой, а не кратный корень уравненія (15), переходимъ къ другимъ корнямъ

$$y_1, y_2$$

того же уравненія, отличнымъ отъ единицы.

Пусть  $y$  одно изъ двухъ чиселъ

$$y_1, y_2,$$

безразлично какое.

Къ этому числу  $y$  можно подобрать систему чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma,$$

не состоящую изъ однихъ нулей и удовлетворяющую уравненіямъ

$$\begin{aligned} \alpha y &= p\alpha + q\beta + r\gamma, \\ \beta y &= p'\alpha + q'\beta + r'\gamma, \\ \gamma y &= p''\alpha + q''\beta + r''\gamma. \end{aligned}$$

## Разности

$$\alpha - \beta, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta - \gamma$$

также не могутъ всё быть равными нулю, такъ какъ при

$$\alpha = \beta = \gamma$$

изъ уравненій, обуславливающихъ значенія  $\alpha, \beta, \gamma$ , вытекаетъ равенство

$$y = 1.$$

Остановимся на той изъ разностей

$$\alpha - \beta, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta - \gamma,$$

которая имѣетъ наибольшій модуль; пусть она будетъ  $\alpha - \beta$ .

Соотвѣтственно этой разности вычитаемъ  $\beta y$  изъ  $\alpha y$ , что даетъ намъ такое равенство

$$(\alpha - \beta) y = (p - p') \alpha + (q - q') \beta + (r - r') \gamma.$$

Здѣсь множители

$$p - p', \quad q - q', \quad r - r',$$

при  $\alpha, \beta, \gamma$ , по числовой величинѣ меньше единицы, и такъ какъ ихъ сумма равна нулю, то одинъ изъ нихъ имѣетъ знакъ  $\pm$  противоположный знаку  $\mp$  двухъ остальныхъ и по числовой величинѣ равенъ ихъ суммѣ.

Для определенности положимъ, что  $p - p'$  и  $q - q'$  имѣютъ одинъ знакъ, а  $r - r'$  другой.

При такомъ предположеніи, замѣняя въ вышеприведенномъ равенствѣ разность  $r - r'$  равною ей суммою разностей

$$p' - p + q' - q,$$

получаемъ

$$y = (p - p') \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} + (q - q') \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta},$$

и потому

$$\text{мод. } y \leq \text{чис. зн. } (p - p') + \text{чис. зн. } (q - q') = \text{чис. зн. } (r - r') < 1.$$

Итакъ модули коэффициентовъ  $y_1, y_2$ , входящихъ въ разложеніе (14) функціи  $F(1, z)$  на простые множители, меньше единицы.

Поэтому въ известнѣхъ разложеніяхъ, по возрастающимъ степенямъ  $z$ , дробей вида

$$\frac{1}{(1 - y_1 z)^l} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1 - y_2 z)^l},$$

коэффициенты при  $z^n$  должны стремиться къ предѣлу нуль вмѣстѣ съ  $\frac{1}{n}$ .

Что же касается разложенія, по возрастающимъ степенямъ  $z$ , дробей вида

$$\frac{1}{(1 - z)^l},$$

то въ силу формулы

$$E_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+l-1)}{1 \cdot 2 \dots (l-1)},$$

опредѣляющей коэффициенты этого разложенія

$$\frac{1}{(1 - z)^l} = 1 + E_1 z + E_2 z^2 + \dots + E_n z^n + \dots,$$

имѣемъ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n^{l-1}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (l-1)} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n^{l-1+\varepsilon}} = 0,$$

гдѣ  $\varepsilon$  означаетъ любое данное положительное число.

Примѣняя наши выводы къ функціи (13), заключаемъ, что въ разложеніи ея, по возрастающимъ степенямъ  $z$ , коэффициентъ при  $z^n$ , равный математическому ожиданію суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na,$$

возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$  въ тѣхъ и только въ тѣхъ случаяхъ, когда дробь

$$\frac{f(1, z)}{F(1, z)} \cdot \frac{F'_{n=0}(e^u, ze^{-au})}{F(1, z)}$$

не сокращается на  $1 - z$ .

Желая, чтобы это математическое ожиданіе не возрастало безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$  и принимая во вниманіе, что въ силу установленнаго раньше равенства

$$\frac{f(1, z)}{F(1, z)} = \frac{1}{1 - z}$$



цѣлая функція  $f(1, z)$  не можетъ содержать множителя  $1 - z$ , мы должны дать  $a$  такое значеніе, чтобы множитель  $1 - z$  содержался въ функціи

$$F'_{u=0}(e^u, ze^{-au}).$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ уравненію

$$F'_{u=0}(e^u, e^{-au}) = 0,$$

которое не трудно привести къ слѣдующему виду

$$(16) \quad -a \left\{ \frac{dF(1, z)}{dz} \right\}_{z=1} + \left\{ \frac{dF(t, 1)}{dt} \right\}_{t=1} = 0.$$

Коэффициенты этого уравненія, которое допускаетъ одно и только одно рѣшеніе, можно вычислить по формуламъ

$$(17) \quad \left\{ \frac{dF(1, z)}{dz} \right\}_{z=1} = q'' r' - (1 - q')(1 - r'') + p'' r - (1 - p)(1 - r'') + p' q - (1 - p)(1 - q'),$$

$$\left\{ \frac{dF(t, 1)}{dt} \right\}_{t=1} = (1 - q')(1 - r'') - q'' r' - (1 - p)(1 - q') + p' q.$$

§ 5. Перейдемъ къ разсмотрѣнію высшихъ степеней суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na$$

при найденной нами величинѣ  $a$ .

По доказанному математическое ожиданіе

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i$$

можно опредѣлить какъ коэффициентъ при  $z^n$  въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ произвольнаго числа  $z$  слѣдующей его функціи

$$\frac{d^i}{du^i} \left( \frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right)_{u=0}.$$

Приступая къ изслѣдованію этой функціи, мы для сокращенія письма положимъ

$$(18) \quad f(e^u, ze^{-au}) = U, \quad F(e^u, ze^{-au}) = V$$

$$\frac{d^i V}{du^i} = V^{(i)}, \quad \frac{d^i U}{du^i} = U^{(i)}.$$

При такихъ обозначеніяхъ по формулѣ для дифференцированія произведенія имѣемъ

$$(19) \quad \frac{d^i}{dw^i} \left( \frac{U}{V} \right) = U \frac{d^i}{dw^i} \left( \frac{1}{V} \right) + \frac{i}{1} U' \frac{d^{i-1}}{dw^{i-1}} \left( \frac{1}{V} \right) + \dots$$

и по формулѣ дифференцированія функціи отъ функціи получаемъ

$$(20) \quad \frac{d^i}{dw^i} \left( \frac{1}{V} \right) = \sum \frac{i! j!}{V^{j+1}} \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} V''\right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2 \cdot 3} V'''\right)^\nu}{\nu!} \dots$$

гдѣ суммирование надо распространить на всѣ возможные совокупности цѣлыхъ чиселъ

$$j, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

удовлетворяющія двумъ уравненіямъ

$$(21) \quad \begin{aligned} \lambda + \mu + \nu + \dots &= j, \\ \lambda + 2\mu + 3\nu + \dots &= i \end{aligned}$$

и неравенствамъ

$$0 < j \leq i, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \dots$$

Мы имѣемъ въ виду доказать, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа  $n$  отношеніе математическаго ожиданія

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i$$

къ  $n^{\frac{i}{2}}$  стремится къ предѣлу равному произведенію

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt,$$

гдѣ  $C$  означаетъ нѣкоторое постоянное число.

Для этой цѣли, въ виду предыдущихъ выводовъ, надо выяснитъ, что знаменатель рациональной функціи числа  $z$ , представляемой значеніемъ производной

$$\frac{d^i}{dw^i} \left( \frac{U}{V} \right)$$

при  $u = 0$ , можетъ содержать множитель  $1 - z$ , конечно послѣ надлежащихъ сокращеній, только въ степени, не превосходящей  $\frac{i+1}{2}$  для  $i$  нечетнаго и не превосходящей  $\frac{i}{2} + 1$  для  $i$  четнаго.

Разсматривая при  $u = 0$  одно изъ произведеній

$$U^{(l)} \frac{d^{i-l}}{du^{i-l}} \left( \frac{1}{V} \right),$$

входящихъ въ формулу (19), мы замѣчаемъ, что множитель  $1 - z$  не можетъ содержаться въ знаменателѣ этого произведенія въ высшей степени, чѣмъ въ знаменателѣ второго множителя

$$\frac{d^{i-l}}{du^{i-l}} \left( \frac{1}{V} \right)_{u=0}.$$

А объ этомъ второмъ множителѣ мы можемъ сдѣлать важныя для насъ заключенія на основаніи формулы (20), замѣняя въ ней число  $i$  разностью  $i - l$ .

Въ самомъ дѣлѣ не трудно видѣть, что при выбранномъ нами значеніи  $a$  общій членъ

$$\frac{i! j!}{V^{j+1}} \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} V''\right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2 \cdot 3} V'''\right)^\nu}{\nu!} \dots$$

формулы (20) приводится при  $u = 0$  къ такой несократимой дроби, знаменатель которой содержитъ множитель  $1 - z$  въ степени не больше

$$j + 1 - \lambda,$$

такъ какъ при  $u = 0$  функція  $V'$  содержитъ множитель  $1 - z$ , функція же  $V$  не дѣлится на  $(1 - z)^2$ .

Съ другой стороны изъ условій, ограничивающихъ величины

$$j, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

не трудно вывести неравенство

$$(22) \quad \lambda \geq 2j - i,$$

которое ограничиваетъ значенія  $\lambda$  при  $2j > i$ .

Пока  $2j < i$ , разность

$$j + 1 - \lambda,$$

гдѣ  $\lambda \geq 0$ , остается, очевидно, меньше  $\frac{i}{2} + 1$ ; въ силу неравенства (22) разность

$$j + 1 - \lambda$$

остается меньше  $\frac{i}{2} + 1$  и при  $2j > i$ , и только при  $j = \frac{i}{2}$ , если такое значеніе возможно, и при  $\lambda = 0$  она можетъ достигнуть значенія  $\frac{i}{2} + 1$ .

Останавливаясь на предположеніи

$$i = 2j, \quad \lambda = 0,$$

которое возможно только при  $i$  четномъ, находимъ, что этому предположенію соотвѣтствуетъ только одинъ членъ формулы (20)

$$\frac{1.2.3\dots i (-V'')^{\frac{i}{2}}}{2^{\frac{i}{2}} V^{\frac{i}{2} + 1}},$$

такъ какъ при  $j = \frac{i}{2}$  и  $\lambda = 0$  изъ уравненій (21) и присоединенныхъ къ нимъ неравенствъ слѣдуетъ

$$\mu = \frac{i}{2}.$$

Слѣдовательно при  $i$  нечетномъ ни одна изъ дробей, къ которымъ приводятся производныя

$$\frac{d^i}{du^i} \left( \frac{1}{V} \right), \quad \frac{d^{i-1}}{du^{i-1}} \left( \frac{1}{V} \right), \quad \frac{d^{i-2}}{du^{i-2}} \left( \frac{1}{V} \right), \dots,$$

когда мы полагаемъ  $u = 0$ , не можетъ содержать въ знаменателѣ, конечно послѣ надлежащихъ сокращеній, множитель  $1 - z$  въ степени выше  $\frac{i+1}{2}$ , а при  $i$  четномъ только первая изъ этихъ дробей, получаемая изъ производной

$$\frac{d^i}{du^i} \left( \frac{1}{V} \right),$$

можетъ содержать въ знаменателѣ множитель  $1 - z$  въ степени  $\frac{i}{2} + 1$ ; если же изъ этой первой дроби вычестъ выраженіе

$$\frac{1.2.3\dots i (-V'')^{\frac{i}{2}}}{2^{\frac{i}{2}} V^{\frac{i}{2} + 1}}$$

при  $u = 0$ , то разность послѣ надлежащаго сокращенія приводится къ такой дроби, знаменатель которой содержитъ множитель  $1 - z$  въ степени меньшей  $\frac{i}{2} + 1$ .

Сопоставляя этотъ результатъ съ формулой (19) и принимая въ вниманіе обозначенія (18), заключаемъ, что при  $i$  нечетномъ разсматриваемое нами выраженіе

$$(12) \quad \frac{d^i}{du^i} \left( \frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right)_{u=0}$$

приводится къ такой раціональной дробной функціи числа  $z$ , знаменатель которой содержитъ множитель  $1 - z$  въ степени меньшей  $\frac{i}{2} + 1$ .

А отсюда, въ силу выводовъ изслѣдованій §§ 3 и 4, тотчасъ вытекаетъ, что при  $i$  нечетномъ отношеніе

$$\frac{\text{матем. ожид. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i}{n^{\frac{i}{2}}}$$

должно приближаться къ предѣлу нуля, когда  $n$  возрастаетъ безпредѣльно.

Не трудно также найти ту простую дробь со знаменателемъ  $(1 - z)^{\frac{i}{2} + 1}$ , которую надо выдѣлить изъ выраженія (12), чтобы знаменатель остатка не содержалъ множителя  $(1 - z)^{\frac{i}{2} + 1}$ , а могъ содержать только низшія степени  $1 - z$ .

Въ самомъ дѣлѣ эта дробь должна совпадать съ той, по выдѣленіи которой изъ выраженія

$$\frac{1.2.3 \dots i}{2^{\frac{i}{2}}} \left( \frac{U}{V} \right)_{u=0} \left( \frac{-V''}{V} \right)_{u=0}^{\frac{i}{2}}$$

остается дробь, не содержащая въ знаменателѣ множителя  $1 - z$  въ степени выше  $\frac{i}{2} - 1$ .

На этомъ основаніи, принимая во вниманіе равенство

$$(10) \quad \left( \frac{U}{V} \right)_{u=0} = \frac{1}{1 - z},$$

установленное въ § 2, находимъ, что искомую дробь можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{1.2.3 \dots i}{2^i} \cdot \frac{C^{\frac{i}{2}}}{(1 - z)^{\frac{i}{2} + 1}},$$

гдѣ число  $C$  опредѣляется формулою

$$(23) \quad \frac{1}{2} C = \frac{F''_{z=0}(e^a, e^{-a})}{F''_{z=1}(1, z)}$$

Придя къ такому выводу и сопоставивъ его съ изслѣдованіями §§ 3 и 4, мы уже безъ большого труда убѣждаемся, что отношеніе

$$\frac{\text{матем. ожид. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i}{n^{\frac{i}{2}}},$$

при  $i$  четномъ, стремится къ предѣлу

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^i \cdot 1 \cdot 2 \dots \frac{i}{2}} C^{\frac{i}{2}},$$

когда  $n$  возрастаетъ безпредѣльно.

Остается принять во вниманіе, что интеграль

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt$$

при  $i$  нечетномъ равенъ нулю, а при  $i$  четномъ равенъ числу

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^i \cdot 1 \cdot 2 \dots \frac{i}{2}},$$

и мы приходимъ къ окончательному заключенію.

Если число  $a$  опредѣлено уравненіемъ (16), а число  $C$ —формулою (23), то должно быть

$$\text{предѣлъ мат. ожид. } \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt,$$

какъ при  $i$  нечетномъ, такъ и при  $i$  четномъ, и слѣдовательно при безпредѣльномъ возрастаніи числа  $n$  вѣроятность выполненія неравенствъ

$$t_1 \sqrt{Cn} < x_1 + x_2 + \dots + x_n - na < t_2 \sqrt{Cn},$$

гдѣ  $t_1$  и  $t_2$  любыя данныя числа, при чемъ  $t_2 > t_1$ , должна приближаться къ предѣлу равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

§ 6. Разсмотрѣвъ одинъ случай величинъ, связанныхъ въ цѣпь, и замѣтивъ, что этотъ случай не представляетъ никакихъ характерныхъ особенностей, а отличается отъ другихъ только простотою данныхъ, мы можемъ въ немногихъ словахъ перенести наши выводы и на общій случай величинъ связанныхъ въ цѣпь, установленный въ вышеупомянутой статьѣ «Распространеніе закона большихъ величинъ...».

Придерживаясь обозначеній этой статьи, положимъ, что различными возможными значеніями чиселъ цѣпи

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$$

будутъ

$$(24) \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

и что система

$$(25) \quad \begin{array}{l} p_{\alpha,\alpha}, p_{\alpha,\beta}, p_{\alpha,\gamma}, \dots \\ p_{\beta,\alpha}, p_{\beta,\beta}, p_{\beta,\gamma}, \dots \\ p_{\gamma,\alpha}, p_{\gamma,\beta}, p_{\gamma,\gamma}, \dots \\ \dots \end{array}$$

представляетъ вѣроятности, при данныхъ значеніяхъ  $x_k$ , величинъ  $x_{k+1}$  имѣть опредѣленные значенія, при чемъ первый значекъ у  $p$  указываетъ данную величину  $x_k$ , а второй предполагаемую величину  $x_{k+1}$ .

Числами (24) и (25) опредѣляются наши окончательныя заключенія, но для постановки вполне опредѣленной задачи мы должны ввести еще числа

$$p'_\alpha, p'_\beta, p'_\gamma, \dots,$$

которыя, подобно числамъ  $P, Q, R$  частного случая, исчезаютъ въ окончательныхъ выводахъ и соотвѣтственно служатъ вѣроятностями равенствъ

$$x_1 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \quad x_1 = \gamma, \dots,$$

пока всѣ величины нашей цѣпи

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

остаются неопредѣленными.

Приступая къ разсмотрѣнію вѣроятностей различныхъ предположеній о величинѣ суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

обозначимъ вѣроятность равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

символомъ  $P_{m,n}$  и введемъ функцію  $\Phi_n$  произвольнаго числа  $t$ , опредѣляемую формулой

$$(26) \quad \Phi_n = \sum P_{m,n} t^m.$$

Поступая затѣмъ такъ же, какъ въ частномъ случаѣ, разлагаемъ  $P_{m,n}$  на слагаемыя

$$(27) \quad P_{m,n} = P_{m,n}^{\alpha} + P_{m,n}^{\beta} + P_{m,n}^{\gamma} + \dots$$

и вводимъ рядъ функцій

$$(28) \quad \Phi_n^{\alpha} = \sum P_{m,n}^{\alpha} t^m, \quad \Phi_n^{\beta} = \sum P_{m,n}^{\beta} t^m, \dots,$$

подразумѣвая подъ символами

$$P_{m,n}^{\alpha}, \quad P_{m,n}^{\beta}, \quad P_{m,n}^{\gamma}, \dots$$

вѣроятности выполненія того же равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

и добавочнаго условія, которое соотвѣтственно выражается однимъ изъ равенствъ

$$x_n = \alpha, \quad x_n = \beta, \quad x_n = \gamma, \dots$$

При такихъ обозначеніяхъ не трудно, согласно условіямъ вопроса, установить уравненія



$$\begin{aligned}
 P_{m,n}^{\alpha} &= P_{m-\alpha,n-1}^{\alpha} p_{\alpha,\alpha} + P_{m-\alpha,n-1}^{\beta} p_{\beta,\alpha} + \dots, \\
 P_{m,n}^{\beta} &= P_{m-\beta,n-1}^{\alpha} p_{\alpha,\beta} + P_{m-\beta,n-1}^{\beta} p_{\beta,\beta} + \dots, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

и отъ нихъ перейти къ уравненіямъ

$$\begin{aligned}
 \Phi_n t^{-\alpha} &= p_{\alpha,\alpha} \Phi_{n-1}^{\alpha} + p_{\beta,\alpha} \Phi_{n-1}^{\beta} + p_{\gamma,\alpha} \Phi_{n-1}^{\gamma} + \dots, \\
 \Phi_n t^{-\beta} &= p_{\alpha,\beta} \Phi_{n-1}^{\alpha} + p_{\beta,\beta} \Phi_{n-1}^{\beta} + p_{\gamma,\beta} \Phi_{n-1}^{\gamma} + \dots, \\
 \Phi_n t^{-\gamma} &= p_{\alpha,\gamma} \Phi_{n-1}^{\alpha} + p_{\beta,\gamma} \Phi_{n-1}^{\beta} + p_{\gamma,\gamma} \Phi_{n-1}^{\gamma} + \dots, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

А изъ уравненій (29) вытекаеть для всѣхъ функций

$$\Phi_n^{\alpha}, \quad \Phi_n^{\beta}, \quad \Phi_n^{\gamma}, \dots$$

и для

$$\Phi_n = \Phi_n^{\alpha} + \Phi_n^{\beta} + \Phi_n^{\gamma} + \dots$$

одно и то же линейное однородное уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, которое мы можемъ представить довольно просто въ символическомъ видѣ

$$\begin{pmatrix}
 p_{\alpha,\alpha} - t^{-\alpha} \Phi, & p_{\beta,\alpha}, & p_{\gamma,\alpha}, \dots \\
 p_{\alpha,\beta}, & p_{\beta,\beta} - t^{-\beta} \Phi, & p_{\gamma,\beta}, \dots \\
 p_{\alpha,\gamma}, & p_{\beta,\gamma}, & p_{\gamma,\gamma} - t^{-\gamma} \Phi, \dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{pmatrix} \Phi^n = 0,
 \tag{30}$$

гдѣ по выполненіи указанныхъ выкладокъ слѣдуетъ вмѣсто

$$\Phi^n, \quad \Phi^{n+1}, \quad \Phi^{n+2}, \dots$$

поставить

$$\Phi_n, \quad \Phi_{n+1}, \quad \Phi_{n+2}, \dots$$

Въ силу этого уравненія всѣ функціи

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$$

можно опредѣлить какъ коэффициенты въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ второго вспомогательнаго числа  $z$  нѣкоторой рациональной его функціи

$$\frac{f(t, z)}{F(t, z)},$$

знаменатель которой опредѣляется формулою

$$(31) \quad F(t, z) = \begin{vmatrix} p_{\alpha, \alpha} z - t^{-\alpha}, & p_{\beta, \alpha} z, & p_{\gamma, \alpha} z, & \dots \\ p_{\alpha, \beta} z, & p_{\beta, \beta} z - t^{-\beta}, & p_{\gamma, \beta} z, & \dots \\ p_{\alpha, \gamma} z, & p_{\beta, \gamma} z, & p_{\gamma, \gamma} z - t^{-\gamma}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ выводамъ необходимо отмѣтить, что мы разсматриваемъ только такія цѣпи

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

гдѣ появленіе однихъ изъ чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

не исключаетъ окончательно возможности появленія прочихъ. Это важное условіе можно выразить при помощи опредѣлителей такимъ образомъ: опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} u, & p_{\beta, \alpha}, & p_{\gamma, \alpha}, & \dots \\ p_{\alpha, \beta}, & v, & p_{\gamma, \beta}, & \dots \\ p_{\alpha, \gamma}, & p_{\beta, \gamma}, & w, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

съ произвольными элементами

$$u, v, w, \dots$$

не приводится къ произведенію нѣсколькихъ опредѣлителей того же типа.

Этого условія для нашихъ цѣлей однако не достаточно, и мы должны предположить\*), что указанный нами опредѣлитель не приводится явнымъ образомъ къ произведенію нѣсколькихъ опредѣлителей и при

$$u = p_{\alpha,\alpha}, \quad v = p_{\beta,\beta}, \quad w = p_{\gamma,\gamma}, \dots$$

Какъ въ частномъ случаѣ, такъ и въ общемъ, наши выводы относятся къ математическому ожиданію степени

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i,$$

гдѣ число  $a$  мы опредѣляемъ условіемъ, чтобы при  $i = 1$  это математическое ожиданіе не могло возрасть безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$ .

Установивъ попрежнему, что рассматриваемое математическое ожиданіе можно выразить коэффициентомъ при  $z^n$  въ разложеніи, по возрастающимъ степенямъ  $z$ , значенія производной

$$\frac{d^i}{du^i} \left\{ \frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right\}$$

при  $u = 0$ , замѣчаемъ, что для перенесенія заключеній частнаго случая на общій намъ надо рассматривать разложеніе функции  $F(1, z)$  на простые множители

$$F(1, z) = \pm (1 - z) (1 - y_1 z) (1 - y_2 z) \dots$$

и доказать, что множитель  $1 - z$  встрѣчается въ этомъ разложеніи только одинъ разъ и что модули чиселъ

$$y_1, \quad y_2, \dots$$

меньше единицы.

Другими словами, мы должны убѣдиться, что единица служитъ простымъ, а не кратнымъ корнемъ уравненія

$$(32) \quad \begin{vmatrix} p_{\alpha,\alpha} - y & p_{\beta,\alpha} & p_{\gamma,\alpha}, \dots \\ p_{\alpha,\beta} & p_{\beta,\beta} - y & p_{\gamma,\beta}, \dots \\ p_{\alpha,\gamma} & p_{\beta,\gamma} & p_{\gamma,\gamma} - y, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

---

\*) Наши выводы можно распространить и на многіе изъ исключенныхъ нами случаевъ.

и что модули остальныхъ корней

$$y_1, y_2, \dots$$

того же уравненія меньше единицы.

Для доказательства, что единица простой, а не кратный корень уравненія (32), можетъ служить слѣдующее предложеніе относительно опредѣлителей.

Если всѣ элементы опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} u, & -b_1, & -c_1, & \dots \\ -a_1, & v, & -c_2, & \dots \\ -a_2, & -b_2, & w, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

удовлетворяютъ неравенствамъ

$$(*) \quad a_k \geq 0, \quad b_k \geq 0, \quad c_k \geq 0, \dots$$

и неравенствамъ

$$(**) \quad u \geq a_1 + a_2 + \dots, \quad v \geq b_1 + b_2 + \dots, \quad w \geq c_1 + c_2 + \dots, \dots;$$

то онъ не можетъ быть числомъ отрицательнымъ и можетъ быть нулемъ только въ крайнихъ случаяхъ, когда всѣ неравенства (\*\*) обращаются въ равенства, или когда онъ приводится, въ виду обращенія нѣкоторыхъ изъ неравенствъ (\*) въ равенства, къ произведенію нѣсколькихъ опредѣлителей того же типа и среди этихъ послѣднихъ находится такой опредѣлитель, для котораго всѣ неравенства, аналогичныя (\*\*), обращаются въ равенства\*).

Мы убѣждаемся въ вѣрности этого важнаго для насъ предложенія, рассматривая  $u, v, w, \dots$  какъ переменныя числа и замѣчая, что производныя отъ нашего опредѣлителя по  $u, v, w, \dots$  выражаются подобными же опредѣлителями низшаго порядка; такое разсмотрѣніе даетъ возможность постепенно распространять теорему съ опредѣлителя 2-го порядка, для котораго она очевидна, на опредѣлитель 3-го порядка, съ опредѣлителя 3-го порядка на опредѣлитель 4-го порядка и т. д.

Изъ доказаннаго такимъ образомъ предложенія тотчасъ слѣдуетъ, что при поставленныхъ нами условіяхъ производная по  $u$  отъ лѣвой части уравненія (32) не обращается въ

\*) Подобное предложеніе встрѣчается также въ замѣткѣ Германна Минковского «Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern» (Nach. v. d. Kon. Gesel. der Wiss. zu Göttingen a. d. J. 1900).

нуль при  $y = 1$ , такъ какъ эта производная, по умноженіи на  $\pm 1$ , можетъ быть представлена въ видѣ суммы опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} 1 - p_{\beta,\beta} & - p_{\gamma,\beta} & \dots \\ - p_{\beta,\gamma} & 1 - p_{\gamma,\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 - p_{\alpha,\alpha} & - p_{\gamma,\alpha} & \dots \\ - p_{\alpha,\gamma} & 1 - p_{\gamma,\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots,$$

удовлетворяющихъ условіямъ теоремы и не подходящихъ подъ крайній случай.

Итакъ число единица, которое въ силу условій

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\alpha} + p_{\alpha,\beta} + p_{\alpha,\gamma} + \dots &= 1, \\ p_{\beta,\alpha} + p_{\beta,\beta} + p_{\beta,\gamma} + \dots &= 1, \\ \dots & \end{aligned}$$

должно удовлетворять уравненію (32), не можетъ быть кратнымъ корнемъ этого уравненія.

Обращаясь къ другимъ корнямъ уравненія (32), положимъ, что  $y$  любой изъ нихъ.

Къ этому числу  $y$  можно подобрать систему чиселъ

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

не состоящую изъ однихъ нулей и удовлетворяющую уравненіямъ

$$\begin{aligned} \alpha' y &= p_{\alpha,\alpha} \alpha' + p_{\alpha,\beta} \beta' + p_{\alpha,\gamma} \gamma' + \dots, \\ \beta' y &= p_{\beta,\alpha} \alpha' + p_{\beta,\beta} \beta' + p_{\beta,\gamma} \gamma' + \dots, \\ \gamma' y &= p_{\gamma,\alpha} \alpha' + p_{\gamma,\beta} \beta' + p_{\gamma,\gamma} \gamma' + \dots, \\ \dots & \end{aligned}$$

Числа  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$  не могутъ всё имѣть одно и то же значеніе, такъ какъ при допущеніи полной системы равенствъ

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \dots$$

изъ уравненій, которымъ по условію удовлетворяютъ эти числа, тотчасъ слѣдуетъ

$$y = 1.$$

Принявъ это во вниманіе, предположимъ сначала, что числа  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$  не имѣютъ одного общаго модуля. При такомъ предположеніи, въ виду поставленныхъ нами условій, среди уравненій, которымъ подчинены числа  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ , должно быть, по меньшей мѣрѣ, одно, гдѣ въ лѣвой части множителемъ при  $y$  служитъ какое нибудь изъ чиселъ

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

съ наибольшимъ модулемъ  $a$  въ правой части входитъ съ коэффициентомъ отличнымъ отъ нуля и такое изъ нашихъ чиселъ

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots,$$

модуль котораго не достигаетъ упомянутой наибольшей величины. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ

$$\text{модуль } y < 1,$$

такъ какъ сумма коэффициентовъ при

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

въ правой части cadaго изъ установленныхъ нами уравненій равна единицѣ.

Перейдемъ къ предположенію, что всѣ числа

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

имѣютъ одинъ и тотъ же модуль.

Мы знаемъ однако, что они не всѣ равны другъ другу. Поэтому совокупность ихъ можно, по отношенію къ первому числу  $\alpha'$ , разбить на двѣ группы: на группу чиселъ равныхъ  $\alpha'$  и на группу чиселъ не равныхъ  $\alpha'$ , при чемъ послѣднія отличаются отъ  $\alpha'$  величиною аргумента.

Съ другой стороны, въ виду одного изъ основныхъ нашихъ условій, совокупность суммъ

$$p_{\alpha,\alpha} \alpha' + p_{\alpha,\beta} \beta' + p_{\alpha,\gamma} \gamma' + \dots,$$

$$p_{\beta,\alpha} \alpha' + p_{\beta,\beta} \beta' + p_{\beta,\gamma} \gamma' + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

нельзя разбить на двѣ совокупности такъ, чтобы изъ всѣхъ чиселъ

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

суммы первой совокупности содержали, съ коэффициентами \*) отличными отъ нуля, только равныя  $\alpha'$ , а суммы второй совокупности — только не равныя  $\alpha'$ .

Слѣдовательно одна изъ этихъ суммъ, навѣрно, содержитъ, съ коэффициентами отличными отъ нуля, какъ числа равныя  $\alpha'$ , такъ и числа не равныя  $\alpha'$ ; и потому модуль ея, равный произведенію модуля  $y$  на модуль  $\alpha'$ , долженъ быть меньше модуля  $\alpha'$ , такъ какъ для чиселъ различныхъ аргументовъ модуль ихъ суммы меньше суммы ихъ модулей, а не равенъ ей.

Отсюда тотчасъ вытекаетъ неравенство

$$\text{модуль } y < 1,$$

которое намъ надо было доказать.

Доказавъ такимъ образомъ, что въ разложеніи функціи  $F(1, z)$  на простые множители

$$F(1, z) = \pm (1 - z) (1 - y_1 z) (1 - y_2 z) \dots$$

множитель  $1 - z$  входитъ только въ первой степени а модули коэффициентовъ

$$y_1, y_2, \dots$$

меньше единицы, мы можемъ всѣ дальнѣйшія разсужденія, проведенныя нами для частнаго случая, перенести безъ измѣненія на общій случай.

Въ виду полной неизмѣнности этихъ разсужденій мы не станемъ повторять ихъ, а приведемъ только окончательный выводъ.

Если при установленныхъ нами условіяхъ и обозначеніяхъ числа  $a$  и  $C$  мы опредѣлимъ равенствами

$$(33) \quad a = \frac{F'_{t=1}(t, 1)}{F'_{z=1}(1, z)}, \quad \frac{1}{2} C = \frac{F''_{u=0}(e^u, e^{-au})}{F'_{z=1}(1, z)},$$

которыя не приводятъ ни къ невозможнымъ ни къ неопредѣленнымъ результатамъ, то должно быть

$$\text{предѣлъ мат. ожид. } \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt$$

\*) Въ статьѣ «Распространеніе закона большихъ чиселъ...» я остановился на простѣйшемъ предположеніи, что среди этихъ коэффициентовъ вообще нѣтъ равныхъ нулю.

для любого цѣлаго положительнаго числа  $i$ , и слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи числа  $n$ , вѣроятность выполненія неравенствъ

$$t_1 \sqrt{Cn} < x_1 + x_2 + \dots + x_n - na < t_2 \sqrt{Cn},$$

гдѣ  $t_1$  и  $t_2$  любыя данныя числа, при чемъ  $t_2 > t_1$ , должна приближаться къ предѣлу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Относительно чиселъ  $a$  и  $C$  можно замѣтить также, что они соотвѣтственно равны предѣламъ, къ которымъ стремятся

$$\text{мат. ож. } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{и} \quad 2 \text{ мат. ож. } \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^2,$$

когда  $n$  возрастаетъ безпредѣльно.

Это замѣчаніе позволяетъ распространить наши заключенія и на тѣ случаи, когда совокупность чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

не исчерпывается конечнымъ числомъ членовъ.

Наши выводы можно распространить также и на сложныя цѣпи, въ которыхъ каждое число непосредственно связано не съ однимъ, а съ нѣсколькими предшествующими ему числами.

PRESENTED

8 FEB 1916









Цѣна: 35 к.; Prix: 80 Pf.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и К. Л. Рикера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петербургѣ, Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. В. Клюкина въ Москвѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Ниммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзань и Ноня, въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, M. Klukine à Moscou, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sörgenfrey) à Leipzig, Luzac & Cie à Londres.

PRESENTED

16 NOV. 1908

**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

**DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.**

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 10 и послѣдній.**

**Volume XXII. № 10 et dernier.**

(Travaux du Laboratoire Zoologique et de la Station Biologique de Sébastopol près l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg).

НАБЛЮДЕНІЯ

НАДЪ ПРОЦЕССОМЪ РЕГЕНЕРАЦІИ

У

**ENTEROPNEUSTA.**

СЪ 70 РИСУНКАМИ ВЪ ТЕКСТѢ.

*Stom.*  
**К. Н. Давыдова.**

*int. anten.*

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 5 декабря 1907 г.).



С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.



**ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

**MÉMOIRES**

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.

**VIII<sup>e</sup> SÉRIE.**

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

**Томъ XXII. № 10 и послѣдній.**

**Volume XXII. № 10 et dernier.**

(Travaux du Laboratoire Zoologique et de la Station Biologique de Sébastopol près l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg).

**НАБЛЮДЕНІЯ**

**НАДЪ ПРОЦЕССОМЪ РЕГЕНЕРАЦИИ**

**У**

**ENTEROPNEUSTA.**

СЪ 70 РИСУНКАМИ ВЪ ТЕКСТѢ.

**К. Н. Давыдова.**

*Davidov (K. N.)*  
*хвф.*

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 5 декабря 1907 г.).



С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.  
Апрѣль 1908 г. Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ*.

**ТИПОГРАФИЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.**

Вас. Остр., 9 линія, № 12.

## ПРЕДИСЛОВІЕ.

---

Вопросъ о регенераціи въ настоящее время является боевымъ вопросомъ современной морфологіи и біологіи вообще.

Изучая текущую литературу, поражаешься тому громадному количеству работъ, которыя прямо или косвенно касаются регенераціи. Вопросъ дебатруется со всѣхъ сторонъ, захватывая огромные горизонты, втягивая въ полемику людей различныхъ научныхъ направленій. Можно смѣло сказать, что проблемы регенераціи самымъ тѣснымъ образомъ связаны чуть ли не со всѣми крупными проблемами біологіи. Съ одной стороны вопросъ этотъ упирается въ эмбриологію съ ея дериватами — механикой развитія и филогеніей, съ другой — даетъ обширное поле для развитія новыхъ, нео-виталистическихъ идей въ духѣ Г. Дриша и его школы.

Новое научное теченіе, представителемъ котораго является Дришъ, является, несомнѣнно, вполне своевременнымъ контрагентомъ противъ значительно уже устарѣвшаго морфологическаго теченія. Заслуги послѣдняго несомнѣнны, но главная роль чистой морфологіи уже заканчивается—пора ставить на разрѣшеніе новыя проблемы, отвѣчающія запросамъ новыхъ научныхъ теченій.

Нельзя однако не отмѣтить того, что новыя вопросы можно ставить на разрѣшеніе только при условіи всесторонняго использованія того громаднаго матеріала, который намъ дала морфологія.

Къ сожалѣнію нельзя не сознаться, что новая школа проявляетъ, по отношенію къ морфологическимъ даннымъ, крайне не серьезное отношеніе. Цѣлый рядъ работъ Моргана, Гербста, Дриша и ихъ послѣдователей служатъ этому доказательствомъ.

Пренебреженіе къ морфологіи вызываетъ односторонность, естественно, вредно отражающуюся на результатахъ ихъ работы, работы крайне цѣнной, уже создавшей извѣстное научное направленіе, къ каждымъ годомъ привлекающее все новыхъ и новыхъ адептовъ.



Нельзя поэтому не согласиться съ мнѣніемъ Е. Шульца (Шульцъ 05) относительно этого новаго направленія: «Признавая вполне», говоритъ этотъ изслѣдователь: «какъ необходимую реакцію здравость и своевременность точки зрѣнія Гербста и Дриша на филетическій методъ, я тѣмъ не менѣе думаю, что экспериментальный методъ долженъ будетъ соединиться съ историческимъ».

Не такъ смотрятъ на дѣло руководителя новаго направленія.

Примѣромъ можетъ служить книга Моргана «*Regeneration*», въ особенности ея дополненный Мошковскимъ (Moszkowsky) нѣмецкій переводъ.

Трудъ этотъ, представляющій собою цѣнную (хоть и весьма подчасъ поверхностную) сводку всего, что до сихъ поръ сдѣлано по вопросу о регенерации, при всѣхъ своихъ достоинствахъ, несомнѣнно, сыгралъ отчасти и отрицательную роль, благодаря поверхностному, подчасъ даже прямо легкомысленному отношенію авторовъ къ морфологическимъ доктринамъ.

Полное отрицаніе всякаго значенія регенерации для филогенеза, основанное, разумѣется, на отрицаніи параллелизма (принципіального) между регенеративными и онтогенетическими процессами, все это, благодаря авторитетному имени Моргана, дѣйствительно почтеннаго ученаго, грозитъ внести большую путаницу въ наши теоретическія представленія о регенерации и въ теорію зародышевыхъ пластовъ.

Нужно отмѣтить, что та глава цитируемой книги Morgan-Moszkowsky, въ которой разбирается вопросъ о соотвѣтствіи между регенерацией и онтогенезомъ, а также и о тѣхъ гистогенетическихъ процессахъ, которые имѣютъ мѣсто при регенерации, представляетъ изъ себя наиболѣе слабую часть труда.

Нельзя не пожалѣть о томъ, что какъ Морганъ, такъ и Дришъ, устанавливающіе на основаніи своихъ наблюденій цѣлые законы, подчасъ перевертывающіе вверхъ дномъ основныя морфологическія теоріи, совсѣмъ игнорируютъ при своихъ изслѣдованіяхъ гистологическій методъ.

Я не сомнѣваюсь въ томъ, что многимъ изъ остроумныхъ и глубокихъ соображеній этихъ новаторовъ суждено сыграть большую роль въ наукѣ, но все же не могу согласиться съ методомъ наблюденій авторовъ, методомъ, несомнѣнно, одностороннимъ.

Детальное гистологическое изслѣдованіе должно предшествовать общимъ выводамъ.

Прежде, чѣмъ отрицать, напримѣръ, старое воззрѣніе о томъ, что въ принципѣ процессы регенерации совпадаютъ съ онтогенезомъ, необходимо детально анализировать оба ряда явленій.

Мы имѣемъ въ настоящее время богатый фактической матеріалъ, освѣщающій эмбриональные процессы, но къ сожалѣнію у насъ нѣтъ пока достаточно данныхъ для освѣщенія процесса регенерации, именно ея внутренней стороны — регенеративнаго органогенеза.

Мы имѣемъ, правда, довольно обширную литературу только по регенерации нѣкоторыхъ червей, главнымъ образомъ аннелидъ, но въ литературѣ этой столько противорѣчій, что сказать что нибудь определенное по нѣкоторымъ вопросамъ подчасъ прямо невозможно.

Вотъ почему, приступая къ изслѣдованію явленія регенераціи еще въ 1899 г., я и поставилъ тогда своей задачей именно выяснитъ отношеніе регенеративнаго органогенеза къ эмбриональному. Изученіе процесса регенераціи у оѳіуръ привело меня къ тому убѣжденію, что между обоими процессами существуетъ несомнѣнный параллелизмъ.

Углубившись въ работу, я натолкнулся на многіе побочные вопросы, которые расширили горизонты первоначально намѣченнаго плана, но знакомство съ книгой Моргана укрѣпило во мнѣ еще болѣе первоначальное намѣреніе произвести всестороннее изслѣдованіе регенеративнаго органогенеза.

Приступая къ выполненію своего плана, я поставилъ себѣ рядъ задачъ.

Прежде всего я считалъ необходимымъ произвести насколько возможно детальное изслѣдованіе органогенетическихъ процессовъ у различныхъ, наиболѣе удобныхъ для этой цѣли животныхъ.

Мой выборъ палъ на архіаннелидъ и *Enteropneusta*.

Вторая задача, которую я себѣ поставилъ, было детальное сравненіе регенеративнаго органогенеза съ эмбриональнымъ при различныхъ условіяхъ регенераціи.

По мѣрѣ того, какъ я углублялся въ работу, рамки моего плана расширялись; съ первыхъ же шаговъ своего изслѣдованія регенераціи *Enteropneusta* я натолкнулся на рядъ новыхъ проблемъ, но въ концѣ концовъ все же былъ принужденъ оставить разрѣшеніе этихъ вопросовъ до того времени, когда будетъ закончено изслѣдованіе регенераціи у архіаннелидъ.

Мои изслѣдованія органогенеза при регенераціи *Enteropneusta* снова привели меня къ тому заключенію, что регенерація въ принципѣ слѣдуетъ тому пути, по которому проходятъ онтогенетическіе процессы, и тѣ отклоненія отъ послѣдняго, которыя иногда наблюдаются, нужно объяснять тѣмъ, что зачастую регенеративный путь болѣе первиченъ, чѣмъ тотъ, который наблюдается при эмбриональномъ развитіи. Дѣйствительно, нѣтъ никакого сомнѣнія въ томъ, что при регенераціи сохраняется болѣе палингенетическихъ чертъ, чѣмъ при онтогенезѣ.

Послѣднее обстоятельство дѣлаетъ изученіе регенеративнаго органогенеза особенно интереснымъ, позволяя на основаніи изученія регенераціи дѣлать такіе же выводы, какіе мы дѣлаемъ, пользуясь принципомъ биогенетическаго закона на основаніи изученія онтогенеза.

Этому вопросу посвященъ цѣлый отдѣлъ предлагаемой статьи, гдѣ я задаюсь цѣлью на основаніи данныхъ, полученныхъ при изученіи регенераціи *Enteropneusta*, освѣтитъ нѣкоторые вопросы, связанные съ филогеніей этой группы животныхъ.

Цѣлую главу посвятилъ я также вопросу о морфоллаксисѣ и принципамъ Ру—регенераціи путемъ перемѣщенія и передифференцировки, наблюдающимся и у *Enteropneusta*.

Къ этому вопросу я надѣюсь еще возвратиться позднѣе въ своемъ изслѣдованіи регенераціи архіаннелидъ.

Такимъ образомъ, въ настоящее время, публикуя свои наблюденія надъ регене-

раціей у *Enteropneusta*, я не задаюь пока широкими теоретическими проблемами. Разработку ихъ я откладываю до выясненія нѣкоторыхъ вопросовъ, разрѣшеніе которыхъ надѣюсь найти въ продолжающемся изслѣдованіи регенераціи архіаннелидъ.

Въ этой же работѣ главной, основной задачей я поставилъ:

- 1) детально разобрать органогенезъ при различныхъ условіяхъ регенераціи,
  - 2) провести сравненіе регенеративнаго органогенеза съ эмбриональнымъ,
  - 3) выяснить отношеніе регенераціи къ филогенезу и, наконецъ,
  - 4) доказать, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ регенерація протекаетъ особымъ путемъ, вполне согласующимся съ тѣмъ, который Морганъ назвалъ морфоллаксисомъ.
-

## ГЛАВА I.

## Біологическія наблюденія.

Вопросъ о регенерации *Enteropneusta* почти не затронутъ въ литературѣ. Нѣтъ ни одной статьи, которая была бы спеціально посвящена этому вопросу, за исключеніемъ моихъ небольшихъ замѣтокъ (С. Dawydoff, 02 и 07), представляющихъ изъ себя ни что иное, какъ предварительныя сообщенія къ этой работѣ.

Мы обязаны Шпенгелю открытіемъ того факта, что живущія въ Неаполитанской бухтѣ *Ptychodera minuta* Kow. способны регенерировать переднюю часть тѣла.

Въ своей извѣстной монографіи (Spengel, 93) авторъ, констатируя этотъ фактъ, посвящаетъ вопросу всего нѣсколько строкъ и даетъ нѣсколько изображеній *Ptychodera*, регенерирующихъ передніе сегменты (табл. 26, ff. 14—18).

Шпенгель, не занимавшійся спеціально вопросомъ о регенерации и сдѣлавшій лишь попутно нѣсколько наблюденій, не останавливается на нихъ сколько нибудь подробно, лишь при случаѣ упоминая о томъ или другомъ фактѣ.

Такъ, въ одномъ мѣстѣ мы находимъ указаніе относительно происхожденія нервной трубки путемъ инвагинаціи (стр. 437), а въ другомъ авторъ даетъ бѣглыя указанія объ образованіи целома хобота. Впрочемъ, даже и это указаніе чисто отрицательнаго характера— авторъ говоритъ только, что въ образованіи хоботнаго целома элементы кишечника участія не принимаютъ. О томъ же, какимъ образомъ образуется этотъ органъ, Шпенгель не говоритъ (стр. 684).

Словомъ, въ монографіи Шпенгеля мы не находимъ ничего, кромѣ двухъ, трехъ намековъ, разбросанныхъ среди массы другого матеріала — въ совокупности всего какихъ нибудь двадцать строкъ, затерянныхъ среди многихъ сотенъ страницъ объемистаго труда.

Единственная работа, въ которой авторъ отводитъ регенерации опредѣленное мѣсто— это работа А. Вилли (Wulley, 99), а именно его монографія *Enteropneusta* Полинезіи и Вестъ-Индіи.

Впрочемъ, и этотъ изслѣдователь, посвятившій нѣсколько страницъ (стр. 245—247) своимъ наблюденіямъ надъ регенерацией тихоокеанской *Ptychodera flava* Eich., лишь вскользь

касается органогенетическихъ процессовъ, которые имѣютъ здѣсь мѣсто. Такъ, мы находимъ въ этой работѣ описаніе процесса образованія воротниковаго нерва путемъ инвагинаціи (табл. XXXII, рис. 66, 67 и 68), но не находимъ никакихъ данныхъ о регенераціи органовъ хобота.

Приведенными отрывочными данными исчерпывался весь фактическій матеріалъ, имѣвшійся въ зоологической литературѣ о регенераціи Enteropneusta въ то время, когда я приступалъ къ своимъ изслѣдованіямъ въ 1901 году.

Послѣ появленія моего предварительнаго сообщенія въ литературѣ не появилось ни одного изслѣдованія по этому вопросу.

### Матеріалъ. Методы изслѣдованія.

Я началъ собирать матеріалъ по регенераціи Enteropneusta лѣтомъ 1900 года, во время пребыванія на Неаполитанской Зоологической Станціи.

Главнымъ объектомъ моихъ наблюденій была *Ptychodera minuta* Kow. (*Glossobalanus minutus*), обыкновенная въ нѣкоторыхъ мѣстахъ Неаполитанской бухты. Всего раза четыре получилъ я огромныхъ *P. clavigera* Della Chiaje.

Во время пребыванія въ тропикахъ (1903 г.), а именно у береговъ Новой Гвинее (неподалеку отъ Etnabay) я нашелъ нѣсколько десятковъ небольшой *Ptychodera*, которая отличается отъ средиземноморской лишь второстепенными признаками. Этотъ небольшой матеріалъ далъ довольно цѣнные результаты. Благодаря удивительной, почти безграничной живучести, новогвинейскихъ Enteropneusta, надъ ними можно было ставить какіе угодно опыты.

Впрочемъ, поразительной живучестью отличаются и средиземноморскія *Ptychodera*—это животныя чрезвычайно неприхотливыя. Они превосходно выносятъ всякаго рода эксперименты, поврежденія и ампутаціи. Однажды, напр., ампутированный экземпляръ наткнулся переднимъ концомъ тѣла—мѣстомъ раны—на острую палочку, нанизалъ на нее свое тѣло во всю длину, и будучи такимъ образомъ какъ бы посаженнымъ на колъ, регенерировалъ ампутированный хоботъ!

Другой экземпляръ, будучи обрѣзанъ съ одной стороны на уровнѣ печеночныхъ мѣшковъ, съ другой—на границѣ воротника и туловища и при этомъ разрѣзанъ еще вдоль по брюшной линіи и развернутъ въ видѣ пластинки—регенерировалъ свой хоботъ и воротникъ, какъ вполне нормальное животное. На рис. 7 и 70 воспроизведены подобные обрывки *Ptychodera*, которые регенерировали недостающія части тѣла.

Ампутированный хоботъ—однѣи съ частью воротника—живетъ очень долго. Я держалъ такіе хобота въ аквариумѣ втеченіи двухъ мѣсяцевъ—внутри ихъ шли энергичные процессы дегенераціи и регенераціи тканей. Къ сожалѣнію у меня не было времени продержатъ такіе изолированные хобота болѣе долгое время—пришлось законсервировать ихъ при отъѣздѣ изъ Неаполя.

*Enteropneusta* можно держать въ простой банкѣ съ водой. Это настолько неприхотливое животное, что не требуетъ даже аэрированія акваріума, гдѣ живетъ.

Ампутація производилась при помощи ножницъ. Я обыкновенно рѣзалъ животное посрединѣ воротника, или на границѣ воротника и туловища, позади жаберъ (въ области гонадъ) и, наконецъ, у цѣлыхъ экземпляровъ отрѣзалъ хвостовую часть немного ниже печеночныхъ придатковъ (рис. 1).

Вначалѣ для изученія регенерации хобота я ампутировалъ его у основанія, т. е. перерѣзалъ стебелекъ. Но этотъ способъ ампутаціи оказался неудачнымъ, такъ какъ часть стебелька остается неампутированной и процессъ регенерации теряетъ значительную часть своего интереса — большая часть органовъ восстанавливается изъ остатковъ ихъ путемъ простого роста.

При такомъ способѣ ампутаціи хоботъ регенерируетъ очень быстро. Обыкновенно черезъ 48—60 часовъ у животного уже восстанавлился маленкій хоботъ, еще не выступившій надъ капюшономъ воротника, но уже обладавшій всѣми органами<sup>1)</sup>.

Я изслѣдовалъ регенерировавшіе хобота, имѣвшіе всего около 0,3 мм. въ діаметрѣ (нормальный хоботъ достигаетъ у экземпляровъ средней величины 2,5 мм. въ діаметрѣ) и находилъ у нихъ всѣ органы на лицо.

Матеріалъ фиксировался различными жидкостями — всѣ онѣ дали одинаково хорошіе результаты. По большей части я употреблялъ смѣсь сулемы съ уксусной кислотой (5%) и слабую жидкость *Flemming's*.

Окраска производилась самыми простыми способами. Главнымъ образомъ я употреблялъ Carmalum, Hämalaun и гематоксилинъ Delafield'a съ послѣдующей окраской эозиномъ, пикриновой кислотой или ауранціей.

### Къ вопросу о происхожденіи регенерации. Первичный характеръ регенеративной способности.

*Enteropneusta* интересны въ томъ отношеніи, что даютъ намъ наглядное доказательство непригодности той теоріи, согласно которой регенерация является результатомъ постепенно выработаннаго приспособленія. Животное, постоянно терявшее, благодаря извѣстнымъ обстоятельствамъ, тѣ или другія части своего тѣла, путемъ естественнаго отбора выработало способность ихъ восстанавливать. Это возрѣніе, старающееся явленія регенерации подвести подъ дѣйствіе естественнаго отбора, принадлежитъ Вейсману (Weismann 02).

Противоположнаго взгляда держится Морганъ (Morgan 1901), Шульцъ (05) и др., собравшіе массу фактовъ, противорѣчащихъ теоріи Вейсмана и доказывающихъ, что

1) Съ подобной же быстротой, по словамъ Дистера, переднюю часть тѣла (стр. 251). Шульцъ, специально (Dyster 58) происходитъ восстановленіе «головы» изслѣдовавшій процессъ регенерации гельголандскаго *Phoronis hippocrepia*. По словамъ этого натуралиста, Phoronis, не говоритъ о столь быстромъ ходѣ процесса.

регенерация есть явление первичное, что «способность возстановлять утраченные части представляет первичное свойство живой материи» (Шульцъ, 05).

Дѣйствительно, мы знаемъ рядъ фактовъ, которые невозможно объяснить отборомъ. Такова, напр., описанная Morgan'омъ боковая регенерация *Lumbriculus*, регенерация ногъ пауковъ и другихъ членистоногихъ послѣ ампутаціи ихъ между сочлененіями (Шульцъ, Прибрамъ и др.) регенерация яицъ и личиночныхъ формъ, напр., *Actinotrocha* (Шульцъ) и *Pluteus* морскихъ ежей (Driesch).

Если бы способность къ регенерации вырабатывалась организмомъ путемъ отбора, какъ думаетъ Вейсманъ, то, разумѣется, въ результатѣ животное приобрѣло бы способность возстановлять только тѣ части, которыя оно, благодаря извѣстнымъ обстоятельствамъ, постоянно теряетъ.

Вейсманъ, между прочимъ, и указывалъ на тотъ фактъ, что внутренніе органы у позвоночныхъ, которые нормально не претерпѣваютъ поврежденій, не регенерируютъ. Однако, въ настоящее время мы знаемъ примѣры регенерации многихъ внутреннихъ органовъ млекопитающихъ, напр., регенерацию яичниковъ, мозга, селезенки и т. д.

Съ точки зрѣнія теоріи Вейсмана чрезвычайно поучительны тѣ случаи, когда животное въ естественныхъ условіяхъ постоянно претерпѣваетъ поврежденія въ строго опредѣленныхъ частяхъ тѣла.

Къ такимъ животнымъ относятся, между прочимъ, всѣ организмы, обладающіе способностью автотоміи, у которыхъ тѣ или другія части тѣла произвольно теряются въ опредѣленныхъ мѣстахъ. Въ этихъ то именно частяхъ тѣла и въ этихъ именно мѣстахъ и сосредоточена регенеративная способность такихъ организмовъ.

Сюда же также нужно отнести нѣкоторыхъ животныхъ, не обладающихъ способностью къ автотоміи, но въ нормальныхъ условіяхъ теряющихъ цѣлыя участки тѣла. Таковы нѣкоторые черви, напр., *Alciopre*. В. В. Заленскій любезно сообщилъ мнѣ, что большая часть собранныхъ имъ въ планктонѣ Мессинскаго пролива *Alciopre* находились въ состояніи регенерации передняго или задняго, а зачастую и обоихъ концовъ тѣла сразу. Очевидно, здѣсь отрываніе у червя цѣлыхъ участковъ туловища есть явление обычное, нормальное.

Къ числу такихъ животныхъ нужно отнести также и *Phoronis*, регулярно теряющихъ свои головы, которыя имъ (если вѣрно сообщеніе Согі, основанное на словахъ триестскихъ рыбаковъ) откусываютъ мелкія рыбы.

Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ Вейсманъ, дѣйствительно, могъ видѣть вліяніе естественнаго отбора на происхожденіе регенеративной способности. Животное, будучи постоянно принуждено терять опредѣленный участокъ своего тѣла, выработало способность его возстановлять. Тѣ же части, которыя у него никогда не ампутировались, этою способностью и не обладаютъ.

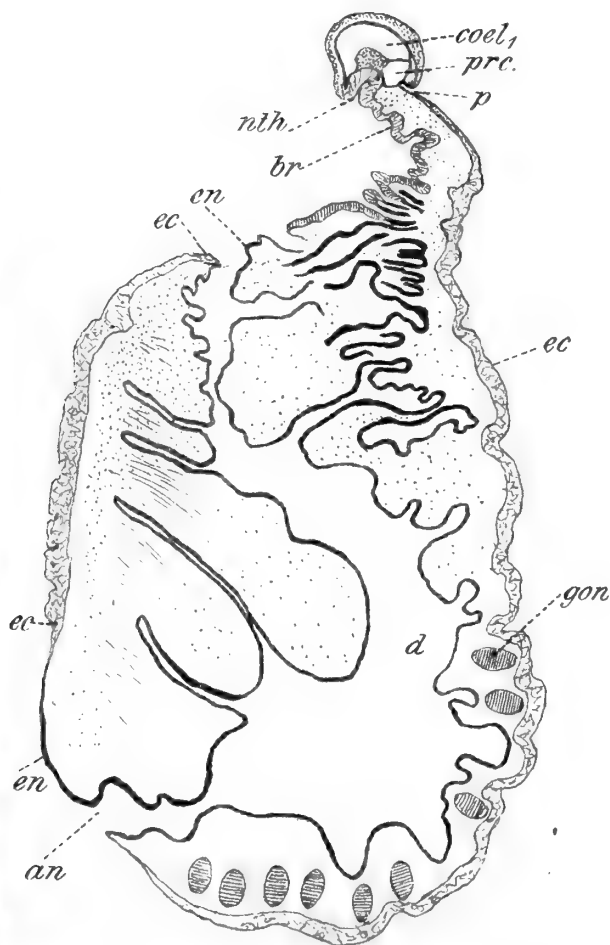
Чрезвычайно эффектный и убѣдительный примѣръ, противорѣчащій этой теоріи, представляютъ намъ *Enteropneusta*.

Кому приходилось имѣть дѣло съ этими животными, тотъ знаетъ, какъ трудно добыть совершенно цѣлые экземпляры ихъ. Драга обыкновенно приноситъ лишь обрывки, а именно переднія части тѣла, т. е. хоботъ съ воротникомъ и частью туловища. Задняя часть послѣдняго, именно хвостовой отдѣлъ, обыкновенно является оторванной. Вначалѣ я предполагалъ, что виною служитъ драга, разрывающая хрупкихъ животныхъ на куски, но скоро убѣдился въ противномъ. Очень часто можно наблюдать, что у вытасненныхъ со дна обрывковъ, въ задней части тѣла, а именно на поверхности разрыва, уже замѣчается полное заживление раны — поверхность разрыва сглажена — эпителий кишечника сросся съ наружными покровами.

Это обстоятельство показываетъ, что животное потеряло свою заднюю часть тѣла до своего плѣбненія, до того момента, когда попало въ драгу.



a.



b.

Рис. 1-й. a. Отрѣзокъ *Ptychodera* съ регенерировавшимъ хоботомъ. Животное было ампутировано въ жаберной области и въ области гонадъ. Хоботъ уже регенерировалъ вполнѣ, подъ нимъ намѣченъ воротникъ въ видѣ кольцевиднаго вздутія эктодермы. На заднемъ концѣ отрѣзка регенерации не происходитъ — кишечникъ открывается наружу на брюшной сторонѣ отрѣзка (благодаря смѣщенію спинной стороны).

b. Сагиттальный разрѣзъ черезъ отрѣзокъ, приведенный на рис. a. Zeiss obj. 35 ocul. 2. *coel*<sub>1</sub> — целомъ хобота; *prc* — перикардій; *nth* — нотохорда; *br* — жаберная область кишечника; *p* — нефридіальная пора; *an* — анус; *gon* — гонады; *en* — энтодерма; *ec* — эктодерма; *d* — кишечникъ.



Чтобы окончательно убедиться въ томъ, что *Enteropneusta* въ обычныхъ условіяхъ теряютъ задніе участки туловища, я доставалъ со дна моря руками, безъ помощи драги, ту траву, гдѣ живутъ *Enteropneusta*, со всевозможными предосторожностями разбиралъ ее, и въ результатѣ всегда оказывалось, что не болѣе 2% найденныхъ животныхъ были вполне цѣлы. Остальные бывали безъ хвостовыхъ участковъ.

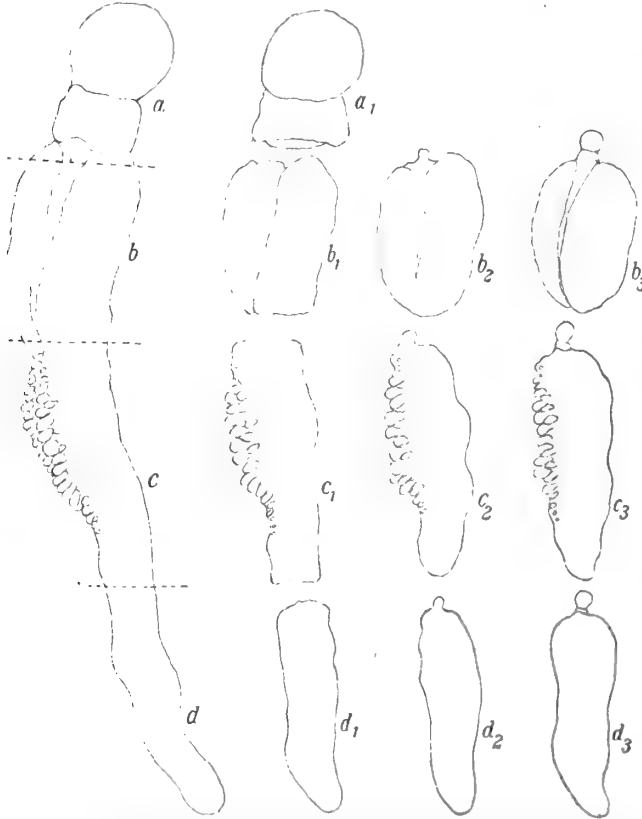


Рис. 2-й. Схема для поясненія общаго хода регенераціи при различныхъ способахъ ампутаціи *Ptychodera*.

У *Ptychodera* съ удивительною легкостью регенерируютъ переднія части тѣла, гдѣ бы ни была произведена ампутація, на заднемъ же концѣ настоящей регенераціи не наблюдается вовсе—происходитъ лишь заживленіе раны.

Если перерѣзать животное въ нѣсколькихъ мѣстахъ, то каждый кусокъ регенерируетъ всѣ недостающія переднія части тѣла, на задней же части куска наблюдаются лишь общіе процессы первичной регуляціи, въ результатѣ которыхъ стѣнка кишечника срастается съ эктодермой.

Если, напримѣръ, перерѣзать животное гдѣ нибудь въ верхней части жабернаго отдѣла и въ области гонадъ, то на переднемъ концѣ обрѣзка образуется и хоботъ и воротникъ, на заднемъ же регенераціи не произойдетъ—животное округлитъ поверхность раны

Очень рѣдко, наоборотъ, случалось мнѣ находить экземпляры съ оторванными передними концами. Изъ многихъ сотенъ экземпляровъ, бывшихъ въ моемъ распоряженіи, я всего два раза находилъ такихъ животныхъ, у которыхъ передняя часть находилась въ процессѣ восстановления.

Такимъ образомъ *Ptychodera* въ природныхъ, нормальныхъ условіяхъ почти всегда теряютъ задній конецъ тѣла и почти никогда не теряютъ передняго.

Согласно взглядамъ Вейсмана, мы должны были бы имѣть у *Enteropneusta* превосходно выраженную способность къ регенераціи задняго конца и отсутствіе регенераціи на переднемъ.

На самомъ же дѣлѣ мы находимъ совершенно обратное.

и апикс образуется здѣсь же, т. е. въ области гонадъ. Ни печеночныхъ мѣшковъ, ни хвостового конца такой обрѣзокъ не возстановляетъ. (Рис. 1-й *a* и *b*).

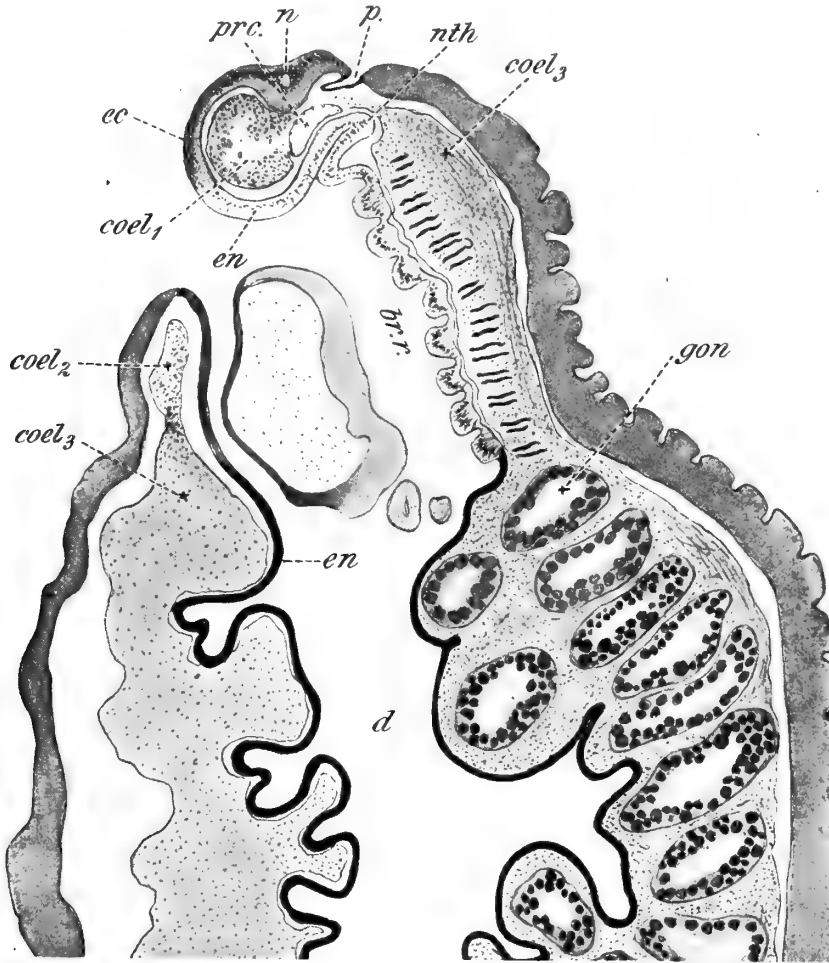


Рис. 3-й. Часть сагиттальнаго разрѣза черезъ регенерирующую *Ptychodera*, ампутированную на уровнѣ верхней части жаберной области. Leitz. Obj. 2, ocul. 1.

Хоботъ уже вполне образовался, воротника еще нѣтъ.

*ec*—эктодерма; *en*—энтодерма; *coel*<sub>1</sub>, *coel*<sub>2</sub>, *coel*<sub>3</sub>—целомы хобота, будущаго воротника и туловища; *prc*—перикардій; *p*—нефридальный каналъ съ порой; *nth*—нотохорда, ненормально изогнутая внизъ благодаря неестественному положенію хобота (онъ свѣшивается внизъ — быть можетъ вслѣдствіе недоразвитія скелета). *d*—кишечникъ; *gon*—гонады; *n*—инвагинировавшій участокъ эктодермы на дорзальной сторонѣ хобота (хоботной нервной пузырькъ).

Это тѣмъ болѣе странно, что процессъ возстановленія задней части тѣла, разумѣется, долженъ былъ бы быть несравненно легче, чѣмъ передней. При регенерации передняго конца должны возстановляться заново всѣ органы, тогда какъ для регенерации задней половины весь процессъ свелся бы къ простому росту (анастазу по терминологіи Шульца).

### Наружныя явленія при регенераціи.

Я уже говорилъ о той удивительной регенеративной способности, которую обладаетъ *Ptychodera*. Здѣсь я намѣренъ набросать картину вѣшнихъ процессовъ, имѣющихъ мѣсто во время регенераціи, т. е. то, что принято называть наружной регенераціей, или, лучше сказать, дифференцированіемъ наружной формы регенерата.

Разсмотримъ четыре основныхъ случая, представленныхъ на прилагаемой схемѣ (рис. 2-й).

Въ первомъ случаѣ (а) мы будемъ имѣть хоботъ съ воротникомъ. Регенераціи не происходитъ.

Во второмъ случаѣ (b) у насъ будетъ отрѣзокъ, состоящій изъ жаберной

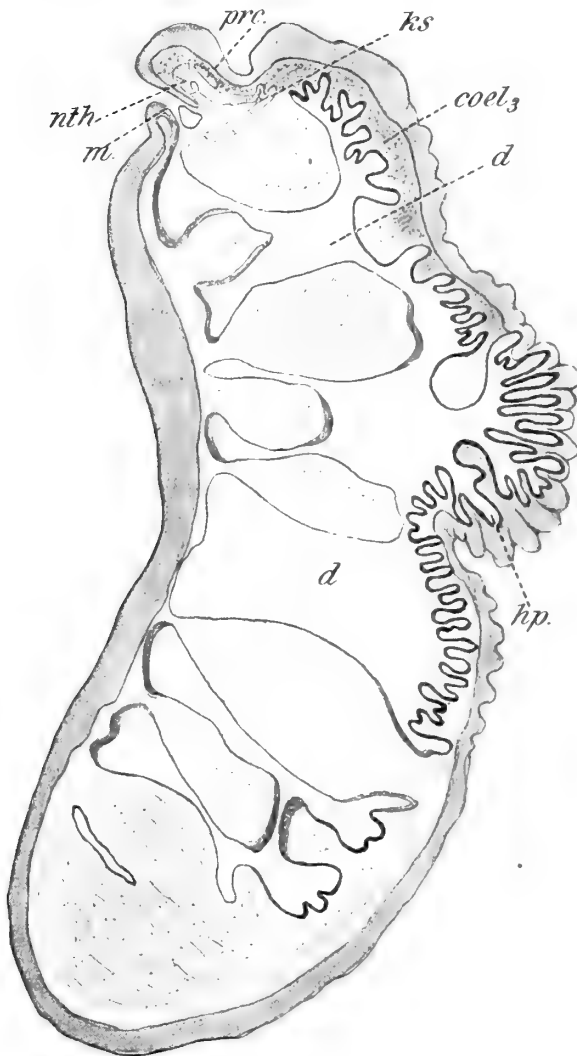


Рис. 4-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ *Ptychodera*, ампутированную въ задней части туловища, немного выше печеночной области. Хоботъ уже вполне дифференцировался, въ туловищной части идетъ процессъ образованія жаберныхъ мѣшковъ (*ks*), воротника же еще нѣтъ. Zeiss Obj. 35 ocul. 2.

*prc.*—перикардій; *nth*—нотохорда; *d*—кишечникъ; *hp*—печеночные придатки; *ks*—жаберные мѣшки; *m*—ротъ. Anus—на разрѣзъ не попалъ.

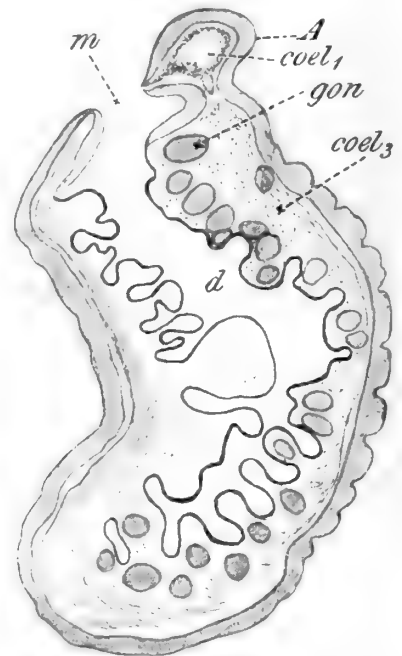


Рис. 5-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ *Ptychodera*, ампутированную въ области гонадъ.

Хоботъ (A) уже регенерированъ, воротника еще нѣтъ. A—хоботъ; *gon*—гонады; *d*—кишечникъ; *m*—ротъ; *coel3*—целомъ туловища; *coel1*—целомъ новаго хобота, внизу его перикардіальный пузырекъ. Нотохорда совершенно отсутствуетъ.

области и генитального отдѣла, въ третьемъ (c) — участокъ туловища съ печеночными мѣшками и, наконецъ, въ четвертомъ (d) — задній отрѣзокъ, т. е. хвостовой конецъ.

Какъ это ясно видно изъ схемы, ни въ одномъ изъ отрѣзковъ регенерации задняго конца не происходитъ.

Наоборотъ, всѣ отрѣзки регенерируютъ переднія части тѣла — хоботъ и воротникъ, причемъ всегда первымъ дифференцируется хоботъ, а затѣмъ уже воротникъ.

Такимъ образомъ при регенерации первый сегментъ появляется раньше второго. Мы увидимъ, что также обстоитъ дѣло и при онтогеніи.

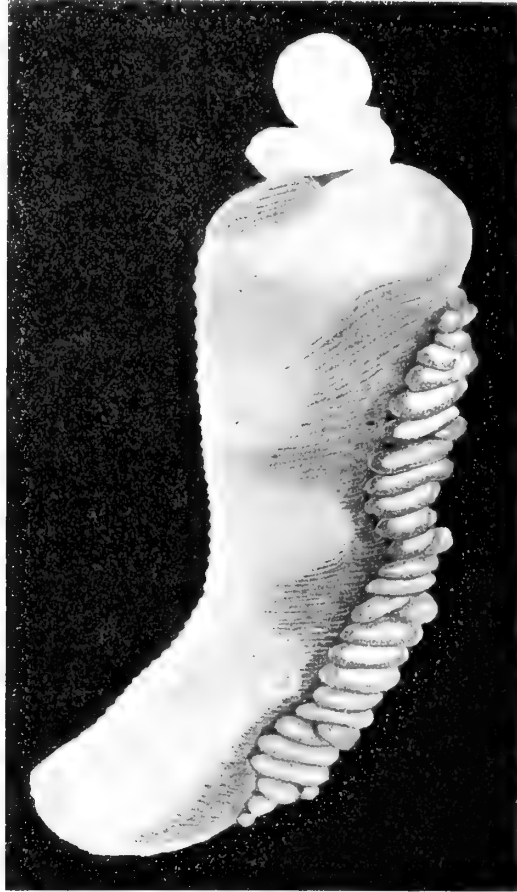
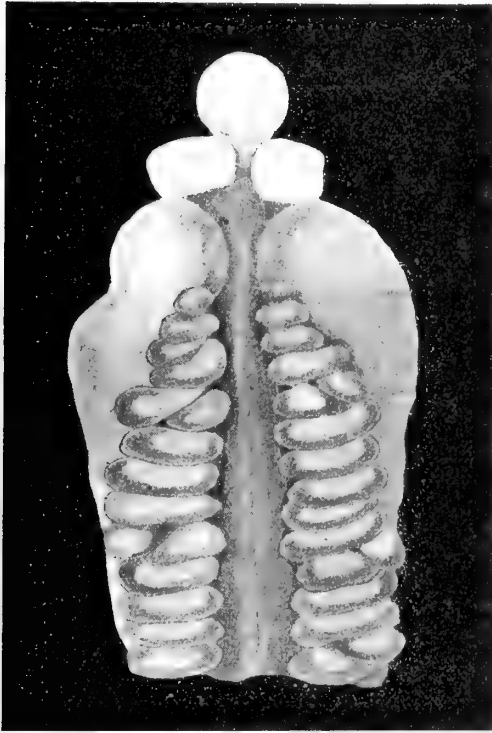


Рис. 6-й и 8-й. Регенерирующая *Ptychodera* съ дорзальной стороны (рис. 6-й) и сбоку (рис. 8-й). Животное было перерѣзано надъ печеночными придатками и въ хвостовомъ отдѣлѣ. Хоботъ вполне дифференцированъ, воротникъ тоже. На рис. 6-мъ виденъ нервный желобокъ воротника. Въ задней части отрѣзка регенерации не происходитъ.

Просматривая цѣлый рядъ рисунковъ, приведенныхъ здѣсь и въ слѣдующей главѣ и демонстрирующихъ процессъ регенерации, мы видимъ, что, когда только что начинаетъ дифференцироваться воротникъ, хоботъ уже является вполне дифференцированнымъ образованіемъ со всѣми характерными органами. Такъ, напр., рисунокъ 3-й даетъ ясное

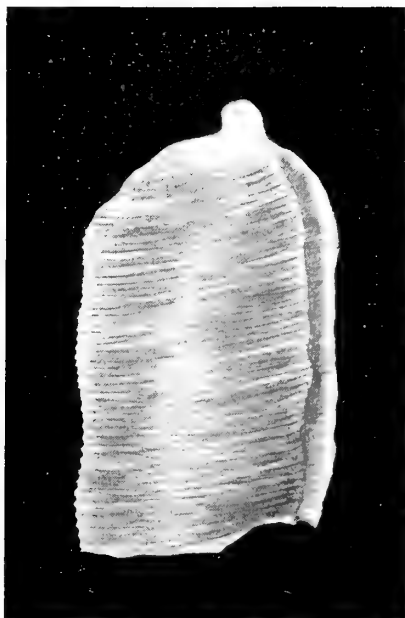
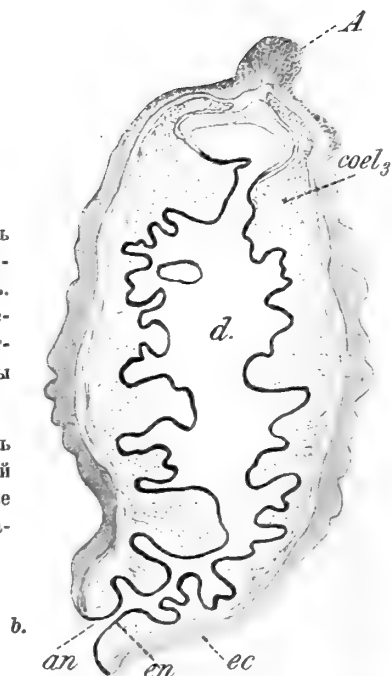


Рис. 9-й. *a*. Верхняя часть обрѣзка *Ptychodera*, регенерировавшей хоботъ. Ампутація была произведена ниже печеночнаго отдѣла (случай  $d_2$  схемы рис. 2-го).

*b*. Фронтальный разрѣзь черезъ соответственный обрѣзокъ (немного болѣе ранняя стадія). *A* — зачатокъ хобота.

*a*.



*b*.

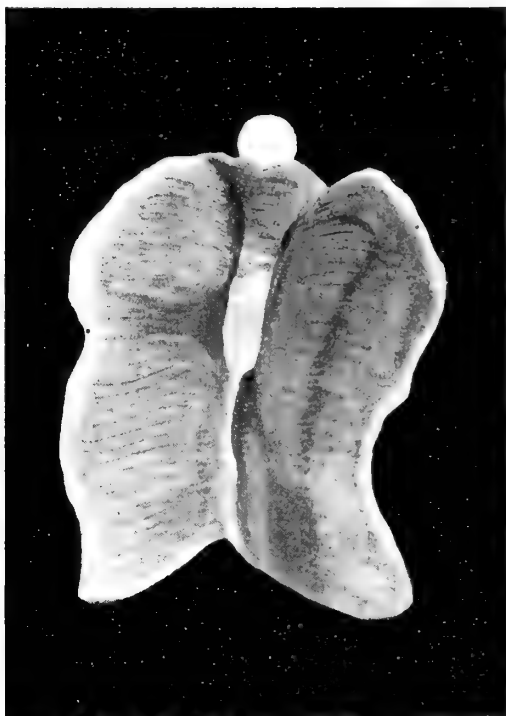


Рис. 10-й и 11-й. Регенерирующая *Ptychodera* съ дорсальной стороны (рис. 10) и сбоку (рис. 11). Ампутація была произведена въ верхней части генитальной области—сверху, и немного выше печеночныхъ придатковъ—внизу. Задній конецъ не изображенъ—регенерации здѣсь не происходитъ. Хоботъ вполне дифференцировался. Вороника еще нѣтъ. Рис. 5-й представляетъ сагиттальный разрѣзь черезъ подобный экземпляръ на той же стадіи и соответственнымъ образомъ ампутированный.

представленіе о ходѣ процесса. Передняя часть обрѣзка *Ptychodera*, ампутированной на уровнѣ жаберныхъ щелей, регенерировала только хоботъ. Воротника еще нѣтъ и слѣда, а хоботъ уже вполне дифференцированъ. Тоже самое можно наблюдать на многихъ другихъ рисункахъ.

Рис. 4-й и 5-й представляютъ собою сагиттальные разрѣзы черезъ обрѣзки *Ptychodera*, регенерирующихъ переднія части тѣла. На обоихъ рисункахъ ясно, гдѣ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ была произведена ампутація.

Выше помѣщенные рисунки (рис. 6—11) даютъ ясное представленіе о внѣшней формѣ регенерирующихъ обрѣзковъ на разныхъ стадіяхъ регенерации. Рисунки сдѣланы съ природы и хорошо передаютъ характеръ регенератовъ.

Рис. 6-й и 8-й изображаютъ случаи  $c_3$  вышеприведенной схемы, причемъ на рис. 6-мъ отрѣзокъ изображенъ со спинной стороны, а на рис. 8-мъ сбоку. Рис. 9-й соответствуетъ случаю  $d_2$  нашей схемы.

На рис. 10-мъ и 11-мъ изображены отрѣзки *Ptychodera*, соответствующіе случаю  $b_2$  схемы—со спинной стороны (рис. 10-й) и сбоку (рис. 11-й).

Всѣ вышеприведенные рисунки и схемы настолько инструктивны, что вдаваться въ какія-нибудь детальныя объясненія ихъ мнѣ кажется излишнимъ. Измѣненія наружной формы регенерата каждому сдѣлаются теперь совершенно ясными.

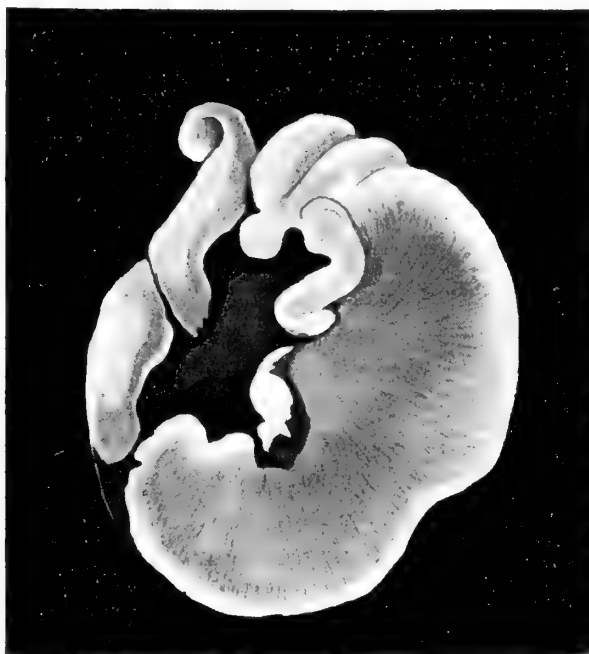


Рис. 7-й. Обрѣзокъ *Ptychodera* съ регенировавшимъ хоботомъ. Животное было ампутировано въ двухъ мѣстахъ—въ нижней части жаберной области и въ области гонадъ и затѣмъ разрѣзано вдоль на брюшной сторонѣ.

## ГЛАВА II.

Органогенезъ при регенераціи *Ptychodera*.

Прежде чѣмъ приступить къ описанію хода органогенетическихъ процессовъ при регенераціи, скажу нѣсколько предварительныхъ словъ въ видѣ предисловія къ этой главѣ.

Регенерація отдѣльныхъ органовъ у *Enteropneusta* представляетъ чрезвычайно сложный процессъ въ виду того разнообразія путей, которыми идетъ ихъ образованіе.

Нельзя начертить опредѣленной схемы регенераціи каждаго органа. Условія, при которыхъ совершаются регенеративные процессы, столь разнообразны, что нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что столь же разнообразными являются пути и способы регенераціи.

Моя задача состояла въ томъ, чтобы установить главные типы регенераціи каждаго органа и, мнѣ кажется, это мнѣ удалось, хотя и не безъ труда.

Я изложилъ процессъ образованія органовъ хобота при регенераціи въ томъ видѣ, какъ онъ мнѣ представляется на основаніи изученія нѣсколькихъ сотъ препаратовъ, сдѣланныхъ изъ *Ptychodera* на различныхъ стадіяхъ регенераціи.

Нельзя не отмѣтить, что отклоненія въ различныхъ направленіяхъ отъ указываемыхъ ниже общихъ способовъ регенераціи очень нерѣдки; можно даже сказать, что въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ приходится наблюдать что нибудь своеобразное — въ деталяхъ, въ мелочахъ процессъ варьируетъ до бесконечности. Но всѣ эти отклоненія отъ нормы не имѣютъ, какъ я въ этомъ убѣдился, особеннаго значенія — принципиально всѣ разнообразнѣйшіе пути сводятся къ нѣсколькимъ типамъ.

Всѣ упомянутыя отклоненія станутъ вполне понятны, если мы примемъ во вниманіе тѣ разнообразнѣйшія условія, въ которыхъ протекаетъ процессъ регенераціи. Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ нужно учесть всѣ эти условія, чтобы объяснить то или другое отклоненіе отъ нормы, а это задача пока невыполнимая. Да и установленіе самой этой нормы, того или другого типа регенераціи, возможно лишь при условіи допущенія возможности отклоненій въ самыхъ широкихъ предѣлахъ. Не нужно забывать, что мы изслѣдуемъ детали регенеративнаго процесса не на одномъ животномъ, а на сотняхъ различныхъ животныхъ — одну стадію мы изучаемъ на одномъ индивидуумѣ, находившемся въ однихъ условіяхъ, другую на другомъ, находившемся совершенно въ другихъ условіяхъ.

## Целомъ.

Я потратилъ много времени и труда, чтобы, какъ можно детальнѣе, изучить способы регенераціи целома при различныхъ условіяхъ, т. е. при различныхъ способахъ ампутаціи. Нужно замѣтить, что процессъ дифференцированія целома при регенераціи *Enteropneusta* представляетъ собою громаднѣйшій интересъ въ виду его своеобразности.

Прежде всего замѣчу, что въ противоположность нѣкоторымъ червямъ (напр. *Polychaeta*), у которыхъ, по изслѣдованіямъ цѣлага ряда авторовъ, при регенерации целомъ образуется вновь изъ элементовъ эктодермы, у *Ptychodera* при регенерации *новый целомъ никогда не закладывается заново, а всегда образуется путемъ разростанія целома старыхъ участковъ тѣла*. Ни эктодерма (наружные покровы), ни энтодерма (нотохорда, эпителий кишечника) никогда не принимаютъ участія въ процессѣ регенерации элементовъ целома. Какъ правило, не имѣющее исключеній, *новый целомъ при регенерации Enteropneusta есть всегда derivatъ стараго*<sup>1)</sup>.

Отмѣчу, что Шпенгель, также отрицалъ участіе энтодермы въ процессѣ регенерации целома хобота. Къ сожалѣнію авторъ ограничился только упомянутымъ отрицаніемъ и ничего не сообщаетъ о томъ, къ какому заключенію онъ пришелъ относительно того, откуда образуется целомъ хобота при регенерации.

Разсмотримъ здѣсь два случая, а именно: 1) регенерацию одного целома новообразующагося хобота при томъ условіи, что ампутация была произведена гдѣ нибудь на уровнѣ средней части воротника и 2) регенерацию целома и воротника и хобота. Въ последнемъ случаѣ животное, слѣдовательно, было ампутировано гдѣ нибудь въ туловищной части, т. е. ниже воротника, напр., гдѣ нибудь въ области жаберныхъ щелей, гонадъ и т. п.

При первомъ способѣ ампутации, въ передней части оставшагося обрѣзка остается; слѣдовательно, часть целома воротника, а также и туловищный целомъ въ видѣ перерѣзаннаго участка перихэмальныхъ полостей.

При второмъ способѣ ампутации, участокъ тѣла, которому предстоитъ регенерировать и хоботъ и воротникъ, содержитъ только остатокъ туловищнаго целома.

Наиболѣе простымъ и нагляднымъ является второй случай, съ котораго мы и начнемъ.

### **Образованіе целома хобота при ампутации въ туловищной части.**

Въ свою очередь мы можемъ различить здѣсь два самостоятельные типа дифференцированія целома, а именно:

- 1) Послѣ образованія небольшого эктодермическаго колпачка, т. е. зачатка хобота, между экто- и энтодермой врастаютъ справа и слѣва отъ медіанной линіи, т. е. со стороны лѣвой и правой половинокъ старой целомической полости — *два участка целома, въ видѣ вполне обособленныхъ образований, съ собственными стѣнками* (рис. 12-й).
- 2) Въ полость почки между эктодермой и слѣпымъ концомъ кишечника мигрируютъ *разрозненные элементы целенхимы* стараго целома въ видѣ беспорядочной массы клѣтокъ.

1) Замѣчу, что у нѣкоторыхъ Polychaeta, напр. *Saccocirrus*, я наблюдалъ такой же способъ образованія целома при регенерации. Также обстоитъ дѣло по моимъ наблюденіямъ у *офиуръ* (Dawydoff, 1901), и по наблюденіямъ Иванова у *Lumbriculus*.



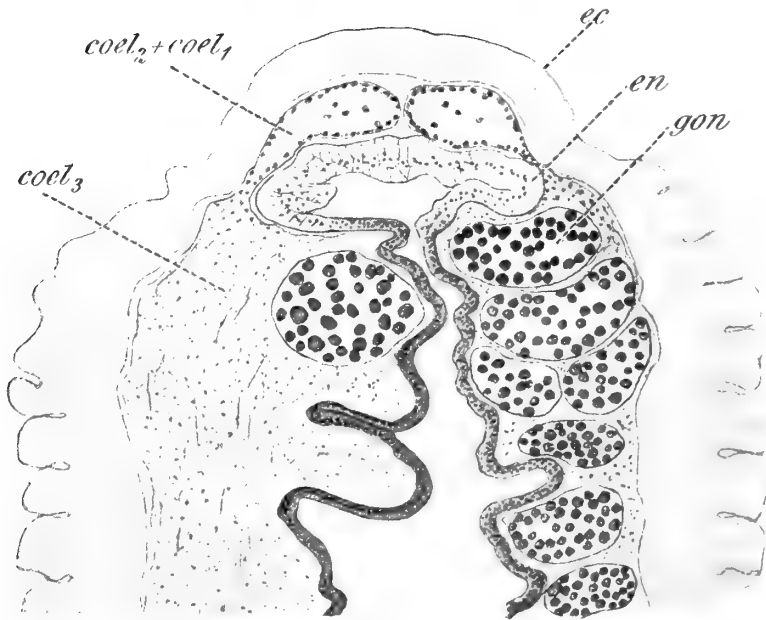


Рис. 12-й. Фронтальный разрезъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*, ампутированной на уровнѣ гонадъ. Самыя первыя стадіи регенерации. *coel*<sub>1</sub> + *coel*<sub>2</sub> — общій зачатокъ целома хобота и воротника; *coel*<sub>3</sub> — целомъ туловища; *ec* — эктодерма; *en* — энтодерма; *gon* — гонады. Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

Впрочемъ, оба процесса приводятъ къ одному и тому же результату — полость почки, т. е. пространство между экто- и энтодермой, заполняется целенхимой, которая ничѣмъ не отличается гистологически отъ целенхимы старыхъ участковъ тѣла животного. Въ полости новообразующаго хобота на самыхъ раннихъ стадіяхъ мы находимъ, слѣдовательно, вполне дифференцированную соединительную ткань съ мышечными волокнами etc.

Только при дальнѣйшемъ ходѣ регенерации начи-

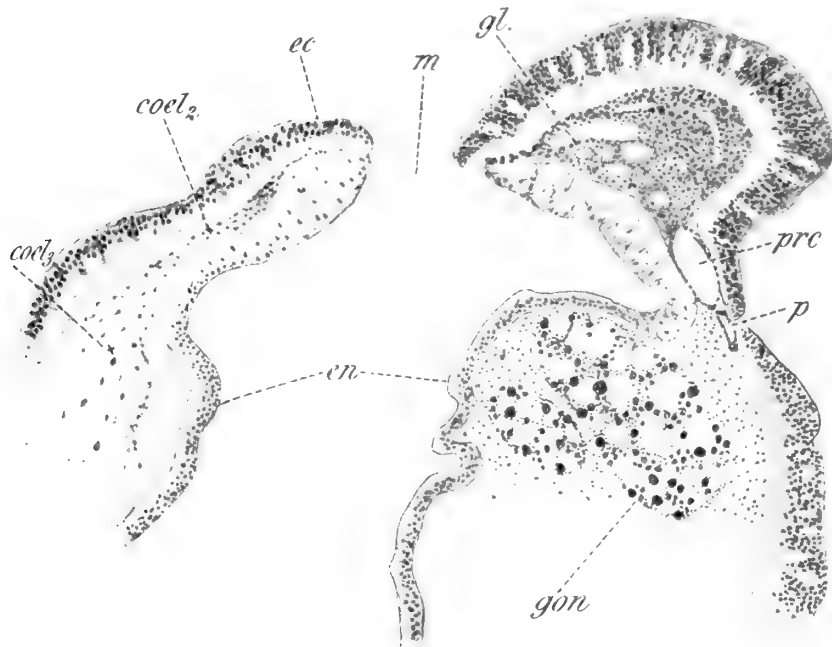


Рис. 13-й. Часть сагиттального разреза черезъ *Ptychodera*, регенерирующую хоботъ. Животное было ампутировано въ области гонадъ. *ec* — эктодерма; *en* — кишечникъ; *coel*<sub>3</sub> — целомъ туловища; *coel*<sub>2</sub> — целомъ будущаго, еще не обособившагося воротника; *prc* — перикардій; *gl* — glomerulus (начинаетъ обособляться въ целенхимѣ; *p* — нефридіальная пора; *m* — ротъ; *gon* — гонады. Zeiss Obj. 16, ocul. 4.

нается удивительный, загадочный процессъ передифференцировки элементовъ старой целенхимы, заполнившей молодой хоботъ.

Попавшія въ полость почки мышечныя и соединительно-тканныя волокна распадаются и поѣдаются свободными элементами целенхимы, принимающими на время роль фагоцитовъ. Эти клѣтки разбухаютъ, превращаются въ громадные шары, внутри которыхъ на описываемыхъ стадіяхъ можно наблюдать кусочки мышць и массу мелкихъ и крупныхъ зернышекъ и сильно преломляющихъ свѣтъ вакуолекъ, которыя я разсматриваю, какъ результатъ перевариванія заглоченныхъ частицъ клѣтокъ.

На нѣкоторыхъ стадіяхъ регенерациі целомической полости хобота, послѣдняя представляетъ изъ себя сплошную массу такихъ шарообразныхъ, громадныхъ клѣтокъ (рис. 14-й). Заглоченные мышечные фрагменты скоро исчезаютъ, ихъ уже не видно внутри плазмы упомянутыхъ клѣтокъ. Сами эти клѣтки къ этому времени вполнѣ принимаютъ эмбріональный характеръ. Онѣ имѣютъ теперь видъ недифференцированныхъ круглыхъ тѣлецъ, съ однимъ ядромъ и начинаютъ располагаться по периферіи полости хобота, выстилая неравномѣрнымъ слоемъ внутреннюю поверхность эктодермы. Этотъ процессъ виденъ на томъ же рис. 13-мъ. Внутри полости еще долго остаются скопленія передифференцированныхъ целенхиматочныхъ элементовъ. Кое гдѣ, но очень рѣдко, въ ядрахъ этихъ клѣтокъ можно замѣтить каріокINETическія фигуры.

Почти тотчасъ по окончаніи процесса возвращенія элементовъ целенхимы, мигрировавшей въ регенеративную почку, къ эмбріональному состоянию, начинается процессъ дифференцировки этихъ новыхъ элементовъ целома (рис. 15-й).

Клѣтки изъ круглыхъ дѣлаются веретенообразными—отростки ихъ удлинняются, возникаютъ новые. Въ результатѣ, въ целомѣ новаго хобота мы имѣемъ двоякаго рода элементы. Часть ихъ скопляется на периферіи, образуя выстилку целомической полости, другая часть остается въ центрѣ полости. Отростки этихъ послѣднихъ клѣтокъ удлинняются, превращаются въ длинныя волокна и, наконецъ, сами упомянутыя клѣтки образуютъ комплексы характерныхъ для хобота *Enteropneusta* мышць, пронизывающихъ полость хобота отъ вершины до основанія.

Такимъ образомъ, на извѣстныхъ стадіяхъ развитія вновь образовавшійся целомъ

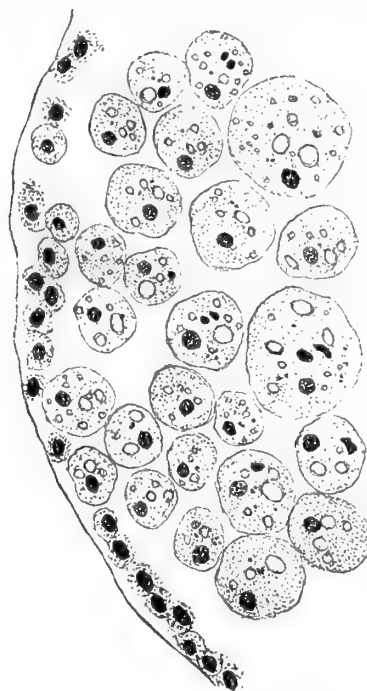


Рис. 14-й. Часть целома регенерирующаго хобота (взятъ при сильномъ увеличеніи участокъ срѣза, изображеннаго на рис. 3). Zeiss Obj. Hom. Imm. Obj. 1,5, ocul. 4.

хобота имѣетъ видъ замкнутого пузыря съ прекрасно выраженной полостью, внутри которой плаваютъ изолированные клѣточные элементы (рис. 16, 27, 23). Такой именно характеръ имѣетъ хоботной целомъ и при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta*.

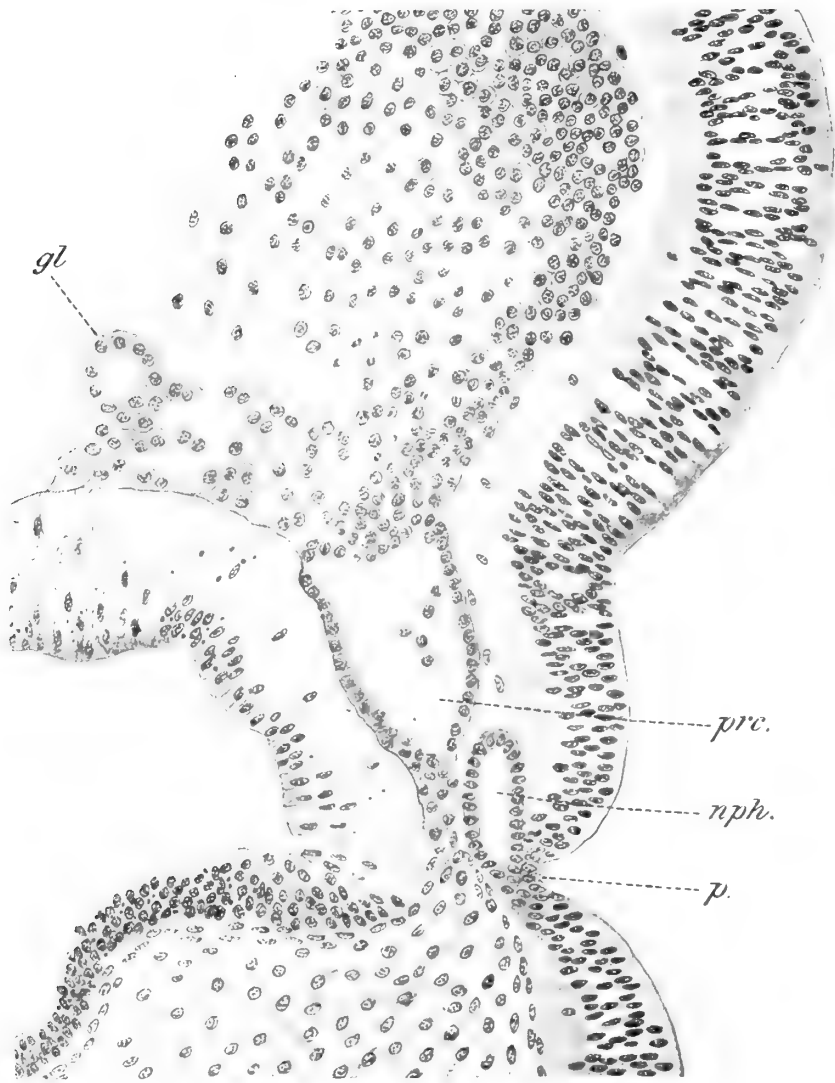


Рис. 15-й. Часть сагиттальнаго разрѣза черезъ регенерирующий хоботь *Ptychodera*. *gl*—glomerulus; *prc.*—перикардій; *prh.*—эктодермальный нефридіальный каналъ; *p.*—пора нефридія. Zeiss Obj. 4 ocul. 2.

У взрослыхъ *Enteropneusta* почти всегда (исключеніе составляетъ *Protobalanus koehleri* Mesnil & Caullery и *Harrimania maculata* Ritter) целомические полости заполнены соединительною тканью.

При регенерации очень долго целомъ хобота и воротника сохраняютъ эмбриональный характеръ. Просмотрѣвъ всѣ рисунки, приведенныя мною въ этой главѣ, можно видѣть, что почти всюду, почти на всѣхъ стадіяхъ, полость въ новообразовавшемся целомѣ чрезвычайно ясно выражена. (Рис. 1, 16, 21, 23, 27, 33, 35, 53 и др.).

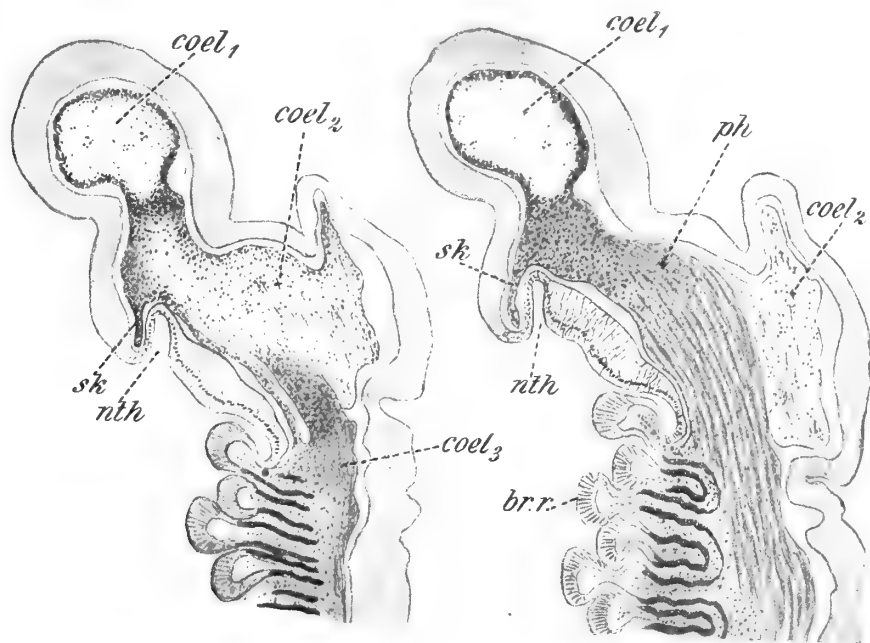


Рис. 16-й. Дорзальные участки двухъ сагиттальныхъ разрѣзовъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Ампутація была произведена посрединѣ воротника. *coel*<sub>1</sub>, *coel*<sub>2</sub>, *coel*<sub>3</sub>—целомы хобота, воротника и туловища. Видно образование целома воротника въ передней, регенерирующей его части; *nth*—нотохорда; *sk*—скелетъ хобота; *ph*—перихемальные полости; *br.r.*—жаберная область кишечника. Zeis. Obj. 16 ocul. 2.

На нѣкоторыхъ рисункахъ, правда, она сплошь заполнена целенхимой, но не нужно забывать что при регенерации, какъ было описано выше, целомъ хобота бываетъ заполненъ целенхимой въ первые и послѣдніе стадіи своей эволюціи, но только въ первомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло со старой целенхимой, дифференцировавшейся еще во время эмбриональнаго развитія данного животнаго, а во второмъ—съ целенхимой новой, образовавшейся уже путемъ передифференцировки элементовъ старой.

Такимъ образомъ, въ рассматриваемомъ случаѣ старая целенхима, мигрировавъ въ почку, образуетъ въ немъ сперва целомъ хобота. Когда уже целомъ хобота дифференцировался, то ниже лежащая масса целенхимы образуетъ два целома воротника.

Воротниковый целомъ образуется зачастую путемъ самостоятельнаго отшнурованія отъ каждаго целома туловища соответственнаго пузырька. (Рис. 13, 24, 36, 48).

Такой же процессъ, какъ мы видѣли, имѣетъ мѣсто и при образованіи целома хобота. Тѣ два участка туловищнаго целома, которые, какъ это видно на рис. 12-мъ, вростають съ

обѣихъ сторонъ въ начинающуюся образовываться почку, представляютъ собою, въ сущности говоря, общій зачатокъ будущихъ целомовъ и хобота и воротника. А именно, дистальные концы этихъ участковъ отшнуровавшись и слившись въ одно образование дадутъ непарный целомъ хобота, послѣ чего оставшаяся часть, не пошедшая на образование хоботнаго целома, дастъ материалъ для образованія целома воротника. Каждый участокъ — даетъ въ результатѣ соответственную половину воротниковаго целома.

### Образованіе целома хобота при томъ условіи, что животное ампутировано посрединѣ воротника.

При первомъ разсмотрѣнномъ нами случаѣ, целомъ регенерирующаго хобота могъ образоваться только изъ элементовъ туловищнаго целома, ибо только таковой и былъ въ наличности въ отрѣзкѣ въ области регенеративныхъ процессовъ.

Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть, откуда и какимъ образомъ возникаетъ целомъ въ регенерирующемъ хоботѣ въ томъ случаѣ, если въ районѣ, примыкающемъ къ тому мѣсту, гдѣ была произведена ампутація, имѣется, кромѣ целома воротника, еще два участка целома туловища — въ видѣ участковъ перихэмальныхъ полостей.

Подробное изслѣдованіе выяснило, что въ данномъ случаѣ въ процессѣ образованія новаго целома регенерирующаго хобота принимаютъ участіе не только эти перихэмальныя полости, какъ я это предполагалъ раньше <sup>1)</sup>, но и целомъ воротника.

Какъ и въ первомъ изъ разсмотрѣнныхъ нами случаевъ, полость образующейся регенеративной почки наполняется целенхимой. Эта целенхима вростаетъ въ почку сразу, какъ только закроется рана.

На рис. 17-мъ изображающемъ одну изъ первыхъ стадій регенерации целома хобота *Ptychodera*, совершающейся при указанныхъ условіяхъ ампутаціи, новообразовавшаяся почка уже сплошь заполнена вросшей внутрь целенхимой. При изученіи ряда послѣдовательныхъ срѣзовъ той же серіи выясняется, что эта целенхима вростаетъ въ видѣ двухъ самостоятельныхъ комплексовъ. На рис. 17-мъ видно, что внутрь будущаго хобота вростаетъ часть перихэмальнаго канала (*ph*). Изучая послѣдовательно рядъ срѣзовъ той же серіи соответственной стадіи, мы приходимъ къ убѣжденію, что и целенхима целома воротника тоже участвуетъ въ процессѣ заполнения полости хобота (рис. 18-й).

Оба зачатка целенхимы сливаются затѣмъ внутри послѣдняго въ одну массу, въ которой находятся волокна соединительной ткани, куски мышцъ изъ старыхъ перихэмальныхъ полостей на разныхъ стадіяхъ разрушенія, масса свободныхъ клѣтокъ, а также тѣ своеобразныя образования, которыя Шпенгель (Spengel 93), а также Мениль и Коллери (Mehnil & Caullery, 06) считаютъ одноклѣточными паразитами (*Haplosporidiae*) (рис. 19-й и 20-й).

1) С. Dawydoff. Zool. Anzeiger. Bd. XXV, p. 553.

Дальнѣйшая дифференцировка целома регенерирующаго хобота происходитъ совершенно тѣмъ же путемъ, какъ это уже было описано для предъидущаго случая.

Происходитъ процессъ передифференцировки элементовъ старой целенхимы, заполняющей теперь полость регенеративной почки.

Клѣтки, передифференцировавшіяся и приобрѣвшія эмбриональный характеръ, располагаются по периферіи образовавшагося пузырька. Въ целомѣ образуется ясная полость, въ которой плаваютъ свободныя веретенообразныя клѣтки. Словомъ, целомъ хобота приобретаетъ эмбриональный характеръ (рис. 23, 35).

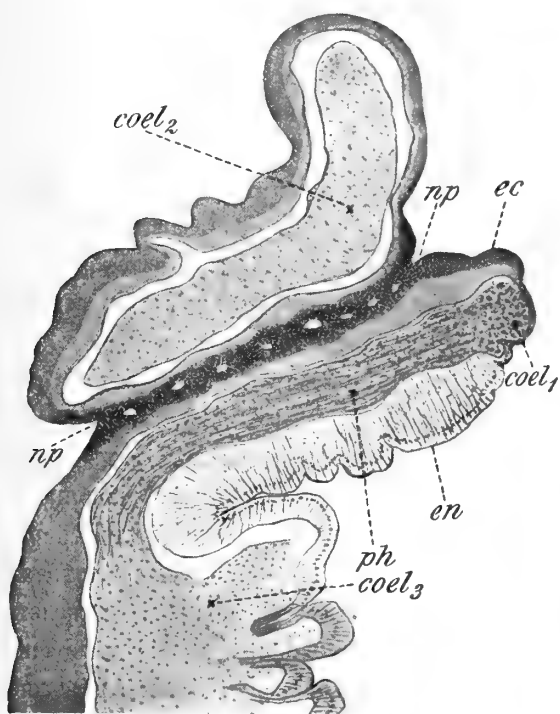


Рис. 17-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть *Ptychodera* на самой ранней стадіи регенерации хобота. *ph*—перихэмальные полости; *coel3*—целомъ туловища; *coel2*—целомъ воротника; *coel1*—будущій целомъ хобота (мигрирующая целенхима изъ перихэмальныхъ полостей) *np*—невропоръ; *en*—энтодерма. Zeiss. Obj. 16, ocul 2.

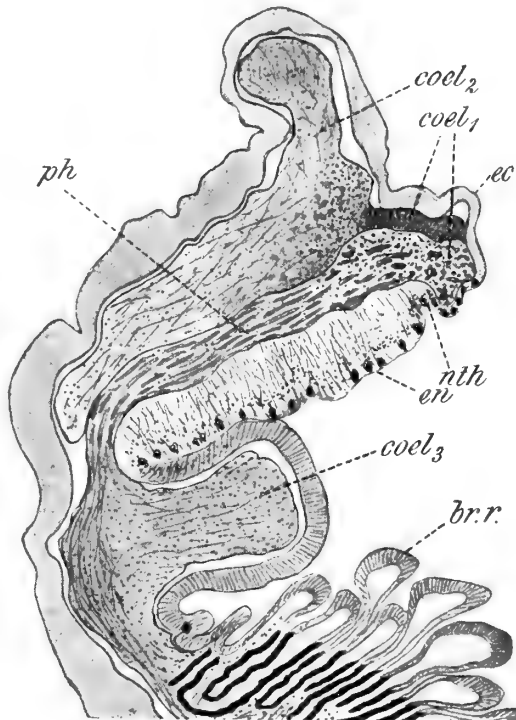


Рис. 18-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*—изъ той же серии, что и срѣзъ рис. 17. *nth*—нотохорда; *br.r.*—жаберная область кишечника. Zeiss. Obj. 16, ocul 2.

Замѣчу, что иногда еще до востанія внутрь регенеративной почки целенхимы, элементы ея уже начинаютъ передифференцировываться. Спустя немного времени послѣ ампутации, во время процесса заживленія раны (т. е. срастанія энтодермы съ эктодермой) на дистальныхъ концахъ перихэмальныхъ каналовъ, т. е. въ области раны—замѣчается процессъ молодѣнія клѣтокъ, заключающійся въ томъ, что въ области ампутации скопляются

элементы, носящіе эмбриональный характеръ. Въ то время, какъ въ ниже лежащихъ частяхъ перихэмальныхъ каналовъ, послѣдніе состоятъ изъ массы мышечныхъ элементовъ, на дистальныхъ концахъ ихъ скопляются округлыя кѣтки съ крупными ядрами, въ которыхъ хорошо выражена хроматиновая сѣть. Кѣтки эти имѣютъ ясныя контуры и слой ихъ рѣзко отграниченъ отъ ниже лежащихъ элементовъ.

Подчасъ, целенхима перихэмальныхъ полостей, вросшая вмѣстѣ съ элементами целен-

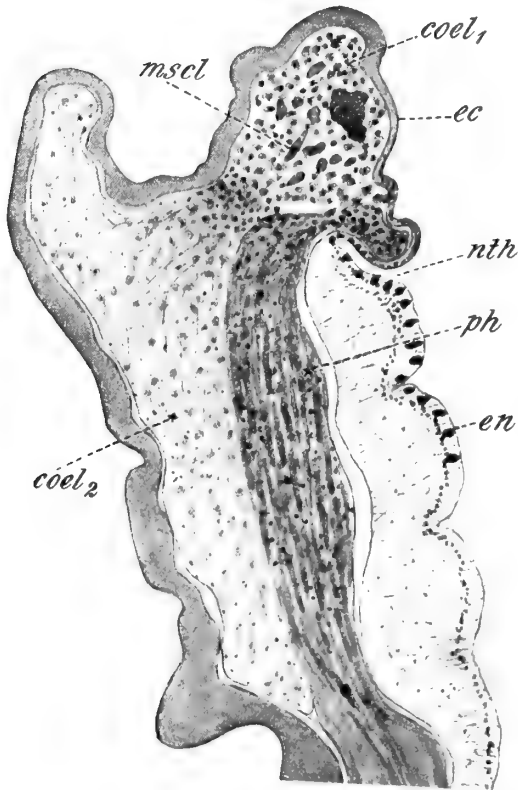


Рис. 19-й. Часть срѣза черезъ *Ptychodera* на раннихъ стадіяхъ образованія хобота. Въ обособившуюся почку мигрируетъ целенхима изъ целома туловища, т. е. перихэмальныхъ полостей (*ph*) и целома воротника (*coel*<sub>2</sub>). Въ целенхимѣ, заполнившей новый хоботъ, видны кусочки мышцъ (изъ перихэмальныхъ полостей) — *mscl*, образовавшихъ мѣстами цѣлые комки. *nth* — нотохорда; *ec* — эктодерма. Zeiss. Obj. 16, ocul. 2.

ротниковаго целома сводится, разумѣется, къ простому разрастанію целенхимы оставшейся части воротника вмѣстѣ съ перитонеальной оболочкой внутрь соответственнаго эктодермального зачатка (рис. 16 *coel*<sub>2</sub>).

химы целома воротника въ зачатокъ хобота, не вполне смѣшивается съ целенхимой воротника, а дифференцируется самостоятельно. Именно, дистальный конецъ вросшаго комплекса целенхиматозныхъ элементовъ перихэмальныхъ полостей направляется вдоль энтодермальной стѣнки, т. е. огибаетъ дистальный конецъ нотохорды, вращается въ пространство образовавшееся между стѣнкой нотохорды и эктодермой и даетъ здѣсь происхождение скелетной пластинкѣ.

Этотъ процессъ ясно виденъ на рисункахъ 19-мъ, 23-мъ и 16-мъ.

Рисунокъ 16-й представляетъ собою два, близко другъ отъ друга лежащихъ, разрѣза черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. На этихъ разрѣзахъ участіе целенхимы въ образованіи скелета хобота видно очень ясно, но здѣсь еще нельзя рѣшить вопроса относительно исключительнаго участія именно целенхимы перихэмальныхъ полостей въ этомъ процессѣ.

Этотъ вопросъ вполне выясняется препаратомъ, изображеннымъ на рис. 23-мъ.

Въ разбираемомъ случаѣ, т. е. при условіи ампутаціи въ области воротника — способъ регенераціи отрѣзанной части во-

## Базальная перепонка.

Мнѣ осталось сказать еще нѣсколько словъ о той базальной перепонкѣ («Grenzmembran», или «Basalmembran» авторовъ), которая всегда сопровождаетъ целомическія образованія *Enteropneusta*.

У взрослыхъ формъ она представляетъ изъ себя безструктурное образованіе, которое образуется по мнѣнію Шпенгеля (Spengel 93, стр. 450—452) отчасти насчетъ эпидермы, отчасти насчетъ мускульнаго слоя.

При регенерациі она наблюдается на самыхъ раннихъ стадіяхъ и выражена чрезвычайно ясно.

Обращаю вниманіе на то обстоятельство, что эта базальная перепонка не является здѣсь безструктурнымъ образованіемъ — въ ней ясно видны ядра. Рисунки 27-й и др. убѣдительно доказываютъ клѣточную структуру базальной перепонки.

Я не могъ прослѣдить шагъ за шагомъ процессъ дифференцированія этого образованія, но для меня несомнѣнно, что базальная перепонка не имѣетъ ничего общаго съ наружными покровами.

При регенерациі она, или растетъ изъ остатковъ старой базальной перепонки, или же образуется изъ особыхъ мезодермальныхъ клѣтокъ, повидимому, не имѣющихъ связи съ целенхимой. Я рассматриваю эту оболочку, какъ особый видъ мезенхимы, гомологичной, такъ называемой *Mesenchymmembran* личинокъ *Echiurus* (Salensky, 76 и 05, стр. 64—67).

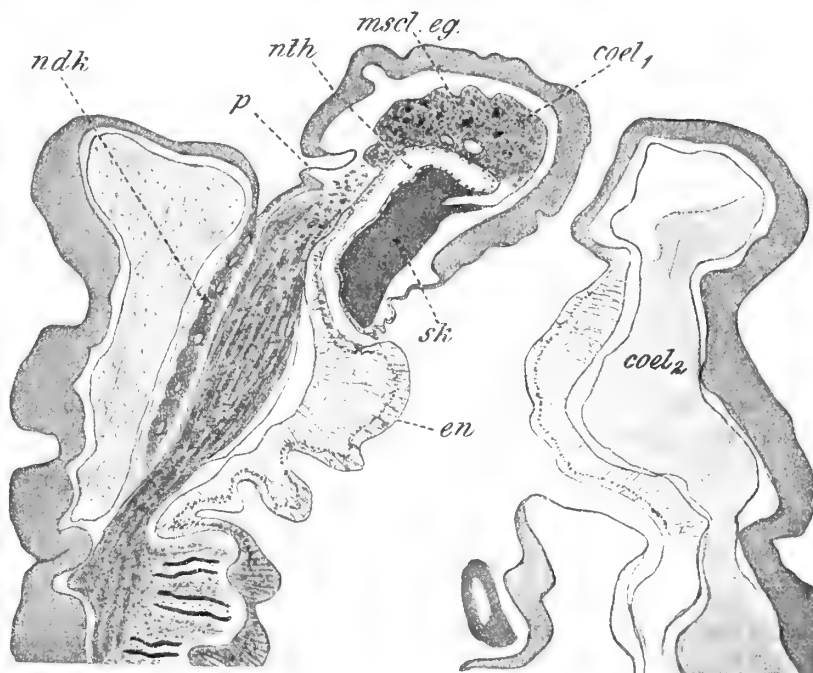


Рис. 20-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Ампутація была произведена въ передней части воротника. *ndk* — нервъ воротника (трубка); *p* — нефридіальный каналь; *nth* — нотохорда; *coel1* — целенхима хоботнаго целома съ мигрировавшими изъ стараго целома кусочками мышцъ etc., находящимися въ періодъ дегенерациі (*mscl. deg.*); базальная перепонка, покрывающая целомъ хобота, находится въ тѣсномъ общеніи съ мощнымъ скелетомъ (*sk*), нижняя часть котораго представляетъ собой участокъ стараго скелета, остававшася въ отрѣзкѣ послѣ ампутаціи. Zeiss. Obj. 16, ocul. 4.



Замѣчу, что даже у вполне нормальныхъ животныхъ (*Ptychodera minuta*) случается наблюдать клѣточное строеніе Basalmembran, въ видѣ тонкой пленки, покрывающей целомъ хобота и состоящей изъ плоскаго эпителия съ рѣдко разбросанными ядрами.

Скажу тутъ же нѣсколько словъ объ аналогичномъ образованіи у *Phoronis*.

Здѣсь эта базальная перепонка, повидимому, тоже превосходно выражена. Интересно, что Benham тоже описываетъ въ ней ядра, но послѣдній изслѣдователь *Phoronis*, Selys Longschamp (07) относится къ этому отрицательно. Впрочемъ, изъ описанія этого автора отчасти видно, что онъ тоже наблюдалъ у *Ph. hippocrepia* на срѣзахъ «des cellules apparemment logées dans la membrane basale», но эти картины опъ истолковываетъ въ томъ смыслѣ, что: «ces cellules n'avaient pas perdu tout rapport avec la couche péritonéale» (стр. 42. Тоже на стр. 221<sup>1)</sup>).

Замѣчу, что на нѣкоторыхъ рисункахъ Корн, (Corti, 90) ядра внутри Basalmembran выступаютъ съ чрезвычайной отчетливостью.

#### Скелеть хобота.

Скелетная пластинка, поддерживающая хоботъ, представляетъ изъ себя по мнѣнію цѣлаго ряда авторовъ (Шимкевичъ, Sprengel, Caullery & Mesnil и др.) ни что иное, какъ мѣстное утолщеніе базальной перепонки.

Я совершенно согласенъ съ этимъ мнѣніемъ, хотя и вношу нѣкоторыя дополненія къ этому взгляду на морфологию описываемаго органа.

При образованіи скелета хобота во время его регенерации, этотъ органъ всегда тѣсно связанъ 1) съ базальной перепонкой и 2) съ целенхимой.

Связь между базальной перепонкой и скелетомъ хобота въ началѣ его дифференцированія ясно выступаетъ на рис. 21-мъ, представляющемъ часть сагиттальнаго срѣза черезъ хоботъ въ самомъ началѣ закладки скелетной пластинки.

Мы видимъ, что скелеть на этой стадіи представляетъ собою складку базальной перепонки (ясно клѣточной структуры). Въ указанномъ мѣстѣ перепонка эта начинаетъ деформироваться. Вокругъ ея ядеръ выдѣляется специфическое, сильно красящееся гематоксилиномъ, хитиноподобное, безструктурное вещество, которое хорошо видно внизу срѣза.

На этомъ же рисункѣ виденъ и другой процессъ, связанный съ образованіемъ скелета, а именно—мигрированіе внутрь складки базальной перепонки целенхиматозныхъ клѣтокъ. Эти клѣтки тоже принимаютъ участіе въ образованіи скелета (рис. 22-й).

Участіе целенхимы въ образованіи скелета хобота въ особенности рельефно выступаетъ на рисункахъ 16, 19, 23, 24 и 36-мъ.

1) Привожу слова Сели Лонгшана полностью: | j'ai toujours cru pouvoir me convaincre que ces cellules  
«Quand chez *Ph. hippocrepia* j'ai rencontré des cel- | dépendaient en réalité du revêtement péritonéal sousja-  
lules apparemment situés dans l'épaisseur de la substance, | cent».

На рис. 23-мъ, напримѣръ, ясно виденъ процессъ миграціи целенхимы изъ полости перихэмального канала въ щель между нотохордой и эктодермой хобота для образованія скелета.

Тоже самое можно наблюдать и на рис. 16-мъ и 19-мъ.

Такимъ образомъ въ образованіи скелетной пластинки хобота принимаютъ участіе и базальная перепонка и целенхима.



Рис. 21. Первая стадія образованія скелета хобота при регенерации. Zeiss. Obj. 3, ocul. 4.

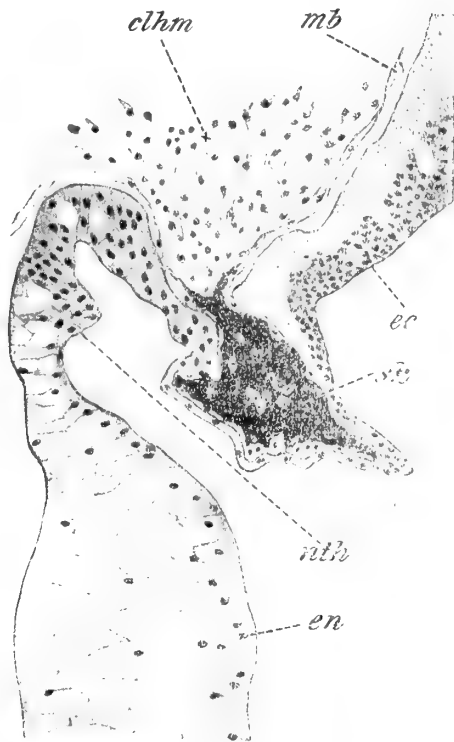


Рис. 22-й. Часть сагиттального разрёза черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. На рисунокъ попала нотохорда съ частью эктодермы хобота. Между ними виденъ процессъ образованія скелета (*sk*) *chlm* — целенхима; *mb* — базальная перепонка. Zeiss. Obj. 4, ocul. 2.

Иногда базальной перепонки не видно и скелетъ образуется исключительно путемъ охрящевѣнія клѣтокъ целенхимы (рис. 36-й).

Во всякомъ случаѣ въ началѣ своего образованія скелетъ хобота всегда представляетъ собою клѣточную массу, а не есть продуктъ выдѣленія, или, какъ часто выражаются, выпотѣванія, эктодермы, или нотохорды.

Съ нотохордой скелетъ не связанъ ни на одной стадіи своего развитія, равно какъ и съ эктодермой.

Для меня является несомнѣннымъ, что тѣ клѣточные элементы, которые были наблю-

даемы, напр. у *Gl. talaboti*, Шпенгелемъ (Spengel, 93) и Мариономъ (Marion, 86) внутри скелета хобота, а также нерѣдко наблюдаются и у *Pt. minuta* Ков., представляютъ изъ себя остатки целенхимальныхъ клѣтокъ.

Такимъ образомъ мнѣніе, высказываемое многими авторами и попавшее даже въ учебники (Delage & Hérouard)<sup>1)</sup>, относительно эктодермальной природы этихъ элементовъ, должно быть оставлено.

### Перихэмальные полости.

Мои наблюденія относительно этихъ, столь характерныхъ для Enteropneusta, образований<sup>2)</sup> довольно отрывочны. Нѣкоторые препараты убѣдительно говорятъ за образование

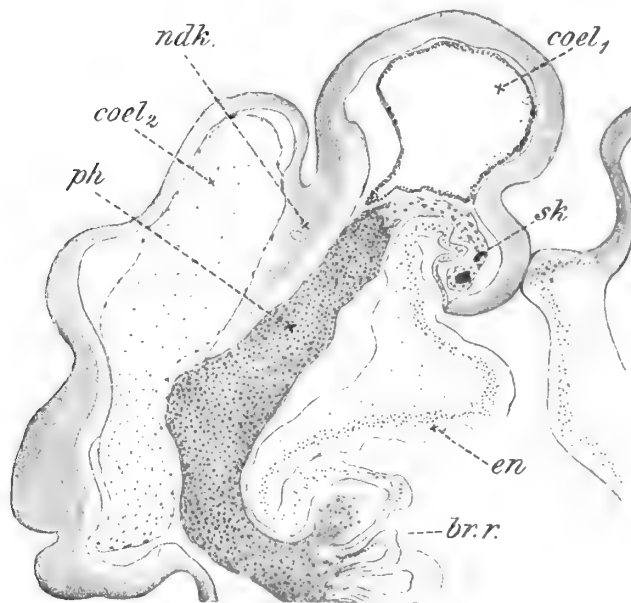


Рис 23-й. Часть сагиттального разреза через переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. *Sk* — скелетъ, образующійся на счетъ целенхимы перихэмальныхъ полостей (*ph*); *ndk* — нервъ воротника; *coel*<sub>2</sub>, *coel*<sub>1</sub> — целома воротника и хобота. Zeiss. Obj. 16, ocul. 2.

перихэмальныхъ полостей путемъ вростанія внутрь воротника двухъ участковъ туловищнаго целома. Последніе имѣютъ видъ слѣпыхъ трубчатыхъ мѣшковъ и вначалѣ почти лишены клѣточныхъ элементовъ внутри полостей, какъ это прекрасно видно на поперечныхъ разрѣзахъ, представленныхъ на рис. 54-мъ и 53-мъ. Здѣсь на нѣкоторыхъ срѣзахъ въ полости перихэмальныхъ трубокъ совсѣмъ нѣтъ клѣтокъ, на другихъ количество ихъ очень ограничено.

На рисункахъ 24-мъ и 25-мъ, представляющихъ сагиттальные срѣзы черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera minuta*, процессъ образования перихэмальныхъ каналовъ виденъ очень ясно. На этихъ разрѣзахъ можно наблюдать, какъ внутри воротника, выпячивая стѣнку его целома, на спинной сторонѣ

вростаетъ слѣпой мѣшокъ — выростъ целома туловища. Полость въ этомъ мѣшкѣ, представляющемъ изъ себя одинъ изъ перихэмальныхъ каналовъ, попав-

1) Описываемыя клѣтки эти авторы считаютъ des cellules qui détachées des coupes épidermiques limitrophes ont été englobées à l'intérieur de la substance anhyste du squelette».

2) До сихъ поръ мы знаемъ только одну форму

Enteropneusta, у которой перихэмальные полости отсутствуютъ — это, недавно описанный Caullery & Mesnil — *Protobalanus Koehleri* (Mesnil & Caullery, 1901).

шихъ на срѣзѣ, ясно выражена — онъ еще представляетъ собою настоящую слѣзную трубку, почти лишенную клѣточныхъ элементовъ внутри. Стѣнки этой трубки образованы болѣе или менѣе плоскимъ, однослойнымъ эпителиемъ.

На рис. 56-мъ представлены оба перихэмальные канала регенерирующаго воротника на болѣе поздней стадіи развитія. Мы видимъ между ними спинной кровеносный сосудъ, а внутри перихэмальныхъ полостей — клѣточную массу. На этой стадіи внутри этихъ органовъ уже начали дифференцироваться мышечные элементы въ видѣ клѣтокъ съ длинными отростками, переплетающимися между собою.

Упомяну, между прочимъ, еще объ одномъ фактѣ, очень меня заинтересовавшемъ, но пока не нашедшемъ подтвержденія. Мнѣ удалось на одной серіи срѣзовъ наблюдать совершенно иной способъ образованія перихэмальныхъ полостей, а именно, путемъ отшнурованія каждаго мѣшка отъ соответственной половинки целома воротника на дорзальной его сторонѣ. Наблюденіе это, повторяю, стоитъ совершенно изолированнымъ и я не рѣшаюсь настаивать на немъ — при наблюденіи явленія только на одной серіи срѣзовъ могла вкрасться ошибка въ толкованіи препарата. Обращаю, однако, вниманіе дальнѣйшихъ изслѣдователей на этотъ фактъ въ виду того, что аналогичный случай описалъ Бэтсонъ (Bateson), изучавшій эмбриональное развитіе *Balanoglossus Kowalevskii* Ag., о чемъ еще ниже будетъ рѣчь.

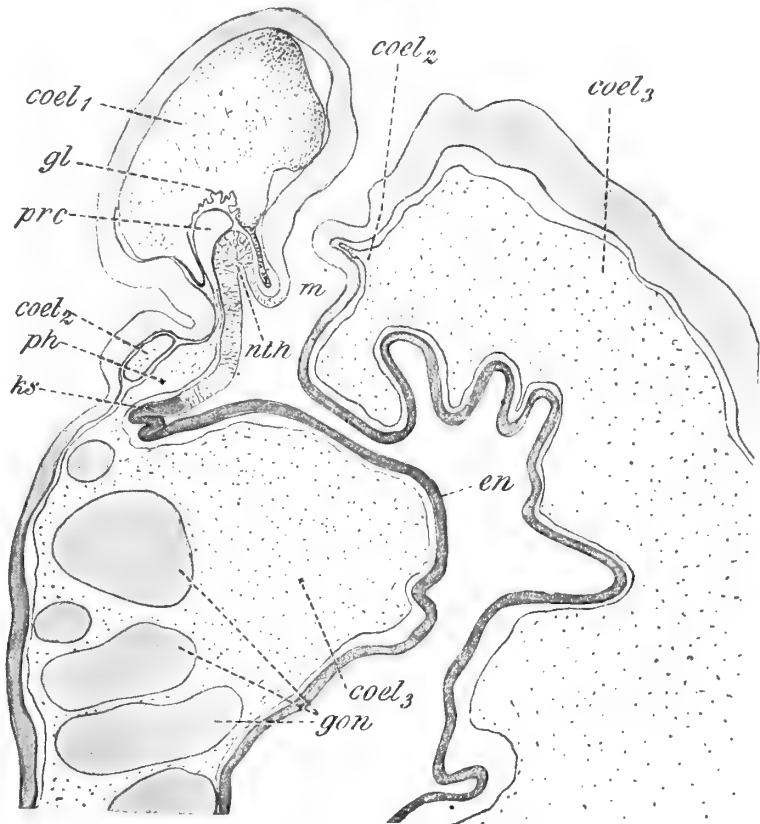


Рис. 24-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Хоботъ уже вполнѣ дифференцировался, воротникъ въ началѣ своего образованія. *coel<sub>1</sub>* — целома хобота; *coel<sub>2</sub>* — целома воротника; *coel<sub>3</sub>* — туловищный целома; *prc* — перикардій, находящійся въ непосредственной связи съ перихэмальнымъ каналомъ — *ph*; *gl* — гломерула; *nih* — нотохорда; *ks* — жаберные мѣшки въ началѣ своего образованія; *m* — ротъ; *gon* — гонады; *ep* — кишечникъ. Животное было ампутировано между жаберными и печеночными отдѣлами — въ области гонадъ. Leitz. Obj. 2, ocul. 1.

## Glomerulus.

Топографія и гистологія этого органа указываетъ на способъ образованія его. Стоитъ внимательно приглядѣться къ его строенію и отношенію къ сосѣднимъ органамъ, чтобы правильно рѣшить этотъ вопросъ à priori.

Делажъ (Delage & Hérouard) даетъ схему образованія описываемаго органа (fig. 10

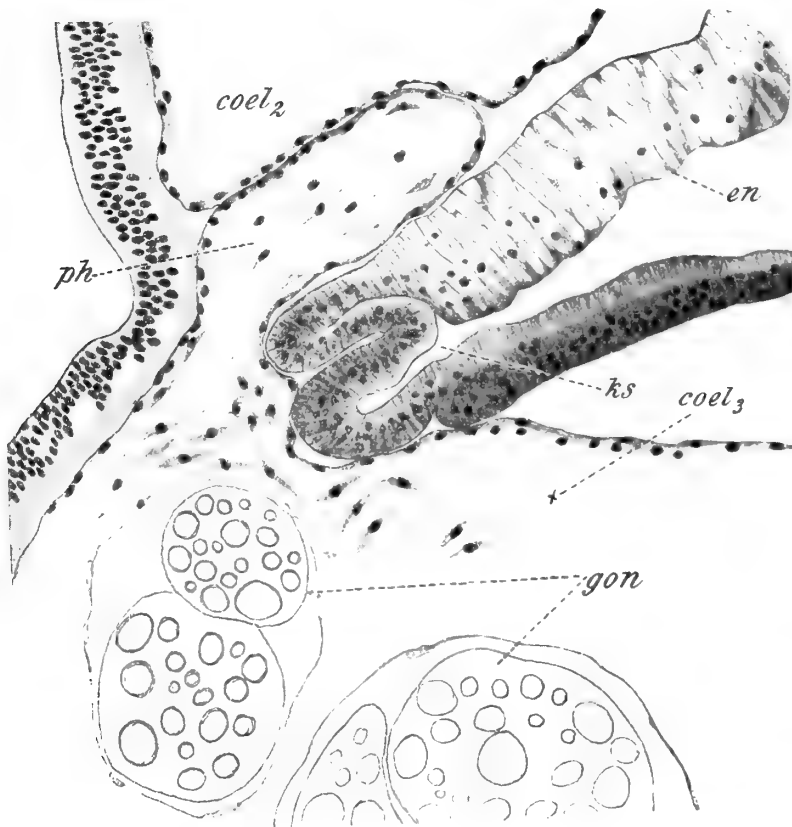


Рис. 25-й. Часть сагиттальнаго разрѣза черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Zeiss. Obj. 4, ocul. 4. *coel*<sub>2</sub>—целомъ воротника; *coel*<sub>3</sub>—целомъ туловища; *ph*—перихэмальные полости, образующіяся путемъ вросанія въ воротникъ участковъ туловищнаго целома; *ks*—жаберные мѣшки; *en*—стѣнка кишечника въ области пищевода и нотохорды.

Учебника А, В, С) — эта схема вполне пригодна для иллюстрированія происхожденія glomerulus, одинаково какъ при эмбриональномъ развитіи, такъ и при регенерациі хобота.

Органъ этотъ образуется на раннихъ стадіяхъ регенерациі новаго хобота — онъ появляется почти одновременно съ перикардіемъ.

Начало образованія Glomerulus характеризуется тѣмъ, что въ участкѣ перитонеума, покрывающемъ сверху и съ боковъ нотохорду (т. е., слѣдовательно, въ области висцеральнаго листка целомического пузыря) образуется рядъ

складокъ. Складки эти появляются одновременно. Между этими складками и стѣнками нотохорды и перикардія циркулируетъ кровяная жидкость (рис. 24-й).

У меня являлось естественное предположеніе, что именно давленіемъ крови на перитонеальную оболочку и вызывается этотъ процессъ образованія описанныхъ складокъ и выпячиваній.

Нельзя отрицать, что вліяніе давленія кровяного тока играетъ извѣстную роль въ

этомъ процессѣ, но несомнѣнно также, что вліяніе это играетъ лишь второстепенную роль.

У меня есть данныя, убѣдительно доказывающія, что образованіе въ стѣннкѣ перитонеума слѣпыхъ выпячиваній и складокъ начинается иногда внѣ всякаго участія указанныхъ механическихъ стимуловъ.

Прежде всего нужно замѣтить, что нерѣдко образованіе Glomerulus начинается, и даже почти заканчивается, еще задолго до того времени, когда въ регенерировавшемъ хоботѣ появляется обособленная сердечная лакуна. На такихъ стадіяхъ кровь циркулируетъ въ хоботѣ всюду между органами, однако, *складки будущаго Glomerulus появляются именно на томъ мѣстѣ, гдѣ имъ полагается быть*. Здѣсь вліяніемъ давленія, разумѣется, процессъ не можетъ быть объясненъ.

Обращаю вниманіе еще и на тотъ фактъ, что параллельно съ образованіемъ слѣпыхъ выростовъ перитонеума происходитъ ихъ гистологическая дифференцировка—въ результатѣ эпителий целома въ области Glomerulus носить совсѣмъ иной характеръ, чѣмъ въ сосѣднихъ областяхъ перитонеума.

Различіе въ гистологическомъ строеніи между эпителиемъ, образующимъ Glomerulus и тѣмъ перитонеумомъ, который мы видимъ въ недифференцированныхъ частяхъ целома, хорошо видно

на рис. 37-мъ. Въ области складокъ Glomerulus мы находимъ крупныя кубическія клітки явно железистаго характера, а рядомъ — плоскій эпителий.

Зачастую, еще до образованія Glomerulus'a перитонеумъ въ соответствующемъ мѣстѣ уже является дифференцированнымъ въ указанномъ смыслѣ.

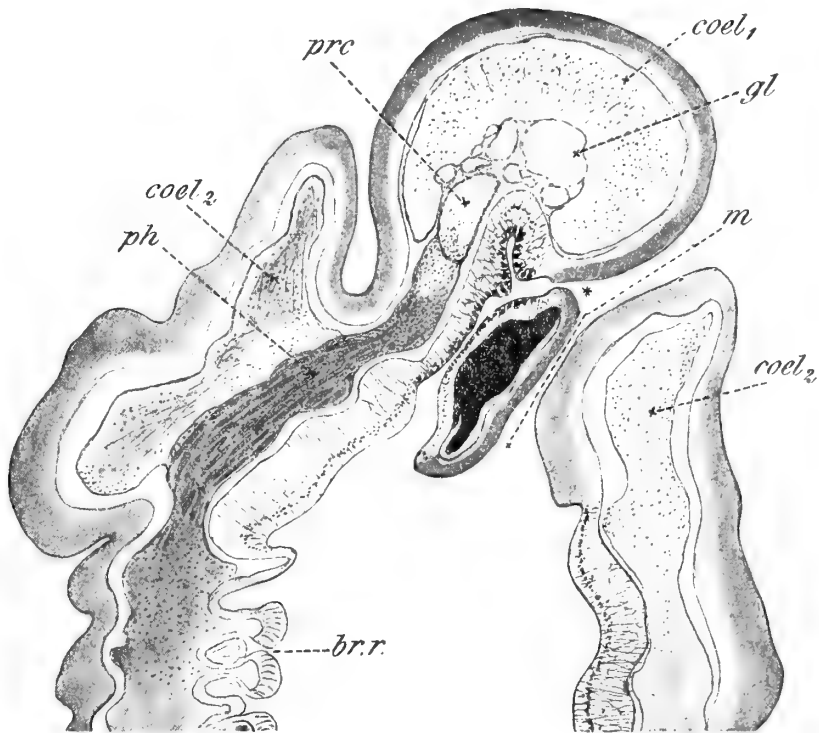


Рис. 26-й. Часть разрѣза (сагиттальнаго) черезъ регенерирующую *Ptychodera*. *gl*—glomerulus; *prc*—перикардій; *nth*—нотохорда, открывающаяся на своемъ дистальномъ концѣ наружу (при \*); *m*—ротъ; *ph*—перикардиальная полость. Zeiss. Obj. 16, ocul. 2.

Случается, что *Glomerulus* образуется даже совсѣмъ другимъ способомъ, а именно, не путемъ образованія складокъ въ стѣнкѣ перитонеального эпителия, покрывающаго сверху и съ боковъ кардіо-перикардій и нотохорду, а путемъ своеобразнаго расположенія первоначально изолированныхъ целенхиматозныхъ элементовъ.

Такъ, напримѣръ, бываютъ случаи появленія *Glomerulus* на такихъ стадіяхъ, когда въ целомѣ хобота нѣтъ еще настоящей перитонеальной стѣнки. Весь целомъ заполненъ эмбриональными мезодермальными клѣтками (целенхима) — часть этихъ клѣтокъ, веретеновидно удлинясь, даетъ мышцы, часть же, прилегающая къ энтодермѣ (область нотохорды), располагается въ ряды и образуетъ *Glomerulus*. Отчасти процессъ этотъ на позднихъ стадіяхъ развитія можно еще наблюдать на рис. 15-мъ и 13-мъ, gl.

Въ заключеніе упомяну о нерѣдко наблюдающихся случаяхъ чрезмѣрнаго развитія описываемаго органа, когда онъ занимаетъ въ хоботѣ чуть ли не половину его полости.

На рис. 26-мъ изображенъ подобный случай гипертрофіи *Glomerulus*. Я объясняю эти случаи чрезмѣрнымъ напоромъ крови на оболочку перитонеума въ области *Glomerulus*. Дѣйствительно, растяженіе стѣнокъ *Glomerulus* бросается въ глаза на указанныхъ препаратахъ.

### Кардіо-перикардій.

Переходимъ теперь къ описанію процесса образованія сердца и перикардіального пузырька. Оба эти органа морфологически такъ тѣсно связаны между собою, что я считаю необходимымъ разсматривать ихъ, какъ одно образованіе, обозначая его общимъ именемъ кардіо-перикардія. Это названіе представляетъ удобство еще и въ томъ отношеніи, что указываетъ на принципиальное сходство разсматриваемыхъ органовъ съ аналогичными образованіями у *Tunicata*, о чемъ будетъ рѣчь впереди.

Процессъ закладки и развитія кардіо-перикардія въ регенерирующемъ хоботѣ *Ptychochaeta* тѣсно связанъ съ процессомъ дифференцированія целомической полости хобота.

Мы уже видѣли, что на самыхъ молодыхъ стадіяхъ регенерации хобота образовавшійся въ немъ целомъ является всегда образованіемъ непарнымъ *ob origine* <sup>1)</sup>. Целомическая полость имѣетъ видъ пузыря, внутрь котораго вдается слѣпой предротовой отростокъ кишечника, или т.-наз. нотохорда. Въ нижней части хобота целомической пузырь образуетъ въ послѣдствіи два характерныхъ полыхъ дивертикула, которые подковообразно охватываютъ основаніе нотохорды и на вентральной сторонѣ хобота, плотно соприкасаясь краями, даютъ мезентерій.

Въ видѣ непарнаго образованія целомическая полость регенерирующаго хобота остается недолго. На болѣе позднихъ стадіяхъ целомъ является уже въ видѣ двухъ независимыхъ пузырей — одного, уже раньше описаннаго большого целомического мѣшка — дефинитивнаго целома хобота, внутрь котораго вдается нотохорда, и другого, очень малень-

1) Если въ почку вырастаютъ два целома изъ туловища, то они всетаки сливаются въ одинъ (см. стр. 17).

кихъ размѣровъ пузырька, помѣщающагося на спинной сторонѣ хобота, между главнымъ целомомъ и эктодермой хобота, тѣсно прилегая къ его наружной стѣнкѣ.

Такимъ образомъ, непарная *ob origine*, целомическая полость сдѣлалась парной. Маленькій целомическій пузырекъ, о которомъ идетъ рѣчь, и представляетъ собою первый зачатокъ кардіо-перикардія. Рис. 27-й служитъ хорошей иллюстраціей вышеописаннаго.

Долгое время я не могъ найти промежуточныхъ стадій, на которыхъ можно было бы видѣть, какимъ образомъ образуется этотъ второй целомическій пузырекъ—зачатокъ кардіо-перикардія. На большей части препаратовъ онъ является уже вполне сформировавшимся образованиемъ, хотя и очень еще маленькимъ по своимъ размѣрамъ.

Наконецъ, послѣ долгихъ усилій, мнѣ удалось найти нѣсколько переходныхъ стадій, которыя превосходно демонстрируютъ весь процессъ.

Оказывается, маленькій *перикардіальный пузырекъ* образуется путемъ отшнурованія небольшого участка целома на дорзальной сторонѣ целомического мѣшка. Мы имѣемъ здѣсь дѣло съ процессомъ выпячиванія участка дорзальной стѣнки перитонеума наружу, или, лучше сказать, съ процессомъ образованія складки. Постепенно складка эта отшнуровывается и, наконецъ, окончательно обособляется отъ целомического мѣшка. Получившійся новый целомическій пузырекъ ложится по медіанной линіи на дорзальной сторонѣ хобота

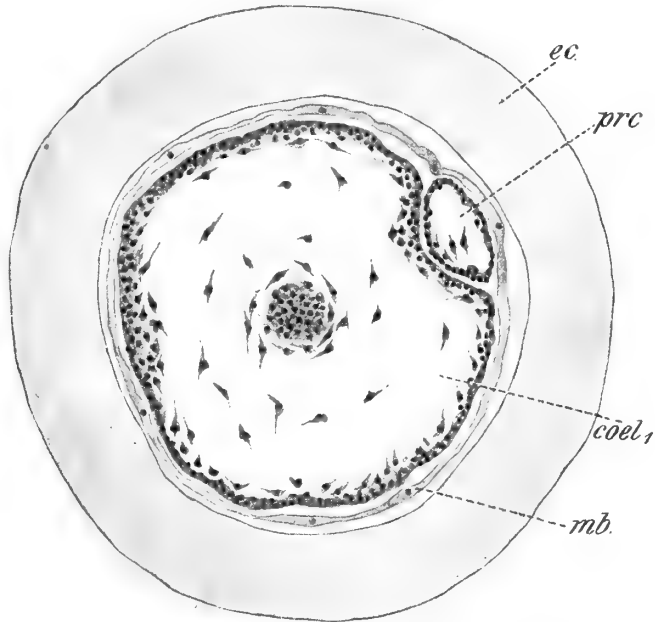


Рис. 27-й. Поперечный разрѣзъ черезъ регенерирующий хоботъ *Ptychodera*. Zeiss. Obj. 16, ocul. 2. *ec*—эктодерма; *mb*—мезенхимная мембрана, такъ называемая Basalmembran; *coel*, дефинитивный целомъ хобота; *prc*—зачатокъ кардіо-перикардія.

между стѣнкой дефинитивнаго целомического пузыря и образующей хоботъ эктодермой, къ которой онъ плотно прилегаетъ (рис. 27-й).

На рис. 28-мъ *a—d* представленъ рядъ срѣзовъ черезъ перикардій въ самомъ началѣ его образованія. На срѣзѣ *a* ясно виденъ процессъ отшнурованія зачатка кардіо-перикардія отъ целома хобота—онъ имѣетъ видъ небольшого выпячиванія, или складки стѣнки целомической полости. На рядѣ послѣдовательныхъ срѣзовъ той же самой серіи (на рис. 28-мъ приведены лишь три такихъ рядомъ лежащихъ срѣза) полость целомического мѣшка уже не стоитъ въ прямомъ сообщеніи съ полостью вновь образующагося пузырька. На слѣдующихъ



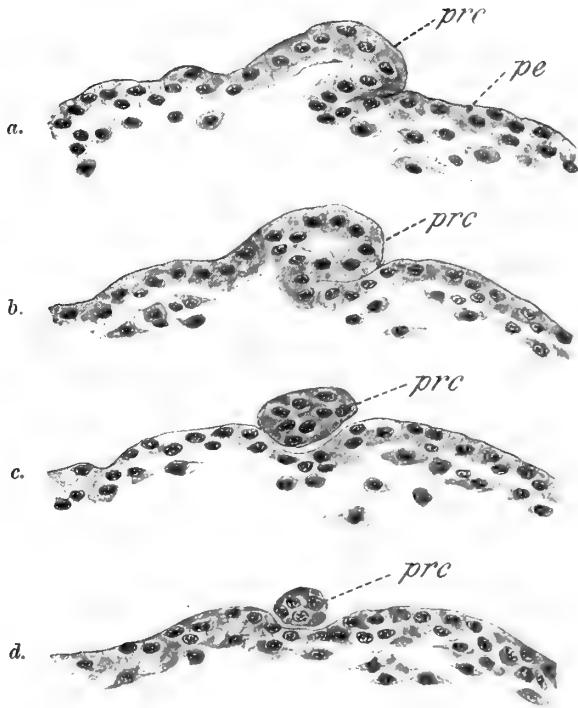


Рис. 28-й. Четыре сръза через зачатокъ кардио-перикардiя въ регенерирующемъ хоботѣ *Ptychodera* (a, b, c и d). Zeiss Obj. 3, ocul. 4. *pe*—перитонеумъ; *prc*—зачатокъ кардио-перикардiя.



Рис. 29-й. Часть сагиттальнаго разръза черезъ хоботъ *Ptychodera*. *prc*—кардио-перикардiй въ началѣ его образованiя; *coel*<sub>1</sub>—целомъ хобота; *clh*—целенхима; *nth*—дорзальная поверхность ногохорды. Zeiss. Obj. 4, ocul. 2.

сръзахъ онъ уже имѣетъ видъ компактной массы клѣтокъ. На цитируемомъ рисункѣ приведены два такихъ сръза (*c* и *d*), лежащiе въ серiи почти непосредственно за сръзомъ *b*.

На рис. 29-мъ мною приведена часть сагиттальнаго разръза черезъ регенерирующiй хоботъ на той же самой стадiи образованiя перикардiя. Процессъ отшнурованiя перикардiальнаго пузырька отъ целома здѣсь также можно наблюдать съ чрезвычайной ясностью.

Рис. 30-й изображаетъ дальнѣйшую стадiю дифференцировки зачатка кардио-перикардiя. Онъ уже не имѣетъ сообщенiя съ целомомъ, хотя и не является еще вполне самостоятельнымъ образованiемъ. Полости целомическаго мѣшка и кардио-перикардiальнаго пузырька уже не сообщаются между собою, но стѣнка послѣдняго еще не вполне обособилась отъ стѣнки целома, давшей ему происхожденiе.

На этомъ препаратѣ, между прочимъ, видно, что кардио - перикардiальный пузырекъ отшнуровывается отъ стѣнки дорзолатеральнаго целомическаго мѣшка, о чемъ будетъ рѣчь ниже.

На слѣдующихъ стадiяхъ кардио-перикардiальный пузырекъ уже является въ видѣ совершенно обособленнаго, самостоятельнаго образованiя. Цитирован-

ный выше рис. 27-й изображаетъ поперечный разръзъ черезъ регенерирующий хоботъ на стадіи полнаго обособленія кардіо-перикардіального пузырька. На этой стадіи целомъ хобота уже ясно парный.

Мы видимъ здѣсь большую, вентральную целомическую полость и меньшую—дорзальную, являющуюся въ видѣ маленькаго перикардіального мѣшечка, который помѣщается въ blastocoel между эктодермальной стѣнкой хобота и дефинитивнымъ его целомомъ.

Съ наружной стороны кардіо-перикардіальный пузырекъ не прямо примыкаетъ къ эктодермѣ, а обхватывается, такъ называемой базальной перепонкой («Basalmembran»). Мы уже видѣли, что эта перепонка не представляетъ собою безструктурнаго образованія, какъ это обыкновенно бываетъ <sup>1)</sup> въ хоботѣ вполне взрослыхъ животныхъ, а является въ видѣ клеточнаго образованія съ ясными, хотя и рѣдко расположенными, ядрами.

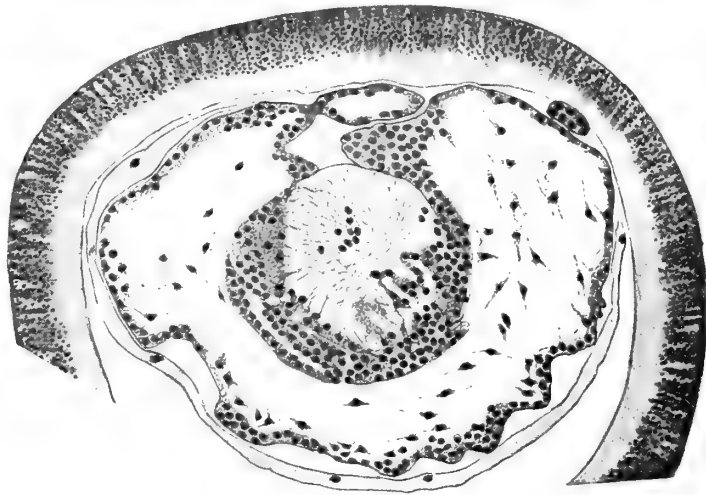


Рис. 30-й. Часть поперечнаго разръза черезъ регенерирующий хоботъ *Ptychodera*. Кардіо-перикардіальный пузырекъ отшнуровывается отъ праваго дорзолатеральнаго целомическаго дивертикула (дивертикулы еще не вполне обособлены—срѣзъ прошелъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ оба дивертикула отходятъ отъ целома хобота, такъ что вентральный мезентерій не попалъ на срѣзъ). Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

Процессъ образованія перваго зачатка кардіо-перикардія не всегда бываетъ выраженъ въ той формѣ, которая описана выше. Иногда онъ видоизмѣняется въ томъ отношеніи, что кардіо-перикардіальный пузырекъ образуется не путемъ эвагинаціи стѣнки целома, а посредствомъ пролифераціи ея клетокъ на опредѣленномъ участкѣ дорзальной поверхности стѣнки целомической полости <sup>2)</sup>.

Въ этомъ случаѣ образовавшійся зачатокъ перикардіального пузырька бываетъ вначалѣ плотнымъ образованіемъ, имѣющимъ видъ кучки клетокъ, внутри которой лишь впоследствии появляется полость. (Рис. 29-й).

Последній способъ образованія зачатка кардіо-перикардія является, конечно, лишь видоизмѣненіемъ перваго—принципальной разницы между двумя процессами, разумѣется, нѣтъ.

1) Хотя также далеко не всегда.

2) Замѣчу, что иногда въ образованіи перикардія изъ хоботнаго целома, перитонеумъ не принимаетъ участія. Въ такихъ случаяхъ этотъ органъ образуется путемъ обособленія участка целенхимы на спинной сторонѣ хобота. Целомическая стѣнка въ данномъ

мѣстѣ какъ бы лопаются, края ея загибаются внутрь, а мигрировавшая въ получившееся пространство масса целенхимы обособляется въ видѣ плотнаго комка—зачатка кардіо-перикардія. Только такимъ образомъ могутъ быть истолкованы тѣ препараты, которыхъ образчикомъ служитъ приведенный на рис. 31-мъ.

Болѣе интересенъ случай изображенный на рис. 32-мъ.

Мы видимъ здѣсь, что при образованіи кардіо-перикардіальнаго пузыря целомъ хобота дѣлится почти пополамъ на двѣ части — брюшную и спинную. Последняя представляетъ собою, дѣйствительно, зачатокъ перикардія, какъ это мнѣ удалось выяснитъ на рядѣ аналогичныхъ препаратовъ.

На дальнѣйшихъ стадіяхъ дифференцированія регенерирующаго хобота, дорзальный целомическій мѣшокъ, оставаясь непарнымъ образованіемъ въ своей верхней части, внизу дѣлается уже парнымъ. Онъ образуетъ здѣсь двѣ боковыя, т. - наз. «дорзалатеральныя» лопасти, которыя лежатъ справа и слѣва отъ медианной плоскости. Дорзальныя части этихъ лопастей образуютъ два дивертикула, спускающіеся внизъ по направленію къ стебельку

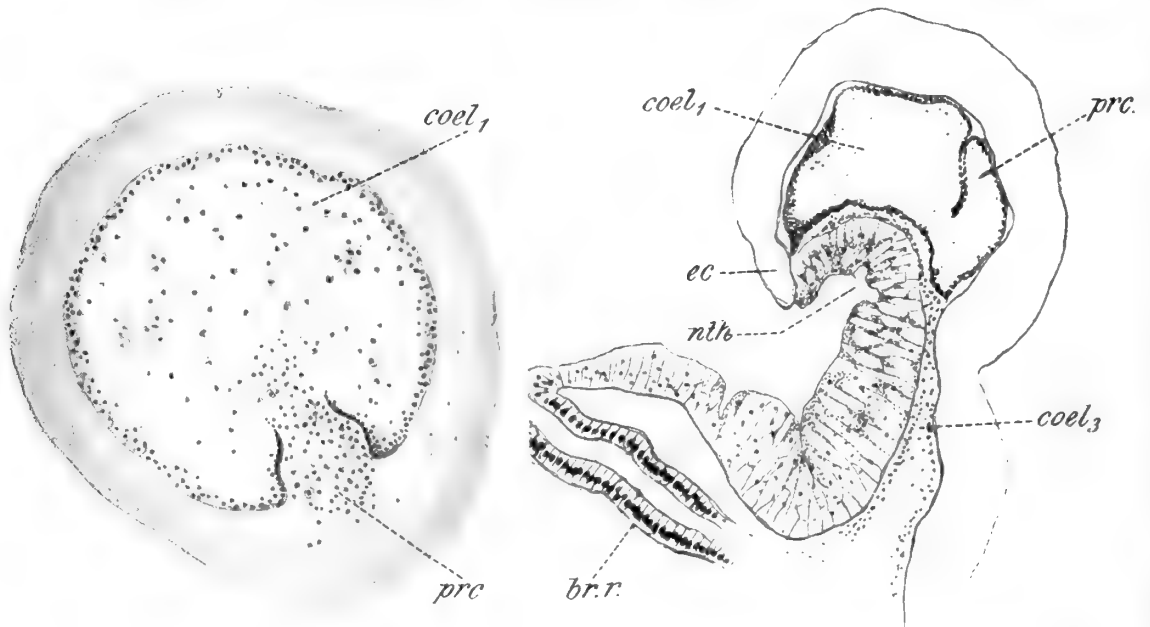


Рис. 31-й. Поперечный разрѣзъ черезъ регенерирующій хоботъ *Ptychodera*. *prc* — перикардій; *coel1* — definitivoный целомъ. Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

Рис. 32-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. *coel1* — целомъ хобота, отдѣляющій на дорзальной сторонѣ перикардій (*prc*); *nth* — нотохорда; *br.r.* — начало жаберной области; *coel3* — туловищная целенхима, образующая на позднихъ стадіяхъ целомъ воротника, который еще только намѣченъ. Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

хобота. На днѣ одного изъ дивертикуловъ, а именно лѣваго, образуется, какъ мы увидимъ впоследствии, воронка нефрідія, другой дивертикулъ обыкновенно оканчивается слѣпо.

Вновь образовавшійся дорзальный целомическій пузырекъ — зачатокъ кардіо-перикардія — помѣщается теперь между описанными дивертикулами, какъ это и видно на рис. 33-мъ, представляющемъ поперечный разрѣзъ черезъ хоботъ на соответственной стадіи и какъ разъ прошедшій на уровнѣ образовавшихся целомическихъ дорзо-латеральныхъ мѣшковъ.

По мѣрѣ увеличенія въ размѣрахъ, зачатокъ кардіо-перикардія все ближе и ближе при-  
двигается къ дорзальной поверхности нотохорды. На стадіи, изображенной на рис. 33-мъ  
онъ совершенно съ нею соприкасается, будучи окруженъ съ боковъ лопастями целома, кото-  
рый охватываетъ его въ видѣ подковы.

Интересно отмѣтить, что нерѣдко образование кардіо-перикардіального пузырька  
запаздываетъ и процессъ этотъ начинается только тогда, когда уже дифферен-  
цированы упомянутые дорзо-латеральные целомическіе дивертикулы.

Въ такихъ случаяхъ упомянутый  
пузырекъ отшнуровывается отъ стѣнки  
праваго дивертикула на сторонѣ, обра-  
щенной къ лѣвому.

Рис. 30-й изображаетъ этотъ про-  
цессъ очень наглядно — здѣсь мы ви-  
димъ одну изъ стадій дифференцирова-  
нія кардіо-перикардіального пузырька  
(*prc*), еще находящагося въ соедине-  
ніи съ правымъ дивертикуломъ цело-  
мического мѣшка хобота. И въ этомъ  
случаѣ, послѣ окончательнаго отшну-  
рования отъ него, кардіо-перикардіаль-  
ный пузырекъ ложится на своемъ  
обычномъ мѣстѣ — въ бластоцелѣ, ме-  
жду двумя целомическими мѣшками и  
нотохордой.

Итакъ, мы подробно прослѣдили  
процессъ образования и дифференци-  
рования зачатка кардіо-перикардія до  
той стадіи, когда этотъ зачатокъ  
имѣетъ видъ мѣшечка, достигшаго  
уже значительныхъ размѣровъ и прилегающаго своей вентральной поверхностью къ ното-  
хордѣ, а сверху и съ боковъ — къ целома, отростки котораго, какъ это видно на поперечныхъ  
разрѣзахъ, обростаютъ его въ видѣ подковы. На этихъ стадіяхъ еще нельзя замѣтить раз-  
ницы въ гистологическомъ строеніи между стѣнками этого органа и стѣнками сосѣдней цело-  
мической полости, давшей ему происхожденіе.

Дальнѣйшая судьба кардіо-перикардіального пузыря понятна сама собой. Онъ еще  
болѣе увеличивается въ размѣрахъ, такъ что его стѣнки совсѣмъ плотно прилегаютъ къ  
стѣнкамъ целома. Наконецъ, вентральная поверхность описываемаго пузырька инвагини-  
руетъ, благодаря чему между нотохордой и инвагинировавшею его стѣнкою образуется  
полость, имѣющая въ поперечномъ сѣченіи характерную форму полулунія.

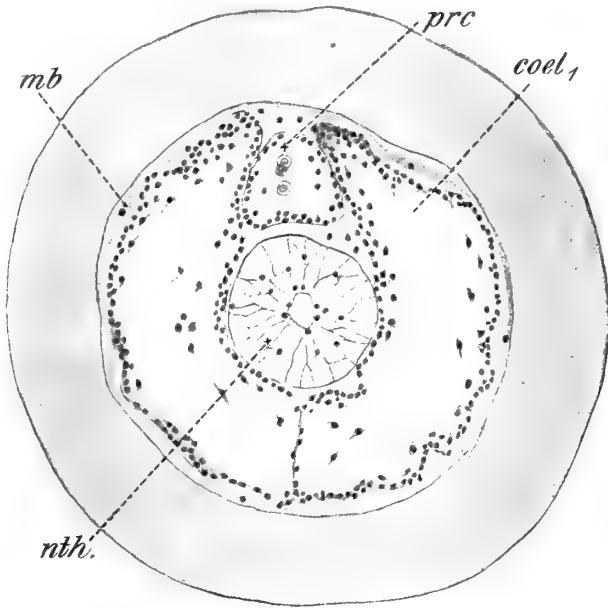


Рис. 33-й. Поперечный разрѣзъ черезъ регенерирующій хоботъ  
*Ptychodera* на уровнѣ дорзолатеральныхъ целомическихъ ди-  
вертикуловъ. *prc* — кардіо-перикардіальный пузырекъ (внутри  
его видны клѣточные образования — *Haplosporidiae?*) *coel*<sub>1</sub> — це-  
ломъ хобота; *nth* — нотохорда; *mb* — мезенхимная мембрана  
(«Basalmembran»). Zeiss. Obj. 16, ocul. 2.

Полость эта, являющаяся прямымъ продолженіемъ спинного сосуда воротника и туловища, наполняется кровью. На инвагинировавшей поверхности кардіо-перикардіальнаго пузыря, ограничивающей кровеносную пазуху съ дорзальной стороны, развиваются продольныя мышечныя волокна. Этотъ процессъ виденъ на рис. 37-мъ.

Первичный кардіо-перикардіальный пузырекъ дифференцировался теперь на сердце и собственно перикардій. Сердечная лакуна, какъ мы видимъ, ограничена съ одной стороны стѣнкой перикардія (resp. целома), развивающей мышцы, а съ другой — дорзальной поверхностью ното хорды. Сверху же она прикрывается перитонеумомъ, который здѣсь образуетъ *glomerulus*.

У вполне взрослыхъ животныхъ нормально сердечная полость не имѣетъ собственной стѣнки.

Я былъ, поэтому, не мало изумленъ, открывъ, что иногда въ сердцѣ регенерирующихъ экземпляровъ *Ptychodera minuta* существуетъ эндотелій, который выстилаетъ съ внутренней стороны поверхность сердечной лакуны.

На рис. 34-мъ, изображающемъ поперечный разрѣзъ черезъ кардіо-перикардій регенерировавшаго хобота *Ptychodera minuta*, прекрасно виденъ этотъ эндотелій, имѣющій видъ

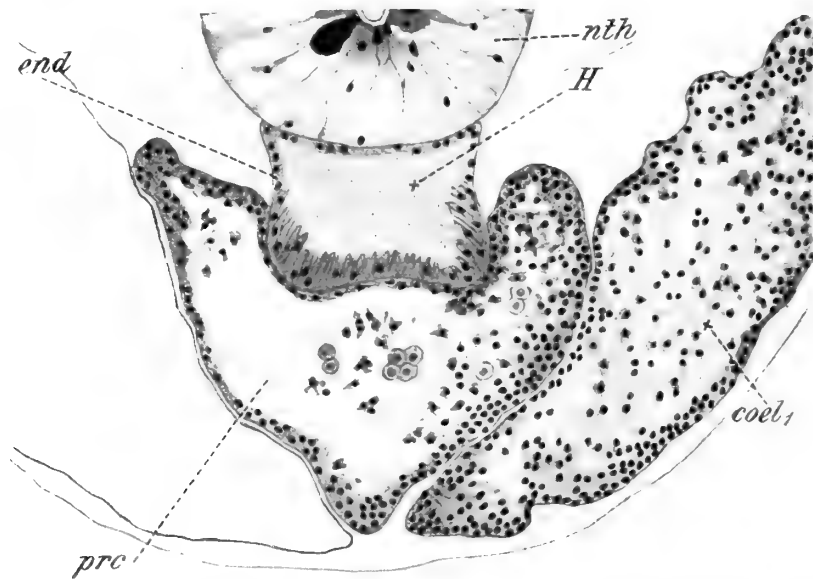


Рис. 34-й Часть поперечнаго разрѣза черезъ регенерирующій хоботъ *Ptychodera*. *H* — сердечная лакуна, выстланная эндотеліемъ — *end*; *nth* — ното хорда; *prc* — перикардій (внутри 9 клітокъ — *Haplosporidiae?*). Zeiss. Obj. 8, ocul. 4.

слоя довольно крупныхъ клітокъ. На болѣ позднихъ стадіяхъ эти клітки дѣлаются болѣ плоскими и, наконецъ, слѣды эндотелія въ сердцѣ взрослыхъ *Ptychodera* остаются въ видѣ, кое-гдѣ разбросанныхъ на внутренней поверхности мышечной стѣнки перикардія, отдѣльныхъ, изолированныхъ клітокъ.

Какъ мы увидимъ дальше, подобные слѣды эндотелія уже были наблюдаемы Bateson'омъ и Sprengel'емъ, которые, однако, изобразивъ эти клѣтки на своихъ рисункахъ, не обратили на нихъ должнаго вниманія.

Въ концѣ концовъ функционированіе сердца *Enteropneusta* обусловливается исключительно сокращеніемъ мышцъ инвагинировавшей стѣнки перикардія. Въ тѣхъ случаяхъ, когда существуетъ сердечный эндотелій, онъ въ этомъ процессѣ, вѣроятно, тоже играетъ роль.

Меня очень интересовалъ вопросъ, откуда происходятъ во время развитія кардіо-перикардія элементы, образующіе эту вышеописанную эндотеліальную выстилку полости сердца.

Окончательно рѣшить этотъ важный вопросъ мнѣ не удалось.

Я наблюдалъ неоднократно присутствіе въ blastocoelѣ, между нотохордой и целомической полостью, отдѣльныхъ клѣтокъ мезенхиматознаго характера. Эти изолированныя клѣтки зачастую наблюдаются на всѣхъ стадіяхъ дифференцированія кардіо-перикардіального пузырька (напр. см. рис. 33-й). Я считаю очень возможнымъ, даже почти несомнѣннымъ, что описанные мезенхимальные элементы и даютъ начало эндотелію, выстилающему полость сердца. Что касается происхожденія самихъ мезенхимальныхъ клѣтокъ, то, вѣроятно, онѣ одного происхожденія съ элементами, образующими клѣточную базальную пленку, выстилающую съ внутренней стороны хоботъ.

Таковы процессы образованія кардіо-перикардія въ регенерирующемъ хоботѣ *Ptychodera*, въ своей наиболѣе типичной формѣ.

Упомяну еще объ одномъ видоизмѣненіи этого процесса, который иногда наблюдается при регенерации, а именно: обыкновенно совершенно замкнутый, обособленный отъ целома кардіо-перикардіальный пузырекъ иногда въ ненормальныхъ случаяхъ можетъ очень долгое время оставаться въ соединеніи съ целомической полостью. Въ исключительныхъ случаяхъ перикардій сообщается съ однимъ изъ дивертикуловъ целомической полости даже на самыхъ позднихъ стадіяхъ дифференцированія хобота.

Упомяну еще, что уже на первыхъ стадіяхъ развитія кардіо-перикардіального пузырька внутри его можно наблюдать свободно-плавающія клѣтки мезенхиматознаго характера — это клѣтки целенхимы, попавшія внутрь пузырька во время процесса его отшнурованія отъ целома (рис. 27, 29 и др.). Въ теченіе дальнѣйшей дифференцировки органа, отъ его стѣнокъ продолжаютъ отдѣляться клѣточные элементы и попадать внутрь полости. Иногда процессъ отдѣленія отъ стѣнокъ пузырька клѣтокъ целенхимы идетъ столь интенсивно, что на позднихъ стадіяхъ образованія кардіо-перикардія его полость цѣликомъ, или, по крайней мѣрѣ, въ значительной степени заполняется целенхимой (рис. 34-й), образующей нѣчто вродѣ соединительной ткани.

Заполненіе полости перикардіального пузырька целенхиматозной тканью имѣетъ мѣсто и въ нормальныхъ условіяхъ: зачастую полость перикардія хобота *Enteropneusta* настолько же выполнена целенхимой, какъ и сама целомическая полость — это обстоятельство уже давно обратило на себя вниманіе Шимкевича (89), который, предполагая à priori целомическое

происхождение перикардия, или, какъ его тогда называли «Herzblase», опирался между прочимъ и на это обстоятельство, какъ на одинъ изъ доводовъ, говорящихъ въ пользу его предположенія.

Въ тотъ короткій промежутокъ времени, когда полость целома хобота остается въ соединеніи съ полостью отшнуровывающагося отъ него кардио-перикардіального пузырька, въ нее попадаютъ свободно плавающія въ целомическихъ полостяхъ *Ptychodera* тѣ загадочныя клѣточные образования, которыя Ковалевскій называлъ железами (Kowalewsky, 66), Spengel же, а также Caullery & Mesnil, считаютъ паразитами<sup>1)</sup>. Это иногда одноклѣточные, иногда, и по большей части, многоклѣточные образования — ихъ гистологія хорошо изслѣдована Шпенгелемъ, общій же характеръ достаточно выясняется

на цитированныхъ рисункахъ.

Въ заключеніе упомяну о нѣкоторыхъ наблюденіяхъ, которыя указываютъ, что кромѣ наиболее часто наблюдающагося, типичнаго способа регенерации кардио-перикардія путемъ отшнурованія отъ стѣнки целома хобота, существуетъ еще другой способъ регенерации этого органа, а именно отшнурованіе его отъ дистальнаго конца двухъ слившихся вмѣстѣ перихэмальныхъ полостей.

Я по крайней мѣрѣ

иначе не могу толковать тѣхъ препаратовъ, одинъ изъ которыхъ изображенъ на рисункѣ 35-мъ.

Мы видимъ здѣсь, что дистальный конецъ перихэмального канала (оба они наверху слились концами въ одну массу клѣтокъ) образуетъ на границѣ съ целомомъ хобота пери-

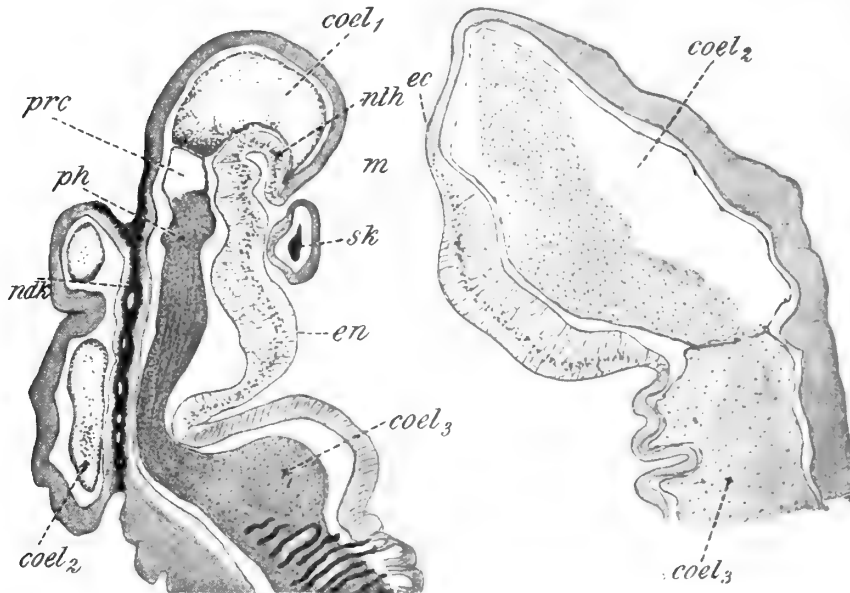


Рис. 35-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть *Ptychodera*, регенерирующую хоботъ. Животное было ампутировано посрединѣ воротника, причѣмъ была срѣзана дорзальная часть послѣдняго (разрѣзъ прошелъ не перпендикулярно оси животнаго, а наискось). *ph* — перихэмальная полость, тѣсно связанная на дистальномъ концѣ съ образующимся кардио-перикардіальнымъ пузырькомъ (*prc*); *m* — ротъ; *ndk* — спинной нервъ воротника; *coel2* и *coel1* — целома воротника и хобота; *nth* — нотохорда, открывающаяся наружу на вентральной поверхности новаго хобота; *en* — эпителий кишечника (пищеводъ). Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

1) По мнѣнію Caullery & Mesnil, клѣточные образования, о которыхъ идетъ рѣчь, представляютъ изъ себя паразитовъ, принадлежащихъ къ *Naplosporidiae*.

кардіальный пузырьекъ—который служитъ непосредственнымъ продолженіемъ перихэмальной полости.

Такіе случаи мнѣ удавалось наблюдать нѣсколько разъ и у Новогвинейскихъ *Ptychodera*.

Вообще, образованіе перикардія независимо отъ целома хобота мнѣ приходилось наблюдать рѣдко и первое время я относился къ подобнымъ случаямъ скептически, но въ нѣкоторыхъ случаяхъ наблюдаемыя картины до того ясны, что не остается сомнѣнія въ томъ, что иногда перикардій закладывается въ видѣ самостоятельнаго целома подъ целомомъ хобота. Такъ, между прочимъ, на рисункѣ 15-мъ ясно видна самостоятельная закладка целома хобота, воротника и перикардія. Общая масса целенхимы, мигрирующей изъ туловища, распадается на три участка — хоботной целома, перикардіальный пузырьекъ и внизу целома будущаго, еще не дифференцировавшагося воротника.

Одно время я даже былъ готовъ думать, что морфологически перикардій представляетъ собою остатокъ отдѣльнаго сомита, который былъ расположенъ между воротниковымъ и хоботными метамерами.

Аналогичная мысль пришла въ голову и Гармеру (Harmer, 05), изслѣдовавшему процессъ образованія перикардія при почкованіи *Cephalodiscus*.

По словамъ этого ученаго: «Some of the later stages might suggest that the pericardium represents an independent somit» (стр. 97).

### Нефридій хобота.

Регенерация хоботного нефридія (т. наз. *Eichelporte*) происходитъ различными путями, но всѣ эти способы регенерации сводятся къ одному результату — лѣвый дорзолатеральный целомическій дивертикулъ целома хобота открывается наружу при помощи спеціальнаго эктодермальнаго канала<sup>1)</sup>

Въ простѣйшемъ и наиболѣе обыденномъ случаѣ дѣло сводится именно къ этой схемѣ — по направленію къ дистальному слѣпому концу указаннаго целомическаго дивертикула инвагинируетъ участокъ эктодермы на дорзальной сторонѣ хобота (рис. 1-й, *b*; 3-й).

Необходимо отмѣтить, что въ данномъ случаѣ не наблюдается никакой особенной дифференцировки въ перитонеумѣ того участка дорзолатеральнаго дивертикула целома, въ который долженъ открыться вышеописанный эктодермальный каналъ.

Что касается этого послѣдняго, то эпителий, его составляющій, является почти на всемъ протяженіи однослойнымъ. На хорошо фиксированномъ матеріалѣ внутри канала ясно различимы рѣснички.

1) Иногда случается, что не одинъ только лѣвый дорзолатеральный дивертикулъ целома, а оба эти дивертикула открываются наружу, или посредствомъ двухъ различныхъ эктодермальныхъ каналовъ (т. е. двумя порами), или въ одинъ общій. Эти случаи, которые я считаю за проявленіе атавизма, будутъ спеціально разобраны въ соответствующемъ мѣстѣ.



Такимъ образомъ, при этомъ способѣ образованія нефридія вновь закладывается только эктодермальный каналъ — целомъ хобота играетъ въ процессѣ лишь пассивную роль.

Разсмотримъ теперь другой способъ регенерации нефридія — способъ, наблюдаемый значительно рѣже, чѣмъ только что описанный.

Здѣсь нефридія закладывается изъ двухъ ясно дифференцированныхъ зачатковъ. Его внутренняя часть — целомическая — имѣетъ видъ настоящей мерцающей воронки, происходящей благодаря специальной дифференцировкѣ соответственнаго участка перитонеума

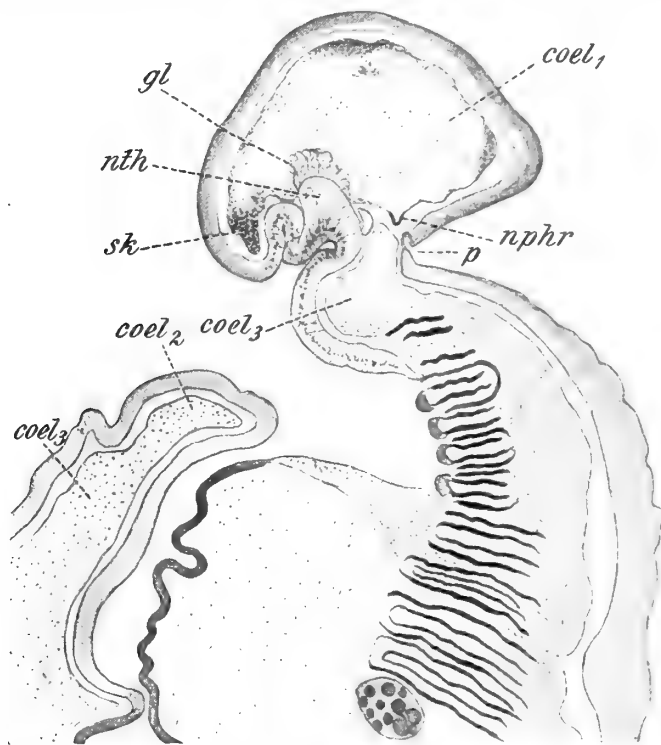


Рис. 36-й Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Ампутація была произведена въ средней части жаберной области. *nphr* — целомеліальная воронка нефридія; *p* — его эктодермическая часть; *nth* — нотохорда; *sk* — скелетъ. Zeiss Obj. A, ocul. 2.

Воронкообразное углубленіе утолщеннаго участка целомелія обозначено на приведенномъ рисункѣ — *nphr*. Эта воронка, какъ видно, съ внутренней стороны примыкаетъ къ уже образовавшемуся перикардію, а своей наружной стороной обращена къ эпителию хобота.

Въ моемъ распоряженіи есть препаратъ болѣе ранней стадіи закладки целомеліальной воронки нефридія. Я привожу въ своемъ предварительномъ сообщеніи (Dawydoff, 07 b) на рис. 3-мъ часть сагиттального срѣза черезъ хоботъ на этой стадіи. Тамъ ясно можно видѣть, что настоящей нефридіальной воронки, такой, какую мы наблюдали на стадіи, описанной выше, на раннихъ стадіяхъ еще не существуетъ. Но на соответственномъ участкѣ

мѣста целомическаго дивертикула. Та пора, посредствомъ которой эта воронка сообщается съ наружной средой, представляетъ собою впятившійся внутрь хобота участокъ эктодермы.

Рис. 36-й изображаетъ сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть ампутированной *Ptychodera* съ регенерированнымъ хоботомъ.

Ампутація хобота у даннаго индивидуума произведена была на уровнѣ средней части жабернаго района.

На этомъ препаратѣ уже при слабомъ увеличеніи (рис. 36-й сдѣланъ при помощи Zeiss. аарат. Zeiss Obj. A, ocul. 2) можно наблюдать зачатокъ воронки нефридія, едва различимый среди прочихъ органовъ и тканей вновь образовавшагося хобота.



мерцательными рѣсничками. Тѣсная связь между стѣнкой целома, состоящей изъ плоскихъ клѣтокъ, и цилиндрическимъ эпителиемъ, образующимъ воронку, несомнѣнна.

На самыхъ раннихъ стадіяхъ образованія хоботнаго нефридія можно наблюдать лишь мезодермальную часть нефридія, которая кончается слѣпо. На стадіи, изображенной на рис. 36-й и 37-й, мезодермальная воронка также кончается слѣпо, но теперь уже можно наблюдать начало закладки выводнаго канала и поры, берущихъ свое происхожденіе изъ эктодермы.

Они закладываются путемъ впяченія внутрь хобота на дорзальной его поверхности небольшого участка эпителия стебелька, на которомъ держится хоботь.

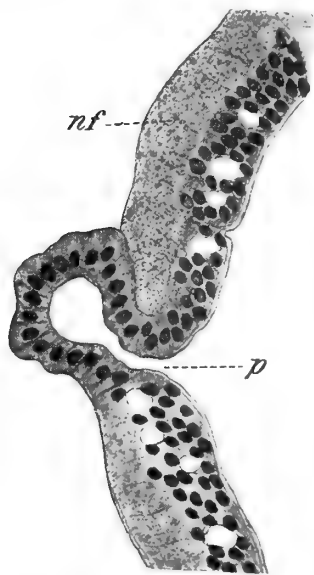


Рис. 38-й. Часть эктодермы регенерирующаго хобота *Ptychodera* въ мѣстѣ образованія эктодермальнаго канала и поры нефридія. *p*—пора; *nf*—нервноволокнистый подкожный слой. Zeiss Obj. Nom. Imm. 1,5, ocul. 4.

Рис. 38-й прекрасно иллюстрируетъ сказанное. Онъ изображаетъ часть срѣза, взятаго изъ той же серіи, которая дала намъ разрѣзъ, демонстрировавшій целотелиальную закладку нефридіальной воронки (рис. 37-й).

На разрѣзѣ, изображенномъ на рисункѣ 36-мъ, благодаря небольшому увеличенію нельзя видѣть деталей, но зато прекрасно видны отношенія перитонеальной воронки къ выводному каналу, представляющему собою инвагинировавшій участокъ эктодермы.

Замѣчу, что на одномъ строго сагиттальномъ разрѣзѣ обыкновенно нельзя наблюдать одновременно и воронку и эктодермическій каналъ, такъ какъ они находятся не въ одной плоскости. Рис. 36-й представляетъ изъ себя комбинацію двухъ разрѣзовъ одной и той же серіи.

Для гистологическихъ деталей считаю нелишнимъ привести часть еще одного изъ разрѣзовъ, сдѣланныхъ черезъ хоботь, при достаточно сильномъ увеличеніи.

Рис. 39-й изображаетъ часть срѣза, изображеннаго на рис. 1-мъ *b*, при сильномъ увеличеніи.

Здѣсь, между прочимъ, прекрасно видно, что впячивается лишь самая наружная часть эктодермальнаго эпителия сте-

белька — внутренняя же его поверхность, уже дифференцировавшаяся въ слой, такъ называемой подкожной нервноволокнистой ткани, который развитъ повсемѣстно подъ эктодермой *Enteropneusta*, не принимаетъ участія въ образованіи наружной выводной поры. (См. также рис. 38-й).

На описанной стадіи оба зачатка: мезодермальная воронка и эктодермальное впяченіе — зачатокъ выводной части нефридіальнаго канала — еще очень удалены другъ отъ друга.

При дальнѣйшемъ развитіи нефридія наблюдаются два случая:

1) Эктодермальное впяченіе почти не увеличивается въ своихъ размѣрахъ, тогда какъ, наоборотъ, мезодермальная воронка сильно разрастается и принимаетъ на своемъ дистальномъ, слѣпомъ концѣ видъ длинной трубки, или канала. Въ результатѣ оба образованія

соприкасаются своими слѣпыми концами и срастаются. Устанавливается сообщеніе между целомической полостью хобота и наружной средой.

Такимъ образомъ при этомъ способѣ дифференцированія нефридія почти весь каналъ его, выстланный мерцательнымъ цилиндрическимъ эпителиемъ, мезодермальнаго происхожденія. Онъ представляетъ изъ себя видоизмѣненный участокъ перитонеума.

Лишь очень незначительная часть нефридія—именно самая пора, или *stadium* самый конецъ выводнаго протока (рис. 50-й), происходитъ изъ эктодермы.

Эта эктодермальная часть можетъ даже совсѣмъ отсутствовать—нефридіи въ такомъ случаѣ всецѣло мезодермальнаго происхожденія. Рис. 40 и 41-й представляютъ подобный случай. Въ

описываемомъ случаѣ часть целома обособляется въ видѣ мѣшка, который открывается наружу прямо, безъ помощи эктодермальнаго протока, какъ это видно на рис. 40, на которомъ представленъ нефридіи при маленькомъ увеличеніи, и на рис. 41-мъ, гдѣ часть того же сръза изображена при большемъ увеличеніи.

2) Мезодермальная воронка почти не измѣняется въ своихъ размѣрахъ. Наоборотъ, эктодермальный каналъ сильно разрастается, принимаетъ форму мѣшка, въ который открывается перитонеальная воронка. Она скоро теряетъ свою обособленность отъ остальныхъ участковъ перитонеума и въ результатѣ получается типичный *Eichelporte*.

Мы еще вернемся къ вопросу о регенерациіи нефридія хобота въ одной изъ послѣднихъ главъ, гдѣ будутъ разобраны случаи атактистической регенерациіи этого органа.

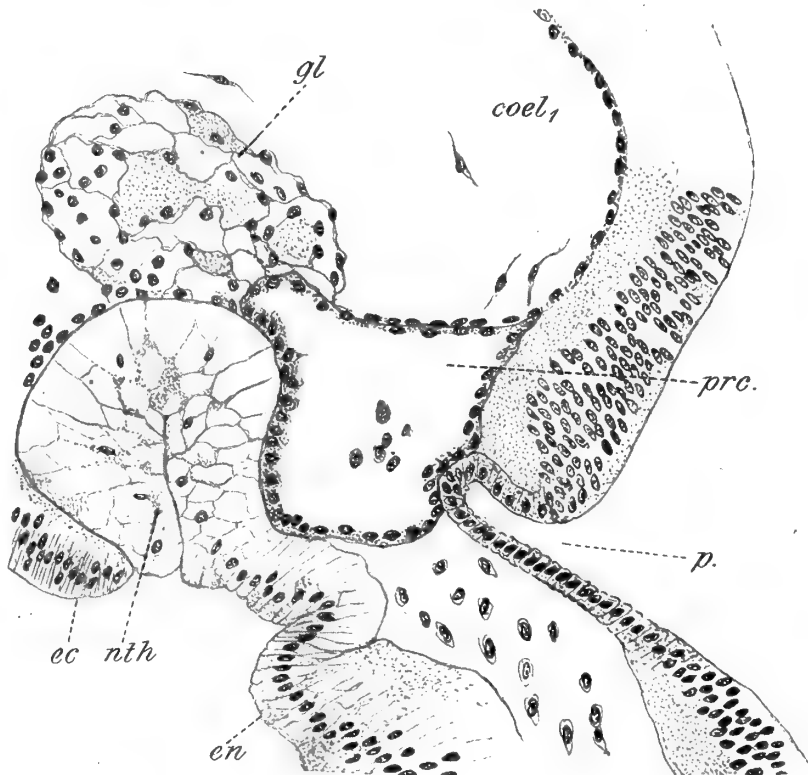


Рис. 39-й. Часть сръза, приведеннаго на рис. 1-мъ *b*, въ области регенерирующихъ главныхъ органовъ хобота: нефридіального эктодермальнаго канала (*p*); перикардія—*prc*; glomerulus—*gl*; ното хорды—*nth*. Zeiss Obj. Hom. Imm. 2, ocul. 4.

## Нефридіи воротника.

Наблюдения мои относительно этихъ органовъ не достаточно полны. Обыкновенно предполагается, что эти органы въ своемъ развитіи связаны съ процессомъ образования жаберныхъ щелей. Мнѣ кажется, это не совсѣмъ справедливое мнѣніе. По моимъ наблюдениямъ они образуются слѣдующимъ путемъ.

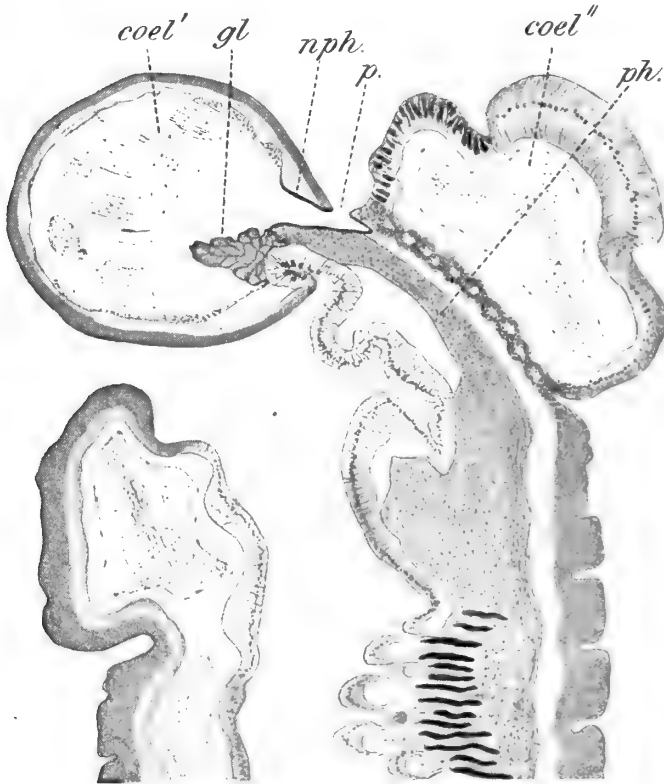


Рис. 40-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть *Ptychodera*, регенерировавшей хоботъ. *coel'*—целомъ хобота; *coel'''*—целомъ воротника; *gl*—glomerulus; *ph*—перихемальныя полости; *nph*—нефридій—его мезодермальная часть, открывающаяся безъ участія эктодермального канала наружу порой (*p*). Нотохорда очень незначительныхъ размѣровъ—буквами не обозначена. Ампутація была произведена посрединѣ воротника—отрѣзанная часть послѣдняго не возстановилась.  
Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

Прежде, чѣмъ первый эктодермальный жаберный мѣшокъ откроется наружу, противолежащій участокъ эктодермы впячивается внутрь воротника, но не перпендикулярно къ оси животного, а наискось вверхъ, подъ угломъ къ первой жаберной щели.

Послѣдняя, такимъ образомъ, открывается въ нижнюю часть этого эктодермального впяченія, дистальный же, слѣпой конецъ эктодермального мѣшечка открывается въ целомъ воротника образуя воротниковый нефридій.

Такимъ образомъ нельзя сказать, что нефридій открывается въ первую жаберную щель, равно, какъ нельзя также и сказать, что первый жаберный мѣшокъ открывается въ нефридій. Скорѣе оба они открываются въ общій эктодермальный атриумъ.

Иногда на раннихъ стадіяхъ этого атриумъ'a совсѣмъ не обра-

зуется и оба органа—какъ нефридій, такъ и жаберный мѣшокъ открываются самостоятельно наружу, но въ непосредственной близости другъ отъ друга.

Въ этихъ случаяхъ дѣло обстоитъ слѣдующимъ образомъ.

Жаберный мѣшокъ открывается наружу безъ посредства эктодермического канала. Въ непосредственной близости жабернаго отверстія (надъ нимъ) эктодерма впячивается внутрь воротника и открывается въ его целомъ.

Такимъ образомъ, оба органа — нефридій воротника и первый жаберный мѣшокъ — являются независимыми другъ отъ друга образованиями. Связь между ними есть явленіе вторичное.

### Кишечный каналъ.

Въ гистологическомъ отношеніи мы можемъ раздѣлить кишечникъ *Enteropneusta* на двѣ основныя части. Мы различаемъ въ немъ два разграниченныя отдѣла:

- 1) Переднюю часть кишечника — отъ рта до жаберной области.

Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ эпителиемъ, состоящимъ изъ высокыхъ клѣтокъ, характеризующихся обиліемъ вакуолей, железъ и бѣдныхъ протоплазмой.

Типъ такого эпителия мы имѣемъ на рис. 22, 32, 39, 44, 45-мъ.

- 2) Заднюю часть кишки — отъ жаберной области до анального отверстія.

Эпителий, составляющій эту часть кишечнаго канала, рѣзко отличается въ гистологическомъ отношеніи отъ только что описаннаго. Здѣсь мы имѣемъ тонкую эпителиальную ткань, состоящую изъ клѣтокъ богатыхъ протоплазмой, безъ вакуолей.

Характеръ этого эпителия ясно выступаетъ на рис. 12, 15, 13-мъ.

Своеобразно дифференцированы въ гистологическомъ отношеніи жаберный и печеночный отдѣлы кишечника — объ этихъ образованияхъ мы будемъ говорить особо.

Разсмотримъ теперь процессъ регенерациі въ области передней и задней части кишечнаго канала.

Для примѣра разсмотримъ два случая — во-первыхъ, когда ампутація была произведена въ области перваго, принятаго нами выше, отдѣла кишечника (Схема, рис. 42-й *a*) и во-вторыхъ, тотъ случай, когда ампутація была сдѣлана гдѣ нибудь въ задней части животнаго, напр. въ области гонадъ, т. е. въ томъ районѣ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ заднею частью кишечнаго канала (Схема, рис. 42-й *b*).

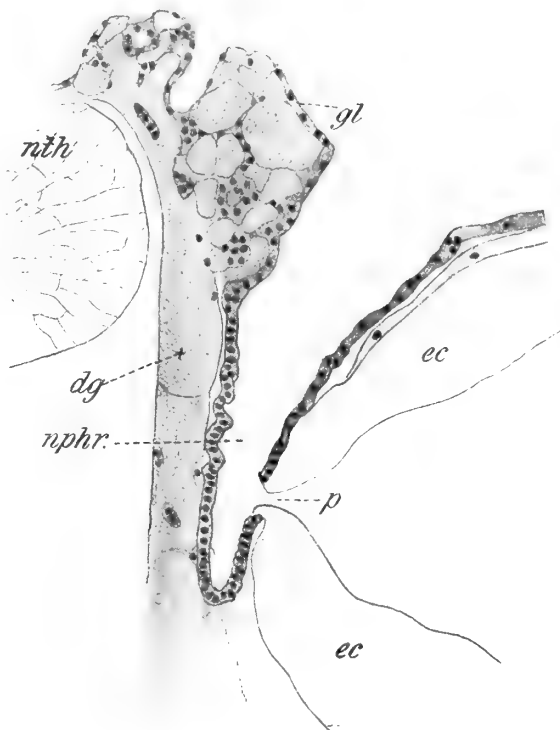


Рис. 41-й. Нефридій изъ хобота того экземпляра *Ptychodera*, сагиттальный разрѣзъ черезъ который приведенъ на рис. 40-мъ. *gl* — glomerulus, тѣсно связанный съ воронкой нефридія — *nphr*; *nch* — нотохорда; *dg* — дорзальный сосудъ; *p* — нефридіальная пора; *ec* — эктодерма. Zeiss Obj. 3, ocul. 2.

Какъ видно изъ приведенной схемы, въ первомъ случаѣ въ продолженіе всего процесса регенерации, смыканія обрѣзанныхъ краевъ кишечной трубки обыкновенно не наблюдается. Кишечникъ остается открытымъ.

Заживленіе раны и первые процессы (первичная регуляція) регенерации состоятъ въ томъ, что эктодерма срастается съ энтодермой вдоль, или лучше сказать, по окружности раны (рис.

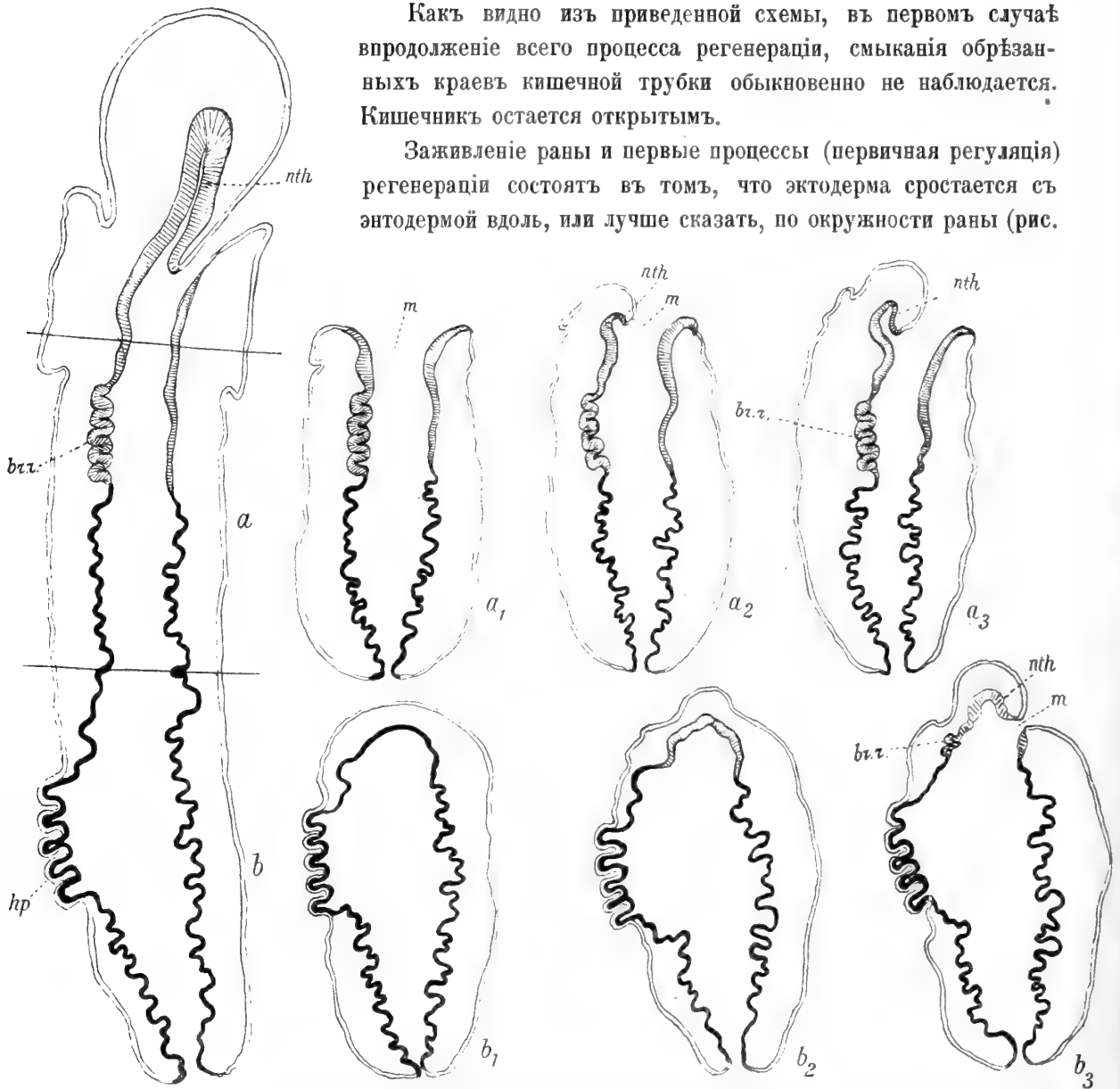


Рис. 42-й. Схема для поясненія общаго хода процесса регенерации кишечнаго канала у *Enteropneusta*. На схемѣ разобраны два главныхъ типа регенераций — случаи *a-a<sub>3</sub>* и *b-b<sub>3</sub>*. Объясненіе въ текстѣ. *nth* — нотохорда; *br.r.* — жаберные мѣшки; *m* — ротъ; *hp.* — печеночные придатки.

42-й, *a<sub>1</sub>*). Отверстіе, при помощи котораго кишечникъ сообщается съ наружной средой, образуетъ ротъ (*m*).

Такимъ образомъ, въ рассмотрѣнномъ случаѣ вся передняя кишка регенерирующаго животнаго вмѣстѣ съ ротовымъ отверстіемъ — энтодермальнаго происхожденія. Иногда,

впрочемъ, вторичнымъ путемъ эктодермальные покровы надвигаются внутрь кишечника и, отгѣсня энтодермальный эпителий, образуютъ небольшое эктодермальное углубленіе въ передней части кишечнаго канала. Но это бываетъ рѣдко.

Такимъ образомъ, за правило можно принять, что *эктодерма не принимаетъ участія въ образованіи передней части кишки при регенерации Enteropneusta.*

Во второмъ изъ разсматриваемыхъ нами случаевъ, процессъ протекаетъ иначе, но результатъ получается тотъ же.

Послѣ ампутаціи животнаго, произведенной гдѣ-нибудь въ области гонадъ, или въ хвостовомъ отдѣлѣ, заживленіе раны и вмѣстѣ съ тѣмъ первые процессы регенерациі выражаются въ томъ, что края эктодермы срастаются надъ раной въ видѣ колпачка, а подъ нею срастаются между собою по окружности и перерѣзанныя края энтодермы (рис. 42-й, *b*<sub>1</sub>).

Вся энтодерма животнаго построена теперь по второму изъ принятыхъ нами типовъ. Весь кишечникъ выстланъ низкимъ эпителиемъ, клетки котораго богаты плазмой, бѣдны вакуолями и железами.

На дальнѣйшихъ стадіяхъ происходитъ поразительный процессъ передифференцировки части указаннаго эпителия. Въ результатъ этого процесса вся слѣпая передняя часть кишечника получаетъ характеръ типичной вакуелистой ткани, съ высокими, бѣдными протоплазмой элементами — ткани, на разрѣзахъ имѣющей грубо сѣтчатую структуру, характерную для передней части кишечника *Enteropneusta*.

Такимъ образомъ, изъ эпителия, построеннаго по одному типу, образуется путемъ передифференцировки эпителий, носящій совершенно другой гистологическій характеръ.

Изъ такого именно эпителия и состоитъ теперь слѣпой конецъ кишечника (рис. 42-й, *b*<sub>2</sub>), надъ которымъ къ этому времени эктодерма образовала выпяченіе — зачатокъ будущаго хобота.

Процессъ передифференцированія стараго эпителия въ новый, носящій совсѣмъ иной гистологическій характеръ, совершается очень быстро. Его можно прослѣдить на срѣзахъ, приведенныхъ на рис. 5, 9, *b*; 15, 25, 24, 43, 12-мъ.

Указанные рисунки сдѣланы при различныхъ увеличеніяхъ и позволяютъ ознакомиться какъ съ гистологіей, такъ и съ топографіей различныхъ участковъ кишечника, носящихъ различную гистологическую структуру.

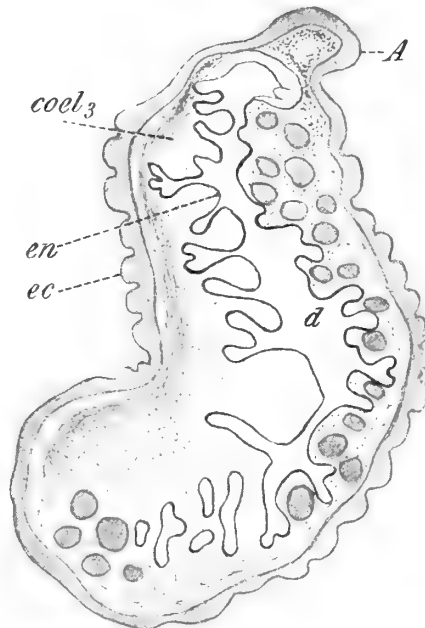


Рис. 43-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ *Ptychodera* (именно ея генитальный отдѣлъ, вырѣзанный изъ животнаго и регенерировавшій хоботъ). Первые стадіи регенерациі хобота — *A*. *a* — кишечникъ на стадіи *b*<sub>3</sub> схемы (рис. 42); *coel*<sub>3</sub> — целомъ туловища. Zeiss Obj. 35, ocul. 2.



На нѣкоторыхъ рисункахъ, сдѣланныхъ при сильныхъ увеличеніяхъ (напр., на рис. 15-мъ) можно прослѣдить постепенный переходъ одной структуры въ другую — одного типа эпителия въ другой.

Дальнѣйшая дифференцировка органовъ, связанныхъ съ переднимъ отдѣломъ кишечнаго канала изображена на схемѣ (рис. 42-й, *b*<sub>3</sub>) и на рядѣ рисунковъ (рис. 24, 47, 48, 50).

Мы видимъ, что на счетъ этого слѣплого мѣшка, передифференцированнаго передняго отдѣла кишечника, образуется такъ называемая нотохорда (или лучше — предротовой слѣпой участокъ кишечника), пищеводъ съ ротовымъ отверстіемъ, а также, путемъ дальнѣйшей дифференцировки, и жаберные мѣшки.

Способъ образованія нотохорды и жабернаго аппарата будетъ описанъ въ слѣдующихъ отдѣлахъ, теперь же обратимся къ процессу образованія рта.

Этотъ процессъ хорошо иллюстрируется нѣкоторыми изъ нижеприведенныхъ рисунковъ.

Эти рисунки изображаютъ при большомъ увеличеніи части разрѣзовъ, изображенныхъ на рис. 43 и 5-мъ при очень маленькихъ увеличеніяхъ.

Мы видимъ, что въ области будущаго рта эктодерма и энтодерма пришли въ тѣсное соприкосновеніе, соответственно видоизмѣнились и какъ бы спаялись.

Затѣмъ въ мѣстѣ тѣсной спайки происходитъ процессъ разрушенія тканей (рис. 44-й).

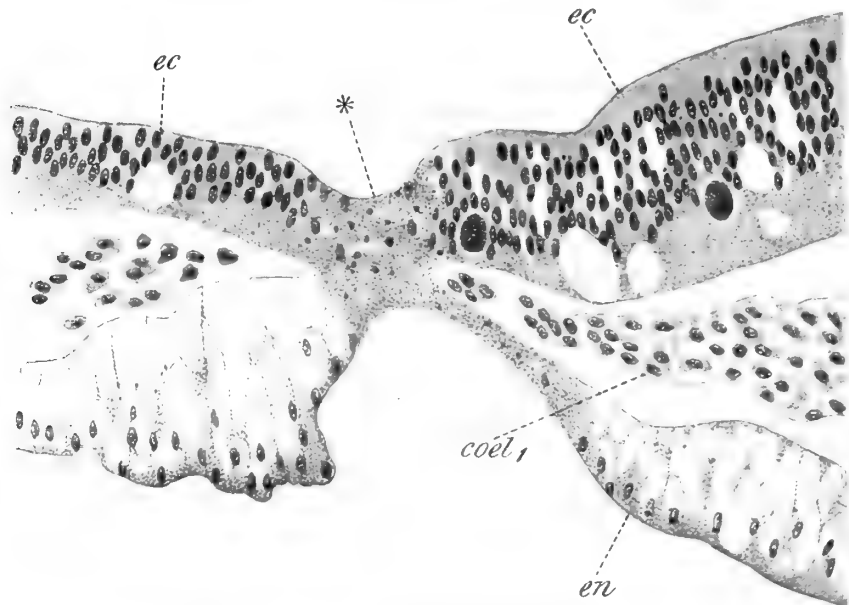


Рис. 44-й. Начало процесса образованія рта у регенерирующей *Ptychodera*. Рисунокъ изображаетъ часть разрѣза, приведеннаго на рис. 43-мъ въ области тѣснаго соприкосновенія эктодермы съ энтодермой. *ec* — эктодерма; *en* — энтодерма; \* — мѣсто будущаго рта. Здѣсь виденъ процессъ дегенерации экто- и энтодермы, въ результатѣ котораго участокъ, указанный звѣздочкой, будетъ уничтоженъ. Zess. Obj. Ном. Им. 1,5, ocul. 4.

На слѣдующей стадіи ротъ уже образовался — именно въ томъ мѣстѣ, гдѣ мы видѣли раньше процессъ дегенерации. Интересно, что въ результатѣ подобнаго процесса, въ области

рта эктодерма является еще отдѣленной отъ энтодермы — срастанія обѣихъ стѣнокъ еще не произошло (рис. 45-й).

Въ подробности вдаваться излишне — рисунки прекрасно дополняютъ описаніе — весь процессъ выступаетъ на нихъ съ чрезвычайной ясностью.

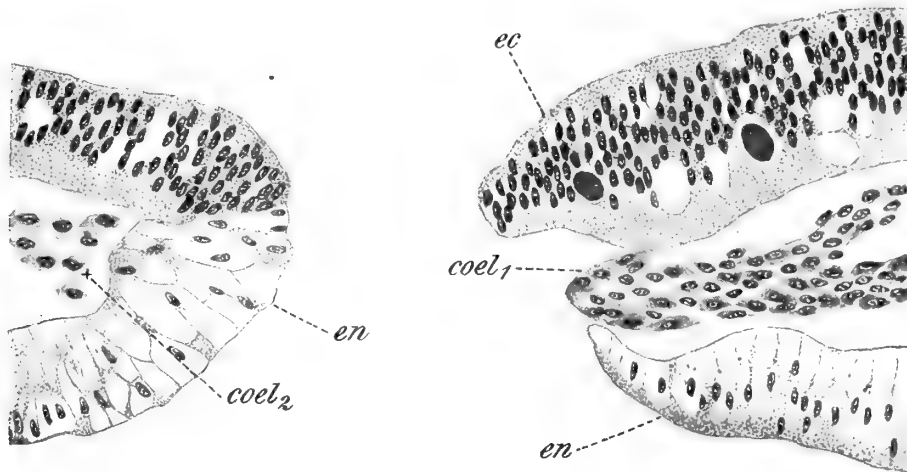


Рис. 45-й. Только что образовавшееся ротовое отверстіе регенерирующей *Ptychodera*. Справа эктодерма еще не успѣла срастись съ энтодермой. Часть срѣза, приведеннаго на рис. 5-мъ. Zeiss Nom. Imm. 1,5, ocul. 4.

Что касается регенераціи задней кишки, то, какъ показываетъ схема (рис. 42-й) и срѣзы, изображенныя на рис. 1, 9 и др. (стр. 9 и 13), особаго proctodaeum въ регенерирующихъ обрѣзкахъ *Ptychodera* не образуется. Кишка открывается наружу безъ участія эктодермальнаго anus'a.

Иногда даже энтодерма вытѣсняетъ эктодермальные покровы и выпячивается наружу (рис. 1, b).

### Нотохорда.

Регенерація этого органа, получившаго довольно — таки нераціональное названіе нотохорды, которымъ я продолжаю пользоваться только какъ общепринятымъ терминомъ, происходитъ нѣсколькими, различными способами, въ зависимости отъ хода первичной регуляціи, т. е. заживленія раны и первыхъ процессовъ регенераціи.

Способы возстановленія нотохорды можно свести къ двумъ главнымъ типамъ. По одному изъ этихъ типовъ описываемый органъ развивается въ томъ случаѣ, если кишечникъ на переднемъ концѣ является открытымъ (схема рис. 42,  $a_1—a_3$ ), по другому — когда кишечникъ зарастаетъ (схема рис. 42,  $b_1—b_3$ ).

На выше приведенныхъ схемахъ легко прослѣдить оба способа дифференцированія нотохорды. Мы видимъ, что въ томъ и другомъ случаѣ этотъ органъ образуется насчетъ

эпителия кишечного канала. Разница въ томъ, что въ первомъ случаѣ нотохорда закладывается въ видѣ небольшого впячивания участка энтодермального эпителия внутрь новообразующагося хобота на спинной сторонѣ кишечника, во второмъ же случаѣ въ нотохорду превращается, если такъ можно выразиться, пассивнымъ путемъ, вся передняя часть (сдѣлавшаяся слѣпой) кишечного канала вслѣдствіе образованія ротового отверстія не медианно, а на вентральной сторонѣ животнаго.

Впрочемъ, иногда случается, что даже при второмъ способѣ дифференцірованія передней части кишечника, ротъ образуется въ такомъ мѣстѣ, что нотохорды при этомъ процессѣ совсѣмъ не образуется, такъ какъ впереди рта не остается слѣпого участка кишки. (Рис. 5, 13).

Въ такомъ случаѣ нотохорда образуется впоследствии вторичнымъ путемъ — путемъ углубленія внутрь хобота участка энтодермального эпителия на границѣ энто — и эктодермы. (Рис. 1, *b*).

Образованіе нотохорды при второмъ изъ рассмотрѣнныхъ нами способовъ совершается значительно проще, чѣмъ при первомъ, гдѣ возможны различныя толкованія причины впячивания части энтодермы для образованія слѣпого мѣшечка — будущей нотохорды хобота.

Мнѣ кажется, я достаточно уяснилъ себѣ эти причины, изучивъ различныя стадіи образованія нотохорды при различныхъ способахъ ампутаціи и на громадномъ числѣ препаратовъ.

Въ результатѣ я прихожу къ заключенію, что главный стимулъ, вызывающій образованіе углубленія части энтодермы внутрь хобота, состоитъ въ неравномерномъ ростѣ экто- и энтодермы.

Дѣйствительно, благодаря энергичному росту эктодермы на первыхъ стадіяхъ образованія почки, она оказываетъ сильное давленіе на сросшуюся съ нею энтодерму и заставляетъ ее образовать складку — начало дифференцірованія нотохорды. Этотъ процессъ и приводятъ къ образованію того типа нотохорды, который мы имѣемъ на рис. 24, 32, 36, 39, 40, 47).

Здѣсь гистологическій характеръ дорзальной и вентральной половинокъ органа совершенно одинаковъ.

Иначе обстоятъ дѣло въ тѣхъ случаяхъ, когда въ гистологическомъ отношеніи можно различать дорзальную и вентральную стороны образовавшейся новой нотохорды. Примѣромъ могутъ служить рис. 19, 45 *a*, 23, на которыхъ видно, что дорзальная область органа представляетъ собою въ гистологическомъ отношеніи непосредственное продолженіе стараго эпителия пищевода съ его пузыристымъ строеніемъ, тогда какъ вентральная стѣнка есть новообразованіе. Эта стѣнка образована эпителиемъ, клѣтки котораго богаты протоплазмой, не образуютъ вакуолей. Большое скопленіе ядеръ въ верхней части эпителия указываетъ на эмбриональный его характеръ. По мѣрѣ приближенія къ проксимальному концу (къ эктодермѣ) этотъ эпителий все болѣе и болѣе утончается и, наконецъ, дѣлается ясно однослойнымъ въ мѣстѣ срастанія съ эктодермой. (См. особенно рис. 45 *a* = 22-й).

Старый, характерный, высокій эпителий, выстилающій пищеводъ, очень постепенно переходитъ здѣсь въ этотъ однослойный, тонкій.

Подобные препараты доказываютъ, что нотохорда въ данномъ случаѣ образовалась не благодаря простому изгибанию старой стѣнки пищевода, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаяхъ демонстрированныхъ на рис. 48, 47, *b*, 36, 47, *a*, 40, 47, а благодаря ряду тѣсно связанныхъ между собою процессовъ. Въ подобныхъ случаяхъ имѣютъ мѣсто, повидимому, слѣдующіе процессы:

- 1) Разрастаніе элементовъ энто- и эктодермы въ области непосредственнаго соприкасанія, а затѣмъ срастанія эктодермальной стѣнки со стѣнкой пищевода.
- 2) Болѣе энергичное, въ сравненіи съ энтодермой разрастаніе эктодермы, благодаря чему она надвигается на энтодерму и въ мѣстѣ соприкосновенія, какъ точкѣ наименьшаго сопротивленія, образуется складка, состоящая изъ молодой, вновь образовавшейся ткани.
- 3) Благодаря продолжающемуся процессу роста энтодермального эпителия, совершающемуся снизу вверхъ — образовавшаяся складка, во-первыхъ, направлена кверху, а во-вторыхъ, энтодермальный эпителий механически постепенно вытѣсняетъ ту часть эктодермы, которая вначалѣ приняла участіе въ образованіи описываемой складки.

Очень возможно, что даже въ самомъ началѣ процесса происходятъ пролиферація молодыхъ, новыхъ клѣтокъ только въ области дистальнаго конца старой энтодермы (рис. 46-й). Такимъ образомъ, на границѣ съ эктодермой въ точкѣ срастанія) энтодерма дѣлается болѣе пластич-



Рис. 45, *a* (22-й). Часть сагиттальнаго разрёза черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. На рисунокъ попала нотохорда съ частью эктодермы хобота. Между ними виденъ процессъ образованія скелета (*sk*) *chlm* — целенхима; *mb* — базальная перепонка. Zeiss. Qbj. 4, ocul. 2.

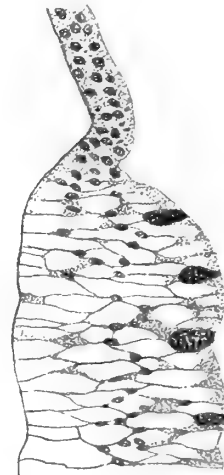


Рис. 46-й. Процессъ разрастанія энтодермального эпителия послѣ перерѣзки въ области срастанія его съ эктодермой. На рисунокѣ изображена часть сръза, приведеннаго на рис. 17-мъ. Zeiss. Obj. Hom. Imm. 2, ocul. 4.

ной, такъ что, когда эктодерма сильно разрастается внизъ, то, или долженъ произойти разрывъ въ мѣстѣ срастанія, или же энтодерма должна изогнуться. Этотъ изгибъ и образуется въ области срастанія эктодермы съ энтодермой, тамъ, гдѣ, какъ мы видѣли, энтодермическій эпителий, благодаря процессу пролифераціи новыхъ клѣтокъ, (рис. 46-й), соединенному съ процессомъ дедифференцировки, сдѣлался болѣе пластичнымъ.

Нѣтъ ничего невѣроятнаго въ томъ, что постоянное напряженіе ткани при возрастающемъ растяженіи со стороны эктодермы усиливаетъ процессъ разрастанія энтодермального эпителия.

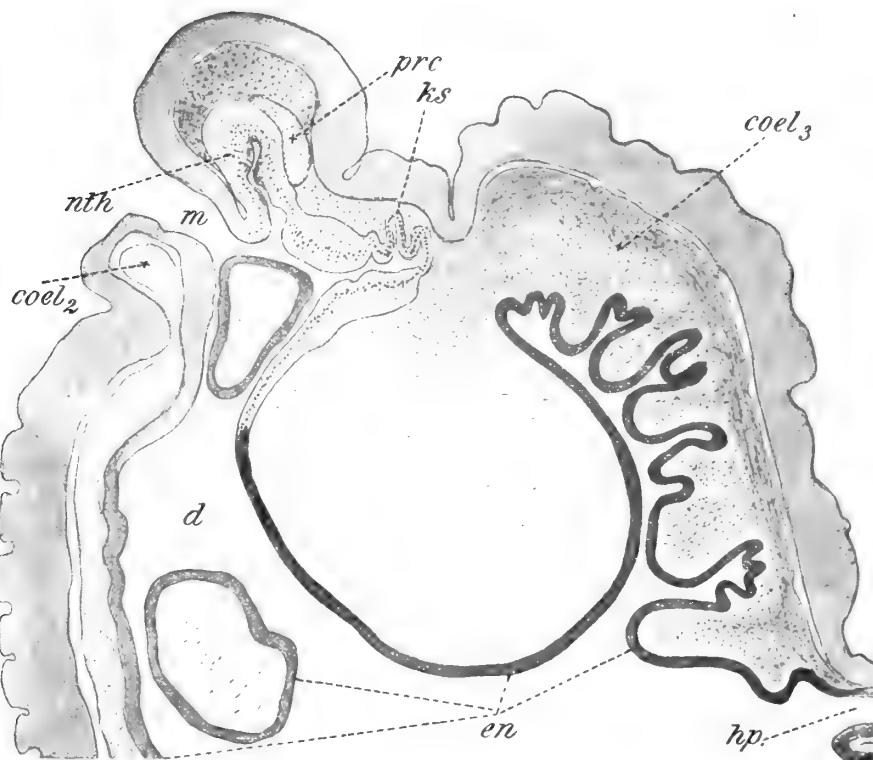


Рис. 47-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*, ампутированной немного выше начала печеночнаго отдѣла (см. рис. 4-й, сдѣланный съ того же препарата, но при маленькомъ увеличеніи). *m*—ротъ; *nth*—нотохорда; *ks*—жаберныя мѣшки; *d*—кишечникъ; *hp*—печеночный дивертикулъ; *en*—энтодерма (эпителий кишечника); *prc*—перикардій; *coel3*—целомъ туловища; *coel2*—будущій целомъ воротника, пока еще не дифференцировавшася. Leitz. Obj. 2, ocul. 2.

Нужно замѣтить, что механическое объясненіе возникновенія зачатка нотохорды въ видѣ мѣшковидной складки не всегда приложимо.

Бываютъ случаи, напримѣръ, что когда хоботь уже вполне дифференцировался и энергичные процессы роста прекратились, нотохорды еще не образовалось—процессъ запоздалъ. Случается, что она такъ и не образуется, но по большей части въ концѣ кон-

цовъ энтодермальный эпителий пищевода встаки углубляется для образованія нотохорды. Въ такихъ случаяхъ принципомъ неравномѣрнаго роста объяснять ея образованія прямо невозможно — нужно искать другіе причины, другіе законы, управляющіе явленіемъ.

Переходимъ теперь къ выясненію нѣкоторыхъ деталей, касающихся гистогенетическихъ процессовъ, наблюдающихся при регенераціи разсматриваемаго органа.

Эти процессы прекрасно иллюстрируются относящимися сюда рисунками, которые лучше всякаго описанія даютъ понятіе о ходѣ процесса и о строеніи регенерирующей нотохорды.

На рис. 16, 18, 19, 45, *a*, 23, 48 и въ особенности 47 *a*, 47, *b*, 47, 52—55 превосходно видно строеніе этого органа на разныхъ стадіяхъ развитія.

Мы видимъ, что по своему гистологическому строенію это образованіе не отличается отъ передней части кишечника, т. е. пищевода, непосредственное продолженіе котораго составляетъ.

Обыкновенно внутри нотохорды имѣется ясно выраженная полость. Иногда эта полость очень узка (рис. 47, 48), иногда же она такъ хорошо выражена, стѣнки нотохорды такъ тонки, ихъ эпителиальное строеніе настолько ясно, что на разрѣзахъ этотъ органъ производитъ впечатлѣніе настоящей тонкостѣнной трубки (рис. 20, 52—55 45, *a* и др.).

Зачастую въ стѣнкахъ нотохорды образуются железы, сильно красящіяся гематоксилиномъ и открывающіяся въ полость (рис. 37, 40 и др.).

Въ главѣ четвертой мы еще вернемся къ вопросу о регенераціи нотохорды.

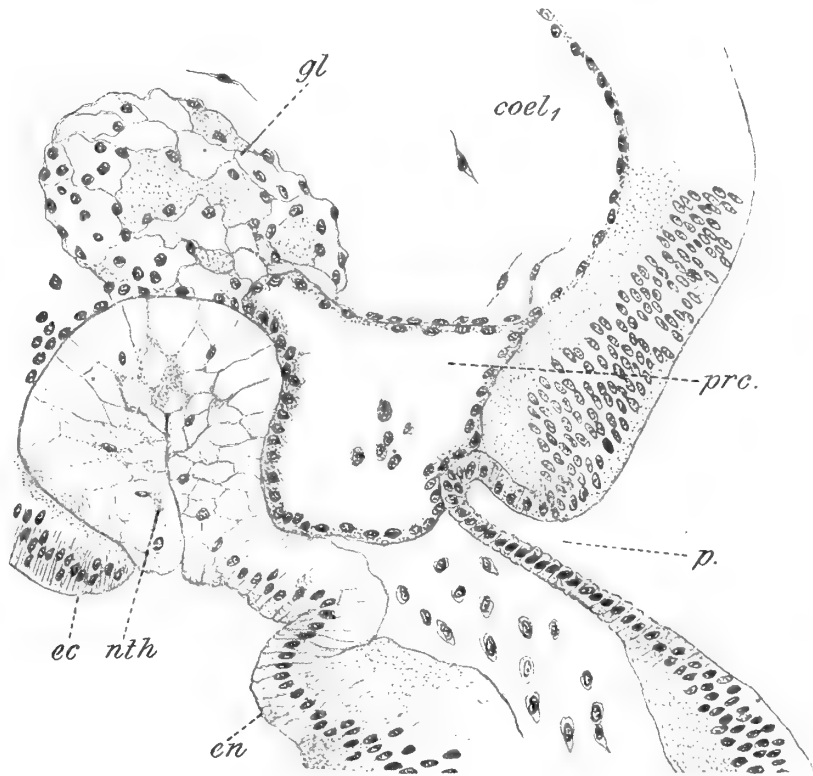


Рис. 47, *a* (39-й). Часть срѣза, приведеннаго на рис. 1-мъ *b*, въ области регенерирующихъ главныхъ органовъ хобота: нефридiального эктодермального канала (*p*); перикардiя—*prc*; glomerulus—*gl*; нотохорды—*nth*. Zeiss Obj. Hom. Imm. 2, ocul. 4.

### Жаберный аппаратъ.

Образованіе жабръ въ регенерирующемъ переднемъ концѣ *Ptychodera* начинается уже тогда, когда въ немъ дифференцировались всѣ остальные органы. На тѣхъ стадіяхъ, когда только что начинается образованіе жаберныхъ мѣшковъ, хоботъ уже совершенно дифференцированъ, а воротникъ только еще начинаетъ дифференцироваться.

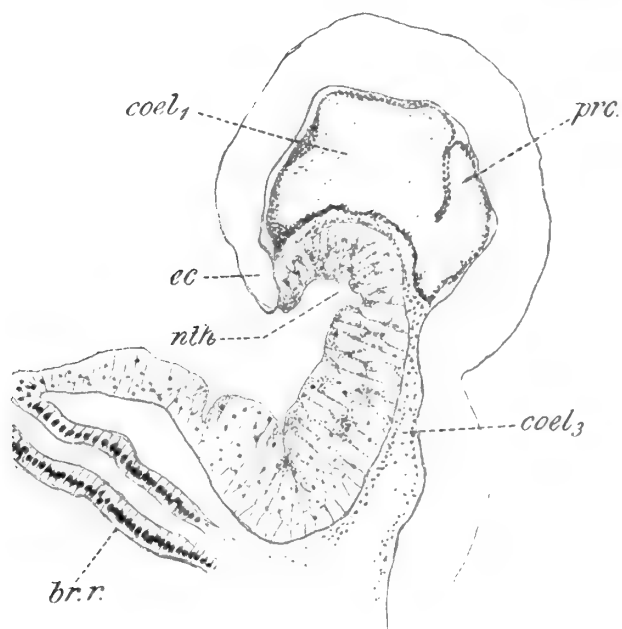


Рис. 47, б (32-й). Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. *coel*<sub>1</sub> — целомъ хобота, отдѣляющій на дорзальной сторонѣ перикардій (*prc.*); *nlh* — нотохорда; *br.r.* — начало жаберной области; *coel*<sub>3</sub> — туловищная целенхима, образующая на позднихъ стадіяхъ целомъ воротника, который еще только намѣченъ. Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

Первыя стадіи развитія жабернаго аппарата представлены на рис. 4 и 47, изображающихъ сагиттальные разрѣзы черезъ регенерирующихъ животныхъ, ампутированныхъ почти на уровнѣ печеночныхъ мѣшковъ. Мы видимъ здѣсь начало процесса образованія жабернаго аппарата, выражающагося въ томъ, что на спинной сторонѣ, передифференцировавшейся въ вышеуказанномъ направленіи (рис. 42-й, схема) передней части кишечника, образуется два ряда складокъ, расположенныхъ симметрично. Иногда эти складки образуются на боковой поверхности кишечника, но всегда онѣ вытянуты въ направленіи перпендикулярномъ продольной оси животнаго.

На вышеприведенной стадіи образовались уже три пары складокъ, но у мепя есть стадіи, на которыхъ видна только одна складка.

Какъ я уже сказалъ, процессъ дифференцированія этихъ первичныхъ жаберныхъ мѣшковъ происходитъ въ той области кишечника, которая уже передифференцировалась и приняла видъ характерный для пищеводной части нормальной кишки *Enteropneusta*. Дѣйствительно, на рисункахъ 47 и 50 мы видимъ, что жаберныя складки закладываются въ области высокаго, вакуолистаго эпителия, образовавшагося на мѣстѣ эпителия, типичнаго для задней части кишечника.

Нужно, впрочемъ, замѣтить, что нерѣдко жаберныя мѣшки образуются ниже гра-

ницы указанного вакуолистаго эпителия, а именно въ области типичнаго эпителия задней части кишечнаго канала, гдѣ указанная передифференцировка не имѣла мѣсто.

Вышеприведенные препараты (рис. 24, 48, 49 а, 49) иллюстрируютъ этотъ процессъ. Они представляютъ сагиттальные срѣзы черезъ переднюю регенерирующую часть *Ptychodera minuta* на стадіи образованія второго жабернаго мѣшка, причемъ одна изъ складокъ кишечника уже открылась наружу жабернымъ отверстіемъ (рис. 48 и 49).

Несмотря на небольшое увеличеніе, разница въ гистологическомъ строеніи между эпителиями передней и задней части кишечника выступаютъ рѣзко.

На этихъ рисункахъ ясно видно, что жаберныя складки образовались именно въ области эпителия задней части кишечника.

Въ какомъ бы мѣстѣ послѣдняго не образовались вышеуказанныя складки, но мѣрѣ ихъ дифференцированія, эпителий, пошедшій на образованіе каждой складки, претерпѣваетъ сложную передифференцировку, въ результатѣ которой стѣнки, составляющія зачатки жаберныхъ мѣшковъ, принимаютъ своеобразное и характерное строеніе. Кѣлѣтки ихъ располагаются въ одинъ рядъ, принимаютъ цилиндрическую форму и покрываются рѣсничками.

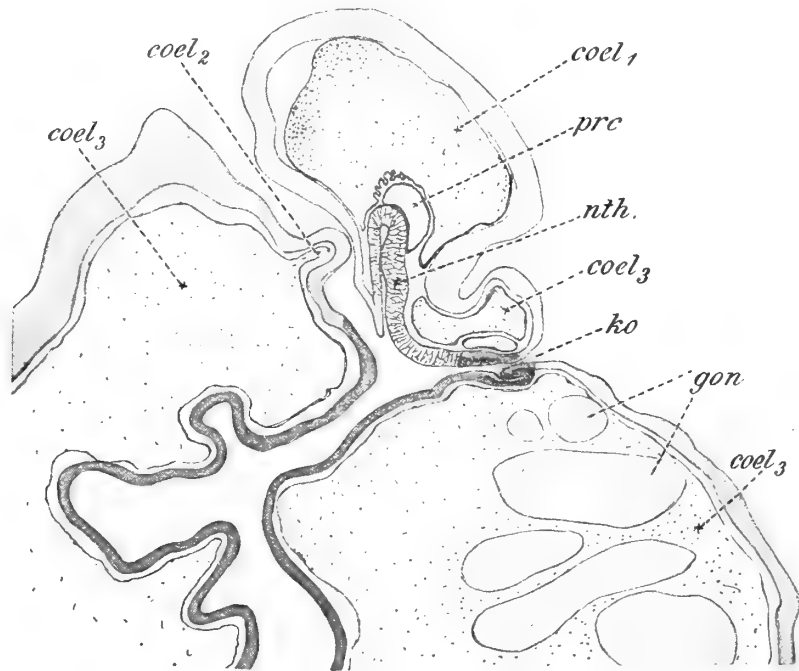


Рис. 48-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Хоботъ уже вполне образовался, начинаетъ дифференцироваться воротникъ въ видѣ кольцевидной складки эктодермы, куда врастаетъ участокъ туловищнаго целома для образованія будущаго целома воротника (слѣва—*coel*<sub>2</sub>). Непосредственно подъ зачаткомъ воротника виденъ процессъ образованія жаберныхъ щелей (*ko*). Животное было регенерировано въ области гонадъ. *coel*<sub>1</sub> — целома хобота; *prc* — перикардій (надъ нимъ складки *glomerulus*); *coel*<sub>2</sub> — целома воротника (справа между обозначеніями *nth* и *ko-coel*<sub>2</sub> обозначаетъ тоже воротниковый, а не туловищный, участокъ целома—цифра 3 при обозначеніи *coel* была по ошибкѣ поставлена вмѣсто 2), *nth*—нотохорда; *ko*—жаберная щель; *gon*—гонады. Zeiss Obj. 16, ocul 2.

На рис. 50-мъ представляющемъ часть срѣза, изображеннаго на рис. 47-мъ, только при бѣльшемъ увеличеніи, ясна видна градація въ образованіи жаберныхъ складокъ и процессъ передифференцировки энтодермальнаго эпителия. Въ только что образовавшейся, или, даже лучше сказать, образующейся, верхней складкѣ, эпителий имѣетъ еще типичное для эпителия



передней части кишечника строение, тогда какъ въ ниже лежащихъ складкахъ клітки эпителия расположились уже характернымъ для стѣнокъ жаберныхъ мѣшковъ образомъ.

Точно такая же передифференцировка происходитъ и во второмъ изъ рассмотрѣнныхъ нами случаевъ, а именно, въ случаѣ закладки жаберныхъ складокъ въ области эпителия задней части кишечника. Въ этомъ случаѣ изъ эпителия съ беспорядочно разбросанными ядрами образуется типичный цилиндрической мерцательный эпителий (рис. 49-й).

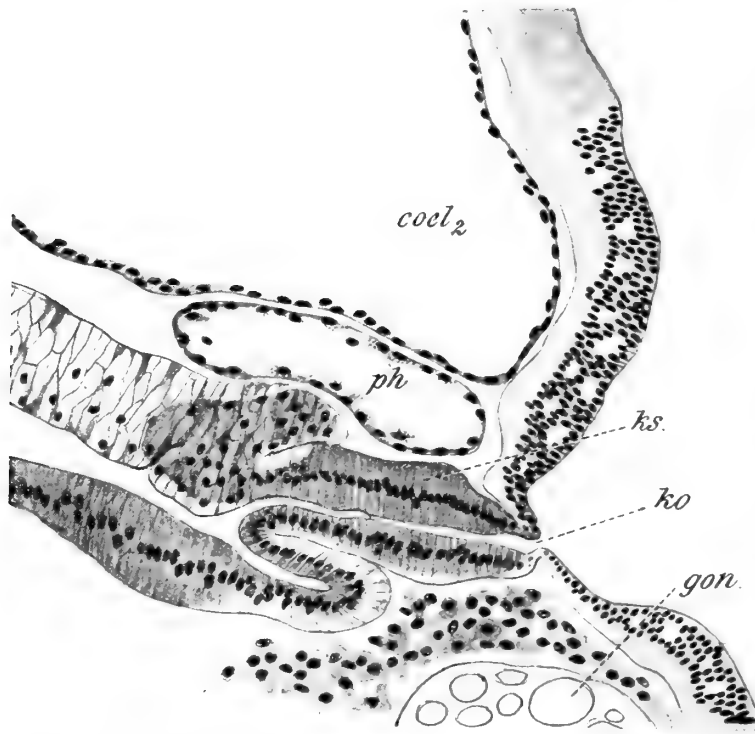


Рис. 49-й. Часть разрѣза, изображеннаго на рис. 48 (область образованія жаберной щели—*ko*) при сильномъ увеличеніи. *ks*—жаберный мѣшокъ проправившійся наружу щелью—*ko*. Подъ нимъ зачатокъ второго мѣшка. Zeiss. Obj. 4, ocul. 4.

Я не могъ прослѣдить какой нибудь законмѣрности въ порядкѣ появленія жаберныхъ складокъ, точно также, какъ и въ порядкѣ появленія жаберныхъ отверстій.

Во всякомъ случаѣ жаберныя складки появляются не сразу, а постепенно, одна за другой, или сверху внизъ, или же сперва образуется одна или двѣ центральныхъ, которыя быстро дифференцируются и принимаютъ типичный *habitus*, а затѣмъ сверху и снизу начинается процессъ образованія новыхъ складокъ.

Меня очень интересовалъ вопросъ, принимаетъ ли участіе эктодерма въ образованіи наружной части жабернаго мѣшка.

Мнѣ кажется, нужно рѣшить этотъ вопросъ въ отрицательномъ смыслѣ. Обыкновенно пора или жаберное отверстіе образуется путемъ простаго прорыва жаберной складки наружу (рис. 49-й). Если иногда и случается наблюдать образованіе небольшого впаденія эктодермы навстрѣчу растущему энтодермальному мѣшку (рис. 51-й), то все же участіе эктодермы въ данномъ случаѣ чрезвычайно ограничено.

Такимъ образомъ, на основаніи десятковъ изученныхъ серій срѣзовъ, я прихожу къ тому выводу, что эктодерма, или совсѣмъ не принимаетъ участія въ образованіи жабернаго аппарата, или же участіе ея сводится лишь къ образованію жаберныхъ поръ.

## Нервная система.

Переходя къ описанію образованія нервной системы при регенерации *Ptychodera* мнѣ главнымъ образомъ, разумѣется, предстоитъ выяснитъ развитіе воротничковаго дорзального нерва, имѣющаго видъ трубки. Этотъ органъ имѣетъ большое теоретическое значеніе и изученію его дифференцировки я посвятилъ много времени.

Но прежде, чѣмъ переходить къ изложенію имѣющихся въ моемъ распоряженіи данныхъ относительно образованія нерва воротничка, скажу два слова объ общемъ ходѣ дифференцированія нервной системы у *Ptychodera* при регенерации.

Какъ извѣстно, всюду подъ наружной эктодермой *Enteropneusta* имѣется различной мощности нервно-волокнистый слой, отдѣляющій въ видѣ сплошнаго мѣшка всю поверхность животнаго. Этотъ подкожный нервно-волокнистый слой появляется очень рано — почти тотчасъ по образованіи новой эктодермы подъ нею начинаетъ дифференцироваться эта характерная ткань. Она образуется (какъ это уже было доказано Бэтсономъ (85) для *Balanoglossus kowalewskii*) путемъ образованія отростковъ эктодермальныхъ клѣтокъ, переплетающихся между собою въ густую массу волоконъ.

Нервно-волокнистый слой достигаетъ очень скоро своей нормальной толщины и вслѣдъ за этимъ начинается дифференцировка нервныхъ центровъ.

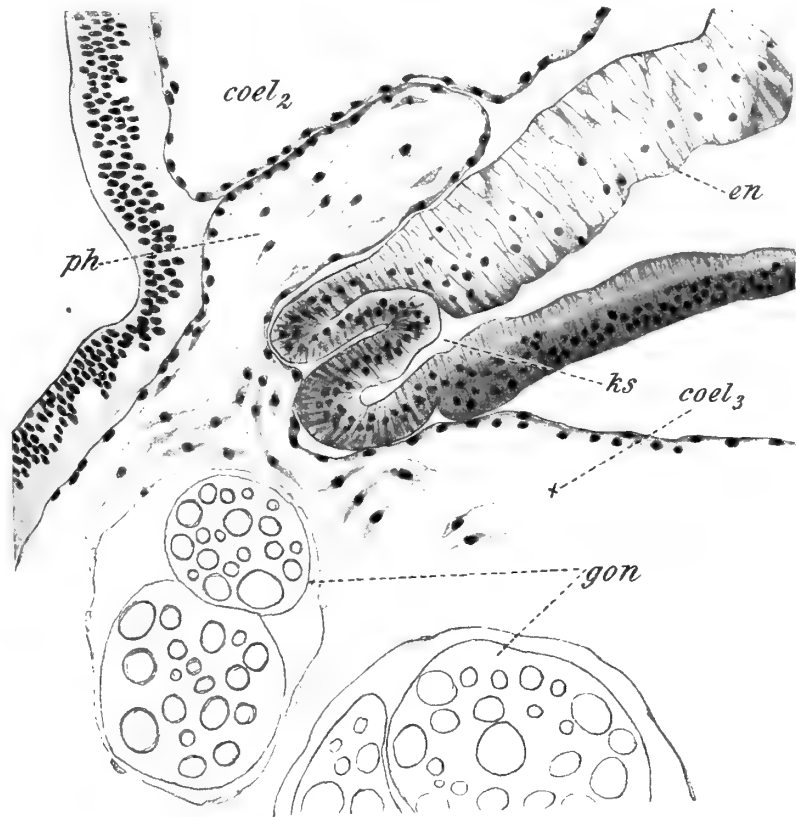


Рис. 49 а (25-й). Часть сагиттальнаго разрѣза черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Zeiss. Obj. 4, ocul 4. *coel*<sub>2</sub>—целомъ воротничка; *coel*<sub>3</sub>—целомъ туловища; *ph*—перихѣмальныя полости, образующіяся путемъ вращанія въ воротничкѣ участковъ туловищнаго целома; *ks*—жаберныя мѣшки; *en*—стѣнка кишечника въ области пищевода и нотохорды.

У основания хобота по окружности эктодерма утолщается. Нервно волокнистый слой достигает здѣсь особенно большой мощности — образуется характерное для хобота *Etegorpeusta* нервное кольцо. Особенно сильно выражено утолщение на спинной части хобота (рис. 50-й), гдѣ иногда оно углубляется внутрь, обрастается со всѣхъ сторонъ эктодермой

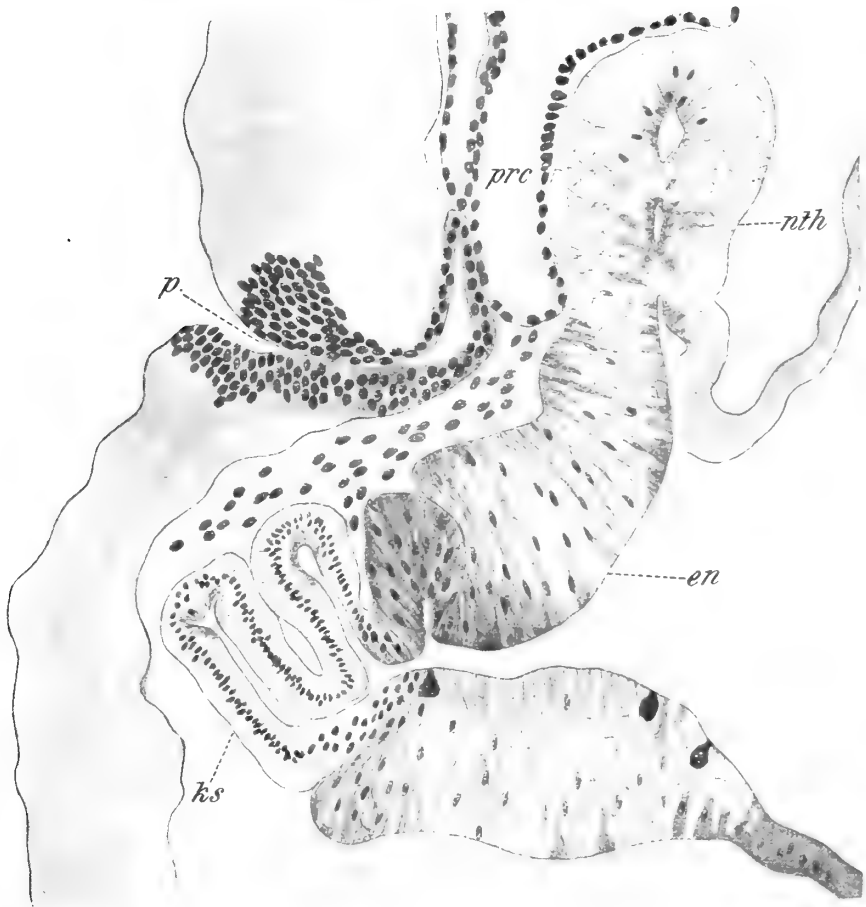


Рис. 50-й. Часть сагиттального разрѣза черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Рисунокъ сдѣланъ со срѣза, взятаго изъ той же серии, что и рис. 47-й. На рисункѣ прекрасно виденъ процессъ дифференцированія жаберныхъ складокъ (*ks*) и ното хорды (*nth*). *p* — нефридіальная пора съ зачаткомъ эктодермальнаго канала нефридія, мезодермальныи участокъ котораго, въ видѣ узкаго мѣшка, пришелъ въ соприкосновеніе съ эктодермальнымъ зачаткомъ органа; *prc* — перикардій. Zeiss Obj. 3, ocul. 6.

и превращается въ пузырекъ (рис. 3-й) съ ясно выраженною полостью внутри. Сходство такого пузырька съ спинной нервной трубкой воротника увеличивается еще тѣмъ обстоятельствомъ, что клѣточный слой здѣсь, также какъ и въ нервной трубкѣ воротника, располагается внутри, выстилая полость пузырька.

Описываемый пузырьекъ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ совершенно отшнуровывается отъ эктодермы спинной поверхности хобота, обыкновенно же онъ находится съ нею въ связи, хотя полость его и не общается уже съ наружной средой.

Очень рано также происходитъ дифференцирование спинного нервного тяжа въ области воротника.

Уже на самыхъ раннихъ стадіяхъ обособленія воротниковаго сегмента, на спинной его сторонѣ имѣется утолщеніе эктодермы, выражающееся главнымъ образомъ въ сильной концентраціи нервноволокнистаго слоя вдоль дорзальной стороны воротника по медіанной линіи.

Это медіанное утолщеніе кожи, дифференцировавшееся въ нервный тяжъ, на указанной стадіи служитъ непосредственнымъ продолженіемъ туловищнаго спинного

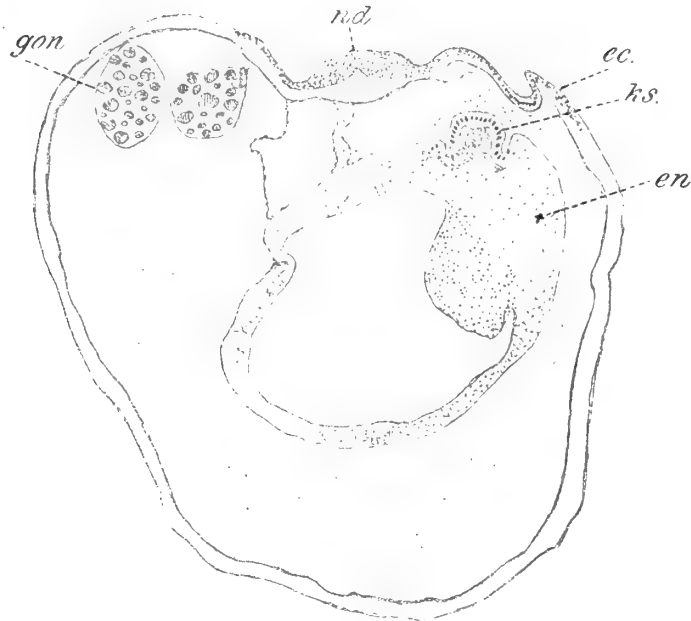


Рис. 51-й. Поперечный разрѣзъ черезъ туловищный сегментъ регенерирующей *Ptychodera*. Разрѣзъ прошелъ въ области гонадъ. Кишечникъ образуетъ жаберный мѣшокъ (*ks*), навстрѣчу которому инвагинируетъ небольшой участокъ эктодермы (*ec*). *nd*—дорзальный нервъ туловища; *gon*—гонады. Leitz Obj. 2, ocul 4.

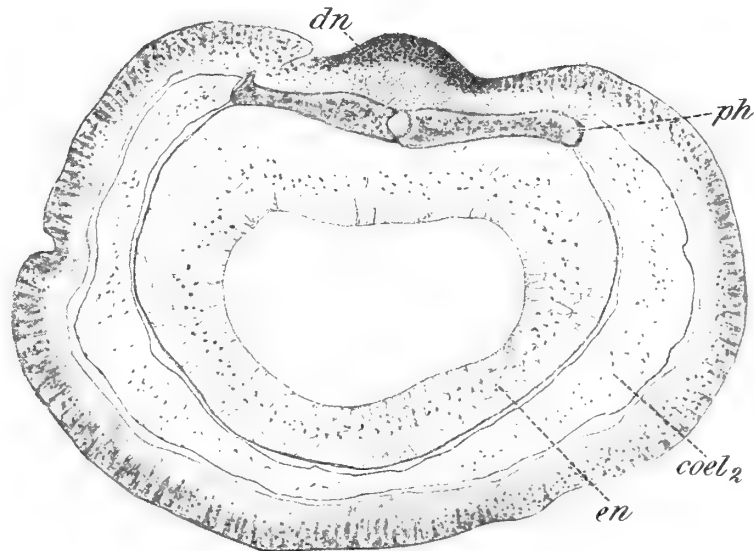


Рис. 52-й. Поперечный разрѣзъ черезъ дифференцирующійся воротникъ регенерирующей *Ptychodera*. Начальная стадія процесса образованія нервной трубки—слѣва отъ дорзальнаго нерва видна складка эктодермы, которая образуетъ впоследствии нервный тяжъ (рис. 55). *dn*—дорзальный нервъ воротника; *ph*—перихималныя полости; *coel<sub>2</sub>*—целомъ воротника; *en*—пищеводъ. Zeiss. Obj. 16, ocul 4.

нерва, ничѣмъ не отличаясь отъ послѣдняго въ гистологическомъ отношеніи. Для сравненія того и другого отсылаю читателя къ рис. 51 и 52.

На первомъ, представляющемъ поперечный разрѣзъ черезъ регенерирующій воротникъ, можно видѣть строеніе воротниковаго нерва на ранней стадіи развитія, на второмъ представленъ поперечный разрѣзъ черезъ туловище *Ptychodera* съ вполне дифференцированнымъ дорзальнымъ нервомъ (*nd*).

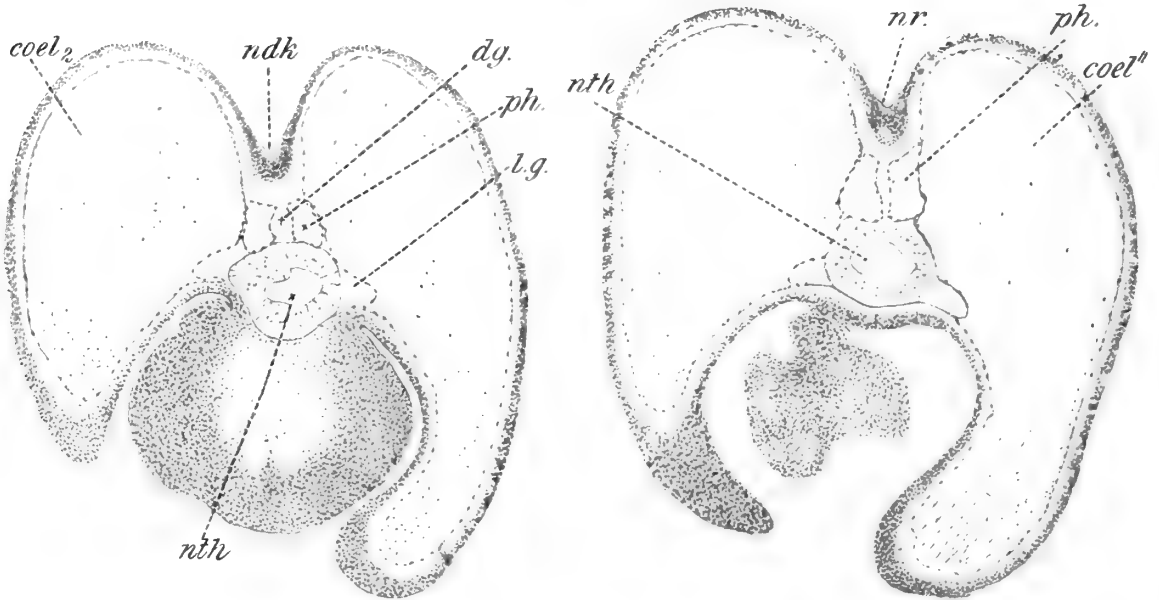


Рис. 53-й.

Рис. 54-й.

Рис. 53-й и 54-й. Два поперечныхъ разрѣза черезъ вновь образующійся воротникъ регенерирующей *Ptychodera*. (Изъ серии срѣзовъ, сдѣланныхъ черезъ экземпляръ, изображенный на рис. 6-мъ и 8-мъ). Разрѣзы прошли черезъ верхнюю часть воротника, въ мѣстѣ прикрѣпленія хобота (рис. 53-й) и ниже (рис. 54-й). На обоихъ срѣзахъ видны двѣ лопасти капюшона воротника, еще не сросшіеся на вентральной сторонѣ. *ndk* — дорзальный нервъ (на рис. 54 *nr*) на двѣ желобка, предшествующаго образованію нервной трубки; *dg* — дорзальный сосудъ; *lg* — латеральные сосуды; *ph* — перихемальная полость; *nth* — ното хорда; *coel1* (*coel2*) — целомъ воротника. Leitz. Obj. 2, ocul. 4.

Дальнѣйшее дифференцированіе нервной трубки воротника, т. е. превращеніе нервнаго тяжа въ трубку, происходитъ различными способами.

Наиболѣе часто наблюдающійся способъ образованія definitivaго воротниковаго нерва состоитъ въ томъ, что вся дорзальная стѣнка эктодермы на всемъ протяженіи воротника углубляется внутрь — получается широко открытый наружу желобъ.

Это желобковидное углубленіе эктодермы можно ясно видѣть на рис. 6-мъ и 8-мъ, изображающихъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera minuta* съ уже дифференцированными хоботомъ и воротникомъ. Эктодерма на спинной сторонѣ воротника настолько углублена внутрь, что получается впечатлѣніе, что воротникъ раздѣленъ на двѣ лопасти (рис. 6-й, стр. 14).

На рис. 53-мъ и 54-мъ изображены поперечные сръзы черезъ воротникъ того объекта, который былъ представленъ на вышеприведенномъ рисункѣ 6-мъ (другіе разръзы той же серіи приведены на рисункахъ главы IV).

Несмотря на маленькое увеличеніе, при которомъ сдѣланы рисунки, они даютъ полное представленіе не только о процессѣ инвагинаціи медианнаго участка дорзальной поверхности эктодермы воротника, но даже позволяютъ судить о нѣкоторыхъ гистологическихъ деталяхъ.

Такъ, приведенные препараты ясно доказываютъ, что *въ моментъ инвагинаціи, нервный тяжъ воротника является уже гистологически вполне дифференцированнымъ образованіемъ.*

На дальнѣйшихъ стадіяхъ края желобка смыкаются и получается нервная трубка, долгое время связанная на всемъ своемъ протяженіи съ эктодермой. Соответственно положенію нервной трубки подъ поверхностью эктодермы, на поверхности воротника долго замѣтно углубленіе— оно сглаживается лишь на очень позднихъ стадіяхъ.

Добавлю еще, что процессъ инвагинаціи происходитъ сразу на всемъ протяженіи воротника.

Описанный способъ образованія нервной трубки воротника нужно считать наиболее типичнымъ. Чаще всего этотъ органъ при регенерации дифференцируется именно путемъ инвагинаціи. Значительно рѣже приходилось мнѣ наблюдать другой типъ образованія воротниковой нервной трубки. Этотъ типъ можно ясно прослѣдить между прочимъ на поперечныхъ сръзахъ, изображенныхъ на рис. 52-мъ и 55-мъ. На этихъ препаратахъ видны первые процессы, путемъ которыхъ нервный стволъ, имѣющій видъ плотнаго утолщенія эктодермы на спинной поверхности воротника, превращается въ трубку. Мы имѣемъ въ данномъ случаѣ дѣло съ процессомъ наростанія надъ нервнымъ тяжемъ двухъ складокъ эктодермы, которыя надвигаются на него сбоковъ. Въ результатѣ этого процесса, лежавшая вначалѣ на поверхности, нервная пластинка оказывается теперь лежащей подъ кожей.

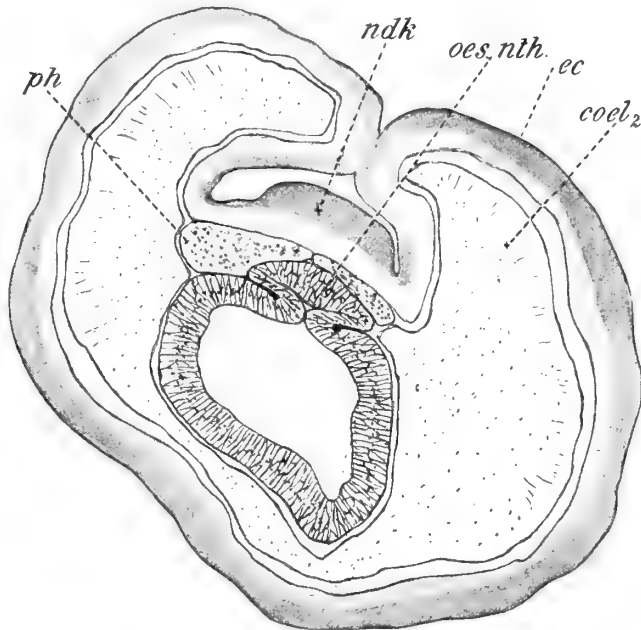


Рис. 55-й. Поперечный разръзъ черезъ регенирующій воротникъ *Ptychodera*. *ndk*—дорзальный нервъ воротника. *oes.nth.ec*—воротниковая нотохорда; *coel<sub>2</sub>*—целомъ; *ph*—перисомальные полости. Zeiss Obj. 16, ocul. 4.

Интересно, что нѣкоторые препараты (напр. изображенный на рис. 56-мъ) говорятъ за то, что при этомъ процессѣ нервная пластинка иногда отщепляется сбоковъ отъ эктодермы, погружается внутрь воротника и превращеніе ея въ трубку происходитъ такимъ же

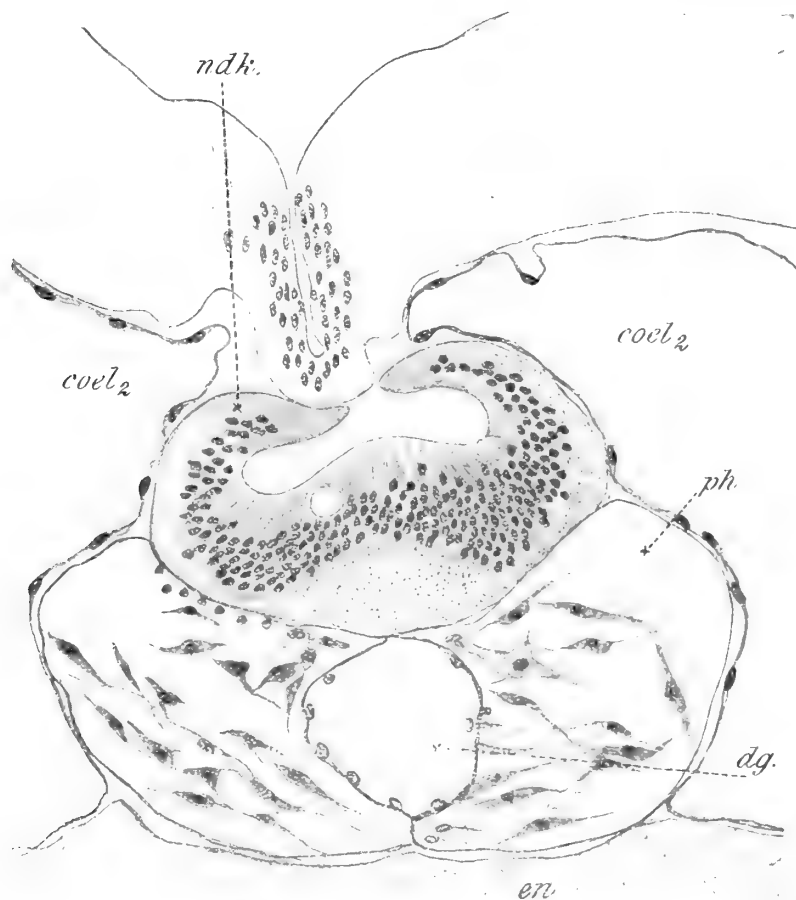


Рис. 56-й. Часть поперечнаго разрёза черезъ дифференцирующійся воротникъ регенерирующей *Ptychodera* въ области образованія дорзальнаго нерва. *ndk* — дорзальная нервная пластинка въ моментъ образованія нервной трубки; *ph* — перихемальные полости съ сосудомъ между ними (*dg*); *en* — эпителий пищевода; *coel<sub>2</sub>* — целомъ воротника. Zeiss. Obj. Ном. Imm. 1, 5, ocul. 2.

способомъ, который имѣетъ мѣсто у *Amphioxus*, именно, путемъ загибанія краевъ нервной пластинки наверхъ и срастанія ихъ.

## ГЛАВА III.

## Регенерація и онтогенезъ.

## Общія замѣчанія.

Вопросъ о существованіи преемственности между эмбриональными пластами старой и вновь образующейся при регенераціи части тѣла животнаго былъ уже давно поднятъ и рѣшенъ въ положительномъ смыслѣ.

Выясненію отношенія эмбриональнаго развитія къ процессу регенераціи былъ посвященъ рядъ работъ.

Детальное изслѣдованіе процесса регенераціи у плоскихъ червей (Шульцъ), у различныхъ аннелидъ (Нерке, Hescheler, Michel, Макаровъ, Шульпъ, Ивановъ, Abel и др.), у нѣкоторыхъ иглокожихъ, а именно у офіуръ (Давыдовъ), у Phoronis (Шульцъ) показало, что между регенераціей и онтогенезомъ существуетъ почти полное соотвѣтствіе — регенеративный ходъ органогенеза принципиально совпадаетъ съ эмбриональнымъ.

Число наблюденій, противорѣчащихъ этому заключенію (Rievel, 96; Haase, 99; v. Wagner, v. Bock и др.) по мѣрѣ увеличенія фактическаго матеріала, все уменьшалось. Такъ, описанные случаи возстановленія задней кишки у аннелидъ насчетъ энтодермы, а не путемъ эктодермальнаго впяченія, какъ это имѣетъ мѣсто при эмбриональномъ развитіи, случаи, одно время серьезно угрожавшіе неизблемости старой, десятки лѣтъ существующей теоріи зародышевыхъ пластовъ, въ настоящее время отчасти опровергнуты, отчасти разъяснены.

Возникшее въ послѣдніе годы теченіе, противное морфологическому ученію о зародышевыхъ листахъ, выразилось чрезвычайно опредѣленно и въ литературѣ, посвященной вопросу о регенераціи. При отрицательномъ отношеніи къ идеѣ о морфологическомъ значеніи пластовъ вообще, вполне естественно отрицательно отнестись и къ идеѣ о существованіи преемственности между пластами старыхъ и вновь образующихся тканей и органовъ при регенераціи. Появившаяся въ 1901 г. книга Моргана о регенераціи объединила принципиальныхъ противниковъ теоріи зародышевыхъ пластовъ. Морганъ выступаетъ въ ней въ качествѣ яраго противника ученія о связи регенераціи съ онтогеніей и филогеніей.

Нельзя не притти къ заключенію, что доводы Моргана, равно какъ и его критика, чрезвычайно слабы. Указывая въ литературномъ указателѣ много работъ, явно противорѣчащихъ его взглядамъ, авторъ, однако, не касается ихъ въ текстѣ, а обрушивается на нѣсколько фактовъ, которые въ сущности не играютъ существеннаго значенія, а иногда даже и прямо говорятъ не въ пользу заключенія Моргана.



Такова, напр., его критика фактического матеріала, касающагося происхожденія при регенераціи мезодермальныхъ образованій у аннелидъ, въ частности у олигохэтъ.

Нельзя не признать, что Морганъ избралъ плохой объектъ для своей критики.

Параллелизмъ между онтогенезомъ и регенераціей въ процессахъ образованія мезодермы и ея дериватовъ у аннелидъ въ настоящее время уже достаточно выясненъ.

Въ особенности ясно выступаетъ эта связь между регенеративнымъ и эмбриональнымъ органогенезами у *Lumbriculus*, т. е. именно одной изъ тѣхъ формъ, на которую ссылается Морганъ (а позже также и Mozkowsky) въ своей книгѣ, какъ на наиболее яркій примѣръ якобы существующаго несоотвѣтствія между регенераціей и онтогенезомъ въ процессѣ образованія мезодермы.

Оба автора страннымъ образомъ совершенно игнорируютъ чрезвычайно обстоятельныя изслѣдованія П. П. Иванова по этому вопросу, гдѣ доказывалось, что у *Lumbriculus* мезодерма при регенераціи образуется изъ элементовъ старой мезодермы — изъ особыхъ мезодермальныхъ необластовъ. (Iwanow, 1903).

Что касается *Polychaeta*, то у нихъ при регенераціи Шульцу (E. Schultz, 99) удалось даже доказать двойственное происхожденіе мезодермы, т. е. существованіе при регенераціи первичной и вторичной мезодермы — процессъ, который въ послѣднее время былъ доказанъ Э. Мейеромъ (Ed. Meyer, 98) для эмбриональнаго развитія *Polychaeta*.

Я не буду останавливаться на рядѣ другихъ изслѣдованій, которыя приводятъ насъ къ заключенію, что Морганъ не правъ и что отрицать того факта, что между регенераціей и онтогенезомъ существуетъ связь, нельзя.

Однако многія стороны вопроса пугаются въ подтвержденіи и требуется еще много работы для всесторонняго освѣщенія этого, несомнѣнно, чрезвычайно загадочнаго явленія.

Это тѣмъ болѣе необходимо, что въ самой тѣсной связи съ вопросомъ о существованіи параллелизма между регенераціей и эмбриональнымъ развитіемъ находятся столь важныя проблемы, какъ, напримѣръ, значеніе регенераціи для изученія филогенеза.

Вотъ почему, закончивъ фактическую сторону своего изслѣдованія, изложивъ процессъ органогенеза при регенераціи *Enteropneusta*, я перехожу къ подробному сравненію регенеративнаго органогенеза съ эмбриональнымъ.

Нельзя не отмѣтить, что сравненіе обоихъ процессовъ — регенераціи и онтогенеза въ нѣкоторыхъ случаяхъ представляетъ значительныя трудности.

Дѣйствительно, несмотря на ту выдающуюся роль, которую играютъ *Enteropneusta* въ современной морфологіи, эмбриональное развитіе представителей этой группы изучено далеко не съ желательной полнотой.

Мы имѣемъ рядъ работъ, касающихся гистологическаго строенія различныхъ *Tornaria* (Willey, Bourne, Weldon, Spengel, Ritter, Goette, Metschnikoff, Morgan, Agassiz и др.), но все эти работы даютъ въ общемъ немного фактическаго матеріала для выясненія органогенеза. Лучшія изслѣдованія органогенетическихъ процессовъ при эмбрио-

нальномъ развитіи Enteropneusta принадлежать Бэтсону (Bateson, 84, 85, 86, 87) и Моргану (Morgan, 92, 94).

Работы этихъ авторовъ выяснили если и не съ желаемой, то все же съ достаточной полнотой ходъ развитія почти всѣхъ органовъ.

Для освѣщенія нѣкоторыхъ вопросовъ мнѣ казалось не лишнимъ временами обращаться за справками къ той литературѣ, которая за послѣднее время накопилась относительно процессовъ почкованія, и даже эмбриональнаго развитія *Pterobranchia* — группы, несомнѣнно, очень близко стоящей къ *Enteropneusta*.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи я буду разбирать относящійся сюда матеріалъ для каждаго органа отдѣльно.

### Сегментація.

Обратимъ прежде всего вниманіе на то, какъ происходитъ сегментированіе регенерата.

Мы видѣли, что если ампутировать животное въ области хвостоваго отдѣла, то этотъ хвостовой участокъ возстановляетъ передніе сегменты въ такомъ порядкѣ: сперва образуется передній I-й сегментъ (хоботь), затѣмъ на границѣ между I и III — закладывается II-й сегментъ (воротникъ). (Рис. 2-й на стр. 10).

Подобный же порядокъ появленія 2-го сегмента (воротника) наблюдается и при эмбриональномъ развитіи — при формированіи, напр. зародыша *Balanoglossus kowalewskii* Ag.

По наблюденіямъ Бэтсона (Bateson 84, Pl. XIII, fig. 11—14, стр. 135) несегментированный вначалѣ зародышь дѣлится перетяжкой на два сегмента — I-й и III-й, т. е. хоботь и туловище, и только на слѣдующихъ стадіяхъ закладывается II-я, воротниковая метамера. Тотъ же порядокъ появленія сегментовъ наблюдается и при процессѣ почкованія у *Pterobranchia* какъ у *Cephalodiscus*, такъ и у *Rhabdopleura*.

### Наружные покровы.

Наружные покровы регенерирующихъ участковъ *Ptychodera* образуются, какъ это легко видѣть, изучая приведенные рисунки, путемъ разрастанія эктодермы оставшихся частей животнаго, воротника или туловища — смотря по способу ампутаціи. Субэпителиальная нервная выстилка кожи образуется въ регенерирующихъ участкахъ эктодермы путемъ дифференцированія волокнистаго вещества изъ нитевидныхъ отростковъ эктодермальныхъ клѣтокъ, т. е. такимъ же способомъ, какимъ подкожный нервноволокнистый слой образуется у зародышей *Balanoglossus kowalewskii* по наблюденіямъ Бэтсона (Bateson, 85).

### Целомъ.

При регенераціи *Ptychodera* — целомъ всегда образуется, какъ мы видѣли, изъ элементовъ старыхъ участковъ целомической полости — целотелія и целенхимы.

Такъ, если оставался самый задній конецъ—т. е. 3-й сегментъ, то новыя, вновь образующіяся целомическія полости хобота и воротника регенерируютъ насчетъ целома этого задняго сегмента.

Если ампутація была произведена на уровнѣ воротника, то въ регенерирующемъ хоботѣ (и части воротника) целомъ образуетъ насчетъ целома воротника, а также и туловища (перихэмальныя полости, какъ мы видѣли, тоже принимаютъ участіе въ образованіи целомической полости хобота).

Такимъ образомъ *энтодерма никогда не принимаетъ участія въ процессъ регенерации целома.*

При эмбриональномъ же развитіи *Enteropneusta* целомическія полости ихъ, какъ извѣстно, берутъ обыкновенно начало изъ элементовъ первичнаго кишечника, причемъ въ однихъ случаяхъ наблюдается процессъ настоящей, типичной эвагинаціи стѣнки первичной кишки (у *B. kowalewskii*), въ другихъ же, какъ напр. у нѣкоторыхъ *Togonaria*, процессъ этотъ нѣсколько затемненъ, а иногда и сильно видоизмѣненъ. Такъ, напр., у изученныхъ Морганомъ американскихъ *Togonaria* мы наблюдаемъ уже процессъ образованія целома не энтероцельнымъ путемъ, а путемъ простой пролифераціи элементовъ энтодермы. Последніе сначала образуютъ плотныя клѣточные скопленія, внутри которыхъ вторичнымъ путемъ образуется полость.

Итакъ, *при регенерации Enteropneusta целомъ беретъ начало изъ элементовъ стараго целома, при онтогеніи — изъ энтодермы.* Полнаго соответствія между обоими процессами мы въ данномъ случаѣ какъ будто не находимъ, однако мнѣ кажется, различія здѣсь не столь значительны, какъ кажутся на первый взглядъ.

Прежде всего нужно замѣтить, что и при эмбриональномъ развитіи, напр. у *Togonaria*, целомическія полости воротника и туловища образуются не въ видѣ самостоятельныхъ выпячиваній стѣнки первичнаго кишечника, какъ это описано Бэтсономъ для *B. kowalewskii*, а нѣсколько иначе. Дѣло происходитъ такъ. Сперва образуется пара целомическихъ пузырьковъ, соответствующихъ целому туловищнаго сегмента, которые уже даютъ въ свою очередь начало целому воротника. Такъ происходитъ процессъ образованія целомическихъ мѣшковъ воротника и туловища у средиземноморскихъ *Togonaria* по наблюденіямъ Шпенгеля (Spengel, 93, стр. 427—431), которые воиѣ подтвердили апіорное предположеніе Мечникова (Metschnikoff, 70, стр. 132) о томъ, что целомическія полости воротника представляютъ собою отдѣлившіеся участки целома туловищнаго сегмента.

Такимъ образомъ мы видимъ, что и *при онтогенезѣ целомъ воротника образуется иногда не непосредственно изъ энтодермы, а беретъ начало изъ элементовъ уже сформировавшагося целома туловища.*

Значительно труднѣе кажется на первый взглядъ провести параллель между регенерацией и онтогеніей въ процессахъ образованія хоботнаго целома.

Мы видѣли, что при регенерации целомъ хобота всегда беретъ начало изъ целома

того сегмента, насчетъ котораго образуется самъ хоботъ, т. е. является дериватомъ целома воротника, или туловища.

При эмбриональномъ развитіи (у *B. kowalewskii*, по Бэтсону) хоботной целома происходитъ путемъ отшнурованія самостоятельнаго непарнаго мѣшка отъ передней части первичной кишки зародыша. (Bateson, 84, 85).

О томъ, что въ образованіи целома хобота при регенерациі кишечника не принимаетъ участія, уже было извѣстно Шпенгелю (Spengel, 93, стр. 684).

Это обстоятельство дало поводъ Деляжу и Геруару (Délage & Hérouard, 98, стр. 53) цитирующимъ его наблюденія, сдѣлать замѣчанія о существующемъ будто бы принципиальномъ несоотвѣтствіи между процессами регенерациі и онтогенеза у *Enteropneusta*.

Подобное заключеніе почтенныхъ авторовъ нельзя не признать преждевременнымъ.

Не слѣдуетъ забывать, что энтеропельный способъ происхожденія целома хобота при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta* описанъ пока лишь для *B. kowalewskii* (Bateson, 84, 85), проходящаго прямой циклъ развитія. Что же касается тѣхъ формъ, которыя претерпѣваютъ при развитіи метаморфозъ и къ числу которыхъ, вѣроятно, принадлежитъ и изслѣдованная мною *Pt. minuta*, то о способѣ образованія ихъ хоботнаго целома мы до сихъ поръ ничего не знаемъ. Этотъ процессъ не изученъ ни у одной изъ многочисленныхъ формъ *Tornaria*, которыя въ настоящее время извѣстны. У самыхъ молодыхъ личинокъ, которыя подвергались изслѣдованію, целома хобота всегда уже является въ видѣ вполне дифференцированнаго образованія. Правда, въ литературѣ появлялись указанія на то, что у нѣкоторыхъ *Tornaria* этотъ органъ образуется насчетъ стѣнки первичной кишки, но указанія эти, какъ показалъ Шпенгель (Spengel, 93) совершенно неосновательны.

Такъ, ссылка Мечникова (Metschnikoff, 70, стр. 131) на Агассица, который будто бы наблюдалъ подобный процессъ, оказалась простымъ недоразумѣніемъ. Агассицъ высказалъ это только въ видѣ предположенія (Agassiz, 73, стр. 426).

Болѣе серьезно наблюденіе Гетте (Goette, 75), который изображаетъ на одномъ изъ своихъ рисунковъ *Tornaria* (fig. 25, Taf. 27), у которой головной целомической пузырь соединяется съ полостью кишечника. На основаніи этого рисунка можно было бы предполагать, что авторъ видѣлъ у наблюдавшейся имъ личинки процессъ отшнурованія целома хобота отъ стѣнки первичнаго кишечника на границѣ пищевода и желудка. Однако Шпенгель указываетъ, что есть много данныхъ предполагать, что Гетте имѣлъ дѣло въ данномъ случаѣ даже не съ *Tornaria*, а съ какою то другой личиночной формой<sup>1)</sup>.

Что касается самого Шпенгеля, много поработавшаго надъ вопросомъ о строеніи различныхъ *Tornaria* Средиземнаго моря, а равно и Моргана, подробно изучившаго метаморфозъ американскихъ формъ, то никому изъ нихъ не удалось сдѣлать никакихъ наблю-

1) Морганъ (Morgan, 91) тоже противъ выводовъ Гетте.

деній надъ процессомъ дифференцировки головного пузыря. Не даютъ никакихъ указаній на этотъ счетъ и всѣ остальные изслѣдователи, изучавшіе Tornaria (Weldon, Ritter, Willey, Bourne и др.).

Итакъ, говорить въ настоящее время о непараллелизмѣ между процессами регенерации и онтогеніи примѣнительно къ данному случаю, т. е. способу развитія целома хобота у *Ptychodera*, по меньшей мѣрѣ преждевременно, такъ какъ мы не знаемъ пока, какимъ путемъ развивается целомическая полость хобота этой формы при эмбриональномъ развитіи. Впрочемъ, если бы даже и выяснилось, что при эмбриональномъ развитіи хоботной целома образуется у *Ptychodera minuta* изъ первичнаго кишечника, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто у *Balanoglossus kowalewskii* Ag., то и тогда, мнѣ кажется, съ принципиальной стороны нѣтъ основаній видѣть въ обоихъ способахъ образованія целома при регенерации и онтогенезѣ — столь глубокое различіе, какъ это дѣлаютъ Délage и Hérouard. По ихъ мнѣнію, основанному на вышецитированномъ замѣчаніи Шпенгеля (см. стр. 5), целомическая полость при регенерации «est obligé de reformer aux dépens d'un feuillet différent de celui, qui l'a engendré chez l'embryon» (стр. 53).

Мы видѣли, что при регенерации целома хобота беретъ начало изъ элементовъ целома, т. е. иными словами, новая мезодерма образуется изъ старой мезодермы.

#### Перихэмальныя полости.

Эмбриологическія данныя о развитіи этихъ образованій довольно скудны, но достаточно опредѣленны.

Кое какія данныя мы находимъ у Бэтсона (Bateson, 85, стр. 97, 108, fig. 28, Tab. 6), но его наблюденія на этотъ счетъ даютъ мало фактическаго матеріала.

У зародыша перихэмальныя полости появляются довольно рано — Бэтсонъ констатировалъ ихъ присутствіе у эмбриона на стадіи всего 1 пары жаберныхъ щелей. Они образуются въ видѣ двухъ слѣпыхъ выпячиваній стѣнки целома туловища, врастающихъ внутрь воротника. Таковы непосредственныя наблюденія Моргана (Morgan, 92, стр. 427). Точно такимъ же способомъ образуются перихэмальныя полости и при регенерации (рис. 24 и 25).

Интересны нѣкоторые препараты Бэтсона, изображаемые имъ на рис. 28, Tab. 6. Судя по этимъ препаратамъ, перихэмальныя полости зародыша образуются иногда на счетъ целома воротника, отшнуровываясь каждый отъ соответственной половины целомической полости на спинной сторонѣ вдоль медианной линіи.

Бэтсонъ въ этомъ именно смыслѣ и толкуетъ свои препараты (стр. 97), прибавляя, впрочемъ, что судьба этихъ образованій ему не совсѣмъ ясна.

Я уже упоминалъ, что нѣчто подобное удалось наблюдать и мнѣ при регенерации. Нѣкоторые препараты даютъ возможность предполагать, что перихэмальныя полости образуются иногда путемъ отщепленія отъ целомическихъ полостей воротника. Впрочемъ, въ

виду случайнаго характера наблюденія въ этомъ направленіи, опредѣленно высказаться я не рѣшаюсь.

На раннихъ стадіяхъ перихэмальпья полости зародышей *B. kowalewskii* имѣютъ хорошо выраженные полости—это совершенно ясно видно на соответственныхъ рисункахъ Бэтсона (Bateson, 85). Точно также и перихэмальпья трубки регенерировавшаго воротника *Ptychodera*, какъ это было мною описано въ соответственномъ мѣстѣ, почти лишены клѣточныхъ элементовъ внутри своихъ полостей.

Въ этомъ отношеніи мои наблюденія вполне согласны съ данными Бэтсона. Шпенгель (Spengel, 93, стр. 434), наоборотъ, утверждаетъ, что у изслѣдуемыхъ имъ молодыхъ *Enteropneusta* «ein Hohlraum war nicht zu erkennen; sie schienen vielmehr ganz von Zellen ausgefüllt», что и изображено на его figg. 146, 145.

Возможно, что авторъ имѣлъ уже дѣло съ довольно взрослыми стадіями, хотя, судя по величинѣ элементовъ, онъ изображаетъ, повидному, сръззы черезъ очень молодыхъ зародышей.

### Кардіо-перикардій.

Какъ мы видѣли, этотъ органъ при регенераціи беретъ свое начало изъ элементовъ целома хобота — перикардіальный пузырекъ образуется изъ стѣнки перитонеума.

Данныя объ образованіи этого пузырька при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta* противорѣчивы.

Boigne (89) принималъ эктодермальное происхожденіе перикардія у *Tornaria*. По его мнѣнію этотъ органъ образуется здѣсь изъ мѣшковиднаго впячиванія эктодермы (инвагинаціонный способъ).

Bateson (86) доказывалъ мезодермальное происхожденіе «proboscis gland» (= перикардій). По его описанію органъ этотъ образуется у зародыша *B. kowalewskii* на стадіи двухъ жаберныхъ щелей въ видѣ щели въ кучкѣ мезенхимальныхъ клѣтокъ, лежащихъ на дорзальной сторонѣ ното хорды. Рисунки автора довольно неопредѣленны, а описаніе процесса чрезвычайно неясно и кратко, чѣмъ и объясняется тотъ недостатокъ вниманія, которое удѣлили Бэтсону послѣдующіе авторы.

Энергичнымъ противникомъ Бэтсона въ этомъ отношеніи оказался Шпенгель. (Spengel, 84 и 93). Этотъ авторъ опровергаетъ данныя Бэтсона и настаиваетъ на эктодермальной природѣ «Herzblase» (= перикардій) *Tornaria*. По его описанію перикардіальный пузырекъ образуется путемъ утолщенія эктодермы («kleine zapfenförmige Verdickung») и послѣдующаго отщепленія отъ нея кучки клѣтокъ — сперва плотной, а затѣмъ дѣлающейся полой (стр. 419 — 420, 683).

Наблюденія Морганна (Morgan, 92) подтвердили взглядъ Бэтсона. Морганъ описываетъ въ сущности тотъ же самый способъ образованія перикардія, что и Бэтсонъ. По его наблюденіямъ у *Tornaria* органъ этотъ беретъ начало отъ одной или нѣсколькихъ мезенхимальныхъ клѣтокъ, скопляющихся въ бластоцелѣ на спинной сторонѣ личинки.

Сравнивая описанія и рисунки Шпенгеля и Моргана я прихожу къ тому заключенію, что между ихъ наблюденіями нѣтъ разницы — все дѣло въ толкованіи препаратовъ. Нельзя не признать, что данныя Шпенгеля мало обоснованы. Рисунки его, по крайней мѣрѣ, совсѣмъ не говорятъ въ его пользу.

Возьмемъ, напр. рис. 24, табл. 23, на который ссылается авторъ. На этомъ рисункѣ та кучка клѣтокъ, которая обозначена Шпенгелемъ, какъ зачатокъ Herzblase (=перикардій), является вполне обособленной отъ эктодермы, хотя и тѣсно къ ней прилегаетъ.

Ни одного доказательства въ пользу эктодермального происхожденія перикардія Шпенгель не приводитъ. Въ всякаго сомнѣнія онъ наблюдалъ тотъ же процессъ, что и Морганъ, но былъ введенъ въ заблужденіе плохими препаратами.

Итакъ, мы не имѣемъ никакихъ доказательствъ въ пользу эктодермального происхожденія перикардія при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta*. Наоборотъ, наблюденія Бэтсона и Моргана опредѣленно говорятъ за то, что органъ этотъ какъ при прямомъ, такъ и при непрямомъ развитіи образуется изъ кучки клѣтокъ мезенхимы.

Такимъ образомъ, въ обоихъ процессахъ кардіо-перикардіальный пузырекъ мезодермального происхожденія. Однако, несомнѣнно, что способы дифференцированія органа различны — при онтогенезѣ пузырекъ слагается, повидимому, изъ отдѣльныхъ изолированныхъ клѣтокъ, при регенерациі же онъ образуется простымъ отшнурованіемъ отъ целома хобота.

Мнѣ кажется, это отклоненіе отъ эмбриональнаго типа развитія нужно толковать въ томъ смыслѣ, что въ данномъ случаѣ регенеративный органогенезъ протекаетъ болѣе первичнымъ, палингенетическимъ способомъ.

Образованіе органа болѣе палингенетическимъ путемъ, чѣмъ это наблюдается при эмбриональномъ развитіи, гдѣ многіе процессы замаскированы ценогенетическими отклоненіями — явленіе, повидимому, не рѣдкое при регенерациі. Примѣромъ, между прочимъ, можетъ служить процессъ дифференцированія нефридія въ регенерирующемъ хоботѣ.

### Нефридіи.

Мы видѣли, что при регенерациі нефридій хобота образуется изъ двухъ зачатковъ — участка целома, дифференцирующагося иногда *въ видѣ настоящей мерцающей воронки и* эктодермическаго выводнаго канала, вначалѣ маленькаго, а затѣмъ удлиняющагося и открывающагося въ целомъ хобота. Bateson и Spengel, наблюдавшіе процессъ образованія нефридія — первый у *B. kowalewskii*, второй у *Tornaria*, не принимаютъ въ соображеніе целомической воронки и говорятъ лишь объ эктодермальномъ нефридіальномъ каналѣ, соединяющемся съ целомомъ, въ которой онъ открывается. Поэтому, оба автора говорятъ, конечно, объ эктодермальной природѣ всего нефридія.

Мы видѣли, что и при регенерациі, указанный выводной каналъ, высланный у взрослога животнаго цилиндрическимъ, мерцательнымъ эпителиемъ, образуется путемъ инвагинаціи, или, лучше сказать, вращанія внутрь хобота участка эктодермы. Той перитонеальной

воронки, которая нерѣдко превосходно выражена въ молодомъ регенерирующемъ хоботѣ, авторы, изслѣдовавшіе процессъ эмбриональнаго развитія *Enteropneusta*, не описываютъ. Очевидно, воронка эта при онтогенезѣ не появляется, какъ не бываетъ она зачастую выражена и при регенераціи.

Но мнѣ кажется, что тотъ способъ дифференцированія нефридія, когда на ряду съ эктодермальнымъ каналомъ появляется настоящая перитонеальная воронка, долженъ быть разсматриваемъ, какъ первичный. Въ подобномъ явленіи я вижу проявленіе атавизма, о чемъ еще будетъ рѣчь впереди.

### Передняя и задняя кишка. Ротъ и anus.

Какъ мы видѣли, при регенераціи *Ptychodera* никогда не образуется эктодермическихъ stomodeum'a и proctodeum'a. У регенерировавшихъ особей весь кишечникъ цѣликомъ энтодермальнаго происхожденія.

Обращаясь теперь къ эмбриологическому матеріалу для сравненія, мы наталкиваемся на значительныя трудности.

Природа передняго и задняго участковъ кишечника взрослога животнаго — едва ли не самый спорный вопросъ въ морфологіи *Enteropneusta*.

У *Tornaria* ясно различимы три отдѣла кишечника — если судить по внѣшнему виду и при этомъ сравнивать торнарію съ аналогичными личинками аннелидъ, или иглокожихъ, то можно было бы предполагать наличие у нея типичныхъ эктодермальныхъ stomodeum'a и proctodeum'a.

На самомъ же дѣлѣ вопросъ обстоитъ гораздо сложнѣе. Прежде всего, если предположить, что передняя кишка *Tornaria* эктодермальнаго происхожденія, то придется и жаберную область взрослога *Balanoglossus* отнести къ эктодермѣ, что врядъ ли возможно.

Впрочемъ, это обстоятельство не могло бы служить достаточнымъ основаніемъ къ тому, чтобы отказаться признать въ переднемъ участкѣ кишечника *Tornaria* эктодермическое образованіе.

Гораздо важнѣе второе соображеніе. Именно, принимая наличность у *Tornaria* эктодермальныхъ proctodeum'a и stomodeum'a, мы должны были бы признать, что кишечникъ тѣхъ формъ *Enteropneusta*, которыя развиваются съ метаморфозомъ, совсѣмъ иначе построены, чѣмъ у тѣхъ *Enteropneusta*, которыя не имѣютъ личиночныхъ формъ и развитіе которыхъ совершается прямымъ путемъ. Все дѣло въ томъ, что происхожденіе передней и задней кишки *Tornaria* намъ неизвѣстно, при развитіи же *Balanoglossus kowalewskii* весь кишечникъ образуется изъ энтодермы. У этой формы нѣтъ даже намека на эктодермальные proctodeum и stomodeum. Такъ, изъ обстоятельныхъ наблюденій Бэтсона (Bateson, 84), вытекаетъ, что при прямомъ развитіи у *B. kowalewskii* Ag. ротъ образуется путемъ простого прорыва кишечной трубки наружу. «The formation of the anus occurs rather later by a perforation of the skin at the posterior end» (стр. 212).



Точно также изъ наблюдений того же автора вытекаетъ, что у зародышей *B. kowalewskii* отсутствуетъ stomodaeum, или, по крайней мѣрѣ, участие эктодермы въ образованіи его чрезвычайно ограничено. «The mouth», говоритъ этотъ авторъ: «is formed as a minute pore, placed on the ventral surface in the groove which divides the proboscis from the collar». (стр. 212), а въ другомъ мѣстѣ выражается совсѣмъ опредѣленно: «it (т. е. ротъ) open directly into the archenteron» (Bateson, 85, стр. 81).

Такимъ образомъ процессъ регенерации совершенно сходенъ въ данномъ случаѣ съ тѣмъ процессомъ, который наблюдается при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta*, не претерпѣвающихъ сложнаго метаморфоза.

Насколько послѣдній процессъ типиченъ — мы не можемъ судить до тѣхъ поръ, пока не сдѣлаются извѣстными первые процессы развитія тѣхъ *Enteropneusta*, въ циклъ развитія которыхъ входитъ *Tornaria*.

### Нотохорда.

При эмбриональномъ развитіи, т. наз. нотохорда образуется путемъ впячивания внутрь хобота участка пищевода. Къ такому заключенію пришелъ Шпенгель (Spengel, 93) (стр. 410). Впрочемъ, главнымъ образомъ это заключеніе Шпенгеля основывалось на изученіи отношеній между пищеводомъ и уже сформировавшейся нотохордой у взрослого животнаго, т. е. было чисто априорнымъ предположеніемъ. Единственное наблюдение, которое существуетъ относительно образованія этого органа, принадлежитъ Моргану (Morgan, 92), работа котораго появилась уже во время печатанія монографіи Spengel'я и не могла быть въ полной мѣрѣ использована послѣднимъ. Описаніе и рисунки Morgan'a чрезвычайно убѣдительно говорятъ въ пользу энтодермальнаго происхожденія нотохорды.

Послѣдняя образуется, какъ и слѣдовало ожидать, путемъ эвагинации участка пищевода на границѣ съ эктодермой<sup>1)</sup>.

Описаніе и въ особенности превосходный рисунокъ Морганна (fig. 40, Pl. XXVI) не оставляютъ сомнѣній въ полномъ соответствіи процессовъ образованія нотохорды при эмбриональномъ развитіи и регенерации.

### Жаберный аппаратъ.

Процессъ закладки и дифференцированія жаберныхъ мѣшковъ при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta* достаточно хорошо изслѣдованъ.

Мы имѣемъ на этотъ счетъ рядъ наблюдений.

Уже первымъ изслѣдователямъ метаморфоза *Tornaria* удалось выяснитъ у молодого *Balanoglossus* процессъ закладки жаберныхъ щелей.

1) «At the anteriorend of the oesophagus in the middle line an evagination of modified cells has taken place... this lies very near to the external opening, but is without doubt formed from entoderm. This evagination is the first appearance of the notochord. (стр. 423).

Такъ, почти 40 лѣтъ тому назадъ Мечниковъ (Metschnikoff, 70) наблюдалъ этотъ процессъ и констатировалъ, что жаберные мѣшки молодого *Balanoglossus* представляютъ собою выпячиванія пищевода.

Къ такому же заключенію пришелъ и Агассицъ (Agassiz, 73), изучавшій *Tornaria agassizii*.

У этой личинки еще во время пелагической жизни образуются четыре жаберныхъ мѣшка, которые долго не прорываются наружу. Описаніе Агассица чрезвычайно сжато и ясно.

Авторъ говоритъ, что на первыхъ стадіяхъ своего образованія жабры представляютъ изъ себя *складки стѣнки пищевода*<sup>1)</sup>.

Нѣсколько иначе описываетъ этотъ процессъ Шпенгель (Spengel, 93).

По Шпенгелю (Spengel, 93), наблюдавшему развитіе жаберныхъ мѣшковъ у *T. mulleri*, послѣдніе возникаютъ не въ видѣ складки, а въ видѣ слѣпыхъ «*sackförmige Einstülpungen*» (стр. 404—405).

Какимъ образомъ образуются жаберныя поры у *Tornaria*, авторъ не описываетъ — сдѣлать какихъ нибудь наблюденій на этотъ счетъ ему не удалось.

Очень цѣнныя данныя относительно первыхъ процессовъ дифференцированія жаберныхъ мѣшковъ находимъ мы у Моргана (Morgan, 92).

Сравнивая результаты наблюденій всѣхъ вышеуказанныхъ изслѣдователей, работавшихъ надъ эмбриональнымъ развитіемъ *Enteropneusta*, съ тѣми наблюденіями, которыя мнѣ удалось сдѣлать относительно образованія жаберныхъ мѣшковъ у этихъ животныхъ при регенерации, нельзя не притти къ тому заключенію, что *въ данномъ случаѣ мы видимъ полное соотвѣтствіе между органогенезомъ регенеративнымъ и онтогенетическимъ*.

Стойтъ посмотрѣть на рис. 41 Pl. XXVI Моргана, чтобы убѣдиться въ полномъ соотвѣтствіи процессовъ образованія жаберныхъ мѣшковъ при регенерации и онтогеніи. Повидимому, приведенный Морганомъ препаратъ *ни чѣмъ* не отличался отъ моихъ. Мои рисунки съ одинаковымъ успѣхомъ могли бы иллюстрировать описаніе Моргана, касающаея процесса эмбриональнаго развитія жабръ, равно какъ его рисунки были бы вполне пригодны для демонстраціи образованія жабръ при регенерации.

#### Скелеть хобота.

Происхожденіе такъ называемаго скелета хобота—вопросъ довольно темный и, можно сказать, эмбриологически до сихъ поръ не рѣшенный. На этотъ счетъ высказывался рядъ

1) «The gills are at first simple slight folds, one of each side of the dorsal part of the oesophagus; the folds gradually change into loops, then we have a series of folds, and subsequently a series of four loops, and finally, when seen from the dorsal side, the loops appear closed, forming a set of four funnels on each side, opening into oesophagus». (Agassiz, 73, стр. 427).

предположеній, но положительныхъ данныхъ, основанныхъ на непосредственныхъ наблюденіяхъ, у насъ не имѣется.

Батсонъ (Bateson, 85) былъ того мнѣнія, что скелетъ хобота образуется насчетъ нотохорды. Подобнаго же взгляда держался и Кёлеръ (Koehler, 86, стр. 150).

Шпенгель (Spengel, 93) подробно останавливается на вопросѣ о происхожденіи скелета хобота *Enteropneusta* (стр. 487—505). Къ сожалѣнію авторъ извѣстной монографіи не имѣлъ въ своемъ распоряженіи эмбриологическаго матеріала. Но, детально изслѣдовавъ гистологию скелета, а также соотношенія между скелетомъ и окружающими тканями и органами, Шпенгель пришелъ къ заключенію, что въ образованіи хоботного скелета принимаетъ участіе стѣнка целома.

На многихъ рисункахъ, приведенныхъ Шпенгелемъ, видно участіе въ образованіи скелета хобота какъ целомического эпителия, такъ и элементовъ целенхимы.

Образованіе скелета изъ клѣточной массы можно было предполагать уже давно на основаніи тѣхъ данныхъ, которыя были опубликованы Маріономъ (Marion, 86) относительно строенія скелета хобота *Glandiceps talaboti*<sup>1)</sup>.

Итакъ, на основаніи изслѣдованій Шпенгеля можно съ достаточной долей увѣренности предполагать целомическую (целенхимную) природу скелета у *Enteropneusta*, т. е. *провести полную параллель между процессомъ образованія этого органа при онтогенезіи и регенерации.*

Но, разумѣется, окончательное рѣшеніе вопроса будетъ зависѣть отъ дальнѣйшихъ эмбриологическихъ изслѣдованій.

### Нервная система.

При эмбриональномъ развитіи полый нервъ воротника можетъ образоваться различными способами.

Прежде всего нужно замѣтить, что на самыхъ раннихъ стадіяхъ у зародыша имѣется непрерывное утолщеніе эктодермы вдоль медіанной линіи дорзальной стороны. На этой стадіи воротниковый нервъ не отличается по своему строенію и положенію отъ нерва туловища, котораго онъ служитъ прямымъ продолженіемъ.

Дальнѣйшая дифференцировка состоитъ въ томъ, что въ области воротника, образовавшій нервный тяжъ отдѣляется отъ эктодермы и перемѣщается внутрь, подъ кожный слой.

1) Шпенгель, впрочемъ, до нѣкоторой степени подтверждаетъ также и вышеприведенныя наблюденія Bateson'a и Koehler'a. Дѣйствительно, его препаратъ (рис. 55 taf. 28) убѣдительно доказываетъ, что «ausser den Cölomen betheiligt sich endlich bei *Gl. talaboti* auch noch der Eichelarm an der Bildung von Fortsätzen, die in die Skeletsubstanz — in diesem Fall natürlich in die primäre — eindringen» (стр. 505). Замѣчу,

кстати, что Шпенгель придаетъ этому способу образованія скелета второстепенное значеніе. Тѣмъ болѣе страннымъ кажется мнѣ замѣчаніе Мениля и Коллери (Mehnil & Caullery, стр. 234), которые считаютъ вопросъ безповоротно рѣшеннымъ въ томъ смыслѣ, что скелетъ хобота образуется всегда на счетъ нотохорды.

Это перемѣщеніе достигается въ онтогеніи тремя способами.

Въ первомъ случаѣ происходитъ процессъ отщепленія нервнаго ствола отъ остальной эктодермы. Такой процессъ деляминаціи имѣетъ мѣсто, напр., во время развитія *B. kowalewskii* по наблюденію Бэтсона (Bateson, 85).

Во второмъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ процессомъ погруженія нервнаго ствола внутрь воротника, сопровождающагося нарастаніемъ надъ нимъ эктодермы.

Этотъ процессъ, столь напоминающій образованіе нервной трубки у *Amphioxus*, описанъ Риттеромъ (Ritter, 94) у *Tornaria* съ береговъ Калифорніи, а также отчасти, Морганомъ (Morgan, 92) <sup>1)</sup> изучавшимъ превращеніе *Tornaria* (*T. agassizii*) во взрослое животное.

Что касается до третьяго случая, то мы имѣемъ здѣсь дѣло съ типичной инвагинаціей—т. е. образованіемъ настоящаго желобка, края котораго смыкаются, въ результатѣ чего получается нервная трубка.

Такой процессъ описанъ былъ Шпенгелемъ (Spengel, 84, стр. 500). Причемъ авторъ наблюдалъ тотъ же самый способъ образованія воротниковаго нерва какъ у личинокъ, такъ и у регенерирующихъ взрослыхъ особей.

Итакъ, процессъ закладки нервной трубки воротника при эмбриональномъ развитіи сводится къ тремъ, или лучше даже сказать, двумъ способамъ, или типамъ. У формъ, развивающихся безъ метаморфоза (а именно у *B. kowalewskii*), этотъ органъ образуется путемъ деляминаціи, у тѣхъ же *Enteropneusta*, которые претерпѣваютъ метаморфозъ, онъ образуется путемъ инвагинаціи. (Сюда мы отнесемъ и второй разобранный выше случай—случай образованія нервной трубки посредствомъ погруженія нервной пластинки подъ кожу).

Впрочемъ, и у *Balanoglossus kowalewskii* только въ средней части нервной трубки воротника Bateson наблюдалъ деляминацію, на переднемъ же и заднемъ концахъ нерва воротника наблюдается типичная инвагинація, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто у всѣхъ *Tornaria*, превращающихся во взрослое животное.

Такимъ образомъ самымъ типичнымъ способомъ образованія нервной трубки при эмбриональномъ развитіи *Enteropneusta* нужно считать инвагинацію или видоизмѣненіе ея—процессъ погруженія нервной пластинки внутрь и послѣдующее замыканіе ея въ трубку.

Такъ именно и образуется этотъ органъ при регенераціи.

Итакъ, подводя итоги, мы приходимъ къ тому заключенію, что между регенеративнымъ и эмбриональнымъ органогенезами наблюдается полное принципиальное соотвѣтствие.

1) Morgan (92) стр. 95. «A careful examination shows that here a plate of ectoderm is sinking below the surface, and at the same time the collar is rolling over the invaginating plate of ectoderm from the two sides».

Результаты произведеннаго детальнаго сравненія между процессами регенераціи и онтогеніи *Enteropneusta* подтверждаютъ лишній разъ несправедливость мнѣнія Моргана, Дриша и ихъ школы о несходствѣ этихъ явленій.

Изученіе регенераціи *Enteropneusta* вполне подтверждаетъ тотъ взглядъ, по которому, если иногда при регенераціи и нѣтъ *полнаго* сходства съ онтогеніей, благодаря тѣмъ или другимъ отклоненіямъ, зависящимъ отъ тѣхъ или другихъ внѣшнихъ условій, то во всякомъ случаѣ всегда *все органы и ткани развиваются изъ элементовъ того же зародышеваго листа, который имъ далъ начало при онтогеніи.*

---

## ГЛАВА IV.

### Регенерація и филогенезъ.

**Общая замѣчанія. Палингенетическій характеръ регенеративнаго органогенеза. Атавизмъ при регенераціи.**

Переходимъ теперь къ одному изъ самыхъ важныхъ вопросовъ, связанныхъ съ изученіемъ регенераціи, а именно, имѣютъ ли отношеніе явленія регенераціи къ филогенезу? Одни говорятъ, да, другіе, нѣтъ.

Горячими противниками этого воззрѣнія являются Морганъ, Дришъ и вся неовиталистическая школа.

Доводы ихъ сводятся главнымъ образомъ къ принципиальному отрицанію связи между регенераціей съ одной стороны и филогенезомъ съ другой. Отрицаніе же это вытекаетъ, разумѣется, изъ явнаго нежеланія признать параллель между регенеративнымъ и онтогенетическимъ органогенезами.

Однако мы видѣли, что несмотря на всю загадочность и непонятность этой связи и параллелизма между регенераціей и онтогеніей, параллелизмъ этотъ нужно всеже считать фактомъ вполне установленнымъ. Что касается *Enteropneusta*, то предыдущая глава служитъ тому убѣдительнымъ доказательствомъ. Тоже самое можно сказать объ аннелидахъ, турбелляріяхъ, офіурахъ, не говоря уже о позвоночныхъ.

Разъ, однако, процессы регенераціи протекаютъ по тѣмъ же законамъ, по которымъ протекаютъ процессы эмбриональнаго развитія, то нѣтъ основаній, какъ уже совершенно резонно замѣтилъ Шульцъ (1905), отказывать регенеративному ходу развитія въ филогенетическомъ значеніи. Вѣдь, въ сущности, связь онтогеніи съ филогеніей намъ ясна ни чуть не болѣе, чѣмъ предполагаемая связь съ той же филогеніей регенераціи. Все дѣло въ

привычкѣ — мы привыкли смотрѣть на біогенетическій законъ, какъ на что то вполне естественное и связь эмбриональнаго развитія съ эволюціей организмовъ кажется намъ несомнѣнной и ясной.

Мы какъ то неохотно возвращаемся всегда къ мысли о томъ, что этотъ біогенетическій законъ есть въ сущности только хорошая рабочая гипотеза. Почему бы не видѣть въ методѣ изученія регенеративныхъ процессовъ съ точки зрѣнія уясненія филогенеза, такой же рабочей гипотезы.

О продуктивности этого метода спорить нельзя. Факты говорятъ сами за себя.

Не нужно забывать одного важнаго обстоятельства, а именно—болѣе первичнаго характера регенеративнаго органогенеза по сравненію съ эмбриональнымъ, изобилующимъ ценогенезами, а также проявленія иногда атавистическихъ признаковъ при регенераціи. Оба эти обстоятельства даютъ въ руки изслѣдователя ключъ къ раскрытію многихъ филогенетическихъ тайнъ.

Въ предыдущей главѣ я показалъ, что процессъ регенераціи *Ptychodera* принципиально не отличается отъ онтогенеза—изъ сравненія полученныхъ мною данныхъ съ имѣющимися наблюденіями надъ процессомъ эмбриональнаго развитія легко убѣдиться, что въ большинствѣ случаевъ дѣло идетъ даже не только о *принципіальномъ* сходствѣ, а прямо-таки о полномъ тождествѣ обоихъ процессовъ.

Правда, въ процессѣ дифференцированія нѣкоторыхъ органовъ мы замѣчаемъ иногда извѣстныя отклоненія отъ того пути, по которому слѣдуетъ органогенезъ при эмбриональномъ развитіи, но, какъ оказывается, эти то исключенія и отклоненія для насъ какъ разъ и представляются особенно цѣнными.

Къ такимъ отклоненіямъ нужно отнести, между прочимъ, процессъ образованія перикардія и нефридія хобота. Способъ развитія этихъ органовъ при регенераціи нѣсколько разнится отъ того пути, которому слѣдуютъ они при своемъ образованіи во время эмбриональнаго развитія.

Интересъ этихъ отклоненій заключается въ томъ, что при регенераціи указанные органы образуются болѣе первичнымъ (палингенетическимъ) путемъ, чѣмъ при онтогенезѣ, гдѣ, несомнѣнно, процессъ затемненъ благодаря ценогенезу.

Оба эти обстоятельства, т. е. 1) обнаружившееся принципиальное сходство между регенераціей и онтогенезомъ и 2) болѣе первичный характеръ регенеративнаго органогенеза въ нѣкоторыхъ случаяхъ, сами по себѣ были бы достаточными для того, чтобы имѣть право воспользоваться данными регенеративнаго органогенеза при обсужденіи нѣкоторыхъ вопросовъ филогенезиса.

Но изученіе регенераціи *Enteropneusta* намъ даетъ еще одинъ ключъ, помощью котораго можно воспользоваться. Я имѣю въ виду именно тѣ случаи атавизма, которые иногда можно обнаружить во время хода регенеративныхъ процессовъ въ регенетатѣ.

Въ сущности, говоря объ явленіяхъ атавизма, мы можемъ къ нимъ отнести и тѣ отклоненія отъ нормальнаго развитія, о которыхъ было говорено выше, разъ эти отклоне-

нія обусловлены палингенетическимъ ходомъ регенеративнаго органогенеза. Вѣдь палингенетическій способъ развитія извѣстнаго органа есть въ то же время и атавистическій.

Но, говоря объ атавизмѣ, я имѣлъ въ виду не столько *способъ* дифференцированія того или другаго органа, сколько появленіе въ регенератѣ въ конечномъ уже результатѣ такихъ чертъ организаціи, которыхъ нормальныя особи не имѣютъ, но которыми, весьма вѣроятно, обладали ихъ отдаленные предки.

Нельзя не сознаться, что вопросъ объ атавизмѣ подчасъ имѣетъ подъ собою зыбкую почву. Мы только въ томъ случаѣ имѣемъ право *утверждать*, что тотъ или другой признакъ, та или другая черта организаціи есть проявленіе атавизма, т. е. были свойственны предкамъ изучаемаго животнаго, если знаемъ этихъ предковъ и ихъ организацію. Такъ, мы имѣемъ полное право толковать въ смыслѣ атавизма появленіе иногда у лошади двухъ лишнихъ пальцевъ по бокамъ нормально существующаго, такъ какъ намъ извѣстенъ рядъ третичныхъ предковъ этого животнаго, у которыхъ указанные пальцы были хорошо выражены.

Если же мы не знаемъ, не можемъ указать этихъ предковъ, то, разумѣется, толкованіе той или иной аномалии въ смыслѣ атавизма есть не болѣе, какъ гипотеза.

У насъ есть кромѣ палеонтологіи еще два критерія для уясненія филогеніи животныхъ — эмбриологія и сравнительная анатомія. Пользуясь ими, мы, учитывая поправки на ценогенезисъ и конвергенцію, апріорно, т. е. лучше сказать, теоретически, дѣлаемъ заключеніе о морфологическихъ признакахъ предковъ изучаемой группы животныхъ.

Создавъ на основаніи ряда соображеній морфологическій типъ предка того или другаго животнаго, мы, разумѣется, съ большою долей приближенія къ истинѣ будемъ толковать въ смыслѣ атавизма тѣ отклоненія въ организаціи этого животнаго, которыя еще болѣе дѣлаютъ его похожимъ на теоретически созданнаго въ нашемъ воображеніи его предка.

Такъ, не зная даже палеонтологической исторіи лошади, мы, разумѣется, съ полнымъ основаніемъ могли бы считать появленіе у нея двухъ лишнихъ пальцевъ за проявленіе атавизма, такъ какъ имѣли право, на основаніи сравнительной анатоміи, предполагать происхожденіе ея отъ многопалаго предка.

Какой организаціей обладали предки *Enteropneusta*—мы не знаемъ. Палеонтологія не даетъ намъ на этотъ счетъ никакихъ указаній. Немного матеріалу даетъ намъ въ этомъ отношеніи и эмбриологія.

Такимъ образомъ, почти исключительно на основаніи только анатомическаго строенія *Enteropneusta*, мы можемъ говорить только съ большею или меньшею вѣроятностью объ ихъ происхожденіи отъ какой то вымершей группы кольчатыхъ червей.

Упоминаю я объ этомъ потому, что, считая гипотезу происхожденія *Enteropneusta* отъ аннелидоподобныхъ предковъ наиболѣе вѣроятною, я, естественно, имѣю полное логическое основаніе отнести къ проявленію атавистическихъ признаковъ всѣ тѣ отклоненія отъ нормальнаго хода органогенеза, которыя невольно указываютъ на родство изучаемой группы съ кольчатыми червями.

Возьмемъ, напримѣръ, хоботную пору *Ptychodera*. У взрослыхъ животныхъ этотъ органъ считается въ настоящее время гомологомъ метанефридія аннелидъ, но, въ сущности, имѣеть съ послѣднимъ сходство только въ томъ отношеніи, что при помощи его целомъ открывается наружу. Эмбриологія не даетъ намъ ничего новаго для уясненія его морфологіи.—Если, теперь, при регенерации мы находимъ на извѣстной стадіи этотъ органъ въ видѣ *настоящаго нефридія*, снабженнаго обособленной перитонеальной воронкой и эктодермальнымъ каналомъ, то, разумѣется, иначе толковать этотъ фактъ, какъ атавизмъ, мы не можемъ.

Подобные факты позволяютъ намъ съ извѣстной долей вѣроятія судить о строеніи гипотетическаго предка изучаемой группы, т. е., иначе говоря, даютъ возможность судить о филогенезисѣ ея въ той же мѣрѣ, какъ это имѣеть мѣсто при изученіи онтогеніи.

Такимъ образомъ, я вполне придерживаюсь мнѣнія Шульца и другихъ ученыхъ, что регенерация отражаетъ ходъ филогенеза, и что регенеративному органогенезу нельзя отказывать въ филогенетическомъ значеніи еще и потому, что обычно при регенерации доминируютъ палингенетическіе процессы тамъ, гдѣ въ онтогеніи сильно выражены ценогенетическія особенности.

Такимъ образомъ, основываясь на всемъ вышеизложенномъ, я попытаюсь выяснитъ морфологическое значеніе наиболѣе важныхъ органовъ *Enteropneusta* съ цѣлью выясненія вѣроятной организаціи ихъ гипотетическихъ аннелидоподобныхъ предковъ.

Начну съ описанія тѣхъ отклоненій въ строеніи регенератовъ, которыя я склоненъ толковать за атавизмъ.

### Предполагаемые случаи атавизма при регенерации *Ptychodera*.

Появленіе при регенерации всевозможныхъ отклоненій отъ нормы—явленіе довольно обыкновенное. Въ большинствѣ случаевъ эти отклоненія носятъ характеръ простыхъ уродствъ, обусловливаемыхъ способомъ ампутаціи, ненормальными внѣшними условіями и т. д.

Но среди подобныхъ уродливыхъ отклоненій наблюдаются подчасъ такіе случаи, которые невольно останавливаютъ на себѣ вниманіе. Среди ряда такихъ зарегистрированныхъ многими авторами аномалій, нѣсколько, несомнѣнно, имѣють морфологическое значеніе, такъ какъ въ этихъ случаяхъ регенератъ носить черты явно атавистическаго характера.

Подобные примѣры проявленія при регенерации атавизма описаны главнымъ образомъ у членистоногихъ (F. Müller, Schultz — для Crustacea, Przißram, Brindli, Bordage—для Insecta, Schultz—для Araneina)<sup>1)</sup>. Жиаръ (Giard, 97), какъ извѣстно, далъ такому процессу названіе «*Régénération hypotypique*».

1) Случаи, описанные Шульцемъ и Fr. Müllerомъ, въ особенности демонстративны. Здѣсь ракообразное (*Atypoida protimirum*, различные представители р. *Astacus*) регенерируютъ клешни, свойственныя со-



Въ дополненіи, написанномъ къ книгѣ Моргана — «Regeneration», Мошковскій подвергаетъ критикѣ всѣ главные случаи проявленія атавизма при регенерациі, описанные до сихъ поръ. Въ конечномъ результатѣ всѣ тонкости такой критики разбиваются о факты. Разумѣется, до тѣхъ поръ, пока мы не будемъ точно знать, на примѣръ, предка *Astacus fluviatilis*, мы не можемъ быть увѣрены въ томъ, что аномальная регенерировавшая клешня, столь похожая на клешню *A. leptodactylus*, есть проявленіе атавизма. Вѣдь взглядъ на того же *A. leptodactylus*, какъ на предка *A. fluviatilis*, есть не болѣе какъ гипотеза.

Тѣмъ не менѣе, иного объясненія подобному факту быть не можетъ, какъ именно то, которое далъ ему Шульцъ, а именно, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ атавизмомъ. Это единственно вѣроятная гипотеза для объясненія даннаго и многихъ другихъ подобныхъ случаевъ. Почему именно *A. fluviatilis* регенерируетъ не просто уродливую клешню, а именно клешню, которая столь характерна для *A. leptodactylus*, со всѣми ея морфологическими особенностями? Почему также *Atypoida protimirum* восстанавливаетъ клешню, столь характерную для *Carodina*? Если бы подобные случаи не имѣли морфологическаго значенія, если бы это былъ простой случай, уродство, то указанная ракообразная восстанавливала бы (какъ это зачастую и бываетъ, вѣроятно) въ буквальномъ смыслѣ уродливую клешню, клешню не похожую на клешни другихъ ракообразныхъ, причемъ, разумѣется, вѣроятность восстановленія вѣскольکو разъ подрядъ точно такой же клешни вполне опредѣленной формы была бы равна нулю.

Если въ регенерировавшемъ хвостѣ ящерицы новыя чешуи не похожи на старыя и вообще не похожи на чешуи извѣстныхъ ящерицъ — мы можемъ, разумѣется, говорить объ уродствѣ; но, если эти чешуи, сильно отличаясь отъ сосѣднихъ чешуй того же вида, не отличимы отъ чешуй другой какой нибудь ящерицы, то естественно сдѣлать заключеніе, что въ данномъ случаѣ при регенерациі хвоста восстановились чешуи болѣе древней въ систематическомъ отношеніи формы (Boulenger). Изъ такого рода фактовъ логично вытекаетъ единственный выводъ — а именно тотъ, что зачастую при изученіи конечнаго продукта регенерациі, изслѣдователь сталкивается съ такими явленіями, когда гипотеза атавизма напрашивается сама собой.

Всевозможныя аномаліи возникаютъ очень часто при регенерациі Enteropneusta. Не говоря, конечно, о такихъ случаяхъ, когда самъ по себѣ кусокъ, предназначаемый для регенерациі, имѣлъ неправильныя формы, всевозможныя уродства возникаютъ при восстановленіи ампутированныхъ участковъ и такими экземплярами, ампутація которыхъ была произведена вполне правильно, т. е. перпендикулярно къ продольной оси животнаго.

Такъ, зачастую образуются хобота съ различными придатками. Иногда эти придатки достигаютъ такой величины, что хоботъ съ внѣшней стороны производитъ впечатлѣніе

---

всѣмъ другимъ видамъ. Такъ, рядъ русскихъ *Astacus* (*A. rasyurus*, *colchicus*, *fluviatilis*, *Kessleri*) восстанавливаетъ клешню, типичную для *A. leptodactylus* — предка русскихъ *Astacidae*. Въ случаѣ, описанномъ Fr. Mül- | леромъ, *Atypoida* регенерируютъ клешни, которыми характеризуется совсѣмъ другой родъ, а именно р. *Carodina*.

двойного образования. На рис. 57-мъ изображенъ такой экземпляръ *Ptychodera*. Можно было бы подумать, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ двумя хоботами. Однако изученіе серіи срѣзовъ показываетъ, что меньшій хоботь есть просто часть большаго. Часть эктодермы послѣдняго выпячивается въ видѣ мѣшка, заполняемаго разрастающеюся соединительною тканью целома хобота.

Замѣчу, что подобные экземпляры съ двумя хоботами вообще, иногда, встрѣчаются въ природѣ въ естественныхъ условіяхъ. Такъ, В. М. Шимкевичъ передавалъ мнѣ, что у него въ рукахъ былъ экземпляръ *S. mereschkowskii* съ Бѣлаго моря, который обладалъ двумя хоботами. Гистологическаго изслѣдованія сдѣлано не было, такъ что вопросъ о природѣ этого втораго хобота остается открытымъ. — Было ли это самостоятельное образованіе, или просто дѣло обстояло такъ, какъ это описано мною выше для экземпляра, изображаемаго на рис. 57-мъ, осталось невыясненнымъ.

Иногда образуется парный зачатокъ ното хорды, т. е. двѣ складки стѣнки пищевода, вмѣсто одной (см. рис. 57, а = 36-й).

Подобныя аномаліи не имѣютъ, разумѣется, ни малѣйшаго морфологическаго интереса.

Но подчасъ въ регенерировавшихъ хоботахъ *Ptychodera* случается наблюдать и аномаліи другого характера. Нѣкоторыя изъ этихъ аномалій при регенерации были уже извѣстны Шпенгелю (Spengel, 93) и онъ вполне основательно приписывалъ имъ морфологическое значеніе. Такъ,

Шпенгель упоминаетъ въ своей монографіи объ одномъ экземплярѣ *Ptychodera minuta* съ регенерировавшимъ хоботомъ, въ которомъ нефридіи состоятъ только изъ выводного экто-



Рис. 57-й. Аномальный экземпляръ *Ptychodera*, регенерировавшій двойной хоботъ. Объясненіе въ текстѣ.

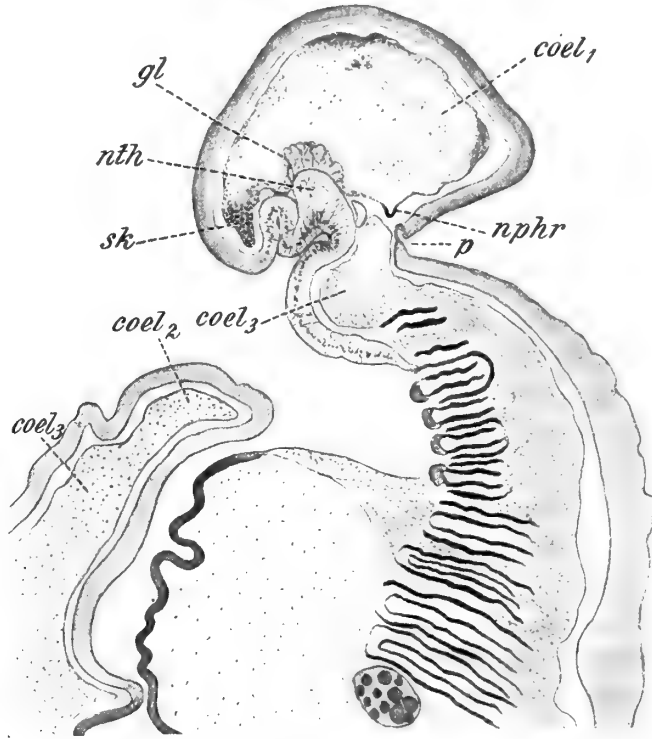


Рис. 57, а (36-й) Сагиттальный разрѣзъ черезъ переднюю часть регенерирующей *Ptychodera*. Ампутація была произведена въ средней части жаберной области. *nphr* — целотеліальная воронка нефридія; *p* — ея эктодермическая часть; *nth* — ното хорда; *sk* — скелетъ. Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

дермического канала, сообщенія же этого канала съ целомомъ не было. Случай этотъ (насколько справедливо — вопросъ другой) авторъ считаетъ однимъ изъ фактовъ, доказывающихъ эктодермическую природу Eicherforte Enteropneusta (стр. 685).

Къ числу наблюдавшихся аномалій при регенерации, которымъ я придаю морфологическое значеніе и истолковываю въ смыслѣ атавизма, можно отнести слѣдующіе:

- 1) Случай возстановленія не одного, а двухъ нефридіальныхъ каналовъ, съ двумя выводными порами.
- 2) Отсутствие эктодермального канала въ регенерировавшемъ нефридіѣ хобота.
- 3) Образование двухъ перикардіальныхъ пузырей, вмѣсто одного.
- 4) Случай соединенія полости, такъ называемой, ното хорды съ наружной средой при помощи специальной поры.
- 5) Образование вдоль спинной стороны пищевода воротниковой ното хорды, въ видѣ желобка (такъ называемой «Supraoesophageal notochord»).

*1-ый случай.* Какъ извѣстно, у огромнаго большинства Enteropneusta существуетъ лишь одна хоботная пора — только лѣвый целомическій дивертикулъ хобота сообщается съ наружной средой при помощи эктодермического канала, или лучше сказать, atrium'a. Правый дорзолатеральный целомическій мѣшокъ обыкновенно кончается слѣпо.

Такъ обстоитъ дѣло у большей части представителей Enteropneusta. Исключеніе представляютъ нѣсколько формъ, у которыхъ оба дорзолатеральные мѣшка сообщаются съ наружной средой—эти формы обладаютъ двумя порами.

Къ такимъ Enteropneusta принадлежатъ представители сем. *Harrimaniidae* (*H. maculata* Ritter и *H. kuppferi* Willemoes Suhm), *Ptychodera jamaicensis* Willey, *Pt. flava* Ech.

Мы въ правѣ разсматривать это явленіе какъ первичное—существованіе двухъ нефридіевъ, несомнѣнно, есть палингенетическая черта организаціи. Большинство Enteropneusta, очевидно, утратили одинъ нефридіѣ, именно правый.

Къ числу такихъ формъ принадлежатъ, между прочимъ, и всѣ изслѣдованные мною виды.

Нормально у нихъ мы находимъ только одну лѣвую пору хобота.

Впрочемъ, у *Ptychodera minuta* бываютъ случаи нахожденія такихъ экземпляровъ, у которыхъ не только лѣвый дорзолатеральный целомическій мѣшокъ открывается наружу (что составляетъ для этой формы нормальное явленіе), а оба—и лѣвый и правый целомические дивертикулы находятся въ сообщеніи съ наружной средой посредствомъ двухъ симметрично расположенныхъ поръ. Такіе же случаи наблюдались изрѣдка у *Balanoglossus kowalewskii* (Morgan, 92).

Несомнѣнно, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ атавизмомъ.

Подобные же случаи атавизма мнѣ удалось не однократно наблюдать у *Ptychodera minuta* (а также одинъ разъ у *Pt. clavigera*) при регенерации. Въ регенерирующемъ хоботѣ закладываются двѣ нефридіальныя воронки на слѣпыхъ концахъ дорзолатеральныхъ мѣшковъ и образуется, соотвѣтственно этому, два эктодермическихъ впячиванія въ стебелькѣ. Такимъ образомъ среди животныхъ, у которыхъ процессъ регенерации хобота уже вполне

закончился, удается находить экземпляры съ двумя нефридіальными, симметрично расположенными, порами.

Неоднократно находилъ я и такіе экземпляры, у которыхъ была всего одна медианная пора, ведущая въ обширный эктодермальный atrium, но въ послѣдній открывается не одинъ, а оба целомическихъ мѣшка. (Рис. 58-й).

Подобные случаи наблюдались Шпенгелемъ и у нормальныхъ *Ptychodera minuta*.

Какъ я покажу немного ниже, подобную стадію эволюціи, по всей вѣроятности, нефридіи проходили и въ филогенезѣ.

Интересно, что нефридіальный аппаратъ у *Ptychodera minuta* даже при нормальномъ онтогенезѣ обнаруживаетъ, какъ мы видѣли, неустойчивость. Случаи образованія двухъ нефридій вмѣсто одного наблюдались, какъ было выше упомянуто, и у другихъ Enteropneusta, но крайне рѣдко и во всякомъ случаѣ они далеко не такъ обыденны, какъ у *Ptychodera minuta*.

Это мнѣ кажется, служитъ доказательствомъ того, что форма эта еще не вполне установилась.

**2-й случай.** Къ проявленію атавизма нужно отнести, между прочимъ, случаи образованія при регенерациі хобота только мезодермальныхъ частей нефридіевъ. Нормально, какъ извѣстно, целомическій дорзолатеральный мѣшокъ открывается не прямо наружу, а въ спеціальнй эктодермальный каналъ. При регенерациі зачастую этого эктодермального участка нефридія не образуется вовсе и целомъ открывается непосредственно наружу (см. рис. 40 и 41). Я совершенно согласенъ съ мнѣніемъ Шимкевича (Шимкевичъ, 05), который подобную форму нефридіи считаетъ за простѣйшую и первичную («antenephros» по терминологіи автора). Появленіе нефридіи при регенерациі хобота въ видѣ antenephros нужно, разумѣется, считать за атавизмъ.

Такое же толкованіе должно быть приложено и къ факту образованія иногда при регенерациі типичныхъ, хорошо обособленныхъ, перитонеальныхъ нефридіальныхъ воронокъ (рис. 37), не закладывающихся, какъ мы видѣли, при эмбриональномъ развитіи.

**3-й случай.** Къ числу случаевъ проявленія атавизма при регенерациі я отношу, между

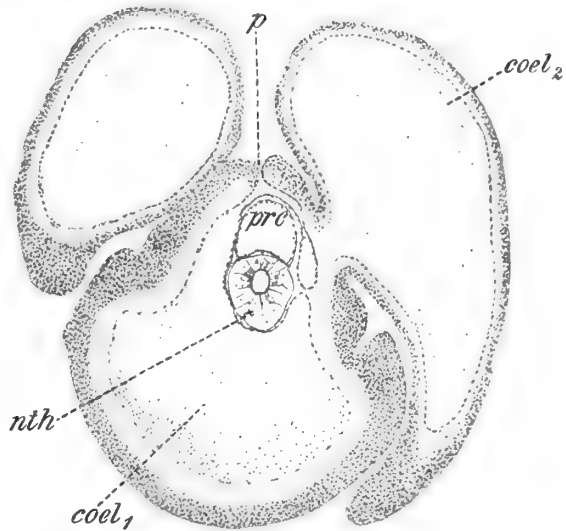


Рис. 58-й. Поперечный разрѣзъ черезъ хоботъ регенирующей *Ptychodera*, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ соединяется съ воротникомъ. *prc* — кардіо-перикардій; *coel<sub>1</sub>* — целомъ хобота; *coel<sub>2</sub>* — целомъ воротника; *p* — нефридіальная пора, ведущая въ atrium, куда открываются оба дорзолатеральныхъ мѣшка. Leitz Obj. 2, ocul. 2.

прочимъ, нѣсколько разъ наблюдавшееся мною явленіе регенерации двухъ перикардіальныхъ пузырей вмѣсто одного, какъ это бываетъ нормально.

Такіе случаи имѣли мѣсто трижды — два раза у новогвинейской *Ptychodera* (*Pt. sp.* non det.) и одинъ разъ у *Pt. minuta*.

Напомню, что уже Лангъ (Lang, 1902) мимоходомъ высказалъ предположеніе относительно парнаго происхожденія перикардія въ хоботѣ *Enteropneusta*. Такъ, въ своихъ: «*Beiträge zur einer Trophocoeltheorie*» онъ, характеризуя морфологическое значеніе, такъ называемаго, Herzblase, выражается такъ: «Die sogenannte Herzblase in der Eichel von *Balanoglossus* hat mit einem Herzen nichts zu thun, sondern ist eine unpaare (*ursprünglich paarige?*)<sup>1)</sup>. Coelomblase, die durchaus dem Pericard der Mollusken und Tunicaten entspricht» (стр. 350).

Выше указанные случаи атавистической регенерации двухъ перикардіальныхъ пузырей вмѣсто одного, подтверждаютъ апріорное предположеніе швейцарскаго ученаго.

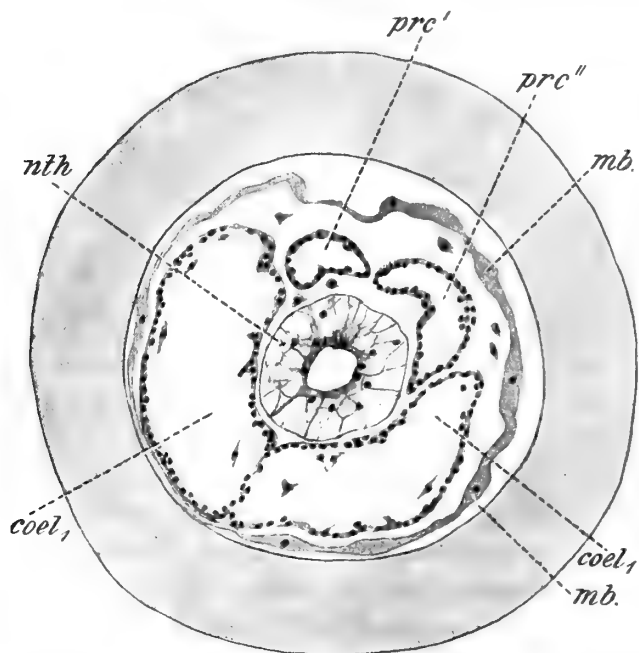


Рис. 59-й. Поперечный разрѣзъ черезъ регенерировавшій хоботъ *Ptychodera*, въ которомъ образовались два перикардія—*prc''* (лѣвый) и *prc'''*—(правый). *nh*—нотохорда; *coel,1*—целомъ (два дорзолатеральные дивертикула); *mb.*—мезенхимная мембрана (т. н. basalmembran).  
Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

На рис. 59-мъ изображенъ поперечный разрѣзъ черезъ регенерировавшій хоботъ *Ptychodera minuta*, у которой образовался двойной зачатокъ перикардія.

Дѣйствительно, мы находимъ здѣсь два перикардіальныхъ пузырька (*prc'* и *prc''*), расположенныхъ совершенно симметрично на дорзальной сторонѣ хобота. Къ каждому перикардіальному пузырьку примыкаетъ соответствующій целомическій мѣшокъ (разрѣзъ прошелъ черезъ нижнюю часть хобота — на болѣе верхнихъ срѣзахъ обѣ дорзолатеральныхъ целомическихъ мѣшка сливаются въ одинъ не парный целомъ, выполняющій всю внутренность хобота).

Оба перикардіальные пузырька ясно отдѣлены другъ отъ друга. Вентральная стѣнка каждого образуетъ легкое впяченіе внутрь — начало образованія сердечнаго синуса, внутрь котораго заползаютъ плавающие въ бластоцелѣ хобота мезенхимальные клѣтки.

1) Курсивъ мой.

Случаи нахождения подобныхъ аномальныхъ экземпляровъ *Ptychodera*, какъ было сказано, столь рѣдки, что я, разумѣется, не могъ выяснитъ способъ образованія каждаго перикардіальнаго пузыря.

Впрочемъ, у меня есть основанія думать, что каждый перикардіальный мѣшокъ закладывается независимо отъ другого. Свое мнѣніе я основываю на нѣкоторыхъ препаратахъ, сдѣланныхъ черезъ хоботъ *Pt. minuta*, обладающей, подобно предыдущему экземпляру, также двумя перикардіями, но у которой одинъ изъ перикардіевъ находился въ зачаточномъ состояніи, тогда какъ другой былъ вполне развитъ.

Одинъ изъ разрѣзовъ черезъ такой хоботъ я привожу на рис. 60-мъ.

На этомъ срѣзѣ лѣвый перикардій значительно меньшихъ размѣровъ, чѣмъ правый. Этотъ лѣвый перикардій имѣетъ видъ кучки клѣтокъ, въ которой нѣтъ еще полости, тогда какъ правый перикардіальный мѣшечекъ представляетъ изъ себя настоящій пузырекъ, съ ясною полостью внутри.

Оба перикардія значительно отдалены другъ отъ друга.

Лѣвый зачатокъ перикардія ничѣмъ не связанъ съ целомомъ хобота, тогда какъ правый еще не совсемъ отдѣлился отъ праваго дорзолатеральнаго целомического мѣшка.

Серія срѣзовъ производитъ впечатлѣніе, что совершенно изолированный лѣвый зачатокъ перикардія образовался не путемъ отщепленія отъ праваго мѣшечка, а произошелъ самостоятельно отъ соотвѣтственнаго целома, т. е. отъ лѣваго дорзо-латеральнаго целомического дивертикула.

*4-й случай.* Переходимъ къ четвертому случаю проявленія атавизма при регенерации, а именно къ описанію тѣхъ экземпляровъ *Ptychodera*, у которыхъ дистальный конецъ нотохорды открывается наружу посредствомъ особаго отверстія.

Дѣло въ томъ, что нормально предротовой участокъ кишечника, — такъ называемая нотохорда, кончается въ хоботѣ слѣпо. Однако, случается, что въ регенерировавшемъ хоботѣ между дистальнымъ концомъ предротовой кишки (который расширяется и своей вентраль-

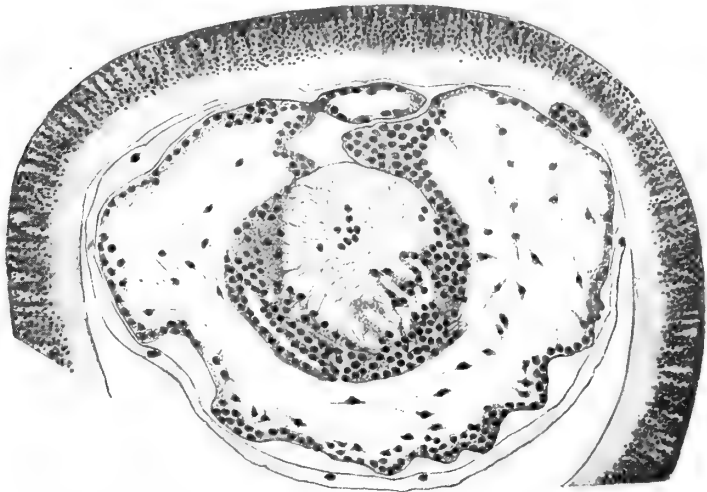


Рис. 60-й (= 30-й). Часть поперечнаго разрѣза черезъ регенерирующій хоботъ *Ptychodera*. Правый перикардіальный пузырекъ отшнуровывается отъ праваго дорзолатеральнаго дивертикула, лѣвый — лежитъ свободно. На сосѣднихъ срѣзахъ онъ немного большихъ размѣровъ, но полости въ немъ нѣтъ, хотя ядра расположены правильно по окружности. Zeiss Obj. 16, ocul. 2.

ной стороною тѣсно соприкасается съ эктодермой) и наружной средой устанавливается сообщеніе. Въ указанномъ мѣстѣ эктодерма хобота образуетъ небольшое углубленіе, которое приходитъ въ тѣсное соприкосновеніе со стѣнкой предротовой кишки, сростается съ нею и, наконецъ, въ мѣстѣ срастанія образуется пора.

На рис. 61-мъ изображенъ сагиттальный разрѣзъ черезъ такой аномальный регенерировавшій хоботъ.

Участіе эктодермального впяченія въ образованіи изображенной на указанномъ рисункѣ поры, положеніе ея на брюшной сторонѣ хобота, наконецъ, гистологическій характеръ

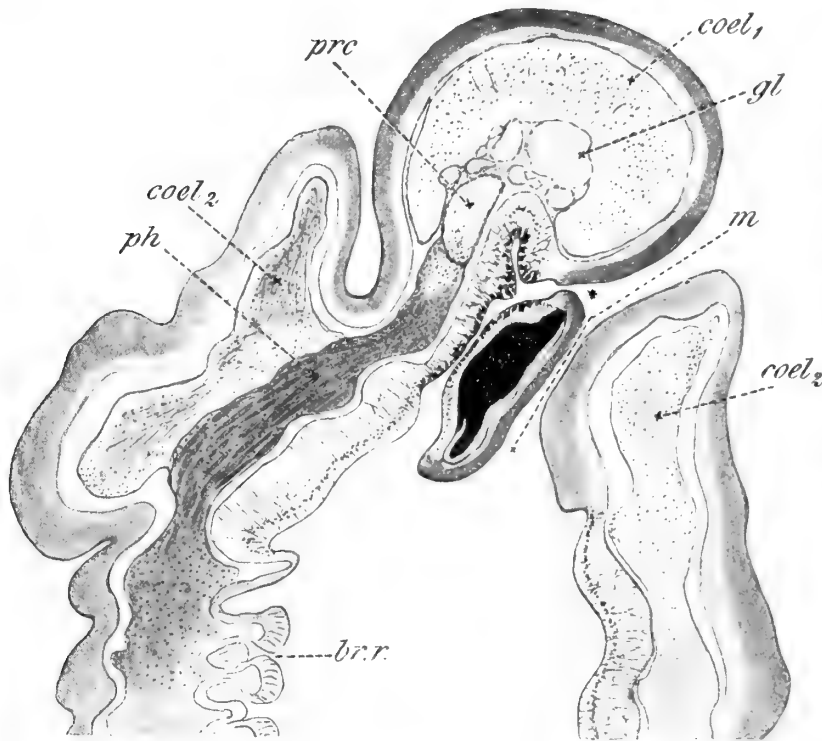


рис. 61-й (= 26-й). Разрѣзъ (сагиттальный) черезъ регенерирующую *Ptychodera*. *gl* — glomerulus; *prc* — перикардій; *nth* — нотохорда, открывающаяся на своемъ дистальномъ концѣ наружу (при \*); *m* — ротъ; *ph* — перитремальная полости. Zeiss. Obj. 16, ocul. 2.

такъ называемой нотохорды (присутствіе въ ней железъ) — все это невольно наводитъ на мысль, что описанные случаи сообщенія полости нотохорды съ наружной средой могутъ быть истолкованы, какъ проявленіе атавизма. Именно, я разсматриваю подобную пору, какъ первичный ротъ. Предротовой отростокъ кишечника, или нотохорда, у предковъ современныхъ *Enteropneusta* открывалась наружу на вентральномъ сторонѣ хобота, т. е. перваго сегмента, при помощи эктодермального рта.

При регенерации, подчасъ этотъ первичный ротъ регенерируетъ наравнѣ съ дефинитивнымъ, вторичнымъ.

Можетъ случиться, что вторичный ротъ совсѣмъ не образуется и тогда первичный ротъ остается единственнымъ, функционирующимъ. Въ такихъ случаяхъ, разумѣется, хоботъ будетъ лишенъ такъ называемой нотохорды, ибо эта нотохорда, или предротовой участокъ кишечника, будетъ играть теперь роль пищевода.

5-й случай. Несомнѣнно, какъ атавизмъ, нужно разсматривать образованіе при

регенерации *Ptychodera*, такъ называемой «supraoesophageal notochord», въ области воротника.

Какъ извѣстно, это образование, имѣющее видъ желобкообразной складки спинной стѣнки пищевода на всемъ протяженіи воротника и служащей непосредственнымъ продолженіемъ предротовой кишки, свойственна нѣкоторымъ видамъ Enteropneusta (сем. *Harrimaniidae*). У *Ptychodera* этотъ органъ нормально отсутствуетъ.

При регенерации въ области воротника почти всегда можно наблюдать образование этой воротниковой нотохорды—которую, между прочимъ, можно разсматривать, какъ единственный гомологъ хорды Vertebrata и Tunicata.

На рис. 62-мъ превосходно виденъ этотъ органъ, имѣющій видъ желобко-виднаго углубленія стѣнки кишечника, тянущагося на всемъ протяженіи воротника отъ ротового отверстия до начала жабернаго аппарата.

Интересно, что и при эмбриональномъ развитіи иногда появляется этотъ органъ у такихъ Enteropneusta, которые во взросломъ состояніи имъ не обладаютъ.

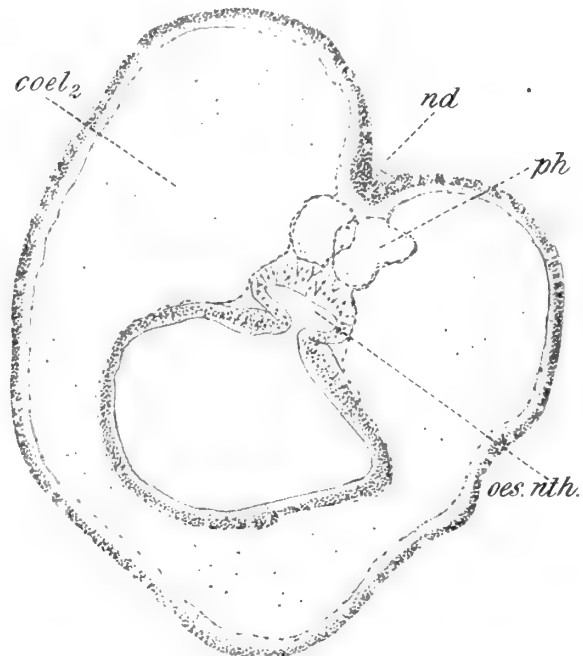


Рис. 62-й. Поперечный разрѣзъ черезъ регенерирующій воротникъ *Ptychodera*. На спинной сторонѣ пищевода образовался желобокъ, такъ наз. «supraoesophageal notochord» или воротниковая нотохорда — *oes. nth.* *nd* — дорзальный нервный тяжъ воротника—въ видѣ желобка; *ph* — перихэ-мальныя полости; *coel<sub>2</sub>* — целома. Leitz. Obj. 2, ocul. 2.

Итакъ, мы видѣли, что 1) при регенерации Enteropneusta органогенетическіе процессы протекаютъ болѣе палингенетическимъ путемъ, чѣмъ при онтогеніи;

2) При регенерации наблюдаются случаи атавизма;

3) Принципиально между регенерацией и онтогенезомъ нѣтъ различія.

Попытаемся теперь, принимая все это во вниманіе, на основаніи собраннаго матеріала освѣтить нѣкоторые вопросы, касающіеся морфологіи Enteropneusta.



**Морфологическое значеніе дефинитивнаго целома хобота Enteropneusta и отношеніе его къ перикардію.**

Целомическія образованія Enteropneusta представляютъ выдающійся интересъ. Достаточно упомянуть о томъ, что въ настоящее время большинство морфологовъ склоняется въ пользу присоединенія этой группы къ группѣ Triarticulata (Trimetamera Mastermann'a), созданной Шимкевичемъ (Schimkewitsch, 93) для животныхъ, обладающихъ тремя сегментами, съ тремя самостоятельными целомическими образованіями.

Такимъ образомъ родственныя отношенія Enteropneusta къ *Pterobranchia*, *Phoronis*, *Bryozoa*, *Chaetognatha*, *Echinodermata* etc. основываются главнымъ образомъ на строеніи целома.

Целомическія полости задняго и средняго сегментовъ Enteropneusta, т. е. воротника и туловища, не возбуждаютъ никакихъ недоразумѣній — въ обоихъ сегментахъ имѣются типичныя парныя целомическія полости.

Совсѣмъ иначе обстоитъ дѣло съ целомомъ хобота.

Какъ извѣстно, целома хобота у всѣхъ извѣстныхъ представителей Enteropneusta есть образованіе непарное.

Съ этимъ фактомъ справиться еще не представляло бы особеннаго труда, такъ какъ организація хобота даетъ достаточное количество данныхъ для предположенія о парномъ происхожденіи этого непарнаго целома (существованіе мезентерія на брюшной сторонѣ хобота, соединеніе целома въ иныхъ случаяхъ двумя, симметрично расположенными, нефридіальными каналами съ наружной средой).

Но вопросъ усложняется тѣмъ обстоятельствомъ, что наряду съ основной целомической полостью въ хоботѣ имѣется еще добавочный целомическій пузырекъ въ видѣ перикардія, или, какъ его назвалъ Шпенгель — «Herzblase».

Выясненіемъ морфологическаго значенія этого пузырька мы теперь и займемся.

Этотъ органъ, существующій уже во время личиночной жизни, въ видѣ пульсирующаго пузырька у *Togonaria*, былъ открытъ очень давно и всегда вызывалъ недоумѣніе изслѣдователей.

Шимкевичу принадлежитъ заслуга правильнаго объясненія морфологическаго значенія этого образованія.

Къ своей работѣ объ организаціи бѣломорскаго *Saccoglossus mereschkovskii* Wagn., авторъ ставитъ вопросъ о морфологическомъ значеніи такъ называемаго Herzblase ребромъ и рѣшаетъ его въ томъ смыслѣ, что этотъ органъ, который Шпенгель считалъ за сердце, есть вовсе не сердце, а представляетъ собою участокъ целомической полости.

Воигне въ 1889 году почти одновременно съ Шимкевичемъ, высказалъ взглядъ, по которому перикардіи представляетъ собою одну изъ половинокъ первоначально парнаго целома хобота. «The most plausible explanation of this structure», говоритъ этотъ авторъ:

«is that the anterior bodycavity of Balanoglossus may primitively have been a paired structure, and that this sac (т. е. перикардій) may be a member of the pair and the degenerated fellow of the proboscis cavity» (Bourne, 1889, стр. 66).

Шпенгель (Spengel, 93) всецѣло присоединяется ко мнѣнію Bourne и считаетъ Herzblase за рудиментъ правой половины целома хобота. Его ничуть не смущаетъ то обстоятельство, что по его же мнѣнію этотъ Herzblase возникаетъ изъ эктодермы, т. е. совсѣмъ необычнымъ для остальныхъ целомовъ Enteropneusta путемъ. Bourne, который тоже считалъ перикардій за производное эктодермы, видѣлъ въ этомъ обстоятельстве большую преграду для своей гипотезы. «The development of a mesoblastic pouch as an invagination of the ectoderm», говоритъ онъ: «lands us in a great morphological difficulty».

Происхожденіе этого органа оставалось до сего времени загадочнымъ. Во всякомъ случаѣ эмбриональное развитіе опредѣленнаго отвѣта на этотъ вопросъ не давало. Исслѣдованія Бэтсона (Bateson, 85, 86) и Моргана (Morgan, 91, 92, 94) выяснили, что перикардіальный пузырекъ происходитъ изъ мезенхимальныхъ клѣтокъ, но ни одинъ изъ этихъ изслѣдователей не наблюдалъ связи этихъ клѣтокъ съ целомомъ.

Единственное доказательство гипотезы Шимкевича даетъ намъ процессъ регенерации — при регенерации, какъ мы видѣли, перикардіальный пузырекъ образуется путемъ отщепленія отъ целома хобота.

Упоминаю объ этомъ, между прочимъ, еще и потому, чтобы лишній разъ обратить вниманіе на значеніе изученія регенерации для выясненія органогенеза, подчасъ не поддающагося изученію другими путями.

Такимъ образомъ, данныя, полученные путемъ изученія регенерации, въ связи съ морфологическими особенностями органа, а также сравненіе его съ гомологичнымъ образованіемъ у Pterobranchia, все въ совокупности не оставляетъ сомнѣнія въ томъ, что т. наз. «Herzblase» Шпенгеля есть настоящій целома.

Въ такомъ смыслѣ и формулируютъ этотъ вопросъ Циглеръ въ своей извѣстной статьѣ о целома (Ziegler, 98 стр. 55) и Лангъ (Lang, 02) въ своихъ: «Beiträge zur einer Hämo-coeltheorie».

«Die sogenannte Herzblase in der Eichel von Balanoglossus hat mit einem Herzen nichts zu thun, sondern ist eine unpaare (ursprünglich paarige?) Cölomblase, die durchhaus dem Pericard der Mollusken und Tunicaten entspricht» (стр. 350).

Такимъ образомъ въ хоботѣ Enteropneusta имѣются два целомаическихъ образованія: 1) собственно целома, сообщающійся съ наружной средой, и 2) замкнутый пузырекъ — перикардій.

Является вопросъ, въ какомъ отношеніи находятся они другъ къ другу.

Я уже приводилъ мнѣніе на этотъ счетъ Bourne и Шпенгеля. По ихъ предположенію перикардій долженъ разсматриваться, какъ одна изъ редуцировавшихся половинокъ первоначально парнаго целома.

Эта гипотеза, разсматривающая перикардій Enteropneusta, какъ рудиментъ *праваго*

целома, нашла въ послѣднее время защитника въ лицѣ Щепотьева (Щепотьевъ, 07), изслѣдовавшаго процессъ почкованія у Pterobranchia. Авторъ на основаніи своихъ наблюденій пришелъ къ тому же заключенію, что и Bourne и Шпенгель. Не называя даже этихъ именъ, Щепотьевъ высказываетъ «свое» мнѣніе на этотъ счетъ, распространяя при этомъ свои соображенія и на Enteropneusta <sup>1)</sup>.

Процессъ образованія перикардія изъ правой половинки парнаго ab origine целома головного щита почекъ Pterobranchia демонстрируется авторомъ на рядѣ схемъ.

Къ сожалѣнію данныя его не достаточно убѣдительны. По крайней мѣрѣ по отношенію къ *Cephalodiscus* (у котораго, впрочемъ, по словамъ Щепотьева процессъ образованія перикардія протекаетъ совершенно тѣмъ же путемъ, что и у *Rhabdopleura*) наблюденія Щепотьева далеко не могутъ считаться рѣшающими.

По крайней мѣрѣ послѣдній чрезвычайно добросовѣстный изслѣдователь *Cephalodiscus*—Андерсонъ (Andersson, 07) относится очень скептически къ его изслѣдованіямъ.

Повидимому, процессъ образованія перикардія здѣсь протекаетъ значительно сложнее, чѣмъ описываетъ Щепотьевъ. Судя по работѣ Harmer'a (05) и Andersson'a (07), процессъ этотъ очень запутанъ и, во всякомъ случаѣ, такой схематичности, о которой говоритъ Щепотьевъ, наблюдать не удается.

Такъ, по наблюденіямъ Andersson'a, уже на самыхъ раннихъ стадіяхъ развитія перикардія, этотъ органъ въ почкѣ *Cephalodiscus* занимаетъ медіанное положеніе въ хоботѣ.

Относительно происхожденія перикардія при почкованіи *Cephalodiscus* Harmer въ противоположность Щепотьеву высказывается въ томъ смыслѣ, что непарный ab origine целомъ головного щита, расщепляясь, даетъ дефинитивный целомъ и перикардій (стр. 96).

Въ результатѣ мы видимъ, что главные доводы, могущіе дать опору гипотезѣ Bourne-Sprengel'я, а именно, наблюденія Щепотьева надъ процессомъ образованія перикардія при почкованіи Pterobranchia, сильно колеблются.

Впрочемъ, если бы даже при почкованіи Pterobranchia дѣло и происходило такъ, какъ описываетъ Щепотьевъ, то придавать этому процессу рѣшающее значеніе врядъ ли возможно.

Въ противоположность регенеративному органогенезу, органогенезъ при почкованіи приобрѣтъ массу ценогенетическихъ особенностей. Процессы почкованія у Tunicata, Vruozoa и др. даютъ намъ убѣдительныя доказательства тому, что процессъ почкованія утерять всякое филогенетическое значеніе.

Для выясненія морфологіи перикардія Pterobranchia необходимо знать процессъ дифференцированія его при эмбриональномъ развитіи.

Кое какія данныя о развитіи *Cephalodiscus* сообщаютъ Гармеръ (Harmer, 05) и

1) Подобное отношеніе автора къ своимъ предшественникамъ тѣмъ болѣе странно, что вопросъ о морфологическомъ значеніи перикардія обсуждается Гармеромъ въ его монографіи Pterobranchia экспедиціи Siboga (къ этой работѣ Щепотьевъ, впрочемъ, тоже относится съ недостаточнымъ вниманіемъ), гдѣ приводятся мнѣнія и Sprengel'я и Bourne (см. Harmer, 05 стр. 97).

Андерсонъ (Andersson, 07). Въ работѣ Harmer'a нѣтъ указаній относительно образованія перикардія. Andersson'у удалось сдѣлать больше—авторъ даетъ намъ рядъ цѣнныхъ наблюдений относительно образованія целомическихъ образованій головного щита личинокъ и, между прочимъ, описываетъ процессъ дифференцированія перикардія.

По описанію Andersson'a у личинокъ *Cephalodiscus dodecalophus*, кромѣ большой целомической полости въ головномъ сегментѣ (т. е. хоботѣ), образуется еще очень маленькій пузырекъ, выстланный эндотеліемъ. Этотъ пузырекъ по мнѣнію автора есть зачатокъ перикардія, въ чемъ съ нимъ нельзя не согласиться.

Что касается происхожденія этого органа, то, судя по описанію Andersson'a, онъ образуется въ связи съ основнымъ целомомъ хобота.

Рисунки автора (figg. 81, 82, 83, а также fig. 78) чрезвычайно напоминаютъ тѣ картины, которыя я наблюдалъ на своихъ препаратахъ (образованіе перикардія отшнурованіемъ отъ праваго дивертикула целома хобота *Ptychodera*). Повидимому, оба процесса—образованіе перикардія при онтогеніи *Cephalodiscus* съ одной стороны, и при регенерации *Enteropneusta*—съ другой, протекаютъ вполне аналогичнымъ путемъ.

Во всякомъ случаѣ рисунки Andersson'a убѣдительно говорятъ въ пользу отшнурованія перикардіальнаго пузырька отъ целома головного щита<sup>1)</sup>.

Какъ бы то ни было, но, если даже принять перикардій *Cephalodiscus* за вполне самостоятельное образованіе, вполне равнозначное основному целому головного щита, то, по изслѣдованіямъ Andersson'a, этотъ мѣншій целомъ у *Pterobranchia* помѣщается сперва *слева* отъ основнаго целома (а не справа, какъ описываетъ Щепотьевъ).

Наоборотъ, у *Enteropneusta*, согласно этой гипотезѣ, первичное положеніе перикардія было *справа* отъ целома хобота<sup>2)</sup>.

Такимъ образомъ Andersson послѣ критическаго обзора литературныхъ данныхъ и на основаніи собственныхъ наблюдений приходитъ къ тому заключенію, что важное отличіе *Enteropneusta* отъ *Pterobranchia* состоитъ въ томъ, что *перикардій Enteropneusta соответствуетъ правой, а Pterobranchia—лѣвой половинѣ первоначальнаго парнаго целома хобота* (стр. 108—109).

Перехожу теперь къ выясненію своей точки зрѣнія на морфологію перикардія и связаннаго съ нимъ целома хобота.

1) Andersson, впрочемъ, склоненъ думать, что, помимо связи перикардія съ целомомъ хобота, онъ находится еще и въ сообщеніи съ первичнымъ кишечникомъ. Этотъ выводъ авторъ не иллюстрируетъ ни однимъ рисункомъ, даже упоминаетъ объ немъ вскользь. Судя по тѣмъ рисункамъ, которые приведены Andersson'омъ, нѣтъ ровно никакихъ данныхъ въ пользу сообщенія перикардія съ кишечникомъ.

2) Spengel энергично старается доказать, что

непарный дефинитивный целомъ хобота *Enteropneusta*, соотвѣтствуетъ *лѣвой* половинѣ парнаго ab origine целома. Въ доказательство онъ приводитъ слѣдующія сообщенія: 1) У многихъ *Togonaga* целомическій пузырекъ лежитъ на лѣвой сторонѣ; 2) Этотъ целомъ всегда открывается у *Togonaga* одной порой, которая по Morgan'у (94, стр. 14 и 24; 92, стр. 409) всегда находится на лѣвой сторонѣ личинки.

Что послѣдній генетически связанъ съ перикардіемъ—для меня нѣтъ никакихъ сомнѣній. Остается разсмотрѣть теперь какого рода эта связь.

Прежде всего необходимо выяснитъ вопросъ о томъ, что представляетъ изъ себя целомъ хобота—есть ли это образование непарное или парное *ab origine*.

Нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что вопросъ долженъ быть рѣшенъ въ пользу послѣдняго предположенія. Помимо всѣхъ остальныхъ соображеній, которыя будутъ приведены ниже, Шимкевичъ (07) совершенно вѣрно замѣчаетъ, что «громадное большинство непарныхъ органовъ парнаго происхожденія» (стр. 149).

Все дѣло въ томъ, гдѣ искать гомолога исчезнувшей половины хоботнаго целома *Enteropneusta*.

Мы видимъ, что, начиная съ Bourne и Spengel'я, гомологомъ ея считаютъ перикардій.

Мнѣ же кажется, что перикардій никоимъ образомъ не можетъ считаться *остаткомъ* когда то равнозначной половины целома, вытѣсненной разросшимся на ея счетъ сосѣдомъ.

На мой взглядъ *дефинитивная непарная целомическая полость хобота Enteropneusta есть результатъ слиянія двухъ половинъ, лѣвой и правой, перикардій же есть самостоятельное образование, представляя собою, слѣдовательно, 3-й целомъ хобота.*

Доказательство перваго положенія я вижу въ самомъ строеніи хобота.

Дѣйствительно, мы имѣемъ нѣсколько данныхъ въ пользу парности дефинитивнаго целома хобота, а именно:

- 1) Существованіе въ хоботѣ брюшнаго мезентерія.
- 2) Явно парный характеръ целома въ нижней части хобота, гдѣ дефинитивный целомъ образуетъ внизу два симметрично расположенныхъ мѣшка (дорзолатеральные мѣшки), изъ которыхъ нормально одинъ (лѣвый) открывается наружу хоботной порой, гомологомъ нефридія.
- 3) Случай существованія двухъ, симметрично расположенныхъ, хоботныхъ поръ, при помощи которыхъ оба нижнихъ дорзолатеральныхъ целомическихъ мѣшка открываются наружу (*Pt. flava*, *Pt. jamaicensis*, *Harrimaniidae*, иногда и у *Pt. minuta*)<sup>1)</sup>.
- 4) Аномальные случаи образованія при регенераціи *Pt. minuta* двухъ перикардіальныхъ пузырей, причѣмъ каждый закладывается вполнѣ самостоятельно. Случай эти, какъ было выше упомянуто, я разсматриваю, какъ проявленіе атавизма.

1) Строеніе целома головного щита *Pterobranchia*, тоже говоритъ не въ пользу гипотезы Spengel—Bourne.

У *Cephalodiscus* и у *Rhabdopleura* хоботной непарный целомъ открывается наружу всегда двумя порами. Это обстоятельство указываетъ на слияніе двухъ целомическихъ мѣшковъ въ одинъ.

Въ этомъ смыслѣ, хотя и очень осторожно, высказывается между прочимъ Harmer (05). The view that the pericardium is the fellow to the anterior body-cavity

has been suggested for *Balanoglossus* by Bourne and Spengel, but it may be remarked that the strictly median position of the pericardium in the later stages of *Cephalodiscus* and the fact that both proboscis-pores open into the anterior body-cavity are not in favour of this view» (стр. 97). Авторъ, между прочимъ, вскользь высказываетъ оригинальную мысль: «Some of the later stages» — говоритъ онъ, — «might suggest that the pericardium represents an independent somite» (стр. 97).

Послѣднее обстоятельство дастъ намъ ключъ къ разрѣшенію второго вопроса, а именно, выясняетъ истинное отношеніе перикардія къ целому хобота.

Придавая факту образованія при регенерациі хобота двухъ перикардіевъ значеніе атавизма, мы можемъ нарисовать слѣдующую картину эволюціи целомическихъ образованій хобота. На раннихъ стадіяхъ эволюціи *Enteropneusta* въ ихъ хоботѣ было два целома, расположенныхъ по бокамъ хоботного участка кишечника (т. е. «потохорды» хобота современныхъ *Enteropneusta*). Каждая половинка целома отшнуровывала на дорзальномъ концѣ небольшой участокъ, обособившійся въ видѣ замкнутого пузырька. Оба, лѣвый и правый, вновь образовавшіеся целомические пузырьки, образующіе своими дистальными концами спинной мезентерій передняго сегмента (хобота), и дали начало перикардію.

Такимъ образомъ, какъ и у аннелидъ, у которыхъ дорзальный кровеносный синусъ образуется между раздвинувшимися стѣнками целомическихъ мѣшковъ, примыкающихъ къ кишечнику, такъ и у предковъ *Enteropneusta* полость кровеноснаго сосуда охватывалась дистальными концами

праваго и лѣваго целома. Разница только въ томъ, что въ послѣднемъ случаѣ дистальные участки этихъ целомическихъ полостей съ обѣихъ сторонъ отдѣлились отъ целома въ видѣ самостоятельныхъ мѣшковъ и образовали вначалѣ парный, а затѣмъ непарный перикардій.

Описанный процессъ изображенъ на прилагаемой схемѣ (рис. 63-й).

Гипотеза эта прекрасно объясняетъ, между прочимъ, почему наблюдается такое несоотвѣтствіе въ положеніи перикардія у *Enteropneusta* и *Pterobranchia*. Такъ, мы видѣли, что *Andersson* указалъ на различіе между ними въ томъ отношеніи, что у *Enteropneusta*

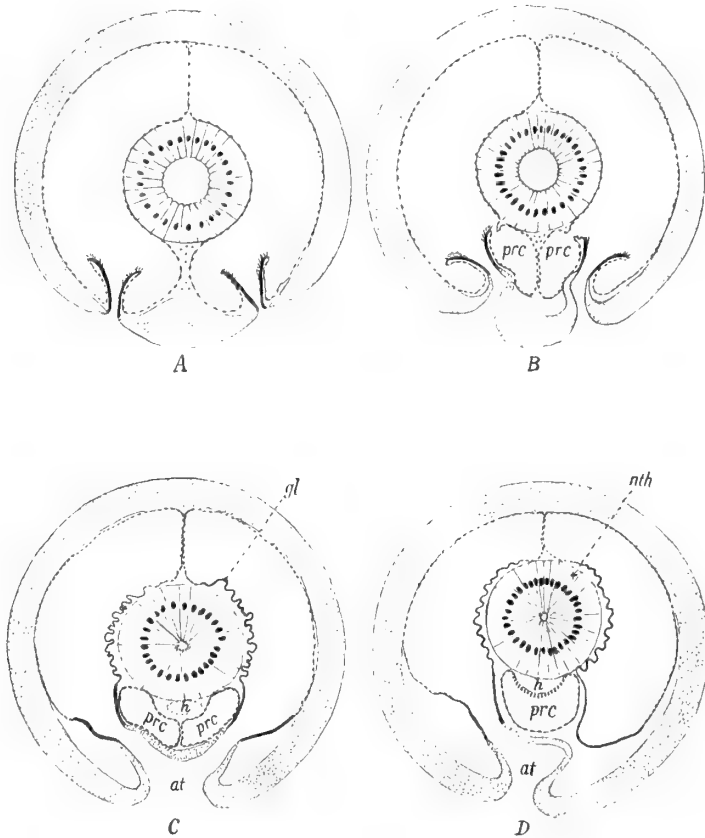


Рис. 63-й. Схема. Четыре послѣдовательныя стадіи эволюціи хобота *Enteropneusta*.

первичное положеніе перикардія было справа отъ дефинитивнаго целома, а у Pterobranchia — наоборотъ, слѣва.

Согласно высказанной гипотезѣ парнаго происхожденія перикардія у предковъ тѣхъ и другихъ, дѣло объясняется такимъ образомъ, что въ дальнѣйшей эволюціи у Pterobranchia атрофировался правый перикардій, а у Enteropneusta, наоборотъ, лѣвый.

Возможенъ, впрочемъ, и другой взглядъ, а именно, что оба перикардія слились въ одинъ непарный медианный мѣшокъ.

### Морфологическое значеніе перикардія.

Въ предыдущей главѣ было доказано, что перикардій не можетъ быть приравниваемъ лѣвой или правой половиной целома хобота, редуцировавшейся до степени незначительнаго пузырька. Перикардій представляетъ изъ себя ab origine, вѣроятно, парное образование, причемъ каждая половина этого органа самостоятельно отщеплялась отъ соотвѣтственной половины целома. Какое морфологическое значеніе этого органа?

Исторія развитія перикардія показываетъ, что здѣсь мы находимъ образование гомологичное, напр., перикардію Mollusca, среди которыхъ нѣкоторыя формы обладаютъ симметрично расположенными двумя перикардіальными пузырьками. Если у большинства моллюсковъ перикардій непарный, то исторія развитія говоритъ за то, что это явленіе вторичное — у зародышей нѣкоторыхъ Lamellibranchiata и Gasteropoda, обладающихъ во взросломъ состояніи непарнымъ перикардіемъ, этотъ органъ появляется въ видѣ двухъ пузырей, изъ которыхъ впоследствии формируется одинъ непарный.

Еще въ своемъ предварительномъ сообщеніи, говоря о морфологіи перикардія Enteropneusta, я указалъ на сходство этого органа съ кардіо-перикардіемъ Tunicata (Dauw-doff, 02). На такое сравненіе меня навели изслѣдованія В. В. Заленскаго надъ строеніемъ перикардія и сердца у *Oicopleura vanhoeffeni*, о которыхъ онъ докладывалъ на XI съѣздѣ Естественныхъ и Врачей въ 1901 г. На сходство между этими органами у Enteropneusta и Appendicularia указывалъ въ то время и В. М. Шимкевичъ.

Послѣ появленія моей замѣтки въ Zool. Anzeiger, съ аналогичной гипотезой выступилъ Риттеръ (Ritter, 02).

Гомологія между кардіо-перикардіемъ Enteropneusta и соотвѣтственными образованиями у Tunicata несомнѣнна, но вопросъ не настолько схематиченъ, какъ это казалось мнѣ и Шимкевичу.

Дѣло въ томъ, что кардіо-перикардіальный аппаратъ Tunicata отличается чрезвычайной сложностью.

Отношенія между сердцемъ и перикардіемъ у *Oicopleura* оказались не такъ просты и схематичны, какъ можно было судить по первому докладу Заленскаго. Вскорѣ появились его большія статьи объ анатоміи аппендикулярій, въ которыхъ, между прочимъ, авторъ

чрезвычайно обстоятельно описываетъ кардіо-перикардіальный аппаратъ. Оказалось, что у аппендикулярій послѣдній отличается столь же большой сложностью и оригинальностью, какъ и у Асцидій.

Какъ извѣстно, послѣ классическихъ изслѣдованій Ванъ-Бенедена и Жюлена (van Beneden et Julin, 81) надъ развитіемъ *Clavellina*, рядомъ изслѣдованій многихъ авторовъ выяснено, что у асцидій перикардій находится въ тѣсной связи съ рѣгунх'омъ черезъ посредство ряда образованій, получившихъ названій *про-и эпикардія*. Дѣло обстоитъ такъ. Отъ дна рѣгунх'а отходятъ двѣ трубки, расположенныя симметрично. Эти трубки, т. н. *прокардій*, на дистальныхъ концахъ сливаются въ одинъ мѣшокъ — *перикардій*, послѣ чего проксимальные неслившіеся участки ихъ образуютъ т. н. *эпикардіальныя* трубки. Брюшная стѣнка перикардіального мѣшка инвагинируетъ — образуется внутри перикардія сердечная лакуна.

Въ другихъ же случаяхъ нѣтъ слиянія дистальныхъ концовъ обѣихъ прокардіальныхъ трубокъ въ одинъ перикардіальный мѣшокъ, а только одна правая прокардіальная трубка отшнуровываетъ перикардіальный пузырекъ.

Такъ происходитъ дѣло у нѣкоторыхъ асцидій (напр. у *Distaplia* по Julin). Такой же процессъ описанъ Заленскимъ и у аппендикулярій (*O. vanhoeffeni*, *O. rufescens*, *Fritillaria*).

Такова схема развитія кардіо-перикардія у *Tunicata*<sup>1)</sup> изъ которой ясно, насколько своеобразенъ описываемый аппаратъ у этихъ животныхъ.

Помимо существованія цѣлаго комплекса оригинальныхъ образованій — про-и эпикардіевъ — перикардій образуется здѣсь изъ энтодермы, тогда какъ у всѣхъ остальныхъ *Metazoa* этотъ органъ мезодермальной природы.

Впрочемъ, быть можетъ, пару прокардіальныхъ трубокъ, отшнуровывающихся отъ глотки, можно разсматривать, какъ два, запаздывающихъ въ своемъ развитіи, целомическихъ мѣшечка, образующихся энтероцельнымъ способомъ. Такой взглядъ былъ, между прочимъ, высказанъ Шимкевичемъ (89) и, мнѣ кажется, это единственно возможный выходъ изъ того хаоса, который вноситъ кардіо-перикардіальный аппаратъ *Tunicata* въ наши морфологическія представленія.

Мы видѣли, что сравненіе кардіо-перикардія *Enteropneusta* съ аналогичнымъ образованіемъ у аппендикулярій, какъ это я предполагалъ раньше, не удастся, благодаря столь же большой сложности строенія этого аппарата, какъ и у большинства асцидій.

Правда, если придать извѣстное морфологическое значеніе тому способу образованія перикардія у *Ptychodera*, при которомъ послѣдній отшнуровывается отъ дистальныхъ концовъ перихемальныхъ трубокъ (см. стр. 40—41, рис. 35), то можно было бы, съ большой, конечно, натяжкой, приравнять послѣднія прокардію *Tunicata*, образуемому уже не непосредственно отъ кишечнаго канала, а изъ стѣнки третьяго сегмента целома.

1) Прекрасный обзоръ литературныхъ данныхъ по этому вопросу имѣется въ статьѣ Сели Лонгшана (*Selys Longschamp*, 1900).

Зап. Физ.-Мат. Отд.



Но, повторяю, подобныя сравненія черезъ чуръ натянуты и параллелизація между кардіо-перикардіальнымъ аппаратомъ *Tunicata* и *Enteropneusta* была бы чрезвычайно трудна, если бы мы не имѣли среди асцидій примѣра просто устроеннаго перикардія. Такой именно случай мы находимъ у *Ciona intestinalis*. Кардіо-перикардіальный аппаратъ этой формы, изученный чрезвычайно обстоятельно Сели Лонгшаномъ (Selys Longschamp 1900) и Уилли (Willey, 94), состоитъ изъ *двухъ перикардіальныхъ пузырьковъ*, расположенныхъ медианно по бокамъ «sillon retropharyngien». Въ дальнѣйшемъ развитіи эти пузырьки тѣсно сближаются и переходятъ на правую сторону личинки. Въ мезентеріи появляется полость — сердечный синусъ, послѣ чего оба перикардіальныхъ пузырька сливаются въ одинъ.

Итакъ, у *Ciona intestinalis* перикардій развиваются безъ посредства прокардіевъ<sup>1)</sup>.

Такимъ образомъ, *Ciona* даетъ намъ возможность сравнивать кардіо-перикардіальныя образованія *Enteropneusta* и *Tunicata*.

Принимая, наконецъ, гипотезу парнаго происхожденія перикардія *Enteropneusta*, мы можемъ провести полную параллель между кардіо-перикардіемъ послѣднихъ и сердцемъ *Vertebrata*. Въ особенности рѣзко выступаетъ сходство при сравненіи *Enteropneusta* съ *Anamnia*, у которыхъ, какъ извѣстно, сердце образуется болѣе первичнымъ путемъ, чѣмъ у *Amniota*, гдѣ большое количество желтка видоизмѣняетъ процессъ.

У *Anamnia* наблюдается стадія, когда зачатокъ перикардія еще ясно паренъ, причемъ каждая половина его образуетъ углубленіе въ сторону кишечника. Въ этомъ общемъ углубленіи, или желобкѣ, представляющемъ собою будущую сердечную полость, появляются клѣточные скопленія, располагающіяся, наконецъ, въ пузырькѣ — зачатокъ эндокардія. Эти клѣтки, образующія эндокардій сердца, по всей вѣроятности мезодермальнаго происхожденія (большинство авторовъ, однако, доказываютъ энтодермальную природу вышеуказанныхъ элементовъ).

Присутствіе эндокардія въ сердцѣ *Vertebrata* составляетъ отличительную его особенность. Лангъ (Lang, 02) придаетъ этому признаку особенно важное значеніе, но мнѣ кажется, у *Enteropneusta* мы тоже можемъ найти гомологъ эндокардія.

Такъ, въ соответственномъ мѣстѣ (глава II, стр. 38 — 39) я упоминалъ, что иногда сердечная лакуна *Ptyhoderia* бываетъ выстлана чрезвычайно рѣзко выраженнымъ клѣточнымъ слоемъ, образующимъ подчасъ настоящую плотную стѣнку (рис. 34). Подобныя картины мнѣ случалось видѣть не разъ. Замѣчу, что подобную клѣточную выстилку сердечной лакуны наблюдалъ, повидимому, и Шпенгель (Spengel, 93), но не обратилъ на нее вниманія. Такъ, на Табл. III, рис. 30 и на табл. IV, рис. 66 и 55 онъ ясно изображаетъ клѣтки по периферіи сердца *Pt. minuta* Тотъ же авторъ на табл. XXIV, рис. 67 изображаетъ на

1) Интересно, что у *Ciona*, по наблюденіямъ того же Selys Longschamp, эпикардіальныя трубки все же образуются, но значительно позднѣе (уже у молодой асцидii, а не у хвостатой личинки) и совершенно независимо отъ перикардія. Авторъ настойчиво проводитъ ту мысль, что эти образованія совершенно не зависимы другъ отъ друга (стр. 535—536).

периферіи кровеноснаго синуса *Tornaria krohni* кліточные элементы — и называетъ ихъ кровеносными тѣльцами, ставя, впрочемъ (что характерно), тутъ же знакъ вопроса. Бэтсонъ (Bateson, 86) тоже, повидимому, наблюдалъ кліточную выстилку сердечной лакуны у *B. kowalewskii* Ag.

Я не могу утвердительно сказать, какого происхожденія элементы, образующіе впоследствии описанную кліточную трубку между перикардіемъ и нотохордой. Во всякомъ случаѣ энтодерма (нотохорда) участія въ ихъ образованіи не принимаетъ.

Болѣе чѣмъ вѣроятно, что эти клітки представляютъ изъ себя тѣ мезенхиматозные элементы, которые всегда плаваютъ въ бластоцелѣ между нотохордой и целомами хобота.

Итакъ, нѣтъ ничего невѣроятнаго въ томъ, что здѣсь мы имѣемъ гомологъ эндокардія сердца *Vertebrata*, а слѣдовательно, опредѣленіе Ланга (Lang, 02) теряетъ свою категоричность.

Меня интересовалъ вопросъ, существуютъ ли у *Pterobranchia* на внутренней поверхности сердца остатки кліточного эндотелія, какъ это временами наблюдается у *Enteropneusta*.

На этотъ счетъ мы имѣемъ кое какія указанія въ работѣ Щепотьева (Щепотьевъ, 07), относительно *Cephalodiscus dodecalophus*. «Въ полости сердца, синусовъ или сосудовъ», вскользь замѣчаетъ авторъ: «лишь очень рѣдко можно замѣтить особыя внутреннія клітки»<sup>1)</sup> (стр. 130).

Эти клітки, повидимому, иногда образуютъ сплошную выстилку внутри кровеносныхъ синусовъ. Такъ, на одномъ изъ рисунковъ Щепотьева, иллюстрирующихъ его предварительное сообщеніе о *Cephalodiscus* (Schepotieff, 05) изображенъ эндотелій, выстилающій вентральный синусъ (Т. I fig. 3). Повидимому, подобный же эндотелій наблюдалъ и Андерсонъ (Andersson, 1907) въ сердцѣ *Cephalodiscus*, найденныхъ Шведской Южно-полярной Экспедиціей, хотя его указанія на этотъ счетъ очень неопредѣленны.

Еще менѣе даетъ намъ въ этомъ отношеніи работа Ридвуда (Ridewood W. G., 1907) отличающаяся къ тому же черезъ чуръ схематичными рисунками.

### Къ вопросу о хордѣ *Enteropneusta*.

Если искать у *Enteropneusta* гомолога хорды *Vertebrata*, то, разумѣется, естественнѣе всего обратить вниманіе на тотъ желобокъ, который у нѣкоторыхъ представителей группы тянется вдоль пищевода на всемъ протяженіи воротника.

Желобокъ этотъ есть обособившаяся часть верхней стѣнки пищевода и чрезвычайно напоминаетъ раннія стадіи закладки хорды у зародышей низшихъ *Vertebrata*.

Это образованіе, т. наз. «*Supraoesophageal notochord*», какъ извѣстно, было впервые описано Ritter'омъ у *Harrimania maculata*, послѣ чего его присутствіе доказано было у нѣкоторыхъ другихъ *Enteropneusta* (*H. kuppferi*, *Saccoglossus mereschkowskii*).

1) Курсивъ мой.

У *Ptychodera* нормально «supraoesophageal notochord» отсутствует, но, какъ мы видѣли, при регенерации она превосходно выражена (равно какъ она иногда появляется у нѣкоторыхъ формъ при онтогенезѣ).

На основаніи всего вышеизложеннаго мы вправѣ заключить, что желобковидная воротниковая нотохорда есть органъ характерный для *Enteropneusta*, но, несомнѣнно, находящійся на пути къ уничтоженію.

Возможно, что предки современныхъ *Enteropneusta*, у которыхъ слѣпой нынѣ предротовой участокъ кишечника (хоботная «нотохорда», stomochord) функционировалъ въ качествѣ пищевода, имѣли хорошо выраженную воротниковую нотохорду. Но, послѣ того, какъ произошло (о чемъ ниже) смѣщеніе рта кзади, т. е., когда прежній пищеводъ обратился въ слѣпой придатокъ кишечника, принявшій на себя функцію хорды — воротниковая нотохорда стала редуцироваться.

Такимъ образомъ гомологомъ хорды позвоночныхъ я признаю возможнымъ считать только воротниковую нотохорду.

Что же касается слѣплого предротового выроста кишечника, въ которомъ со времени Bateson'a принято видѣть настоящую хорду, то, мнѣ кажется, морфологическое значеніе этого органа совершенно другое <sup>1)</sup>.

Еще въ 1902 г. я высказалъ предположеніе, что т. наз. хоботная нотохорда *Enteropneusta* есть ни что иное, какъ настоящій предротовой участокъ кишечника, который когда то функционировалъ въ качествѣ пищевода.

Основаніемъ для такого взгляда послужили нѣкоторыя, выше изложенныя наблюденія надъ регенерацией этого органа, а именно, неоднократно находимые мною случаи аномальныхъ экземпляровъ *Ptychodera*, у которыхъ т. наз. нотохорда регенерировавшаяся хобота на дистальномъ концѣ открывалась наружу посредствомъ незначительнаго эктодермальнаго впяченія.

Такимъ случаямъ я придаю атавистическое значеніе и предполагаю, что когда то *ротъ предковъ современныхъ Enteropneusta* находился значительно выше, чѣмъ у нынѣ живущихъ ихъ представителей, а именно, на вентральной сторонѣ хобота, т. е. въ первой метамерѣ. По этой гипотезѣ то образованіе, которое принято называть хоботной нотохордой (или Stomochord, по терминологіи Willey), прежде функционировало въ качествѣ пищевода.

Какъ указываетъ Шимкевичъ, разбирающій этотъ вопросъ въ одной изъ своихъ послѣднихъ работъ (Шимкевичъ, 1907) въ пользу высказаннаго мною взгляда говоритъ косвеннымъ образомъ способъ дифференцированія т. наз. нотохорды у *Pterobranchia*, по наблюденіямъ Щепотьева.

Новѣйшій изслѣдователь морфологіи *Pterobranchia*, (именно *Cephalodiscus*), Andersson принимаетъ мою гипотезу <sup>2)</sup>.

1) Я не придаю ни малѣйшаго морфологическаго значенія тому образованію, которое Уилли назвалъ «pygochord» (Willey, 1899).

2) Прочитывая мои взгляды, Andersson говоритъ: «Möge ich doch auf die Möglichkeit hinweisen, dass der Mund bei den Vorfahren der Enteropneusten der

Аналогичнаго взгляда держится и Шимкевичъ (07). Онъ тоже принимаетъ, что т. наз. нотохорда (авторъ считаетъ хоботной предротовой участокъ кишечника за гомологъ хорды) образовалась послѣ смѣщенія первоначальнаго ротового отверстія, лежавшаго въ первой метамерѣ кзади.

Разница между моими взглядами и взглядами Шимкевича состоитъ въ томъ, что послѣдній принимаетъ смѣщеніе рта кзади, а я думаю, что нынѣшній ротъ есть новообразование.

### Морфологія хоботныхъ каналовъ.

Сравненіе хоботныхъ поръ Enteropneusta съ метанефридіями апнелидъ было уже давно сдѣлано Шимкевичемъ (89) на основаніи чисто апріорныхъ предположеній о двойной природѣ органа.

Для установленія этой гомологіи необходимо было прежде всего доказать, что хоботная пора Enteropneusta есть образование парное ab origine.

Со времени вышецитированныхъ изслѣдованій Шимкевича былъ установленъ рядъ формъ, у которыхъ въ хоботѣ нормально существуютъ двѣ поры, расположенныя совершенно симметрично. Не говоря уже о *Pterobranchia*, у которыхъ всегда имѣются двѣ поры въ головномъ щитѣ, мы имѣемъ такія же парныя поры у *Harrimaniidae*, *Ptychodera jamaicensis*, *Pt. flava*.

Интересно, что иногда, какъ мы видѣли (стр. 84), даже у тѣхъ формъ, которыя нормально обладаютъ одной порой, наблюдаются случаи появленія второй хоботной поры (*Balanoglossus kowalewskii*, *Ptychodera minuta*).

Словомъ, нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что непарность хоботной поры у большинства современныхъ Enteropneusta есть явленіе вторичное, точно также, какъ у личинокъ *Echinodermata* непарный зачатокъ гидроцеля съ его единственнымъ каменистымъ каналомъ, есть вторичное явленіе.

Таково господствующее мнѣніе. Только Шпенгель (Spengel, 93) держится противоположнаго взгляда. Онъ рассматриваетъ присутствіе только одной поры въ хоботѣ Enteropneusta за первичное явленіе. «Das Vorhandensein einer Pforte eine ältere Phase in der Phylogenie sei», говоритъ онъ и дальше прибавляетъ: «Kann ich die ontogenetisch zuerst auftreffende Pforte als die primäre, die andere als die secundäre bezeichnen» (стр. 470).

Нужно, однако, замѣтить, что данныя эмбріональнаго развитія не подтверждали апріорныхъ посылокъ о гомологіи между хоботными порами и нефридіями.

Наблюденія Bateson'a и Spengel'я единогласно говорятъ за эктодермальное происхожденіе хоботнаго канала. По изслѣдованіямъ этихъ авторовъ дѣло при онтогеніи обстоитъ

---

Hemichordaten weiter nach vorn, in der Nähe des vorderen Endes der Stomochorda, gelegen und dass die Stomochorda ursprünglich als der vordere Teil der Pharynx fungiert hat» (стр. 109).

такимъ образомъ, что слѣпой эктодермическій каналъ (образующійся путемъ инвагинаціи или деляминаціи) прорывается въ целомъ.

Такимъ образомъ онтогенія не давала никакихъ указаній на существованіе какой нибудь обособленной мезодермальной воронки, а, стало быть, сходство съ метанефридіями основывалось лишь на томъ фактѣ, что въ обоихъ случаяхъ, т. е. какъ у аннелидъ, такъ и у *Enteropneusta*, указанные органы устанавливаютъ сообщеніе между целомомъ и наружной средой.

Но этого, разумѣется, далеко еще недостаточно для установленія указанной гомологіи между нефридіями и хоботными каналами. Шпенгель (Spengel, 93) совершенно основательно указывалъ, между прочимъ, на т. наз. «спинныя поры» *Oligochaeta*, съ которыми можно также сравнить *Eichelpforten* *Enteropneusta*.

Процессъ регенераціи даетъ намъ опредѣленные указанія относительно морфологіи, а также и эволюціи этихъ органовъ у *Ptychodera minuta*.

Прежде всего нужно отмѣтить тотъ способъ регенераціи нефридіевъ, когда *закладываются двѣ перитонеальныя воронки и два эктодермальныхъ впячненія*. Здѣсь мы видимъ полную аналогію съ процессомъ образованія метанефридіевъ у *Annelides*. Регенеративный органогенезъ сохраняетъ здѣсь палингенетическія черты развитія органа, благодаря чему гипотеза Шимкевича относительно гомологіи хоботныхъ поръ съ метанефридіями кольчатыхъ червей получаетъ реальную основу.

Отмѣчу, однако, что регенеративный органогенезъ даетъ намъ указанія на существованіе еще болѣе примитивной стадіи эволюціи хоботныхъ поръ. За указаніе на такую я считаю тотъ случай, когда мезодермальная нефридиальная воронка непосредственно открывается наружу, т. е. безъ помощи эктодермальныхъ каналовъ.

Это есть, несомнѣнно, самая первичная стадія филогенетической дифференцировки метанефридія—она вполне соответствуетъ *antenephros*'у Шимкевича.

Такимъ образомъ я считаю эктодермальные каналы нефридіевъ *Enteropneusta* за новообразованіе. На первыхъ стадіяхъ эволюціи органа, онъ, вѣроятно, состоялъ только изъ мезодермальной воронки, которая приходила въ соприкосновеніе съ наружными покровами хобота и прорывалась наружу (рис. 63, А).

Слѣдующая ступень осложненія въ строеніи органа заключалась въ томъ, что на спинной сторонѣ хобота образовались два, симметрично расположенныя эктодермальныхъ впячненія, въ которыя и стали открываться воронки нефридіевъ (рис. 63, В).

Въ дальнѣйшемъ оба эктодермальныхъ мѣшечка оказались смѣщенными на дно одного обширнаго углубленія эктодермы, играющаго роль *atrium* (рис. 63, С).

Такимъ образомъ на этой стадіи каждая перитонеальная воронка открывается особымъ отверстіемъ въ эктодермальный *atrium*, но сообщеніе послѣдняго съ наружной средой поддерживается лишь при помощи одного медианнаго отверстія — поры.

Ясно, что пора эта морфологически отнюдь не соответствуетъ выводной порѣ нефридія. Нефридиальная пора находится на этой стадіи въ глубинѣ *atrium*'а.

На рис. 63, D изображены дальнѣйшія измѣненія, которыя претерпѣвалъ нефридіальный аппаратъ, прежде чѣмъ достигнуть того состоянія, въ которомъ мы застаемъ его въ настоящее время у большинства Enteropneusta.

Именно, на стадіи D правая половинка целома уже перестала сообщаться съ полостью atrium'a и является въ видѣ слѣпого мѣшка.

Эктодермальное впячиваніе atrium'a, въ которое на предыдущей стадіи открывался правый целома, стало выравниваться. Отверстіе самого atrium'a лежитъ все еще почти медианно. По мѣрѣ того, какъ это выравниваніе правой половинки atrium'a подвигается впередъ, атріальная пора передвигается влѣво и, наконецъ, въ большинствѣ случаевъ ложится на лѣвой сторонѣ хобота.

На этой стадіи эволюціи мы и застаемъ большинство современныхъ Enteropneusta.

Но еще раньше они утратили экскреторный характеръ эпителия перитонеальной воронки нефридіи, — вѣроятно, потеря обособленной экскреторной воронки обуславливалась появленіемъ новообразованія — *glomerulus (gl)*, принявшаго на себя экскреторную функцію (ср. Willey, 1899, стр. 306).

Такимъ образомъ изъ вышеизложеннаго ясно, что у современныхъ, извѣстныхъ намъ представителей Enteropneusta хоботныя поры представляютъ изъ себя органъ, измѣнившій свои функціи — несомнѣнно, это органъ гомологичный метанефридіямъ аннелидъ. Онъ состоитъ только изъ мезодермальной части. То, что принято считать за эктодермическій нефридіальный каналъ (наиболѣе типичная часть Eichelpforte) есть образование независи-

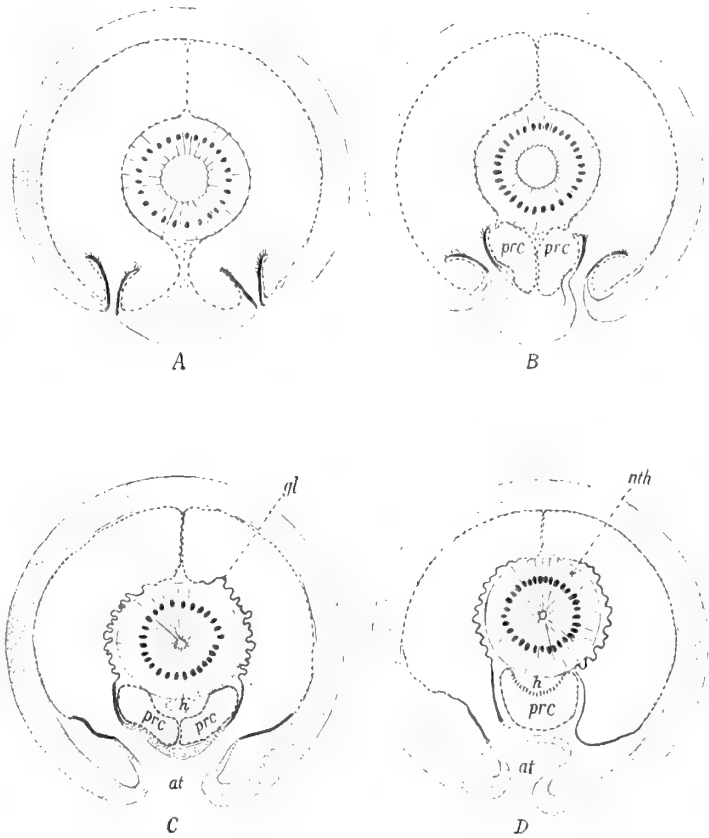


Рис. 63-й. Схема. Четыре послѣдовательныя стадіи эволюціи хобота Enteropneusta.

мое отъ нефридія. Это ни что иное, какъ эктодермическій atrium, въ который открывается нефридій<sup>1)</sup>.

Всѣ вышеприведенныя предполагаемыя филогенетическія стадіи развитія нефридіальнаго аппарата Enteropneusta хорошо можно прослѣдить при регенерации.

Впрочемъ, иногда и онтогенетическій органогенезъ сохраняетъ неизмѣненнымъ палингенетическій ходъ процесса эволюціи этого органа.

Такъ, у взрослыхъ *Ptychodera minuta* встрѣчаются иногда экземпляры, остановившіеся на стадіи *B*, или *C* (нефридіальный аппаратъ нормальныхъ особей этой формы характеризуется присутствіемъ одной лѣвой поры — стад. *D*).

### Къ вопросу о морфологіи дорзального нерва воротника.

Нервная трубка воротника Enteropneusta — ея гистологическое строеніе и положеніе на спинной сторонѣ животнаго, составляетъ одинъ изъ главныхъ аргументовъ въ пользу теоріи принадлежности Enteropneusta къ типу Chordata.

Только Шпенгель выступилъ противъ того толкованія, которое придаетъ большинство авторовъ воротниковому нерву, рассматриваемому за *центральную нервную систему* Enteropneusta.

Этотъ авторъ не придаетъ значенія тому обстоятельству, что указанный органъ имѣетъ въ большинствѣ случаевъ видъ трубчатого образованія, получившагося путемъ пивагинаціи.

Главное возраженіе Шпенгеля состоитъ въ томъ, что, по его наблюденіямъ, еще задолго до образованія нервной трубки воротника, воротниковый нервъ уже вполне дифференцированъ, составляя одно непрерывное цѣлое съ нервнымъ дорзальнымъ тяжемъ туловища. Погруженіе участка воротниковаго нерва подъ кожу и образованіе трубки есть такимъ образомъ, по мнѣнію Шпенгеля, явленіе вторичное, не имѣющее морфологическаго значенія.

Мои наблюденія вполне согласуются съ наблюденіями Шпенгеля—при регенерации задолго до процесса инвагинаціи, на спинной сторонѣ новаго воротника образуется нервный тяжъ, гистологически ничѣмъ не отличающійся отъ нервного утолщенія туловищной области. На дальнѣйшихъ стадіяхъ мы наблюдаемъ погруженіе этого воротниковаго участка нерва подъ кожу вмѣстѣ съ прилегающими участками послѣдней (не имѣющими признаковъ дифференцировки).

Такимъ образомъ только нижняя часть образовавшейся нервной трубки представляетъ изъ себя дифференцированный нервъ, остальные же прилегающія части нервной трубки есть ни что иное, какъ типичный участокъ кожного слоя, сохраняющій временами навсегда свой гистологическій habitus нормальной эктодермы (см. рис. 55, стр. 63).

1) Гомолога этому образованію, вѣроятно, нужно искать въ atrium Bryozoa Phylactolaemata, а быть | можетъ въ зачаткѣ перибранхіальной полости Amphioxus.

Совершенно аналогичныя картины мы находимъ и при эмбриональномъ развитіи. Такъ, напр., на рисунокѣ Моргана (Morgan, 92, pl. XXVIII, fig 58), изображающемъ разрѣзь черезъ воротникъ только что образовавшагося изъ *Togonaria-Balanoglossus*, мы видимъ совершенно такое же строеніе нерва. Верхняя стѣнка трубки рѣзко отличается гистологически отъ нижней и представляетъ изъ себя типичный неизмѣненный эпителий, тогда какъ нижній слой уже дифференцированъ въ нервъ.

Не смотря на всё эти данныя я не вижу, однако, оснований не придавать морфологическаго значенія тому важному обстоятельству, что *воротниковый нервъ образуется путемъ инвагинации на дорзальной сторонѣ животнаго.*

Мэкъ Брайдъ (Mac Bride, 94) и другіе авторы совершенно справедливо указываютъ, что вѣдь и при развитіи *Ampithoaxus* происходитъ погруженіе внутрь *уже образовавшейся, дифференцированной нервной пластинки.*

Мнѣ кажется, нѣкоторый интересъ могутъ представить мои наблюденія надъ однимъ аномальнымъ экземпляромъ *Ptychodera minuta*, у котораго не только въ области воротника, но и въ области туловища нервная пластинка находилась подъ кожей, т. е. инвагинація распространилась съ воротника на туловище.

Сперва мнѣ казалось возможнымъ толковать этотъ случай въ томъ смыслѣ, что у *Enteropneusta* уже выражена тенденція къ распространенію инвагинаціи дорзальнаго нерва на туловищную часть тѣла, но теперь я думаю, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ простою случайностью.

Обращаю, между прочимъ, вниманіе на то обстоятельство, что и у нормальныхъ особей въ туловищномъ сегментѣ нервъ этотъ иногда лежитъ на днѣ болѣе или менѣе ясно выраженнаго желобка. Есть и еще одно указаніе на случайность явленія, а именно — иногда случается наблюдать инвагинацію не только дорзальнаго, но и *вентральнаго* нерва туловища.

На рис. 64-мъ изображенъ, между прочимъ, поперечный разрѣзь черезъ туловище одного такого экземпляра *Ptychodera*, прошедшій въ области печеночныхъ придатковъ. Мы видимъ, что брюшной нервъ находится подъ кожей, которая выросла надъ нимъ съ боковъ. Въ жаберной области этого животнаго инвагинаціонный желобокъ представлялъ уже собою трубку.

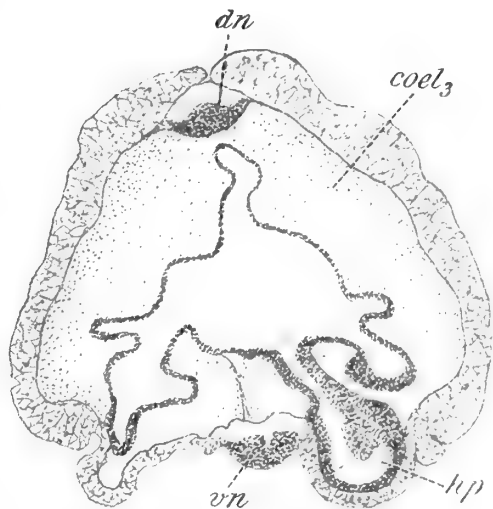


Рис. 64-й. Поперечный разрѣзь черезъ печеночную область (*hp*) аномальнаго экземпляра *Ptychodera minuta*, у которой вентральныи нервъ туловища погруженъ подъ кожу. *vn* — дорзальный, *dn* — вентральныи нервы. Zeiss Obj. 35, ocul. 4.



Въ своемъ морфологическомъ очеркѣ я не задавался вопросомъ создавать какой-нибудь филогенетической теоріи—я просто хотѣлъ выяснитъ на основаніи того матеріала, который даетъ намъ процессъ регенерации, морфологическое значеніе наиболѣе важныхъ органовъ *Enteropneusta*. Въ результатѣ этого небольшого изслѣдованія мнѣ, быть можетъ, и удалось набросать общими штрихами прообразъ тѣхъ отдаленныхъ формъ, которыя дали начало разсматриваемой группѣ, но я не рискнулъ бы точнѣе опредѣлить характеръ тѣхъ общихъ предковъ, изъ которыхъ, по моему убѣжденію, развивались параллельно и *Enteropneusta* и *Pterobranchia*<sup>1)</sup>.

Для этого нужно, мнѣ кажется, болѣе детально изучить морфологию самого характернаго органа, свойственнаго этимъ группамъ, а именно жабернаго аппарата.

Жаберный аппаратъ хордовыхъ стоитъ пока черезъ чуръ изолированно среди аналогичныхъ образований другихъ животныхъ.

Для выясненія его морфологическаго значенія необходимо предпринять сравнительно анатомическое и эмбриологическое изслѣдованіе передней кишки аннелидъ.

Извѣстное открытіе Заленскаго (*Salensky*, 07), изучавшаго строеніе передней кишки *Polygordius* и *Saccocirrus*, проливаютъ нѣкоторый свѣтъ на этотъ трудный вопросъ. У этихъ червей, по мнѣнію автора, существуютъ образования, которыя можно гомологизировать съ жаберными мѣшками *Enteropneusta*.

При своихъ изслѣдованіяхъ надъ регенерацией *Saccocirrus* я пришелъ къ тому же заключенію.

Однако до поры до времени вопросъ является открытымъ.

---

## ГЛАВА V.

### Способы регенерации.

#### Регенерация въ собственномъ смыслѣ и морфоллаксисъ.

Въ заключеніе мнѣ хотѣлось коснуться въ нѣсколькихъ словахъ чрезвычайно важнаго вопроса — именно, о тѣхъ путяхъ, которыми идетъ регенерация.

Процессъ регенерации *Enteropneusta* происходитъ различными способами.

Прежде всего мы наблюдаемъ здѣсь типичный случай—регенерацию въ собственномъ смыслѣ слова, т. е. образованіе регенеративной почки, въ составъ которой входитъ рядъ недифференцированныхъ зачатковъ, дериватовъ тканей и органовъ старыхъ участковъ тѣла.

---

1) Я совершенно не согласенъ со Щепотьевымъ (07), который считаетъ *Pterobranchia* болѣе первичными формами по сравненію съ *Enteropneusta*.

Вновь образовавшіяся клѣточные массы путемъ постепенной дифференцировки даютъ въ конечномъ результатѣ характерные для нормального организма органы съ ихъ нормальнымъ расположеніемъ.

При такомъ способѣ регенерации регенератъ можетъ также образоваться путемъ *разрастанія* тканей и органовъ оставшихся частей тѣла («Анастазъ» по терминологіи Шульца), но во всякомъ случаѣ *все органы въ немъ представляютъ собою комплексы вновь образовавшихся клѣтокъ.*

Подобный способъ регенерации особенно характеренъ для метамерно построенныхъ организмовъ, напр. аннелидъ.

Процессъ новообразования клѣточныхъ элементовъ путемъ разрастанія, старыхъ дифференцированныхъ тканей наблюдается при регенерации *Ptychodera* въ очень широкихъ размѣрахъ.

Даже столь специализировавшійся эпителий, какимъ является эпителий, выстилающій стѣнку пищевода, послѣ перерѣзки начинаетъ давать на дистальномъ концѣ новые элементы совершенно другого характера по сравненію со старыми (Рис. 64, а).



Рис. 64, а (46-й). Процессъ разрастанія энтодермального эпителия послѣ перерѣзки въ области срастанія его съ эктодермой. На рисункѣ изображена часть срѣза, приведеннаго на рис. 17-мъ. Zeiss. Obj. Hom. Imm. 2, ocul. 4.

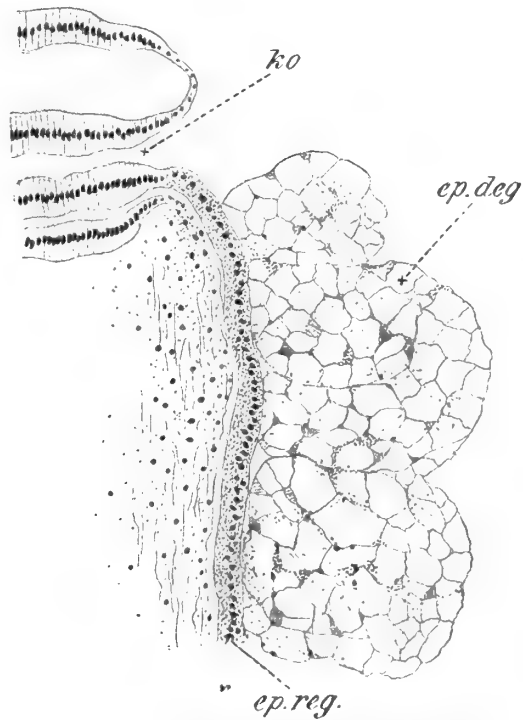


Рис. 65-й. Часть разрѣза черезъ *Ptychodera*. *Ep. deg*—дегенерирующій, ослизѣвшій эпителий, подъ которымъ регенерировала новая эктодерма—*ep. reg*; *ko*—жаберныя отверстія. Zeiss. Obj. Hom. Imm. 2, ocul. 4.

Точно также при регенерации происходитъ иногда своего рода линька, а именно, подъ старымъ дегенерирующимъ эктодермальнымъ эпителиемъ образуется новый, молодой, который, возникая въ нѣсколькихъ мѣстахъ, постепенно одѣваетъ все тѣло животного, послѣ чего

дегенерировавший эпителий отпадает (рис. 65-й). Въ подобныхъ случаяхъ новый эпителий образуется путемъ разрастанія клѣтокъ тѣхъ участковъ стараго эпителия, которые не подверглись дегенеративному перерожденію. Таковымъ является, напр., эпителий, примыкающій къ спинному нервному стволу туловища. Въ иныхъ случаяхъ приходится наблюдать любопытную картину: вся эктодерма измѣнилась до неузнаваемости—благодаря дегенеративному перерожденію она разбухла, часть ея уже превратилась въ комки слизи. Подобной картины разрушенія мы не наблюдаемъ только въ области спинного нерва — наоборотъ, мнѣ случилось наблюдать, что въ это время боковыя участки клѣточного нервнаго скопленія путемъ разрастанія даютъ новую эктодерму, которая разрастается подъ старой и замѣняетъ ее.

Это указываетъ, между прочимъ, на чрезвычайно слабую гистологическую дифференцировку нерва *Enteropneusta*.

Упомяну, между прочимъ, объ одной особенноти клѣточного дѣленія. При ростѣ тканей во время регенерации почти *никогда не наблюдается каріокинезовъ*.

Переходимъ теперь къ тому способу регенерации, который Морганъ назвалъ Морфоллаксисомъ, а Ру — регенерацией путемъ перемѣщенія и передифференцировки.

Принципъ Ру—ясень—подъ нимъ нужно разумѣть такой способъ регенерации, когда новыя части животнаго образуются не путемъ новообразования новыхъ элементовъ благодаря разрастанію старыхъ, *а путемъ соответственнаго измѣненія въ строеніи тѣхъ же старыхъ органовъ и тканей*.

Опредѣленіе Моргана введеннаго имъ понятія о морфоллаксисѣ довольно туманно. Въ сущности, принципъ морфоллаксиса, состоящій въ томъ, что при этомъ способѣ регенерации происходитъ «Transformation of the entire piece into new form», какъ выражается самъ Морганъ — вполне совпадаетъ съ принципомъ Ру. Въ томъ и другомъ случаяхъ нѣтъ новообразования, а старые участки тѣла путемъ сложныхъ перемѣщеній и передифференцировки какъ бы переливаются въ новыя части, т. е. именно тѣ, которыя организму нужно было возстановить.

Съ обще-біологической точки зрѣнія подобный процессъ представляетъ собою выдающійся интересъ, давая широкій просторъ для самыхъ широкихъ обобщеній.

Именно въ этихъ процессахъ неовиталистическая школа и видитъ, между прочимъ, точку опоры для своихъ умозаключеній.

Здѣсь я не буду касаться ближе теоретической стороны этого вопроса, а разсмотрю, и то лишь мимоходомъ, тотъ фактический матеріалъ, который пока имѣется въ моемъ распоряженіи.

### **Морфоллаксисъ при регенерации *Enteropneusta*.**

При регенерации *Enteropneusta* мы имѣемъ два типа регуляторныхъ явленій вышеуказаннаго характера, а именно: 1) передифференцировку цѣлаго участка тѣла, напр., всего передняго конца отрѣзка, въ хоботъ и воротникъ, и 2) процессъ передифференцировки, захва-

тывающій лишь части опредѣленныхъ органовъ и тканей, не касаясь окружающихъ областей.

Начнемъ съ послѣдняго, наиболѣе простаго случая.

Представимъ себѣ, что мы ампутировали *Ptychodera* гдѣ нибудь въ задней части тѣла — напр. въ хвостовой области (схема рис. 2, *d* и 42, *b*). Края эктодермы надъ раной срastутся, срastутся также и края кишечника (схема рис. 42, *b*).

При обычномъ способѣ регенерации мы должны были бы ожидать, что путемъ роста элементовъ эпителия кишечника, на дистальномъ его концѣ сформируется небольшой колпачекъ, состоящій изъ вновь образовавшихся недифференцированныхъ энтодермальныхъ клѣтокъ. Колпачекъ этотъ путемъ прорыва откроется наружу и въ немъ начнется гистологическая дифференцировка. Оказывается, въ разсматриваемомъ случаѣ совсѣмъ иначе происходитъ дѣло. Мы уже видѣли (стр. 49), какъ въ данномъ случаѣ протекаетъ процессъ. Мы видѣли, что въ данномъ случаѣ *новыхъ клѣтокъ, новыхъ элементовъ не образуется*, а вся передняя старая часть кишечника постепенно передифференцировывается въ новый эпителий, и, что интересно — именно въ тотъ оригинальный эпителий, который долженъ быть въ новообразующихся воротникѣ и туловищѣ.

Этотъ процессъ былъ уже демонстрированъ на схемѣ и на рядѣ рисунковъ (рис. 9, *b*; 15, 24, 25, 43 и др.).

Совершенно аналогичнымъ способомъ образуются у *Ptychodera*, какъ мы видѣли (стр. 17—23), целомъ хобота, а иногда и жаберныя щели.

Такъ, при перерѣзкѣ животнаго немного выше печеночныхъ мѣшковъ путемъ новообразования образуются хоботъ и воротникъ (рис. 6 и 8). Передняя же часть туловища, т. е. жаберный отдѣлъ, не регенерируетъ, а просто, непосредственно прилегающій къ печеночной области участокъ кишечника, передифференцировывается въ жаберный аппаратъ.

Процессъ состоитъ въ томъ, что соответственный эпителий въ мѣстахъ будущихъ жаберныхъ мѣшковъ передифференцировывается, здѣсь образуется вакуолистая стѣнка, которая двумя симметричными выпячиваніями открывается наружу.

Въ результатѣ получаютъ два ряда жаберныхъ мѣшковъ, открывающихся посредствомъ небольшихъ эктодермальныхъ (рис. 66) поръ наружу въ дорзальной половинѣ туловища.

Въ подобныхъ случаяхъ мы имѣемъ передъ собою модификацію т. наз. кишечныхъ поръ, открытых впервые Шимкевичемъ (89) у *Saccoglossus mereschkowskii* Wagn. а затѣмъ найденныхъ Шпенгелемъ («Darmforten») у ряда формъ (*Schizocardium brasiliense*, *Balanoglossus Kowalewskii*, *Glandiceps talaboti*, *G. hacksi*, также у *Spengelina* по наблюденіямъ Уилли (Willey, 99). Интересно, что у *Ptychodera minuta* эти кишечныя поры нормально отсутствуютъ.

Появленіе ихъ во время регенерации въ качествѣ единственныхъ замѣстителей типичныхъ жабръ является лучшимъ подтвержденіемъ правильности взгляда Шимкевича, который разсматривалъ (и продолжаетъ разсматривать) кишечныя поры, какъ самую примитивную форму жаберныхъ щелей.

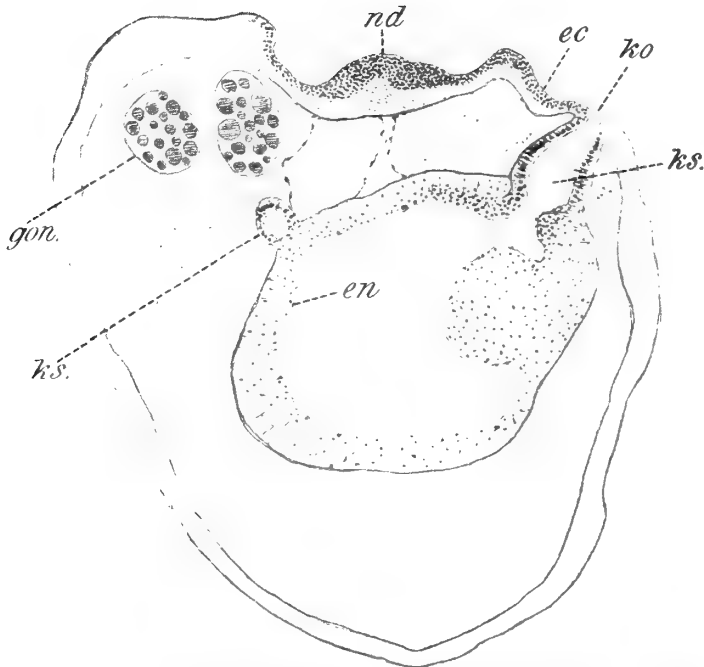


Рис. 66-й. Поперечный разръзъ черезъ туловище регенерирующей *Ptychodera*. Кишечникъ открывается наружу жаберными отверстиями — *ko*. *ks* — вновь образовавшіеся жаберные мѣшки. Leitz. Obj. 2, ocul. 4.

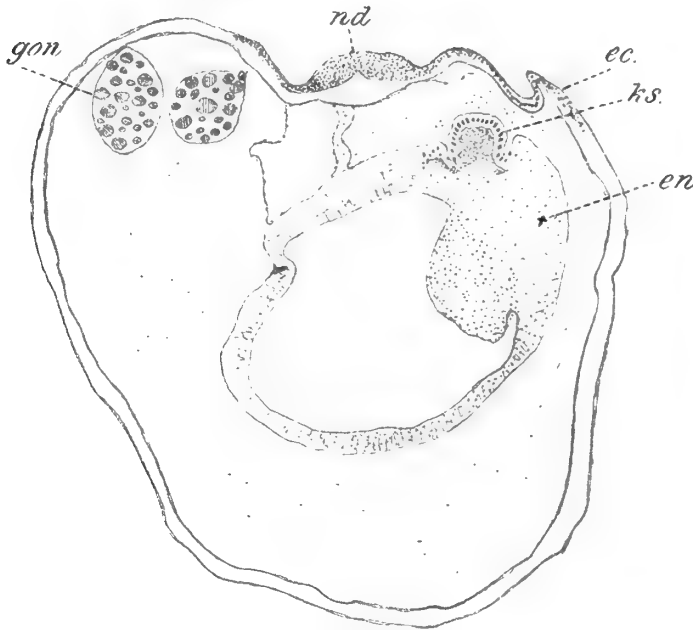


Рис. 66-й, а. Поперечный разръзъ черезъ туловищный сегментъ регенерирующей *Ptychodera*. Разръзъ прошелъ въ области гонадъ. Кишечникъ образуетъ жаберный мѣшокъ (*ks*), навстрѣчу къ которому инвагинируетъ небольшой участокъ эктодермы (*ec*). *nd*—дорзальный нервъ туловища; *gon*—гонады. Leitz. Obj. 2, ocul. 4.

Чрезвычайно цѣнны для насъ тѣ наблюденія, которыя сдѣлалъ Шпенгель (Spengel, 84 и 93) относительно образованія жаберныхъ мѣшковъ у молодыхъ *Glandiceps hacksi*. У этого животнаго (а также и у нѣкоторыхъ другихъ Enteropneusta) наблюдается образованіе новыхъ жаберныхъ щелей позади уже сформировавшихся — въ продолженіе почти всей жизни животнаго. Описаніе процесса и рисунки автора (напр. figg. 18, 19, 20, 21, 22, 23 Taf. 20) не оставляютъ сомнѣнія въ томъ, что Шпенгель наблюдалъ тотъ же самый способъ образованія жаберныхъ щелей, что и я при регенерации *Ptychodera*, т. е. уже вполне дифференцированный кишечникъ образуетъ симметричныя мѣшковидныя выпячиванія, которыя открываются наружу. Правда, Spengel не высказывается категорически относительно того, принимаетъ-ли участіе эктодерма въ процессѣ образованія выводного канала. Онъ былъ склоненъ рѣшить этотъ вопросъ даже въ отрицательномъ смыслѣ, но его рисунки, мнѣ кажется,

не оставляютъ сомнѣнія въ томъ, что на встрѣчу энтодермальному мѣшечку растетъ эктодермальный. Во всякомъ случаѣ, все дѣло въ толкованіи гистологической картины, самые же препараты Sprengel'я, повидимому, ничѣмъ не отличаются отъ моихъ (рис. 66-й, а) т. е. въ данномъ случаѣ мы видимъ удивительное соотвѣтствіе процессовъ типичнаго развитія и регенерации.

Правда, въ описанномъ Шпенгелемъ случаѣ новыя жабры возникаютъ непосредственно за уже дифференцированными, т. е. процессъ локализованъ въ жаберной области. *Въ наблюдавшемся же мною случаѣ кишечникъ образуетъ новыя выпячиванія почти на уровнѣ печеночнаго отдѣла.*

Это только показываетъ, что у взрослога животнаго на всемъ протяженіи кишечника стѣнка его способна образовать жаберное отверстіе, если въ этомъ будетъ необходимость. При ампутаціи, и послѣдовавшей за нею регенерации, стѣнка кишечника получаетъ стимулъ къ образованію жаберныхъ мѣшечковъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ въ обыденныхъ условіяхъ ихъ не образуется.

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію того случая, когда весь передній конецъ отрѣзка туловища *Ptychodera* превращается въ воротникъ и хоботъ путемъ передифференцировки.

Мы имѣемъ въ данномъ случаѣ типичный примѣръ морфоллаксиса въ смыслѣ Моргана.

На рис. 67-мъ и 68-мъ изображены сагиттальные разрѣзы черезъ цѣлыхъ животныхъ, которыя были перерѣзаны въ двухъ мѣстахъ — въ задней части жаберной области и въ средней области гонады.

Благодаря неправильностямъ, обусловленнымъ посторонними обстоятельствами, часть куска (рис. 67-й) дегенерировала, другая часть въ нѣкоторыхъ мѣстахъ вывернулась на изнанку. Регенерации въ собственномъ смыслѣ, т. е. новообразованія органовъ и тканей, ни на переднемъ, ни на заднемъ концѣ куска не произошло и, тѣмъ не менѣе, на переднемъ его концѣ образовался хоботъ.

Достаточно одного взгляда на препараты, чтобы увидѣть въ чемъ здѣсь дѣло, въ чемъ суть процесса. *Передній конецъ отрѣзка въ цѣломъ передифференцировался въ хоботъ.* Дѣйствительно, конецъ этотъ несетъ всѣ черты типичнаго хобота — въ немъ уже есть эктодермальный зачатокъ нефридія, обособленный целомъ, Glomerulus, нотохорда, и тѣмъ не менѣе въ этомъ же хоботѣ на лицо всѣ признаки, указывающіе, что онъ представляетъ собою ни что иное, какъ обособившуюся и передифференцировавшуюся часть отрѣзка. Въ немъ еще остались, напр., остатки жаберныхъ мѣшковъ (тотчасъ подъ нотохордой), а въ частяхъ, прилегающихъ къ нотохордѣ, видны даже гонады (рис. 68-й, г), попавшія въ передній отрѣзокъ благодаря неправильностямъ роста и перемѣщеніямъ тканей при процессахъ первичной регуляціи. Указываемые экземпляры ясно указываютъ на тотъ путь, который привелъ въ результатъ къ образованію на отрѣзкѣ новаго хобота. — Это — путь морфоллаксиса. *На переднемъ концѣ отрѣзка не было новообразованія клетокъ и тканей, и процессъ заключался въ томъ, что самъ этотъ конецъ превратился въ хоботъ.*

Процессъ этотъ совершился слѣдующимъ образомъ. Съ наружной стороны не произошло въ отрѣзкѣ никакихъ измѣненій — при изслѣдованіи объекта *in toto* нельзя даже сказать, что мы имѣемъ дѣло съ хоботомъ. Но внутри мы имѣемъ уже несомнѣнные признаки морфоллаксиса.

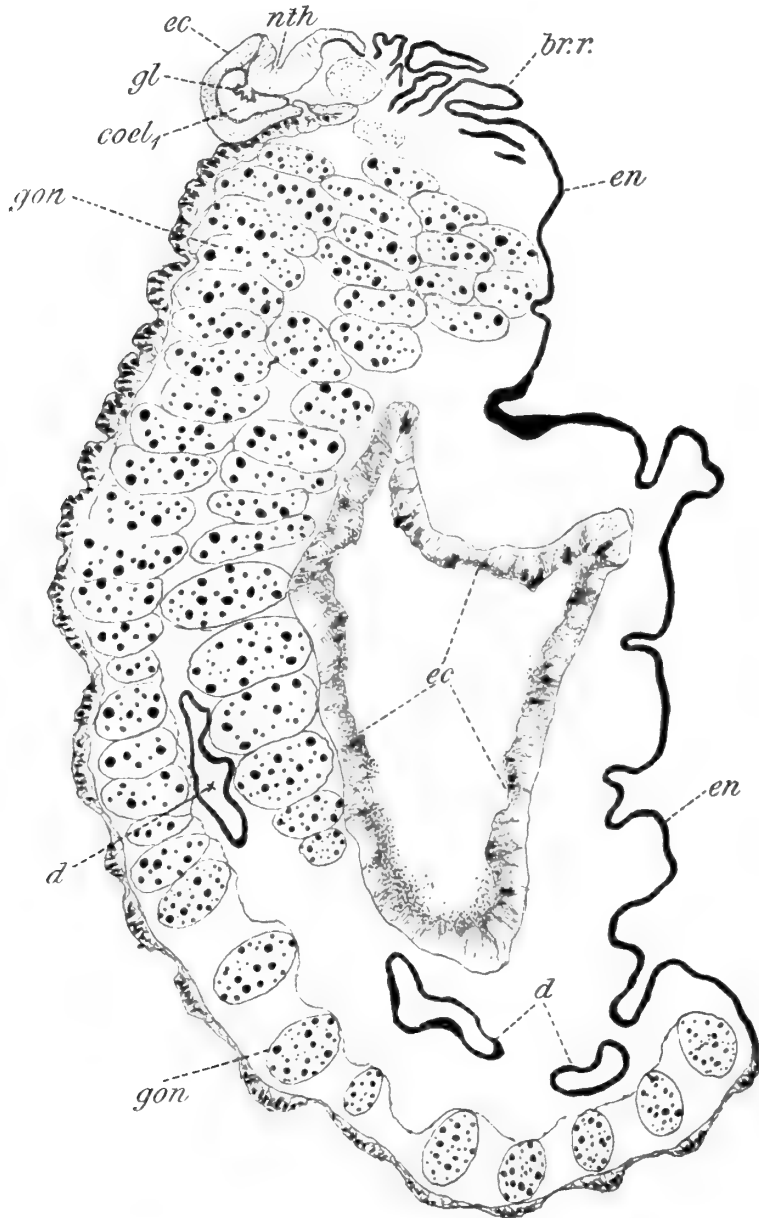


Рис. 67-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ кусокъ *Ptychodera*, передняя часть котораго передифференцировалась въ хоботъ. Передняя часть эктодермы совсѣмъ уничтожена (дегенерировала) задній конецъ обрывка загнулся на брюшную сторону, причемъ эпителий вентральной половины кишечника сросся съ эктодермальнымъ эпителиемъ, образующимъ жаберный отдѣлъ обрывка. Такимъ образомъ эктодерма вросла внутрь и находится на пути къ уничтоженію. Zess. Obj. 35, ocul. 4.

Эктодерма передняго участка отрѣзка на нѣкоторомъ разстояніи отъ дистальнаго конца впятилась внутрь и образовала типичный Eichelporte въ видѣ характернаго, однослойнаго эпителиальнаго канала. Часть целенхимы обособилась въ видѣ самостоятельнаго образования — целома хобота; участокъ энтодермальнаго эпителия передифференцировался въ характерный эпителий пищевода и впятился внутрь, образовавъ нотохорду.

Внутри передифференцировка совершалась — снаружи отрѣзка нѣтъ и намека на хоботъ.

Интересенъ, между прочимъ, другой случай.



Рис. 68-й. Часть сагиттальнаго разрѣза черезъ кусокъ *Ptychodera*, передній участокъ которой передифференцировался въ хоботъ. Въ хоботѣ еще остается гонада, которая была въ немъ до процесса передифференцировки. *nph* — атриумъ нефриды. Zeiss Obj. 35, ocul. 2.

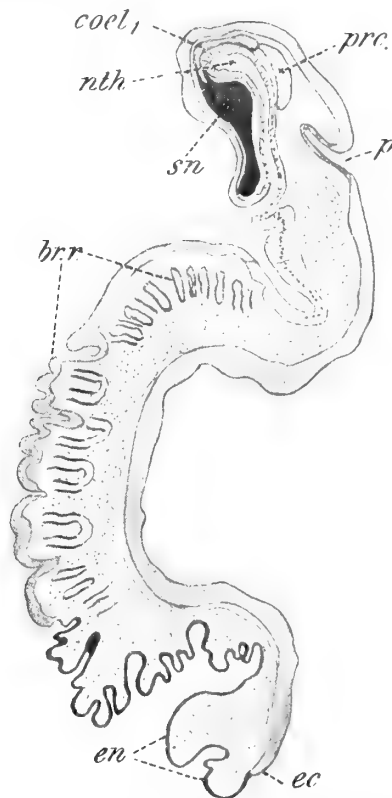


Рис. 69-й. Сагиттальный разрѣзъ черезъ обрывокъ *Ptychodera*, у которой передняя часть передифференцировалась въ хоботъ. Zeiss Obj. 35, ocul. 4.

Животное было ампутировано выше начала жаберныхъ щелей — посрединѣ воротника — въ передней части, и въ въ области гонадъ — въ задней, а затѣмъ разрѣзано вдоль на брюшной сторонѣ.

Медианная часть брюшной поверхности обрѣзка дегенерировала — обрѣзокъ превратился въ почти развернутую пластинку. Кишечникъ такого животнаго превратился въ простой энтодермальный желобокъ, широко раскрытый вдоль брюшной поверхности. (Подобный же процессъ, сопровождающійся чрезвычайно сильно выраженной дегенерацией, изображенъ на рис. 70-мъ. См. также рис. 7).



Несмотря на столь неблагоприятныя условия, регуляторные процессы шли чрезвычайно энергично и были направлены исключительно къ одной цѣли — регенерации хобота.



Рис. 70-й. Сагиттальный разръзъ черезъ экземпляръ *Ptychodera*, изображенный на рис. 7-мъ. Эктодерма на брюшной сторонѣ отсутствуетъ — она дегенерировала. Задній конецъ загнулся къ переднему и такимъ образомъ кишечникъ на большей части своего протяженія прикрытъ. Образовался впереди искусственный ротъ. Zeiss Obj. 35, ocul. 4.

Снаружи, при поверхностномъ изслѣдованіи *in toto*, въ отрѣзкѣ нельзя найти и слѣдовъ образованія хобота. Однако, на разръзахъ дѣло представляется иначе. Новообразованія

хобота, дѣйствительно, не произошло, онъ наружно даже и не обособился, но, оказывается, *вся передняя часть обрѣзка цѣликомъ превратилась въ хоботъ.*

Рис. 69-й, представляющій сагиттальный разрѣзь описываемаго экземпляра, даетъ намъ тому подтвержденіе. Мы видимъ, что передній конецъ превратился цѣликомъ въ хоботъ, чрезвычайно уродливый, но все же хоботъ — съ нотохордой, Eichelporte, перикардіемъ, громадной скелетной пластинкой, etc.

Совершенно аналогичный процессъ, повидимому, имѣеть иногда мѣсто и при возстановленіи передняго конца у нѣкоторыхъ аннелидъ.

Такъ, по наблюденіямъ П. Иванова (Ивановъ, 1905) у *Spirographis* сегменты т. наз. заднеторакального отдѣла образуются «не путемъ регенерации, а посредствомъ *постепеннаго превращенія* 6 переднихъ абдоминальныхъ сегментовъ отрѣзка въ торакальные» (стр. 4).

Процессы, совершающіеся при подобной общей передифференцировкѣ, или морфологическѣ, чрезвычайно сложны и требуютъ специальныхъ изслѣдованій.

Эти изслѣдованія должны выяснить рядъ вопросовъ, связанныхъ съ этимъ поразительнымъ явленіемъ, и въ особенности пролить свѣтъ на тѣ причины, которыя вызываютъ въ организмѣ совокупность сложныхъ явленій передифференцировки клѣтокъ, въ результатѣ которой получается цѣлесообразная перегруппировка частей.

Въ этомъ я вижу главную задачу изученія процесса регенерации.

Къ изслѣдованію этихъ причинъ мы можемъ приступить только во всеоружіи фактовъ.

Фактическій же матеріалъ, собранный въ этомъ направленіи, пока недостаточенъ. Детальныхъ гистогенетическихъ изслѣдованій по этому вопросу мы пока не имѣемъ, а онѣ, несомнѣнно, въ значительной степени помогутъ разобраться въ этой темной, глубоко интересной области.



## Цитируемые сочинения.

- Agassiz, A. 1873. The history of *Balanoglossus* and *Tornaria*. Mem. Americ. Acad. of Arts and Sciences. V. 9.
- Andersson. 1907. Die Pterobranchier der Schwedischen Südpolarexpedition (1901—1903). Wissenschaftliche Ergebnisse d. Schwedischen Südpolarexpedition. Bd. V. Stockholm.
- Bateson, W. 1884. The early stages in the development of *Balanoglossus* (sp. inc.). Quart. Journ. Micr. Sc. (N. S.) V. 24.
1885. The later stages in the development of *Balanoglossus kowalevskii* (Agassiz) and on the affinities of the Enteropneusta. Quart. Journ. Micr. Sc. V. 25 Suppl.
1886. Continued account of the later stages in the development of *Balanoglossus kowalevskii*, and on the morphology of the Enteropneusta. Quart. J. M. Sc. V. 25.
1886. The Ancestry of the Chordata. Q. J. M. Sc. V. 26.
- Bourne., G. 1889. On a *Tornaria* found in British seas. Journ. Mar. Biol. Assoc. (2) Vol. I.
- Caullery & Mesnil. 1904. Contribution à l'étude des Entéropneustes. *Protobalanus* (n. g.) *Koehlerii* (Caullery & Mesn.) Zool. Jahrb. Abt. Morph. u. System. Bd. 20.
- Cori, I. 1890. Untersuchungen über die Anatomie und Histologie d. Gattung *Phoronis*. Zeit. f. Wiss. Zool. Bd. 51.
- Dawydoff, C. 1901. Beiträge zur Kenntniss der Regenerationserscheinungen bei den Ophiuren. Zeitschr. f. Wiss. Zoolog. Bd. LXIX.
1902. Über die Regeneration der Eichel bei den Enteropneusten. Zool. Anzeiger. Bd. XXV.
1907. a. Sur la morphologie des formations cardio-péricardiques des Enteropneustes. Zool. Anz. Bd. XXV.
1907. b. Sur le développement du néphridium de la trompe chez les Entéropneustes. Ibid. Bd. XXXI.

- Delage, J. & Hérouard, E. 1898. *Traité de Zoologie concrète* Vol. VIII. Procordés.
- Driesch, H. 1901. *Die organischen Regulationen*. Leipzig.
- Giard, A. 1897. Sur les régénérations hypotypiques. *Compt. Rend. d. Soc. Biol. Paris*. V. II.
- Goette, Al. 1875. Vergleichende Entwicklungsgeschichte der *Comatula mediterranea* *Arch. Micr. Anat.* Bd. 12.
- Harmer, R. 1905. The Pterobranchia of the Siboga Expedition. *Siboga Expeditie*. V. 26, bis.
- Ivanow, P. 1903. Die Regeneration von Rumpf- und Kopfsegmenten bei *Lumbriculus variegatus* Gr. *Zeitschr. f. Wiss. Zool.* Bd. LXXV.
- ИВАНОВЪ, П. П. 1905. Регенерация у *Spirographis Spallanzanii* Тр. И. Спб. Общ. Естеств. т. XXXVII вып. I.
- Koehler, R. 1886. Contribution à l'étude des Entéropneustes. *Recherches anatomiques sur le Balanoglossus sarniensis* (nov. sp.). *Intern. Monatschr. Anat. Hist.* Bd. 3.
- Kowalevsky, A. 1886. Anatomie des *Balanoglossus Delle Chiaje*. *Mém. Acad. Imp. des Sciences. St. Pétersbourg* (7). T. 10. No 3.
- Lang, A. 1802. Beiträge zu einer Haemocoeltheorie. *Jen. Zeitschr.* Bd. 38.
- Mastermann, A. 1898. On the further Anatomy and the Budding Processes of *Cephalodiscus dodecalophus* M'-Int. *Tr. Roy. Soc. Edinb.* Vol. 39.
- Mc. Bride, E. 1894. W. A Review of Prof. Spengel's Monograph on *Balanoglossus*. *Quart. Journ. Micr. Sc.* (2) Vol. 36.
- Marion, A. F. 1886. Etudes zoologiques sur deux espèces d'Entéropneustes (*Balanoglossus Hacksi* et *Balanoglossus Talaboti*). *Arch. Zool. Expérim. et générale* (2) т. 4.
- Metschnikoff, E. 1870. Untersuchungen über die Metamorphose einiger Seethiere. 1. Ueber *Tornaria*. *Zeitschr. f. Wiss. Zool.* Bd. 20.
- Morgan, T. H. 1891. The Anatomy and Transformationen of *Tornaria*. A preliminary Note. *John. Hopk. Univ. Circ.* V. 10.
1892. The growth and metamorphosis of *Tornaria*. *Journ. Morph. Boston.* Vol. 5.
1894. The development of *Balanoglossus*. *Journ. Morph. Boston.* V. 9.
1899. Regeneration in *Bipalium*. *Arch. f. Entwick. Mech.* Bd. IX.
1901. Regeneration. *Columbia University Biol. Ser.* VII.
- Morgan & Moszkowski. 1907. *Regeneration*. Leipzig.
- Müller, Fr. 1880—81. Haeckels biogenetisches Grund-Gesetz bei der Neubildung verlorener Glieder. *Kosmos.* Bd. VIII.

- Ritter, W. 1884. On a new *Balanoglossus* Larva from the coast of California and its Possession of an Endostyle. Zool. Anzeiger. 17 Jahrg.
1900. Papers from the Harriman Alaska Expedition. 2. *Harrimania maculata*, a new genus and species of *Enteropneusta* from Alaska with special regard to the character of its notochord. Proc. Washington Acad. Sc. vol. 2.
1902. The Structure and Significance of the Heart of the *Enteropneusta*. Zool. Anzeiger, Bd. 26.
- Salensky, W. 1876. Ueber die Metamorphose des *Echiurus*. Morph. Jahrb. Bd. II.
1903. Etudes anatomiques sur les Appendiculaires. Mém. Acad. Imp. Sc. St. Pétersbourg, vol. XIII. № 7.
1904. Etudes anatomiques sur les Appendiculaires. Ibid. Vol. XV, № 1.
1905. Morphogenetische Studien an Würmern. I. Ueber den Bau der *Echiurus* larve. Mém. Acad. Imp. Sciences St. Pétersbourg, V. XVI № 11. VIII. Sér.
1907. Morphogenetische Studien an Würmern. IV. Schlussbetrachtungen zur Theorie des Mesoderm. Ibid. V. XIX. № 11.
1908. Ueber die Metamorphose des *Echiurus*. Bull. Acad. Sc. de St. Pétersbourg. VI Sér. №№ 3 u. 4.
- Schepotieff, A. 1905. Zur Organisation von *Cephalodiscus*. Bergens Museum Aarbog.
1907. Pterobranchia. Организация *Rhabdopleura normanni* All. и *Cephalodiscus dodecalophus* Mc. Int. СПб.
- Шульцъ, Е. А. 1905. Наблюденія надъ регенераціей у червей. Тр. И. СПб. Общ. Естеств. т. XXXIV, вып. 4.
1905. Über atavistische Regeneration bei Flusskrebse. Arch. Entwickl. Mechan. Bd. 20.
- Selys-Longchamps, M. 1900. Développement du coeur, du péricarde et des épocardes chez *Ciona intestinalis*. Arch. Biol. T. 17.
1907. Le genre *Phoronis*. Flora und Fauna des Golfes von Neapel.
- Spengel, I. W. 1884. Zur Anatomie des *Balanoglossus*. Vorläuf. Mitth. Mitth. a. d. Zool. Stat. Neapel. Bd. 5.
1893. Die *Enteropneusten* des Golfes von Neapel und der angrenzenden Meeresabschnitte. Flora und Fauna d. Golf. von Neapel. T. XVIII.
- Шимкевичъ, В. М. 1889. Наблюденія надъ фауной Бѣлаго моря. *Balanoglossus merschowskii* Wagn. Тр. И. СПб. Общ. Естествоиспытателей, т. XX, вып. 2.
1890. Ueber die morphologische Bedeutung der Organ-Systeme der *Enteropneusten*. Anat. Anzeiger Jahrg. 5. № 1.
1893. Sur les relations génétiques de quelques groupes des Métazoaires. Congr. Int. Zool. Moscou.

1905. Курсъ сравнительной анатоміи позвоночныхъ животныхъ. СПБ.

1907. О соотношеніи между Bilateria и Radiata (предв. сообщеніе) Тр. И. СПБ. Общ. Естеств., т. XXXVI, в. 4.

Weismann, A. 1902. Vorträge über Descendenztheorie. Jena.

Weldon. Preliminary Note on a Balanoglossus larva from the Bahamas Proc. R. Soc. London. Vol. XLII.

Willey, A. 1899. Zoological Results based on material from New-Britain, New-Guinea, Loyalty Islands etc. Part. III. Enteropneusta from the South Pacific with. notes on the West-Indian Species. Cambridge.

Ziegler, H. 1898. Ueber den derzeitigen Stand der Coelomfrage. Verh. d. Deutsch. Zool. Ges.



PRESENTED

16 NOV. 1908







Цѣна: 1 руб. 80 к.; Prix: 4 Mrk.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и К. Л. Римнера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петерб., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, М. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Ниммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Лозанѣ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sörgentfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

**ЗАПИСКИ**  
**ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ**  
ПО  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНЮ.**

ТОМЪ XXII.  
(СЪ 4 ТАБЛИЦАМИ).

**MÉMOIRES**  
DE  
**L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES**  
DE  
**ST.-PÉTERSBOURG.**

**CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.**

VIII<sup>o</sup> SÉRIE.

**TOME XXII.**  
(AVEC 4 PLANCHES).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1908. ST.-PÉTERSBOURG.







Цѣна: 10 руб. 40 к.; Prix: 23 Mrk.

Продается у комиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. И. Глазунова и К. Л. Риннера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петерб., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, И. Нишмея въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзаке и Копп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences:

J. Glasounof et C. Ricker à St.-Petersbourg, N. Karbasnikof à St.-Petersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, N. Oglobline à St.-Petersbourg et Kief, N. Kummel à Biga, Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.

