ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896),
B. WITZSCHEL (1856—1859), M. CANTOR (1859—1896), E. KAHL (1860—1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

---

45. BAND.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 2 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Physik.

Angewandte Mathematik und Physik.

Die charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens.

Von

Stanislaus Jolles

in Berlin.

Mit lithogr. Tafel I.

1. In den folgenden Untersuchungen liegen die den einfachen Balken angreifenden Lasten und Auflagerdrucke in einer vertikalen Ebene, sie dient als Zeichenebene für alle zu den Beweisen notwendigen geometrischen Konstruktionen. Bewegt sich nun über einen einfachen, gleichmässig belasteten horizontalen Balken AB von A auf B zu eine konzentrierte Einzellast $-P$, so finden sich bekanntlich die vertikalen Querschnitte Σ, in denen hierbei die Maximalmomente auftreten, nur innerhalb der durch die Querschnitte Σ_u, Σ_v bestimmten Strecke UV (s. Taf. I Fig. 1) der gefährlichen Querschnitte des Balkens. Während nämlich die Last $-P$ von A nach U rückt, rückt der zugehörige Querschnitt Σ_x von der Mitte des Balkens aus ebenfalls auf U zu, und fällt mit Σ_u zusammen, sobald $-P$ über U steht. Innerhalb der Strecke UV bleibt der Angriffspunkt X von $-P$ stets über dem ihm entsprechenden gefährlichen Querschnitte, hinter V tritt aber von neuem eine Trennung ein, da Σ sich nunmehr wiederum nach der Mitte des Balkens bewegt, wenn $-P$ den Weg VB zurücklegt. Entsprechend den von $-P$ durchlaufenen Strecken AU, UV, VB unterscheidet man drei verschiedene Kategorien von Querschnitten Σ, denen auch für einen Polabstand h drei verschiedene Kurven der Maximalmomente zukommen. Der Strecke der gefährlichen Querschnitte entspricht nämlich, für ein beliebiges h bezogen auf eine Horizontale, als Kurve der Maximalmomente eine häufig benutzte von $-P$ abhängige Parabel, den Strecken AU, VB hingegen, wie sich in (2) zeigt, je eine von $-P$ völlig unabhängige Parabel. Diese durch den gleichförmig belasteten einfachen Balken allein bestimmten Kurven werden seine charakteristischen Parabeln für den Polabstand h genannt; sie treten auch als Kurven der Maximal-

momente auf, wenn bei gleicher Polhöhe h über den vorliegenden gleichförmig belasteten einfachen Balken sich eine stetige, insbesondere eine gleichförmige Belastung vorschiebt.

2. Die über den einfachen gleichmässig belasteten Balken von A nach B zu vorrückende bewegliche Last $-P$ ruft in seinen vertikalen Querschnitten Maximal- und Minimal-Schubkräfte η und η' hervor, die in Fig. 1 (s. Taf. I) in üblicher Weise unter der Voraussetzung ermittelt sind, dass die bewegliche Last $-P$ P kg, die ständige gleichmässige Belastung f. d. l. M. g kg, und die Länge des einfachen Balkens l m beträgt. η und η' können sowohl positive wie negative Vorzeichen haben.

Steht $-P$ über einem Querschnitte σ_x (s. Taf. I Fig. 1), so liefert das zugehörige Wertepaar η_x, η'_x die dieser Lage von $-P$ entsprechende Schubkraftfläche, und folglich auch denjenigen Querschnitt Σ_x des einfachen Balkens, in dem nunmehr das Maximalmoment eintritt. Seine auf den Polabstand h bezogene Grösse

$$m_x = m_x^g + m_x^P$$

kann mit Hilfe der Parabeln π_g, π_P ermittelt werden, von denen die erstere eine zur Polhöhe h gehörige Seilkurve der ständigen gleichförmigen Belastung, die letztere eine der gleichen Polhöhe entsprechende Kurve der Maximalmomente der Einzellast $-P$ darstellt. π_P ist nämlich der Ort der Ecken aller zu der beweglichen Last $-P$ und der Polhöhe h gehörigen Seilpolygone, deren Schlusslinien bei ihrem Vorrücken von A auf B zu mit $A'B'$ zusammenfallen, m_x also gleich der Strecke $M_g M_P$.

Der Endpunkt M_g von $M_g M_P$ bleibt für jede Lage von $-P$ auf der Parabel π_g, welche Kurven beschreibt aber M_P, wenn $-P$ die Strecken AU, UV, VB durchläuft? Solange $-P$ innerhalb der Strecke AU weilt, bestimmt der Schnittpunkt M'' der Seite s des jeweiligen Schubkraftpolygons den Querschnitt Σ_x und $M_g M_P$. Hierbei bleibt s parallel zu $H''J''$, der Schubkraftlinie der gleichmässigen Belastung, und somit sind x und m entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel paralleler Strahlen. Nun ist der Büschel paralleler Strahlen x auch projektiv zum Strahlenbüschel B', da beide perspektiv zur Parabel π_P, folglich ist auch der Büschel paralleler Strahlen m projektiv zum Büschel B', und beide erzeugen, da sie nicht perspektiv liegen, einen Kegelschnitt und zwar eine Parabel π_u mit vertikaler Axenrichtung. Sie geht durch B', den Mittelpunkten C' von $A'B'$ und U_P, und diese Punkte samt der vertikalen Axenrichtung bestimmen sie eindeutig. π_u heisst die auf die Polhöhe h bezogene Parabel der Maximalmomente für die Strecke AU des einfachen Balkens AB unter der ständigen gleichmässigen Last von g kg f. d. l. M. und unter der beweglichen P kg schweren Last $-P$. Was π_u für die Strecke AU, ist die zu ihr kongruente durch die Punkte A', C' V_P und vertikale Axenrichtung bestimmte Parabel π_P

für VB. Für die Strecke UV der gefährlichen Querschnitte fällt bekanntlich die Kurve der auf h bezogenen Maximalmomente mit der Parabel π_P zusammen.

Durchläuft der Angriffspunkt X von $-P$ die Strecke AU, so überstreicht m_x das durch die Parabeln π_g, π_u und die Vertikalen m_a, m_u begrenzte Flächenstück, und zwar sind hierbei die von X und den Endpunkten $M_g M_P$ von m_x auf π_g, π_u beschriebenen Punktreihen projektiv. Ein analoger Satz gilt, wenn $-P$ von V nach B zu fortschreitet.

3. Den beweglichen Einzellasten $-P$ und $-P_0$ $(P > P_0)$ entsprechen auf dem gleichmässig belasteten Balken AB je die Strecken UV und $U_0 V_0$ gefährlicher Querschnitte (s. Taf. I Fig. 2a), und zwar ist $U_0 V_0$ ein Teil von UV. Gehört nun der vertikale Querschnitt Σ_x sowohl zu UV, als auch zu $U_0 V_0$, so können auf AB die Angriffspunkte X und X_0 der Lasten $-P$ und $-P_0$ derart bestimmt werden, dass jede von ihnen, wenn sie allein auf dem gleichmässig belasteten Balken steht, das zugehörige Maximalmoment im Querschnitte Σ_x hervorruft. Nach (2) gehen nämlich dann die Vertikalen x und x_0, auf denen X und X_0 liegen, durch die Punkte X'' und X''_0, in denen die durch M'' gehende Parallele zu $H''J''$ die Geraden $H''K''$ und $H''K''_0$ schneidet.

Für eine solche ausgezeichnete Lage der Angriffspunkte X und X_0 ist $X''Y'' = X''_0 Y''_0$, oder da diese Strecken die durch $-P$ und $-P_0$ hervorgerufenen Auflagerwiderstände P_B^x und $P_{0B}^{x_0}$ messen,

$$P_B^x = P_{0B}^{x_0}.$$

Nun ist ein $-P$ für den Angriffspunkt X entsprechendes Seilpolygon $A'E'B'$. Zu seiner Schlusslinie $A'B'$ läuft im zugehörigen Kräfteplan (s. Taf. I Fig. 2b) durch den Pol O eine Parallele, welche die in A und B hervorgerufenen Auflagerdrucke P_A^x und P_B^x bestimmt. Für P_B^x gilt hierbei die Beziehung:

$$S'A' : P_B^x = l : h,$$

nach der sich

$$B_B^x = S'A' \cdot \frac{h}{l}$$

ergiebt. In gleicher Weise folgt:

$$P_{0B}^{x_0} = S_0'A' \cdot \frac{h}{l},$$

wenn das der Last $-P_0$ für den Angriffspunkt X_0 entsprechende Seilpolygon $A'E_0'B'$ ist. Da aber P_B^x und $P_{0B}^{x_0}$ einander gleich sind, so müssen nach den eben gefundenen Ausdrücken $S'A'$ und $S'_0 A'_0$ zusammenfallen, d. h. die Einzellasten $-P$ und $-P_0$ im Querschnitte Σ_x des gleichmässig belasteten Balkens AB Maximalmomente von gleicher Grösse hervorrufen. Die Parabeln π_u und π_{0u}, sowie π_v und π_{0v} fallen also zusammen. Für den Polabstand h liegen hiernach die den beweglichen Einzellasten $-P$, $-P_0, \ldots$ entsprechenden Punkte U_P,

$U_{P_0}, \ldots, V_P, V_{P_0}, \ldots$ auf zwei kongruenten Parabeln π_u, π_v, welche die auf h bezogenen charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens genannt werden.

4. Wächst die bewegliche Einzellast $-P$, so vergrössert sich der zugehörige gefährliche Querschnitt UV, hierbei nähert sich U_P (s. Taf. I Fig. 2a) auf der Parabel π_u ihrem Schnittpunkte T_u mit der durch A gehenden Vertikalen. Die Strecke $A'T_u$ kann demnach als $\lim\limits_{-P=-\infty} m_u$ oder auch als $\lim\limits_{u=0} m_u$ berechnet werden. Nun ist:

$$\lim_{u=0} m_u = \lim_{u=0}(m_u^g + m_u^P) = \lim_{u=0} m_u^P$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \lim_{u=0} u \cdot P_A^u,$$

wenn P_A^u den Auflagerwiderstand darstellt, den $-P$ in A hervorruft, sobald es über U steht. P_A^u hat aber den Wert $\frac{P(l-u)}{l}$, folglich ergiebt sich, da im Grenzausdruck u^2 gegen u vernachlässigt werden kann:

$$\lim_{u=0} m_u = \frac{1}{h} \cdot \lim_{u=0} u \cdot P.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A''U''H''$ und $B''U''K''$ folgt ferner die Beziehung:

$$\frac{gl}{2} : u = -\left(P + \frac{gl}{2}\right) : -l + u,$$

und aus ihr:

$$P \cdot u = \frac{gl^2}{2} - gl \cdot u.$$

Also wird endlich:

$$\lim_{u=0} m_u = \frac{1}{h} \lim_{u=0}\left(\frac{gl^2}{2} - glu\right) = \frac{1}{h}\,\frac{gl^2}{2}$$

oder, da $\frac{gl^2}{8h}$ gleich der Pfeilhöhe f_g von π_g ist:

$$A'T_u = \frac{1}{h} \lim_{u=0} m_u = 4 f_g;$$

d. h.:

Die charakteristischen Parabeln π_u, π_v schneiden die durch $A'B'$ gehenden Vertikalen noch in zwei Punkten T_u, T_v, die von A' und B' um das Vierfache der Pfeilhöhe f_g abstehen. Sie berühren in A' beziehungsweise B' die Seilparabel π_g der ständigen gleichmässigen Belastung, und ihre Scheitel stehen von der Horizontalen $A'B'$ um $\frac{1}{2} f_g$ ab. Die Seilparabel π_g bestimmt die charakteristischen Parabeln π_u, π_v, und umgekehrt bestimmt eine von ihnen jene. Werden $A'B'$ und $A'A''$ als positive x- und y-Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes mit dem Anfangspunkte A' aufgefasst, so lauten die Gleichungen von π_u und π_v:

$$y = \frac{g}{2h}(l - 2x)(l - x),$$

$$y = \frac{g}{2h}(2x - l) \cdot x.$$

5. Bewegt sich eine kontinuierliche Belastung über den gleichmässig belasteten Balken von A nach B, bis sie ihn völlig bedeckt, so entspricht jeder Lage ihres Anfangspunktes X ein vertikaler Querschnitt Σ_x, in dem das zugehörige Maximalmoment eintritt. Der Querschnitt Σ_x rückt hierbei zuvörderst von der Mitte C des Balkens aus dem Punkte X entgegen, bis er für einen Punkt W durch ihn hindurchgeht. Sowie X aber W überschreitet, ändert sich die Bewegungsrichtung von Σ_x, es folgt nunmehr dem Anfangspunkte X, bis er über B anlangt. Die Querschnitte Σ_x zeigen hiernach zu den Anfangspunkten X ein zwiefaches Verhalten. So lange X zwischen A und W bleibt, ist Σ_x ein Vertikalschnitt des von der beweglichen Last noch nicht bedeckten Balkenteils WB, tritt hingegen X beim Vorrücken der Last von A auf B zu über W hinaus, rückt Σ_x unter sie.

Im ersteren Falle bleibt nun Ort und Grösse der Maximalmomente, die den Punkten X entsprechen, ungeändert, wenn die je zwischen A und dem vorwärtsrückenden X gelegene bewegliche Last ersetzt wird durch eine gleich schwere durch ihren Schwerpunkt gehende Einzellast. Zu all diesen Einzellasten gehört aber beim gleichmässig belasteten einfachen Balken, sobald nur ihr Angriffspunkt zwischen A und dem zugehörigen Σ_x liegt, die auf die gegebene Polhöhe h bezogene charakteristische Parabel π_u als Kurve der Maximalmomente. Also gilt:

Bewegt sich über einen einfachen gleichmässig belasteten Balken AB von A auf B zu irgend eine kontinuierliche Belastung, die stets von A bis zu ihrem Anfangspunkte X den Balken bedeckt, so hat sie bis zum Punkte W, für den X in die Ebene des zugehörigen Maximalmomentes Σ_x fällt, die auf die Polhöhe h bezogene charakteristische Parabel π_u als Kurve der Maximalmomente. Analoges gilt für die charakteristische Parabel π_v, wenn die bewegliche kontinuierliche Last in gleicher Weise sich über den gleichmässig belasteten Balken von B nach A zu vorwärts schiebt.

6. Sobald die von A nach B zu sich vorschiebende stetige Belastung selbst gleichförmig ist, also etwa p kg f. d. l. M. wiegt, lässt sich die Kurve der Maximalmomente auch für den Teil WB des gleichmässig belasteten Balkens AB, bei dem Σ_x unter der beweglichen gleichförmigen Belastung liegt, recht anschaulich ermitteln. Die Seite $R''_x X''$ (s. Taf. I Fig. 3a) der durch den Anfangspunkt X der beweglichen Belastung bestimmten Schubkraftfläche schneidet dann stets die Horizontale $A''B''$ in einem Punkte M''_x, der in der Ebene des X zugeordneten Querschnittes Σ_x enthalten ist, und das in Σ_x auftretende zu X gehörige Maximalmoment $h \cdot m_x = h(m_x^g + m_x^p)$ liefern die auf die Polhöhe h bezogenen Momentenflächen der ständigen und gerade in Frage kommenden beweglichen Belastung. In A ruft nun die von A bis X sich erstreckende bewegliche Last einen Auflagerdruck P_A^x hervor, dessen Grösse

im Kräfteplane (s. Taf. I Fig. 3b) die Strecke RT misst, wenn durch den Pol O des Kräfteplanes, OT parallel zur Tangente $A'T'_p$, OR parallel zur Schlusslinie $A'R'_x$ gezogen wird. Da aber auch RT parallel $R'_xT'_p$ ist, sind die beiden Dreiecke ORT, $A'R'_xT'_p$ ähnlich, sie liefern somit die Beziehung:

$$R'_xT'_p : RT = l : h.$$

Aus ihr ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass $T''R''_x$ ebenfalls P^x_A darstellt, endlich die Gleichung:

$$\alpha) \qquad T''R''_x = R'_xT'_p \cdot \frac{h}{l}.$$

Rückt also der Anfangspunkt X der beweglichen gleichförmigen Last von A auf B zu vor, so beschreiben R''_x und R'_x auf den Vertikalen a, b ähnliche Punktreihen. Zur Punktreihe $b\,(R'_x \ldots)$ ist der Strahlenbüschel A' perspektiv, zur Punktreihe $a\,(R''_x \ldots)$ hingegen die Punktreihe $A''B''(M''_x \ldots)$, und zu dieser wiederum der Büschel paralleler Strahlen s_x. Er erzeugt also mit dem zu ihm projektiven Strahlenbüschel A' einen Kegelschnitt. Rückt X'' auf der Parabel π'' ins Unendliche, so fällt das zugehörige s_x mit der unendlich fernen Geraden zusammen, und der ihm entsprechende Strahl des Büschels A' mit a. Die unendlich ferne Gerade ist demnach eine Tangente des erzeugten Kegelschnittes und letzterer selbst eine durch A' und die Mitte C' von $A'B'$ gehende Parabel π_{g+p} mit vertikaler Axenrichtung. Eine dritter leicht zu bestimmender Punkt dieser Parabel ist ihr Schnittpunkt S' mit b, er ist identisch mit demjenigen Punkte R'_x, der einem mit b zusammenfallenden Strahle s_x entspricht. Für ihn ist:

$$T''R''_x = pl + \frac{gl}{2},$$

also nach α):

$$S'T'_p = \frac{pl^2}{h} + \frac{gl^2}{2h} = 8f_p + 4f_g$$

oder, da T'_p sich um $4f_p$ unterhalb B' befindet,

$$S'B' = 4(f_g + f_p).$$

Der Scheitel der gefundenen Parabel π_{g+p} steht hiernach um $\frac{1}{2}(f_g + f_p)$ von der Horizontalen $A'B'$ ab.

Aus dem für $S'B'$ gefundenen Ausdrucke lässt sich übrigens der Schluss ziehen, dass die Parabel π_{g+p} für einfache, gleich lange, gleichmässig belastete Balken unverändert bleibt, wenn nur bei gleichem Polabstande h zwischen den Pfeilhöhen f_g und f_p von π_g und π_p die Beziehung $f_g + f_p = \text{const.}$ besteht, $g + p$ also den nämlichen Wert beibehält.

Aus der Parabel π_{g+p} geht die gesuchte Kurve der Maximalmomente π'_{g+p} (s. Taf. I Fig. 4a) hervor, sobald die m^p_x (s. Taf. I Fig. 3a) soweit auf ihren Vertikalen verschoben werden, bis ihre auf π_{g+p} gelegenen Endpunkte M_{g+p} auf die Horizontale $A'B'$ fallen. π'_{g+p} ist also eine Parabel mit vertikaler Axenrichtung, bestimmt durch die

Punkte A', C_p, und denjenigen Punkt T'_{g+p}, der auf b um $4(f_g + f_p)$ unterhalb B' liegt.

Mit Rücksicht auf (5) lässt sich das nunmehr erlangte Ergebnis folgendermassen aussprechen. Während der Anfangspunkt X der beweglichen gleichförmigen Belastung hintereinander die Strecken AW und WB (s. Taf. I Fig. 4a) auf dem einfachen gleichmässig belasteten Balken AB durchläuft, überstreicht das zugehörige m_x gleichzeitig erst das von den Parabeln π_g, π_u und den Strecken f_g, m_w und dann das von den Parabeln π_g, π'_{g+p} und den Strecken m_w, $f_g + f_p$ begrenzte Flächenstück.

7. In (6) wird die Parabel der Maximalmomente π'_{g+p} ermittelt, indem man die Parabel π_{g+p} bestimmt und in π'_{g+p} überführt. π'_{g+p} lässt sich jedoch auch herleiten, ohne π_{g+p} zu Hilfe zu nehmen, wenn nur der leicht zu beweisende Satz als bekannt vorausgesetzt wird, dass zu gleicher Polhöhe gehörige Seilkurven eines einfachen gleichmässig belasteten Balkens Teile ein und derselben Parabel sind.

Zu den aufeinander folgenden Lagen des von A auf B vorrückenden Anfangspunktes X der beweglichen Last gehören hiernach auf die Polhöhe h bezogene kongruente Seilparabeln als Teil der Begrenzung der jeder einzelnen Lage entsprechenden Momentenfläche. Liegen nun diese Momentenflächen auf derselben Seite ihrer Schlusslinien, und fallen diese mit $A'B'$ zusammen, so bilden ihre Grenzparabeln π_1, π_2, ... π_x, ... einen Büschel kongruenter gleichgerichteter Parabeln mit dem Grundpunkte A'. Zu ihm ist der Strahlenbüschel seiner Tangenten im Punkte A' perspektiv, er schneidet folglich b in einer zum Parabelbüschel $(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_x, \ldots)$ projektiven Punktreihe $b(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_x, \ldots)$. Durch die entsprechenden Elemente π_x und $\mathfrak{T}_x$ dieser beiden projektiven Gebilde sind zwei ähnliche Dreiecke ORT_x und $A'B'\mathfrak{T}_x$ bestimmt, wenn berücksichtigt wird, dass im Kräfteplane (s. Taf. I Fig. 4b) OR und OT_x parallel zu $A'B'$ und $A'\mathfrak{T}_x$ laufen, d. h. RT_x den zugehörigen Auflagerdruck P_A^x in A misst. Es verhält sich demnach:

$$A'B' : B'\mathfrak{T}_x = OR : RT_x$$

oder

$$l : B'\mathfrak{T}_x = h : T''R''_x,$$

woraus sich

$$T''R''_x = B'\mathfrak{T}_x \cdot \frac{h}{l}$$

ergiebt. Nach dieser Gleichung zwischen den Strecken $T''R''_x$ und $B'\mathfrak{T}_x$ beschreiben beim Vorrücken der beweglichen Last von A auf B zu, $\mathfrak{T}_x$ auf b und R''_x auf a ähnliche Punktreihen. Zur Punktreihe

$$a(R''_1, R''_2, \ldots R'_x, \ldots)$$

ist der Büschel paralleler Strahlen

$$(R''_1 1'', R''_2 2'', \ldots R''_x X'', \ldots)$$

perspektiv, zu diesem wiederum die Punktreihe

$$A''B''(M''_1, M''_2, \ldots M''_x, \ldots),$$

und zu ihr der Büschel paralleler Strahlen $(s_1, s_2, \ldots s_x, \ldots)$. Letzterer ist somit projektiv zum Büschel kongruenter Parabeln $(\pi_1, \pi, \ldots \pi_x, \ldots)$ und erzeugt mit ihm, da sein unendlich ferner Träger in den unendlich fernen Punkt der Parabel fällt, eine Parabel mit vertikaler Axenrichtung, die Parabel π'_{g+p}.

Hat g den Wert Null, schiebt sich also die bewegliche gleichförmige Belastung über einen einfachen unbelasteten Balken AB von A nach B zu vor, so fallen die parallelen Strahlen $s_1, s_2, \ldots s_x, \ldots$ mit den Axen $q_1, q_2, \ldots q_x, \ldots$ der ihnen entsprechenden Parabeln $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_x, \ldots$ zusammen, und der Strahlenbüschel $(s_1, s_2, \ldots s_x, \ldots)$ erzeugt mit dem zu ihm projektiven Büschel kongruenter Parabeln $(\pi_1, \pi_1, \ldots \pi_x, \ldots)$ als Ort der auf h bezogenen momentanen Maximalmomente eine Parabel π'_p, die zugleich der Ort der Scheitelpunkte der Parabeln des Büschels ist. π'_p hat vertikale Axe und enthält die Punkte A', C_p und T'_p, es ist folglich kongruent zu den Parabeln des Büschels, insbesondere also zu π_p.

Die Büschel der Parabelaxen $q_1, q_2 \ldots q_x, \ldots$ und der parallelen Strahlen $s_1, s_2, \ldots s_x, \ldots$ sind nicht mehr identisch, sondern nur noch projektiv, sobald $g > 0$ wird. Entsprechende Strahlen beider Gebilde schneiden dann die Geraden $T''C''$ und $A''B''$ in zwei projektiven zu dem Büschel paralleler Strahlen $(R''_1 1'', R''_2 2'', \ldots R''_x X'', \ldots)$ perspektiven Punktreihen $(Q''_1, Q''_2, \ldots Q''_x, \ldots)$ und $(M''_1, M''_2, \ldots M''_x, \ldots)$.

8. π'_{g+p} trifft die Horizontale $A'B'$ ausser in A' noch in einem Punkte D', durch den die Parabel π_d des Büschels $(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_x, \ldots)$ geht. Ihr Scheitelpunkt liegt auf der Symmetrieaxe des Punktepaares $A'D'$, und diese geht als Axe von π_d nach (7) im Punkte Y''_d von $T''C''$ durch die Mitte der zu $E''C''$ parallelen Strecke $R''_d D''$ und demnach in Y durch die Mitte von $A''D''$. Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A''Y''_d Y$ und $C''E''A''$:

$$YY''_d : A''Y = (g+p)\frac{l}{2} : \frac{l}{2},$$

und aus der der Dreiecke $YC''Y''_d$ und $A''C''T''$:

$$YY''_d : \frac{l}{2} - A''Y = \frac{gl}{2} : \frac{l}{2}.$$

Somit hat, wenn YY''_d aus diesen Gleichungen eliminiert wird, Y von A'' den Abstand:

$$A''Y = \frac{g}{2g+p}\,\frac{l}{2},$$

und endlich das gesuchte $A'D'$ den Wert:

$$A'D' = \frac{f_g}{2f_g + f_p} \cdot l.$$

Ein beliebiger Punkt der Parabel π'_{g+p}, z.B. der Scheitelpunkt F'_{g+p}, kann aus ihrer Axenrichtung und den drei Punkten A', D', C_p durch das Pascal'sche Sechseck $(\infty\,\infty\, F'_{g+p} A' D' C_p)$ ermittelt werden, in dem $\infty\infty$ den doppelt zählenden Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden darstellt; seine drei Paar Gegenseiten:

$$\infty\infty,\ A'D' - \infty F'_{g+p},\ D'C_p - F'_{g+p}A',\ C_p\infty$$

schneiden sich auf der parallel zu $A'B'$ laufenden Pascal'schen Geraden $\mathfrak{p}$.

Nun ist:
$$\Delta Y'\mathfrak{H}D' \sim \Delta C'C_pD',$$

also verhält sich:
$$Y'D' : \mathfrak{H}Y' = C'D' : C_pC',$$

oder mit Rücksicht auf den soeben gefundenen Wert von $A'D'$:

$$\frac{f_g}{2f_g + f_p}\cdot\frac{l}{2} : \mathfrak{H}Y' = \frac{l}{2} - \frac{f_g}{2f_g + f_p}l : f_p,$$

d. h. es ist:
$$\mathfrak{H}Y' = f_g.$$

Die Pascal'sche Gerade $\mathfrak{p}$ ist hiernach die Scheiteltangente von π_g, und der Schnittpunkt $(F'_{g+p}A',\ C_p\infty)$ der zugehörige Scheitelpunkt; π_g und π'_{g+p} haben also in A' die nämliche Tangente.

Als Pfeilhöhe f'_{g+p} von π'_{g+p} ergiebt sich aus der Beziehung:

$$f_{g+p} : f_g = \frac{A'D'}{2} : \frac{l}{2}$$

$$f_{g+p} = \frac{f_g^2}{2f_g + f_p},$$

und endlich aus dem Verhältnis:

$$\frac{l}{2} : (2f_g + f_p) = l : B'T'_{g+p}$$

wiederum der schon in (6) gefundene Wert:

$$B'T'_{g+p} = 4(f_g + f_p).$$

Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen.

Von

Dr. Josef Grünwald

in Prag.

Durch v. Staudt sind bekanntlich die imaginären Elemente als vollberechtigt in die synthetische Geometrie eingeführt worden.* Das Konstruieren mit imaginären Elementen aber ist, wenn man sich an die übliche Darstellungsweise hält, wie sie in den einschlägigen Lehrbüchern sich findet, eine ziemlich verwickelte Sache.

Um zwei imaginäre Gerade oder Punkte in der Ebene, welche in der von Staudt eingeführten Bezeichnungsweise durch harmonische Würfe in ihren reellen Trägern und den zugehörigen Durchlaufungssinn gegeben sind, zu schneiden bezw. verbinden, muss man sie nach dem üblichen Verfahren erst durch zwei harmonische Würfe darstellen, welche das gemeinsame Element der beiden gegebenen reellen Träger enthalten.

Es muss also bei diesem Verfahren mit den gegebenen Würfen, bevor die eigentliche Konstruktion beginnt, eine Umformung vorgenommen werden; und man erkennt, dass — beim gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis — diese Umformung sich nicht mit Hilfe des Lineals allein, sondern nur mit Zuhilfenahme eines Kreises bewerkstelligen lässt.** Es werden daher nach der üblichen Methode die linearen Fundamentalkonstruktionen im imaginären Gebiet zurückgeführt auf lineare und quadratische Konstruktionen mit reellen Elementen. Hiernach ist klar, dass das übliche Verfahren weder in systematischer, noch auch in praktischer Beziehung befriedigen kann.

Eine recht naheliegende Bemerkung, die man indes in den einschlägigen Lehrbüchern vergebens sucht, führt zu einer Lösung der genannten beiden Fundamentalaufgaben, welche wohl allen billigen Anforderungen genügt.

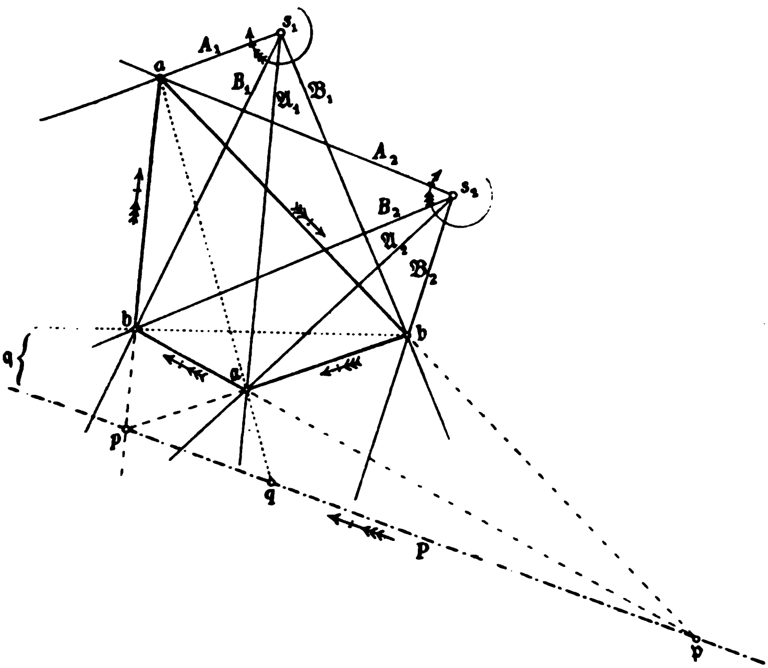
* Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856, § 7.

** Der Verfasser behält sich vor, in einer weiteren Abhandlung zu zeigen, wie — auf Grund der hier entwickelten Methoden — die erwähnte Umformung dennoch ohne Zuhilfenahme eines Kreises, mit dem Lineale allein, durchgeführt werden kann.

Seien zwei imaginäre Gerade S_1 und S_2 in Staudtscher Weise durch harmonische Würfe in ihren reellen Trägern, den Punkten s_1 und s_2, und den zugehörigen Durchlaufungssinn, der in der Figur 1 durch beigesetzte Pfeile angegeben ist, gegeben.

Wir bezeichnen die zwei sich trennenden Paare des Wurfes S_1 beziehungsweise S_2 mit $A_1\mathfrak{A}_1$, $B_1\mathfrak{B}_1$ beziehungsweise mit $A_2\mathfrak{A}_2$, $B_2\mathfrak{B}_2$;

Fig. 1.



und zwar so, dass die Aufeinanderfolge $A_1\mathfrak{A}_1B_1$, beziehungsweise $A_2\mathfrak{A}_2B_2$, dem gegebenen Durchlaufungssinn des betreffenden Wurfes entspricht.

Schneiden sich dann die Geraden: A_1A_2 in a, B_1B_2 in b, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{b}$; ferner die Gegenseiten: ab, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ des Viereckes $ab\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ im Punkte p, die Gegenseiten $a\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}b$ im Punkte $\mathfrak{p}$, so ist die

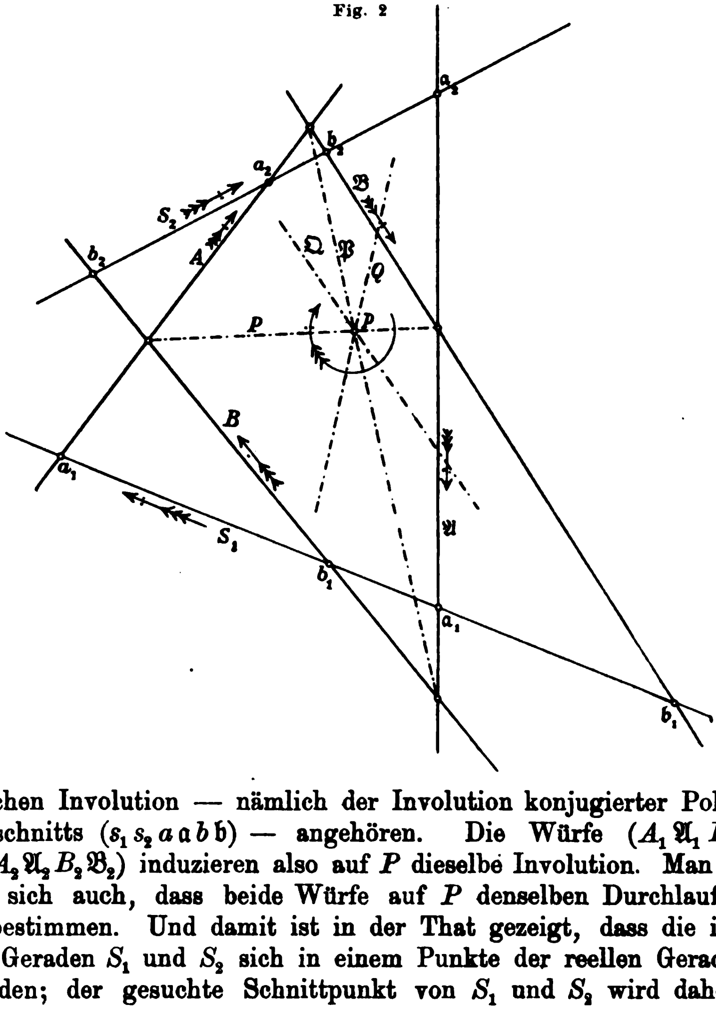
Verbindungslinie $\mathfrak{p}p = P$ der reelle Träger des gesuchten Schnittpunktes der imaginären Geraden S_1 und S_2. Dieser Schnittpunkt selbst wird einschliesslich des Durchlaufungssinns durch denjenigen harmonischen Wurf, den $S_1(A_1\mathfrak{A}_1B_1\mathfrak{B}_1)$, oder auch durch denjenigen, den der Wurf $S_2(A_2\mathfrak{A}_2B_2\mathfrak{B}_2)$ auf P ausschneidet, gegeben.

Beweis: Offenbar liegen die Punkte s_1, s_2, a, $\mathfrak{a}$, b, $\mathfrak{b}$ auf einem Kegelschnitte. Die Punktepaare $a\mathfrak{a}$ und $b\mathfrak{b}$ bestimmen auf diesem eine krumme Involution zweiten Grades, deren Polaraxe, wie ohne weiteres ersichtlich, die Gerade $P = p\mathfrak{p}$ ist.

Nun hat man den bekannten Satz: „Werden aus einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts die Paare einer auf demselben befindlichen krummen Involution auf die Polaraxe dieser Involution projiziert, so erhält man auf der Polaraxe die Involution konjugierter Pole des Kegelschnitts.“

Hieraus ergiebt sich sofort, dass aus den Punkten s_1 und s_2 die Paare $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$ auf P in Punktepaare projiziert werden, welche alle der

Fig. 2



nämlichen Involution — nämlich der Involution konjugierter Pole des Kegelschnitts $(s_1\, s_2\, a\, \mathfrak{a}\, b\, \mathfrak{b})$ — angehören. Die Würfe $(A_1\, \mathfrak{A}_1\, B_1\, \mathfrak{B}_1)$ und $(A_2\, \mathfrak{A}_2\, B_2\, \mathfrak{B}_2)$ induzieren also auf P dieselbe Involution. Man überzeugt sich auch, dass beide Würfe auf P denselben Durchlaufungssinn bestimmen. Und damit ist in der That gezeigt, dass die imaginären Geraden S_1 und S_2 sich in einem Punkte der reellen Geraden P schneiden; der gesuchte Schnittpunkt von S_1 und S_2 wird daher erhalten, indem man S_1 oder S_2 mit der reellen Geraden P schneidet, was zu beweisen war.

Das Prinzip der Dualität gestattet, sofort die Lösung der zweiten Fundamentalaufgabe zu geben, welche natürlich auch selbständig in ganz analoger Weise wie die der ersten begründet werden könnte.

Seien zwei imaginäre Punkte s_1 und s_2 in Staudt'scher Weise durch harmonische Würfe auf ihren reellen Trägern, den Geraden S_1 und S_2, und den zugehörigen Durchlaufungssinn, der in der Figur 2 durch beigesetzte Pfeile gekennzeichnet ist, gegeben.

Wir bezeichnen die zwei sich trennenden Paare des Wurfes s_1 beziehungsweise s_2 mit $a_1\mathfrak{a}_1$, $b_1\mathfrak{b}_1$ beziehungsweise mit $a_2\mathfrak{a}_2$, $b_2\mathfrak{b}_2$, und zwar so, dass die Aufeinanderfolge $a_1\mathfrak{a}_1 b_1$ beziehungsweise $a_2\mathfrak{a}_2 b_2$ dem gegebenen Durchlaufungssinne des betreffenden Wurfes entspricht.

Verbinden wir $\left\{\begin{matrix} a_1 a_2 & \text{durch} & \text{die} & \text{Gerade} & A \\ b_1 b_2 & \text{„} & \text{„} & \text{„} & B \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 & \text{„} & \text{„} & \text{„} & \mathfrak{B} \end{matrix}\right\}$,

ferner die gegenüberliegenden Eckpunkte

$[AB]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ des Vierseits $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch die Gerade P,

die Eckpunkte

$[A\mathfrak{B}]$ und $[\mathfrak{A}B]$ durch die Gerade $\mathfrak{P}$,

so schneiden sich die Geraden P und $\mathfrak{P}$ in einem Punkte p, welcher der reelle Träger der Verbindungsgeraden der beiden imaginären Punkte s_1 und s_2 ist.

Die gesuchte Verbindungsgerade selbst wird erhalten, indem man entweder den Wurf $s_1(a_1\mathfrak{a}_1 b_1\mathfrak{b}_1)$ oder den Wurf $s_2(a_2\mathfrak{a}_2 b_2\mathfrak{b}_2)$ mit dem jeweilig zugehörigen Durchlaufungssinne aus p projiziert.

Zu den beiden Lösungen der linearen Fundamentalaufgaben in der Ebene ist noch eine wichtige Bemerkung nachzutragen.

Bezeichnet man in $\left\{\begin{matrix} \text{Figur 1 die Schnittpunkte} \\ \text{Figur 2 die Verbindungsgeraden} \end{matrix}\right\}$ der beiden $\left\{\begin{matrix} \text{Geraden } [a\mathfrak{a}] \text{ und } [b\mathfrak{b}] \\ \text{Punkte } [A\mathfrak{A}] \text{ und } [B\mathfrak{B}] \end{matrix}\right\}$ mit $\left\{\begin{matrix} \text{der Geraden } P \\ \text{dem Punkte } p \end{matrix}\right\}$ durch die Buchstaben $\left\{\begin{matrix} q \text{ und } \mathfrak{q} \\ Q \text{ und } \mathfrak{Q} \end{matrix}\right\}$, so kann $\left\{\begin{matrix} \text{der Schnittpunkt} \\ \text{die Verbindungsgerade} \end{matrix}\right\}$ der imaginären $\left\{\begin{matrix} \text{Geraden } S_1 \text{ und } S_2 \\ \text{Punkte } s_1 \text{ und } s_2 \end{matrix}\right\}$ auch durch den harmonischen Wurf $\left\{\begin{matrix} (p\mathfrak{p}q\mathfrak{q}) \\ (P\mathfrak{P}Q\mathfrak{Q}) \end{matrix}\right\}$ (mit dem durch die Reihenfolge $\left\{\begin{matrix} p\mathfrak{p}q \\ P\mathfrak{P}Q \end{matrix}\right\}$ angegebenen Durchlaufungssinne) dargestellt werden.

Dass nämlich die beiden Würfe harmonisch sind, ist ohne weiteres klar; ebenso, dass die Punkte $p\mathfrak{p}$ in Figur 1 konjugierte Pole des durch die Punkte s_1, s_2, a, $\mathfrak{a}$, b, $\mathfrak{b}$ bestimmten Kegelschnitts sind. Aber auch die Punkte $q\mathfrak{q}$ sind konjugierte Pole des Kegelschnitts, was daraus hervorgeht, dass die Punkte $a\mathfrak{a}b\mathfrak{b}$ auf diesem ein harmonisches Quadrupel bilden. Die Geraden $a\mathfrak{a}$ und $b\mathfrak{b}$ sind nämlich aus dem soeben angeführten Grunde konjugierte Polaren des Kegelschnitts, während anderseits klar ist, dass jede der beiden Geraden die Gerade

P zur konjugierten Polare hat; daher wird P von den Geraden $[a\mathfrak{a}]$ und $[b\mathfrak{b}]$ in konjugierten Polen geschnitten.

Die Punktepaare $p\mathfrak{p}$ und $q\mathfrak{q}$ gehören also der nämlichen Involution an, wie jene Punktepaare, welche von den sich trennenden Paaren des Wurfes S_1: $(A_1\mathfrak{A}_1B_1\mathfrak{B}_1)$ oder S_2: $(A_2\mathfrak{A}_2B_2\mathfrak{B}_2)$ auf P ausgeschnitten werden — nämlich der Involution konjugierter Pole des Kegelschnitts. Auch der Sinn des Wurfes $(p\mathfrak{p}q\mathfrak{q})$, der durch die Aufeinanderfolge $p\mathfrak{p}q$ gegeben ist, stimmt — wie man sich sofort überzeugt — mit dem Sinne überein, den die Würfe $S_1(A_1\mathfrak{A}_1B_1\mathfrak{B}_1)$ oder $S_2(A_2\mathfrak{A}_2B_2\mathfrak{B}_2)$ auf P induzieren.

Damit ist in der That gezeigt, dass der Schnittpunkt der imaginären Geraden S_1 und S_2 in Figur 1 durch den harmonischen Wurf $(p\mathfrak{p}q\mathfrak{q})$ dargestellt werden kann.

Analog, oder mit Hilfe des Prinzips der Dualität wird bewiesen, dass in Figur 2 die Verbindungsgerade der imaginären Punkte s_1 und s_2 durch den harmonischen Wurf $(P\mathfrak{P}Q\mathfrak{Q})$ dargestellt werden kann.

Die gemachte Bemerkung ist deshalb von Wichtigkeit, weil sie lehrt, dass, wenn man einmal $\left\{\begin{matrix}\text{in Figur 1}\\ \text{in Figur 2}\end{matrix}\right\}$ die vier

$$\left\{\begin{matrix}\text{Punkte } a,\ \mathfrak{a},\ b,\ \mathfrak{b}\\ \text{Geraden } A,\ \mathfrak{A},\ B,\ \mathfrak{B}\end{matrix}\right\}$$

verzeichnet hat, $\left\{\begin{matrix}\text{der}\\ \text{die}\end{matrix}\right\}$ gesuchte imaginäre $\left\{\begin{matrix}\text{Schnittpunkt } [S_1S_2]\\ \text{Verbindungsgerade } [s_1s_2]\end{matrix}\right\}$ ohne Zuhilfenahme der $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte } s_1 \text{ und } s_2\\ \text{Geraden } S_1 \text{ und } S_2\end{matrix}\right\}$ bloss aus den genannten vier Elementen $\left\{\begin{matrix}a\mathfrak{a}b\mathfrak{b}\\ A\mathfrak{A}B\mathfrak{B}\end{matrix}\right\}$ sofort in einfachster Weise linear konstruiert werden kann.

Es legt dies den Gedanken nahe, die vier $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte } a\mathfrak{a}b\mathfrak{b}\\ \text{Geraden } A\mathfrak{A}B\mathfrak{B}\end{matrix}\right\}$ als eine neue Art der Darstellung

$$\left\{\begin{matrix}\text{des imaginären Punktes } [S_1S_2]\\ \text{der imaginären Geraden } [s_2s_2]\end{matrix}\right\}$$

anzusehen und diese der gewöhnlichen Staudtschen Darstellung ergänzend zur Seite zu stellen.

In Figur 1 ist der Durchlaufungssinn des Wurfes $(A_1\mathfrak{A}_1B_1\mathfrak{B}_1)$, welcher die imaginäre Gerade S_1 bestimmt, durch einen Pfeil angegeben; die Reihenfolge, in der die vier Geraden des Wurfes in dem angegebenen Sinn aufeinander folgen, lautet: $(A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1B_1)$. Wir wollen nun festsetzen, dass von jetzt ab überall die Elemente eines harmonischen Wurfes, welcher mit dem zugehörigen Durchlaufungssinn ein imaginäres Element definiert, in der durch den Durchlaufungssinn bestimmten Reihenfolge angeordnet werden sollen.* Die Würfe

* Die so geordneten Würfe sind dann „ordentliche" im Sinne Staudts.

$$S_1 : (A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 B_1) \quad \text{und} \quad S_2 : (A_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 B_2)$$

bestimmen dann eine Reihenfolge der Punkte a, $\mathfrak{a}$, b, $\mathfrak{b}$, nämlich $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$.

Wir können nun mit voller Berechtigung das Viereck $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ mit dem durch die Aufeinanderfolge der Punkte bestimmten Durchlaufungssinne als eine neue Darstellung des imaginären Punktes $[S_1 S_2]$ ansehen, welche wir zur Unterscheidung von der gewöhnlichen Staudt'schen als die „krumme" Darstellung desselben bezeichnen wollen. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Viereckes, der Punkte p und $\mathfrak{p}$, giebt den reellen Träger P des imaginären Punktes; eben diese Punkte mit den beiden Punkten q und $\mathfrak{q}$, welche von den Diagonalen des Viereckes auf $[p\mathfrak{p}] = P$ ausgeschnitten werden, bilden den harmonischen Wurf, welcher in gewöhnlicher Staudt'scher Weise den imaginären Punkt darstellt. Der Durchlaufungssinn dieses Wurfes ist durch den Durchlaufungssinn des Viereckes bestimmt; am einfachsten findet man ihn wohl nach folgender Regel: man denke sich aus a die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b auf P projiziert, so erhält man auf P drei Punkte, deren Aufeinanderfolge den gesuchten Durchlaufungssinn angiebt.

Durch das Gesagte ist der Übergang von der „krummen" zur gewöhnlichen Darstellung in einfachster Weise linear bewerkstelligt.

Das Analoge kann in Figur 2 geltend gemacht werden. Dort kann das Vierseit $(A\mathfrak{B}\mathfrak{A}B)$ mit dem durch die Reihenfolge der Geraden bestimmten Durchlaufungssinne als „krumme" Darstellung der imaginären Geraden $[s_1 s_1]$ aufgefasst werden. Der Übergang von der „krummen" zur gewöhnlichen Darstellung vollzieht sich hier in nachstehender Weise: Der Schnittpunkt p der beiden Diagonalen des Vierseits giebt den reellen Träger der imaginären Geraden. Die beiden Diagonalen P und $\mathfrak{P}$ bilden zugleich mit den zwei Geraden Q und $\mathfrak{Q}$, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten aus p projizieren, den harmonischen Wurf, welcher in gewöhnlicher Staudt'scher Weise die imaginäre Gerade darstellt. Der Durchlaufungssinn des letzteren Wurfes ist durch den Durchlaufungsinn des Vierseits bestimmt; am einfachsten findet man ihn wohl nach folgender Regel: man denke sich aus dem Punkte p die Schnittpunkte der Geraden A mit den Geraden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, B projiziert, so erhält man in p drei Strahlen, deren Aufeinanderfolge den gesuchten Durchlaufungssinn angiebt.

Die Zweckmässigkeit der hier dargelegten Auffassung wird ins volle Licht gesetzt durch den folgenden Abschnitt, welcher zum Gegenstand haben soll:

Die linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen im Raume.

Durch Centralprojektion der Figuren 1 und 2 aus einem beliebigen reellen Punkte O des Raumes ergiebt sich sofort,

1. wie man die zwei imaginären Ebenen
$$S_1^\times : (A_1^\times \mathfrak{B}_1^\times \mathfrak{A}_1^\times B_1^\times) \quad \text{und} \quad S_2^\times : (A_2^\times \mathfrak{B}_2^\times \mathfrak{A}_2^\times B_2^\times),$$
welche die Geraden S_1 und S_2 aus o projizieren, zum Schnitte bringt, und
2. wie man die zwei imaginären Strahlen $s_1^\times : (a_1^\times \mathfrak{b}_1^\times \mathfrak{a}_1^\times b_1^\times)$ und $s_2^\times : (a_2^\times \mathfrak{b}_2^\times \mathfrak{a}_2^\times b_2^\times)$, welche die Punkte s_1 und s_2 aus o projizieren, durch eine Ebene verbindet.

In „krummer“ Darstellung erhält man für die gesuchte Schnittgerade, beziehungsweise die gesuchte verbindende Ebene: das Vierkant $(a^\times b^\times \mathfrak{a}^\times \mathfrak{b}^\times)$, beziehungsweise das Vierflach
$$(A^\times \mathfrak{A}^\times \mathfrak{B}^\times B^\times).$$

(Durch Beisetzung eines Sternchens $^\times$ zu dem Namen $\left\{\begin{matrix}\text{einer Geraden}\\ \text{eines Punktes}\end{matrix}\right\}$ wird hier wie auch im folgenden stets jene $\left\{\begin{matrix}\text{Ebene}\\ \text{Gerade}\end{matrix}\right\}$ bezeichnet, welche $\left\{\begin{matrix}\text{die betreffende Gerade}\\ \text{den betreffenden Punkt}\end{matrix}\right\}$ aus einem reellen Punkte o des Raumes projiziert.)

Es ist hieraus ohne weiteres klar, wie man überhaupt zwei imaginäre $\left\{\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Gerade}\end{matrix}\right\}$, welche einen reellen Punkt o gemein haben, $\left\{\begin{matrix}\text{zum Schnitte bringt}\\ \text{durch eine Ebene verbindet}\end{matrix}\right\}$. —

Ein wesentlich neuer Begriff in der Theorie der imaginären Gebilde des Raumes gegenüber jenen der Ebene ist die sogenannte imaginäre Gerade zweiter Art, welche keinen reellen Punkt enthält, und durch welche keine reelle Ebene geht. Bezüglich der Theorie der imaginären Geraden zweiter Art sei verwiesen auf die „Beiträge zur Geometrie der Lage“ von Staudt, § 7, und insbesondere auf die klare Darstellung von Lüroth im achten Bande der mathematischen Annalen in der Abhandlung: „Das Imaginäre in der Geometrie . . .“ § 5. (Jahrgang 1875.)

Durch die oben auseinandergesetzte Auffassung gewinnt nun, wie sich zeigen wird, der Begriff der imaginären Geraden zweiter Art sehr an Anschaulichkeit.

Es seien in Staudtscher Weise zwei imaginäre Ebenen S_1 und S_2, deren reelle Trägergeraden zu einander windschief sind, durch harmonische Würfe $(A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 B_1)$ und $(A_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 B_2)$ in den reellen Trägergeraden σ_1 und σ_2 (mit dem durch die Aufeinanderfolge der vier Ebenen angedeuteten Durchlaufungssinne) gegeben. Diese beiden

Ebenen S_1 und S_2 schneiden sich in einer imaginären Geraden zweiter Art γ.

Wir stellen uns nun die Aufgabe:

1. Die imaginäre Gerade γ mit einer reellen Ebene E zu schneiden.
2. Dieselbe aus einem reellen Punkte o zu projizieren.

Als gelöst sehen wir eine solche Aufgabe nur dann an, wenn es gelungen ist, sie auf lineare Konstruktionen mit reellen Elementen zurückzuführen.

Wir bezeichnen die Schnittgeraden der Ebenen:

$$A_1A_2 \text{ mit } a, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \text{ mit } \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \text{ mit } \mathfrak{a}, \quad B_1B_2 \text{ mit } b.$$

Die Geraden a, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b liegen offenbar auf einem einschaligen Hyperboloid, auf dem auch die Trägergeraden σ_1 und σ_2 sich befinden; und zwar so, dass σ_1 und σ_2 der einen, a, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b der andern Geradenschar des Hyperboloids angehören. Der Wurf $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ auf dem Hyperboloid ist natürlich harmonisch.

Es mögen im folgenden die $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$, welche durch den Schnitt beliebiger $\left\{\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebenen}\end{matrix}\right\}$ mit der Ebene E entstehen, einfach durch Beisetzung eines Accentes zu dem Namen der betreffenden $\left\{\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebene}\end{matrix}\right\}$ bezeichnet werden.

Dann schneidet die imaginäre Ebene S_1 beziehungsweise S_2 die reelle Ebene E in der imaginären Geraden

$$S_1' : (A_1'\mathfrak{B}_1'\mathfrak{A}_1'B_1') \text{ beziehungsweise } S_2' : (A_2'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2'B_2').$$

Die imaginären Geraden S_1' und S_2' schneiden sich in einem imaginären Punkte, dessen „krumme" Darstellung offenbar die folgende ist: $(a'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'b')$. Letzterer Punkt liegt sowohl in der Ebene S_1 als auch in der Ebene S_2, und ist daher nichts anderes als der gesuchte Schnittpunkt der Ebene E mit der imaginären Geraden zweiter Art

$$\gamma = [S_1 \cdot S_2].$$

Man erhält also den Schnittpunkt einer reellen Ebene E mit der Geraden γ in „krummer" Darstellung einfach dadurch, dass man den harmonischen Wurf $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ mit E schneidet.

Wir gehen nun an die Behandlung der zweiten Aufgabe, die Gerade γ aus einem reellen Punkte o zu projizieren.

Bezeichnen wir die vier Punkte, in denen die Gerade $\left\{\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}$ von den Ebenen $\left\{\begin{matrix}A_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2B_2\\ A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1B_1\end{matrix}\right\}$ geschnitten wird, der Reihe nach mit

$$\left\{\begin{matrix}a_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1\,b_1\\ a_2\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_2\,b_2\end{matrix}\right\}$$

so liegen die imaginären Punkte

$$\begin{Bmatrix} s_1 : (a_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1 b_1) \\ s_2 : (a_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_2 b_2) \end{Bmatrix}$$

offenbar zugleich in den beiden Ebenen S_1 und S_2, gehören daher unserer imaginären Geraden $\gamma = [S_1 S_2]$ an. Die letztere kann daher als Verbindungsgerade der beiden imaginären Punkte s_1 und s_2 angesehen werden. Die Verbindungslinien $a_1 a_2$, $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$, $b_1 b_2$ homologer Punkte der beiden Würfe $(a_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1 b_1)$ und $(a_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_2 b_2)$ sind — wie ohne weiteres klar — identisch mit den oben eingeführten Geraden a, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b.

Um nun den reellen Punkt o mit γ durch eine Ebene zu verbinden, verbinden wir o mit dem auf γ liegenden Punkte $s_1 : (a_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1 b_1)$ durch die imaginäre Gerade erster Art: $s_1^{\times} : (a_1^{\times} \mathfrak{b}_1^{\times} \mathfrak{a}_1^{\times} b_1^{\times})$, ebenso mit dem auf γ liegenden Punkte: $s_2 : (a_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_2 b_2)$ durch die imaginäre Gerade erster Art: $s_2^{\times} : (a_2^{\times} \mathfrak{b}_2^{\times} \mathfrak{a}_2^{\times} b_2^{\times})$. Die verbindende Ebene der beiden letzteren Geraden — die „krumme" Darstellung dieser Ebene ist nach dem am Eingange dieses Abschnittes Gesagten offenbar das Vierflach $(a^{\times} \mathfrak{b}^{\times} \mathfrak{a}^{\times} b^{\times})$ — ist die gesuchte Ebene, welche o mit γ verbindet. Man findet also die Ebene, welche γ aus o projiziert, in krummer Darstellung einfach dadurch, dass man den Wurf $(a \mathfrak{b} \mathfrak{a} b)$ aus o projiziert.

Der Wurf $(a \mathfrak{b} \mathfrak{a} b)$ der hyperboloidisch liegenden, harmonischen Geraden a, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b bestimmt sonach in einfachster Weise die sämtlichen auf γ liegenden Punkte, sowie die sämtlichen durch γ gehenden Ebenen; er giebt demnach eine vollkommen adäquate Darstellung unserer imaginären Geraden zweiter Art γ.

Die reellen Trägergeraden der auf γ liegenden Punkte und der durch γ gehenden Ebenen bilden ein und dasselbe Strahlensystem erster Ordnung und Klasse R. Die obigen Auseinandersetzungen setzen uns in den Stand, in der denkbar einfachsten Weise den durch einen beliebigen Punkt o gehenden, oder den in einer beliebigen Ebene E liegenden Strahl dieses Systems linear zu finden: den Strahl von R durch o findet man als den Durchschnitt der beiden Diagonalebenen des Vierflachs $(a^{\times} \mathfrak{b}^{\times} \mathfrak{a}^{\times} b^{\times})$; den in E liegenden Strahl von R als die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Gegenseiten des Viereckes $(a' \mathfrak{b}' \mathfrak{a}' b')$.

Die Leitlinien des Strahlensystems R sind offenbar die Gerade γ: $(a \mathfrak{b} \mathfrak{a} b)$ und ihre konjugiert-imaginäre: $\bar{\gamma} : (a b \mathfrak{a} \mathfrak{b})$; in der That enthält jeder Strahl des Systems einen Punkt von γ und desgleichen einen von $\bar{\gamma}$.

Die hier angestellten Betrachtungen sind von grosser Wichtigkeit für diejenigen Strahlensysteme erster Ordnung und Klasse überhaupt, welche keine reellen Leitlinien besitzen. Sei ein solches Strahlensystem durch vier seiner Strahlen (welche natürlich nicht ein und derselben hyperboloidischen Schar angehören dürfen) gegeben: σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 Die beiden — als konjugiert-imaginär vorausgesetzten — Schnittpunkte der Geraden σ_1 mit dem durch die Geraden $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ bestimmten Hyperboloid seien durch die harmonischen Würfe: $(a_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1 b_1)$ und $(a_1 b_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1)$ dargestellt. Wir legen aus den Punkten a_1, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1$, b_1 die Transversalen a, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, b über die Geraden σ_2 und σ_3: dieselben bilden ein harmonisches Quadrupel auf einem neuen Hyperboloid. Die Würfe: $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ und $(ab\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ stellen zwei konjugiert-imaginäre Gerade zweiter Art γ und $\bar{\gamma}$ dar, welche nicht nur σ_1, σ_2, σ_3, sondern auch, da sie ja auf der andern Schar des durch die Geraden σ_2, σ_3, σ_4 bestimmten Hyperboloids liegen, die Gerade σ_4 schneiden. Das durch die vier Strahlen σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 bestimmte Strahlensystem hat daher die beiden konjugiert-imaginären Geraden γ: $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ und $\bar{\gamma}$: $(ab\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ zu Leitlinien, und ist also identisch mit demjenigen Strahlensystem, welches von den Trägergeraden der $\left\{\begin{matrix}\text{auf } \gamma \text{ liegenden Punkte} \\ \text{in } \gamma \text{ liegenden Ebenen}\end{matrix}\right\}$ gebildet wird.

Haben wir einmal die beiden Leitlinien gefunden (was natürlich die Lösung einer quadratischen Aufgabe erfordert, nämlich: die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einem Hyperboloid zu finden), so können wir uns mit Hilfe des Wurfes $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ nach der oben angegebenen Methode in der einfachsten Weise — und zwar linear — beliebig viele Strahlen des durch σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 bestimmten Systems konstruieren. Eine anschaulichere Erzeugungsweise als die angegebene mit Hilfe des Wurfes $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ giebt es wohl nicht. Dieselbe verdient besondere Beachtung deswegen, weil — wie bekannt — das allgemeine Strahlensystem erster Ordnung und Klasse in der Mechanik starrer Körper eine wichtige Rolle spielt. Ist der Freiheitsgrad der Bewegung eines starren Körpers 2, so kann ein beliebiger Punkt m desselben sich nur in einer gewissen Ebene M verschieben, wenn der Körper eine unendlich kleine Bewegung ausführt. Errichtet man in den Punkten m des Körpers auf den zugehörigen Ebenen M die Normalen μ, so bilden diese ein Strahlensystem erster Ordnung und Klasse. Die Geraden dieses Systems zeichnen sich dadurch aus, dass eine beliebige längs einer von ihnen wirkende Kraft keinerlei Wirkung auf den Körper auszuüben vermag, vielmehr durch die Verbindungen, welche die Beweglichkeit des Körpers einschränken, aufgehoben wird. — Sind die Leitlinien des Systems reell, so übersieht man die Gesamtheit dieser ausgezeichneten Geraden ohne weiteres; für den Fall von imaginären Leitlinien hat es aber bisher an einer so anschaulichen Übersicht dieser ausgezeichneten Geraden, wie sie durch unsere Methode geliefert wird, gefehlt.

Nunmehr kehren wir wieder zu unserer imaginären Geraden zweiter Art γ zurück, indem wir die Frage aufwerfen, wie viele Würfe hyperboloidisch liegender, harmonischer Geraden es giebt, welche ein und dieselbe imaginäre Gerade zweiter Art darstellen.

Es lässt sich zeigen, dass das erste Glied c eines Wurfes, welcher die Gerade γ : $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ darstellen soll, mit einer gewissen Beschränkung willkürlich gewählt werden kann; die weiteren Glieder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, d des Wurfes sind dann schon vollständig bestimmt. Die angedeutete Beschränkung besteht darin, dass die angenommene Gerade c dem Strahlensysteme R der zur Geraden γ gehörigen reellen Träger nicht angehören darf. Der Grund hiervon ist klar: Würde eine der Geraden $c, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}, d$ dem Strahlensysteme R angehören, so hätte man das Absurde, dass diese Gerade des Systems R von jenen ∞' Geraden des nämlichen Systems, welche die andere Schar des durch $c, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}, d$ bestimmten Hyperboloids ausmachen, geschnitten würde, während wir doch wissen, dass zwei Gerade des Systems sich nicht schneiden können, da $\left\{\begin{array}{l}\text{durch jeden Punkt}\\ \text{in jeder Ebene}\end{array}\right\}$ nur eine Gerade des Systems $\left\{\begin{array}{l}\text{geht}\\ \text{liegt}\end{array}\right\}$.

Sei also das erste Glied c des Wurfes mit der oben angegebenen Einschränkung willkürlich gewählt. Die Gesamtheit jener Geraden τ des Strahlensystems R, welche die c schneiden, erfüllt eine hyperboloidische Schar. Wären die zu suchenden Geraden $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, d des Wurfes $(c\mathfrak{d}\mathfrak{c}d)$ bekannt, so würden die Geraden der andern Schar des durch die Geraden c, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, d bestimmten Hyperboloids dem Strahlensystem R angehören und ausserdem c schneiden, also mit der von den Geraden τ gebildeten Schar identisch sein. Soll also ein Wurf $(c\mathfrak{c}\mathfrak{d}d)$, dessen erstes Glied vorgegeben ist, die Gerade γ darstellen, so sind die Geraden $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, d nur unter den Geraden der andern Schar des durch die Geraden τ bestimmten Hyperboloids zu suchen.

Sei nun τ_1 irgend eine der Geraden τ, c_1 der Punkt, in welchem sie die Gerade c trifft. Man kann dann den auf unserer imaginären Geraden γ liegenden Punkt der τ_1 nur in ganz bestimmter Weise durch einen harmonischen Wurf $(c_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1d_1)$ darstellen, dessen erstes Glied c_1 ist. Dementsprechend kann die Gerade γ auch nur in ganz bestimmter Weise durch einen harmonischen Wurf dargestellt werden, dessen erstes Glied c ist: nämlich durch jene vier Geraden $(c\mathfrak{d}\mathfrak{c}d)$ der andern Regelschar des durch die Geraden τ bestimmten Hyperboloids, welche auf τ_1 den Wurf $(c_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1d_1)$ ausschneiden.

Damit ist in der That gezeigt, wie man einen harmonischen Wurf findet, der die Gerade $\gamma : (a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ darstellt, wenn das erste Glied c dieses Wurfes — mit der oben angegebenen Einschränkung — willkürlich angenommen wird, und dass es nur einen solchen Wurf giebt.

Der Übergang von der ursprünglichen Darstellung: $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ unserer imaginären Geraden zweiter Art γ zu einer neuen: $(c\mathfrak{d}\mathfrak{c}d)$ scheint nun freilich — wie aus der obigen Entwickelung hervorgeht — nicht mehr in linearer Weise durchführbar zu sein, sondern vielmehr die Ausführung einer wesentlich quadratischen Konstruktion zu fordern.* Anderseits tritt aber auch, so lange es sich nur um lineare Aufgaben mit imaginären Elementen handelt, niemals die Notwendigkeit ein, einen solchen Übergang zu machen.

Nachdem wir uns so über die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer imaginären Geraden zweiter Art durch harmonische Würfe hinreichend orientiert haben — es giebt wie man sieht ∞^4 solcher Darstellungen einer und derselben Geraden —, wenden wir uns wieder unserem eigentlichen Gegenstande zu.

Die linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen im Raume werden sämtlich auf lineare Konstruktionen mit reellen Elementen zurückgeführt sein, wenn dies bei den folgenden zwei Aufgaben allgemeinster Natur gelungen sein wird:

I. Eine imaginäre Gerade zweiter Art $\gamma:(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ mit einer imaginären Ebene $S_3:(A_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3B_3)$, deren reelle Trägeraxe die Gerade σ_3 ist, zum Schnitt zu bringen.

II. Dieselbe aus einem imaginären Punkte $s_3:(a_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3b_3)$ der auf der reellen Trägergeraden σ_3 liegt, zu projizieren.

Wir lösen diese Aufgaben dadurch, dass wir sie auf einfachere Aufgaben, die in diesem Abschnitte bereits gelöst worden sind, zurückführen.

I. Um die erste Aufgabe zu lösen, projiziere man aus einem beliebigen (reellen) Punkte o der Trägeraxe σ_3 die Gerade γ durch die imaginäre Ebene $[o\gamma]$; und zwar stelle man die letztere in der gewöhnlichen Staudtschen Weise durch einen harmonischen Wurf in der ihr zugehörigen Trägergeraden, welche mit σ_3 den Punkt o gemein hat, dar. Da die reellen Trägergeraden der beiden Ebenen S_3 und $[o\gamma]$ sich im Punkte o schneiden, kann man nach dem am Eingange dieses Abschnitts Gesagten die reelle Trägerebene E der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen einfach dadurch finden, dass man die Schnittgeraden der gegenüberliegenden Flächen eines gewissen Vierkants mit einander verbindet. Die Ebene E enthält alles, was den Ebenen S_3 und $[o\gamma]$ gemeinsam ist, da sie ja durch den Schnitt dieser Ebenen hindurchgeht. Daher enthält sie auch den gesuchten Schnittpunkt von S_3 mit der Geraden γ. Der letztere kann daher als Schnittpunkt der reellen Ebene E mit der Geraden γ aufgefasst und nach unserer früher angegebenen Methode konstruiert werden.

II. Analog gestaltet sich die Lösung der zweiten Aufgabe:

Man schneide die Gerade γ mit einer beliebig durch die reelle Trägergerade σ_3 hindurchgelegten (reellen) Ebene E im Punkte $[E\gamma]$, und stelle diesen in gewöhnlicher Staudt'scher Weise durch einen harmonischen Wurf auf der zugehörigen Trägergeraden, welche natürlich mit σ_3 in der Ebene E liegt, dar. Den reellen Träger o der Ver-

* Der Verfasser gedenkt in einer folgenden Abhandlung zu zeigen, wie man dennoch diesen Übergang in rein linearer Weise bewerkstelligen kann.

bindungsgeraden der beiden Punkte s_3 und $[E\gamma]$ findet man nach dem früheren als den Schnittpunkt der Diagonalen eines gewissen Vierseits. Da die genannte Verbindungsgerade offenbar in der gesuchten projizierenden Ebene $[s_3\gamma]$ liegt, so gilt das nämliche von dem Punkte o. Die gesuchte projizierende Ebene kann daher als verbindende Ebene des reellen Punktes o mit der imaginären Geraden γ aufgefasst und nach unserer früheren Methode konstruiert werden.

Alle linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen im Raume lassen sich auf die bisher behandelten zurückführen. Zunächst erkennt man, dass die Aufgabe, eine imaginäre Gerade erster Art mit einer imaginären Ebene zu schneiden, oder aus einem imaginären Punkte zu projizieren, nach derselben Methode, nur noch etwas einfacher gelöst werden kann, wie wir sie bei der imaginären Geraden zweiter Art angewendet haben.

Die allgemeine Aufgabe, drei imaginäre

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Punkte } s_1 s_2 s_3 \text{ durch eine Ebene zu verbinden}\\ \text{Ebenen } S_1 S_2 S_3 \text{ zum Schnitt zu bringen}\end{array}\right\},$$

wird gelöst, indem man die Gerade

$$\left\{\begin{array}{l}[s_1 s_2] \text{ aus dem Punkte } s_3 \text{ projiziert}\\ [S_1 S_2] \text{ mit der Ebene } S_3 \text{ schneidet}\end{array}\right\}.$$

Es könnte vielleicht verwunderlich erscheinen, dass die Forderung, die linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen auch auf nur lineare Konstruktionen mit reellen Elementen zurückzuführen, wie sie in dieser Arbeit vollständig gelöst ist, nicht schon früher erhoben und erfüllt worden ist. Die Ursache hiervon dürfte wohl darin zu suchen sein, dass man infolge des stets gleichzeitigen Auftretens von zwei konjugiert-imaginären Elementen sich daran gewöhnt hatte, beim Konstruieren mit imaginären Elementen das Vorkommen von quadratischen Aufgaben als etwas nicht weiter Befremdendes und nicht wohl zu Umgehendes hinzunehmen. Seit aber von Staudt die Trennung der zwei konjugiert imaginären Elemente durchgeführt wurde, wodurch das einzelne imaginäre Element für sich Selbständigkeit gewann, ist die oben ausgesprochene und erfüllte Forderung dringend geworden.

Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen.

Von

KARL HEUN

in Berlin.

Die Theorie der sogenannten mechanischen Quadraturen hat nach dem Erscheinen der Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi von Gauss so vielseitig das Interesse der Mathematiker und Astronomen erregt, dass sowohl die funktionentheoretische Seite des Problems* als auch die formalen Ausgestaltungen derselben für die Zwecke der praktischen Störungsrechnungen erhebliche Erweiterungen erfahren haben. Dennoch ist gerade das spezielle Gausssche Verfahren und seine Verallgemeinerung durch Mehler und Heine nicht immer deutlich genug aus demjenigen Gesichtspunkt betrachtet worden, der in diesen Ideen den hohen praktischen Wert für die explizite Lösung vieler Probleme der angewandten Mathematik erkennen lässt. Der Gebrauch der Gaussschen Formeln bei numerischen Rechnungen wird durch das Auftreten irrationaler Zahlen an Stelle der gleichmässig fortschreitenden rationalen Argumente so erschwert, dass gerade auf diesem Gebiete der etwa halb so genauen Methode des Cotesius fast ausnahmelos der Vorzug gegeben wurde. Zuweilen besitzt auch die zu integrierende Funktion innerhalb des Integrationsintervalles Unstetigkeitsstellen, wodurch die von Gauss so mühsam berechneten Quadraturkoeffizienten nicht mehr benutzt werden können. Der wesentliche Vorzug der relativ stärksten Näherungsfähigkeit der Gaussschen Methode tritt erst dann hervor, wenn es nicht unmittelbar darauf ankommt, spezielle Quadraturen numerisch auszuführen, sondern wenn die Aufstellung

* Man vergleiche die übersichtliche Darstellung der Quadraturmethoden von A. Voss in der Encyklopädie der math. Wissensch. Bd. II, A. 2. Leipzig 1899.

allgemeiner Formeln,* welche variable Parameter (Amplitude beim einfachen Pendel, relative Entfernung der Fäden und Oscillationsamplitude beim Bifilarpendel) enthalten, das nächste Ziel bildet. Das Verfahren liefert dann in vielen Fällen zweigliedrige allgemeine Formeln, welche innerhalb der Anwendungsgrenzen der Parameter den Bedürfnissen der Praxis vollkommen genügen, oft sogar den strengen Lösungen vorzuziehen sind, weil ihre numerische Auswertung eine einfachere ist.

Dieselbe Auffassung lässt sich auf die im folgenden mitgeteilte Integrationsmethode für Differentialgleichungen übertragen. Man muss jedoch hierbei beachten, dass die Analogie dieses Problems mit dem der Gaussschen Quadratur keine vollständige ist.

Vor einigen Jahren hat Herr Runge auf einem eigentümlichen induktiven Wege eine dreigliedrige Näherungsformel** zur approximativen Integration von Differentialgleichungen gefunden, welche sich der Simpsonschen Quadraturformel so eng als möglich anschliesst. Es erschien naheliegend, den umfassenderen Gaussschen Gedanken auf das Gebiet der Differentialgleichungen zu übertragen, und es gelang mir, die Aufgabe unter diesem allgemeinen Gesichtspunkt mit Verwendung der einfachsten analytischen Hilfsmittel zu lösen. Das Rungesche Resultat tritt natürlich bei dieser Behandlung als ein besonderer Fall auf. In dieser Weise lässt sich die Gesamtheit der Approximationsformeln einer beliebigen Näherungsordnung gewinnen und man kann ohne jede Schwierigkeit die einfachsten Formeln für den praktischen Gebrauch aussondern.

Da die Integration der Differentialgleichungen naturgemäss ein graphisches oder analytisches Fortsetzungsproblem ist, so erscheint es nicht befremdend, dass eine vorgeschriebene Annäherung hier nicht mehr — wie bei den Quadraturen — durch willkürliche Vermehrung der Gliederzahl der Formel, sondern im wesentlichen durch successive Substitutionen erreicht wird. Für jede Anschlussordnung giebt es eine Gruppe von Lösungen, welche die geringste Gliederzahl aufweisen. Bei den Anwendungen ist namentlich die Existenz zweigliedriger Formeln dritter Ordnung von Bedeutung, für welche auch im folgenden ein Zahlenbeispiel mitgeteilt ist.

Funktionentheoretische Betrachtungen habe ich in der vorliegenden Darstellung nur andeutungsweise berührt, weil durch ein näheres Eingehen auf dieselben den praktischen Zwecken nur in geringem Maße gedient wäre. Der Mathematiker weiss sich ohnedies beim Auftreten von singulären Stellen gegebenenfalls leicht zu helfen,

---

* Ein Beispiel ist in meiner Programmabhandlung „Untersuchungen über die Gausssche Quadraturmethode", Berlin 1892, mitgeteilt.

** Runge, „Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen". Math. Ann. Bd. 46, 167—178. Leipzig 1895.

während dem Mindergeübten allgemeine Vorschriften wenig nützen. Die Durchführung von Problemen aus der theoretischen Physik und technischen Mechanik, bei welchen die allgemeinen Integrationsmethoden versagen, ist in Bezug auf das Verhalten der Integralfunktionen, falls die Fortsetzung derselben nach den hier gegebenen Prinzipien bis in die Nähe einer singulären Stelle verlangt wird, wohl immer mit Benutzung der Riemannschen Methoden möglich.

Aus demselben Grunde ist auch die Frage der Fehlerschätzung der — bei den Quadraturmethoden nicht auftretenden — Fehlerhäufung nur kurz behandelt.

Die Lösung eines umfangreichen Problems aus der technischen Mechanik (Zugbewegung auf einem Geleise mit doppelt gekrümmter Bahnaxe) durch Anwendung der hier gegebenen Integrationsmethoden werde ich demnächst in einer besonderen Arbeit mitteilen.

1. Die Derivirten der abhängigen Veränderlichen. Die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Funktion $y = F(x)$ von einer beliebigen Anfangsstelle x, für welche der Wert von y gegeben ist, bis zu einer beliebigen anderen Stelle $x + \Delta x$ — der Gleichung 1) gemäss — graphisch oder analytisch fortzusetzen. Wir benutzen zur analytischen Behandlung das nächstliegende Hilfsmittel, die Taylorsche Entwickelung in der Form

$$2) \qquad y_{x+\Delta x} = y + y' \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} y'' \cdot \Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} y^{(n)} \cdot \Delta x^n + R_n,$$

wo R_n das Ergänzungsglied bedeutet, dem wir an dieser Stelle keine bestimmte Form vorzuschreiben brauchen.

Die successiven Derivirten $y', y'' \ldots$ sind aus der Gleichung 1) zu entnehmen. Um die definitive Darstellung derselben ohne unnütze Weitläufigkeiten zu gewinnen, mögen zur Abkürzung der Schreibweise die folgenden gebräuchlichen Symbole benutzt werden. Wir setzen

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu}}{\partial x^\lambda \partial y^\mu} f(x, y) = f_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad Df = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}\right) f.$$

Dementsprechend ist

$$D^2 f = f_{20} + 2 f f_{11} + f^2 f_{02}, \quad \text{etc.}$$

Hiernach ergiebt sich durch direkte Ausführung der Differentiation und Elimination mit Hilfe der Gleichung 1):

$$3) \qquad \begin{cases} y'' = Df, \\ y''' = \dfrac{d}{dx} Df = D^2 f + f_{01} Df, \\ y^{IV} = \dfrac{d}{dx} D^2 f + f_{01} Df + (f_{11} + f_{02} f) Df. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$f_{11} + f f_{02} = D f_{01},$$

und

$$\frac{d}{dx} D^2 f = D^3 f + 2 D f_{01} D f.$$

Folglich hat man endgiltig

$$y^{IV} = D^3 f + f_{01} D^2 f + f_{01}^2 D f + 3 D f_{01} D f. \tag{4}$$

Die explicite Darstellung von y^V ist naturgemäss etwas mühsamer. Mit Benutzung der Formel

$$\frac{d}{dx} D^3 f = D^4 f + 3 D^2 f_{01} D f$$

erhält man zunächst

$$\begin{aligned} y^V\ & D^4 f + 3 D^2 f_{01} D f + f_{01}(D^3 f + 2 D f_{01} D f) \\ & + D f_{01} D^2 f + f_{01}^2 (D^2 f + f_{01} D f) \\ & + 2 f_{01} D f_{01} D f + 3 D f_{01} (D^2 f + f_{01} D f) + 3 D f \cdot \frac{d}{dx} D f_{01}. \end{aligned}$$

Durch direkte Differentiation findet man

$$\frac{d}{dx} D_{01} = D^2 f_{01} + f_{02} D f.$$

Hierdurch nimmt y^V die folgende Form an

$$\left\{ \begin{aligned} y^V = & D^4 f + f_{01} D^3 f + f_{01}^2 D^2 f + f_{01}^3 D f \\ & + 4 D f_{01} D^2 f + 6 D f D^2 f_{01} + 7 f_{01} D f D f_{01} + 3 f_{02} D f D f. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Hätte man das Symbol D nicht eingeführt, so würde die Darstellung dieser Derivirten bereits 34 Glieder ergeben haben.

Aus den bisherigen Entwickelungen kann man erkennen, wie die weiteren Derivirten beschaffen sind und dass, mit Beiziehung der kombinatorischen Zahlen, das allgemeine Gesetz der Anordnung der Glieder in der gewählten symbolischen Form ausdrückbar ist. Es erscheint jedoch für den vorliegenden Zweck nicht angebracht, hierauf weiter einzugehen, da bei der Ableitung der Integralformeln, soweit sie praktisch anwendbar sind, keine höheren Derivirten als die entwickelten berücksichtigt zu werden brauchen.

2. Die Problemstellung. Der Gaussschen Quadraturmethode kann man die folgende Fassung geben. Wenn die Funktion y durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

charakterisiert ist, so sollen die Zahlen α und ε so bestimmt werden, dass

$$\Delta y = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu f(x + \varepsilon_\nu \Delta x) \cdot \Delta x$$

eine möglichst genaue Anschlussdarstellung für y innerhalb des Intervalls Δx herstellt. Dieser Forderung entsprechen eine gewisse Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Grössen α und ε. Die hier zu entwickelnde Integrationsmethode für Differentialgleichungen, die wir zunächst in der einfachsten Form voraussetzen, beruht auf der folgenden Erweiterung des Gaussschen Grundgedankens.

Wir wollen ein Grössensystem

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n; \quad \varepsilon'_1, \varepsilon'_2 \ldots \varepsilon'_n; \quad \varepsilon''_1, \varepsilon''_2 \cdots, \varepsilon''_n \text{ etc.}$$

so zu bestimmen suchen, dass der Ausdruck

$$\Delta y - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{\alpha_\nu f(x + \varepsilon \nu \Delta x,\; y + \Delta' y)\} \cdot \Delta x,$$

wo

$$\Delta'_\nu y = \varepsilon_\nu f(x + \varepsilon'_\nu \cdot \Delta x,\; y + \Delta''_\nu y) \cdot \Delta x,$$

$$\Delta''_\nu y = \varepsilon'_\nu f(x + \varepsilon''_\nu \cdot \Delta x,\; y + \Delta'''_\nu y) \cdot \Delta x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_\nu^{(m)} y = \sum_\nu^{(m-1)} f(x, y) \cdot \Delta x$$

bedeutet, die Fortsetzung der durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

charakterisierten Funktion $y = F(x)$ für das Intervall Δx mit der grössten auf diesem Wege erreichbaren Approximation darstellt. Hierzu soll vorläufig die beschränkende Annahme treten, $F(x)$ sei in dem gewählten Intervall als konvergente Potenzreihe des Argumentes nach dem Taylorschen Satze darstellbar. Bei der definitiven Aufstellung der Formeln gehen wir nur bis zur vierten Näherungsordnung, da diese für praktische Anwendungen vollkommen ausreichen.

3. Approximationen zweiter Ordnung. Für $m = 1$ haben wir die Darstellungsform

$$\Delta y = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{\alpha_\nu f(x + \varepsilon_\nu \cdot \Delta x,\; y + \Delta'_\nu y)\} \Delta x$$

$$\Delta'_\nu y = \varepsilon_\nu f(x, y) \cdot \Delta x;$$

oder mit Weglassung des Index ν und Substitution von $\Delta' y$

$$\Delta y = \sum \{\alpha f(x + \varepsilon \cdot \Delta x,\; y + \varepsilon f \cdot \Delta x)\} \Delta x.$$

Die Entwickelung von Δy nach dem Taylorschen Satze giebt

$$\Delta y = \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \varepsilon D f \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2!} \sum \alpha \varepsilon^2 D^2 f \cdot \Delta x^3 + \cdots$$

Nun ist aber anderseits

$$\Delta y = y + y' \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} y'' \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{3!} y''' \cdot \Delta x^3 + \cdots$$

Sollen beide Werte von Δy bis zur zweiten Ordnung (einschliesslich) übereinstimmen, so müssen die α und ε den Gleichungen

$$\sum \alpha = 1, \quad \sum \alpha \varepsilon = \frac{1}{2} \cdots \qquad (a)$$

genügen. Eine vollständige Übereinstimmung bis zur dritten Ordnung ist auf diesem Wege nicht erreichbar. Die Gleichungen (a) enthalten $2n$ Unbekannte. Folglich $n \leqq 1$. Für $n > 1$ müssen willkürliche Bedingungen hinzutreten. In dem einfachsten Falle $n = 1$ erhalten wir $\alpha = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und die entsprechende Approximationsformel

$$\text{I)} \qquad \Delta y = f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{2} f \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x$$

Setzen wir $n = 2$, so müssen die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$$

erfüllt sein.

Die willkürliche Annahme $\alpha_1 = \alpha_2$ liefert die Formel:

$$\text{II)} \qquad \Delta y = \tfrac{1}{2}\{(x, y) + f(x + \Delta x,\ y + f \cdot \Delta x)\} \cdot \Delta x.$$

Für $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$, $\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$, also für eine gleichmässige Teilung des Argument-intervalls folgt:

$$\text{III)} \qquad \Delta y = \tfrac{1}{2}\left\{f\left(x + \tfrac{1}{3} \cdot \Delta x,\ y + \tfrac{1}{3} f \cdot \Delta x\right) + f\left(x + \tfrac{2}{3}\Delta x,\ y + \tfrac{2}{3} f \cdot \Delta x\right)\right\} \cdot \Delta x.$$

Bei Benutzung eines rückwärtsliegenden Funktionalwertes empfiehlt es sich, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$ zu setzen. Man erhält dann

$$\text{IV)} \quad \Delta y = \tfrac{1}{4}\{f(x - \Delta x,\ y - f \cdot \Delta x) + 3f(x + \Delta x,\ y + f \cdot \Delta x)\} \cdot \Delta x.$$

Der vorwärtsliegende Integrationswert hat also hier das dreifache Gewicht des rückwärtsliegenden.

Will man für $n = 2$ den engsten Anschluss an die analoge Gausssche Quadraturformel erreichen, so nehme man zu den Gleichungen (a) noch die folgenden

$$\sum \alpha \varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum \alpha \varepsilon^3 = \frac{1}{4}$$

hinzu. Dann wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4};$$

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right), \quad \varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

und man erhält die symmetrische Formel

$$\text{V)} \qquad \left|\ \begin{aligned} \Delta y = \tfrac{1}{2}\{&f(x + \varepsilon_1 \Delta x,\ y + \varepsilon_1 f \cdot \Delta x) \\ &+ f(x + \varepsilon_2 \Delta x,\ y + \varepsilon_2 f \cdot \Delta x)\}\Delta x, \end{aligned}\right.$$

worin $\varepsilon_1 = 0.2113\ldots$, $\varepsilon_2 = 0.7887\ldots$ zu nehmen ist.

Die Zahlwerte der ε sind dieselben, welche Gauss (Werke 3, 193) bei der entsprechenden Quadraturformel giebt. Der Fehler in dritter Ordnung (correctio proxima) ist bestimmt durch den Ausdruck

$$C_\xi = \frac{1}{3!} f_{0}, \ Df \cdot \Delta x^3.$$

Ist $f(x, y)$ von y unabhängig, so wird $f_{01} = f_{02} = 0$ und die Gleichung V) geht direkt in die Gausssche Formel über, womit aber auch zugleich das Gebiet der Differentialgleichungen verlassen ist.

Bei der Anwendung wird man sich am bequemsten der Gleichung I) bedienen, wenn man es nicht vorzieht, eine schärfer konvergierende Darstellung zu benutzen oder bei diesem geringen Genauigkeitsgrad zu der fast gleichwertigen graphischen Integration greift.

4. Approximationen dritter Ordnung. Die hierher gehörenden Formeln kommen am meisten für die Anwendungen in Betracht, da ihr Bau noch ein einfacher und doch bereits eine in vielen Fällen genügende Konvergenz vorhanden ist. Ihre allgemeine Form ist durch die Ausdrücke

$$\Delta y = \sum \alpha f(x + \varepsilon \Delta x, \ y + \Delta' y) \cdot \Delta x$$
$$\Delta' y = \varepsilon f(x + \varepsilon' \Delta x, y + \varepsilon' f \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

charakterisiert.

Die Entwickelung nach dem Taylorschen Satz giebt

$$6)\left\{\begin{aligned} \Delta y = & \sum \alpha \cdot f \Delta x + \sum \alpha \{\varepsilon f_{10} \Delta x + f_{01} \Delta' y\} \Delta x \\ & + \frac{1}{2!} \sum \alpha \{\varepsilon^2 \cdot f_{20} \Delta x^2 + 2 \varepsilon f_{11} \Delta x \Delta' y + f_{02} \Delta' y^2\} \Delta x \\ & + \frac{1}{3!} \sum \alpha \{\varepsilon^3 f_{30} \Delta x^3 + 3 \varepsilon^2 f_{21} \Delta x^2 \Delta' y \\ & \qquad + 3 \varepsilon \cdot f_{12} \Delta x \Delta' y' + f_{03} \Delta' y^3\} \cdot \Delta x + \cdots \end{aligned}\right.$$

und

$$\Delta' y = \varepsilon \left\{f + \varepsilon' Df \cdot \Delta x + \frac{\varepsilon'^2}{2!} D^2 f \cdot \Delta x^2 + \cdots\right\} \cdot \Delta x.$$

Folglich

$$\Delta' y^2 = \varepsilon^2 \{f^2 + 2 f Df \cdot \Delta x + \cdots\} \Delta x^2,$$
$$\Delta' y^3 = \varepsilon^3 f^3 \Delta x^3 + \cdots$$

Hiermit nimmt Δy die Form an

$$\begin{aligned} \Delta y = & \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \varepsilon Df \cdot \Delta x^2 \\ & + \frac{1}{2!} \left\{2 \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' f_{01} Df + \sum \alpha \varepsilon^2 D^2 f\right\} \Delta x^3 \\ & + \frac{1}{3!} \left\{3 \sum \alpha \varepsilon \varepsilon'^2 f_{01} D^2 f + 6 \sum \alpha \varepsilon^2 \varepsilon' Df_{01} Df \right. \\ & \qquad \left. + \sum \alpha \varepsilon^3 D^3 f\right\} \Delta x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Da das Glied $f_{01}^2 Df$ in dem Faktor von Δx^4 nicht vorkommen kann, so ist auf diesem Wege keine vollständige Näherung bis zum Gliede vierter Ordnung möglich. Nehmen wir also zunächst auf das vierte Glied keine Rücksicht, so erhalten wir die folgenden vier Bedingungsgleichungen für die α, ε und ε':

$$7) \qquad \sum \alpha = 1, \quad \sum \alpha\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sum \alpha\varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum \alpha\varepsilon\varepsilon' = \frac{1}{6}.$$

Für $n = 2$ hat man sechs Unbekannte, so dass man zu diesen Gleichungen noch Bedingungen hinzufügen kann. Setzt man z. B. $\varepsilon_1 = 0$, so sind die übrigen Koeffizienten aus den Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \varepsilon_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_2^2\alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2\varepsilon_2\varepsilon'_2 = \frac{1}{6}$$

zu bestimmen. Es ergiebt sich

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}, \quad \varepsilon'_2 = \frac{1}{3}$$

und hieraus resultiert die für die Anwendungen sehr bequeme Formel

$$\text{VI)} \quad \begin{cases} \Delta y = \frac{1}{4}\left\{f(x, y) + 3f\left(x + \frac{2}{3}\Delta x,\ y + \Delta' y\right)\right\} \cdot \Delta x \\ \Delta' y = \frac{2}{3} f\left(x + \frac{1}{3}\Delta x,\ y + \frac{1}{3} f \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x. \end{cases}$$

Als Beispiel möge die Integration der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sqrt{0 \cdot 25 - (x - y)^2}}$$

dienen. Die Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

x	f	$x+\frac{1}{3}\Delta x$	$y+\frac{1}{3}f\cdot\Delta x$	$\Delta' y$	$y+\Delta' y$	$x+\frac{2}{3}\Delta x$	Δy	y	Corr.
0.0	0.6667	0.1	0.0667	0.1334	0.1334	0.2	0.2004	0.0000	
0.3	0.6711	0.4	0.2675	0.1350	0.3354	0.5	0.2032	0.2004	0.0001
0.6	0.6884	0.7	0.4721	0.1384	0.5420	0 8	0.2089	0.4036	0.0001
0.9	0.7092	1.0	0.6834	0.1440	0.7565	1.1	0.2182	0.6125	0.0001
1.2								0.8307	0.0001

Die Rechnung ist mit $y = 0$ für $x = 0$ begonnen und mit vierstelligen Logarithmen durchgeführt. Der Fehler nach vier Fortsetzungen ist verschwindend klein.

Die Annahme $\alpha_1 = \alpha_2$ führt zu einer anderen zweigliedrigen Formel, welche den Vorzug der vollständigen Symmetrie besitzt.

Aus den Gleichungen

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon^2_1 + \varepsilon^2_2 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon_1\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\varepsilon'_2 = \frac{1}{3}$$

folgt dann für $\varepsilon'_2 = \varepsilon'_1$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right), \quad \varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \frac{1}{6}\Big)$$

nd man erhält

$$\text{VII)}\begin{cases} \Delta y = \frac{1}{2}\{f(x+\varepsilon_1\Delta x,\ y+\Delta'_1 y) + f(x+\varepsilon_2\Delta x,\ y+\Delta'_2 y)\}\Delta x \\ \Delta'_1 y = \varepsilon_1 f\left(x+\frac{1}{6}\Delta x,\ y+\frac{1}{6}f\cdot\Delta x\right)\Delta x \\ \Delta'_2 y = \varepsilon_2 f\left(x+\frac{1}{6}\Delta x,\ y+\frac{1}{6}f\cdot\Delta x\right)\Delta x \end{cases}$$

Für $n = 3$ hat man neun unbekannte Grössen. Wir fügen deshalb willkürlich die Bestimmungen

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon'_1 = 0, \quad \varepsilon'_2 = 0$$

hinzu und erhalten

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{6}, \quad \varepsilon'_3 = 1.$$

Die entsprechende Formel für Δy ist die von Herrn Runge gefundene, nämlich

$$\text{VIII)}\begin{cases} \Delta y = \frac{1}{6}\Big\{f(x, y) + 4f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x,\ y+\frac{1}{2}f\cdot\Delta x\right) \\ \qquad\qquad + f(x+\Delta x,\ \Delta' y)\Big\}\Delta x \\ \Delta' y = f(x+\Delta x,\ y+f\cdot\Delta x)\Delta x. \end{cases}$$

Der mittlere Interpolationswert hat also das vierfache Gewicht der andern.

Die Annahme

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_3$$

giebt

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$$

und die symmetrische Formel

$$\text{IX)}\begin{cases} \Delta y = \frac{2}{3}\Big\{f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x,\ y-\Delta' y\right) - \frac{1}{2}f(x, y) \\ \qquad\qquad + f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x,\ y+\Delta' y\right)\Big\} \\ \Delta' y = \frac{1}{2}f\left(x+\frac{1}{4}\Delta x,\ y+\frac{1}{4}f\cdot\Delta x\right)\Delta x. \end{cases}$$

Ebenso einfach erhält man für

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon'_2 = 0$$

aus den Bedingungsgleichungen die Werte der übrigen Koeffizienten, nämlich

$$\alpha_1 = -\frac{1}{12}, \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{12}, \quad \varepsilon'_1 = \varepsilon'_3 = \frac{1}{3}$$

und die Integrationsgleichung

$$\text{X)}\quad \begin{cases} \Delta y = \frac{1}{12}\{-f(x-\Delta x,\ y+\Delta' y) + 8f(x,y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 5f(x+\Delta x,\ y+\Delta' y)\} \\ \Delta' y = f\left(x+\frac{1}{3}\Delta x,\ y+\frac{1}{3}f\cdot\Delta x\right)\Delta x. \end{cases}$$

Es erscheint unnötig, die Zahl der dreigliedrigen Formeln zu vermehren, da man doch nur die einfachsten zur Anwendung bringen wird.

5. Approximationen vierter Ordnung. Obwohl die Resultate, die diesem Näherungsgrad entsprechen, teilweise noch eine übersichtliche und verhältnismässig einfache Form zeigen, so werden doch die Entwickelungen, welche zu denselben führen, ziemlich unbequem. Deshalb sollen auch die notwendigen Entwickelungen möglichst verkürzt wiedergegeben werden.

Es handelt sich hier um die Potenzentwickelung des Ausdrucks:

$$\Delta y = \sum\{\alpha f(x+\varepsilon\Delta x,\ y+\Delta' y)\}\Delta x \qquad (b)$$

$$\Delta' y = \varepsilon f(x+\varepsilon'\Delta x,\ y+\Delta'' y)\Delta x,$$

$$\Delta'' y = \varepsilon' f(x+\varepsilon''\Delta x,\ y+\varepsilon'' f\cdot\Delta x)\Delta x.$$

Wir erhalten zunächst

$$\Delta'' y = \varepsilon'\left\{f + \varepsilon'' Df\cdot\Delta x + \frac{1}{2!}\varepsilon''^2 D^2 f\cdot\Delta x^2 + \cdots\right\}\Delta x$$

und hieraus

$$\Delta'' y^2 = \varepsilon'^2\{f^2 + 2\varepsilon'' f\cdot Df\cdot\Delta x + \varepsilon''^2(Df^2 + fD^2 f)\Delta x^2 + \cdots\}\Delta x^2$$

$$\Delta'' y^3 = \varepsilon'^3\{f^3 + 3\varepsilon'' f^2 Df\cdot\Delta x + \cdots\}\Delta x^3.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\Delta' y = \varepsilon\{f &+ (\varepsilon' f_{10}\Delta x + f_{01}\Delta'' y) \\ &+ \frac{1}{2!}(\varepsilon'^2 f_{20}\Delta x^2 + 2\varepsilon' f_{11}\Delta x\Delta y'' + f_{02}\Delta'' y^2) \\ &+ \frac{1}{3!}(\varepsilon'^3 f_{30}\Delta x^3 + 3\varepsilon'^2 f_{21}\Delta x^2\Delta'' y \\ &+ 3\varepsilon' f_{12}\Delta x\Delta y''^2 + f_{03}\Delta'' y^3) + \cdots\}\Delta x.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte von $\Delta'' y$ gewinnt dieser Ausdruck die geordnete Form:

$$\begin{aligned}\Delta' y = \{f &+ \varepsilon' Df\cdot\Delta x + \frac{1}{2!}[\varepsilon'^2 D^2 f + 2\varepsilon'\varepsilon'' f_{01} Df]\Delta x^2 \\ &+ \frac{1}{3!}[\varepsilon'^3 D^3 f + 3\varepsilon'\varepsilon''^2 f_{01} D^2 f + 6\varepsilon'^2\varepsilon'' f_{11} Df \\ &+ 6\varepsilon'^2\varepsilon'' f_{02} f\cdot Df]\Delta x^3 + \cdots\}\Delta x.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\begin{aligned}\Delta' y^2 = \varepsilon^2\{f^2 + 2\varepsilon' f Df\cdot\Delta x + \varepsilon'(\varepsilon' Df^2 + \varepsilon' f D^2 f \\ + 2\varepsilon'\varepsilon'' f f_{01} Df)\Delta x^2 + \cdots\}\Delta x^2\end{aligned}$$

$$\Delta' y^3 = \varepsilon^3\{f^3 + 3\varepsilon' f^2 Df\cdot\Delta x + \cdots\}\Delta x^3.$$

Die Einsetzung in Gleichung (b) ergiebt dann

$$\Delta y = \sum \alpha \{ f + \varepsilon Df \cdot \Delta x + \frac{1}{2!}\,[\varepsilon^2 D^2 f + 2\varepsilon\varepsilon' f_{01} Df]\Delta x^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\,[\varepsilon^3 D^3 f + 3\varepsilon\varepsilon'^2 f_{01} D^2 f + 6\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' f^2_{01} Df$$

$$+ 6\varepsilon^2\varepsilon' Df Df_{01}]\Delta x^3 + \cdots \}\Delta x.$$

Man überzeugt sich leicht, dass der vollständige Wert von y^V auf diesem Wege nicht zu erreichen ist. Die Vergleichung des vorstehenden Ausdrucks mit der direkten Taylorschen Entwickelung liefert die acht Bedingungsgleichungen

$$\sum \alpha = 1, \qquad \sum \alpha\varepsilon = \frac{1}{2},$$

$$\sum \alpha\varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \qquad \sum \alpha\varepsilon^3 = \frac{1}{4}, \qquad \sum \alpha\varepsilon\varepsilon' = \frac{1}{6},$$

$$\sum \alpha\varepsilon\varepsilon'^2 = \frac{1}{12}, \qquad \sum \alpha\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = \frac{1}{24}, \qquad \sum \alpha\varepsilon^2\varepsilon' = \frac{1}{8}.$$

Um eine einfache numerische Lösung dieser Gleichung zu gewinnen, setzen wir $n = 3$ ($n = 2$ ist nicht zulässig, da die ε' drei Gleichungen genügen müssen) und nehmen die Gleichungen

$$\sum \alpha\varepsilon^4 = \frac{1}{5}, \qquad \sum \alpha\varepsilon^5 = \frac{1}{6}$$

zu den vier ersten hinzu. Hierdurch wird die Ordnung der Annäherung nicht beeinflusst, weil die notwendigen Bedingungen erfüllt sind. Aus der Gaussschen Arbeit (Werke 3, 193) folgt dann sofort

$$\alpha_1 = \frac{5}{18}, \qquad \alpha_2 = \frac{4}{9}, \qquad \alpha_3 = \frac{5}{18},$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}1127; \qquad \varepsilon_2 = 0{,}5; \qquad \varepsilon_3 = 0{,}8873.$$

Die ε' bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_1\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1' + \alpha_2\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2' + \alpha_3\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3' = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_1\varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_1' + \alpha_2\varepsilon_2^2 \cdot \varepsilon_2' + \alpha_3\varepsilon_3^2 \cdot \varepsilon_3' = \frac{1}{8}$$

$$\alpha_1\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1'^2 + \alpha_2\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2'^2 + \alpha_3\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3'^2 = \frac{1}{12}$$

Die Auflösung derselben ergiebt:

$$\varepsilon_1' = 1{,}2268, \qquad \varepsilon_2' = -\,0{,}0798, \qquad \varepsilon_3' = 0{,}5921.$$

Endlich folgt aus der Gleichung:

$$\alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1' \varepsilon_1'' + \alpha_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2' \varepsilon_2'' + \alpha_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3' \varepsilon_3'' = \frac{1}{24},$$

wenn wir $\varepsilon_1'' = \varepsilon_3'' = 0$ setzen, $\varepsilon_2'' = -2{,}3495$.

Die entsprechende Approximationsformel **vierter** Ordnung heisst also:

$$\text{X)} \left\{ \begin{aligned}
\Delta y &= \frac{1}{18}\Big\{5f(x + \varepsilon_2 \Delta x,\ y + \Delta'_1 y) + 8f\Big(x + \frac{1}{2}\Delta x,\ y + \Delta'_2 y\Big) \\
&\qquad\qquad + 5f(x + \varepsilon_3 \Delta x,\ y + \Delta'_3 y)\Big\}\Delta x, \\
\Delta'_1 y &= \varepsilon_1 f(x + \varepsilon'_1 \Delta x,\ y + \Delta''_1 y)\Delta x, \\
\Delta''_1 y &= \varepsilon'_1 f(x, y)\Delta x, \\
\Delta'_2 y &= \frac{1}{2} f(x + \varepsilon'_2 \Delta x,\ y'' + \Delta''_2 y)\Delta x, \\
\Delta''_2 y &= \varepsilon'_2 f(x + \varepsilon''_2 \Delta x,\ y + \varepsilon'' f \Delta x)\Delta x \\
\Delta'_3 y &= \varepsilon'_3 f(x + \varepsilon'_3 \Delta x,\ y + \Delta''_3 y)\Delta x, \\
\Delta''_3 y &= \varepsilon'_3 f(x, y)\Delta x.
\end{aligned} \right.$$

Die Aufstellungen anderer Formeln derselben Ordnung wollen wir unterlassen, weil man sich dieselben gegebenen Falls, den speziellen Anforderungen entsprechend, ohne Schwierigkeit entwickeln kann.

6. **Integration der Simultansysteme von Differentialgleichungen erster Ordnung.** Die Gesamtheit der bisherigen Betrachtungen, welche sich unmittelbar auf eine Differentialgleichung erster Ordnung bezogen, lässt sich ohne weiteres auf ein System von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y)$$

übertragen. Was zunächst die Bildung der Derivirten anlangt, so hat man

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial z} g = Df,$$

$$z'' = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} f + \frac{\partial g}{\partial z} g = Dg,$$

wo also

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial z}$$

gesetzt ist.

Hieraus folgt durch nochmaliges Differentiieren:

$$y''' = D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{\partial f}{\partial z} Dg$$

und

$$z''' = D^2 g + \frac{\partial g}{\partial y} Df + \frac{\partial g}{\partial z} Dg.$$

Für die Näherungsformeln dritter Ordnung hat man nun den allgemeinen Ansatz:

$$\Delta y = \sum \alpha f(x + \varepsilon \Delta x,\ y + \Delta' y,\ z + \Delta' z) \Delta x$$
$$\Delta' y = \varepsilon f(x + \varepsilon' \Delta x,\ y + \varepsilon' f \cdot \Delta x,\ z + \varepsilon' g \cdot \Delta x) \Delta x$$
$$\Delta z = \sum \alpha g(x + \varepsilon \Delta x,\ y + \Delta' y,\ z + \Delta' z) \Delta x$$
$$\Delta' z = \varepsilon g(x + \varepsilon' \Delta x,\ y + \varepsilon' f \cdot \Delta x,\ z + \varepsilon' g \cdot \Delta x) \Delta x.$$

Die Entwickelung von Δy und Δz ergiebt dann

$$\Delta y = \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \{\varepsilon f_{100} \cdot \Delta x + f_{010} \Delta' y + f_{001} \Delta' z\} \Delta x$$
$$+ \frac{1}{2!} \sum \alpha \{\varepsilon^2 f_{200} \Delta x^2 + 2 \varepsilon f_{110} \Delta x \Delta' y + 2 \varepsilon f_{101} \Delta x \Delta z' + f_{020} \Delta' y^2$$
$$+ 2 f_{011} \Delta' y \Delta' z + f_{002} \Delta' z^2\} \Delta x + \cdots$$

und einen analogen Ausdruck für Δz.

Nach Einsetzung der Werte von $\Delta' y$ und $\Delta' z$ folgt unmittelbar

$$\Delta y = \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \varepsilon D f \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2!} \{\alpha \varepsilon^2 D^2 f + 2 \alpha \varepsilon \varepsilon' (f_{010} D f$$
$$+ f_{001} D g)\} \cdot \Delta x^3 + \cdots$$

Die Übereinstimmung dritter Ordnung wird ganz ebenso wie früher erreicht, wenn man

$$\sum \alpha = 1, \quad \sum \alpha \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sum \alpha \varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' = \frac{1}{6}$$

setzt, und die früher entwickelten Formeln lassen sich demnach ohne Änderung der Koeffizienten auf ein beliebiges Simultansystem von Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen.

7. **Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.** Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)$$

schreiben wir in der Form

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z) = z'$$

und erhalten die Näherungsformeln dritter Ordnung:

$$\Delta y = \sum \alpha z \cdot \Delta x + \sum \alpha \Delta' z \cdot \Delta x$$
$$\Delta z = \sum \alpha f(x + \varepsilon \Delta x,\ y + \Delta' y,\ z + \Delta' z) \cdot \Delta x$$
$$\Delta' y = \varepsilon (z + \varepsilon' z' \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$
$$\Delta' z = \varepsilon f(x + \varepsilon' \Delta x,\ y + \varepsilon' z \cdot \Delta x,\ z + \varepsilon' z' \cdot \Delta x) \Delta x.$$

Ganz analog verfährt man bei Gleichungen, welche höhere Derivirten enthalten. Es ist hierbei natürlich immer vorausgesetzt, dass die allgemeinen Integrationsmethoden versagen. Wendet man das hier gegebene Verfahren z. B. auf lineare Differentialgleichungen mit rationalen oder algebraischen Koeffizienten an, so ergeben sich Formeln, welche in einfacherer Weise aus den Reihenentwickelungen folgen. In der technischen Mechanik sind diese Näherungsformeln jedoch von grossem Wert.

8. Berücksichtigung der Unstetigkeitsstellen. Bei der näherungsweisen Integration der einfachen Gleichung $y' = f(x, y)$ tritt bei fortgesetzter Anwendung der Formeln häufig der Fall ein, dass y' grösser als die Einheit wird. Herr Runge empfiehlt in der angeführten Arbeit, alsdann die Variablen zu vertauschen. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung verlangt dieses Hilfsmittel natürlich eine Transformation, die gelegentlich unbequeme Rechnungen im Gefolge haben kann. Nähert man sich einer Unstetigkeits- oder Verzweigungsstelle (a), was mir bisher praktisch nur bei einer Aufgabe aus der Induktionslehre vorgekommen ist, bei welcher hypothetisch punktuelle magnetische Pole vorausgesetzt waren, so wird man sich ohne Schwierigkeit durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen z durch die bekannte Substitution $y = (x - a)^{\lambda} \cdot z$ helfen können. Der Index $\varkappa$ ist dann aus der Natur der Aufgabe bekannt oder muss versuchsweise passend angenommen werden. Bei dynamischen Problemen aus der technischen Mechanik, wo die Kraftfelder graphisch gegeben sind, scheinen derartige Schwierigkeiten — auch bei Berücksichtigung der Reibungen — nicht aufzutreten. Es ist deshalb verfrüht, jetzt schon Untersuchungen über diesen Punkt anzustellen.

9. Fehlerschätzung und Fehlerhäufung. Um eine obere Grenze für den Fehler einer Approximation m^{ter} Ordnung zu erhalten, würde — unter den hier gemachten Voraussetzungen — die Kenntnis von $y^{(m+1)}$, im Falle einer abhängigen Veränderlichen, ausreichen. Diese Derivirte ist aber hier nur mit einer gewissen Annäherung zu erhalten. Denken wir uns durch successive Fortsetzungen eine Darstellung der Funktion y in der Form

$$\begin{array}{lllll} x, & x + \Delta x, & x + 2\Delta x, & x + 3\Delta x \ldots \\ y_0, & y_1, & y_2, & y_3 \ \ldots \end{array}$$

berechnet, so erscheint es am naheliegendsten, zunächst die Differenzen Δy, $\Delta_2 y$ etc. für das Ende (oder den ganzen Verlauf der Funktion) zu bilden und daraus die Werte der $(m+1)^{\text{ten}}$ Derivirten nach den bekannten Interpolationsformeln herzuleiten. Der so erhaltene Wert ist aber wegen der Fehler, die den y anhaften, durch einen Fehler gleicher Ordnung getrübt. Immerhin gewinnt man auf diese Weise Resultate, welche eine gewisse Fehlerschätzung erlauben. In praktischen Fällen, auf die es hier nur ankommt, scheint mir ein einfacheres Verfahren genügende Sicherheit gegen übermässig stark anwachsende Fehler, die hier gar nicht unmittelbar zu bemerken sind, zu gewähren. Man bestimmt nämlich durch Interpolation nur die fortlaufende Reihe der y' für die verschiedenen Intervalle und vergleicht die so erhaltenen Werte mit den entsprechenden, bereits bekannten Werten von $f(x, y)$. Ist diese Übereinstimmung eine gute, so hat man sicher keinen beträchtlichen Fehler und kann ohne Bedenken weiter integrieren. Wachsen jedoch die Abweichungen über die zulässigen Grenzen, dann muss man sich dazu bequemen, das Argumentintervall Δx von einer bestimmten (leicht erkennbaren) Stelle ab zu verkleinern und die Rechnung von hier an zu wiederholen. Alle diese Schwierigkeiten liegen natürlich im Begriff der Differentialgleichung, welche eine allgemeine Integration nicht zulässt. Bei Quadraturen treten sie nicht auf, weil man hier die zur Verwendung kommenden Ordinaten stets als exakte Werte annimmt.

10. Graphische Integrationsmethode. Anhangsweise möge noch ein ganz elementares, geometrisches Verfahren angeführt werden, welches mit dem vorstehend entwickelten in keinem Zusammenhang steht, aber zuweilen in Verbindung mit den analytischen Methoden bei der Durchführung technischer Aufgaben recht brauchbar ist. Nehmen wir nämlich in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = p$$

für p eine in gleichen Intervallen fortlaufende Wertreihe p_0 (den Anfangswerten von x und y entsprechend) p_1, p_2 etc. an, dann stellen die Gleichungen

$$p_0 = f(x, y),$$
$$p_1 = f(x, y), \ldots$$

ein Kurvensystem vor, welches den Niveaulinien einer Landkarte vergleichbar ist. Die Integrallinie $y = F(y)$ durchsetzt diese Kurven unter Winkeln, deren Tangenten p_0, $p_1 \ldots$, sind.

Ist A der Ausgangspunkt der Integration, so ziehen wir von A aus einen Strahl unter dem Winkel, dessen Tangente p_0 ist und zwar geschieht dies am bequemsten mit Hilfe eines Blättchens Pauspapier, auf welchem die Tangenten graphisch von $0-1$ gehend auf einer Ordinaten am rechten Rande aufgetragen sind. Von der $p_1 = f(x, y)$ entsprechenden Niveaukurve brauchen wir nur ein ganz kleines Stückchen PQ zu kennen. Bei einiger Übung trifft man leicht zwei nahe zusammenliegende Punkte PQ, so dass man die geradlinige Verbindung dieser Punkte als Element der Niveaukurve betrachten kann. Der Schnittpunkt B desselben mit dem Strahl ist der zweite Punkt der Integralkurve. So fährt man fort und gelangt zu einer oft recht gut brauchbaren graphischen Darstellung des Integralverlaufs. Dieses primitive Verfahren kann natürlich in der vorliegenden Form auf Neuheit keinen Anspruch machen, lässt sich aber mit Benutzung der graphischen Methoden von Lalanne, Lallemand und D'Ocagne ohne Schwierigkeit auf Simultansysteme von Differentialgleichungen ausdehnen und zur Lösung von dynamischen Problemen aus der technischen Mechanik verwerten, namentlich wenn die Zahlwerte, welche die Praxis an die Hand giebt, innerhalb weiterer Grenzen unsicher sind.

Synthetische Betrachtung eines in sich bewegten Fadens.

Von

J. Jung

in Pilsen.

Dass ein vollkommen biegsamer, unausdehnbarer, homogener Faden entlang der Kurve sich bewegt, mit welcher er ursprünglich zusammenfiel, sobald ihm ein Antrieb dazu gegeben wird, vorausgesetzt, dass jene Kurvenform eine Gleichgewichtslage für ihn ist mit Rücksicht auf die von aussen her wirkenden Fernkräfte und die etwa stützenden völlig glatten Flächen, und dass an seinen freien Enden gewisse Tangentialkräfte wirken, falls er ungeschlossen ist, wird auf analytischem Wege abgeleitet beispielsweise im zweiten Bande von Rouths „Dynamik der Systeme starrer Körper" (autorisierte deutsche Übersetzung von A. Schepp, Leipzig 1898, Teubner) auf Seite 447 flg. Bei der daselbst gegebenen Herleitung des Satzes aus den allgemeinen Differentialgleichungen für die Fadenbewegung unter Einfluss irgend welcher Kräfte kann die grosse Einfachheit des Problems einer solchen stationären Bewegung nicht in dem Maße zutage treten, wie bei der folgenden geometrischen Behandlung einer zunächst etwas anders gestellten Frage, nämlich der Frage nach demjenigen System von unendlich kleinen Kräften, welche in den Elementen eines Fadens von beliebiger Kurvenform normal angreifend vermöge der Verbindung ihrer Angriffspunkte durch den Faden einander stets das Gleichgewicht halten, sobald im Falle von Knickungen gewisse endliche Kräfte an den Stellen der letzteren angebracht werden ebenso wie an den etwa freien Fadenenden.

Als Antwort ergiebt sich sofort, dass das fragliche Kräftesystem kein anderes ist als dasjenige der Fliehkräfte, die bei gleich rascher Bewegung aller Elemente des homogenen Fadens, also Verschiebung des Fadens in sich selbst, wirklich auftreten müssen. Sind dann noch andere Kräfte von aussen her angenommen, so wird allerdings das Beharren des in Bewegung gesetzten Fadens längs der anfangs schon mit ihm zusammenfallenden Raumkurve nur dann möglich sein, wenn für sich die äusseren Kräfte an dieser Form des Fadens im Gleichgewicht sind, da ja die von der Bewegung allein herrührenden Fliehkräfte in ihrer Wirkung auf den Faden einander aufheben, wie dessen Form auch sei.*

Der Faden kann als Grenzfall einer Kette aus starren, geradlinigen Gliedern gelten, und so sei zunächst festgestellt, wann eine solche bei beliebiger Lage und Form im Gleichgewicht ist, falls in ihren Eckpunkten allein gewisse Kräfte angreifen, deren jede symmetrisch zu den beiden in ihrem Angriffspunkte aneinander stossenden Gliedern gerichtet sein soll. Jedenfalls muss die in der Ecke M_k (Fig. 1) angreifende Kraft p_k in die Ebene der anstossenden Glieder $M_{k-1}M_k$, M_kM_{k+1} fallen, da sie der Resultierenden p_k' der mit diesen Gliedern zusammenfallenden Spannungen s entgegengesetzt und gleich

Fig. 1.

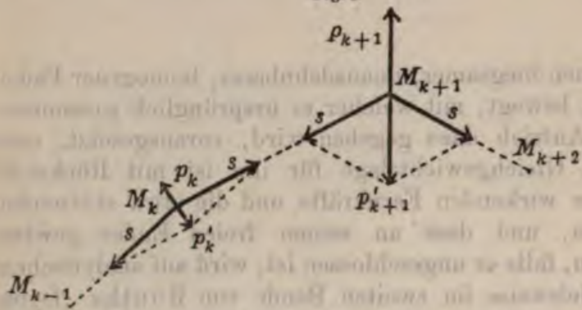
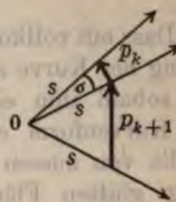


Fig. 2.



sein muss. Sie muss also die Richtung der (äusseren**) Winkelhalbierenden haben. Die Kraft p_{k+1} in der folgenden Ecke M_{k+1} steht in derselben symmetrischen Lagenbeziehung zu den in M_{k+1} angreifenden Spannungen der dort zusammenstossenden Glieder, und da die Spannung in M_kM_{k+1} eben die eine Grösse s hat, so folgt, dass auch die Spannung in $M_{k+1}M_{k+2}$ davon nicht verschieden sein kann. Alle Gliederspannungen sind mithin gleich gross. Die Grösse der Kräfte p aber hängt nur von den Winkeln zwischen den Richtungen je zweier auf einander folgenden Glieder ab; falls man einen Durchlaufungssinn der Kette einmal angenommen hat, kann man offenbar sagen: die Kraft p im gemeinsamen Punkte zweier Glieder ist parallel und der Länge nach gleich der Verbindungslinie der Endpunkte zweier von einem Punkte 0 aus parallel den Richtungen jener Glieder gezogenen Strecken von der Länge s. (Fig. 2.) Alle Kräfte p sind durch die Annahme einer einzigen bestimmt. Ist die Kette nicht geschlossen, so müssen noch Züge s an den Enden in der Richtung der dortigen Glieder wirken.

* Diese einfache Bedeutung der Fliehkräfte insbesondere tritt hier im Gegensatze zur erwähnten analytischen Behandlung hervor.

** Wegen der zunächst unwesentlichen Beschränkung auf Zugspannungen.

Je kürzer die Glieder nun sind und je zahlreicher, um so mehr wird die Kette einer, von einzelnen Knickungen etwa abgesehen, stetig gekrümmten, irgendwie geformten Raumkurve gleichen. Das Zusammenfallen der Richtungen der p mit den Ebenen der anstossenden Glieder bedeutet nunmehr, da die letzteren zu Fadenelementen werden, das Parallellaufen der Kräfte mit den Schmiegungsebenen ihrer Angriffspunkte. Bei der schliesslich unendlichen Kleinheit der Winkel σ zwischen aufeinander folgenden Gliederrichtungen (Fig. 2) werden die Kräfte p der Grösse nach diesen Winkeln proportional, und bei gleicher Länge aller Fadenelemente folgt hieraus offenbar die Proportionalität zwischen den jetzt parallel den Hauptnormalen auswärts wirkenden Kräften und den reziproken Werten der Krümmungsradien an den zugehörigen Stellen. Haben alle Fadenelemente gleiche Maße, wie dies bei einem homogenen Faden zutrifft, so liegt also thatsächlich das eingangs erwähnte Fliehkräftesystem vor.

Es sei nun m die Masse der Längeneinheit, v die Fadengeschwindigkeit, λ die Länge eines Elements, ϱ der Krümmungsradius der betrachteten Stelle. Die von dem dortigen Element ausgeübte Fliehkraft beträgt dann $m\lambda\frac{v^2}{\varrho}$, und mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen p und den Spannungsstrecken s (Fig. 2) muss dies gleich sein dem Produkte $s\sigma$. Daher ist

$$s = m\frac{\lambda}{\sigma}\,\frac{v^2}{\varrho} = mv^2.$$

Dies ist also der Betrag der im ganzen Faden konstanten Zugspannung infolge seiner Bewegung, und tangentiale Zugkräfte von dieser Grösse müsste man an den etwa freien Enden anbringen, damit keine Bahnabweichung erfolge. Ebenso wären für den Fall von Richtungsunstetigkeiten die unendlich kleinen Rollen, über die daselbst der Faden gelegt zu denken ist, durch endliche Kräfte festzuhalten, die aus je zwei Komponenten von der Grösse mv^2, parallel den Tangenten beiderseits von der Richtungsunstetigkeit, sich zusammensetzen. — Sind Zugspannungen in dem von äusseren Kräften zu einer „Kettenlinien"-Form (im allgemeinsten Sinne) gezwungenen Faden bereits im Ruhezustand vorhanden, so kommt zu denselben infolge der betrachteten Bewegung der konstante Betrag mv^2 als Summand hinzu. —

Zu dem Satze, dass jede beliebige Raumkurve für das zugehörige Fliehkräftesystem eine Gleichgewichtsform darstellt, gelangt man unmittelbar auch durch folgendes graphostatische Verfahren, das für eine gegebene Fadenform überhaupt jedes System in den Fadenelementen angreifender, im allgemeinen unendlich kleiner Kräfte finden lässt, welche einander das Gleichgewicht halten. Man legt durch einen festen Raumpunkt gerade Linien parallel den sämtlichen Fadenelementen und zieht auf der hierdurch entstandenen Kegelfläche alle möglichen Kurven; jede derselben erscheint dann durch die Kegelerzeugenden in unendlich viele Elemente zerlegt, welche der Grösse und Richtung nach die Kräfte darstellen, die man in den den Erzeugenden entsprechenden Elementen des Fadens angreifen lässt, um derart ein Kräftesystem der verlangten Art zu erhalten. Schneidet die Kurve auf dem Kegel alle Erzeugenden senkrecht, wie dies einem Normalkräftesystem entspräche, gehört sie also zugleich einer Kugelfläche mit dem Kegelscheitel als Mittelpunkt an, so ist das dadurch bestimmte Kräftesystem offenbar das der Fliehkräfte; denn seine einzelnen Kräfte sind proportional den Winkeln zwischen benachbarten Kegelerzeugenden, d. h. also, bei Einteilung des Fadens in gleich lange Elemente, proportional den reziproken Werten der zugehörigen Krümmungsradien. Die Lagenbeziehung der Kräfte zu den Fadenschmiegungsebenen und die sich einstellende Zugspannung mv^2 findet man ebenso ohne weiteres durch Betrachtung der nun vorliegenden räumlichen Konstruktion.

Zur Darstellung des Bernoullischen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Dr. J. EGGENBERGER
in München.

Sind p und q die einfachen und konstanten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse ε und ε', so ist die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass das Ereignis ε in einer sehr grossen Anzahl von $\mu = m + n$ Versuchen eine Anzahl a von Malen, die zwischen

$$m \pm \lambda$$

liegt, eintrifft, gegeben durch

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\lambda} \frac{\mu!}{(m+i)!\,(n-i)!}\, p^{m+i} q^{n-i},$$

wobei noch vorausgesetzt sein möge, dass $\frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n$ der grösste Term der binomischen Entwickelung $(p+q)^\mu$, also $p : q = m : n$ sei.

Diese Summe wurde schon von Jakob Bernoulli I. (1654—1695), dem Begründer der Theorie von der Wahrscheinlichkeit a posteriori, in seinem genialen Werke ars conjectandi (Basel 1713)* gegeben. Ohne einen numerischen Wert für diese Summe zu suchen, wies Bernoulli mittels einer ihm eigentümlichen Analyse, die sich auf das Verhältnis der Summe der um das grösste Glied der binomischen Entwickelung gruppierten Terme zur Summe aller übrigen stützt, zur Evidenz nach, dass bei fortgesetzter Beobachtung nicht nur P immer grösser und grösser wird, sondern auch die Grenzen der Abweichung $m \pm \lambda$ immer enger gezogen werden können und schliesslich für $\mu = \infty$ mit Gewissheit angenommen werden darf, dass $\lambda = 0$ und $a = m$ wird, dass also das Verhältnis der Anzahl des Eintreffens des Ereignisses ε zur Gesamtzahl der Beobachtungen der wahren Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von ε gleichkommt, d. h.

$$\frac{m}{\mu} = p \quad \text{und} \quad \frac{n}{\mu} = q$$

gesetzt werden kann.

---

* Neuerdings in deutscher Übersetzung von R. Haussner herausgegeben (Ostwalds Klassiker Nr. 107 und 108).

In seiner „Doctrine of chances" suchte Abraham de Moivre (1667—1754) zuerst einen numerischen Wert für P und fand, wie ich an anderem Orte* gezeigt habe, für den Spezialfall $p = q = \frac{1}{2}$ die Reihe:

$$P = \frac{4}{\sqrt{2\pi\mu}}\left\{\lambda - \frac{2\lambda^3}{1\cdot 3\mu} + \frac{4\lambda^5}{2\cdot 5\mu^2} - \frac{8\lambda^7}{6\cdot 7\mu^3} + \frac{16\lambda^9}{24\cdot 9\mu^4} \mp \cdots\right\},$$

d. h. wenn man $\gamma = \lambda\sqrt{\frac{2}{\mu}}$ setzt:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-y^2}dy$$

(e = Basis der natürlichen Logarithmen).

Als Grenze der Abweichung $\frac{m}{\mu} - \frac{1}{2}$ ergiebt sich für diesen Fall

$$\pm\gamma\sqrt{\frac{1}{2\mu}}.$$

Moivre deutet zugleich an, dass für den Fall, wo p und q verschieden sind,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-y^2}dy$$

wird, worin $\gamma = \lambda\sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}$ gesetzt ist und die Grenzen der Abweichung $\frac{m}{\mu} - p$ zwischen $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ gelegen sind.

S. P. Laplace (1749—1827) gab dem Moivreschen Integralausdruck grössere Genauigkeit, indem er fand:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

worin γ dieselbe Bedeutung und die Abweichung $\frac{m}{\mu} - p$ sich innerhalb der nämlichen Grenzen bewegt wie im Moivreschen Ausdruck.

Dieser Ausdruck für P hat seit Laplace allgemeine Anwendung gefunden. Für das Integral sind Tafeln** berechnet worden, welche für aufeinander folgende (bei Meyer nach der zweiten Dezimale) Werte von γ (die nur zwischen 0 und 3 liegen können) die zugehörigen Werte des Integrals geben.

---

* Siehe meine Abhandlung: Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals (Mitteilungen der Naturf. Ges., Bern 1893).

** Meyers Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsche Ausgabe von Czuber (Teubner, Leipzig 1879) geben eine solche Tafel Seite 545 flgg.

Der Restterm $\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$, für den auch $\frac{\sqrt{\mu}e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi mn}}$ oder $\frac{\gamma}{\lambda}\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}}$ gesetzt werden darf, muss jeweilen separat berechnet werden. Die Restfunktion wird freilich in Theorie und Praxis oft vernachlässigt, da dieselbe für grosse μ nur sehr kleine Werte liefert.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Restfunktion mit dem Integral vereinigt werden kann, so dass

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma'} e^{-t^2}dt$$

wird und demnach direkt aus der Tafel der Integrationswerte gefunden werden kann.

Die Bernoullische Summe sei in folgender Weise dargestellt:

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\lambda} \frac{\mu!}{(m-i)!\,(n+i)!}p^{m-i}q^{n+i} = y_{m-\lambda} + y_{m-\lambda+1} + \cdots$$

$$+ y_{m-1} + y_m + y_{m+1} + \cdots + y_{m+\lambda-1} + y_{m+\lambda},$$

worin $y_m = \frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n$ der grösste Term der binomischen Entwickelung sei. Dann wird:

$$P = \sum_{x=0}^{x=\lambda}(y_{m-x} + y_{m+x}) - y_m$$

1) $$= \sum_{x=0,1,2,3,\dots\lambda} \varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(0)$$

2) $$= \sum_{x=1,2,3,\dots\lambda-1} \varphi(x) + \varphi(\lambda) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Es soll nun die Funktion $\varphi(x)$, die wir in diesem Zusammenhange füglich als Moivresche bezeichnen können, näher bestimmt werden.

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel, welche die Fakultät als Funktion ihrer Endzahl darstellt,

$$y! = y^y e^{-y}\sqrt{2\pi y} \quad (\lim y = \infty)$$

findet man für das allgemeine Glied unserer binomischen Entwickelung nach dem Vorgange von Laplace:

$$y_{m+x} = \frac{\mu!}{(m-x)!\,(n+x)!}p^{m-x}q^{n+x}$$

$$= \left(\frac{\mu p}{m-x}\right)^{m-x+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu q}{n+x}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

woraus sich für das Maximalglied y_m ergiebt:

$$y_m = \left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Nun hat schon Jakob Bernoulli I. gezeigt, dass diejenige Kombination der Zahlen m und n für das Eintreffen der Ereignisse s und ein Maximum von Wahrscheinlichkeit aufweist, worin $\mu p = m$ und $\mu q = n$ gesetzt werden kann (wahrscheinlichste Hypothese). Daher wird das Maximalglied

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

und

$$y_{m+x} = y_m\left(\frac{1}{1-\frac{x}{m}}\right)^{m-x+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+x+\frac{1}{2}}$$

$$= y_m\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m+x-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-x-\frac{1}{2}}$$

$$= y_m e^{\left(x-\frac{x^2-x}{2m}+\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{4}}{3m^2}\mp\cdots\right)+\left(-x-\frac{x^2+x}{2n}+\frac{\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{4}}{3n^2}\mp\cdots\right)},$$

und bei Vernachlässigung der Glieder mit $\frac{1}{m^2}$ und $\frac{1}{n^2}$ in erster Näherung

$$y_{m+x} = y_m e^{-\frac{x^2-x}{2m}-\frac{x^2+x}{2n}}$$

oder

$$= y_m\left(1-\frac{x^2-x}{2m}-\frac{x^2+x}{2n}\right),$$

ebenso wird

$$y_{m-x} = y_m\left(1-\frac{x^2+x}{2m}-\frac{x^2-x}{2n}\right),$$

also

$$y_{m+x}+y_{m-x} = \varphi(x) = 2y_m e^{-x^2\frac{\mu}{2mn}}$$

oder

3) $$\varphi(x) = \frac{2e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Dies ist der Näherungswert der Moivreschen Funktion.

Die Summen in 1) und 2) sollen nun in Integrale übergeführt werden. Dazu dient die Euler-Maclaurinsche Summenformel für Reihen mit endlichen Differenzen. Da in unserem Falle das Inkrement $= 1$ ist, nimmt diese Formel folgende Gestalt an:

$$\sum_{x=0,1,2,\ldots\lambda}\varphi(x) = \int_0^{\lambda+1}\varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}[\varphi(\lambda+1)-\varphi(0)]$$
$$+\frac{B_1}{2!}[\varphi'(\lambda+1)-\varphi'(0)]-\frac{B_2}{4!}[\varphi'''(\lambda+1)-\varphi'''(0)]$$
$$\pm \text{ in inf.},$$

worin $B_1, B_2, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen bedeuten.

Vernachlässigt man darin die Glieder mit den Derivationen von $\varphi(x)$, weil schon $\varphi'(x)$ von der Ordnung $\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$ (μ = sehr gross) ist, so bekommt man:

$$\sum_{x=0,1,2,\ldots\lambda} \varphi(x) = \int_0^{\lambda+1} \varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(\lambda+1) + \frac{1}{2}\varphi(0)$$

und

$$\sum_{x=0,1,2,\ldots\lambda-1} \varphi(x) = \int_0^{\lambda} \varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(\lambda) + \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke wird aus 1) und 2):

$$4)\qquad P = \int_0^{\lambda+1} \varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(\lambda+1),$$

ebenso

$$5)\qquad P = \int_0^{\lambda} \varphi(x)dx + \frac{1}{2}\varphi(\lambda).$$

Somit liegt der Wert von P zwischen

$$\int_0^{\lambda} \varphi(x)dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\lambda+1} \varphi(x)dx.$$

Man setze:

$$P = \int_0^{\lambda+\sigma} \varphi(x)dx,$$

wo σ eine kleine Grösse, zwischen 0 und 1 gelegen, bedeutet, die nun bestimmt werden soll.

Zu diesem Zwecke soll

$$[\text{nach } 5)]\qquad \int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(\lambda)$$

nach Taylor entwickelt werden.

Setzt man

$$\alpha)\qquad \int \varphi(\lambda) = f(\lambda),$$

dann wird

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x)dx &= f(\lambda+\sigma) - f(\lambda) \\ &= f(\lambda) + \sigma f'(\lambda) + \frac{\sigma^2 f''(\lambda)}{2!} + \cdots \text{ in inf.} - f(\lambda) \\ &= \sigma f'(\lambda) + \frac{\sigma^2 f''(\lambda)}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

Weil aber nach α)

$$f'(\lambda) = \varphi(\lambda), \quad f''(\lambda) = \varphi'(\lambda), \ldots,$$

folgt:

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x)\,dx = \sigma\varphi(\lambda) + \frac{\sigma^2\varphi'(\lambda)}{2!} + \cdots$$

Weil $\sigma < 1$, ist die Entwickelung konvergent, und bei Vernachlä der Glieder mit $\varphi'(\lambda)$, $\varphi''(\lambda), \ldots$, weil schon $\varphi'(\lambda)$ von der O $\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}$ ist, erhält man in erster Näherung:

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x)\,dx = \sigma\varphi(\lambda).$$

Es war aber auch

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\varphi(\lambda),$$

daher

$$\sigma = \frac{1}{2}.$$

Nun wird

$$P = \int_0^{\lambda} \varphi(x)\,dx + \int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\lambda+\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx.$$

Analog folgt aus (4):

$$\int_{\lambda+1}^{\lambda+1-\sigma} \varphi(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,\varphi(\lambda+1)$$

und durch Entwickelung des Integrals links ergiebt sich ebenso und

$$P = \int_0^{\lambda+1} \varphi(x)\,dx - \int_{\lambda+\frac{1}{2}}^{\lambda+1} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\lambda+\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx.$$

Mit Berücksichtigung von Gleichung 3) folgt:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

Setzt man

$$\xi^2 = \varrho x^2,$$

und

$$\varrho = \frac{1}{2\mu pq}$$

ist, so ergiebt sich nach einfacher Substitution:

5) $$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\xi^2} d\xi,$$

worin $\gamma = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\varrho}$ ist.

Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Wiederholungen des Ereignisses ε innerhalb der Grenzen

$$\mu p \pm \lambda = \mu p \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\varrho}} = \mu p \pm \gamma \sqrt{2\mu p q}$$

gelegen ist, oder die Wahrscheinlichkeit, dass die Grenzen der Abweichung $\frac{m}{\mu} - p$ gleich $\pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ sind, $\gamma = \lambda \sqrt{\varrho}$ genommen.

Im Integral der Gleichung 6) sind die beiden Terme des Laplaceschen Integralausdrucks

$$P = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}},$$

vereinigt. Dabei hat sich die obere Grenze des Integrals

$$\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu p q}} \quad \text{in} \quad \gamma' = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2\mu p q}}$$

verändert. Bei Anwendungen des Theorems hat man somit γ' zu berechnen und findet den Wert P unmittelbar aus der oben erwähnten Tafel der Werte dieses Integrals.

An zwei Beispielen soll nun noch gezeigt werden, dass die beiden Ausdrücke Werte liefern, die nur ganz unerheblich von einander abweichen.

In Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*, wird folgende Aufgabe behandelt.

Die günstigen Fälle für Knaben- und Mädchengeburten stehen im Verhältnis von 18 : 17; wenn nun während eines Jahres 14 000 Kinder geboren werden, welches ist die Wahrscheinlichkeit P, dass die Zahl m' der Knabengeburten 7363 nicht überschreitet und nicht kleiner ist als 7037?

Gegeben sind: m den Knabengeburten, n den Mädchengeburten günstige Fälle

$$\begin{aligned} m + n &= \mu = 14\,000 \\ m : n &= 18 : 37 \\ \mu : m &= 35 : 18 \\ m &= 7200 \\ n &= 6800 \\ m + \lambda &= 7363 \\ \lambda &= 163. \end{aligned}$$

Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass m' die Anzahl der zu erwartenden Knabengeburten zwischen 7200 ± 163 gelegen ist.

---

* Deutsche Ausgabe von Czuber, Seite 107 flg.

Nach dem Laplaceschen Ausdruck wird die Aufgabe wie folgt gelöst (**Meyer**):

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{\mu}\, e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi m n}}$$

$$= \Phi + \Psi.$$

Weil $\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu p q}} = \frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$, wird

$$\log \gamma = \log \lambda + \frac{\log \mu - (\log 2 + \log m + \log n)}{2}$$

und

$$\gamma = 1.94912.$$

Für dieses γ folgt aus der Tafel der Integralwerte

$$\Phi = 0.99415.$$

Für die Berechnung von Ψ hat man

$$\Psi = \frac{\sqrt{\mu}\, e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi m n}} = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\log \Psi = \log \frac{\gamma}{\lambda} - \log e^{\gamma^2} - \log \sqrt{\pi},$$

$$\Psi = 0.00015$$

und

$$P = \Phi + \Psi = 0.99430(8).$$

Mit Hilfe des Ausdrucks

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-\xi^2} d\xi,$$

macht sich die numerische Rechnung einfacher wie folgt. Es ist

$$\gamma' = \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$

$$\log \gamma' = \log \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{\log \mu - (\log 2 + \log m + \log n)}{2}$$

und

$$\gamma' = 1.95497,$$

wofür die Tafel giebt:

$$P = 0.994305.$$

Die beiden Resultate differieren somit erst in der sechsten Dezimal

Als zweites Beispiel wählen wir folgende Aufgabe: Ei Krankenkasse zähle 1000 Mitglieder. Hat nun die Erfahrung gezei dass während einer Reihe von Jahren die Zahl der Krankheitsfäl zur Zahl der Mitglieder im Verhältnis von 3 : 10 steht, welches i dann die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass die Zahl der Erkrankung im nächsten Jahre m' zwischen 260 und 340 liege?

Hier ist
$$\mu = m + n = 1000$$
$$m = 300$$
$$n = 700$$
$$\lambda = 40.$$

Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass die Zahl der zu erwartenden Krankheitsfälle zwischen 300 ± 40 gelegen sei. Nach dem Laplaceschen Ausdruck hat man wie vorhin
$$P = \Phi + \Psi.$$

Für den Wert Φ berechnet sich γ wieder aus
$$\gamma = \frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$
und ergiebt
$$\gamma = 1.951800,$$
wofür die Integraltafel den Wert
$$\Phi = 0.99422$$
liefert. Der Wert Ψ ergiebt sich aus
$$\Psi = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}}$$
und ergiebt
$$\Psi = 0.00061.$$
Daher wird
$$P = \Phi + \Psi = 0{,}99483.$$

Mit Hilfe unseres vereinfachten Ausdrucks berechnet sich γ' aus
$$\gamma' = \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$
und es wird
$$\gamma' = 1.976197,$$
welchem Wert nach der Tafel ein Integrationswert von
$$P = 0{,}99481^*$$
entspricht.

Weil beim zweiten Beispiel μ erheblich kleiner ist als beim ersten, zeigen die beiden Resultate desselben schon in der fünften Dezimale eine Abweichung, die aber ebenfalls belanglos ist.

Es steht demnach nichts im Wege, dem Laplaceschen Integralausdruck fortan die neue bequemere Form zu geben.

* Bei der Bestimmung von P nach der Tafel des Integrals wurde die bekannte Newtonsche Interpolationsformel
$$P = P_1 + \delta \Delta_1 + \frac{\delta(\delta - 1)\Delta_2}{2!} + \cdots$$
verwendet.

Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques.

Par C. Burali-Forti à Turin.

M. Konrad Zindler* dans la récension de mon livre Introduction à la Géometrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann (Paris Gauthier-Villars 1897), fait, à propos de la démonstration de la formule de Taylor pour les formes géométriques, l'observation suivante: „Bei der Ableitung der Taylorschen Reihe nach derselben Methode ist freilich der Beweis nicht als vollständig zu betrachten, indem er im wesentlichen auf der Division durch eine geometrische Grösse beruht, die bekanntlich im allgemeinen nicht gestattet ist (vergl. Grassmann, A_1, §§ 62, 63).

Dans la démonstration à laquelle l'A. fait allusion (mon livre No. 39 Théor. I) des passages rélatifs aux définitions précédentes sont sous-entendus, mais n'est point sous-entendue l'opération division dont j'ai fait usage dans le seul cas où elle donne un résultat unique, résultat qui est un nombre (rapport de deux segments ou vecteurs d'une même droite, de deux triangles ou bivecteurs d'un même plan, de deux tétraèdres ou trivecteurs).

Je trouve convenable de reporter ici la démonstration en forme complète de la formule de Taylor, tandis que je saisis l'occasion pour rémercier M. Konrad Zindler des appréciations favorables faites par rapport à mon livre.

Théorème I (mon livre No. 39). Si $f(t)$ est une forme géométrique qui, pour une valeur de t ait les dérivées jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, on aura pour cette valeur

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!}f''(t) + \cdots \\ + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}t + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(t) + F], \end{aligned}\right.$$

où F est une forme de même ordre que f, fonction de h (et de la valeur considerée de t), satisfaisant en autre à $\lim\limits_{h=0} F = 0$.

Dem.: Étant, par hypothèse $f'(t), \ldots f^{(n)}(t)$ des formes géométriques bien déterminées, la forme F, fonction de h et de t, qui satisfait à la condition 1), est univoquement déterminée et est du même ordre que f

$$\left[F = \frac{n!}{h^n}[ft + h) - f(t) - hf'(t) - \cdots - \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(t)]\right].$$

Soit, par exemple f du prémier ordre: étant α un triangle (indépendant de t et de h) quelconque, posons

* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 44.

2) $$\varphi(t) = f(t)\alpha;$$

$\varphi(t)$ est une fonction numérique de t ayant les dérivées jusqu'à la $n^{ième}$ car $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)\alpha$. Multipliant les deux membres de la 1) pour α on a par la 2)

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(t) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(t) + \frac{h^n}{n!}[\varphi^{(n)}(t) + F\alpha]:$$

mais φ est fonction numérique et donc en vertu de la formule de Taylor pour les fonctions numériques* nous avons

---

* Je reporte ici une démonstration très simple du Théorème de Taylor pour les fonctions numériques (analogue à celle donnée par M. Peano dans les Appendici alle lezioni di analisi infinitesimale, 1898).

Théorème. — Si $f(t)$ est une fonction numérique qui, pour une valeur de t ait les dérivées jusqu'à la $n^{ième}$, on aura pour cette valeur de t

$$\left\{\begin{aligned} f(t+h) &= f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!}f''(t) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(t) + \varepsilon)], \end{aligned}\right.$$

où ε est une fonction de h (et de la valeur considérée de t) telle que

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0.$$

Dem.: — On an, par les hypothèses, que la fonction α de h satisfaisante à la condition

1) $$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t) + h^n\alpha$$

est bien détérminée, et on a

2) $$\alpha = \frac{f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)}{h^n}.$$

Le rapport des $(n-1)^{ièmes}$ dérivées, par respect à h, du numérateur et dénominateur du second membre de la 2) est

$$\frac{f^{(n-1)}(t+h) - f^{(n-1)}(t)}{n!\,h};$$

pour un théorème bien connu sur la limite d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'annulle; on a

$$\lim_{h=0} \alpha = \frac{1}{n!} \lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(t+h) - f^{(n-1)}(t)}{h} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t).$$

On a donc

$$\alpha = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(t) + \varepsilon]$$

ou

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0$$

que, par la 1), démontre le Théorème.

$$\lim_{h=0} F\alpha = 0,$$

$F\alpha$ est un nombre fonction de h (dans mon livre $F\alpha$ est indiqué F_1). Mais cette formule subsiste quelque ce soit le triangle α et donc, vertu de la définition de limite d'une forme variable (mon livre No. 34):

$$\lim_{h=0} F = 0$$

qui démontre le théorème.*

Über einige konforme Abbildungen.

(Zusatz zu dem Aufsatze S. 320 des vorigen Bandes.**)

Von Dr. **H. E. Timerding** in **Strassburg i. E.**

Die Mercatorsche Projektion einer Kugel auf eine Ebene wird so hergestellt, dass die Abscisse ξ eines Punktes in der Bildebene der geographischen Länge des entsprechenden Punktes auf der Kugel gleichgemacht und die Ordinate η aus der geographischen Breite θ mit Hilfe der Gleichung berechnet wird:

$$\eta = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

Wir können nun fragen, welche konforme Abbildung einer Ebene auf eine andere durch diese Funktion vermittelt wird, indem wir dem η und θ komplexe Werte geben. Setzen wir also:

$$1)\qquad V + iU = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u+iv}{2}\right),$$

wo U, V und u, v rechtwinklige Koordinaten in zwei verschiedenen Ebenen bezeichnen. Dann lässt sich aber leicht einsehen, dass wir genau diese Beziehung erhalten, indem wir für eine zweite Mercator-Projektion den Äquator durch einen Meridiankreis ersetzen und die Verwandtschaft ermitteln, in die so durch die Kugel die Ebenen der beiden Mercator Projektionen gebracht sind. Diese Beziehung muss eine durchaus wechselseitige sein und aus der obigen Gleichung 1) folgt demnach auch:

$$2)\qquad v + iu = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{U+iV}{2}\right).$$

Diese Abbildung ist die quere Abbildung zweier Streifen aufeinander. Zwei Streifen von der gleichen Breite π werden nämlich durch sie derart

---

* Que cette démonstration est identique à celle que je donne dans mon livre resulte bien aisément aussi par la démonstration du Théor. II (No. 39 de mon livre) en considérant les fonctions Φ, $f^{(n)}(t)\alpha$.

** S. 320 Zeile 6 von unten, lies das erstemal Sin statt Cos.

aufeinander abgebildet, dass beidemale die unendlich fernen Teile des einen im Bilde auf zwei gegenüber liegende Randpunkte des anderen zusammenschrumpfen und die Stücke, die links und rechts von der Verbindungslinie dieser Randpunkte liegen, den beiden kongruenten Teilstreifen entsprechen, in die der andere Streifen durch die Mittellinie seiner Randlinien zerfällt.

Allgemeiner ist die Abbildung:

$$1^*) \qquad V + iU = k \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u+iv}{2}\right),$$

die einen Streifen von der Breite $\frac{\pi}{k}$ auf einem solchen von der Breite π abbildet.

Kombiniert man die Abbildung 1) mit der folgenden:

$$3) \qquad X + iY = e^{V+iU},$$

durch die ein Streifen von der Breite 2π auf der ganzen Ebene abgebildet wird, so erhält man, indem man noch

$$u \quad \text{für} \quad u + \frac{\pi}{2}$$

schreibt, die Abbildung

$$4) \qquad X + iY = \operatorname{tang}\frac{u+iv}{2},$$

durch die ein Streifen von der Breite π auf dem Inneren eines Kreises vom Radius 1 abgebildet wird, indem er auf einen solchen gleichsam der Länge nach zusammengedrückt wird. Den Randlinien des Streifens entsprechen die beiden Hälften der Kreisperipherie.

Kombiniert man aber die Abbildung 3) mit derjenigen, die für $k = 2$ aus 1*) hervorgeht, so erhält man die neue Beziehung:

$$5) \qquad \sqrt{X+iY} = \operatorname{tang}\frac{u+iv}{2},$$

durch die ein Streifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$ auf dem Inneren eines Kreises vom Radius 1 abgebildet wird, indem er in denselben gleichsam umgebogen wird. Der einen Randlinie des Streifens entspricht die ganze Peripherie, der anderen Randlinie ein Radius des Kreises in zweideutiger Weise.

Fügt man zu der Gleichung 5) noch die Relation:

$$6) \qquad u + iv = \frac{\pi}{2}\sqrt{x+iy},$$

durch die der Streifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$ auf dem Inneren der Parabel

$$y^2 = 4(1-x)$$

abgebildet wird, so ergiebt sich

$$7) \qquad \sqrt{X+iY} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\sqrt{x+iy}.$$

Diese Gleichung ist schon von Schwarz, in Crelles Journal Bd. 70, für die konforme Abbildung des Inneren einer Parabel auf dem Inneren eines Kreises gegeben worden. Man vergleiche Cayley, Quarterly Journal, Bd. 20, S. 213, Gesammelte Werke, Bd. 12, S. 328.

Bei der queren Abbildung zweier Streifen aufeinander gehen die Längs- und Querlinien auf dem einen in Mercator-Kurven der ersten Ordnung auf dem anderen über, und zwar sind den Längslinien Mercator-Kurven des zweiten Typus zugeordnet, die alle durch die beiden den unendlich fernen Gebieten des anderen Streifens entsprechenden Randpunkte gehen. Die den Querlinien zugewiesenen Mercator-Kurven sind hierzu orthogonal und also vom ersten Typus.

Es mag bei dieser Gelegenheit erwähnt werden, dass diese Linien in der Physik, als Stromlinien und Kraftlinien, nicht selten auftreten. So ist die zugehörige Figur, auf experimenteller oder rechnerischer Grundlage, schon häufiger gegeben worden. Man findet sie u. a. bereits in einem Aufsatze von Auerbach, Wiedemanns Annalen Bd. 3, 1878, als Darstellung der elektrischen Stromlinien auf einem Cylinder oder einem ebenen, unendlich langen Streifen. Auch in der Kartographie kam man gelegentlich auf diese Kurven. Man sehe: Breusing, Das Verebnen der Kugeloberfläche etc., Tafel 4 Fig. 2. Die Figur 4 unseres Aufsatzes giebt Maxwell für die Kraftlinien in der Nähe des Randes einer Platte (Treatise on electricity and magnetism, I, Fig. 11). Herr Holzmüller bringt in Fig. 141 seiner Potentialtheorie (Leipzig, B. G. Teubner) dieselbe Figur.

Es könnte scheinen, als ob die Mercator-Kurven der ersten Ordnung noch eine weitere eminente praktische Bedeutung hätten. Die von Herrn Greenhill gebrauchte Bezeichnung als Sumnersche Linien stützt sich nämlich auf die von dem Bostoner Kapitän Sumner angegebene Methode, die Position eines Schiffes auf See durch die Beobachtung der Höhe zweier Gestirne zu einer genau bekannten Zeit zu bestimmen, eine Methode, die immer weitere Verbreitung erlangt. Dann ist auf der Seekarte allerdings der zu ermittelnde Ort als der eine Schnittpunkt zweier Mercator-Kreise bestimmt. In der Praxis handelt es sich immer um die möglichst angenäherte Berechnung dieser Kurven innerhalb des Bereiches, in dem der Ort unbestimmt ist, und hierzu sind besondere Methoden erforderlich, die von Thomson und anderen angegeben wurden.

Dynamik der Kurbelgetriebe.

Von

Prof. Dr. Hans Lorenz

in Halle a. S.

Fortsetzung.

Kapitel II.

Die Energieaustausch.

9. Die kinetische Energie im Kurbelgetriebe. Die absolute Bestimmung der Massendrücke setzt, wie wir schon früher hervorgehoben haben, die Kenntnis der Winkelgeschwindigkeit der Kurbel und damit der Geschwindigkeit aller anderen Teile des Systems in jeder Lage desselben voraus. Diese Geschwindigkeiten werden nun ihrerseits bedingt durch den gesamten Energieaustausch, welchen das Kurbelgetriebe vermittelt. Tritt die in einem Zeitelement in das System eingeleitete Energie nicht sofort durch Überwindung von äusseren Widerständen wieder aus demselben heraus, so ruft der Rest einerseits eine Veränderung der potentiellen Energie (d. i. Veränderung der Höhenlage des Gesamtschwerpunktes), andererseits eine Änderung der totalen kinetischen Energie hervor. Ist endlich die Maschine nach Schlickscher Methode ausgeglichen, so fällt die Änderung der potentiellen Energie hinweg und es bleibt nur diejenige der kinetischen Energie zu berücksichtigen.

Diese kinetische Energie wollen wir zunächst als Funktion des Kurbelwinkels bestimmen. Für das einfache Schubkurbelgetriebe kommen wieder die drei Bestandteile, das Gleitstück, die Schubstange und die Kurbel mit allen lediglich rotierenden Massen in Betracht. Ist ε die momentane Winkelgeschwindigkeit, dK ein Gewichtselement der Kurbel im Abstande ϱ von der Drehaxe, so haben wir die kinetische Energie dieses Elementes

$$dJ'' = \frac{dK}{2g}\varrho^2\varepsilon^2,$$

mithin, wenn k'' den Trägheitsradius der gesamten rotierenden Masse bezogen auf die Drehaxe bedeutet, die kinetische Energie derselben

$$J'' = \frac{K\cdot k''^2}{2g}\varepsilon^2. \tag{137}$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Berechnung der kinetischen Energie des **Gleitstückes**, dessen Gewicht wir wie früher mit P bezeichnen wollen. Wir erhalten mit Rücksicht auf Gleichung 3b)

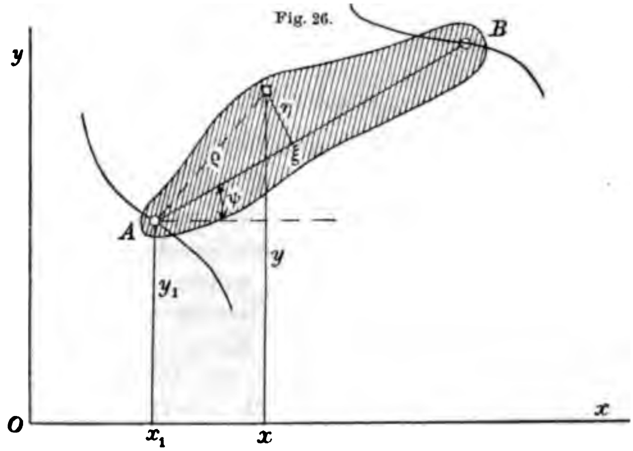
$$J_0 = \frac{P}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon^2 \left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right)^2, \tag{138}$$

oder, wenn wir das mit $r^2 : l^2$ behaftete Glied vernachlässigen dürfen (s. § 1)

$$J_0 = \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon^2 \sin^2\varphi \left(1 + \frac{2r}{l}\cos\varphi\right). \tag{138a}$$

Etwas verwickelter gestaltet sich schon die Herleitung der kinetischen Energie der **Schubstange**, zu der wir gelangen, indem wir die Quadrate der beiden Geschwindigkeitskomponenten, Gleichung 8)

Fig. 26.



und 9), für jedes Element dG addieren und schliesslich integrieren. Wir wollen indessen hier einen etwas andern Weg einschlagen und betrachten wie in § 8 die ebene Bewegung eines Körpers, der in zwei Punkten A und B auf Leitkurven geführt wird (Fig. 26). Die Entfernung der beiden Punkte sei l, ihre momentanen Koordinaten $x_1 y_1$ bezw. $x_2 y_2$, diejenigen eines beliebigen Punktes xy. Wir wollen nun die Lage dieser beliebigen Punkte P auf einen der beiden geführten z. B. A beziehen und wählen dazu die Linie AB als Abscissenaxe. Dann seien ξ und η die relativen Koordinaten, welche mit der Entfernung $AP = \varrho$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Nennen wir schliesslich die momentane Neigung der Linie AB gegen die x-Axe ψ, so bestehen die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x - x_1 &= \xi\cos\psi - \eta\sin\psi \\ y - y_1 &= \xi\sin\psi + \eta\cos\psi. \end{aligned}\right. \tag{139}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes P sind dann

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} - (\xi\sin\psi + \eta\cos\psi)\frac{d\psi}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - (y - y_1)\frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} + (\xi\sin\psi - \eta\sin\psi)\frac{d\psi}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + (x - x_1)\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{140}$$

Man erkennt, dass infolge der Einführung des Winkels ψ die Koordinaten $x_2 y_2$ überhaupt nicht in den Formeln erscheinen, was nichts anderes besagt, als dass die Bewegung des Körpers auf eine Translation des Punktes A und eine gleichzeitige Drehung (gegeben durch den Winkel ψ) in der Bewegungsebene reduziert werden kann. Durch Addition der Quadrate der beiden Geschwindigkeitskomponenten erhalten wir weiter

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 - 2\frac{d\psi}{dt}\left\{(y - y_1)\frac{dx_1}{dt} - (x - x_1)\frac{dy_1}{dt}\right\}$$
$$+ \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \{(x - x_1)^2 + (y - y_2)^2\},$$

oder, indem wir das Wegelement des Punktes P mit ds, dasjenige von A mit ds_1 bezeichnen und die Entfernung $AP = \varrho$ einführen

$$141)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 - 2\frac{d\psi}{dt}\left\{(y - y_1)\frac{dx_1}{dt} - (x - x_1)\frac{dy_1}{dt}\right\} \\ + \varrho^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Daraus aber folgt für die kinetische Energie des ganzen Körpers, wenn wir mit k' dessen Trägheitsradius bezogen auf den Punkt A bezeichnen,

$$J' = \frac{G}{2g}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$
$$- \frac{1}{g}\frac{d\psi}{dt}\frac{dx_1}{dt}\int (y - y_1)\, dG + \frac{1}{g}\frac{d\psi}{dt}\frac{dy_1}{dt}\int (x - x_1)\, dG,$$

oder wegen Gleichung 139):

$$142)\quad \left\{\begin{aligned} J' = \frac{G}{2g}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ - \frac{1}{g}\frac{d\psi}{dt}\frac{dx_1}{dt}\left(\sin\psi\int \xi\, dG + \cos\psi\int \eta\, dG\right) \\ + \frac{1}{g}\frac{d\psi}{dt}\frac{dy_1}{dt}\left(\cos\psi\int \xi\, dG - \sin\psi\int \eta\, dG\right). \end{aligned}\right.$$

Ist der ins Auge gefasste Körper symmetrisch in Bezug auf die Linie AB, so verschwinden die Integrale von $\eta\, dG$ und wir können, wenn wir seinen Schwerpunktsabstand von A mit s' bezeichnen, schreiben

$$143)\quad \left\{\begin{aligned} J' = \frac{G}{2g}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ - \frac{Gs'}{g}\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\sin\psi - \frac{dy_1}{dt}\cos\psi\right). \end{aligned}\right.$$

Kehren wir nun zu unserer Schubstange zurück, deren Kreuzkopfzapfen mit A zusammenfallen möge. Da dieser Punkt sich nur geradlinig in der x-Richtung bewegt, so ist für denselben

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dt} = 0.$$

Weiter aber ist der Winkel ψ identisch mit dem früher mit β bezeichneten Ausschlagwinkel der Stange gegen deren Mittellage, mithin haben wir, wenn φ den Kurbelwinkel und r den Kurbelradius bedeutet

$$l \sin \psi = r \sin \varphi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r\varepsilon}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}.$$

Infolge der Kleinheit des Ausschlagwinkels ψ dürfen wir statt dessen auch schreiben:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r\varepsilon}{l} \cos \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi\right),$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{r^2 \varepsilon^2}{l^2} \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi\right)$$

und erhalten nach Einführung dieser Werte in Gleichung 143):

$$144) \quad \left\{ \begin{aligned} J' = \frac{G}{2g}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g} \frac{r^2\varepsilon^2}{l^2} \cos^2\varphi \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi\right) \\ - \frac{Gs'}{2g} \frac{r^2 s}{l^2} \sin 2\varphi \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi\right) \frac{dx_1}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck ist mit demjenigen identisch, den man durch Addition der Quadrate von 8) und 9) sowie darauffolgende Integration erhalten würde, wenn man einerseits im letzten Gliede die kleine Grösse

$$\frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi$$

vernachlässigt und weiterhin beachtet, dass das Vorzeichen von dx_1 hier notwendig das entgegengesetzte von dx' in 8) infolge der umgekehrten Richtung der Strecken x_1 und x' in den Figuren 26 und 4 sein muss. Da man mit demselben Rechte auch die Grösse

$$\frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi$$

im zweiten Gliede ohne erheblichen Fehler vernachlässigen darf, so kann die kinetische Energie der Schubstange hinreichend genau durch

$$144a) \quad J' = \frac{G}{2g}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{k'^2}{l^2} r^2 \varepsilon^2 \cos^2\varphi - \frac{s'}{l^2} r^2 \varepsilon \sin 2\varphi \frac{dx_1}{dt}\right\}$$

ausgedrückt werden. Daraus folgt aber, dass für die kinetische Energie die Möglichkeit einer Teilung der Schubstangenmasse in einen lediglich rotierenden und einen geradlinig bewegten **Betrag, wie wir sie für die Massendrücke als richtig erkannten, nicht existiert.** Da trotzdem eine solche Massenverteilung für die Berechnung der kinetischen Energie nicht nur häufig in der Praxis vorgenommen wird und sogar in die Vorlesungen über Mechanik und Maschinenlehre übergegangen ist, so möchte ich nicht unterlassen, den dabei üblichen Gedankengang zu skizzieren. Derselbe beruht zunächst auf der richtigen aus 8) hervorgehenden Thatsache, dass die Vertikalgeschwindigkeit der einzelnen Schubstangenpunkte proportional ihrem Kreuzkopfabstande z ist. Weiterhin aber wird die ganz unzulässige Annahme gemacht, dass die Verschiedenheiten der Horizontalgeschwindigkeit der einzelnen Stangenpunkte vernachlässigt und dieselbe durchgehends

$$\frac{dx}{dt} = -r\varepsilon \sin\varphi$$

gesetzt werden dürfe, wobei man wohl übersehen hat, dass damit der Einfluss der Stangenlänge auf das Bewegungsgesetz des ganzen Systems überhaupt eliminiert wird. Jedenfalls verschwinden infolge dieser Annäherung alle mit $\sin 2\varphi$ belasteten Glieder und unsere letzte Formel geht über in

$$J' = G\frac{r^2\varepsilon^2}{2g}\left(\sin^2\varphi + \frac{k'^2}{l^2}\cos^2\varphi\right) = \frac{Gr^2\varepsilon^2}{2g}\left(1 - \frac{k'^2}{l^2}\right)\sin^2\varphi + G\frac{r^2\varepsilon^2}{2g}\,\frac{k'^2}{l^2}.$$

Hierin* bezeichnete man den Betrag

$$G\left(1 - \frac{k'^2}{l^2}\right)$$

als den hin- und hergehenden, $G\frac{k'^2}{l^2}$ dagegen als den rotierenden Teil der ganzen Schubstange. Noch bedenklicher wird dieses Verfahren dadurch, dass man mit den so erhaltenen ungenauen Werten auch noch die damit in gar keinem Zusammenhang stehenden Massendrücke berechnete.

Wir kehren nunmehr zu unserer Aufgabe zurück und erhalten aus den einzelnen Bestandteilen J_0, J' und J'' die **gesamte kinetische Energie des einfachen Schubkurbelgetriebes** unter Benutzung von Gleichung 5b) zu

$$\text{144b)}\quad \left\{\begin{aligned} J = \frac{r^2\varepsilon^2}{2g}\Big\{K\frac{k'^2}{r^2} &+ (P+G)\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right)^2 \\ &+ G\frac{k'^2}{l^2}\cos^2\varphi \\ &- G\frac{s'r}{l^2}\sin 2\varphi\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right)\Big\}, \end{aligned}\right.$$

---

* Man erkennt, dass die obige Näherungsformel aus 144a) auch mit Vernachlässigung der Differenz $k'^2 : l^2 - s' : l$ abgeleitet werden kann. Die Grösse dieser Differenz bildet mithin ein Kriterium für die Zulässigkeit des oben genannten Näherungsverfahrens.

oder, da wir wieder nach erfolgter Quadrierung die mit $\frac{r^2}{l^2}$ behafteten Glieder innerhalb der Klammer vernachlässigen dürfen,

$$
144\text{c)} \quad \left\{ \begin{aligned} J &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left\{ K \frac{k''^2}{r^2} + (P + G) \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{2r}{l} \cos\varphi\right) \right. \\ &\qquad \left. + G \frac{k'^2}{l^2} \cos^2 \varphi - G \frac{s' r}{l^2} \sin\varphi \sin 2\varphi \right\}, \\ &\text{oder} \\ J &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left\{ K \frac{k''^2}{r^2} + G \frac{k'^2}{l^2} + \left(P + G - G \frac{k'^2}{l^2}\right) \sin^2 \varphi \right. \\ &\qquad \left. + 2 \frac{r}{l} \left(P + G - G \frac{s'}{l}\right) \sin^2 \varphi \cos\varphi \right\}. \end{aligned} \right.
$$

Für das Kurbelschleifengetriebe wird $r : l = 0$, ausserdem verschwindet G und es bleibt nur

$$
144\text{d)} \qquad J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left(K \frac{k''^2}{r^2} + P \sin^2 \varphi \right).
$$

Aus diesen Formeln geht deutlich der Anteil der einzelnen bewegten Teile an der gesamten kinetischen Energie hervor. Auch bietet es keine Schwierigkeit, sie auf mehrkurblige Maschinen auszudehnen, worauf wir später zurückkommen werden. Dagegen dürften an dieser Stelle einige Bemerkungen über den Einfluss ausserhalb der Maschine befindlicher, aber mit ihr rotierender oder in anderweitig zwangläufigem Verband mit dem betrachteten Getriebe bewegter Massen angebracht sein. Am einfachsten liegt der Fall zweifellos bei einer Maschine, aus der überhaupt keine kinetische Energie heraustritt, z. B. einer direkt mit einen Dynamoanker, einem Ventilator oder einer Centrifugalpumpe gekuppelten Dampfmaschine. Ein solcher Körper ist lediglich als fest mit der Maschinenwelle verbundener Bestandteil des ganzen Systems aufzufassen und mit seinem Trägheitsradius in unsere Formel einzuführen. Ähnlich einfach gestalten sich die Verhältnisse bei Kolbenpumpen und Kompressoren, welche mit der Antriebsmaschine entweder durch eine gemeinsame Welle oder auch durch eine gemeinsame Kolbenstange verbunden sind. Hier bilden Welle mit Kurbeln und Schwungrad das rotierende System.

Verwickelter liegen die Verhältnisse indessen schon bei den sogenannten Transmissionsdampfmaschinen für Fabrikbetriebe. Könnte man die zur Energieübertragung benutzten, selbst in meist rascher Bewegung befindlichen Seile oder Riemen als unausdehnbar betrachten und von einem Gleiten derselben auf den Seil- und Riemenscheiben absehen, so wäre auch hier die Rechnung eine sehr einfache, da die Winkelgeschwindigkeit jeder einzelnen Welle in jedem Momente derjenigen der Antriebsmaschine proportional wäre. Wäre also W das Gewicht einer solchen Welle mit allen auf ihr fest sitzenden Teilen (Riemscheiben, Kupplungen), k der Trägheitsradius der gesamten

Masse und ε' ihre momentane Winkelgeschwindigkeit, so hätte man hierfür nur den Betrag $\frac{W}{2g}k^2\varepsilon'^2$ und für eine Reihe solcher Wellen die Summe $\frac{1}{2g}\Sigma W k^2 \varepsilon'^2$ dem ersten Gliede unserer Energiegleichung hinzuzufügen. Jede solche Winkelgeschwindigkeit ε' wird dann zu derjenigen ε der Antriebsmaschine in einem festen, durch die Durchmesser der beiderseitigen und etwa zwischengeschalteten Riemen- oder Seilscheiben gegebenen Verhältnisse stehen, welches wir mit η bezeichnen wollen. Damit kennen wir aber auch die Geschwindigkeiten u der Seile und Riemen vom Einzelgewichte S, so dass der von diesen herrührende Beitrag zur kinetischen Energie sich zu $\frac{1}{2g}\Sigma S u^2$ berechnet. Im ganzen tritt mithin zu unserer obigen Formel die Summe

$$J_t = \frac{1}{2g}(\Sigma W k^2 \eta^2 \varepsilon^2 + \Sigma S u^2)$$

hinzu. Infolge des Gleitens und der Elastizität der Seile und Riemen wird natürlich dieser Wert ziemlich ungenau, sodass uns kaum etwas anderes als die Einführung eines Koeffizienten $\zeta < 1$ übrig bleiben dürfte, der angiebt, welcher Anteil der kinetischen Energie der Transmission als mit derjenigen der Antriebsmaschine schwankend anzusehen ist. Damit erhalten wir endlich als Zusatz zu unserer Formel:

$$145) \qquad J_t = \frac{\zeta}{2g}(\Sigma W k^2 \eta^2 \varepsilon^2 + \Sigma S u^2).$$

Ganz besonders klar tritt der Einfluss anderweitiger Massen in der Bewegung eines Eisenbahnzuges durch die Lokomotive hervor, wenn wir auch hier von der Elastizität der Kupplungen und der Puffer zwischen den einzelnen Fahrzeugen sowie von dem geringfügigen Gleiten der Lokomotivtreibräder absehen. Die kinetische Energie des ganzen Zuges (abgesehen von der Dampfmaschine auf der Lokomotive) besteht hier aus zwei Teilen, von denen einer auf die fortschreitende Geschwindigkeit des Zuges in der Bahn, der andere von der Rotation der Räder herrührt. Die Berechnung bietet ebenso wenig Schwierigkeiten, wie beim vorigen Beispiele und führt in diesem Fall auf einen so grossen Zusatzbetrag, dass dagegen die Bewegungsenergie der eigentlichen Dampfmaschine ganz zurücktritt. Ob damit noch die Möglichkeit grösserer Schwankungen in der Winkelgeschwindigkeit der Treibräder bestehen bleibt, hängt allerdings von deren Belastung, welche das Gleiten verhindert, ab und dürfte bei leicht gebauten Lokomotiven, sowie bei feuchten Schienen noch immer zu befürchten sein.

Eine praktische Probe dieser Überlegung ergiebt die Betrachtung eines eine leicht geneigte Strecke unter abgestelltem Dampf und zunächst noch nicht anliegenden Bremsklötzen fahrenden Eisenbahnzuges. Man erkennt sofort, dass die Treibräder der Lokomotive sich hierbei mit der Zuggeschwindigkeit selbst drehen, ebenso wie auch alle Räder der einzelnen Wagen. Daraus ergiebt sich, dass der Vorgang der Energieübertragung von der Lokomotivmaschine auf den ganzen Zug ein nahezu vollkommen umkehrbarer ist und dass jedenfalls, wenn wir auch für diesen Fall die Gleichung 145) (worin nunmehr W das Gewicht einer Radaxe, k sein Trägheitshalbmesser, S das Wagengewicht und u die fortschreitende Geschwindigkeit bedeuten) benutzen, der Koeffizient ζ sehr nahe $= 1$ sein dürfte. Dann wird aber bei der grossen Masse insbesondere der ΣS die Winkelgeschwindigkeit ε während einer Umdrehung nur sehr geringe Schwankungen erleiden und dürfte praktisch in diesem Falle als konstant anzusehen sein.

Dieselbe Überlegung giebt uns auch Aufschluss über die Wirkung der Schiffskörper auf die Winkelgeschwindigkeit der Antriebsmaschine. Hier ist der Zusammenhang zwischen dem Wasser und Propeller — sei derselbe nun ein Schaufelrad oder eine Schraube — bei weitem nicht so innig, wie der durch das Fahrzeuggewicht vermehrte zwischen Rad und Schiene auf der Eisenbahn. Schleppt man daher ein Schiff, so wird erst nach Überschreiten einer bestimmten Geschwindigkeit der Propeller und mit ihm die Maschine sich zu drehen beginnen, niemals aber eine der Schiffsgeschwindigkeit entsprechende Umdrehungszahl erreichen. Bekanntlich tritt dieser Umstand bei dem von der eigenen Maschine getriebenen Schiff in einer Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Propellerumfang und Schiff, dem sog. Slip zu Tage. Der Energieaustausch zwischen der Maschine und dem Schiff kann darum nicht als ein umkehrbarer bezeichnet, also auch nicht erwartet werden, dass die Veränderungen in der Winkelgeschwindigkeit sich auf das ganze Schiff übertragen, bezw. dass die kinetische Energie das letzteren diese Schwankungen merklich vermindert. Dieselben dürften darum auch lediglich Veränderungen der treibenden Kraft und mit diesen z. B. bei Schraubenschiffen Longitudinal- und Transversalschwingungen des ganzen Schiffskörpers zur Folge haben.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir noch die kinetische Energie für ein System von n parallen Getrieben berechnen, deren Kurbeln gegen die erste um die Winkel $\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_4$ geschränkt sind. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst unsere letzte Gleichung 144c) dadurch umformen, dass wir

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

$$2\sin^2\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 3\varphi$$

setzen und erhalten

$$
144\mathrm{e})\quad \left\{\begin{aligned} J = \frac{r^2\varepsilon^2}{2g}\Big\{K\frac{k''^2}{r^2} &+ \frac{1}{2}\left(P+G+G\frac{k'^2}{l^2}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(P+G-G\frac{k'^2}{l^2}\right)\cos 2\varphi \\ &+ \frac{1}{2}\frac{r}{l}\left(P+G-G\frac{s'}{l}\right)(\cos\varphi - \cos 3\varphi)\Big\}. \end{aligned}\right.
$$

Der Einfachheit halber sei hierin

$$
146)\quad \frac{K}{g}\frac{k''^2}{r^2} = M_0,
$$

$$
147)\quad \frac{1}{2g}\left(P+G+G\frac{k'^2}{l^2}\right) = m,
$$

$$
148)\quad \frac{1}{2g}\left(P+G-G\frac{k'^2}{l^2}\right) = m',
$$

$$
149)\quad \frac{1}{2g}\left(P+G-G\frac{s'}{l}\right) = m'',
$$

womit die obige Formel übergeht in

$$
150)\quad J = \frac{r^2\varepsilon^2}{2}\left\{M_0 + m - m'\cos 2\varphi + m''(\cos\varphi - \cos 3\varphi)\right\}.
$$

Setzen wir hierin überall $\varphi + \alpha$ statt φ, und summieren, so erhalten wir für die kinetische Energie eines Systems von n Getrieben mit demselben Kurbelradius r

$$
\begin{aligned} \Sigma J = \frac{r^2\varepsilon^2}{2}\{M_0 + \Sigma m &- \Sigma m'\cos 2(\varphi+\alpha) \\ &+ \Sigma m''[\cos(\varphi+\alpha) - \cos 3(\varphi+\alpha)]\}, \end{aligned}
$$

oder nach Auflösung der Winkelfunktionen

$$
151)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma J = \frac{r^2\varepsilon^2}{2} M_0 + \Sigma m &- \cos 2\varphi\,\Sigma m'\cos 2\alpha \\ &+ \sin 2\varphi\,\Sigma m'\sin 2\alpha \\ &+ \cos\varphi\,\Sigma m''\cos\alpha - \sin\varphi\,\Sigma m''\sin\alpha \\ &- \cos 3\varphi\,\Sigma m''\cos 3\alpha + \sin 3\varphi\,\Sigma m''\sin 3\alpha\}. \end{aligned}\right.
$$

Ist unser System nach Schlickscher Methode ausgeglichen, so verschwinden zunächst wegen Gleichung 29a) die Summen

$$
\Sigma m''\cos\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma m''\sin\alpha.
$$

Weiter aber haben wir

$$
152)\quad m' = \frac{l}{r}m'' + \frac{G}{2g}\left(\frac{s'}{l} - \frac{k'^2}{l^2}\right) = \frac{l}{r}m'' + m''',
$$

also

$$
\Sigma m'\cos 2\alpha = \frac{l}{r}\,\Sigma m''\cos 2\alpha + \Sigma m'''\cos 2\alpha;
$$

$$
\Sigma m'\sin 2\alpha = \frac{l}{r}\,\Sigma m''\sin 2\alpha + \Sigma m'''\sin 2\alpha.
$$

Erstreckt sich nun der Ausgleich auch auf die Wirkung der Schubstange, so fallen nach Gleichung 30a) noch die Summen

$$\Sigma m'' \cos 2\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma m'' \sin 2\alpha$$

fort und so bleibt

153)
$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma m' \cos 2\alpha = \Sigma m''' \cos 2\alpha, \\ \Sigma m' \sin 2\alpha = \Sigma m''' \sin 2\alpha, \end{array}\right.$$

worin wegen 152)

$$m''' = \frac{G}{2g}\left(\frac{s}{l} - \frac{k'^2}{l^2}\right).$$

Wir können demnach für ein ausgeglichenes System statt 151) schreiben

154)
$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} \left\{ M_0 + \Sigma m - \cos 2\varphi \Sigma m''' \cos 2\alpha + \sin 2\varphi \Sigma m''' \sin 2\alpha \right. \\ \qquad \left. - \cos 3\varphi \Sigma m'' \cos 3\alpha + \sin 3\varphi \Sigma m'' \sin 3\alpha \right\} \end{array}\right.$$

und, wenn noch alle Schubstangen gleich dimensioniert sind,

154a)
$$\left.\begin{array}{l} \Sigma J - \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} \left\{ M_0 + \Sigma m - m''' \cos 2\varphi \Sigma \cos 2\alpha + m''' \sin 2\varphi \Sigma \sin 2\alpha \right. \\ \qquad \left. - \cos 3\varphi \Sigma m'' \cos 3\alpha + \sin 3\varphi \Sigma m'' \sin 3\alpha \right\} \cdot \end{array}\right\}$$

Hierin würden, wenn die oben erwähnte Vernachlässigung der Differenz

$$s : l - k'^2 : l^2$$

zulässig erscheint, die mit $\cos 2\varphi$ und $\sin 2\varphi$ behafteten Glieder verschwinden und nur die mit $\cos 3\varphi$ und $\sin 3\varphi$ behafteten Veränderungen der kinetischen Energie bedingen. Jedenfalls ergiebt sich aus den obigen Entwickelungen deutlich der Einfluss der hin- und hergehenden Massen auf diese Energiegrösse, welcher bisher nicht immer richtig beurteilt worden ist.

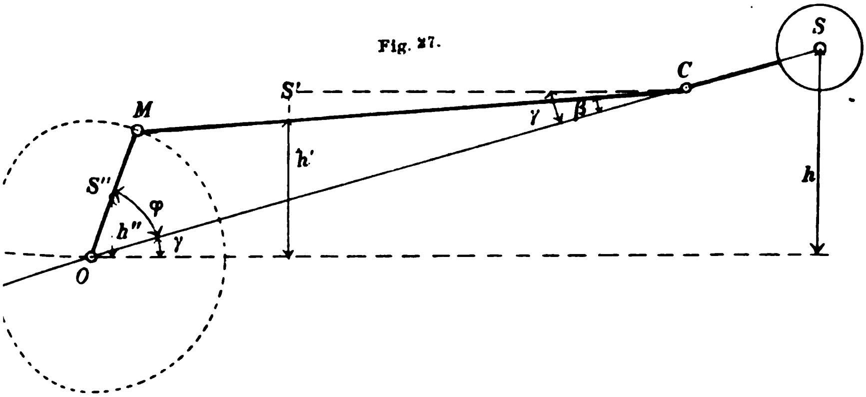
10. Die potentielle Energie im Kurbelgetriebe. Die Bewegungen im Kurbelgetriebe haben naturgemäss Veränderungen in der Höhenlage der Schwerpunkte der einzelnen Getriebeteile sowie des Gesamtschwerpunktes zur Folge, die sich in der Aufnahme bezw. Abgabe von Energie durch das Getriebe geltend machen. Um diese Thatsache in unseren Berechnungen zum Ausdruck zu bringen, benötigen wir nur die Kenntnis der potentiellen Energie des Systems in ihrer Abhängigkeit von der Kurbelstellung. Wir bezeichnen dieselbe in irgend einer Lage mit V und können ihren Wert sofort ermitteln, indem wir das Gewicht jedes Einzelteiles mit seiner Schwerpunktshöhe über einem beliebigen, aber festen Horizont multiplizieren und alle diese Produkte addieren. Durch Hinzutreten einer Konstante C werden wir alsdann der Willkürlichkeit des gewählten Horizontes gerecht.

Wir betrachten zunächst wie in § 3 ein Getriebe, dessen Bewegungsebene vertikal stehen möge, während die Bewegungsrichtung des Gleitstückes mit dem Horizont den Winkel γ bildet (Fig. 27). Benutzen wir ferner die früher gebrauchten Bezeichnungen, d. i. h für die augenblickliche Höhe des Schwerpunktes des Gleitstückes (Kreuzkopfes) it Kolbenstange und Kolben, zusammen vom Gewichte P über dem orizont durch die Drehaxe, h' für die entsprechende der Schubstange G nd h'' für die der Kurbel K, weiter mit s, s', s'' die Schwerpunkts-ostände dieser Teile vom Gleitstück bezw. der Drehaxe, so haben wir

$$155)\quad \begin{cases} h = (s + r\cos\varphi + l\cos\beta)\sin\gamma, \\ h' = (r\cos\varphi + l\cos\beta)\sin\gamma - s'\sin(\gamma - \beta) \\ h'' = s''\sin(\varphi + \gamma) \end{cases}$$

nd damit die potentielle Energie des ganzen Systems:

Fig. 27.



$$V = C + P(s + r\cos\varphi + l\cos\beta)\sin\gamma + Ks''\sin(\varphi + \gamma)$$
$$+ G(r\cos\varphi + l\cos\beta)\sin\gamma - Gs'\sin(\gamma - \beta).$$

Setzen wir hierin, wie früher, $\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\varphi$ und angenähert

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi$$
$$= 1 - \frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}\cos 2\varphi,$$

o wird

$$V = C + Ps\sin\gamma + (Pl + Gl - Gs')\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}\right)\sin\gamma$$
$$+ (Pr + Gr + Ks'')\cos\varphi\sin\gamma + \left(Ks'' + Gs'\frac{r}{l}\right)\sin\varphi\cos\gamma$$
$$+ \frac{1}{4}\left(Pr + Gr - G\frac{s'r}{l}\right)\frac{r}{l}\cos 2\varphi\sin\gamma$$

nd schliesslich bleibt, wenn wir die Konstante C so bestimmen, dass

$$C + Ps\sin\gamma + (Pl + Gl + Gs')\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r^2}{l^2}\right)\sin\gamma = 0,$$

$$56)\quad \begin{cases} V = (Pr + Gr + Ks'')\cos\varphi\cdot\sin\gamma + \left(Ks'' + Gs'\frac{r}{l}\right)\sin\varphi\cdot\cos\gamma \\ \qquad + \frac{1}{4}\left(Pr + Gr - G\frac{s'r}{l}\right)\frac{r}{l}\cos 2\varphi\cdot\sin\gamma. \end{cases}$$

Für ein System von n an derselben Welle angreifenden Getrieben mit den Schränkungswinkeln $\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n$ gegen die erste Kurbel haben wir zu berücksichtigen, dass dem Wege von 0 bis φ der ersten Kurbel ein Weg von α_i bei $\varphi + \alpha_i$ der i^{ten} Kurbel entspricht. Setzen wir nach der Summierung der so gebildeten Ausdrücke wieder die Summe aller konstanten Glieder $= 0$, so bleibt als Ausdruck für die potentielle Energie unseres Systems

$$157)\quad \left| \begin{aligned} \Sigma V = {} & \cos\varphi \cdot \sin\gamma\, \Sigma(Pr + Gr + Ks'')\cos\alpha \\ & + \sin\varphi \cdot \sin\gamma\, \Sigma(Pr + Gr + Ks'')\sin\alpha \\ & + \sin\varphi \cos\gamma\, \Sigma\left(Ks'' + Gs'\frac{r}{l}\right)\cos\alpha \\ & + \cos\varphi \sin\gamma\, \Sigma\left(Ks'' + Gs'\frac{r}{l}\right)\sin\alpha \\ & + \frac{1}{4}\cos 2\varphi \sin\gamma\, \Sigma\left(Pr + Gr - G\frac{s'r}{l}\right)\frac{r}{l}\cos 2\alpha \\ & + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \sin\gamma\, \Sigma\left(Pr + Gr - G\frac{s'r}{l}\right)\frac{r}{l}\sin 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Wäre die Maschine nach Schlick ausgeglichen, so würden alle die einzelnen Σ verschwinden, d. h. die potentielle Energie erleidet alsdann keine Veränderungen und tritt in die Energiegleichung überhaupt nicht ein. Es liegt auf der Hand, dass wir auch auf diese Weise, d. h. aus der Unveränderlichkeit der potentiellen Energie die Schlickschen Bedingungsgleichungen hätten ableiten können.

Aus der allgemeinen Formel für das einzelne Getriebe können wir nunmehr sofort die potentielle Energie für zwei wichtige Spezialfälle gewinnen. Für horizontale oder liegende Maschinen wird nämlich $\gamma = 0$ und 156) geht über in

$$156\text{a})\qquad V = \left(Ks'' + Gs'\frac{r}{l}\right)\sin\varphi.$$

Für vertikale oder stehende Maschinen, wie sie auf Schiffen vorwiegend verwendet werden, haben wir dagegen mit $\gamma = 90^0$

$$156\text{b})\quad \left\{ \begin{aligned} V = {} & (Pr + Gr + Ks'')\cos\varphi \\ & + \frac{1}{4}\left(Pr + Gr - G\frac{s'r}{l}\right)\frac{r}{l}\cos 2\varphi. \end{aligned} \right.$$

11. Die Arbeit der treibenden Kraft. Während wir die bisher gewonnenen Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie eines oder mehrer Kurbelgetriebe unmittelbar und mit beliebiger Genauigkeit aus der augenblicklichen Konfiguration des Systems ableiten konnten, ist dieses Verfahren auf die Arbeit der treibenden Kraft wenigstens im allgemeinen nicht mehr anwendbar. Es liegt dies einfach daran, dass diese Kräfte auch im Beharrungszustande sich nach Gesetzen ändern, welche mathematisch nicht definiert, sondern nur graphisch darstellbar sind. Beispielsweise in der

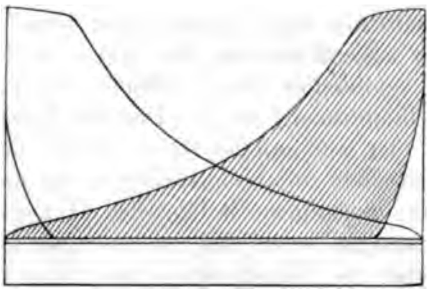
Dampfmaschine bleibt der Druck während der sogenannten Admissionsperiode nahezu konstant und nimmt in der darauffolgenden Expansionsperiode nach einem Gesetze ab, welches fast genau mit dem nach Mariotte benannten, für vollkommene Gase streng giltigen übereinstimmt. Kurz vor Beendigung eines Hubes wird das Auslassorgan geöffnet und der Druck nicht bis zum Hubende des Kolbens bis auf die Austrittsspannung, die bei Auspuffmaschinen wenig über dem Atmosphärendrucke, bei Kondensationsmaschinen etwas über der im Kondensator herrschenden meist niedrigen Spannung liegt. Während des Kolbenrückganges bleibt diese Austrittsspannung unverändert, bis das Auslassorgan wieder geschlossen und der noch im Cylinder befindliche Dampf im sog. schädlichen Raum komprimiert wird. Auch diese Zustandsänderung befolgt angenähert das Mariottesche Gesetz; nach ihrer Vollendung wird schliesslich durch Öffnen des Einlassorgans die Verbindung des Cylinderinnern mit der Dampfzuflussleitung wieder hergestellt und damit der anfängliche Druck wieder erreicht. Kennt man nun diesen sogenannten Admissionsdruck sowie die Ausschubspannung, sind weiterhin diejenigen Stellen des Hubes genau festgelegt, an denen das Einlassorgan sowie das Auslassorgan geöffnet und geschlossen wird, so bietet die Konstruktion des theoretischen Verlaufes des Druckes mit der Kolbenstellung keine Schwierigkeiten. Leider hat dies Verfahren für die Praxis wenig Wert, da die fraglichen Öffnungen und Abschlüsse naturgemäss niemals momentan erfolgen können, mithin die Schnittpunkte der einzelnen Linien des so erhaltenen Diagramms nicht scharf, sondern als sanfte Übergänge erscheinen. Man ist darum auf solche Diagramme angewiesen, welche durch ein am Maschinencylinder angebrachtes Instrument, den sog. Indikator selbstthätig aufgezeichnet werden und ein ziemlich genaues Bild von den Änderungen des Druckes mit dem Kolbenwege geben. Da die Ordinaten in diesen Indikatordiagrammen den Pressungen im Cylinder, die Abscissen dagegen den Kolbenwegen proportional sind, so ergiebt die von der Druckkurve umschlossene Fläche ein Maß für die geleistete Arbeit.

Handelt es sich, wie normal, um doppelt wirkende Maschinen, so steht dem besprochenen Diagramme ein meist gleichgestaltetes, aber in umgekehrter Lage befindliches, der anderen Cylinderseite entnommenes Diagramm gegenüber, dessen Ausschub- und Kompressionslinie zugleich den Gegendruck während der Admission und Expansion im ersten Diagramme darstellen. Dementsprechend müssen wir, um das wirkliche Kräftespiel in der Maschine zu verfolgen, diesen Gegendruck auch mit der eben erwähnten Drucklinie vereinigen und erhalten so aus zwei Indikatordiagrammen (Fig. 28, siehe S. 70) das Kolbendruckdiagramm (Fig. 29, siehe S. 70), welches wie ersichtlich einen positiven und einen negativen Arbeitsbetrag für den Gesamthub enthält. Bezeichnet man nun den momentanen Kolbendruck pro 1 qcm der Fläche F mit p, so ist die auf dem Wege – leistete Arbeit $-Fpdx$, mithin die vom Totpunkte bis zur stellung x, welche, wie früher, von der Mittellage aus g werden mag, geleistete Arbeit

$$L_x = -F\int_r^x p\,dx.$$

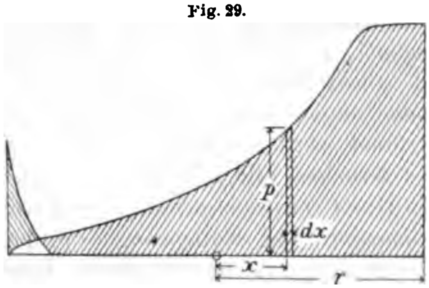
Hierin könnte man den Wert des Integrales durch Planim für jede Kolbenstellung bestimmen und hätte nur für den

Fig. 28.



rückgang zu b dass dort sich d tung der Kraft . kehrt, also p d zeichen wechselt. dieser Umstand e nun die weitere lung des Ene tausches, da zwingt, jeden E für sich zu unte Ganz besonders lästig wird dies Verfahren bei mehrcyl Maschinen, sodass wir, um der mit dem Vorzeichenwechsel

Fig. 29.



denen Unstetigk hoben zu sein der Kolbenkra durch dieselbe gerufenen soge Tangentialdru Kurbelzapfen e wollen. Da d Tangentialdruck Wege $r d\varphi$ geleis mentararbeit mit der Kolbenkraft geleisteten Arbeit übereinstimmen muss, so ha in Figur 30:

$$T r d\varphi = -Fp \cdot dx$$

oder, da laut Gleichung 1):

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi - l\sin\beta\,\frac{d\beta}{d\varphi}$$

und wegen 2)

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{r}{l}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$$

158)

$$T = F \cdot p\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta}.$$

Verlängert man nun die Axe der Schubstange über den zapfen hinaus, bis sie die Normale auf der Bewegungsrichtung (

schneidet, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck OAC der Winkel $\sphericalangle OAC = 90 - \beta$, also

$$\cos\beta = \sin O\hat{A}C = \sin O\hat{A}M$$

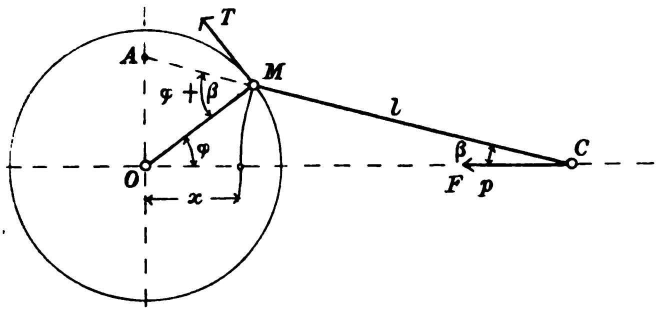
und weiter $\sphericalangle O\hat{M}A = \varphi + \beta$, also

$$\sin(\varphi + \beta) = \sin O\hat{M}A.$$

Dies führt aber in ΔOAM auf die Beziehung:

158a) $$\frac{T}{Fp} = \frac{\sin OMA}{\sin OAM} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA}}{r}.$$

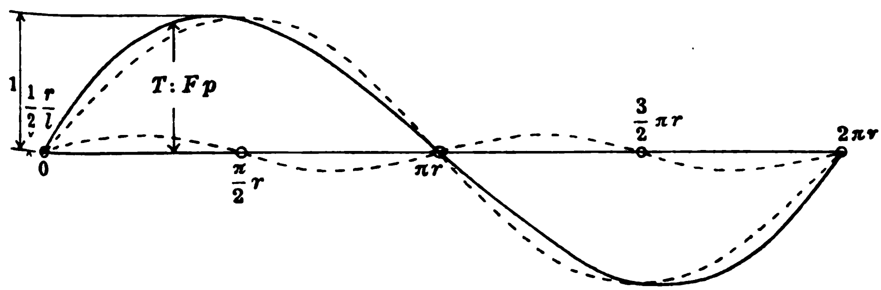
Fig. 30.



d. h. der Tangentialdruck verhält sich zum Kolbendruck wie das von der Schubstange abgeschnittene Stück des Lotes durch das Wellenmittel zum Kurbelradius.

Dieser übrigens schon längst bekannte und in der Technik benutzte Satz erlaubt uns nun eine äusserst bequeme Konstruktion des

Fig. 31.



Tangentialdruckdiagramms aus dem Kolbenkraftdiagramme (Fig. 29), wobei naturgemäss als Abscisse die Kurbelwege $r\varphi$ und für den Kolbenrückgang das der Figur 29 entsprechende Gegendiagramm benutzt werden müssen.

Es erscheint übrigens zweckmässig, vor Ausführung dieser Konstruktion das Verhältnis Gleichung 158a) zunächst als Funktion der Kurbelstellung zu verzeichnen, was in Fig. 31 geschehen ist, und zwar

für einen Wert $r : l = 1 : 4$. Man erkennt aus diesem Diagram
sich der Verlauf des Verhältnisses $T : F \cdot p$ auch mit grosser A
ung durch

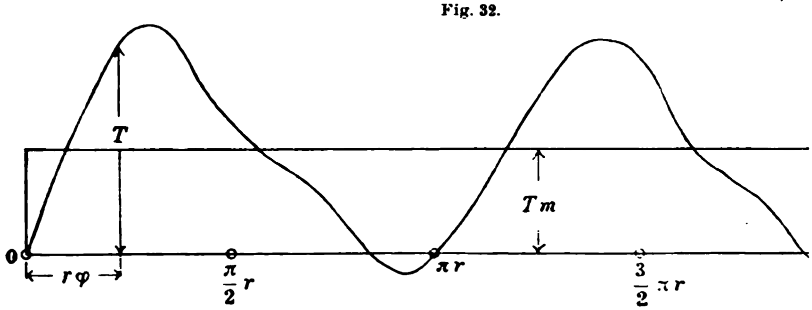
$$\frac{T}{Fp} = \sin\varphi + \frac{1}{2}\frac{r}{l}\sin 2\varphi \tag{158b}$$

in Übereinstimmung mit unserer früheren Näherungsgleichu
darstellen lässt. Aus diesem Grunde habe ich auch die beiden

$$\sin\varphi \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\frac{r}{l}\sin 2\varphi$$

in das Diagramm (Fig. 31) eingetragen. Wäre der Kolbendr
konstant, wie es einer sog. Volldruckdampfmaschine ohne Kom
oder auch einer Wasserpumpe entspricht, so würde unsere
nachdem wir nach den dem Kolbenrückgang (von πr bis 2π
sprechenden Teil umgekehrt hätten, sofort deren Tangenti
diagramm darstellen. Diese Umkehrung vollzieht sich in
lichkeit durch den Vorzeichenwechsel von $F \cdot p$, sodass wir fü

Fig. 32.



Kolbendruckdiagramm (Fig. 29) ein Tangentialdruckdiagramm nac
erhalten würden. Dasselbe ist, wie ohne weiteres ersichtlich,
der Wirkung der endlichen Schubstangenlänge, für die beiden
der Umdrehung nicht gleich gestaltet.

Im Beharrungszustande der Maschine wiederholt sich alsd
durch Fig. 31 dargestellte Verlauf des Tangentialdruckes mit je
drehung, sodass wir es offenbar mit einer periodischen Funkti
Kurbelwinkel φ zu thun haben. Als solche können wir al
Tangentialdruck T durch eine Reihe von der Form

$$\left\{\begin{aligned} T = A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + A_3\cos 3\varphi + \cdots \\ + B_1\sin\varphi + B_2\sin 2\varphi + B_3\sin 3\varphi + \cdots \end{aligned}\right. \tag{159}$$

ganz allgemein darstellen, worin die Koeffizienten A und B b
lich als Integrale von der Form

$$160) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T \cos i\varphi \, d\varphi \\ \text{und} \quad & B_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T \sin i\varphi \, d\varphi \end{aligned} \right.$$

erscheinen. Das konstante Glied A_0 ergiebt sich ebenfalls sofort durch Integration von F über die ganze Periode zu

$$160\text{a}) \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T \, d\varphi = T_m,$$

d. h. als **mittlerer Tangentialdruck**. Da das Indikatordiagramm in seiner praktischen Gestalt nicht mathematisch exakt definiert ist, so gilt dies laut Gleichung 158) auch vom Tangentialdruckdiagramm. Deshalb ist es notwendig, die für die Bestimmung der Koeffizienten A und B notwendigen Integrationen graphisch auszuführen, was im allgemeinen keine Schwierigkeiten bietet, sondern nur etwas Sorgfalt und einen nicht unerheblichen Zeitaufwand erfordert.

Beispiel. Wie weit man im einzelnen Falle mit der graphischen Ermittelung der Koeffizienten A und B gehen muss, lässt sich ohne weiteres nicht sagen. Ich habe daher dieses Verfahren für das durch Fig. 32 vorgelegte Diagramm bis zu den Koeffizienten von $\cos 4\varphi$ und $\sin 4\varphi$ durchgeführt und zwar einfach durch die jeweils zu einer Figur vereinigten Kurven der $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ u. s. w. und darauffolgender Planimetrierung derselben (Fig. 33 bis 36). Das Ergebnis ist die periodische Reihe

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_m} = 1 &+ 0{,}12 \cos\varphi - 0{,}80 \cos 2\varphi - 0{,}10 \cos 3\varphi - 0{,}17 \cos 4\varphi \\ &- 0{,}14 \sin\varphi + 0{,}66 \sin 2\varphi + 0{,}16 \sin 3\varphi + 0{,}02 \sin 4\varphi. \end{aligned}$$

Eine Probe auf die Zulänglichkeit dieser Entwickelung ergiebt die Berechnung der Werte von T für die Totlagen und die Mittellagen

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}\pi\right).$$

Man erhält für $\varphi = 0$: $T_0 = 0{,}05\, T_m$ statt 0,

für $\varphi = \pi$: $T_\pi = 0{,}01\, T_m$ „ 0,

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $T_{\frac{\pi}{2}} = 1{,}33\, T_m$ „ $1{,}25\, T_m$,

für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$: $T_{\frac{3}{2}\pi} = 1{,}93\, T_m$ „ $1{,}85\, T_m$.

Der grösste Fehler beträgt also rund 6 %, was bei der nur auf zwei Stellen durchgeführten Berechnung der Koeffizienten und der in der Kleinheit der Figuren begründeten Ungenauigkeit um so eher als befriedigend angesehen werden kann, als wir bei unseren sämtlichen Rechnungen bisher die mit $r^2 : l^2$ behafteten Glieder vernachlässigt haben, dieses Verhältnis aber für $r : l = 1 : 4$ ebenfalls ca. 0,06 beträgt.

In unsere Energiegleichungen tritt indessen nicht der Tangentialdruck, sondern die auf dem Kurbelwege vom Totpunkte bis zum Winkel φ geleistete Arbeit ein, welche wir durch Integration von Gleichung 159) mit Rücksicht auf 160a) erhalten zu:

Fig. 33.

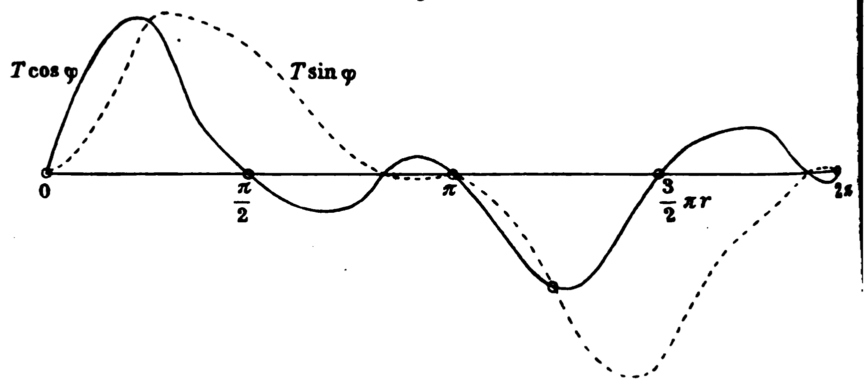
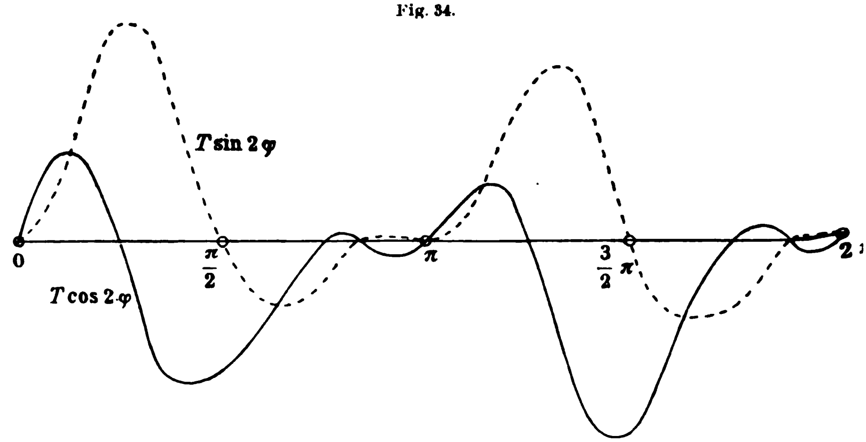


Fig. 34.



161) $$\left\{\begin{aligned} L = r\int_0^{\varphi} T\,d\varphi = T_m r\varphi &+ r\left(B_1 + \frac{B_2}{2} + \frac{B_3}{3}\right) + \cdots \\ &+ r\left(A_1 \sin\varphi + \frac{A_2}{2}\sin 2\varphi\right) + \cdots \\ &- r\left(B_1 \cos\varphi + \frac{B_2}{2}\cos 2\varphi\right) + \cdots \end{aligned}\right.$$

Greift ausser dem betrachteten Kurbelgetriebe noch ein anderes an derselben Welle an, so zwar, dass seine Kurbel der ersten um den Winkel α voraneilt, so hat diese während des Weges der ersteren von 0 bis φ den Weg α bis $\varphi + \alpha$ durchlaufen.

Befolgt weiterhin der Tangentialdruck dieses neuen Kurbelmechanismus ebenfalls ein periodisches Gesetz, also:

$$159a)\quad \begin{cases} T_\alpha = A_0' + A_1'\cos(\varphi+\alpha) + A_2'\cos 2(\varphi+\alpha) + \cdots \\ \qquad + B_1'\sin(\varphi+\alpha) + B_2'\sin 2(\varphi+\alpha) + \cdots \end{cases}$$

so ist auch hier die Integration von 0 bis φ zu erstrecken.

Fig. 35.

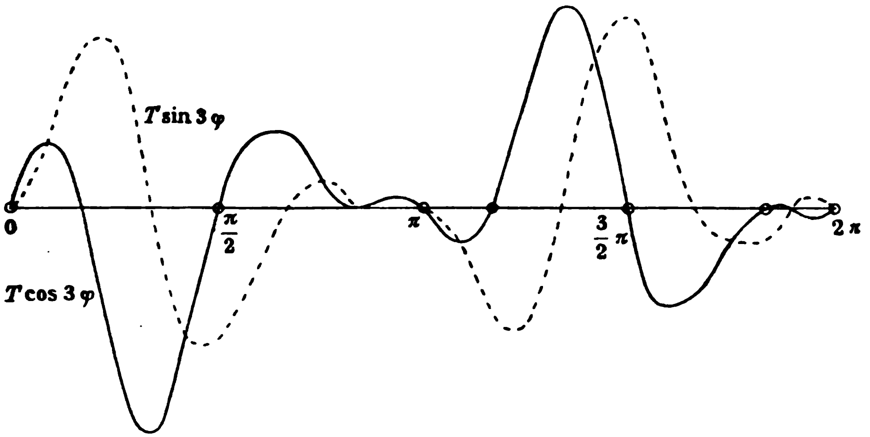
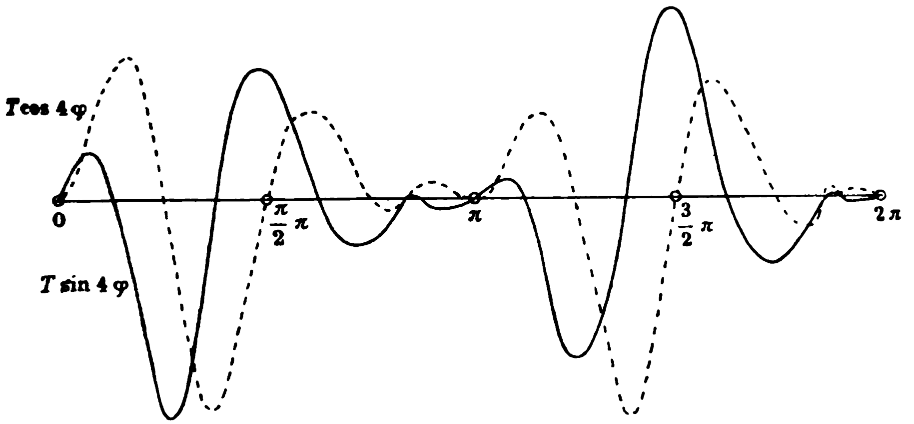


Fig. 36.



Für n solcher Getriebe erhält man alsdann einen resultierenden Tangentialausdruck von

$$161)\quad \begin{cases} \Sigma T = \Sigma A_0 + \cos\varphi\,\Sigma(A_1\cos\alpha + B_1\sin\alpha) \\ \qquad\qquad - \sin\varphi\,\Sigma(A_1\sin\alpha - B_1\cos\alpha) \\ \qquad + \cos 2\varphi\,\Sigma(A_2\cos 2\alpha + B_2\sin 2\alpha) \\ \qquad\qquad - \sin 2\varphi\,\Sigma(A_2\sin 2\alpha - B_2\cos 2\alpha) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und damit, wenn wir mit $\Sigma T_m = \Sigma A_0$ den resultierenden Mitteldruck bezeichnen, die Gesamtarbeit dieser Getriebe

$$
162)\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma L = r\int_0^\varphi \Sigma T\,d\varphi = r\varphi\Sigma T_m &+ (\cos\varphi - 1)\,\Sigma(A_1\sin\alpha - B_1\cos\alpha)\\
&+ \sin\varphi\,\Sigma(A_1\cos\alpha + B_1\sin\alpha)\\
&+ (\cos 2\varphi - 1)\,2\,\Sigma(A_2\sin 2\alpha - B_2\cos 2\alpha)\\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}\right.
$$

oder kürzer

$$
162\text{a})\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma L = \varphi\Sigma T_m r &- (D_1 + D_2 + D_3) + \cdots\\
&- D_1\cos\varphi + D_2\cos 2\varphi + D_3\cos 3\varphi + \cdots\\
&+ E_1\sin\varphi + E_2\sin 2\varphi + E_3\sin 3\varphi + \cdots,
\end{aligned}\right.
$$

wobei die Bedeutung der Abkürzungen D und E sich aus dem Vergleich mit 162) ohne weiteres ergiebt. Die graphische Darstellung dieser Funktion ergiebt eine aufsteigende Kurve mit Schwankungen um eine Gerade, welche den gleichmässigen Zuwachs der Arbeit charakterisiert, also mit dem konstanten Mitteldruck als Grundlage zu zeichnen ist.

Bei Kurbelschleifengetrieben würde übrigens das Tangentialdruckdiagramm für beide Hälften der Umdrehung denselben Verlauf annehmen, wenn auch die Indikatordiagramme auf beiden Kolbenseiten gleich gestaltet sind.

Dies führt aber auf die Bedingung, dass

$$T_\varphi = T_{\varphi+\pi}$$

oder auch, da die entsprechenden Glieder der Reihe (159) für beide Werte identisch sein müssen, auf

$$\cos k\varphi = \cos k(\varphi + \pi)$$

und

$$\sin k\varphi = \sin k(\varphi + \pi),$$

was nur möglich ist, wenn

$$\cos k\pi = +1$$

d. h. k eine ganze gerade Zahl ist. Mithin vereinfacht sich für diesen Fall die Reihe für den Tangentialdruck in

$$
\begin{aligned}
T = A_0 + A_2\cos 2\varphi &+ A_4\cos 4\varphi + \cdots\\
+ B_2\sin 2\varphi &+ B_4\sin 4\varphi + \cdots
\end{aligned}
$$

Daraus geht aber hervor, dass die Glieder mit ungeraden Vielfachen in der Formel 159) des Winkels φ lediglich vom Einflusse der Schubstange herrühren, und ihre Koeffizienten deshalb im Vergleich zu denjenigen mit geraden Vielfachen kleinere Werte annehmen dürften. Unser obiges Zahlenbeispiel bestätigt auch diese Forderung hinreichend.

Schliesslich dürfte noch die Bemerkung von Interesse sein, dass man ein ganz gleichförmiges Drehkraftdiagramm bei einer mehrkurbligen Maschine erhält, wenn es gelingt, die Koeffizienten D und einzeln zum Verschwinden zu bringen, bezw. die Bedingungen

$$163)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma(A_1\cos\alpha\ \ + B_1\sin\alpha)\ = 0, & \Sigma A_1\sin\alpha\ \ - B_1\cos\alpha)\ = 0, \\ \Sigma(A_2\cos 2\alpha + B_1\sin 2\alpha) = 0, & \Sigma A_2\sin 2\alpha - B_1\cos 2\alpha) = 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right.$$

zu erfüllen. Dies bietet dann keine besonderen Schwierigkeiten, wenn die einzelnen Tangentialdruckdiagramme einander ähnlich, die ihnen zugehörigen Koeffizienten A und B also sämtlich den entsprechenden Mitteldrucken T_m proportional sind. Alsdann reduzieren sich die Bedingungen auf

$$163a)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma T_m\cos\alpha\ = 0, & \Sigma T_m\sin\alpha\ = 0, \\ \Sigma T_m\cos 2\alpha = 0, & \Sigma T_m\sin 2\alpha = 0, \\ \vdots & \vdots \end{array}\right.$$

womit nur gesagt ist, dass die Arbeiten auf die einzelnen Cylinder der Maschine zu einander in demselben Verhältnis stehen müssen, wie die hin- und hergehenden Gewichte für den Fall des Ausgleichs der Massendrucke.

(Schluss folgt.)

Über die Vergleichung empirischer Formeln.

Von

C. Runge

in Hannover.

In dem 42. Jahrgang dieser Zeitschrift 1897 (Seite 327 flg.) hat R. Mehmke verschiedene empirische Formeln mit einander verglichen, durch die man die Beziehung zwischen der elastischen Dehnung eines Materials und der dehnenden Kraft darstellt. R. Mehmke vergleicht die Formeln, indem er ihre Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungen bestimmt und jedes Mal den mittleren Fehler bildet.

Man kann aber auch, wie ich zeigen will, in allgemeiner Weise verfahren, um zu untersuchen, wie weit zwei verschiedene Formeln geeignet sind, dasselbe Gesetz darzustellen, ohne dass man es nötig hat, für jede besondere Reihe von Beobachtungen die Konstanten der Formeln zu ermitteln.

Soll z. B. die Formel

$$\varepsilon = a\sigma^b,$$

wo ε die elastische Dehnung, σ die Kraft darstellt und a und b positive Konstante bedeuten, mit der Formel

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

in dem Intervall $\sigma = 0$ bis $\sigma = s$ verglichen werden, so denke man sich die Konstanten a und b gegeben und suche die Konstanten α und β so zu bestimmen, dass das Integral

$$\frac{1}{s}\int_0^s (\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)^2 d\sigma$$

möglichst klein wird. Die Quadratwurzel aus dem Minimalwert können wir den mittleren Fehler der Formel $\alpha\sigma + \beta\sigma^2$ bei der Darstellung von $a\sigma^b$ in dem Intervall $\sigma = 0$ bis s nennen.

Die Differentiation nach α und β ergiebt die Minimumbedingungen

$$\int_0^s (\alpha\sigma^2 + \beta\sigma^3 - a\sigma^{b+1})\,d\sigma = 0,$$

$$\int_0^s (\alpha\sigma^3 + \beta\sigma^4 - a\sigma^{b+2})\,d\sigma = 0,$$

er, wenn man die Integrale ausführt:

$$\alpha\frac{s^3}{3} + \beta\frac{s^4}{4} - a\frac{s^{b+2}}{b+2} = 0,$$

$$\alpha\frac{s^4}{4} + \beta\frac{s^5}{5} - a\frac{s^{b+3}}{b+3} = 0,$$

der

$$4\alpha + 3\beta s - 12\cdot\frac{as^{b-1}}{b+2} = 0,$$

$$5\alpha + 4\beta s - 20\cdot\frac{as^{b-1}}{b+3} = 0,$$

oraus sich ergiebt:

$$\alpha = \frac{12(2-b)}{(b+2)(b+3)}\cdot as^{b-1}$$

$$\beta = \frac{20(b-1)}{(b+2)(b+3)}\cdot as^{b-2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)^2 = &+ \alpha\sigma(\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)\\ &+ \beta\sigma^2(\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)\\ &- a\sigma^b(\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)\end{aligned}$$

nd mithin ist wegen der Minimumbedingungen

$$\begin{aligned}m^2 = \frac{1}{s}\int_0^s (\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)^2\,d\sigma &= -\frac{a\alpha}{s}\int_0^s \sigma^{b+1}\,d\sigma - \frac{a\beta}{s}\int_0^s \sigma^{b+2}d\sigma\\ &\quad + \frac{a^2}{s}\int_0^s \sigma^{2b}d\sigma\\ &= -a\cdot\alpha\cdot\frac{s^{b+1}}{b+2} - a\beta\cdot\frac{s^{b+2}}{b+3}\\ &\quad + a^2\frac{s^{2b}}{2b+1}.\end{aligned}$$

Setzt man hier die gefundenen Werte von α und β ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}m^2 &= +a^2s^{2b}\left(-\frac{12(2-b)}{(b+2)^2(b+3)} - \frac{20(b-1)}{(b+2)(b+3)^2} + \frac{1}{2b+1}\right)\\ &= \frac{a^2s^{2b}(b-1)^2(2-b)^2}{(2b+1)(b+2)^2(b+3)^2},\end{aligned}$$

der

$$\left(\frac{m}{as^b}\right)^2 = \frac{(b-1)^2(2-b)^2}{(2b+1)(b+2)^2(b+3)^2}.$$

$\frac{m}{as^b}$ drückt den mittleren Fehler in Bruchteilen der elastischen Dehnung aus.

Es zeigt sich aus der Formel, dass der mittlere Fehler : und für $b = 2$ verschwindet. Das hätte man in der That voı können. Denn für $b = 1$ und $b = 2$ ist die Form $a\sigma^b$ in der

$$\alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

enthalten. Man braucht nur für $b = 1$, $\alpha = a$ und $\beta = 0$: und für $b = 2$, $\alpha = 0$ und $\beta = a$. Zugleich zeigt die Forn der mittlere Fehler sehr klein wird, wenn b sehr nahe gleic sehr nahe gleich 2 wird. In diesen Fällen macht es daher se Unterschied, ob man die eine Formel nimmt oder die andere. R.] führt für die Dehnung des Gusseisens die aus den Beobachtu C. Bach berechnete Formel

$$\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{1381700} \sigma^{1,0663}$$

an. Hier ergiebt sich

$$\frac{m}{as^b} = 0{,}0028.$$

Die grösste beobachtete Dehnung ist 51,31 $\left(\varepsilon \text{ ist in } \frac{1}{600}\text{ cm au}\right.$ und bezieht sich auf 75 cm Länge$\Big)$. Daher wird m in die gleich 0,14. Wenn also Beträge von dieser Grössenordnu Rolle spielen, so kann man die Potenzformel durch die par Formel ersetzen, die für manche Zwecke bequemer sein mag.

In ähnlicher Weise möge die hyperbolische Formel

$$\varepsilon = \frac{a\sigma}{1 - b\sigma}$$

mit der parabolischen

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

in dem Intervall $\sigma = 0$ bis $\sigma = s$ verglichen werden.

Das Quadrat des mittleren Fehlers m wird durch das gegeben:

$$m^2 = \frac{1}{s}\int_0^s \left(\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - \frac{a\sigma}{1 - b\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Durch Differentiation nach α und β erhalten wir di Minimumbedingungen:

$$\int_0^s \left(\alpha\sigma^2 + \beta\sigma^3 - \frac{a\sigma^2}{1 - b\sigma}\right) d\sigma = 0,$$

$$\int_0^s \left(\alpha\sigma^3 + \beta\sigma^4 - \frac{a\sigma^3}{1 - b\sigma}\right) d\sigma = 0,$$

welche auf die Gleichungen führen:

$$4\alpha + 3\beta s - 12A = 0,$$
$$5\alpha + 4\beta s - 20B = 0.$$

Dabei sind der Kürze halber die Bezeichnungen gebraucht

$$A = \frac{1}{s^3}\int_0^s \frac{a\sigma^2}{1-b\sigma}\,d\sigma,\quad B = \frac{1}{s^4}\int_0^s \frac{a\sigma^3}{1-b\sigma}\,d\sigma.$$

Es wird dann

$$\alpha = 12(4A - 5B)$$
$$\beta = \frac{20}{s}\left(4B - 3A\right)$$

und

$$m^2 = \frac{1}{s}\int_0^s\left(\frac{a\sigma}{1-b\sigma} - \alpha\sigma - \beta\sigma^2\right)\frac{a\sigma}{1-b\sigma}\,d\sigma$$
$$= \frac{1}{s}\left[\int_0^s \frac{a^2\sigma^2}{(1-b\sigma)^2}\,d\sigma - \alpha s^3 A - \beta s^4 B\right]$$
$$= \frac{1}{s}\left[\int_0^s \frac{a^2\sigma^2}{(1-b\sigma)^2}\,d\sigma - 48s^3A^2 + 120s^3AB - 80s^3B^2\right]$$

Schreibt man noch:

$$C^2 = \frac{1}{s^3}\int_0^s \frac{a^2\sigma^2 d\sigma}{(1-b\sigma^2)},$$

ist

$$m^2 = s^2[C^2 - 8(6A^2 - 15AB + 10B^2)].$$

Dabei ergiebt sich:

$$A = \frac{a}{s^3b^3}\left(l\frac{1}{1-bs} - bs - \frac{1}{2}b^2s^2\right),$$
$$B = \frac{a}{s^4b^4}\left(l\frac{1}{1-bs} - bs - \frac{1}{2}b^2s^2 - \frac{1}{3}b^3s^3\right)$$
$$C^2 = \frac{a^2}{s^3b^3}\left(2l(1-bs) + bs + \frac{bs}{1-bs}\right).$$

Für kleine Werte von bs ist es am zweckmässigsten, die Ausdrücke nach Potenzen von bs zu entwickeln.

Schreibt man $bs = u$, so ist

$$A = a\left(\frac{1}{3} + \frac{u}{4} + \cdots\right)$$
$$B = a\left(\frac{1}{4} + \frac{u}{5} + \cdots\right)$$
$$C^2 = a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2u}{4} + \frac{3u^2}{5} + \frac{4u^3}{6} + \frac{5u^4}{7} + \cdots\right).$$

Bei der Entwickelung von m^2 verschwinden dann die ersten vier Glieder und es ergiebt sich:

$$m^2 = a^2 s^2 \left[\frac{u^4}{9\cdot 25\cdot 7} + \frac{u^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right]$$

und daher

$$m = a\cdot s\cdot \frac{b^2 s^2}{3\cdot 5\cdot \sqrt{7}} \left[1 + \frac{3\cdot 5}{8} bs + \cdots\right].$$

In dem von Mehmke gegebenen Beispiele ist z. B. die Längenveränderung ε von Gusseisen unter dem Druck σ durch die hyperbolische Formel dargestellt

$$\varepsilon = \frac{0{,}04685\,\sigma}{1 - 0{,}0000918\sigma}.$$

Der grösste bei den Beobachtungen vorkommende Wert von σ ist 998. Wir haben also rund

$$as = 47,$$

$$bs = 0{,}092$$

und folglich rund

$$m = 0{,}01.$$

Da die Fehler der von Mehmke angeführten Beobachtungen diesen Wert von m erheblich übersteigen, so ist demnach zwischen der hyperbolischen und parabolischen Formel kein wesentlicher Unterschied in der Genauigkeit der Darstellung dieser Beobachtungen vorhanden.

Die beiden behandelten Vergleichungen

$$a\sigma^b \quad \text{mit} \quad \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

und

$$\frac{a\sigma}{1 - b\sigma} \quad \text{mit} \quad \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

hängen mit der Entwickelung nach Kugelfunktionen zusammen. Da wir es hier aber nur mit zwei Unbekannten α und β zu thun haben, so lohnt es nicht, die Theorie der Kugelfunktionen ins Treffen zu führen, wenn man die Bekanntschaft mit der Theorie nicht voraussetzen will.

Es möge indessen auf den Zusammenhang der vorliegenden Fragen mit der Entwickelung nach Kugelfunktionen kurz hingewiesen werden.

Wenn eine empirische Formel

$$y = f(x)$$

mit einer andern empirischen Formel

$$y = g(x)$$

in dem Intervall x_1 bis x_2 verglichen werden soll, wo $g(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion n^{ten} Grades bedeutet, so werde zunächst statt x die Veränderliche u durch die Gleichung

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot u$$

geführt. Die Veränderliche u liegt dann zwischen den Grenzen 1 und $+1$. Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mögen, nachdem die ie Veränderliche u eingeführt ist, mit $F(u)$ und $G(u)$ bezeichnet rden.

Es sei nun $F(u)$ nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$F(u) = c_0 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + c_3\chi_3 + \cdots$$

ist bekanntlich*

$$c_\alpha = \frac{2\alpha+1}{2}\int_{-1}^{+1} F(u)\chi_\alpha du, \quad \int_{-1}^{+1}\chi_\alpha\chi_\beta du = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1}\chi_\alpha\chi_\alpha du = \frac{2}{2\alpha+1}.$$

Daraus folgt, dass der mittlere Fehler m

$$m^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[F(u) - (c_0 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \cdots + c_n\chi_n)]^2 du$$

ür die betreffenden Werte von $c_0 c_1 \ldots c_n$ kleiner ist als für alle anderen Werte. Denn die Minimumbedingungen werden eben

$$\int_{-1}^{+1} F(u)\chi_\alpha du - c_\alpha\int_{-1}^{+1}\chi_\alpha\chi_\alpha du = 0.$$

Soll also die ganze Funktion n^{ten} Grades $G(u)$, das Quadrat des nittleren Fehlers

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[F(u) - G(u)]^2 du$$

zum Minimum machen, so muss sein

$$G(u) = c_0 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \cdots + c_n\chi_n.$$

Der Minimumwert von m^2 lässt sich in die Form bringen

$$m^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[F(u)]^2 du - \left[c_0^2 + \frac{1}{3}c_1^2 + \frac{1}{5}c_2^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}c_n^2\right].$$

In den oben behandelten beiden Fällen tritt noch eine Komplikation hinzu. Die ganze rationale Funktion soll dort nämlich kein von x unabhängiges Glied haben oder, wie wir hier besser sagen würden, sie soll an der unteren Grenze des Intervalles also für $u = -1$ verschwinden. Nun nehmen die Kugelfunktionen $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots$ für

* Heine, Handbuch der Kugelfunktionen § 14 Gleichung 9a), 9b), 9c).

$u = -1$ bekanntlich* die Werte $-1, +1, -1, +1, \ldots$ an. Folglich hat $G(u)$ ausser der Minimumbedingung noch die weitere Bedingung zu erfüllen, dass, wenn es nach Kugelfunktionen entwickelt wird,

$$G(u) = c_0' + c_1'\chi_1 + c_2'\chi_2 + \cdots + c_n'\chi_n,$$

die Koeffizienten die Gleichung erfüllen

$$c_0' - c_1' + c_2' - \cdots \pm c_n' = 0.$$

Wir haben es also mit einem relativen Minimum zu thun. Es soll

$$\int_{-1}^{+1} [F(u) - G(u)]^2 du$$

möglichst klein werden, für solche Werte $c_0' c_1' \ldots c_n'$, welche die Bedingung

$$c_0' - c_1' + \cdots \pm c_n' = 0$$

erfüllen. Das führt nach Einführung einer Korrelate k auf die Lösungen:

$$\int_{-1}^{+1} F(u) du - \frac{2}{1} c_0' - k = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} F(u)\chi_1 du - \frac{2}{3} c_1' + k = 0,$$

$$\vdots$$

$$\int_{-1}^{+1} F(u)\chi_n du - \frac{2}{2n+1} c_n' \mp k = 0,$$

oder, wenn wieder $c_0, c_1, c_2 \ldots$ die Koeffizienten der Entwickelung von $F(u)$ nach Kugelfunktionen bezeichnen:

$$\begin{aligned} 2c_0 &= 2c_0' + k, \\ \frac{2}{3} c_1 &= \frac{2}{3} c_1' - k, \\ &\vdots \\ \frac{2}{2n+1} c_n &= \frac{2}{2n+1} c_n' \pm k, \end{aligned}$$

wobei k sich nun durch die Bedingungsgleichung ergiebt:

$$\begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 - \cdots \pm c_n &= k\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \cdots + \frac{2n+1}{2}\right) \\ &= \frac{k(n+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

---

* Folgt sofort aus der Definition von χ_ν als Koeffizient von α^ν in der Entwickelung von $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha u+\alpha^2}}$. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen § 4 Gleichung 1).

Der Minimumwert von m^2 ist:

$$m^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[F(u)]^2du - \left(c_0'^2 + \frac{1}{3}c_1'^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}c_n'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[F(u)]^2du - \left(c_0^2 + \frac{1}{3}c_1^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}c_n^2\right) + \frac{k^2}{4}(n+1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[F(u)]^2du - \left(c_0^2 + \frac{1}{3}c_1^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}c_n^2\right)$$
$$+ \left(\frac{c_0 - c_1 + c_2 - \cdots \pm c_n}{n+1}\right)^2.$$

Die erforderliche Rechnung beschränkt sich demnach darauf, die Koeffizienten der Entwickelung von $F(u)$ nach Kugelfunktionen $c_0 c_1 \ldots c_n$ und den Wert von

$$\int_{-1}^{+1}[F(u)]^2du$$

zu ermitteln. Dabei ist

$$c_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1}F(u)\chi_\nu(u)du.$$

Hat man diese Werte ermittelt, so zeigt der Wert von m, mit welcher Genauigkeit die empirische Formel $F(u)$ durch eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades $G(u)$ ersetzt werden kann.

Über den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche.

Von

Prof. Dr. G. Huber

in Bern.

Einleitung.

Die Definition des sphärischen Kegelschnittes wurde zuerst von Nic. Fuss aufgestellt, durch die konstante Summe der Radien vectoren nach zwei festen Punkten. (Nova acta petropolitana t. 3, 1781.) Weitere Eigenschaften desselben sind durch Schubert, Magnus und Gergonne am Ende des 18. Jahrh. aufgefunden worden. Eine vollständige Bearbeitung der sphärischen Kegelschnitte nach synthetischer Methode hat erst Chasles im Jahre 1830 geliefert. (Nouv. mém. de l'Academie roy. de Bruxelles t. VI.) Fast aus der gleichen Zeit datieren die synthetischen Untersuchungen Steiners in seiner „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander."

Ebenfalls ausführlich sind die Arbeiten von Möbius und Gudermann über „Analytische Sphärik". Beide beziehen die Punkte des sphärischen Kegelschnittes auf ein sphärisches Dreieck auf der Kugel als Koordinatendreieck. Die zugehörigen Koordinaten heissen sphärische Koordinaten und durch deren Einführung wird der Grad der Gleichung der Kurven auf den zweiten Grad reduziert. In der analytischen Geometrie des Raumes von Salmon-Fiedler befindet sich im Anhang eine Zusammenstellung der Hauptsätze über sphärische Kegelschnitte. Ferner zu erwähnen sind zwei Dissertationen über sphärische Kegelschnitte von Geisenheimer (Jena 1869) und H. Vogt (Breslau 1873), in welchen Gudermannsche Koordinaten zu Grunde gelegt sind. Im 14. Bd. von Crelles Journal hat Gudermann Inhalt und Bogen der sphärischen Ellipse durch zwei komplizierte Integrale dritter Art dargestellt. Eine Quadratur dieser Kurve wurde auch von Catalan ausgeführt (Liouvilles Journ. tom 6). Eine elegante Rektifikation der sphärischen Ellipse hat Tortolini geliefert (Sopra la Rettificatione dell' Ellissi sferica etc. Roma 1846), wobei der Kurvenbogen durch ein

Legendresches Integral dritter Art und der ganze Umfang der Kurve durch elliptische Integrale erster und zweiter Art dargestellt wird.

Neuere, mir bekannte Untersuchungen über sphärische Kegelschnitte sind eingeschlossen in den allgemeineren Arbeiten über Raumkurven vierter Ordnung von Eberhard, „Über Steinersche Sekanten und Punktsysteme auf Raumkurven vierter Ordnung“ (Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 32); „Harnack, Über die Darstellung der Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies durch doppelt periodische Funktionen“. (Mathem. Annal. Bd. 12.)

In der vorliegenden Arbeit sind die Koordinaten eines Punktes des sphärischen Kegelschnittes durch elliptische Funktionen eines veränderlichen Parameters u dargestellt. Die Herleitung der bekannten Eigenschaften der Kurve, die sich vermittelst dieser Gleichungen leicht bewerkstelligen lässt, ist zum grössten Teil weggelassen, dagegen ist die Krümmung berücksichtigt worden. Ferner ist hauptsächlich die Quadratur und Rektifikation der sphärischen Ellipse ausgeführt; besonders die erstere führt auf einen sehr einfachen Ausdruck.

Ferner ist es mir gelungen, die Gleichungen der abwickelbaren Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes vermittelst zweier veränderlicher Parameter u, v in sehr einfacher Form durch elliptische Funktionen darzustellen. Die Parameterkurven $u =$ konst. sind die Erzeugenden der Tangentenfläche, während die Kurven $v =$ konst. ein System von Kurven achter Ordnung auf der Fläche repräsentieren, die sich als Kurven vierter Ordnung auf die drei Koordinatenebenen projizieren. Die Doppelkurven der Fläche in den drei Koordinatenebenen und in der unendlich fernen Ebene ergeben sich für vier spezielle Werte von v, nämlich $v = 0,\ K,\ K + iK'$ und iK'; sie lassen sich durch einfache Gleichungen vierten Grades in rechtwinkligen Koordinaten darstellen und leicht konstruieren (Fig. 2 u. 3).

Hieran schliessen sich noch einige andere Untersuchungen der Fläche, Aufstellung der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung, Krümmung u. s. w. Ich hoffe damit einen kleinen Beitrag zur genaueren Kenntnis dieser Fläche geliefert zu haben.

I. Der sphärische Kegelschnitt.

Der sphärische Kegelschnitt sei dargestellt als Schnittlinie der Einheitskugel:

$$1)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

mit dem konzentrischen elliptischen Kegel:

$$2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

wo $a > b$. Die Koordinatenebenen sind die Hauptebenen des Kegels. Der Kegelschnitt besteht aus zwei kongruenten sphärischen Ellipsen, oberhalb und unterhalb der (xy)-Ebene, mit den elliptischen Mit punkten Z und Z' auf der z-Axe und den hyperbolischen Mit punkten X, X' und Y, Y' auf den beiden anderen Axen (Fig. I).

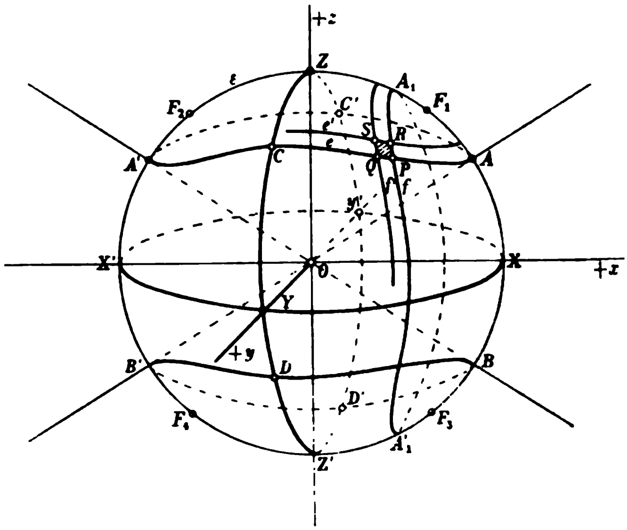
Die Gleichung des Kegels lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{a^2+c^2}+\frac{\frac{y^2}{b^2}}{a^2+c^2}-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{a^2+c^2}=0.$$

Weil

$$\frac{a^2}{a^2+c^2}<1,\quad \frac{c^2}{a^2+c^2}<1$$

Fig 1.



und ihre Summe $=1$ ist, so kann man setzen:

3) $$\frac{a^2}{a^2+c^2}=\sin^2\alpha,\quad \frac{c^2}{a^2+c^2}=\cos^2\alpha,\quad \text{also } \operatorname{tang}\alpha=\frac{a}{c},$$

wo $0<\alpha<90^0$ ist. Ferner setze man:

$$\frac{b^2}{a^2+c^2}=\sin^2\alpha-\sin^2\varepsilon,$$

wobei $\alpha>\varepsilon$ sein muss. Nun wird nach 3):

4) $$\sin^2\varepsilon=\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2},\quad \cos^2\varepsilon=\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2},\quad \operatorname{tang}\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}.$$

Die Gleichung des Kegels lässt sich nun schreiben:

5) $$\frac{x^2}{\sin^2\alpha}+\frac{y^2}{\sin^2\alpha-\sin^2\varepsilon}-\frac{z^2}{\cos^2\alpha}=0.$$

Für $\alpha = 0$ reduziert sich der Kegel auf die (yz)-Ebene, für $\alpha = \varepsilon$ auf die (xz)-Ebene und für $\alpha = 90^0$ auf die (xy)-Ebene.

Für $\varepsilon = 0$ wird $a = b$, der Kegel wird ein Kreiskegel und der sphärische Kegelschnitt reduziert sich auf zwei Kleinkreise der Kugel.

Durch Elimination von y aus 1) und 5) ergiebt sich die Projektion des sphärischen Kegelschnittes auf die (xz)-Ebene als die Ellipse:

$$6)\qquad \left(\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha}\right)^2 z^2 = 1.$$

Weil $\varepsilon < \alpha$ und x stets < 1 ist, so kann man

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}\, x = \sin\varphi$$

setzen, wo φ ein veränderlicher Winkel bedeutet, dann folgt aus 6):

$$\frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha}\cdot z = \cos\varphi,$$

also wird:

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon}\sin\varphi, \quad z = \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon}\cos\varphi,$$

als Koordinaten eines Punktes der Projektionsellipse. Die zugehörige Koordinate y des entsprechenden Punktes des sphärischen Kegelschnittes ergiebt sich aus der Kugelgleichung als

$$y = \frac{1}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon}\cdot\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\varphi}.$$

Damit y reell werde, muss stets $\sin^2\varphi < \sin^2\varepsilon$ sein.

Die räumlichen Koordinaten eines Punktes des sphärischen Kegelschnittes, als Funktionen von φ betrachtet, werden nun:

$$7)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon}\sin\varphi, \quad y = \dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon}\cdot\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\varphi}}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}, \\ z = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon}\cdot\cos\varphi. \end{cases}$$

Für $\varphi = \pm\varepsilon$ und $\varphi = \pi \mp \varepsilon$ wird:

$$x = \pm\sin\alpha, \quad y = 0, \quad z = \pm\cos\alpha,$$

es sind dies die Scheitel A, A' B, B' der grossen Axen der beiden sphärischen Ellipsen; hieraus folgt, dass die Hauptbogen der Kugel

$$ZA = ZA' = Z'B = Z'B' = \alpha$$

sind, d. h. α ist die halbe grosse Axe der sphärischen Ellipse.

Für $\varphi = 0$ wird

$$x = 0, \quad y = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon}}{\cos\varepsilon}, \quad z = \pm\frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon},$$

es sind dies die in der (yz)-Ebene liegenden Scheitel C, C' bez. D, D' der kleinen Axen der beiden sphärischen Ellipsen.

Die Gleichungen der reellen, in der (xz)-Ebene liegenden **Fokallinien** des Kegels sind:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}\,z = \pm \operatorname{tang}\varepsilon\cdot z,$$

sie schneiden die Einheitskugel in den vier Brennpunkten des sphärischen Kegelschnittes, ihre Koordinaten werden:

$$8)\qquad x = \pm\sin\varepsilon,\quad y = 0,\quad z = \pm\cos\varepsilon.$$

Bezeichnet man die Brennpunkte der oberhalb der (xy)-Ebene liegenden sphärischen Ellipse mit F_1 und F_2, die der unterhalb der (xy)-Ebene liegenden mit F_3 und F_4, so folgt, dass ihre Abstände von den Mittelpunkten Z und Z' gleich dem Bogen ε sind:

$$ZF_1 = ZF_2 = Z'F_3 = Z'F_4 = \varepsilon,$$

d. h. ε ist die **Exzentrizität** des sphärischen Kegelschnittes.

Für jeden Punkt P der obern sphärischen Ellipse gilt nun die Beziehung:

$$\operatorname{arc} F_1P + \operatorname{arc} F_2P = 2\alpha.$$

Um in den Gleichungen 7) für y die Quadratwurzel zu vermeiden, führen wir **elliptische Funktionen** ein.

Als algebraischen Modul wählen wir:

$$9)\qquad \varkappa = \sin\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}},\quad \varkappa' = \cos\varepsilon = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

gleich komplementärer Modul und setzen bei Benützung der **Gudermannschen** Zeichen:

$$10)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \varkappa\, sn\, u, \quad \cos\varphi = \sqrt{1-\varkappa^2 sn^2 u} = dn\, u, \\ \sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\varphi} = \varkappa\, cn\, u. \end{cases}$$

Für $\varphi = 0$ ist dann auch $u = 0$. Bei demselben Modul setzen wir:

$$11)\qquad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} = \varkappa\, sn\, t, \quad \text{also } \cos\alpha = dn\, t, \\ \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon} = i\varkappa\, cn\, t, \end{cases}$$

wo t zunächst eine Konstante bedeutet, von welcher die Axen des sphärischen Kegelschnitts abhängen. Aus obigem folgt:

$$11a)\qquad \begin{cases} sn\, t = \dfrac{\sin\alpha}{\varkappa} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} > 1, \quad i\, cn\, t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}, \\ dn\, t = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{cases}$$

Wie gesehen ist α ein Winkel zwischen ε und $\frac{\pi}{2}$. Für die untere Grenze $\alpha = \varepsilon$, also $\sin\alpha = \sin\varepsilon = \varkappa$, wird $\varkappa\, sn\, t = \varkappa$, also $sn\, t = 1$ und $t = K$. Für die obere Grenze $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird $\sin\alpha = 1$, also $\varkappa\, sn\, t = 1$ $sn\, t = \frac{1}{\varkappa}$, somit $t = K + iK'$. Bezeichnen wir im folgenden immer die imaginäre Periode der elliptischen Funktionen $2iK'$ kurz mit $2L$, so finden wir, dass das konstante Argument t zwischen K und $K+L$ liegt, es ist also komplex, $t=K+vi$, und $icnt$ ist reell.

Die Gleichungen des sphärischen Kegelschnittes, als Funktionen der Variablen u betrachtet, werden nun:

$$12)\qquad x=\varkappa\, sn t\, sn u,\quad y=\frac{i\varkappa}{\varkappa'}cn t\, cn u,\quad z=\frac{1}{\varkappa'}dn t\, dn u.$$

Für die Konstanten führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$sn t=\lambda,\quad i\,cn t=\mu,\quad dn t=\nu,$$

es ist dann

$$1<\lambda<\frac{1}{\varkappa},\quad 0<\mu<\frac{\varkappa'}{\varkappa}\quad\text{und}\quad 0<\nu<\varkappa'.$$

Die Gleichungen des sphärischen Kegelschnittes werden nun:

$$13)\qquad x=\varkappa\lambda\, sn u,\quad y=\frac{\varkappa}{\varkappa'}\mu\, cn u,\quad z=\frac{\nu}{\varkappa'}dn u.$$

Geht u von 0 bis $4K$, so erhält man die oberhalb der (xy)-Ebene liegende sphärische Ellipse, geht u von $2L$ bis $2L+4K$, so erhält man die unterhalb liegende vom Mittelpunkt Z'.

Die Parameter u_i von vier Punkten der Kurve, welche in irgend einer Ebene liegen, genügen der Gleichung:

$$u_1+u_2+u_3+u_4\equiv 0 \pmod{4K,\,4L}.*$$

Für $u=0$ und $2K$ wird

$$x=0,\quad y=\pm\frac{\varkappa}{\varkappa'}\mu,\quad z=\frac{\nu}{\varkappa'},$$

es sind dies die Scheitel C und C' der kleinen Axe.

Für $u=K$ und $3K$ wird

$$x=\pm\varkappa\lambda,\quad y=0,\quad z=\nu,$$

es sind dies die Scheitel A und A' der grossen Axe.

Die Koordinaten der Brennpunkte sind

$$x=\pm\varkappa,\quad y=0,\quad z=\pm\varkappa'.$$

Aus den Gleichungen 13) der Kurve folgt:

$$\frac{dx}{du}=\varkappa\lambda\, cn u\, dn u,\quad \frac{dy}{du}=-\frac{\varkappa}{\varkappa'}\mu\, sn u\, dn u,$$

$$\frac{dz}{du}=-\frac{\varkappa^2}{\varkappa'}\nu\, sn u\, cn u.$$

Die Gleichungen der Tangente im Punkte x, y, z, vom Argument u, des sphärischen Kegelschnittes werden:

$$\frac{\xi-x}{\lambda\, cn u\, dn u}=\frac{-\varkappa'(\eta-y)}{\mu\, sn u\, dn u}=\frac{-\varkappa'(\zeta-z)}{\varkappa\nu\, sn u\, cn u},$$

oder:

---

* A. Harnack, Über die Darstellung der Raumkurven vierter Ordnung 1. Spezies durch doppelt periodische Funktionen. Math. Ann. Bd. XII S. 47.

$$14)\quad \begin{cases} \mu\, sn\, u \cdot \xi + \lambda \varkappa' cn\, u \cdot \eta = \lambda \mu \varkappa, \\ \nu \varkappa\, sn\, u\, \xi + \lambda \varkappa' dn\, u \cdot \zeta = \lambda \nu. \end{cases}$$

Die Gleichung der Normalebene in diesem Punkte wird:

$$15)\quad \frac{\lambda \varkappa' \cdot \xi}{sn\, u} - \frac{\mu \cdot \eta}{cn\, u} - \frac{\nu \cdot \varkappa \cdot \zeta}{dn\, u} = 0,$$

d. h. alle Normalebenen der Kurve gehen durch den Kugelmittelpunkt, wie dies auch geometrisch klar, da der Kugelradius eine Normale der Kurve ist.

Die Gleichung der Schmiegungs- oder Osculationsebene wird:

$$16)\quad \mu \nu \varkappa \varkappa' sn^3 u \cdot \xi - \lambda \nu \varkappa\, cn^3 u \cdot \eta + \lambda \mu\, dn^3 u \cdot \zeta = \lambda \mu \nu \varkappa'.$$

Die acht Scheitel des sphärischen Kegelschnittes sind Osculationspunkte der Kurve, die Schmiegungsebenen in denselben sind stationäre Osculationsebenen; diejenigen in den Scheiteln C, C' der kleinen Axe treten auf für $u = 0$ und $2K$, nämlich

$$\frac{\zeta}{\nu \varkappa'} \mp \frac{\varkappa \eta}{\varkappa' \mu} = 1,$$

sie sind senkrecht zur (yz)-Ebene. Diejenigen in den Scheiteln A, A' der grossen Axe werden für $u = K$ und $3K$ erhalten:

$$\pm \frac{\varkappa}{\lambda} \xi + \frac{\varkappa'^2}{\nu} \zeta = 1.$$

Projiziert man den sphärischen Kegelschnitt von einem dieser Scheitel aus auf die Koordinatenebenen, so ist die Bildkurve von der dritten Ordnung. Nimmt man z. B. den vordern Scheitel C der kleinen Axe als Projektionscentrum und die (xy)-Ebene als Bildebene, so sind die Koordinaten des Bildpunktes, welcher dem Punkte vom Parameter u der Raumkurve entspricht:

$$x = \frac{\lambda \varkappa\, sn\, u}{1 - dn\, u}, \quad y = \frac{\mu \varkappa (cn\, u - dn\, u)}{\varkappa' (1 - dn\, u)},$$

womit die Bildkurve eindeutig auf den sphärischen Kegelschnitt bezogen ist. Durch Elimination von u ergiebt sich die Gleichung der Bildkurve:

$$17)\quad \mu \varkappa' (\varkappa y + \mu \varkappa') x^2 + (\varkappa' y - \mu \varkappa) \lambda^2 y = 0.$$

Sie hat die Asymptote $y = -\frac{\mu \varkappa'}{\varkappa}$, ihr unendlich ferner Berührungspunkt ist Wendepunkt. Die Kurve besteht aus einem geschlossenen Blatt, welches die x-Axe im Nullpunkt berührt, und zwei kongruenten unendlichen hyperbolisch-parabolischen Ästen, symmetrisch zur y-Axe mit obiger Asymptote. Die Gleichungen der übrigen Projektionen sind von ähnlicher Form.

Der Radius der ersten Krümmung im Punkte (x, y, z) des sphärischen Kegelschnittes wird aus der Formel erhalten:

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Nun ist:

$$\frac{dx}{du} = \varkappa\lambda\, cn\, u\, dn\, u, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{\varkappa}{\varkappa'}\mu\, sn\, u\, dn\, u, \quad \frac{dz}{du} = -\frac{\varkappa^2\nu}{\varkappa'} sn\, u\, cn\, u,$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -\varkappa\lambda\, dn\, u(2dn^2u - \varkappa'^2), \quad \frac{d^2y}{du^2} = -\frac{\varkappa}{\varkappa'}\mu\, cn\, u(2dn^2u - 1)$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = -\frac{\varkappa^2}{\varkappa'}\nu\, dn\, u(1 - 2sn^2u), \quad \frac{ds}{du} = \varkappa\sqrt{\lambda^2 - sn^2u},$$

$$\frac{d^2s}{du^2} = -\frac{\varkappa\, sn\, u\, cn\, u\, dn\, u}{\sqrt{\lambda^2 - sn^2u}}.$$

Setzt man alle diese Werte ein, und reduziert, so ergiebt sich der **Krümmungsradius** im Punkte u:

$$18)\qquad \varrho = \frac{\varkappa(\lambda^2 - sn^2u)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varkappa^2(\lambda^2 - sn^2u)^3 + \lambda^2\mu^2\nu^2}}.$$

Im Scheitel der kleinen Axe, für $u = 0$, wird

$$\varrho = \frac{\varkappa\lambda^2}{\sqrt{\varkappa^2\lambda^4 + \mu^2\nu^2}} = \frac{\varkappa\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^2c^2}}.$$

Im Scheitel der grossen Axe, für $u = K$, wird der Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{\varkappa\mu^2}{\sqrt{\lambda^2\varkappa'^4 + \varkappa^2\nu^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + a^2c^2}}.$$

Der **Krümmungsmittelpunkt** eines Kurvenpunktes u liegt im Schnittpunkt der Oskulationsebene mit der Durchschnittslinie zweier unendlich benachbarter Normalebenen; diese Schnittlinie steht senkrecht auf der Oskulationsebene, und weil alle Normalebenen durch den Kugelmittelpunkt laufen, so thut es auch diese Schnittlinie. Man findet also den Krümmungsmittelpunkt in einem Punkte des sphärischen Kegelschnittes, indem man vom Kugelmittelpunkt ein Lot auf die zugehörige Oskulationsebene fällt, der Fusspunkt ist der Krümmungsmittelpunkt.

Aus der Gleichung 16) der Oskulationsebene und den Gleichungen des Lotes vom Mittelpunkt aus, ergeben sich die **Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes**:

$$19)\qquad x = \frac{\varkappa\lambda\mu^2\nu^2}{N} sn^3u, \quad y = -\frac{\varkappa\lambda^2\mu\nu^2}{\varkappa' N}\cdot cn^3u, \quad z = \frac{\varkappa\lambda^2\mu^2\nu}{\varkappa' N}\cdot dn^3u,$$

wobei $N = \lambda^2\mu^2\nu^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2u)^3$ ist. Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen den variablen Parameter u, so ergiebt sich die Gleichung eines **Kegels sechsten Grades** mit Scheitel im Kugelmittelpunkt:

$$20)\qquad (\lambda^2\varkappa'^4x^2 + \mu^2y^2 - \varkappa^2\nu^2z^2)^3 + 27\lambda^2\mu^2\nu^2\varkappa^2\varkappa'^2x^2y^2z^2 = 0.$$

Die Erzeugenden dieses Kegels stehen auf den Oskulationsebenen des sphärischen Kegelschnittes senkrecht, d. h. dieser Kegel durchschneidet die developpable Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes überall rechtwinklig, und ihre Schnittlinie ist der **Ort der**

Krümmungsmittelpunkte desselben. Weil die Tangentenfläche, wie wir später sehen werden, von der achten Ordnung ist, so ist die Krümmungsmittelpunktkurve von der Ordnung $8 \cdot 6 = 48$.

Der Kegel hat die zwei Paar Erzeugenden, die in der (xz)- bez. (yz)-Ebene liegen zu Rückkehrkanten und die betreffenden Koordinatenebenen sind die Rückkehrtangentialebenen.

Die zweite Krümmung oder Torsion wird dargestellt durch die Formel
$$\frac{1}{r} = \frac{E}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
dabei ist:
$$E = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = -3\lambda\mu\nu \cdot \varkappa^4 sn\,u \cdot cn\,u \cdot dn\,u,$$
$$X = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du} \cdot \frac{d^2y}{du^2} = -\mu\nu\varkappa^3 sn^3 u,$$
$$Y = \frac{dz}{du} \cdot \frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^2z}{du^2} = \frac{\lambda\nu\varkappa^3}{\varkappa'} cn^3 u,$$
$$Z = \frac{dx}{du} \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \frac{d^2x}{du^2} = -\frac{\lambda\mu\varkappa^2}{\varkappa'} dn^3 u,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \varkappa^4 \{\lambda^2\mu^2\nu^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2 u)^3\}.$$

Also wird die Torsion:
$$\frac{1}{r} = -\frac{3\lambda\mu\nu\, sn\,u\, cn\,u\, dn\,u}{\lambda^2\mu^2\nu^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2 u)^3}.$$

Für $u = 0,\ K,\ 2K,\ 3K$, d.h. in den Scheiteln der beiden Axen des sphärischen Kegelschnittes ist die Torsion Null.

II. Quadratur der sphärischen Ellipse.

Denken wir uns in den Gleichungen 12) des sphärischen Kegelschnittes die Grösse t als einen zwischen K und $K + L$ liegenden veränderlichen Parameter, während die Variable u jedesmal von 0 bis $4K$, bez. von $2L$ bis $2L + 4K$ geht, so entspricht jedem Wert von t ein bestimmter sphärischer Kegelschnitt, oder zwei kongruente sphärische Ellipsen oberhalb und unterhalb der (xy)-Ebene. Wir erhalten also eine Schar sphärischer Kegelschnitte, oder eine doppelte Schar sphärischer Ellipsen, welche alle dieselben Brennpunkte haben, denn ihre Koordinaten
$$x = \pm \varkappa, \quad y = 0, \quad z = \pm \varkappa'$$
sind von t unabhängig, d. h das System der sphärischen Kegelschnitte $t =$ konstant ist konfokal.

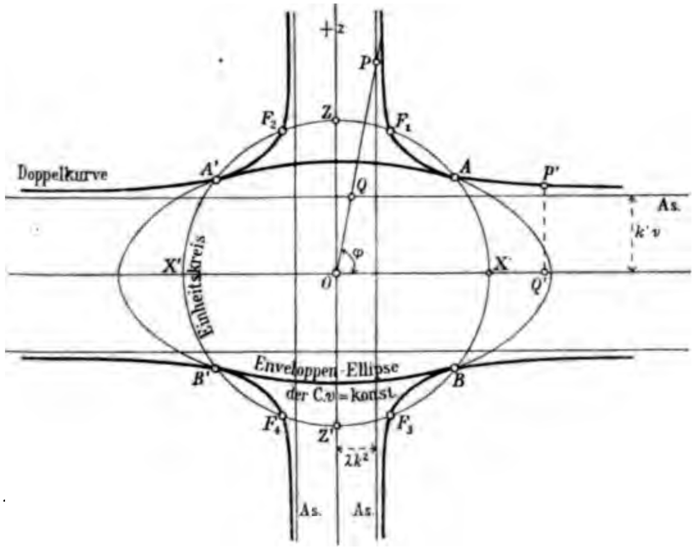
Die oberhalb der (xy)-Ebene liegende Schar sphärischer Ellipsen hat die gemeinschaftlichen Brennpunkte F_1, F_2 und den Mittelpunkt Z die unterhalb liegende Schar die Brennpunkte F_3, F_4 und den Mittelpunkt Z'.

Für die obere Grenze $t = K + L$ reduziert sich der sphärische Kegelschnitt auf den doppelt gelegten Hauptkreis $x^2 + y^2 = 1$ in der (xy)-Ebene, welcher die Doppelschar sphärischer Ellipsen trennt. Für die untere Grenze $t = K$ reduzieren sich die beiden sphärischen Ellipsen auf die beiden Hauptkreisbogen $F_1 F_2$, bez. $F_3 F_4$ zwischen den Brennpunkten in der (xz)-Ebene.

Wir denken uns nun in den Gleichungen 12) des sphärischen Kegelschnittes umgekehrt $u =$ konstant zwischen 0 und K liegend und t als Variable, dann ist, weil

$$\sin\varphi = \varkappa\, sn\, u \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \varkappa\, sn\, t$$

Fig. 2.



Doppelkurve in der (xz)-Ebene.

ist, $\varphi =$ konstant und α variabel. Man erhält die Gleichung des Kegels, welcher diese Kurve auf der Einheitskugel ausschneidet, indem man in der Kegelgleichung 5) α mit φ vertauscht, also:

$$22) \qquad \frac{x^2}{\sin^2\varphi} + \frac{y^2}{\sin^2\varphi - \sin^2\varepsilon} - \frac{z^2}{\cos^2\varphi} = 0.$$

Nun ist $\alpha > \varepsilon$ dagegen $\varphi < \varepsilon$, somit ist $\sin^2\varphi - \sin^2\varepsilon$ negativ. Damit der Nenner des zweiten Gliedes positiv wird, schreiben wir:

$$\frac{y^2}{\sin^2\varepsilon - \sin^2\varphi} + \frac{z^2}{\cos^2\varphi} - \frac{x^2}{\sin^2\varphi} = 0.$$

Dieser Kegel hat also die x-Axe als Kegelaxe und der von ihm ausgeschnittene sphärische Kegelschnitt hat die elliptischen Mittelpunkte X und X' und besteht aus zwei sphärischen Ellipsen, die symmetrisch zur (yz)-Ebene liegen.

Schreibt man die Gleichungen der beiden Kegel 5) und 22) in der Form:
$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'}=0,$$
so ist:
$$A=\sin^2\alpha, \quad B=\sin^2\alpha-\sin^2\varepsilon, \quad C=-\cos^2\alpha,$$
$$A'=\sin^2\varphi, \quad B'=\sin^2\varphi-\sin^2\varepsilon, \quad C'=-\cos^2\varphi,$$
folgt:
$$A-A'=B-B'=C-C'=\sin^2\alpha-\sin^2\varphi,$$
d. h. die beiden Kegel sind **konfokal**; sie haben dieselben Fokallinien
$$x=\pm\operatorname{tang}\varepsilon\cdot z$$
und durchschneiden sich längs ihrer vier gemeinschaftlichen Erzeugenden **rechtwinklig**.

Die beiden zugehörigen sphärischen Kegelschnitte $t=$ konst. und $u=$ konst. sind also ebenfalls **konfokal** und durchschneiden sich **rechtwinklig**.

Nimmt der Parameter u der Reihe nach alle Werte an von 0 bis K, während die Variable t jedesmal alle Werte von K bis $K+L$ und von $3K$ bis $3K+L$ durchläuft, so erhält man eine zweite Schar konfokaler sphärischer Kegelschnitte, oder eine Doppelschar von sphärischen Ellipsen, die zu verschiedenen Seiten der (yz)-Ebene liegen. Die rechts dieser Ebene liegende Schar hat die gemeinschaftlichen Brennpunkte F_1, F_3 und Mittelpunkt X, die links liegende Schar die Brennpunkte F_2, F_4 und Mittelpunkt X'. Für $u=0$ erhält man den Hauptkreis in der (yz)-Ebene, für die obere Grenze $u=K$, die in der (xz)-Ebene liegenden Hauptbogen F_1F_3, bez. F_2F_4 zwischen den Brennpunkten.

Wir finden also:

Es stellen die Gleichungen 12:
$$x=\varkappa\, sn t\, sn u, \quad y=\frac{i\varkappa}{\varkappa'}\, cn t\, cn u, \quad z=\frac{1}{\varkappa'}\, dn t\, dn u,$$

1. wenn $t=$ konstant, zwischen K und $K+L$ liegt und u variabel, ein System konfokaler sphärischer Ellipsen dar, die paarweise symmetrisch zur (xy)-Ebene liegen; Brennpunkte F_1, F_2 bez. F_3, F_4;
2. wenn $u=$ konstant, zwischen 0 und K liegt und t variabel, ein System konfokaler sphärischer Ellipsen dar, die paarweise symmetrisch zur (yz)-Ebene liegen, Brennpunkte F_1, F_3 bez. F_2, F_4.

Beide Systeme sind zu einander konfokal und durchschneiden sich überall rechtwinklig, sie teilen daher die Kugeloberfläche in unendlich kleine Rechtecke ein und diese Einteilung benützen wir, um den

Flächeninhalt der sphärischen Ellipse zu finden, d. h. die Fläche des kleineren Kugelsegmentes, welches die Ellipse auf der Kugel abgrenzt.

Beide Systeme konfokaler Kegelschnitte werden auch erhalten, wenn t veränderlicher Parameter zwischen 0 und $K+L$ und u die unabhängige Variable ist, und zwar das eine System für $0 < t < K$, das andere für komplexe Werte $K < t < K+L$.

Es seien nun e und e' zwei unendlich benachbarte sphärische Ellipsen des ersten Systems, den Parameterwerten $t =$ konst. und $t + dt =$ konst. entsprechend, ebenso seien f und f' zwei sphärische Ellipsen des zweiten Systems, den Parameterwerten $u =$ konst. und $u + du =$ konst. entsprechend. Diese vier Kurven bestimmen ein unendlich kleines Rechteck $PQRS$ (Fig. 1) auf der Kugel, von den Seiten $PQ = ds$ auf e und $PR = ds'$ auf f. Das **Flächenelement** auf der Kugel ist dann

$$dF = ds \cdot ds'.$$

Nun ist:

$$23)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{du} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{du}\right)^2} \\ \quad = \sqrt{\varkappa^2 sn^2 t\, cn^2 u\, dn^2 u - \dfrac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} cn^2 t\, sn^2 u\, dn^2 u + \dfrac{\varkappa^4}{\varkappa'^2} dn^2 t\, sn^2 u\, cn^2 u} \\ ds = \varkappa \sqrt{sn^2 t - sn^2 u} \cdot du. \end{cases}$$

Das Bogenelement ds' auf f wird aus ds erhalten, wenn Parameter t und Variable u mit einander vertauscht werden, also:

$$ds' = \varkappa \sqrt{sn^2 u - sn^2 t} \cdot dt = i\varkappa \sqrt{sn^2 t - sn^2 u} \cdot dt.$$

Das Flächenelement auf der Kugel wird also:

$$dF = i\varkappa^2 (sn^2 t - sn^2 u) du\, dt = i(dn^2 u - dn^2 t)\, du \cdot dt.$$

Der Parameter t der sphärischen Ellipse e liegt nun, wie früher gesehen, zwischen K und $K+L$, wir können daher setzen:

$$t = K + vi, \quad dt = i dv, \text{ wo } o < v < K'.$$

Dann wird, wenn das positive Zeichen gewählt wird:

$$dF = (dn^2 u - dn^2 t) du\, dv = dn^2 u \cdot du \cdot dv - dn^2 t \cdot d\,u \cdot \frac{dt}{i},$$

$$dF = dn^2 u\, du \cdot dv + i\, dn^2 t\, du\, dt.$$

Für $t = K$, also $v = o$, und u variabel, ergiebt sich der in der (xz)-Ebene liegende Hauptkreis; für $u = o$ und t und v variabel, der in der (yz)-Ebene liegende Hauptkreis. Integriert man daher obigen Ausdruck nach t von K bis t, nach v von 0 bis v und nach u von 0 bis u, so erhält man den Flächeninhalt des **krummlinigen Rechtecks** $ZCPA_1$ (Fig. 1), begrenzt von den Hauptkreisbogen ZC und ZA_1 und von den Bogen PC und PA_1 der sphärischen Ellipsen e und f. Der Flächeninhalt dieses Rechtecks wird:

$$F = \int_0^u dn^2 u\, du \int_0^v dv + i \int_K^t dn^2 t\, dt \int_0^u du$$
$$= v\, E am\, u + i u\, E am\, t - i u E$$
$$= v Z(u) + i u Z(t) + \frac{E}{K} u v + i u \frac{E}{K} t - i u E,$$

bei Anwendung der Jacobischen Zeichen, und wenn K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art bedeuten. Ersetzt man im vorletzten Glied t durch $K + vi$, so fallen die drei letzten Glieder weg und es bleibt:

24) Rechteck $ZCPA_1 = F = vZ(u) + i u Z(t)$.

Dabei sind $t = K + vi$ und u die Parameter der Begrenzungsellipsen e und f. Wird $u = K$, so fällt die sphärische Ellipse f mit dem in der (xz)-Ebene liegenden Hauptkreis zusammen, A_1 fällt in den Scheitel A von e und das betrachtete Kugelrechteck wird zu dem von der sphärischen Ellipse e abgegrenzten Segmentquadranten ZAC. Der Inhalt desselben ergiebt sich aus Gleichung 24) für

$$u = K \quad \text{zu} \quad q = iKZ(t),$$

somit der Flächeninhalt der ganzen sphärischen Ellipse e:

25) $$J = 4 i K Z(t),$$

wo t aus der Gleichung $sn\, t = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ bestimmt ist.

Für $t = K + L$ fällt die sphärische Ellipse mit dem Hauptkreis in der (xy)-Ebene zusammen, ihr Inhalt J wird gleich der halben Einheitskugel, gleich 2π und die Gleichung 25) wird:

$$4 i K Z(K + L) = 2\pi,$$

somit

$$Z(K + L) = Z(K + iK') = -\frac{i\pi}{2K},$$

wie bekannt.

III. Rektifikation der sphärischen Ellipse.

Setzt man im Bogendifferential der sphärischen Ellipse:

$$ds = \varkappa \sqrt{sn^2 t - sn^2 u} \cdot du,$$

$$sn^2 u = z, \quad du = \frac{dz}{2\, sn\, u\, cn\, u\, dn\, u} = \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}},$$

so wird:

$$ds = \frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{sn^2 t - z}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(sn^2 t - z)}} \cdot dz.$$

Also die Länge des vom Scheitel C der kleinen Axe aus gezählten Bogens:

26) $$s = \frac{\varkappa}{2} \int_0^z \frac{(sn^2 t - z)\, dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(sn^2 t - z)}}.$$

Die Berechnung dieses elliptischen Integrals ist aber weitläufig, wir schlagen daher einen anderen Weg ein.

Die Gleichung des Kegels, welcher auf der konzentrischen Einheitskugel die sphärische Ellipse e ausschneidet, ist:

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

wo $a > b$. Im Mittelpunkt errichten wir auf jeder Tangentialebene desselben eine Normale, alle diese Normalen bilden einen zweiten konzentrischen Kegel zweiten Grades, welcher der Polarkegel des gegebenen heisst. Dieser schneidet die Einheitskugel in einer zweiten sphärischen Ellipse p, welche die Polarellipse der gegebenen, e, heisst.

Es sei (x', y', z') der Schnittpunkt der Normalen mit der Einheitskugel, also ein Punkt der Polarellipse p, dann sind die Richtungskosinusse der Normalen

$$\cos\alpha = x', \quad \cos\beta = y', \quad \cos\gamma = z',$$

proportional zu

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z}{c^2},$$

also, wenn m einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

27) $$x' = \frac{mx}{a^2}, \quad y' = \frac{my}{b^2}, \quad z' = -\frac{mz}{c^2},$$

somit

28) $$x = \frac{a^2x'}{m}, \quad y = \frac{b^2y'}{m}, \quad z = -\frac{c^2z'}{m}.$$

Ist der Punkt x, y, z auf dem gegebenen Kegel zugleich ein Punkt der ersten Ellipse e, so gilt für ihn die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

setzt man die Werte 28) hier ein, so ergiebt sich der Proportionalitätsfaktor:

29) $$m = \sqrt{a^4x'^2 + b^4y'^2 + c^4z'^2}.$$

Die Gleichungen 27) verbinden nun zwei entsprechende Punkte x, y, z und x', y', z' der beiden sphärischen Ellipsen e und p.

Setzt man die Werte 28) in der Gleichung des gegebenen Kegels ein, so ergiebt sich die Gleichung des Polarkegels:

$$a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^2z'^2 = 0,$$

oder:

30) $$\frac{y'^2}{\left(\frac{1}{b^2}\right)} + \frac{x'^2}{\left(\frac{1}{a^2}\right)} - \frac{z'^2}{\left(\frac{1}{c^2}\right)} = 0.$$

Die Halbaxen dieses Kegels sind

$$A = \frac{1}{b}, \quad B = \frac{1}{a}, \quad C = \frac{1}{c},$$

weil $a > b$, so ist $A > B$, d. h. die zur (xy)-Ebene parallelen Schnittellipsen des Polarkegels haben ihre grosse Axe parallel zur y-Axe.

Wir führen nun analog wie früher in den Gleichungen 11a) elliptische Funktionen ein und setzen:

$$\text{Modul } k = \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2 + C^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

Dieser ist von dem früheren Modul, $\varkappa = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}$, verschieden.

$$31) \quad \begin{cases} sn^2\tau = \dfrac{A^2}{A^2 - B^2} = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2}, \quad cn^2\tau = \dfrac{-b^2}{a^2 - b^2}, \\ dn^2\tau = \dfrac{b^2}{b^2 + c^2}. \end{cases}$$

Der Parameter τ ist komplex und liegt zwischen K und $K + L$, wie der frühere Parameter t, nur haben K und L hier andere Werte.

Die Gleichungen der Polarellipse p sind nun auf dieselbe Weise gebildet, wie die Gleichung 12) der Ellipse e, nur dass jetzt y' an die Stelle von x und x' an die Stelle des früheren y tritt, also:

$$32) \quad y' = k\, sn\,\tau\, sn\, w, \quad x' = i\frac{k}{k'}\, cn\,\tau\, cn\, w, \quad z' = \frac{1}{k'}\, dn\,\tau\, dn\, w,$$

wo k' der komplementäre Modul und w die Variable bedeutet.

Aus den Gleichungen 31) bilden wir den Ausdruck:

$$\frac{c^2}{a^2 - b^2} = k^2 \cdot \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} = k^2 \frac{sn^2\tau\, cn^2\tau}{dn^2\tau},$$

und aus diesem und den zwei ersten Gleichungen 31) folgt die Proportion:

$$a^2 : b^2 : c^2 = sn^2\tau : -cn^2\tau : \frac{k^2 sn^2\tau\, cn^2\tau}{dn^2\tau}.$$

Bedeutet l einen Proportionalitätsfaktor, so ist:

$$a^2 = l\, sn^2\tau, \quad b^2 = -l\, cn^2\tau, \quad c^2 = \frac{l k^2 sn^2\tau\, cn^2\tau}{dn^2\tau}.$$

Setzt man im Proportionalitätsfaktor m, Gleichung 29), diese Werte und für x', y', z' die Werte 32) ein, so ergiebt sich:

$$m = \sqrt{\frac{l^2 k^2}{k'^2} \cdot \frac{sn^2\tau\, cn^2\tau}{dn^2\tau} \cdot \{- sn^2\tau\, dn^2\tau\, cn^2 w + k'^2 cn^2\tau\, dn^2\tau\, sn^2 w + k^2 sn^2\tau\, cn^2\tau\, dn^2}$$

$$m = \frac{l i k\, sn\,\tau\, cn\,\tau}{dn\,\tau}\sqrt{\frac{1}{k'^2}\{sn^2\tau\, dn^2\tau\, cn^2 w - k'^2 cn\,\tau\, dn^2\tau\, sn^2 w - k^2 sn^2\tau\, cn^2\tau\, dn^2 w\}}$$

$$m = l \cdot \frac{i k\, sn\,\tau\, cn\,\tau}{dn\,\tau}\sqrt{sn^2\tau - sn^2 w} = i l \frac{k\, sn\,\tau\, cn\,\tau}{dn\,\tau} \cdot T,$$

wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{sn^2\tau - sn^2 w} = T$$

gesetzt wird.

Setzt man nun diesen Wert für m, die gefundenen Werte für a^2, b^2, c^2 und die Werte 32) für x', y', z' in den Gleichungen 28) ein, so erhält man die Koordinaten x, y, z des Punktes der gegebenen sphärischen Ellipse e, welcher dem Punkt x', y', z', Gleichung 32), der Polarellipse p entspricht:

$$33)\quad x = \frac{sn\,\tau\, dn\,\tau\, cn\,w}{k'\,T}, \quad y = \frac{i\,cn\,\tau\, dn\,\tau\, sn\,w}{T}, \quad z = \frac{k\,i\,cn\,\tau\, sn\,\tau\, dn\,w}{k'\,T}.$$

Bei variablem w sind dies die Gleichungen der gegebenen sphärischen Ellipse e, sie sind nicht so einfach, wie die früheren Gleichungen 12), dagegen sind sie bequemer zur Rektifikation der Kurve.

Für $w = 0$ und $2K$ wird

$$x = \pm\frac{dn\,\tau}{k'}, \quad y = 0, \quad z = \frac{ki}{k'}cn\,\tau,$$

es sind dies die Scheitel A und A' der grossen Axe, welche den Scheiteln der kleinen Axe der Polarellipse entsprechen.

Für $w = K$ und $3K$ wird

$$x = 0, \quad z = \pm\, dn\,\tau, \quad z = k\,sn\,\tau,$$

welches die Scheitel C und C' der kleinen Axe sind.

Die Variable geht also mit dem Nullwert vom Scheitel A der grossen Axe aus, während sie in der ersten Darstellung 11) vom Scheitel C der kleinen Axe ausging.

Aus den Gleichungen 33) folgt:

$$\frac{dx}{dw} = \frac{sn\,\tau\, cn^2\tau\, dn\,\tau\, sn\,w\, dn\,w}{k'\,T^3}, \quad \frac{dy}{dw} = \frac{i\,sn^2\tau\, cn\,\tau\, dn\,\tau\, cn\,w\, dn\,w}{T^3},$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{i\,k\,sn\,\tau\, cn\,\tau\, dn^2\tau\, sn\,u\, cn\,u}{l\,T^3}.$$

Das Bogendifferential der gegebenen sphärischen Ellipse wird:

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= \frac{sn^2\tau\, cn^2\tau\, dn^2\tau}{T^6} \\ &\left\{\frac{1}{k'^2}cn^2\tau\, sn^2 w\, dn^2 w - sn^2\tau\, cn^2 w\, dn^2 w - \frac{k^2}{k'^2}dn^2\tau\, sn^2 w\, cn^2 w\right\} dw^2 \\ &= \frac{sn^2\tau\, cn^2\tau\, dn^2\tau}{T^6}(sn^2 w - sn^2\tau)\,dw^2 = \frac{-sn^2\tau\, cn^2\tau\, dn^2\tau}{T^4}\,dw^2, \end{aligned}\right.$$

also

$$ds = \frac{i\,sn\,\tau\, cn\,\tau\, dn\,\tau}{sn^2\tau - sn^2 w}\,dw.$$

Der vom Scheitel A der grossen Axe aus gerechnete Bogen der sphärischen Ellipse wird nun:

$$s = i\int_0^w \frac{sn\,\tau\, cn\,\tau\, dn\,\tau}{sn^2\tau - sn^2 w}\,dw = \frac{i}{2}\int_0^w \frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{Log}(sn^2\tau - sn^2 w)\,dw.$$

Nun ist bei Gebrauch von Jacobischen Zeichen:

$$sn^2\tau - sn^2 w = \frac{H(\tau+w)\,H(\tau-w)}{\Theta^2(\tau)\,\Theta^2(w)}\cdot\frac{\Theta^2(o)}{k}$$

$$\operatorname{Log}(sn^2\tau - sn^2 w) = \operatorname{Log}H(\tau+w) + \operatorname{Log}H(\tau-w) - 2\operatorname{Log}\Theta(\tau) + \operatorname{Log}\frac{\Theta^2(o)}{k\,\Theta^2(w)}.$$

Partiell nach τ differenziert und mit 2 dividiert:

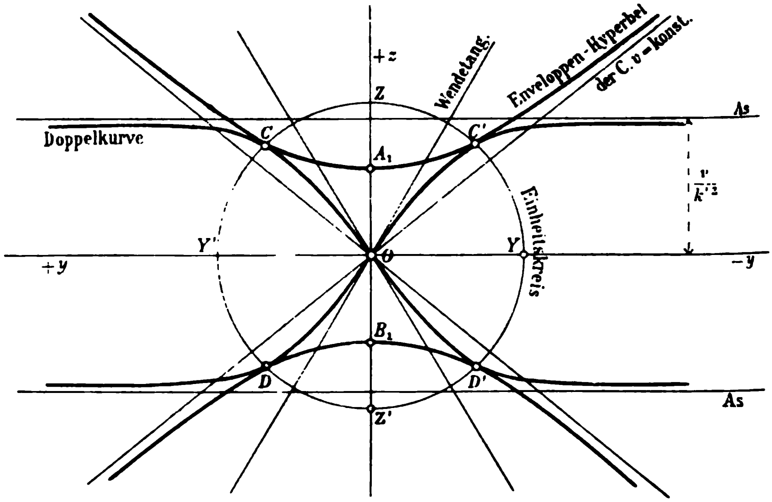
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{Log}(sn^2\tau - sn^2 w) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{Log} H(\tau+w) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{Log} H(\tau-w)$$
$$- \frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{Log}\Theta(\tau)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}\operatorname{Log} H(\tau+w) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}\operatorname{Log} H(\tau-w)$$
$$- Z(\tau)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}\operatorname{Log}\frac{H(\tau+w)}{H(\tau-w)} - Z(\tau),$$

somit

$$s = i\int_0^w \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}\operatorname{Log}\frac{H(\tau+w)}{H(\tau-w)} - Z(\tau)\right\} dw,$$

34) $$s = \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{H(\tau+w)}{H(\tau-w)} - i w Z(\tau).$$

Fig. 8.



Doppelkurve in der (yz)-Ebene.

Man erhält den ersten Quadranten der sphärischen Ellipse f $w = K$, also

$$q = \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{H(\tau+K)}{H(\tau-K)} - iKZ(\tau).$$

Nun liegt aber der Parameter τ zwischen K und $K+L$, so da $\tau = K + iv$, dann wird:

$$q = \frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{H(2K+iv)}{H(iv)} - iKZ(\tau).$$

Weil aber $H(2K + vi) = -H(vi)$, so wird

$$\operatorname{Log}\frac{H(2K+iv)}{H(iv)} = \operatorname{Log}(-1) = -i\pi,$$

also

$$q = \frac{\pi}{2} - iKZ(\tau).$$

Die ganze Länge der sphärischen Ellipse e wird

35) $$U = 2\pi - 4iKZ(\tau).*$$

Nun bedeutet aber $4iKZ(\tau)$ nach Gleichung 25) den Inhalt der Polarellipse p, bezeichnen wir diesen mit J', so wird obige Gleichung:

$$U + J' = 2\pi = \text{Oberfläche der Halbkugel.}$$

Es ist dies der bekannte Satz, dass der Umfang einer geschlossenen Figur auf der Kugel und der Inhalt der Polarfigur und umgekehrt, sich zu 2π ergänzen. Dabei ist der Parameter τ aus der Gleichung

$$sn\,\tau = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

bestimmt und der Modul

$$k = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

IV. Die developpable Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes.

Die sämtlichen Tangenten eines sphärischen Kegelschnittes bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine abwickelbare Fläche, welche symmetrisch ist zu jeder der drei Koordinatenebenen. Die Erzeugenden der Fläche durchschneiden sich daher paarweise in den Koordinatenebenen und die Fläche besitzt in diesen drei Ebenen, sowie in der unendlich fernen Ebene je eine ebene Doppelkurve vierter Ordnung.

Bedeuten u und v zwei veränderliche Parameter, so lässt sich die abwickelbare Tangentenfläche darstellen durch die drei Gleichungen:

36) $$x = \frac{\lambda\varkappa\, sn^2 v}{sn\, u}, \quad y = \frac{\mu\varkappa\, cn^2 v}{\varkappa' cn\, u}, \quad z = \frac{\nu\, dn^2 v}{\varkappa' dn\, u},$$

wo λ, μ, ν, $\varkappa$, $\varkappa'$ die frühere Bedeutung haben, nämlich:

$$\lambda = sn\,t = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \mu = i\,cn\,t = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \nu = dn\,t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, \quad \varkappa' = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}},$$

wobei a, b, c die Halbaxen des Kegels sind, der den betrachteten sphärischen Kegelschnitt aus der konzentrischen Einheitskugel ausschneidet.

---

* Tortolini hat den Bogen und den Quadranten der sphärischen Ellipse durch ein Legendresches Integral dritter Art dargestellt. Vergl. Tortolini, Sopra la Rettificazione dell'ellissi sferica etc. Roma 1846.

Eliminiert man nämlich aus je zwei der Gleichungen 36) den Parameter v, so erhält man die Gleichungen 14) der Tangente des sphärischen Kegelschnittes im Punkte x, y, z, vom Parameter u.

Hieraus folgt:

Die Parameterkurven $u =$ konstant sind die Erzeugenden der developpabeln Tangentenfläche.

Der Parameter u durchläuft, wie beim sphärischen Kegelschnitt, einerseits die reellen Werte von 0 bis $4K$, anderseits alle komplexen Werte von $2L$ bis $2L + 4K$.

Eliminiert man aus den Tangentengleichungen 14) auch den Parameter u, was ohne grosse Schwierigkeiten möglich ist, so ergiebt sich die Gleichung der Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes in rechtwinkligen Koordinaten:

$$37)\ \begin{cases} [\mu^2 x^2 z^2 + \varkappa'^4 \lambda^2 y^2 z^2 - \varkappa^2 \nu^2 x^2 y^2 - \mu^2 \nu^2 (1 + \varkappa^2) x^2 - \lambda^2 \nu^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 \varkappa^4 z^2]^2 \\ \qquad = 4 \varkappa^2 x^2 (\nu^2 y^2 - \mu^2 z^2 - \mu^2 \nu^2)(\mu^2 \nu^2 x^2 + \lambda^2 \nu^2 y^2 - \varkappa^2 \lambda^2 \mu^2 z^2). \end{cases}$$

Die Fläche ist vom achten Grade, der Nullpunkt und die unendlich fernen Punkte der drei Koordinatenaxen sind vierfache Punkte der Fläche, die wir später noch betrachten werden.

Wir untersuchen nun die Parameterkurven $v =$ konstant auf der Fläche. In den Gleichungen 36) nehmen $sn^2 v$, $cn^2 v$ und $dn^2 v$ alle möglichen reellen Werte an zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wenn der Parameter v die Seiten eines Rechtecks durchläuft, von den Ecken 0, K, $K + L$ und L. Jedem Werte von v auf einer Seite dieses Rechtecks entspricht eine bestimmte Kurve auf der Fläche, diese Kurve ist von der achten Ordnung und besteht aus acht gleichen, getrennten, unendlichen Zweigen, die symmetrisch zu den drei Koordinatenebenen in den acht Oktanten liegen. Die Projektion dieser Parameterkurve auf jeder der Koordinatenebenen wird daher eine ebene Kurve vierter Ordnung.

Den Ecken jenes Rechtecks, $v = 0$, K, $K + L$ und L entsprechen bez. die in der (yz), (xz), (xy) und in der unendlich fernen Ebene liegenden Doppelkurven der Fläche.

Für $v = u$ gehen die Gleichungen 36) der Tangentenfläche in die Gleichungen 13) des sphärischen Kegelschnittes über. Da nun u von 0 bis $4K$ und von $2L$ bis $2L + 4K$ läuft, so kann v nur zwischen 0 und K gleich u werden, d.h. alle Parameterkurven $v =$ konst. berühren den sphärischen Kegelschnitt, wenn v zwischen 0 und K liegt, also thun dies auch die Doppelkurven $v = 0$ in der (yz)-Ebene und $v = K$ in der (xz)-Ebene. Die erstere berührt den sphärischen Kegelschnitt in den Scheiteln der kleinen, die andere in den Scheiteln der grossen Axen.

Eliminiert man unter der Annahme $v =$ konst., aus je zwei der Gleichungen 36) die Variable u, so erhält man die Gleichung der Orthogonalprojektion dieser Parameterkurve auf eine der Koordinatenebenen. Wir wollen diese drei Projektionen der Reihe nach betrachten.

1. Projektion auf die (xy)-Ebene.

Gleichungen:
$$x = \frac{\lambda \varkappa sn^2 v}{sn\, u}, \quad y = \frac{\mu \varkappa cn^2 v}{\varkappa' cn\, u},$$
oder:

38) $$\varkappa'^2 x^2 y^2 - \mu^2 \varkappa^2 cn^4 v \cdot x^2 - \lambda^2 \varkappa^2 \varkappa'^2 sn^4 v \cdot y^2 = 0.$$

Diese Kurve vierter Ordnung hat den Nullpunkt und die unendlich fernen Punkte der x und der y-Axe zu doppelten Inflexionsknoten und zwar ist der erstere ein konjugierter Punkt; die Kurve ist somit rational. Sie besitzt je zwei zu den Koordinatenaxen parallele Asymptoten:
$$x = \pm \varkappa \lambda sn^2 v \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{\mu \varkappa}{\varkappa'} cn^2 v,$$

Diese sind die Inflexionstangenten in den unendlich fernen Inflexionsknoten. Die Kurve besteht aus vier kongruenten hyperbolischen Ästen in den vier äusseren Winkelräumen dieser vier Asymptoten.

Die Kurve entsteht durch Inversion vermittelst der quadratischen Transformation $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{1}{\eta}$ aus der Ellipse:
$$\lambda^2 \varkappa^2 sn^4 v\, \xi^2 + \frac{\mu^2 \varkappa^2}{\varkappa'^2} cn^4 v \cdot \eta^2 = 1.$$

Den vier Scheiteln der Ellipse entsprechen die unendlich fernen Punkte und jedem Ellipsenquadranten entspricht ein hyperbolischer Ast der Parameterkurve, sie liegt ganz ausserhalb der Ellipse.

Weil $sn\, u$ und $cn\, u$ innerhalb des für u giltigen Intervalls beständig < 1 bleiben, so kann man trigonometrische Funktionen einführen,
$$sn\, u = \sin \varphi, \quad cn\, u = \varphi,$$
dann werden die Gleichungen der projizierten Parameterkurve $v =$ konst.:
$$x = \frac{\lambda \varkappa sn^2 v}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{\mu \varkappa cn^2 v}{\varkappa' \cos \varphi}.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich die Kurve einfach konstruieren. Man zieht die beiden Asymptoten
$$x = \lambda \varkappa sn^2 v \quad \text{und} \quad y = \frac{\mu \varkappa}{\varkappa'} cn^2 v,$$
legt durch den Nullpunkt O einen Strahl unter dem Winkel φ, welcher die beiden Asymptoten bez. in den Punkten P und Q schneidet, dann sind $OP = x$ und $OQ = y$ die Koordinaten von vier symmetrisch zu den Axen liegenden Kurvenpunkten.

Wir erteilen dem Parameter v einige spezielle Werte:

α) Für $v = 0$ reduziert sich die Kurve auf $x^2 = 0$, die doppelt gelegte y-Axe und $y = \pm \frac{\mu \varkappa}{\varkappa'}$, es sind das die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnitts.

β) Für $v = K$ reduziert sich die Kurve auf $y^2 = 0$, die doppelt gelegte x-Axe und $x = \pm \lambda \varkappa$, es sind dies die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der grossen Axen.

γ) Für $v = K + L$ erhält man die in der (xy)-Ebene liegende Doppelkurve der Tangentenfläche:

39)
$$\varkappa^2 x^2 y^2 = \mu^2 \varkappa'^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

Asymptoten $x = \pm \frac{\lambda}{\varkappa}$, $y = \pm \frac{\mu \varkappa}{\varkappa'}$, ihre Gleichungen in trigonometrischer Form sind:

$$x = \frac{\lambda}{\varkappa \sin \varphi}, \quad y = \frac{\mu \varkappa'}{\varkappa \cos \varphi}.$$

Die Doppelkurve besteht, wie die allgemeine Kurve dieser Schar, aus vier kongruenten hyperbolischen Ästen.

δ) Für $v = L$ fällt die Parameterkurve auf der Fläche und auch ihre Projektion auf die (xy)-Ebene samt den Asymptoten ganz ins Unendliche.

Bei veränderlichem Parameter v stellt die Gleichung 38) unendlich viele auf die (xy)-Ebene projizierte Parameterkurven dar, alle besitzen dieselben drei doppelten Inflexionsknoten, nämlich die unendlich fernen Punkte der x- und y-Axe und den Nullpunkt als konjugierten Punkt. Alle Kurven dieser Schar, für welche $0 < v \leqq K$, umhüllen die Ellipse $\mu^2 x^2 + \lambda^2 \varkappa'^2 y^2 = a^2 b^2 \varkappa^2$, welche die Projektion des sphärischen Kegelschnitts auf die (xy)-Ebene ist, d. h. die Projektion der Rückkehrkante der Tangentenfläche, denn für diese Werte von v berühren die Parameterkurven selbst die Rückkehrkante. Die Doppelkurve berührt jene Ellipse nicht.

2. Projektion auf die (xz)-Ebene.

Gleichungen:
$$x = \frac{\lambda \varkappa \, sn^2 v}{sn\, u}, \quad z = \frac{v \, dn^2 v}{\varkappa' dn\, u},$$
oder:

40)
$$\varkappa'^2 x^2 z^2 = \lambda^2 \varkappa^4 \varkappa'^2 sn^4 v \cdot z^2 + v^2 dn^4 v \cdot x^2.$$

Die unendlich fernen Punkte x und z Axe und der Nullpunkt sind doppelte Inflexionsknoten, der letztere ist konjugierter Punkt. Die Inflexionstangenten in den ersteren sind die vier Asymptoten

$$z = \pm \frac{v}{\varkappa'} dn^2 v, \quad x = \pm \lambda \varkappa \, sn^2 v.$$

Die Kurve ist rational und besteht wie die vorhergehende aus vier kongruenten, unendlichen hyperbolischen Ästen in den äusseren Winkelräumen der vier Asymptoten.

Schreibt man die Kurvengleichung in der Form:

$$x^2(\varkappa'^2 z^2 - v^2 dn^4 v) = \lambda^2 \varkappa^4 \varkappa'^2 sn^4 v \cdot z^2$$

und setzt

$$\varkappa'^2 z^2 - \nu^2 dn^4 v = \nu^2 dn^4 v \operatorname{cotg}^2 \varphi,$$

so erhält man die Kurvengleichungen in trigonometrischer Form:

$$z = \frac{\nu\, dn^2 v}{\varkappa' \sin \varphi}, \quad x = \frac{\lambda\, \varkappa^2 sn^2 v}{\cos \varphi},$$

aus welchen sich die Kurve vermittelst ihrer Asymptoten auf analoge Weise konstruieren lässt, wie die vorhergehende in der (xy)-Ebene. Sie entsteht durch Inversion aus der Ellipse

$$\lambda^2 \varkappa^4 sn^4 v \cdot \xi^2 + \frac{\nu^2}{\varkappa'^2} dn^4 v \cdot \zeta^2 = 1.$$

Für $v = 0$ reduziert sich die Kurve auf $x^2 = 0$, die doppelte z-Axe und $z = \frac{\pm \nu}{\varkappa'}$, die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnitts.

Für $v = K$ erscheint die in der (xz)-Ebene liegende Doppelkurve:

41) $$x^2 z^2 = \lambda^2 \varkappa^4 z^2 + \nu^2 \varkappa'^2 x^2.$$

Asymptoten $x = \pm \lambda \varkappa^2$, $z = \pm \nu \varkappa'$. Die Kurve hat dieselben drei doppelten Inflexionsknoten und besteht aus vier kongruenten, hyperbolischen Ästen, wie die allgemeine Kurve. Sie geht durch die vier in der (xz)-Ebene liegenden Scheitel

$$A,\ A',\ B,\ B' \ (x = \pm \lambda \varkappa,\ z = \pm \nu)$$

der grossen Axen des sphärischen Kegelschnitts, welche auf dem Einheitskreis in der (xz)-Ebene liegen (Fig. 2).

Für die Koordinaten $x = \pm \varkappa$, $z = \pm \varkappa'$ der vier Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts ist die Gleichung 41) erfüllt, unabhängig von λ und ν, d. h. die in der (xz)-Ebene liegenden Doppelkurven aller abwickelbaren Tangentenflächen, deren erzeugende sphärische Kegelschnitte (Rückkehrkanten) mit dem gegebenen konfokal sind, gehen alle durch die vier gemeinschaftlichen Brennpunkte.

Nur diejenigen Punkte der Doppelkurve, welche ausserhalb des Einheitskreises auf den Kurvenzweigen liegen, die sich längs der Asymptoten $z = \pm \varkappa' \nu$ ins Unendliche erstrecken, sind reelle Schnittpunkte der Erzeugenden der Tangentenfläche mit der (xz)-Ebene.

Durchläuft der Parameter v die Seiten des angegebenen Rechtecks, so stellt die Gleichung 40) unendlich viele auf die (xz)-Ebene projizierte Parameterkurven dar, welche alle die unendlich fernen Punkte der x- und z-Axe und den Nullpunkt zu gemeinschaftlichen doppelten Inflexionsknoten haben. Alle diese Kurven umhüllen die Ellipse

$$\frac{\varkappa^2}{\lambda^2} x^2 + \frac{\varkappa'^2}{\nu^2} z^2 = 1,$$

welche die Projektion des sphärischen Kegelschnittes auf die (xz)-Ebene ist. Die Berührungspunkte sind aber nur für die Kurven reell, für welche v zwischen 0 und K oder zwischen K und $K + L$ liegt. Das erste Intervall entspricht den Berührungspunkten auf den Ellipsenbogen AA' bez. BB', welche die eigentliche Projektion des sphärischen Kegelschnittes sind, das zweite Intervall den beiden übrigen Bogen. Die Doppelkurve, welche in den Scheiteln A, A', B, B' der grossen Axen berührt, bildet die Grenze.

Für $v = K + L$ reduziert sich die Projektion auf die Geraden

$$z^2 = 0 \quad \text{und} \quad x = \pm \lambda.$$

Für $v = L$ fällt sie ganz ins Unendliche.

3. Projektion auf die (yz)-Ebene.

Gleichungen:

$$y = \frac{\mu\varkappa\, cn^2 v}{\varkappa' cn\, u}, \quad z = \frac{\nu\, dn^2 v}{\varkappa' dn\, u},$$

oder:

42) $$\varkappa'^4 y^2 z^2 = \nu^2 dn^4 v \cdot y^2 - \mu^2 \varkappa^4 cn^4 v \cdot z^2.$$

Der Nullpunkt ist doppelter Inflexionsknoten mit den Tangenten

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{\nu\, dn^2 v}{\mu\varkappa^2 cn^2 v},$$

ebenso sind die unendlich fernen Punkte der z- und y-Axe doppelte Inflexionsknoten, der erste konjugierter Punkt, der zweite mit den Asymptoten

$$z = \pm \frac{\nu}{\varkappa'^2} dn^2 v.$$

Die Kurve besteht aus zwei zwischen diesen Asymptoten liegenden kongruenten unendlichen Zweigen, die sich im Nullpunkt durchschneiden.

Die Kurve entsteht durch Inversion aus der Hyperbel

$$\frac{\nu^2 dn^4 v}{\varkappa'^4} z^2 - \frac{\varkappa^4 \mu^2}{\varkappa'^4} cn^4 v \cdot y^2 = 1,$$

der eine Hyperbelast entspricht dem einen, der andere dem andern Kurvenzweig. Die Asymptoten der Hyperbel sind

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{\nu\, dn^2 v}{\varkappa^2 \mu\, cn^2 v},$$

sie fallen mit den Inflexionstangenten im Nullpunkt der Parameterkurve zusammen.

Die Gleichung 42) lässt sich schreiben:

$$y^2(\varkappa'^4 z^2 - \nu^2 dn^4 v) = -\mu^2 \varkappa^4 cn^4 v \cdot z^2.$$

Setzt man

$$\varkappa'^4 z^2 - \nu^2 dn^4 v = -\nu^2 dn^4 v \cos^2\varphi,$$

was erlaubt ist, da die Kurve zwischen den Asymptoten

$$z = \pm \frac{\nu}{\varkappa'^2} dn^2 v$$

liegt, so erhält man die Gleichungen der Parameterkurve in trigonometrischer Form:

$$z = \frac{v\, dn^2 v}{\varkappa'^2} \cdot \sin\varphi, \quad y = \frac{\mu \varkappa^2}{\varkappa'^2} cn^2 v \cdot \operatorname{tang}\varphi. \tag{43}$$

Hieraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion der Kurve. Man zieht um den Nullpunkt der (yz)-Ebene einen Kreis vom Radius

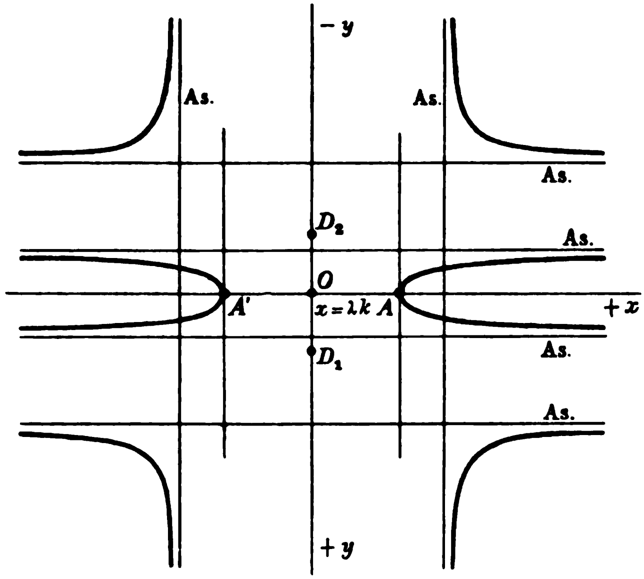
$$r = \frac{v}{\varkappa'^2} dn^2 v,$$

welcher die zur y-Axe parallelen Asymptoten der gesuchten Kurve berührt, und legt zur z-Axe eine Parallele im Abstand

$$y = OS = \frac{\varkappa^2 \mu}{\varkappa'^2} cn^2 v.$$

Legt man nun durch O einen Strahl unter dem Winkel φ zur y-Axe, welcher den Kreis und die Parallele in P und Q schneidet,

Fig. 4.



Schnitt der Tangentenfläche mit Ebene $z = v$, durch die Scheitel A, A'.

so sind die Lote von P und Q zur y-Axe die Koordinaten y und z von vier symmetrisch zu den Axen liegenden Kurvenpunkten.

Für $v = 0$ erhält man die in der (yz)-Ebene liegende Doppelkurve:

$$\varkappa'^4 y^2 z^2 = v^2 y^2 - \varkappa^4 \mu^2 z^2, \tag{44}$$

oder

$$z = \frac{v}{\varkappa'^2} \sin\varphi, \quad y = \frac{\mu \varkappa^2}{\varkappa'^2} \operatorname{tang}\varphi.$$

Inflexionstangenten im Nullpunkt:

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v}{\mu \varkappa^2}, \quad \text{Asymptoten } z = \pm \frac{v}{\varkappa'^2}.$$

Die Kurve geht durch die vier Scheitel

$$C,\ C',\ D,\ D' \left(y = \pm \frac{\varkappa \mu}{\varkappa'},\ z = \pm \frac{v}{\varkappa'}\right)$$

der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnittes, welche in der (yz)-Ebene auf dem Einheitskreis liegen. Nur die Punkte der Doppelkurve ausserhalb dieses Einheitskreises sind reelle Durchstosspunkte der Erzeugenden der Fläche mit der (yz)-Ebene (Fig. 3).

Für $v = K$ reduziert sich die Kurve auf die z-Axe, $y^2 = 0$ und $z = \pm v$, die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der grossen Axen.

Für $v = K + L$ reduziert sich die Kurve auf $z^2 = 0$ und die imaginären Geraden $y = \pm \mu i$.

Die ganze Schar von projizierten Parameterkurven, die dem veränderlichen Parameter v entsprechen, umhüllen in der (yz)-Ebene die Hyperbel

$$\frac{z^2}{v^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 1,$$

welche die Projektion des sphärischen Kegelschnittes auf die (yz)-Ebene ist. Von $v = 0$ bis $x = K$ liegen die Berührungspunkte auf den Hyperbelbogen CC' bez. DD', innerhalb des Einheitskreises, in den Scheiteln C, C', D, D' der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnittes selbst berührt die Doppelkurve die Hyperbel. Von $v = 0$ bis $v = L$ liegen die Berührungspunkte ausserhalb dieser vier Punkte auf der Hyperbel bis ins Unendliche.

Für $v = L$ (unendlich ferne Doppelkurve) schreiben wir die Kurvengleichung 42) in der Form:

$$\frac{\varkappa'^4 y^2 z^2}{dn^4 v} = v^2 y^2 - \varkappa^4 \mu^2 \left(\frac{cn\, v}{dn\, v}\right)^4 \cdot z^2.$$

Nun ist der wahre Wert

$$\left(\frac{cn\, v}{dn\, v}\right)_{v=L} = \frac{1}{\varkappa},$$

also wird obige Gleichung für $v = L$ zu

$$0 = v^2 y^2 - \varkappa^4 \mu^2 \cdot \frac{1}{\varkappa^4} \cdot z^2 \quad \text{oder} \quad \frac{z}{y} = \pm \frac{v}{\mu},$$

es sind dies die Asymptoten der obigen Hyperbel. Die beiden Asymptoten der projizierten Parameterkurve fallen ins Unendliche. Die Projektion der unendlich fernen Doppelkurve auf die (yz)-Ebene besteht also aus den beiden Hyperbelasymptoten

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v}{\mu}$$

und der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden.

4. Die Doppelkurve in der unendlich fernen Ebene $v = L$.

Die Flächengleichungen 36) lassen sich schreiben:

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda \varkappa' cn\, u}{\mu\, sn\, u} \left(\frac{sn\, v}{cn\, v}\right)^2, \quad \frac{y}{z} = \frac{\mu \varkappa\, dn\, u}{v\, cn\, u} \left(\frac{cn\, v}{dn\, v}\right)^2.$$

Nun ist

$$\lim_{v=L}\left(\frac{sn\,v}{cn\,v}\right)^2 = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{v=L}\left(\frac{cn\,v}{dn\,v}\right) = \pm\frac{1}{\varkappa},$$

somit werden die Gleichungen der unendlich fernen Doppelkurve:

$$\frac{x}{y} = -\frac{\lambda\varkappa' cn\,u}{\mu\, sn\,u}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\mu\, dn\,u}{\nu\varkappa\, cn\,u}.$$

Durch Elimination von u ergiebt sich die Gleichung des Richtungskegels derselben vom Scheitel O aus:

$$\mu^2 x^2 z^2 + \varkappa'^4 \lambda^2 y^2 z^2 - \varkappa^2 \nu^2 x^2 y^2 = 0,$$

welche Gleichung auch aus der Flächengleichung 37) nach bekannter Weise erhalten wird. Die drei Koordinatenaxen sind Doppelkanten des Kegels, die Tangentenebenen längs der x- und y-Axe sind bez.

$$\frac{z}{y} = \pm\frac{\varkappa\nu}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{z}{x} = \pm\frac{\varkappa\nu}{\lambda\varkappa'^2},$$

diejenigen längs der z-Axe sind imaginär. Die unendlich ferne Doppelkurve besitzt also in den unendlich fernen Punkten der drei Koordinatenaxen drei doppelte Inflexionsknoten, und zwar ist derjenige auf der z-Axe ein konjugierter Punkt.

Alle vier Doppelkurven haben zu Asymptoten die Schnittlinien der Oskulationsebenen in den Scheiteln des sphärischen Kegelschnittes mit den betreffenden Koordinatenebenen; in jeder Asymptote schneiden sich zwei Oskulationsebenen.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

1. Die Parameterkurve $v = 0$ besteht aus der in der (yz)-Ebene liegenden Doppelkurve vierter Ordnung und den vier Tangenten in den Scheiteln der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnitts.
2. Die Parameterkurve $v = K$ besteht aus der Doppelkurve in der (xz)-Ebene und den vier Tangenten in den Scheiteln der grossen Axen.
3. Die Parameterkurve $v = K + L$ besteht aus der Doppelkurve in der (xy)-Ebene und aus vier zur z-Axe parallelen imaginären Geraden.
4. Die developpable Tangentenfläche besitzt im Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkten der drei Koordinatenaxen je einen vierfachen Punkt, diejenigen der x- und y-Axe sind Knotenpunkte, die beiden andern konjugierte Punkte.

Der Knotenkegel des Nullpunktes, dessen Erzeugende die Fläche in sechs zusammenfallenden Punkten berühren, hat zur Gleichung die gleich Null gesetzten Glieder niedrigster Ordnung der Flächengleichung 37), nämlich:

$$\{\mu^2\nu^2(1+\varkappa^2)x^2+\lambda^2\nu^2y^2-\varkappa^4\lambda^2\mu^2z^2\}^2$$
$$-4\varkappa^2x^2(\mu^2\nu^2x^2+\lambda^2\nu^2y^2-\varkappa^2\lambda^2\mu^2z^2)\mu^2\nu^2=0,$$

ausgerechnet:
$$\varkappa'^2\mu^2\nu^2x^2+\lambda^2(\nu y\mp\varkappa^4\lambda^2z^2)^2=0,$$

d. h. der Knotenkegel vierten Grades zerfällt in zwei konjugiert imaginäre Ebenenpaare, welche sich bez. in den beiden reellen Geraden

$$z=\pm\frac{\nu}{\varkappa^2\mu}y$$

durchschneiden, es sind dies die Inflexionstangenten im Knoten O der in der (yz)-Ebene liegenden Doppelkurve. O ist also konjugierter vierfacher Punkt der Fläche.

Um die Gleichung des Knotenkegels im unendlich fernen vierfachen Punkt der x-Axe zu erhalten, transformiert man diesen Punkt vermittelst der Substitution

$$x=\frac{1}{\xi},\quad y=\frac{\eta}{\xi},\quad z=\frac{\zeta}{\xi}$$

auf den Nullpunkt, verfährt wie vorhin und transformiert nachher wieder zurück. Der Kegel zerfällt in die vier Ebenen:

$$\mu z+\nu\varkappa y\pm\mu\nu\varkappa'=0,$$
$$\mu z-\nu\varkappa y\mp\mu\nu\varkappa'=0,$$

welche paarweise parallel und sämtlich parallel der x-Axe sind; sie schneiden die (xz)- und (xy)-Ebene in den zur x-Axe parallelen Asymptoten der in diesen Ebenen liegenden Doppelkurven.

Der Knotenkegel des unendlich fernen Punktes der y-Axe zerfällt in die vier Ebenen:

$$\nu\varkappa x+\lambda\varkappa'^2z=\pm\lambda\nu,$$
$$\nu\varkappa x-\lambda\varkappa'^2z=\mp\lambda\nu,$$

die parallel zur y-Axe sind, welche durch die zur y-Axe parallelen Asymptoten der in der (yz)- und (xy)-Ebene liegenden Doppelkurven gehen.

Der Knotenkegel im unendlich fernen Punkt der z-Axe reduziert sich auf

$$(\mu x\pm\lambda\mu\varkappa^2)^2+\lambda^2\varkappa'^4y^2=0,$$

er zerfällt in zwei konjugiert imaginäre Ebenenpaare, welche sich in den zwei reellen Geraden $y=0$, $x=\pm\lambda\varkappa^2$ durchschneiden, es sind dies die zur z-Axe parallelen Asymptoten der in der (xz)-Ebene liegenden Doppelkurve.

Schneidet man die Tangentenfläche durch eine zur (xy)-Ebene parallele Ebene $z=\nu$, welche durch die Scheitel A, A' der grossen Axe der oberhalb der (xy)-Ebene liegenden sphärischen Ellipse geht, so enthält diese die Tangenten des sphärischen Kegelschnittes in diesen Punkten als Erzeugende der Tangentenfläche und die übrig bleibende Schnittkurve ist von der sechsten Ordnung.

Ihre Gleichungen ergeben sich aus den Flächengleichungen 36) für $z = v$:
$$x = \frac{\lambda(1 - \varkappa' dn\, u)}{\varkappa\, sn\, u}, \quad y = \frac{\mu(dn\, u - \varkappa')}{\varkappa\, cn\, u},$$
hieraus:

45) $$x^2\{\varkappa^2(y^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2 y^2\} = \lambda^2\{(1 + \varkappa'^2)y^2 - \mu^2\varkappa^2\}^2.$$

Schnittpunkte mit der x-Axe: $y^2 = 0$, $x = \pm\lambda\varkappa$ = Scheitel A, A',

„ „ „ y-Axe: $x^2 = 0$, $\{(1 + \varkappa'^2)y^2 - \mu^2\varkappa^2\}^2 = 0$,

also:
$$y = \pm\frac{\mu\varkappa}{\sqrt{1 + \varkappa'^2}}.$$

Diese beiden Doppelpunkte sind konjugierte Punkte. Die Kurve besitzt die sechs Asymptoten:
$$y = \pm\frac{\mu}{\varkappa}(1 + \varkappa'), \quad y = \pm\frac{\mu}{\varkappa}(1 - \varkappa'), \quad x = \pm\frac{\lambda}{\varkappa}(1 + \varkappa'^2).$$

Der unendlich ferne Punkt der x-Axe ist vierfacher Inflexionsknoten, derjenige der y-Axe doppelter.

Diese Schnittkurve besteht aus vier kongruenten hyperbolischen Ästen in den äusseren Winkelräumen der vier Asymptoten
$$x = \pm\frac{\lambda}{\varkappa}(1 + \varkappa'^2) \quad \text{und} \quad y = \pm\frac{\mu}{\varkappa}(1 + \varkappa')$$
und aus zwei unendlichen Ästen, die rechts und links der Scheiteltangenten $x = \pm\lambda\varkappa$ zwischen den Asymptoten
$$y = \pm\frac{\mu}{\varkappa}(1 - \varkappa')$$
verlaufen (Fig. 4).

Die zu den Koordinatenebenen parallelen Schnitte der Tangentenfläche durch irgend zwei andere Scheitel des sphärischen Kegelschnittes findet man ebenso einfach, ihre Gleichungen sind von ähnlicher Form, aber die Formen der Kurven sind verschieden.

Sphärische Abbildung der Tangentenfläche.

Fällt man vom Mittelpunkt der Kugel Lote auf sämtliche Schmiegungsebenen der Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnitts, so bilden diese einen Kegel, der die Einheitskugel in einer Kurve schneidet, welche das sphärische Bild der Tangentenfläche ist.

Die Kurve besteht aus zwei gleichen, geschlossenen Zweigen, oberhalb und unterhalb der (xy)-Ebene, sie ist symmetrisch zu allen drei Koordinatenebenen.

Sind α, β, γ die Richtungswinkel eines Lotes, X, Y, Z die Koordinaten seines Schnittpunktes mit der Einheitskugel, so folgt aus der Gleichung 16) der Schmiegungsebene, wenn man bemerkt, dass
$$\lambda^2\mu^2 dn^6 u + \lambda^2\nu^2\varkappa^2 cn^6 u + \mu^2\nu^2\varkappa^2\varkappa'^2 sn^6 u$$
$$= \varkappa'^2[\lambda^2\mu^2\nu^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2 u)^3]$$
ist:

$$46)\quad \begin{cases} X = \cos\alpha = \dfrac{\mu\nu\varkappa\, sn^3u}{\sqrt{\lambda^2\mu^2\nu^2+\varkappa^2(\lambda^2-sn^2u)^3}}, \\ Y = \cos\beta = \dfrac{-\lambda\nu\varkappa\, cn^3u}{\varkappa'\sqrt{\lambda^2\mu^2\nu^2+\varkappa^2(\lambda^2-sn^2u)^3}}, \\ Z = \cos\gamma = \dfrac{\lambda\mu\, du^3u}{\varkappa'\sqrt{\lambda^2\mu^2\nu^2+\varkappa^2(\lambda^2-sn^2u)^3}}. \end{cases}$$

Es sind dies, bei variablem u, die Gleichungen des sphärischen Bildes.

Projiziert man die Kurve auf eine Koordinatenebene, so fallen jedesmal zwei Hälften aufeinander, so dass die Ordnung der Projektionskurve nur die Hälfte ist von derjenigen der Raumkurve. Die Gleichung der Projektionen erhält man durch Elimination des Parameters u aus je zwei der Gleichungen 46), nämlich

In der (xy)-Ebene:

$$\{(\lambda^2\varkappa'^2-\mu^2\varkappa^2)X^2+\varkappa'^2(\lambda^2-\nu^2)Y^2-\nu^2\varkappa^2\}^3$$
$$=27\lambda^2\mu^2\nu^2\varkappa^2\varkappa'^4(X^2+Y^2-1)X^2Y^2.$$

Diese Kurve sechster Ordnung hat auf jeder der Koordinatenaxen je zwei Rückkehrpunkte:

$$X=\frac{\pm\varkappa\nu}{\sqrt{\lambda^2\varkappa'^2-\mu^2\nu^2}},\quad Y=0,$$

und

$$X=0,\quad Y=\pm\frac{\varkappa\nu}{\varkappa'\sqrt{\lambda^2-\nu^2}},$$

die betreffenden Axen sind die Rückkehrtangenten.

In der (xz)-Ebene:

$$\{(\lambda^2\varkappa^2\varkappa'^2-\nu^2)X^2+(\lambda^2-\nu^2)\varkappa'^2Z^2-\mu^2\}^3$$
$$=-27\lambda^2\mu^2\nu^2\varkappa^2\varkappa'^2(X^2+Z^2-1)X^2Z^2.$$

Rückkehrpunkte:

$$X=\frac{\pm\mu}{\sqrt{\lambda^2\varkappa^2\varkappa'^2-\nu^2}},\quad Z=0,\quad Z=\frac{\pm\mu}{\varkappa'\sqrt{\lambda^2\varkappa^2+\mu^2}},\quad Y=0.$$

Die X- und Z-Axen sind Rückkehrtangenten.

In der (yz)-Ebene:

$$\{(\nu^2-\lambda^2\varkappa^2\varkappa'^2)Y^2+(\lambda^2\varkappa'^2-\mu^2\varkappa^2)Z^2-\lambda^2\varkappa'^2\}^3$$
$$=-27\lambda^2\mu^2\nu^2\varkappa^2\varkappa'^4(Y^2+Z^2-1)Y^2Z^2.$$

Rückkehrpunkte:

$$Y=0,\quad Z=\frac{\pm\lambda\varkappa'}{\sqrt{\lambda^2\varkappa'^2-\mu^2\varkappa^2}};\quad Y=\frac{\pm\lambda\varkappa'}{\sqrt{\nu^2-\lambda^2\varkappa^2\varkappa'^2}},\quad Z=0.$$

Die sphärische Bildkurve selbst ist von der zwölften Ordnung. Benützt man zur Elimination von u alle drei Gleichungen 46), so erhält man den Kegel sechsten Grades vom Scheitel O:

$$(\lambda^2 \varkappa'^4 X^2 + \mu^2 Y^2 - \nu^2 \varkappa^2 Z^2)^3 + 27 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 \varkappa^2 \varkappa'^4 X^2 Y^2 Z^2 = 0,$$

her die Einheitskugel in einer Kurve schneidet, welche das rische Bild der Tangentenfläche ist. Die in der (XZ)-Ebene nden Erzeugenden desselben

$$Z = \pm \frac{\lambda \varkappa'^2}{\nu \varkappa} X$$

ebenso die in der (YZ)-Ebene liegenden

$$Z = \pm \frac{\mu}{\nu \varkappa} Y$$

d **Rückkehrkanten** des Kegels. Dieser Kegel stimmt überein t dem durch Gleichung 20) dargestellten Kegel, welcher die Tangentenche in der Kurve der Krümmungsmittelpunkte schneidet. Beide rven haben also in ihren Schnittpunkten mit der (xz)- und (yz)-Ebene vier Rückkehrpunkte.

Fundamentalgrössen erster Ordnung.

Die Gleichungen der developpablen Tangentenfläche sind:

$$x = \frac{\lambda \varkappa\, sn^2 v}{sn\, u}, \quad y = \frac{\mu \varkappa\, cn^2 v}{\varkappa' cn^2 u}, \quad z = \frac{\nu\, dn^2 v}{\varkappa' dn\, u}.$$

Nun werden die Differentialquotienten nach u und v:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\lambda \varkappa\, sn^2 v\, cn\, u\, dn\, u}{sn^2 u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\mu \varkappa\, cn^2 v\, sn\, u\, cn\, u}{\varkappa' cn^2 u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\nu \varkappa^2 dn^2 v\, sn\, u\, cn\, u}{\varkappa' dn^2 u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2 \lambda \varkappa\, sn\, v\, cn\, v\, dn\, v}{sn\, u}, \quad \frac{\partial y}{dv} = -\frac{2 \mu \varkappa\, sn\, v\, cn\, v\, dn\, v}{\varkappa' cn\, u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-2 \nu \varkappa^2 sn\, v\, cn\, v\, dn\, v}{\varkappa' dn\, u}.$$

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung, möglichst reduziert, werden:

$$47) \quad \begin{cases} E = \sum \left(\frac{dx}{du}\right)^2 \\ \quad = \frac{\varkappa'}{\varkappa'^2} sn^2 u\, cn^2 u\, dn^2 u \left(\frac{\varkappa'^2 \lambda^2 sn^4 v}{sn^6 u} + \frac{\mu\, cn^4 v}{cn^6 u} + \frac{\nu^2 \varkappa^2 dn^4 v}{dn^6 u}\right) \end{cases}$$

$$48) \quad \begin{cases} F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \\ \quad = -\frac{2\varkappa^2}{\varkappa'^2} sn\, u\, cn\, u\, dn\, u\, sn\, v\, cn\, v\, dn\, v \left(\frac{\lambda^2 \varkappa'^2 sn^2 v}{sn^4 u} + \frac{\mu^2 cn^2 v}{cn^4 u} \right. \\ \quad \left. + \frac{\nu^2 \varkappa^2 dn^2 v}{d\, n^4 u}\right) \end{cases}$$

$$49) \quad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 4 \varkappa^2 \left(\frac{sn\, v\, cn\, v\, dn\, v}{sn\, u\, cn\, u\, dn\, u}\right)^2 (\lambda^2 - sn^2 u),$$

$$50)\quad \delta^2 = EG - F^2 = 4\varkappa^4 \frac{sn^2 v\, cn^2 v\, dn^2 v}{sn^4 u\, cn^4 u\, dn^4 u}(sn^2 n - sn^2 v)^2 \cdot \{\lambda^2\mu^2\nu^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2 u)^2\}$$

Der Winkel w, unter welchem die Erzeugende $u =$ konst. die Parameterkurve $v =$ konst. schneidet, wird erhalten aus:

$$51)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} w = \dfrac{\delta}{F} \\ = \dfrac{\varkappa'^2 sn\, u\, cn\, u\, dn\, u\,(sn^2 v - sn^2 u)\sqrt{\lambda^2\mu^2\nu^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2 u)^2}}{\lambda^2\varkappa'^2 sn^2 v\, cn^4 u\, dn^4 u + \mu^2 cn^2 v\, sn^4 u\, dn^4 u + \nu^2\varkappa^2 dn^2 v\, sn^4 u\, cn^4 u}. \end{cases}$$

Für die Werte

$$u = 0,\quad K,\quad 2K,\quad 3K,\quad 2L,\quad 2L + K \text{ etc.}$$

wird $w = 0$, unabhängig von v, d. h. alle Parameterkurven $v =$ konst. berühren die Tangenten in den acht Scheiteln des sphärischen Kegelschnitts im Unendlichen.

Für $v = u$ wird ebenfalls $w = 0$, d. h. alle Parameterkurven $v =$ konst. berühren den sphärischen Kegelschnitt, die Berührungspunkte sind aber, wie schon erwähnt, nur reell für

$$0 < v \leqq K.$$

Ist im Ausdruck für $\operatorname{tang} w$ der Nenner

$$\lambda^2\varkappa'^2 sn^2 v\, cn^4 u\, dn^4 u + \mu^2 cn^2 v\, sn^4 u\, dn^4 u + \nu^2\varkappa^2 dn^2 v\, sn^4 u\, cn^4 u = 0,$$

so wird $w = 90^0$. Diese Gleichung bestimmt eine Kurve auf der Fläche, längs welcher die Erzeugenden der Fläche $u =$ konst., die Parameterkurve $v =$ konst. rechtwinklig durchschneiden. Berechnet man aus obiger Gleichung $sn^2 v$ und daraus $cn^2 v$ und $dn^2 v$, und setzt diese Werte in den Flächengleichungen ein, so werden die Gleichungen dieser Raumkurve:

$$52)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda\varkappa\, sn^3 u}{N}(\mu^2 dn^4 u + \nu^2\varkappa^2 cn^4 u), \\ y = -\dfrac{\mu\varkappa\varkappa'\, cn^3 u}{N}(\lambda^2 dn^4 u + \nu^2\varkappa^2 sn^4 u), \\ z = \dfrac{\nu\varkappa'\, dn^3 u}{N}(\mu^2 sn^4 u - \lambda^2 cn^4 u), \end{cases}$$

wo

$$N = \mu^2 sn^4 u\, dn^4 u + \nu^2\varkappa^4 sn^4 u\, cn^4 u - \lambda^2\varkappa'^2 cn^4 u\, dn^4 u$$

ist.

Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.

Bildet man aus den Flächengleichungen die nach u und v genommenen zweiten Differentialquotienten, so erhalten die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung folgende Werte:

$$53)\quad \begin{cases} D = \sum \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\right) \\ = 6\lambda\mu\nu\varkappa^4\varkappa'^2 \dfrac{sn\, v\, cn\, v\, dn\, v}{sn^2 u\, cn^2 u\, dn^2 u}(sn^2 u - sn^2 u)^2, \end{cases}$$

$$54)\quad \begin{cases} D' = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0, \\ D'' = \sum \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0. \end{cases}$$

Weil die Erzeugenden der developpabeln Tangentenfläche die eine Schar von Krümmungslinien sind, so ist der eine Hauptkrümmungsradius in jedem Punkt der Fläche unendlich gross, der andere ergiebt sich als

$$55)\qquad \varrho = \frac{\delta^3}{G \cdot D} = \frac{(sn^2u - sn^2v)[\lambda^2\mu^2v^2 + \varkappa^2(\lambda^2 - sn^2u)^2]^{\frac{3}{2}}}{3\lambda\mu v\varkappa'^2 sn^2u\, cn^2u\, dn^2u(\lambda^2 - sn^2u)}.$$

Für $v = u$, d.h. für die Punkte des sphärischen Kegelschnitts, die Rückkehrkante, ist stets $\varrho = 0$.

Für

$$u = 0,\ K,\ 2K,\ 3K,\ 2L,\ 2L + K,\ 2L + 2K \text{ und } 2L + 3K$$

wird $\varrho = \infty$ für jeden Wert v, d.h. in den Punkten der Fläche längs der Tangenten in den acht Scheiteln des sphärischen Kegelschnitts sind beide Hauptkrümmungsradien unendlich gross. Die Tangentialebenen der Tangentenfläche durch diese acht Erzeugenden derselben sind stationäre Tangentenebenen, alle ebenen Schnitte senkrecht zu ihnen sind Hauptschnitte der Fläche, ihre Gleichungen wurden früher aufgestellt.

Für

$$sn\,u = \lambda = sn\,t, \quad \text{also} \quad u = t = K + vi,$$

wird ϱ ebenfalls unendlich, aber die zugehörige Erzeugende der Fläche ist imaginär.

Für $v = 0,\ K,\ K + L$, erhält man den Krümmungsradius der Doppelkurven in den Koordinatenebenen.

Die Parameterkurven $v =$ konst. sind konjugiert zu den Erzeugenden der Fläche. Die Asymptotenlinien fallen in jedem Punkt mit der durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden der Fläche zusammen.

Die Krümmungslinien.

Die eine Schar der Krümmungslinien der developpabeln Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnitts besteht aus ihren Erzeugenden, die zweite Schar enthält man nach dem Satz (Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen):

Wenn sich eine Tangente längs einer Raumkurve hin bewegt, so beschreibt sie ihre developpable Tangentenfläche, und jeder Punkt derselben beschreibt eine Krümmungslinie auf der Fläche.

Als Gleichung der sphärischen Ellipse legen wir die zweite Form (33) zu Grunde, die wir bei der Rektifikation der Kurven benützten, nämlich:

$$x = \frac{sn\tau\, dn\tau\, cn\, w}{k' T}, \quad y = \frac{i\, cn\tau\, dn\tau\, sn\, w}{T}, \quad z = \frac{k i\, cn\tau\, sn\tau\, dn\, w}{k' T},$$

wo

$$T = \sqrt{sn^2\tau - sn^2 w}, \quad sn\,\tau = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad k = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}$$

ist. Die Richtungskosinusse der Tangente im Punkte (x, y, z) der sphärischen Ellipse sind:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{i\, cn\tau\, sn\, w\, dn\, w}{k' T}, \quad \cos\beta = \frac{sn\tau\, cn\, w\, dn\, w}{T},$$

$$\cos\gamma = \frac{k\, dn\tau\, sn\, w\, cn\, w}{k' T}.$$

Bedeutet [Gleichung 34)]

$$s = \frac{i}{2} \operatorname{Log} \frac{H(\tau + w)}{H(\tau - w)} - i w Z(\tau)$$

den vom Scheitel A der grossen Axe aus gemessenen Bogen der sphärischen Ellipse und l eine beliebige konstante Strecke, welche von A aus auf der sich abwickelnden Tangente abgetragen wird, so sind die Koordinaten des erzeugenden Punktes:

$$\xi = x + (l + s)\cos\alpha, \quad \eta = y + (l + s)\cos\beta, \quad \zeta = z + (l + s)\cos\gamma.$$

Setzt man für x, y, z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werte, so wird die Gleichung einer Krümmungslinie $l =$ konst.:

$$57)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{k' T}\{sn\tau\, dn\tau\, cn\, w - (l + s)\, i\, cn\tau\, sn\, w\, dn\, w\} \\[2ex] \eta = \dfrac{1}{T}\{i\, cn\tau\, dn\tau\, sn\, w + (l + s)\, sn\tau\, cn\, w\, dn\, w\} \\[2ex] \zeta = \dfrac{k}{k' T}\{i\, cn\tau\, sn\tau\, dn\, w + (l + s)\, dn\tau\, sn\, w\, cn\, w\} \end{cases}$$

wo w die Variable bezeichnet.

Für $w = 0$, Scheitel A der grossen Axe wird $T = sn\tau$, $s = 0$:

$$\xi = \frac{dn\tau}{k'}, \quad \eta = l, \quad \zeta = \frac{k}{k'}\, i\, cn\tau.$$

Für $w = K$, Scheitel C der kleinen Axe wird

$$T = i\, cn\tau, \quad s = \text{Ellipsenquadrant} = \frac{\pi}{2} - i K Z(\tau) = q:$$

$$\xi = -(l + q), \quad \eta = dn\tau, \quad \zeta = k\, sn\tau.$$

Bei variablem l erhält man die ganze Schar von Krümmungslinien, es sind transcendente Linien, welche auf je einem der zwei Mäntel, aus welchen die Tangentenfläche besteht, spiralförmig ins Unendliche gehen.

Die Bewegung der Ionen beim Zeemannschen Phänomen.*

Von

OTTO BLUMENTHAL

in Frankfurt a. M.

Acceptieren wir für das Zeemannsche Phänomen die von Zeemann vorgeschlagene Erklärung,** welche, ausgehend von der Helmholtzschen Dispersionstheorie, die Schwingungen der elektrisch geladenen Ionen eines glühenden Dampfes und ihre Veränderung durch ein Magnetfeld betrachtet, so bestimmt sich die Bewegung eines solchen Ions bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems nach dem Biot-Savartschen Gesetz durch die Differentialgleichungen:

$$\text{I.}\qquad \begin{cases} \text{a)} & \mu \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}(Cv - Bw) - h'x, \\ \text{b)} & \mu \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}(Aw - Cu) - h'y, \\ \text{c)} & \mu \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}(Bu - Av), \end{cases}$$

wo A, B, C die Komponenten der magnetischen Kraft, u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Ions, μ seine Masse, ε seine wahre elektrische Ladung, ω die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Im Falle eines homogenen Magnetfelds haben wir insbesondere

$$\text{I}'.\qquad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \gamma v - \beta w - hx, \\ \text{b)} & \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \alpha w - \gamma u - hy, \\ \text{c)} & \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \beta u - \alpha v, \end{cases}$$

* Auszug aus der Bearbeitung einer von Herrn Geheimrat Riecke in Göttingen gestellten Staatsexamensaufgabe.

** Verslagen van de gewone Vergaderingen d. Academie te Amsterdam, Wis-en natuurkundige afdeeling, deel V, 1897, p. 242 flg.

wo $\alpha = \frac{A}{\omega}\frac{\varepsilon}{\mu}$, $\beta = \frac{B}{\omega}\frac{\varepsilon}{\mu}$, $\gamma = \frac{C}{\omega}\frac{\varepsilon}{\mu}$ Konstanten sind, und $\frac{h'}{\mu} = h$ gesetzt ist.

Wir wollen in dieser Note die Bahnkurven der Ionen bei Zugrundelegung eines homogenen Magnetfeldes untersuchen, wollen aber dabei der grösseren Allgemeinheit halber die Kraft in der Richtung der x- und y-Axe verschieden annehmen, also von den Gleichungen

$$\text{I}''\quad \begin{cases} \text{a)}\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = \gamma v - \beta w - hx, \\ \text{b)}\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \alpha w - \gamma u - ky, \\ \text{c)}\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \beta u - \alpha v \end{cases}$$

ausgehen. Wir können diese Erweiterung dahin deuten, dass wir die Veränderung einer Lissajousschen Figur, nicht mehr einer einfachen elliptischen Schwingung, durch ein homogenes Magnetfeld untersuchen. Dass die Verallgemeinerung auch für unser spezielles Problem nützlich ist, ergiebt sich aus § 4.

Der einfachste Fall ist der, dass die magnetischen Kraftlinien der z-Axe parallel laufen, und dieser möge vorangestellt werden. Der allgemeine Fall lässt sich dann ohne Schwierigkeit auf diesen speziellen zurückführen.

§ 1. Integration der Gleichungen, wenn die Kraftlinien der z-Axe parallel sind.

Die Gleichungen I'' nehmen die einfachere Form an:

$$\begin{cases} \text{a)}\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = \gamma \dfrac{dy}{dt} - hx, \\ \text{b)}\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\gamma \dfrac{dx}{dt} - ky, \\ \text{c)}\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Wir [illegible] zunächst nur die Projektion der Bewegung auf [illegible]. Aus a) und b) bilden wir eine Differentialgleichung [illegible]. Wir differenzieren dann a nach t, berechnen aus der [illegible] und setzen [illegible]; dann kommt:

[illegible] berechnet und in a) [illegible] für x:

[illegible] Wir erhalten daraus:

$$1)\qquad \begin{cases} x = A_1\cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t + A_2 \cos q_2 t + B_2 \sin q_2 t,\\ y = C_1\cos q_1 t + D_1 \sin q_1 t + C_2 \cos q_2 t + D_2 \sin q_2 t,\end{cases}$$

wo q_1^2, q_2^2 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2)\qquad q^4 - (\gamma^2 + h + k)q^2 + hk = 0$$

sind, also

$$3)\qquad \begin{cases} q_1^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^2(h+k) + (h-k)^2} + \frac{1}{2}(\gamma^2 + h + k),\\ q_2^2 = +\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^2(h+k) + (h-k)^2} + \frac{1}{2}(\gamma^2 + h + k).\end{cases}$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C, D setzen wir die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0,\quad y(0) = y_0,\quad x'(0) = u_0,\quad y'(0) = v_0$$

fest, was die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= x_0, & C_1 + C_2 &= y_0,\\ B_1 q_1 + B_2 q_2 &= u_0, & D_1 q_1 + D_2 q_2 &= v_0\end{aligned}$$

liefert. Berücksichtigen wir ausserdem die aus I‴a) und I‴b) folgenden Gleichungssysteme

$$4)\qquad \begin{cases} (h - q_1^2)A_1 = \gamma q_1 D_1,\\ (h - q_1^2)B_1 = -\gamma q_1 C_1,\\ (h - q_2^2)A_2 = \gamma q_2 D_2,\\ (h - q_2^2)B_2 = -\gamma q_2 C_2,\end{cases}\qquad \begin{cases} (k - q_1^2)C_1 = -\gamma q_1 B_1,\\ (k - q_1^2)D_1 = \gamma q_1 A_1,\\ (k - q_2^2)C_2 = -\gamma q_2 B_2,\\ (k - q_2^2)D_2 = \gamma q_2 A_2,\end{cases}$$

welche vermöge der aus 2) folgenden Relationen

$$5)\qquad q_1^2 + q_2^2 = \gamma^2 + h + k,\quad q_1^2 q_2^2 = hk$$

identisch sind, so ergiebt sich

$$6)\qquad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}[\gamma v_0 - (h - q_2^2)x_0],\\ B_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}\left[-\frac{k(h - q_2^2)}{q_1 q_2^2}u_0 - \gamma\frac{k}{q_1}y_0\right],\\ A_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}[-\gamma v_0 + (h - q_1^2)x_0],\\ B_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}\left[\frac{k(h - q_1^2)}{q_2 q_1^2}u_0 + \gamma\frac{k}{q_2}y_0\right],\\ C_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}[-\gamma u_0 - (k - q_2^2)y_0],\\ D_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}\left[-\frac{h(k - q_2^2)}{q_1 q_2^2}v_0 + \gamma\frac{h}{q_1}x_0\right],\\ C_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}[\gamma u_0 + (k - q_1^2)y_0],\\ D_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2}\left[\frac{h(k - q_1^2)}{q_2 q_1^2}v_0 - \gamma\frac{h}{q_2}x_0\right].\end{cases}$$

Um die erhaltenen analytischen Resultate geometrisch zu interpretieren, haben wir zuerst die Grössen q zu betrachten. Diese können reell, rein imaginär und konjugiert komplex sein. Von physikalischer Wichtigkeit ist nur der Fall positiver h und k, welcher reelle q liefert. Dieser ist nämlich beim Zeemannschen Phänomen immer realisiert. Wir werden uns daher im Folgenden auf diesen Fall beschränken. Die übrigen Fälle bieten übrigens keine besonderen Schwierigkeiten.

2. Die Bahnkurven im Falle positiver h und k. Die doppelelliptische Bewegung.

Wir behandeln vorweg den Fall, dass eine der Grössen h, k verschwindet.

$h = k = 0$ liefert die bekannte Kreisbewegung eines elektrischen Teilchens unter dem Einflusse eines homogenen Magnetfelds.*

Den Fall $k = 0$ erhalten wir aus unseren allgemeinen Formeln durch Grenzübergang, indem wir $k = \varepsilon k_1$ setzen und höhere Potenzen von ε vernachlässigen. Wir finden so zunächst

$$q_1^2 = \varepsilon k_1 \frac{h}{\gamma^2 + h}, \qquad q_2^2 = \gamma^2 + h.$$

Setzen wir dann diese Werte in die Gleichungen 1) und 6) ein, so ergiebt sich in der Grenze $\varepsilon = 0$:

$$7) \quad \begin{cases} x = x_1 + x_2, \\ x_1 = A_1, \\ x_2 = A_2 \cos q_2 t + B_2 \sin q_2 t; \\ y = y_1 + y_2, \\ y_1 = C_1 + D_1' t \\ y_2 = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + h}} (B_2 \cos q_2 t - A_2 \sin q_2 t). \end{cases}$$

Das Wertepaar (x_1, y_1) stellt eine gleichförmige Bewegung längs einer Parallelen zur y-Axe dar, das Wertepaar (x_2, y_2) eine Bewegung auf einer auf die Koordinatenaxen als Hauptaxen bezogenen Ellipse mit dem Axenverhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - h}}{\gamma}.$$

Die Bewegung stellt sich daher im ganzen dar als **Bewegung auf einer auf die Koordinatenaxen als Hauptaxen bezogenen Ellipse, deren Mittelpunkt gleichzeitig auf einer Parallelen zur y-Axe gleichförmig fortschreitet.**

* Siehe Riecke: „Über die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde und das elektrische Glimmlicht". Wied. Ann. 1881, Bd. XIII, S. 191.

Die Werte A, B, C, D' berechnen sich leicht aus 6). Von Interesse ist nur der Wert

$$D_1' = \frac{h}{\gamma^2+h}(v_0+\gamma x_0).$$

Er zeigt, dass wir für $v_0+\gamma x_0=0$ einfach Bewegung auf einer Ellipse erhalten.

Der Fall $h=0$ ergiebt sich aus dem vorhergehenden durch Vertauschung der Axen.

Sind h und k beide von 0 verschieden, so ist das Gleiche für q_1 und q_2 der Fall. Die Bewegung verläuft innerhalb eines endlichen Flächenstücks und ist periodisch, wenn q_1 und q_2 in rationalem Verhältnis stehen.

Um zu einer allgemeinen Darstellung der durch die Gleichungen 1) definierten Bewegung zu gelangen, setzen wir analog wie unter 7):

$$8)\quad \begin{cases} x_1 = A_1\cos q_1t + B_1\sin q_1t, & x_2 = A_2\cos q_2t + B_2\sin q_2t, \\ y_1 = C_1\cos q_1t + D_1\sin q_1t, & y_2 = C_2\cos q_2t + D_2\sin q_2t, \end{cases}$$

so dass

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2.$$

Wir können dann (x_1, y_1) und (x_2, y_2) je als Punkt einer Ellipse deuten, welche den Koordinaten-Anfangspunkt zum Mittelpunkt hat. Bezeichnen wir die beiden Ellipsen mit E_1 und E_2, die konstanten Sektoren-Geschwindigkeiten, mit welchen gemäss 8) die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) auf ihnen entlang geführt werden, mit v_1 und v_2, schliesslich die Anfangslagen für $t=0$ mit P_1 und P_2, so lässt sich die Bewegung 1) folgendermassen kinematisch beschreiben:

Wir erhalten die gesuchte Bahnkurve, indem wir auf der Ellipse E_2, bei P_2 beginnend, mit der konstanten Sektoren-Geschwindigkeit v_2 einen Punkt wandern lassen, während gleichzeitig der Mittelpunkt der Ellipse E_2 auf E_1, bei P_1 beginnend, mit der konstanten Sektoren-Geschwindigkeit v_1 gleitet.*

Dieses allgemeine Schema wird in wesentlicher Weise vereinfacht durch den weiteren Satz:

Die Ellipsen E_1 und E_2 haben die Koordinatenaxen zu Hauptaxen.

Setzen wir nämlich

$$9)\quad \begin{cases} x_1 = a_1\sin(q_1t+\vartheta_1), & x_2 = a_2\sin(q_2t+\vartheta_2), \\ y_1 = b_1\cos(q_1t+\varrho_1), & y_2 = b_2\cos(q_2t+\varrho_2), \end{cases}$$

so ist

* Die Ellipsen E_1 und E_2 sind natürlich mit einander vertauschbar, so dass wir zwei kinematische Darstellungen unserer Bewegung haben. Da jedoch die Vertauschbarkeit der Ellipsen für das folgende belanglos ist, so genügt es, die eine Darstellung ins Auge zu fassen.

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad \operatorname{tg} \varrho_1 = -\frac{D_1}{C_1},$$

und die Gleichungen 4) ergeben

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \operatorname{tg} \varrho_1,$$
$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \operatorname{tg} \varrho_2.$$

Wir erhalten daher die beiden Ellipsen in der Form

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Die Winkel ϱ sind nur bis auf Vielfache von π bestimmt. Vergleichung der Vorzeichen von A_1 und D_1, B_1 und C_1 liefert die vollständige Bestimmung:

Bei positivem γ ist

10) $$\varrho_1 = \vartheta_1 + \pi, \quad \varrho_2 = \vartheta_2,$$

die Ellipse E_1 wird von dem Punkte $(a_1 \sin \vartheta_1, \ -b_1 \cos \vartheta_1)$ aus in positivem, die Ellipse E_2 von $(a_2 \sin \vartheta_2, b_2 \cos \vartheta_2)$ aus in negativem Sinne durchlaufen. Bei negativem γ erhalten wir umgekehrten Umlaufungssinn.

Wir haben somit ein kinematisches Modell für unsere Bewegung konstruiert: Das Modell besteht aus zwei Ellipsen mit den Koordinatenaxen als Hauptaxen, deren eine mit ihrem Mittelpunkt auf der anderen gleitet, während sich der betrachtete Punkt mit umgekehrtem Durchlaufungssinn auf ihr bewegt. Jede mittelst dieses Modelles realisierbare Bewegung soll kurz als „doppelelliptische Bewegung" bezeichnet werden. Wir fragen nun: „Ist die Bewegung unseres Ions die allgemeinste doppelelliptische Bewegung, oder ist sie nur eine spezielle?"

Ein vorläufiges Urteil verschaffen wir uns durch eine Konstanten-Abzählung: unser physikalisches Problem enthält die 7 willkürlichen Konstanten $x_0, y_0, u_0, v_0, \gamma, h, k$; in die doppelelliptische Bewegung gehen 8 Konstanten ein: $a_1, b_1, a_2, b_2, q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2$. Wir können daraus schliessen, dass die Bewegung unseres Ions nur eine spezielle doppelelliptische Bewegung ist. Zum Zweck genauerer Untersuchung aber stellen wir die Differentialgleichungen der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung auf. Wir haben nach 9):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q_1^2 x_1 - q_2^2 x_2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q_1^2 y_1 - q_2^2 y_2.$$

Zur Elimination der x_1, y_1, x_2, y_2 haben wir ausser den Definitionsgleichungen

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2$$

noch das Gleichungspaar:

$$\frac{dy}{dt} = \pm\left(\frac{b_1 q_1}{a_1} x_1 - \frac{b_2 q_2}{a_2} x_2\right), \quad \frac{dx}{dt} = \mp\left(\frac{a_1 q_1}{b_1} y_1 - \frac{a_2 q_2}{b_2} y_2\right),$$

wo bei positiver Umlaufung der Ellipse E_1 das obere, bei negativer das untere Vorzeichen zu wählen ist. Die Elimination ergiebt:

$$11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \gamma_x \dfrac{dy}{dt} - hx, & \dfrac{d^2y}{dt^2} = \gamma_y \dfrac{dx}{dt} - ky, \\ h = q_1 q_2 \dfrac{\dfrac{q_1 b_2}{a_2} + \dfrac{q_2 b_1}{a_1}}{\dfrac{q_1 b_1}{a_1} + \dfrac{q_2 b_2}{a_2}}, & k = q_1 q_2 \dfrac{\dfrac{q_1 a_2}{b_2} + \dfrac{q_2 a_1}{b_1}}{\dfrac{q_1 a_1}{b_1} + \dfrac{q_2 a_2}{b_2}}, \\ \gamma_x = \pm \dfrac{q_2^2 - q_1^2}{\dfrac{q_1 b_1}{a_1} + \dfrac{q_2 b_2}{a_2}}, & \gamma_y = \mp \dfrac{q_2^2 - q_1^2}{\dfrac{q_1 a_1}{b_1} + \dfrac{q_2 a_2}{b_2}}. \end{cases}$$

Bei der Bewegung der Ionen ist aber nach 1‴

$$\gamma_x = -\gamma_y,$$

und somit besteht zwischen den Konstanten der doppelelliptischen Bewegung in unserem Falle die Beziehung:

$$12)\quad \begin{cases} \dfrac{q_1 b_1}{a_1} + \dfrac{q_2 b_2}{a_2} = \dfrac{q_1 a_1}{b_1} + \dfrac{q_2 a_2}{b_2}, \\ q_1\left(\dfrac{b_1}{a_1} - \dfrac{a_1}{b_1}\right) + q_2\left(\dfrac{b_2}{a_2} - \dfrac{a_2}{b_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Die Bewegung der Ionen ist eine spezielle doppelelliptische Bewegung, zwischen deren Konstanten die Beziehung 12) besteht.

Besonders übersichtlich wird die doppelelliptische Bewegung, wenn beide Ellipsen in Kreise übergehen. Wir wollen dann von „**Doppelkreisbewegung**“ sprechen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ihr Eintreten ist $h = k$, wie wir sogleich beweisen werden. Sie ist also auch physikalisch besonders wichtig und insbesondere beim Zeemannschen Phänomen realisiert. Die Notwendigkeit der Bedingung $h = k$ erkennt man sofort aus den Gleichungen 11). Um zu sehen, dass sie auch hinreicht, setze man in die Ausdrücke

$$a_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad a_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2},$$
$$b_1 = \sqrt{C_1^2 + D_1^2}, \quad b_2 = \sqrt{C_2^2 + D_2^2}$$

die Werte

$$h = k = q_1 q_2, \quad \gamma = \pm (q_2 - q_1)$$

ein, welche sich für gleiches h und k aus 5) ergeben. Wir finden dann $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Die Kreise werden mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, die sich wie q_1 zu q_2 verhalten.

Wir erwähnen schliesslich, dass die Kurven der Doppelkreisbewegung in eine seit langem bekannte Kurvengattung eingehen. Jede Bahnkurve einer Doppelkreisbewegung lässt sich nämlich darstellen als Bahnkurve eines mit einem Kreise k' fest verbundenen Punktes, wenn k' auf einem grösseren Kreise k von innen abrollt.* Die

---

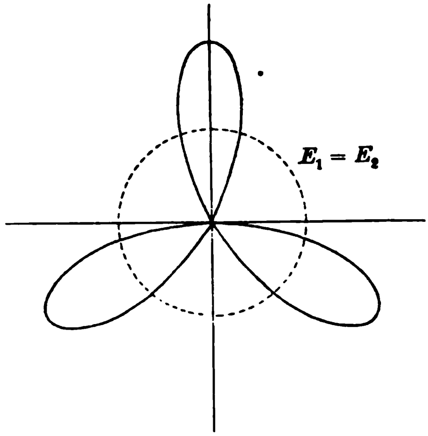
* Einfacher Beweis bei Schilling: „Über neue kinematische Modelle etc.“ diese Zeitschrift, Bd. 44.

Kurven der Doppelkreisbewegung sind somit **cyklische Kurven*** und zwar Hypotrochoiden. Die Kurven der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung dagegen sind keine cyklischen Kurven.

3. Die Gestalt der Bahnkurven der doppelelliptischen Bewegung.

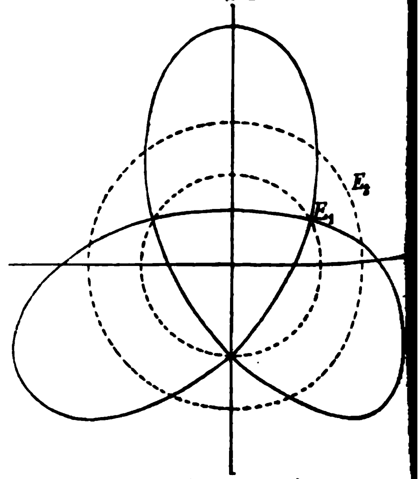
Indem wir die Bewegung eines Ions geometrisch als doppelelliptische Bewegung gedeutet haben, haben wir unsere Aufgabe noch nicht vollständig gelöst. Die doppelelliptische Bewegung ist vielmehr

Fig. 1.



$q_2 = 2q_1, \quad a_1 = a_2.$

Fig. 2



$q_2 = 2q_1, \quad a_1 < a_2.$

so formenreich, dass eine systematische Ableitung des Formenschatzes notwendig erscheint. Wir gehen zu diesem Zwecke aus von dem Falle der Doppelkreisbewegung. Der geometrisch-anschaulichen Betrachtung schicken wir zur Verifikation zwei analytische Resultate über das Auftreten von Spitzen und Wendepunkten bei der Doppelkreisbewegung voraus.

1. In welchen Fällen haben die Kurven der Doppelkreisbewegung Spitzen? Die Bedingungsgleichungen dafür lauten:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 q_1 \cos(q_1 t + \vartheta_1) + a_2 q_2 \cos(q_2 t + \vartheta_2) = 0,$$

$$\pm \frac{dy}{dt} = a_1 q_1 \sin(q_1 t + \vartheta_1) - a_2 q_2 \sin(q_2 t + \vartheta_2) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a_1^2 q_1^2}{a_2^2 q_2^2} = \frac{\sin^2(q_2 t + \vartheta_2)}{\sin^2(q_1 t + \vartheta_1)} = \frac{\cos^2(q_2 t + \vartheta_2)}{\cos^2(q_1 t + \vartheta_1)} = \frac{1 - \sin^2(q_2 t + \vartheta_2)}{1 - \sin^2(q_1 t + \vartheta_1)},$$

$$\sin^2(q_2 t + \vartheta_2) = \sin^2(q_1 t + \vartheta_1);$$

daher haben wir als Bedingung für das Auftreten von Spitzen:

---

* Ausführlich dargestellt von Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, S. 134 flg., wo jedoch die Erzeugung der Kurven durch Doppelkreisbewegung nicht berücksichtigt ist. Die Figuren 167, 168, 170, 177, 180 des Atlas stellen Kurven der Doppelkreisbewegung dar.

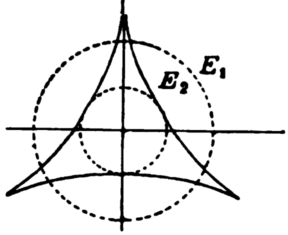
13) $$a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0.$$

Man erkennt, dass die Bedingung auch hinreichend ist, und findet als zu den Spitzen gehörige Parameterwerte t:

$$t = \frac{(2k+1))\pi - \vartheta_1 - \vartheta_2}{q_1 + q_2}, \quad (k = 0, 1 \ldots).$$

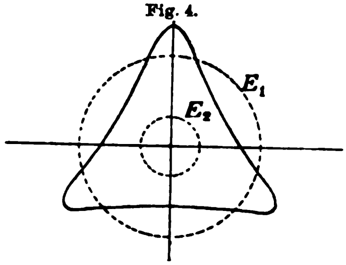
2. In welchen Fällen treten in den Kurven der Doppelkreisbewegung **Wendepunkte** auf?

Fig. 3.



$q_2 = 2q_1, \quad a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0.$

Fig. 4.



$q_2 = 2q_1, \quad a_1 q_1 - a_2 q_2 > 0,$
$a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 < 0.$

Setzen wir in die Bedingung

$$y'x'' - x'y'' = 0$$

die Werte 9) der x und y ein, so ergiebt sich, dass an den Wendepunkten die Gleichung erfüllt sein muss:

$$a_2^2 q_2^3 - a_1^2 q_1^3 + a_1 a_2 q_1 q_2 (q_2 - q_1) \cos[(q_1 + q_2)t + \vartheta_1 + \vartheta_2] = 0.$$

Wenn also Wendepunkte vorkommen sollen, muss

14) $$-1 < \frac{a_2^2 q_2^3 - a_1^2 q_1^3}{a_1 a_2 q_1 q_2 (q_2 - q_1)} < +1$$

sein, und andererseits ist diese Bedingung auch hinreichend. Wir betrachten q_1, q_2 und a_1 als feste Grössen und suchen a_2 so zu bestimmen, dass 14) erfüllt ist. Haben wir zunächst

13) $$a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0,$$

so hat der Bruch den Wert $+1$, er nimmt ab mit abnehmendem a_2 und erreicht den Wert -1, wenn

14') $$a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 = 0.$$

Für kleinere Werte von a_2 können keine Wendepunkte mehr bestehen.

Die Parameter t der Wendepunkte finden sich, wenn

$$\frac{a_2^2 q_2^3 - a_1^2 q_1^3}{a_1 a_2 q_1 q_2 (q_2 - q_1)} = \cos\alpha$$

gesetzt wird, zu

$$t = \frac{(2k+1)\pi - \alpha - \vartheta_1 - \vartheta_2}{q_1 + q_2} \quad \text{und} \quad t = \frac{(2k+1)\pi + \alpha - \vartheta_1 - \vartheta_2}{q_1 + q_2}.$$

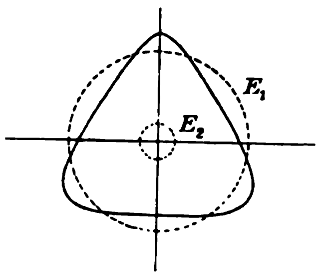
Für $a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0$ fallen daher die Wendepunkte mit den Spitzen zusammen. Dann treten an Stelle jeder Spitze zwei Wendepunkte auf, welche sich mit abnehmendem a_2 von einander entfernen und für

$$a_2 = a_1 \frac{q_1^2}{q_2^2}, \quad (\alpha = \pi)$$

mit den von den benachbarten Spitzen herrührenden Wendepunkten verschmelzen. —

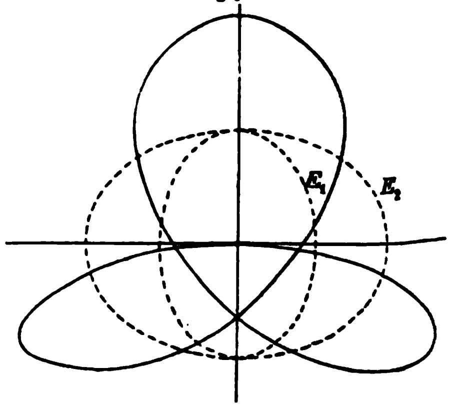
Wir gehen hiernach zur anschaulich-geometrischen Untersuchung der Doppelkreisbewegung über. Die Bahnkurven der Doppelkreisbewegung oscillieren zwischen zwei Kreisen vom Radius $a_1 + a_2$ und $|a_1 - a_2|$. Diese Grenzkreise werden berührt, wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2)

Fig. 5.



$q_2 = 2 q_1$, $a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 > 0$.

Fig. 9.



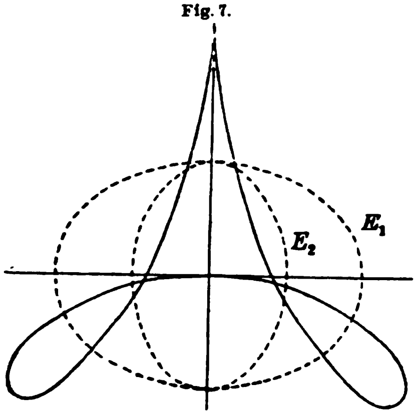
$b_1 = b_2$, $a_1 = \frac{a_2}{2}$.

dasselbe bez. um π verschiedene Azimuth haben. Wir wollen insbesondere den Fall geschlossener Bahnkurven betrachten, also den Fall, dass q_1 und q_2 in einem rationalen Verhältnis $\frac{m}{n}$ stehen (m und n relativ prime ganze Zahlen) und wollen fragen: In wieviel Punkten berührt die geschlossene Kurve den äusseren und den inneren Kreis? Die Kurve schliesst sich nach m Umläufen des Punktes (x_1, y_1) und n Umläufen des Punktes (x_2, y_2). Denken wir uns (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf dem gleichen Kreise laufend, so lautet unsere Frage: Wieviel Begegnungen und diametrale Stellungen finden im Verlaufe der m bez. n Umläufe statt? Ist (x_1, y_1) fest und durchläuft nur (x_2, y_2) seinen Kreis n mal, so erhalten wir n Begegnungen und n diametrale Stellungen; nun durchläuft aber (x_1, y_1) m mal seinen Kreis und zwar in entgegengesetzter Richtung. Daher durchläuft (x_2, y_2) relativ zu (x_1, y_1) den Kreis $m + n$ mal. Wir haben also $m + n$ Begegnungen und diametrale Stellungen. Also:

Ist $\frac{q_1}{q_2} = \frac{m}{n}$, so werden die Grenzkreise $a_1 + a_2|$ und $|a_1 - a_2|$ $m + n$ mal von der geschlossenen Bahnkurve berührt.

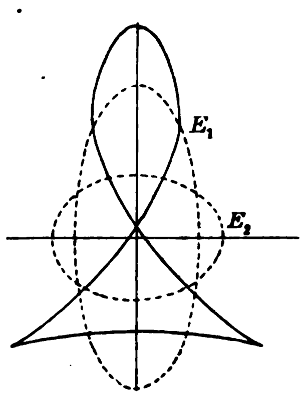
Gehen wir jetzt von dem einfachsten Falle aus, dass $a_1 = a_2$ ist. Der innere Kreis reduziert sich auf den Nullpunkt. Ein zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen durch den Nullpunkt gelegener Kurventeil muss ein einfaches Oval sein, denn Wendepunkte und Spitzen können nach dem Früheren nicht auftreten, und eine leichte geometrische Betrachtung ergiebt die Unmöglichkeit von Doppelpunkten. Alle diese Ovale müssen ferner nach Symmetrie einander kongruent sein. Die ganze Bahnkurve ist also eine Rosette um den Nullpunkt, welche, wenn $\frac{q_1}{q_2} = \frac{m}{n}$ ist, aus $m + n$ kongruenten Ovalen besteht (siehe Fig. 1). Stehen q_1 und q_2 in irrationalem Verhältnis, so approximieren wir $\frac{q_1}{q_2}$ durch eine Reihe von Brüchen $\frac{m_i}{n_i}$. Die Bahn-

Fig. 7.



$b_1 = b_2, \quad a_1 = 2 a_2.$

Fig. 8.



$a_1 = \frac{7}{10} a_2,$

$b_1 = \frac{5}{2} b_2.$

kurven für diese rationalen Verhältnisse nähern die Kurve für das irrationale Verhältnis in Bezug auf die $m_i + n_i$ ersten Ovale immer genauer an, je grösser i ist.

Die übrigen Formen der Doppelkreisbewegung leiten sich aus dieser einfachsten folgendermassen ab. Ist zuerst $a_2 > a_1$, so erweitert sich der Nullpunkt zu einem Kreis, um welchen die einzelnen Ovale der Bahnkurve herumgreifen, so dass sie ihn mit der konkaven Seite berühren (siehe Fig. 2). Als Grenzfall ergiebt sich für $a_1 = 0$ eine Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit q_2. Ist $a_2 < a_1$, so erhalten wir zunächst Schleifenkurven, welche einen inneren Kreis mit der konvexen Seite berühren. Die Schleifen werden mit abnehmendem $\frac{a_2}{a_1}$ kleiner, indem die Grenzkreise $|a_1 + a_2|$ und $|a_1 - a_2|$ sich näher rücken, schliesslich gehen sie in Spitzen über (siehe Fig. 3). Mit weiter abnehmendem $\frac{a_2}{a_1}$ werden die Spitzen in bekannter Weise in Wendepunkte aufgelöst, so dass an Stelle jeder Spitze zwei „zusammengehörige“ Wendepunkte treten (siehe Fig. 4). Der weitere Fortgang ist dann der, dass die zusammengehörigen Wendepunkte sich von einander entfernen, bis sie mit den von den benachbarten Spitzen herrührenden Wendepunkten zusammenfallen. In den Kurven wird demgemäss der gegen den inneren Grenzkreis konvexe Teil immer kleiner und verschwindet zuletzt vollständig. Die Bahnkurve wird eine überall konvexe Kurve ohne Singularitäten, welche zwischen den Grenzkreisen $(a_1 + a_2)$ und $(a_1 - a_2)$ oscilliert (siehe Fig. 5). Als Grenzfall ergiebt sich für $a_2 = 0$ eine einfache Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit q_1.*

Zur Behandlung der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung gehen wir abermals von unserer Rosettenkurve (siehe Fig. 1) aus. Deformieren wir die beiden gleichen Kreise $|a_1|$ und $|a_2|$ zu zwei kontinuierlichen Serien von Ellipsen E_1 und E_2, so können wir hinsichtlich der entsprechenden Veränderungen unserer Kurven den Satz aufstellen: Die einzelnen Ovale der Rosette erleiden qualitativ die gleichen Veränderungen wie bei der Doppelkreisbewegung: sie vergrössern sich entweder analog Fig. 2 oder sie ziehen sich zusammen und gehen schliesslich in Spitzen über, welche ihrerseits sich wieder in Wendepunkte auflösen. Der wesentliche Unterschied zwischen der allgemeinen und der speziellen Bewegung aber besteht in Folgendem: während bei der Doppelkreisbewegung alle Ovale gleichzeitig und in gleicher Weise sich mit den Kreisen E_1 und E_2 veränderten, besteht diese Gleichberechtigung aller Ovale bei der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung nicht mehr. Die einzelnen Ovale verändern sich mit variierendem E_1 und E_2 in verschiedener Weise; es können insbesondere die Fälle eintreten, dass einzelne Ovale sich nach Fig. 2 verändern, während andere sich in Spitzen- und Wendepunktskurven transformieren, und dass einzelne Ovale diesen Prozess bereits durchgemacht haben, während andere noch im Übergangszustand der Schleifenkurven sind.

Wir fragen insbesondere nach den Bedingungen für das Auftreten von Spitzen. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{a_1}{a_2} = \alpha, \quad \frac{b_1}{b_2} = \beta, \quad \frac{q_2}{q_1} = q,$$

so erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$15) \qquad \begin{cases} \alpha \cos(q_1 t + \vartheta_1) + q \cos(q_2 t + \vartheta_2) = 0, \\ \beta \sin(q_1 t + \vartheta_1) - q \sin(q_2 t + \vartheta_2) = 0. \end{cases}$$

Bei festgehaltenen q, ϑ_1, ϑ_2 sind hierdurch α und β als Funktionen eines Parameters t dargestellt. Deuten wir also α und β als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so bilden die Wertepaare

* Die Kurvenserie 1—5 zeigt auffallende Ähnlichkeit mit den Bahnkurven, welche die Spitze eines symmetrischen schweren Kreisels beschreibt (siehe Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 2. Heft, 1898). Der Grund liegt darin, dass sich bei Darstellung in Polarkoordinaten r, φ beide Male r als periodische Funktion von φ mit einer reellen Periode ergiebt.

(α, β), welche Spitzen liefern, eine Kurve S, welche insbesondere bei rationalem q algebraisch ist. Jede kontinuierliche Folge von Ellipsen E_1 und E_2 wird in dieser Ebene gleichfalls durch eine Kurve, E, repräsentiert. Sehen wir von dem Falle ab, dass E und S ein endliches Stück gemein haben, so können wir sagen: Jeder Schnitt der Kurven E und S bedeutet das Verschwinden einer Schleife unserer Ausgangskurve oder die Aufnahme einer neuen Schleife. — Genauere allgemeine Resultate lassen sich über die Kurve S nicht aufstellen: es lässt sich nur ein Gebiet der $(\alpha\beta)$-Ebene angeben, innerhalb dessen die Kurve vollständig verlaufen muss. Aus den Gleichungen 15) folgt nämlich durch Quadrieren und Substituieren

$$\alpha^2 - q^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\sin^2(q_1 t + \vartheta_1),$$

daher

$$0 \gtreqless \frac{\alpha^2 - q^2}{\alpha^2 - \beta^2} \leqq 1.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder

16) $$\alpha \gtreqless q \geqq \beta \quad \text{oder} \quad \alpha \lesseqgtr q \leqq \beta$$

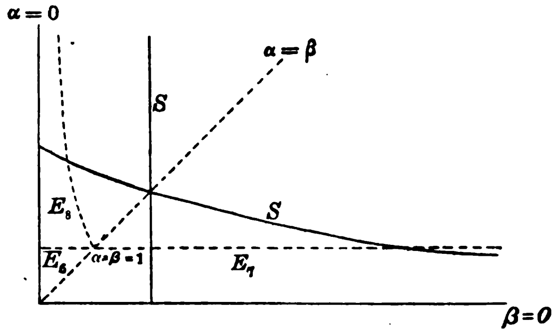
ist. Diese beiden Ungleichungen definieren zwei unendliche, längs eines Teiles der Geraden $\alpha = \beta$ zusammenhängende Gebiete der $(\alpha\beta)$-Ebene, innerhalb deren die Kurve S vollständig liegen muss. Analytisch gesprochen, sind die Ungleichungen 16) notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für das Auftreten von Spitzen.

Wir betrachten nun ein Kurvenstück E mit monotoner Tangente, welches von einem Punkte der die Doppelkreisbewegung repräsentierenden Geraden $\alpha = \beta$ ausgeht und eine der beiden Axen, beispielsweise die α-Axe, zur Asymptoten hat. Dem unendlich fernen Punkt des Kurvenstücks entspricht augenscheinlich die Lissajoussche Figur

$$x = a_1 \sin(q_1 t + \vartheta_1), \quad y = b_2 \cos(q_2 t + \vartheta_2),$$

denn wir haben an dem unendlich fernen Punkt $\alpha = \infty$, $\beta = 0$. Dem Ausgangspunkt entspreche die Doppelkreisbewegung mit den Konstanten a_1, b_2. Die Kurve repräsentiert dann Bewegungen mit den Konstanten a_1, a_2', b_1', b_2, wo $a_1 > b_1'$, $a_2' < b_2$ ist, d. h. Bewegungen, bei welchen von den beiden Ellipsen die eine verlängert, die andere abgeplattet ist. Diese Bewegungen sind von besonderer Wichtigkeit, weil nach 12) die Bewegungen der Ionen sämtlich diesen Typus aufweisen. Jede Ionenbewegung lässt sich daher als Übergangsfigur zwischen einer Doppelkreisbewegung und einer Lissajousschen Figur mit den gleichen Werten der q_1, q_2, ϑ_1, ϑ_2 auffassen. Ist uns umgekehrt eine Kurve des Übergangstypus mit den Konstanten a_1, a_2, b_1, $b_2 (a_1 > b_1,\ a_2 < b_2)$ vorgelegt, so haben wir eine einfache Methode, um uns über ihren geometrischen Charakter zu orientieren: wir verbinden den Punkt (α, β) durch ein Kurvenstück E mit monotoner Tangente, welches die α-Axe zur Asymptoten hat, mit dem Punkte $\alpha = \beta = \frac{a_1}{b_2}$ und betrachten die Schnittpunkte von E mit S. Beachten wir, dass an jedem dieser Schnittpunkte Verlust oder Aufnahme einer Schleife eintritt, und behalten wir die Gestalt der resultierenden Lissajousschen Figur im Auge, so sind wir im Stande, die Kurve der doppelelliptischen Bewegung mit ziemlicher Genauigkeit qualitativ festzulegen.

Fig. 9.



Die Figuren 6, 7, 8 dienen zur Illustration des Gesagten. Es sind doppelelliptische Bewegungen, welche charakterisiert sind durch $q = 2$, $\vartheta_1 = \vartheta_2$, daher Übergangskurven zwischen Fig. 1 und Lissajousschen Figuren. Letztere sind der Reihe nach: eine Doppelschwingung längs der x-Axe, eine einfache Schwingung längs der x-Axe und eine Lemniskate, deren Brennpunkte auf der y-Axe liegen. Die obenstehende Zeichnung der $(\alpha\beta)$-Ebene, in welcher die Kurven E die Nummer der entsprechenden Figur als Indices tragen, zeigen den Verlauf des Übergangs an: in Fig. 6 bleiben die Schleifen stets erhalten und werden mit abnehmendem α breiter und flacher, in Fig. 7 lösen sich die beiden noch restierenden Schleifen gleichzeitig in Wendepunkte auf, in Fig. 8 bleibt die Schleife der oberen Halbebene erhalten und geht in das obere Oval der Lemniskate über, während die Spitzenkurve der unteren Halbebene zur Wendepunktskurve und schliesslich zum unteren Oval der Lemniskate wird. Die Kurve S besteht aus einer Hyperbel, $\beta(\alpha + \beta) = 8$, und der Geraden $\alpha = 2$.

4. Die räumliche Anordnung der Figuren. Fall beliebig gerichteter Kraftlinien.

Wir haben im Vorhergehenden nur die in der (xy)-Ebene entstehenden Figuren betrachtet. Die räumliche Anordnung der Bewegung erhalten wir wegen $z = w_0 t + z_0$ einfach dadurch, dass wir die ebenen Figuren auf einem senkrechten Cylinder sich in die Höhe schrauben lassen.

Wir gehen nunmehr zu einem homogenen Magnetfeld mit beliebig gerichteten Kraftlinien über, haben also die Gleichungen I″ zu integrieren. Durch Differentiation der beiden ersten Gleichungen nach t und Substitution aus der letzten eliminieren wir die z-Koordinate und erhalten:

$$\text{II}'.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = \gamma\dfrac{dv}{dt} - (\beta^2 + h)u + \alpha\beta v, \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = -\gamma\dfrac{du}{dt} - (\alpha^2 + k)v + \alpha\beta u, \end{cases}$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen I‴a), b) nur durch die Zusatzglieder $\alpha\beta v$, $\alpha\beta u$. Durch eine Drehung des Koordinaten-Systems können wir ihnen vollständig die alte Form verleihen:

$$\text{III}'.\quad \frac{d^2u_1}{dt^2} = \gamma\frac{dv_1}{dt} - h_1u_1, \quad \frac{d^2v_1}{dt^2} = -\gamma\frac{du_1}{dt} - k_1v_1,$$

wo h_1 und k_1 positive Grössen sind. Der Drehungswinkel φ ist dabei gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\alpha\beta}{(\beta^2 + h) - (\alpha^2 + k)}.$$

Wir können also den Satz aussprechen: „Die Figuren in der (xy)-Ebene sind auch bei beliebiger Richtung der Kraftlinien doppelelliptische Bewegungen, welche der Bedingung 12) unterworfen sind.“ Hervorzuheben ist, dass auch bei gleichen h und k die h_1 und k_1 verschieden sind, also auch in diesem Falle allgemeine doppelelliptische Bewegungen, nicht mehr Doppelkreisbewegungen auftreten. Hierdurch erweist sich unsere Einführung der doppelelliptischen Bewegung physikalisch als berechtigt.

Ein wesentlicher Unterschied gegen früher dagegen besteht hinsichtlich der z-Koordinate. Wir finden z nach Bestimmung von u und v durch zweimalige Quadratur: es hat sonach dieselben Periodizitätseigenschaften wie x und y, nur tritt infolge der Integration ein Translationsglied at hinzu.

5. Die numerischen Verhältnisse bei der Zeemannschen Versuchsanordnung.

Von besonderem Interesse werden diejenigen Bahnkurven sein, welche bei der Zeemannschen Versuchsanordnung thatsächlich von den Ionen durchlaufen werden.

Zeemann (l. c.) beschreibt diese als „Ellipsen, die sich langsam drehen.“ Wir haben die Berechtigung diese Ausdrucksweise zu untersuchen. Unserer Diskussion legen wir die ursprüngliche Zeemannsche Anordnung zu Grunde: wir beobachten glühende *Na*-Dämpfe, welche einem homogenen, der Strahlen-Richtung parallelen Magnetfeld von 22400 absoluten Einheiten ausgesetzt werden. Die

Bewegungsgleichungen sind die Gleichungen I''' mit $h = k$, es handelt sich um die numerischen Werte der Grössen h und γ.

Wir haben zuerst
$$h = \frac{4\pi^2}{\tau^2},$$
wo τ die Schwingungsdauer der D-Linie, bez. einer der beiden D-Linien, bezeichnet. Indem wir uns hier wie im Folgenden auf einstellige Genauigkeit beschränken, nehmen wir für die Wellenlängen beider D-Linien den übereinstimmenden Wert
$$\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$$
an und berechnen daraus
$$\tau = \frac{\lambda}{\omega} = 2 \cdot 10^{-15}, \quad h = \pi^2 \cdot 10^{30} = 10^{31}.$$

Berechnen wir ferner
$$\gamma = \frac{C}{\omega}\,\frac{\varepsilon}{\mu}.$$
Für $\frac{\varepsilon}{\mu}$ ergiebt sich nach Rechnungen von Herrn Geheimrat Riecke aus der Verschiebung der D-Linien der Wert $5 \cdot 10^{17}$. Dies liefert
$$\gamma = 3 \cdot 10^{11}$$
und
$$q = \frac{q_2}{q_1} = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^4 + 4\gamma^2 h} + (\gamma^2 + 2h)}{-\sqrt{\gamma^4 + 4\gamma^2 h} + (\gamma^2 + 2h)}} = \sqrt{\frac{1 + 10^{-4}}{1 - 10^{-4}}} = 1 + 10^{-4}.$$

Die bei der praktischen Ausführung des Zeemannschen Versuches auftretenden Kurven sind ausgezeichnet durch nahezu gleiche Werte der Parameter q_1 und q_2. Die Werte der beiden Parameter selbst finden wir aus
$$h = q_1 \cdot q_2 = q \cdot q_1^2 = \frac{q_2^2}{q}:$$
$$q_1 = \sqrt{h}(1 - \vartheta \cdot 10^{-4}), \quad q_2 = \sqrt{h}(1 + \vartheta \cdot 10^{-4}),$$
$$\frac{1}{4} < \vartheta < \frac{3}{4}.^{*}$$

Um die Werte der a_1 und a_2 zu erhalten, haben wir uns zunächst über die Anfangsbedingungen des Problems klar zu werden. Das Ion schwingt vor Einführung des Magnetfeldes in einer Ellipse, von der wir, ohne die Allgemeinheit der Resultate zu beeinträchtigen, voraussetzen können, dass sie die Koordinatenaxen zu Hauptaxen hat. Wir haben also vor Einführung des Magnetfelds je nach dem Drehungssinn
$$x = \alpha \sin \sqrt{h}\, t, \quad y = \mp \beta \cos \sqrt{h}\, t.$$
Ferner ist augenscheinlich gleichgiltig, an welchem Punkte der Ellipse bei beginnender Wirkung des Magnetfeldes sich das Ion be-

* Zur genaueren Bestimmung von ϑ reicht unsere Genauigkeit nicht aus.

findet. Wir nehmen zur Bequemlichkeit diese Anfangslage auf der x-Axe an und erhalten daher die Anfangsbedingungen:

$$x_0 = \alpha, \qquad y_0 = 0,$$
$$u_0 = 0, \qquad v_0 = \mp \sqrt{h}\,\beta.$$

Dem oberen Vorzeichen entspricht eine Anfangsbewegung von dem Drehsinn der durch das Magnetfeld bei positivem γ hervorgerufenen Kreisbewegung, dem unteren Vorzeichen eine Anfangsbewegung von entgegengesetztem Drehsinn. Wir haben die beiden Fälle getrennt zu behandeln, wobei wir γ als positiv voraussetzen wollen.

Fig. 10.

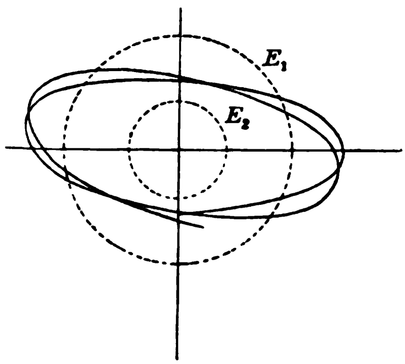
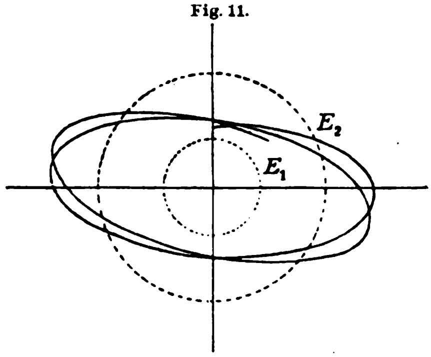


Fig. 11.



Im Falle des oberen Vorzeichens erhalten wir

$$2a_1 = |\beta - (1 + \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha|,$$
$$2a_2 = \beta + (1 - \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha$$

und haben demnach $a_1 = a_2$ einmal für $\alpha = 0$, d. h. im Falle linear längs der y-Axe polarisierten Lichtes, und dann nochmals für

$$\beta = \vartheta \cdot 10^{-4}\alpha,$$

d. h. im Falle einer ausserordentlich stark abgeplatteten Ellipse. Zwischen beiden Werten ist $a_1 < a_2$, die Kurven der Doppelkreisbewegung sind also vom Typus der Fig. 2. Wir ersehen aus Fig. 10,* dass sie für mittlere Werte des Verhältnisses $\frac{\alpha}{\beta}$ die Zeemannsche Bezeichnung „Ellipsen die sich langsam drehen“ zulassen.

Dagegen sehen wir auch sofort, dass diese Bezeichnung nicht immer giltig ist. In der That erhalten wir ja für $\beta = \vartheta \cdot 10^{-4}\alpha$ Rosettenkurven, für noch kleineres β Spitzen- und Wendepunktskurven.

Ähnlich liegen die Verhältnisse im Falle des unteren Vorzeichens. Hier ist

$$2a_1 = \beta + (1 + \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha,$$
$$2a_2 = |\beta - (1 - \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha| .$$

* In den Figuren 10 und 11 ist $q = 1{,}05$.

Für $\alpha = 0$ erhalten wir die Rosetten, welche dann in Schleifen-, Spitzen-, Wendepunkts- und überall konvexe Kurven übergehen, bis für

$$\beta = \alpha(1 - \vartheta \cdot 10^{-4})$$

einfache Kreisbewegung eintritt. Von da bis $\beta = 0$ erhalten wir wieder überall konvexe Kurven und Wendepunktskurven. Die Fig. 11 stellt eine solche überall konvexe Kurve für mittlere Werte von $\frac{\alpha}{\beta}$ dar; auch sie rechtfertigt die Zeemannsche Bezeichnung.

Wir können daher im ganzen die Zeemannsche Bezeichnung dahin kritisieren, dass wir sagen: Sie ist richtig für alle Ellipsen mit mittleren Exzentrizitäten, sie ist falsch für Ellipsen, deren Axenverhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ mit 10^{-4} oder mit 10^4 vergleichbar sind.

Da im natürlichen Lichte alle Polarisationszustände realisiert sind, so werden bei Ausführung des Zeemannschen Versuches thatsächlich alle unsere Kurventypen als Bewegungskurven der Ionen auftreten.

Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe.

Von

Dr. F. Fitting

in M.-Gladbach.

Einleitung.

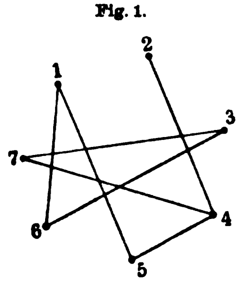
Auf einem n-feldigen Schachbrette giebt es:

$$n!$$

verschiedene Wege von Feld zu Feld, auf welchen in ganz willkürlicher Reihenfolge jedes Feld, aber jedes nur einmal berührt wird. Man kann nun das Fortschreiten von bestimmten Feldern zu gewissen anderen als unerlaubt ausschliessen und fragen, wie viele solcher Wege dann noch übrig bleiben. Da eine erschöpfende Beantwortung dieser Frage auch eine Entscheidung über die Anzahl der Rösselsprünge, der Königszüge auf beliebig gestalteten Schachbrettern und überhaupt die Lösung aller ähnlichen Aufgaben vorbereitet, so schien sie, abgesehen von dem ihr an sich innewohnenden Interesse, schon aus diesem Grunde eine Bearbeitung wohl zu verdienen.

Da es bei unserer Aufgabe auf die gegenseitige Lage der n Felder ganz und gar nicht ankommt, so empfiehlt es sich, ihnen behufs handlicherer Darstellung n willkürlich liegende Punkte beliebig zuzuordnen. Die weitere dieser Arbeit zu Grunde gelegte Veranschaulichung der Data des Problems wird aus Fig. 1 ersichtlich:

Fig. 1.



Die Punkte 1 und 2, 2 und 6 etc. sind nicht durch gerade Linien verbunden. Damit werde dargestellt, dass ein Sprung von Punkt 1 nach Punkt 2, von Punkt 2 nach Punkt 6, oder umgekehrt, erlaubt ist. Derartige Bewegungsfreiheiten, durch die Zeichen $\underset{\smile}{12}$, $\underset{\smile}{21}$, $\underset{\smile}{26}$, $\underset{\smile}{62}$ angedeutet, sollen **Wegelemente** heissen, weil sie Teile der zu zählenden Wege sein können, und die Elemente $\underset{\smile}{12}$ und $\underset{\smile}{21}$ ausserdem noch durch das

Zeichen $\underset{\smile}{\widehat{12}}$ und die Benennung **Elementenpaar** zusammengefasst werden. Dagegen sind z. B. die Punkte 1 und 6, 2 und 4 je durch eine Gerade verbunden: ein direkter Sprung zwischen diesen Punkten soll dadurch als unerlaubt ausgeschlossen werden.

Man kann danach die Vorstellung des Schachbrettes ganz fallen lassen und der Aufgabe folgende Fassung geben:

„*Zeichnet man n Punkte und scheidet von den $\frac{n(n-1)}{2}$ zwischen ihnen vorhandenen Wegelementen eine gewisse Anzahl dadurch aus, dass man eine Reihe von Punkten zu je zweien geradlinig verbindet, auf wie vielfache Weise lässt sich unter alleiniger Benutzung der restierenden Wegelemente von Punkt zu Punkt fortschreiten, so dass jeder Punkt, aber jeder nur* ***einmal*** *berührt wird?*“

Unter einem **Wege** wird jede Aneinanderreihung der n Punkte verstanden, welche der Aufgabe entspricht.

Die in jedem besonderen Falle vorliegende Anordnung von Punkten und Geraden mag im Hinblick auf die dadurch gegebenen Wege ein **Wegkomplex** genannt werden.

Die Summe sämtlicher Wege eines gegebenen Komplexes heisse die **Wegezahl des Komplexes**.

Kapitel I.

Einfachere Fälle.

1. Es werde ein einziges Paar von Wegelementen ausgeschieden $\left(\text{in Fig. 2: } \underset{\smile}{\widehat{12}}\right)$.

Von den anfangs gezählten $n!$ Wegen kommen alle in Wegfall, die die Elemente $\widehat{12}$ und $\widehat{21}$ enthalten. Diese Wege werden, wenn man die Gerade $\overline{12}$ als Punkt betrachtet, gezählt durch die doppelte

Fig. 2.

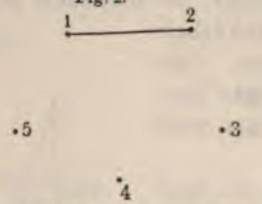
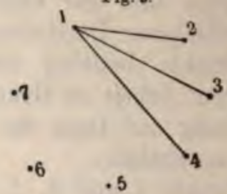


Fig. 3.



Anzahl der zwischen dem neuen Punkte 12 und den $(n-2)$ übrigen bestehenden Wege; d. h. unter den $n!$ Wegen giebt es

$$2(n-1)!$$

die das Elementenpaar $\underset{\smile}{\widehat{12}}$ enthalten. Fallen diese fort, so bleiben

$$\text{I)} \qquad n! - 2(n-1)!$$

Wege übrig.

2. Es mögen mehrere von demselben Punkte ausgehende Elementenpaare wegfallen (in Fig. 3: $\widehat{12}$, $\widehat{13}$, $\widehat{14}$).

Sei die Anzahl der wegfallenden Elementenpaare allgemein a, so sind für jedes einzelne unter ihnen nach 1) von den ursprünglichen $n!$ Wegen: $2(n-1)!$ Wege in Abzug zu bringen, im ganzen also:

$$2a(n-1)!$$

Wollte man jedoch

$$n! - 2a(n-1)!$$

bilden, so wäre zu viel weggenommen: nämlich alle Wege, die z. B. die Wegstücke $\overrightarrow{214}$ und $\overrightarrow{412}$ in sich schliessen würden doppelt, einmal unter denen, die das Element $\widehat{21}$ enthielten und dann noch einmal unter denen, die das Element $\widehat{41}$ enthielten, abgezogen sein, müssen also einmal wieder addiert werden. Die Anzahl dieser wieder zu addierenden Wege wird analog dem bei 1) angewendeten Verfahren ermittelt, indem man die Wegteile 213, 312, 214, 412 etc. als Punkte nimmt. Da mit den a wegfallenden Elementenpaaren sich $2\binom{a}{2}$ solcher Wegteile bilden lassen, und zwischen jedem einzelnen dieser als Punkte betrachteten Wegteile und den $(n-3)$ übrigen Punkten $(n-2)!$ Wege möglich sind, hat man wieder zu addieren:

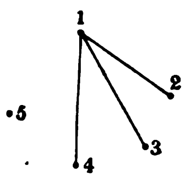
$$2\binom{a}{2}(n-2)!$$

Wege. Danach das Resultat:

$$\text{II)} \qquad n! - 2a(n-1)! + 2\binom{a}{2}(n-2)! = \binom{n-a}{2}(n-2)!$$

Vielleicht trägt die hier eingestreute Betrachtung eines einzelnen Falles dazu bei, über die Zielpunkte dieser Arbeit Licht zu verbreiten: Für $n = 5$, $a = 3$ liefert II) die Zahl von 12 Wegen. Fig. 4 stellt den dazugehörigen Komplex dar, und thatsächlich lassen sich an ihm nur folgende 12 Wege herstellen:

Fig. 4.



21345	34512
21435	43512
21453	45312
21354	35412
21534	53412
21543	54312

Übrigens lässt dies Beispiel auch erkennen, dass die Wegezahl immer eine gerade Zahl sein muss.

Kapitel II.

Formeln für die Anzahl von Wegen, die Elemente bestimmter Elementenpaare enthalten sollen.

Richtet man die Aufmerksamkeit auf ein bestimmtes Elementenpaar irgend eines Komplexes, so beobachtet man bei Bildung der Wege, dass es im allgemeinen unter ihnen solche giebt, die eines der Elemente des Paares enthalten und andere, wo dies nicht der Fall ist (z. B. kommt in dem Wege 14523 des Komplexes von Fig. 2 das Elementenpaar $\widehat{\underset{\smile}{15}}$ nicht vor, wohingegen in dem Wege 15234 desselben Komplexes das Element 15 auftritt).

Nach dieser orientierenden Vorbemerkung bezeichne W die Wegezahl eines gegebenen Komplexes. Ändert man die Gerade a desselben in ein Elementenpaar um (indem man sie aus der Figur tilgt, welche den Komplex darstellt), so werde mit W_a die Wegezahl des neuen Komplexes bezeichnet; entsprechend sei

W_{ab}, W_{abc} etc. die Wegezahl der Komplexe, in denen auch die Geraden b, resp. c noch in Elementenpaare verwandelt sind.

Unter W^a, W^{ab} etc. werde ferner die Zahl der Wege verstanden, bei denen in den geänderten Wegkomplexen jedesmal Elemente sämtlicher neu hinzutretenden Elementepaare als Wegteile vorkommen müssen.

Die folgenden Formeln sind dann nur die mathematischen Einkleidungen einfacher logischer Disjunktionen:

$$\text{I)} \qquad W_a = W + W^a,$$

$$\text{II)} \qquad W_{ab} = W^{ab} + W^a + W^b + W$$

$$\text{III)} \qquad W_{abc} = W^{abc} + W^{ab} + W^{ac} + W^{bc} + W^a + W^b + W^c + W$$

$$\text{IV)} \qquad W^{abcd} = W^{abcd} + \cdots$$

u. s. w.

Mittels derselben lassen sich die Grössen

W^a, W^{ab} u. s. w. durch W, W_a, W_b u. s. w.

ausdrücken, wodurch ein Hilfsmittel geschaffen wird, mathematische Beziehungen zwischen Wegezahlen verschiedener Komplexe zu gewinnen.

Aus I) und analogen Gleichungen folgen die Gleichungen:

$$\text{Ia)} \qquad \begin{cases} W^a = W_a - W \\ W^b = W_b - W \\ W^c = W_c - W \end{cases}$$

u. s. w.

Aus II) und analogen Gleichungen nach Einführung der Werte aus Ia):

$$\text{IIa)} \quad \begin{cases} W^{ab} = W_{ab} - (W_a + W_b) + W \\ W^{ac} = W_{ac} - (W_a + W_c) + W \\ W^{bc} = W_{bc} - (W_b + W_c) + W \end{cases}$$

u. s. w.

Aus III) ergiebt sich:

$$\text{IIIa)} \quad \begin{cases} W^{abc} = W_{abc} - (W_{ab} + W_{ac} + W_{bc}) \\ \qquad\qquad + (W_a + W_b + W_c) - W. \end{cases}$$

Die Gesetzmässigkeit in der Bildung der Gleichungen Ia), IIa) und IIIa) tritt so klar zu Tage, dass danach

$$W^{abcd}, \; W^{abcde} \quad \text{u. s. w.}$$

leicht gebildet werden kann.

Kapitel III.

Haupt-Rekursionsformeln.

A. Ableitung der ersten Formel.

Tilgt man zwischen n Punkten a Elementenpaare in beliebiger Anordnung durch Zeichnung von Geraden, hierauf zwischen denselben n Punkten statt jener a andere Elementenpaare, so ist im allgemeinen die Anzahl der Wege in beiden Fällen verschieden. Demnach hängt diese zwar von a und n ab, ist aber nicht eine Funktion jener beiden Grössen allein.

Es lässt sich jedoch, wie das Folgende zeigen wird, eine recht brauchbare, ganz allgemeine Rekursionsformel gewinnen, wenn man davon ausgeht, die Abhängigkeit von a und n allein ins Auge zu fassen, und, obwohl man ein Funktionszeichen sonst in anderem Sinne verwendet und es hier eine Vieldeutigkeit in sich schliesst, mit

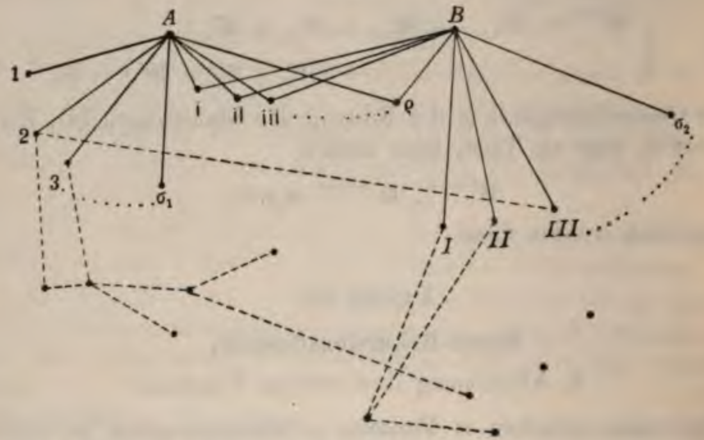
$$W_{(n,\,a)}$$

„die Anzahl aller zwischen n Punkten möglichen Wege zu bezeichnen, wenn zwischen ihnen a Elementenpaare wegfallen.“

§ 1. Man gehe von irgend einem Wegkomplexe aus und fasse zwei seiner Punkte ins Auge, deren Elementenpaar, kurz Δ genannt, nicht durch eine Gerade aufgehoben ist. (A und B in Fig. 5.) Zum Verständnis der Fig. 5 ist zu sagen, dass sie nicht einen ganzen Komplex, sondern nur die Endpunkte A und B des wegzulassenden Elementenpaares Δ und die von ihnen aus nach anderen Punkten — von A nach $1, 2 \ldots \sigma_1$, von B nach $\mathrm{I}, \mathrm{II} \ldots \sigma_2$ und von A und B gleichzeitig nach ϱ anderen Punkten — bereits fehlenden Elementenpaare vollzählig zur Darstellung bringen soll. Weitere Punkte und sonstige Geraden können als für das Folgende belanglos in beliebiger Zahl und Anordnung zur Figur hinzugedacht werden. (Durch einige punktierte Geraden an der Figur angedeutet.)

Unter den $W_{(n,a)}$ Wegen werden solche vorhanden sein, in denen die Elemente des Paares als Teile vorkommen und solche, wo

Fig. 5.



dies nicht der Fall ist (indem zwischen A und B andere Punkte berührt werden). Für die Gesamtheit der ersteren werde ein passendes Zeichen, etwa $\overset{\varDelta}{\varphi}_{(n,a)}$ eingeführt; die anderen fassen alle Wege zusammen, die zwischen den n Punkten existieren, wenn ausser den früheren a Elementenpaaren auch das Paar $\varDelta$ noch wegfällt. Bezeichnet man deren Summe durch

$$W_{\left(n,\, a+\overset{\varDelta}{1}\right)},$$

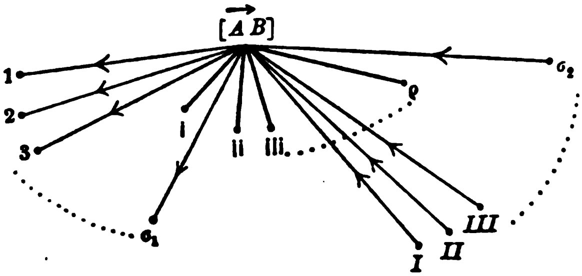
so gewinnt man die Gleichung (siehe Kap. II):

$$\text{I.} \qquad W_{(n,a)} = \overset{\varDelta}{\varphi}_{(n,a)} + W_{\left(n,\, a+\overset{\varDelta}{1}\right)}.$$

§ 2. Es werde eine andere Darstellung gesucht für $\overset{\varDelta}{\varphi}_{(n,a)}$. Zu dem Zwecke ziehe man wiederum [siehe S. 138, 1.] A und B in einen einzigen Punkt $[AB]$ zusammen (siehe Fig. 6a und b). Dann verschmelzen auch die von den Punkten i, ii, iii ... ϱ nach A und B gezogenen Geraden je zu einer einzigen.

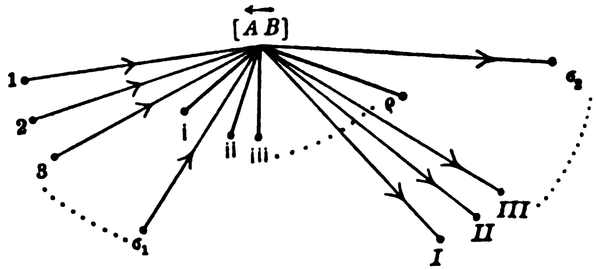
Man betrachte zuerst die Wege, die das Element $\widehat{AB}$ enthalten (Fig. 6a deutet dies durch den Pfeil über $[AB]$ an); um deren Anzahl an Fig. 6a, die einen Punkt weniger hat als Fig. 5, zu zählen, hat man zunächst zu überlegen, wie die Verhältnisse der früheren Figur sich auf die neue übertragen lassen. Die Zahl und Anordnung der nicht von A oder B ausgehenden Geraden hat sich nach der Vereinigung dieser Punkte natürlich nicht geändert und ist ganz aus der Zeichnung weggelassen. Dagegen sind in Fig. 6a ausser den bereits erwähnten ρ Geraden auch die Elementenpaare $\widehat{1B}$, $\widehat{2B}\ldots\widehat{\sigma B}$ und $\widehat{A\mathrm{I}}\ldots\widehat{A\sigma_2}$ der Fig. 5 bezüglich mit den Geraden $A1,\ldots A\sigma_1$ und

Fig. 6a.



$B\mathrm{I}\ldots B\sigma_2$ derselben Figur verschmolzen. In Fig. 5 darf aber auf die Punkte $1, 2\ldots\sigma_1$ das Wegelement AB nicht unmittelbar folgen, wohl aber dürfen auf dieses Wegelement jene Punkte folgen. Ähnliches gilt für $\mathrm{I}\ldots\sigma_2$. Dies musste auch in Fig. 6a angedeutet werden: es geschah durch die eingezeichneten Pfeile, deren Richtung anzeigt, dass von den Elementenpaaren $\widehat{[AB]1}$, u. s. w. nur die Elemente $\widehat{[AB]}1$, u. s. w. zur Bildung von Wegen benutzt werden dürfen.

Fig. 6b.



Fasst man jetzt unter den $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,a)}$ Wegen auch die mit dem Elemente $\widehat{BA}$ zu bildenden ins Auge, so ergiebt die Wiederholung der vorigen Überlegung hier ohne weiteres, dass zu deren Aufstellung sämtliche Pfeilrichtungen der Fig. 6a gerade umzukehren sind (Fig. 6b).

§ 3. Sämtliche in $\varphi_{(n,a)}$ einbegriffene Wege können allgemein in drei Gruppen zerfallen:

1. **Gruppe:** Solche Wege, bei welchen keines der durch Pfeile gekennzeichneten Wegelemente beschritten wird (etwa dadurch entstehend, dass immer abwechselnd von einem der in Fig. 6 dargestellten Punkte auf einen der hinzuzudenkenden übergegangen wird). Zur Zählung dieser Wege denke man die Pfeilrichtungen der Figuren 6 durch Gerade (d. h. wegfallende Wegelemente) ersetzt und bestimme die Menge aller an der so veränderten Fig. 6 zu bildenden Wege. Die Menge ist dann genau die Hälfte der verlangten, da nach Wegfall der Pfeilrichtungen in dem Punkte $[AB]$ die Wegelemente $\widehat{AB}$ und $\widehat{BA}$ vereinigt gedacht werden können; für jedes dieser Wegelemente ist jene Menge einmal zu zählen.

Nun verwandelt sich aber die Ausgangsfigur 5 unmittelbar in die veränderte Fig. 6, wenn man nach Verschmelzung der Punkte A und B und dadurch bedingte Vereinigung der ϱ Geraden an ihren übrigen Punkten und Geraden **nichts ändert**. Diese Figur, auf deren Grundlage die Wege der verschiedenen Gruppen gezählt werden sollen, heisse die Verschmelzungsfigur von Fig. 5. Die Wegezahl ihres Komplexes werde durch das Zeichen

$$W_{\left(n-\underset{[\varDelta]}{1},\, a-\varrho\right)}$$

fixiert, in dem das unter der 1 stehende $[\varDelta]$ an das Zusammenziehen des Elementenpaares $\varDelta$ in einen Punkt, $a-\varrho$ an das Verschwinden von ϱ Geraden erinnern soll. **Das Zeichen W soll natürlich nicht besagen, dass**

$$W_{\left(n-\underset{[\varDelta]}{1},\, a-\varrho\right)}$$

dieselbe Funktion von $n-\underset{\varDelta}{1}$ und $a-\varrho$ ist, welche $W_{(n,\,a)}$ von n und a ist, sondern soll wieder im Sinne der Definition auf S. 141 verstanden werden.

Mit Benutzung des neuen Zeichens werden dann die Wege der Gruppe I gezählt durch

II. $$2W_{\left(n-\underset{[\varDelta]}{1},\, a-\varrho\right)}.$$

2. **Gruppe:** Solche Wege, bei deren Bildung nur **eine** der Pfeilrichtungen der Figuren 6a und 6b benutzt wird.

Werden die Wege, bei deren Bildung in Fig. 6a von $[AB]$ z. B. nach 1 geschritten werden **muss**, und die aus Fig. 6b ebenso für die Pfeilrichtung von 1 nach $[AB]$ sich ergebenden zusammengefasst, so sind dies die Wege, in denen die Elemente des Paares $\widehat{1[AB]}$ vorkommen **müssen**, die Elementenpaare $\widehat{2[AB]}$, $\widehat{3[AB]}$ u. s. w. aber von der Wegbildung ausgeschlossen sind. Mit Benutzung der eingeführten Zeichen lässt sich auf Grund von Formel I (S. 142) ihre Anzahl folgendermaßen aus der Verschmelzungsfigur von 5 gewinnen:

$$\varphi^{\widehat{[AB]}1}_{(n-1,\,a-\varrho-\widehat{[AB]}1)} = W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}1)} - W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho)}.$$

Das Zeichen $a-\varrho-\widehat{[AB]}1$ soll besagen, dass auch die Gerade $[AB]1$ aus der Verschmelzungsfigur zu tilgen ist.

Durch Summierung über sämtliche an Stelle von Pfeilrichtungen der Figuren 6 zu setzende Elementenpaare findet man als Summe aller Wege der Gruppe II:

$$\text{III.}\qquad \sum_{i=1,\dots\sigma_1,\,I\dots\sigma_2}^{i} W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}i)} - (\sigma_1+\sigma_2)\,W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho)}.$$

3. **Gruppe**: Die Wege, zu deren Bildung zwei von den Pfeilrichtungen der Figuren 6 herangezogen werden; weil ja $[AB]$ nur einmal berührt werden darf, können dies in jeder der beiden Figuren nur je eine nach $[AB]$ hinweisende und eine von $[AB]$ wegweisende Pfeilrichtung sein.

Durch eine Betrachtung, welche der eben für Gruppe 2 angestellten analog ist, wird leicht ersichtlich, dass hier alle Wege zu zählen sind, bei denen je ein Elementenpaar $\widehat{[AB]}i$ der Gruppe

$$\widehat{[AB]}1,\dots\widehat{[AB]}\sigma_1$$

und je eines $\widehat{[AB]}\varkappa$ aus der Gruppe

$$\widehat{[AB]}I,\dots\widehat{[AB]}\sigma_2$$

beschritten werden m u s s, die übrigen Paare beider Gruppen aber von der Wegbildung ausgeschlossen sind. Formel IIa S. 141 liefert dafür den Ausdruck:

$$W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho\,\widehat{[AB]}i-\widehat{[AB]}\varkappa)} - W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}i)} - W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}\varkappa)} + W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho)}.$$

Die successive Summierung über sämtliche i und sämtliche $\varkappa$ ergiebt:

$$\text{IV.}\left\{\begin{aligned} &\sum_{1,2,\dots\sigma_1,}^{i}\sum_{I\dots\sigma_2}^{\varkappa} W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}i-\widehat{[AB]}\varkappa)}\\ &-\sigma_2\cdot\sum_{1\dots\sigma_1}^{i} W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}i)} - \sigma_1\cdot\sum_{I\dots\sigma_2}^{\varkappa} W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho-\widehat{[AB]}\varkappa)}\\ &+\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot W_{(\underset{[\Delta]}{n-1},\,a-\varrho)}.\end{aligned}\right.$$

Es erübrigt noch, die Wegezahlen der drei Gruppen zu addieren. Dies ergiebt nach Spaltung der Summe in III und der Vereinigung der zusammengehörigen Glieder:

$$\begin{aligned}\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,\,a)} = \sum_{1,\dots\sigma_1}^{i}\ \sum_{I\dots\sigma_2}^{\varkappa} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]i-[AB]\varkappa\right)} \\ + (1-\sigma_2)\cdot \sum_{1\dots\sigma_1}^{i} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]i\right)} \\ + (1-\sigma_1)\sum^{\varkappa} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]\varkappa\right)} + W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho\right)} \\ + (1-\sigma_1)(1-\sigma_2)\, W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho\right)}\end{aligned}$$

Durch Zurückgreifen auf Formel I) S. 142 erhält man schliesslich folgende Rekursionsformel:

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{aligned} W_{\left(n,\,\overset{\Delta}{a+1}\right)} = W_{(n,\,a)} - \sum_{1\dots\sigma_1,}^{i}\ \sum_{I\dots\sigma_2}^{\varkappa} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]i-[AB]\varkappa\right)} \\ + (\sigma_2-1)\sum_{1\dots\sigma_1}^{i} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]i\right)} \\ + (\sigma_1-1)\sum_{I\dots\sigma_2}^{\varkappa} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]\varkappa\right)} \\ - [(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)+1]\, W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho\right)}. \end{aligned}\right.$$

Für den Fall, dass $\sigma_2 = 0$ (oder $\sigma_1 = 0$), präsentiert sich die Formel in folgender vereinfachten Gestalt:

$$\text{Va.}\quad \left\{\begin{aligned} W_{\left(n,\,\overset{\Delta}{a+1}\right)} = W_{(n,\,a)} - \sum_{1\dots\sigma_1}^{i} W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho-[AB]i\right)} \\ + (\sigma_1-2)\, W_{\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\; a-\varrho\right)}. \end{aligned}\right.$$

Die Formel lehrt Wegezahlen von Komplexen auf solche zurückführen, in denen weniger Elementenpaare von der Wegbildung ausgeschlossen sind, gestattet also eine successive Lösung des gesamten Problems.

§ 4. Beispiel.

Es erscheint zweckmässig, den Sinn, die Anwendungsweise und die Richtigkeit dieser Formel zunächst an einem Beispiel ausführlicher zu erläutern.

Es sei beispielsweise $W_{\left(n,\,\overset{\Delta}{a+1}\right)}$ die Zahl der Wege des Komplexes von Figur 7, die bestimmt werden soll, und 12 die hinzugefügte Gerade Δ. Dann stellt Figur 8 den zu $W_{(n,\,a)}$ gehörigen Komplex dar, Punkt 3 repräsentiert die Punktschar $1\dots\sigma_1$, 5 und 6 die Punktschar $I \ldots \sigma_2$ und 4 entspricht den Punkten I II ... der Figur 5, d. h. es ist $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\varrho = 1$. Die Wegezahlen mit dem Argument ${}^{n-1}_{[\Delta]}$ werden sämtlich aus der Verschmelzungsfigur von Figur 7 gewonnen, die in Figur 9 dargestellt ist. Die Doppelsumme der Formel V wird

Fig. 7.

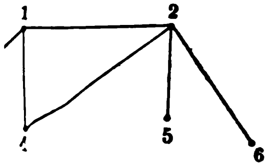


Fig. 8.

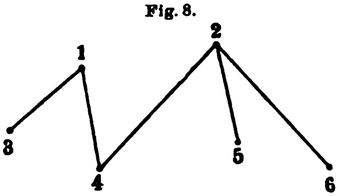
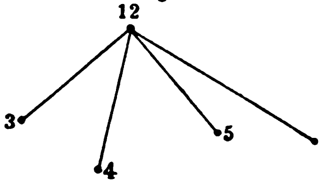


Fig. 9.



durch Zählung der Wege der beiden durch Figur 10 dargestellten Komplexe erhalten. Formel II (S. 139) liefert dafür:

$$2 \cdot 2 \binom{5-2}{2} (5-2)! = 72.$$

Das Glied $(\sigma_2 - 1) \sum\limits_{1 \ldots \sigma_1}^{i}$ reduziert sich auf die Wegezahl des Komplexes Figur 11 und ist nach derselben Formel:

$$2 \cdot \binom{5-3}{2} (5-2)! = 12.$$

Kennt man also die Wegezahl $W_{(n,\,a)}$ des durch Figur 8 repräsentierten Komplexes, welcher eine Gerade weniger enthält als der

Fig. 10.

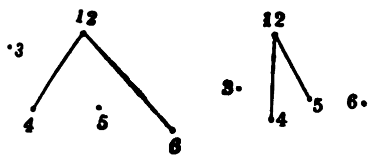
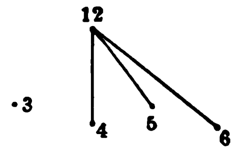


Fig. 11.



von Figur 7, so ist auch $W_{\left(n,\,a+1\right)}^{\;\;\Delta}$ gefunden. Es ist ersichtlich, dass sich dieses Rekursionsverfahren auf Grund von Formel V auch zur Zurückführung von $W_{(n,\,a)}$ auf Komplexe mit noch weniger Geraden anwenden lässt. Auf diese Weise wurde gefunden:

$$W_{(n,\,a)} = 76,$$

woraus sich ergiebt:

$$W_{\left(n,\,a+1\right)}^{\;\;\Delta} = 76 - 72 + 12 = 16,$$

und thatsächlich giebt es nur folgende Wege an Figur 7:

15 46 32	45 16 32
15 64 32	46 15 32
16 45 32	51 64 32
16 54 32	61 54 32

und ihre Umkehrungen: 23 64 51 u. s. w.

B. Zweite Rekursionsformel.

$\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,\,a)}$ lässt sich noch auf andere Weise darstellen: Ersetzt man in den Figuren 6 alle Pfeilrichtungen durch Elementenpaare, so hat der dadurch entstehende Komplex $\varrho + \sigma_1 + \sigma_2$ Gerade weniger als Figur 5. Seine Wegezahl kann deshalb mit

$$W_{(a-\varrho-\sigma_1-\sigma_2)}$$

bezeichnet werden (wobei das immer wieder auftretende Argument $n-1$ von jetzt ab fortgelassen ist). [Δ]

Wie weit stimmt diese Zahl mit $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,\,a)}$ überein?

Zur Entscheidung hierüber teilt man alle unter $W_{(a-\varrho-\sigma_1-\sigma_2)}$ begriffenen Wege den vorhin unterschiedenen drei Gruppen entsprechend ein in:

1. solche, bei denen kein Wegelement der neu hinzutretenden Elementepaare vorkommt,
2. solche, bei denen ein solches,
3. solche, bei denen zwei derselben vorkommen.

Die Wege unter 1. werden durch

$$W_{(a-\varrho)}$$

gezählt; da nun für die entsprechende Gruppe in A (S. 144) $2W_{(a-\varrho)}$ Wege gezählt wurden, so müssen, um Übereinstimmung zwischen den Wegezahlen zu erzielen, $W_{(a-\varrho)}$ Wege zu $W_{(a-\varrho-\sigma_1-\sigma_2)}$ addiert werden.

Die unter 2. zusammengefassten Wege stimmen mit denen der 2. Gruppe in A genau überein.

In 3. dagegen sind ausser den als 3. Gruppe unter A gezählten Wegen auch noch alle diejenigen enthalten, in welchen von einem der Punkte $1 \ldots \sigma_1$ (resp. $I \ldots \sigma_2$) über $[AB]$ nach einem anderen Punkte derselben Schar weiter geschritten wird. Diese sind also von

$$W_{(a-\varrho-\sigma_1-\sigma_2)}$$

abzuziehen.

Bedeuten i_1 und i_2 zwei beliebige Punkte der Schar $1 \ldots \sigma_1$, so zählt man nach Formel IIa (Kap. II, S. 141) die Wege, in denen die Wegstücke $i_1[AB]i_2$ oder $i_2[AB]i_1$ enthalten sind, durch:

$$\text{VI.}\quad \left\{ \begin{aligned} & W_{(a-\varrho-[AB]i_1-[AB]i_2)} - W_{(a-\varrho-[AB]i_1)} \\ & \qquad - W_{(a-\varrho-[AB]i_2)} + W_{(a-\varrho)}. \end{aligned} \right.$$

Deute ferner $\sum\limits_{1\ldots\sigma_1}^{i_1 i_2}$ an, dass die Summe über alle Kombinationen zweien der Zahlen $1 \ldots \sigma_1$ ohne Wiederholung zu erstrecken ist, ist, wie einfache Überlegung zeigt, das Resultat dieser Summierung er VI erstreckt:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{1\ldots\sigma_1}^{i_1 i_2} W\left(a-\varrho-[AB]\,i_1-[AB]\,i_2\right)-(\sigma_1-1)\sum\limits_{1\ldots\sigma_1}^{i} W\left(a-\varrho-[AB]\,i\right) \\ \qquad\qquad +\binom{\sigma_1}{2} W_{(a-\varrho)}. \end{array}\right.$$

Bezeichnet man mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei beliebige Punkte der Schar $\ldots\sigma_2$, so ergiebt sich der analoge Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{1\ldots\sigma_2}^{\varkappa_1 \varkappa_2} W\left(a-\varrho-[AB]\,\varkappa_1-[AB]\,\varkappa_2\right)-(\sigma_2-1)\sum\limits_{1\ldots\sigma_2}^{\varkappa} W\left(a-\varrho-[AB]\,\varkappa\right) \\ \qquad\qquad +\binom{\sigma_2}{2} W_{(a-\varrho)}. \end{array}\right.$$

Die Zusammenfassung der vorstehenden Ausführungen liefert die gesuchte neue Darstellung für $\overset{\Delta}{\varphi}_{(a,\varrho)}$ und sonach mittels Formel I (S. 142) folgende neue Rekursionsformel, bei deren Aufstellung das Argument $\underset{[\Delta]}{n-1}$ überall wieder eingesetzt wurde:

$$\text{VII.}\quad\left\{\begin{array}{l} W\left(n, a+\overset{\Delta}{1}\right)=W_{(n,\,a)}-W\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\, a-\varrho-\sigma_1-\sigma_2\right) \\ \qquad +\sum\limits_{1\ldots\sigma_1}^{i_1 i_2} W\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\, a-\varrho-[AB]\,i_1-[AB]\,i_2\right) \\ \qquad -(\sigma_1-1)\sum\limits_{1\ldots\sigma_1}^{i} W\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\, a-\varrho-[AB]\,i\right) \\ \qquad +\sum\limits_{1\ldots\sigma_2}^{\varkappa_1 \varkappa_2} W\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\, a-\varrho-[AB]\,\varkappa_1-[AB]\,\varkappa_2\right) \\ \qquad -(\sigma_2-1)\sum\limits_{1\ldots\sigma_2}^{\varkappa} W\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\, a-\varrho-[AB]\,\varkappa\right) \\ \qquad +\left[\binom{\sigma_1}{2}+\binom{\sigma_2}{2}-1\right] W\left(\underset{[\Delta]}{n-1},\, a-\varrho\right). \end{array}\right.$$

C. Dritte Formel.

Setzt man $\sigma_2 = 0$, so wird in A:

$$\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,\,a)}=\sum_{1\ldots\sigma_1}^{i} W\left(a-\varrho-[AB]\,i\right)-(\sigma_1-2)\cdot W_{(a-\varrho)}$$

(das Argument $\underset{[\Delta]}{n-1}$ kann wieder wegbleiben).

Aus B erhält man ebenso:

$$\left\{\begin{aligned}\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,\,a)} = W_{(a-\varrho-\sigma_1)} &- \sum_{1\ldots\sigma_1}^{i_1\, i_2} W_{\left(a-\varrho-[AB]i_1-[AB]i_2\right)}\\ &+ (\sigma_1-1)\sum_{1\ldots\sigma_1}^{i} W_{\left(a-\varrho-[AB]i\right)}\\ &+ \left[1-\binom{\sigma_1}{2}\right] W_{(a-\varrho)}\,.\end{aligned}\right.$$

Nach Gleichsetzung der rechten Seiten ergiebt sich leicht:

$$\text{VIII.}\left\{\begin{aligned} W_{(a-\varrho-\sigma_1)} &= \sum_{1\ldots\sigma_1}^{i_1\, i_1} W_{(a-\varrho-[AB]i_1-[AB]i_2)}\\ &- (\sigma_1-2)\sum_{1\ldots\sigma_1}^{i} W_{\left(a-\varrho-[AB]i\right)} + \binom{\sigma_1-1}{2} W_{(a-\varrho)}\,.\end{aligned}\right.$$

Da zu jedem W das Argument $\underset{[\Delta]}{n-1}$ hinzuzudenken ist, bezieht sich diese Formel auf Komplexe mit gleicher Punktzahl.

Sie ist auch auf direktem Wege zu gewinnen:

Sieht man irgend einen Punkt eines beliebigen Komplexes in Bezug auf die von ihm ausgehenden Elementepaare an und fasst eine Anzahl σ_1 von ihnen noch besonders ins Auge, während ϱ die Zahl der von dem Punkte ausstrahlenden Geraden ist, so setzt sich die Anzahl sämtlicher Wege des Komplexes nur aus solchen Wegen zusammen, zu deren Bildung entweder keines, oder eins, oder zwei Elemente der σ_1 Paare benutzt werden. Die Berechnung dieser Zahlen mit Hilfe der Formeln des Kapitels II führt auf Formel VIII.

Kapitel IV.

Formeln für Komplexgruppen, gewonnen mittels Formel V.

(Kapitel III, S. 146.)

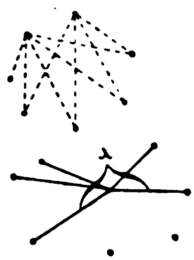
Die aufgestellten Rekursionsformeln lösen zwar, da sie die successive Zurückführung der Wegezahl von Komplexen auf Wegezahlen von Komplexen mit einer geringeren Zahl von Geraden gestatten, theoretisch das Gesamtproblem, versagen aber praktisch wegen allzugrosser Umständlichkeit, sobald der Komplex sehr viele Gerade enthält. Deshalb ist der Besitz von Formeln erwünscht, durch welche die Zählung der Wege eines Komplexes direkt auf die von Wegen zurückgeführt werden kann, deren Komplexe eine Reihe von Geraden weniger enthält als der betrachtete.

Es folgt eine Verwirklichung dieses Gedankens durch Weiterführung der Rekursion V in einigen Spezialfällen.

I.

Die n Punkte des zuerst zu betrachtenden Komplexes sollen in zwei Gruppen zerfallen, von denen die erste einen beliebigen Unterkomplex bilde, während die zweite Gruppe von a Punkten weder mit der ersteren noch unter sich durch Geraden verbunden sei. Die Anzahl der hier möglichen Wege steht natürlich in funktioneller Beziehung zur Zahl a. Zieht man nun von einem der a Punkte nach λ anderen unter ihnen die Geraden, so ist die Wegezahl des neuentstandenen Komplexes ausser einer Funktion von a auch noch eine solche von λ, etwa

Fig. 12.



$$\Phi\binom{\lambda}{a}.$$

Für letztere Funktion geht die Rekursionsformel Va (S. 146) über in:

$$\text{I.}\qquad \Phi\binom{\lambda}{a} = \Phi\binom{\lambda-1}{a} + (\lambda-3)\,\Phi\binom{\lambda-1}{a-1} - (\lambda-1)\,\Phi\binom{\lambda-2}{a-1},$$

mittels deren die Berechnung der Funktion $\Phi\binom{\lambda}{a}$ leicht von der Kenntnis von $\Phi\binom{0}{a}$ abhängig gemacht werden kann.

Dazu setze man:

$$\text{II.}\qquad \Phi\binom{\lambda}{a} = \Phi\binom{0}{a} + f_{1(\lambda)}\Phi\binom{0}{a-1} + f_{2(\lambda)}\Phi\binom{0}{a-2} + \cdots$$

wo $f_{1(\lambda)}, f_{2(\lambda)}, \ldots$ noch zu bestimmende Funktionen von λ sind, und substituiere dies in I.

Die rechte Seite von I. wird dann gleich:

$$\begin{aligned}\Phi\binom{0}{a} &+ f_{1(\lambda-1)}\Phi\binom{0}{a-1} + f_{2(\lambda-1)}\Phi\binom{0}{a-2} + f_{3(\lambda-1)}\Phi\binom{0}{a-3} + \cdots \\ &+ (\lambda-3)\left\{\Phi\binom{0}{a-1} + f_{1(\lambda-2)}\Phi\binom{0}{a-2} + f_{2(\lambda-1)}\Phi\binom{0}{a-3} + \cdots\right\} \\ &- (\lambda-1)\left\{\Phi\binom{0}{a-1} + f_{1(\lambda-2)}\Phi\binom{0}{a-2} + f_{2(\lambda-1)}\Phi\binom{0}{a-3} + \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der beiden rechten Seiten und Koeffizientenvergleichung ergiebt für die Funktionen f_1, f_2 u. s. w. die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}f_{1(\lambda)} &= f_{1(\lambda-1)} - 2, \\ f_{2(\lambda)} &= f_{2(\lambda-1)} + (\lambda-3)\,f_{1(\lambda-1)} - (\lambda-1)\,f_{1(\lambda-2)} \\ f_{3(\lambda)} &= f_{3(\lambda-1)} + (\lambda-3)\,f_{2(\lambda-1)} - (\lambda-1)\,f_{2(\lambda-2)}\end{aligned}$$

u. s. w.

aus denen mit Berücksichtigung von

$$f_{1(0)} = f_{2(0)} = f_{3(0)} = \cdots = 0$$

(Folgerung aus Gleichung II) sich ergiebt:

$$f_{1(\lambda)} = -2\lambda;\quad f_{2(\lambda)} = \lambda(\lambda-1);\quad f_{3(\lambda)} = f_{4(\lambda)} = \cdots = 0,$$

so dass man erhält:

$$\Phi\binom{\lambda}{a} = \Phi\binom{0}{a} - 2\lambda\Phi\binom{0}{a-1} + \lambda(\lambda-1)\Phi\binom{0}{a-2}.$$

Als Spezialfall lässt sich aus dieser Formel leicht Formel II (Kapitel I, S. 139) ableiten.

II.

Zu dem Komplex, für welchen $\Phi\binom{0}{a}$ Wege existierten, füge man von einem Punkte des Unterkomplexes nach einem der a unverbundenen Punkte eine Gerade hinzu und führe das Zeichen $\Phi\binom{0}{a,\,1}$ für die Wegezahl des neuen Komplexes ein, ebenso $\Phi\binom{\lambda}{a,\,1}$ für die Wegezahl des Komplexes, der entsteht, wenn man den eben verbundenen

Fig. 13.

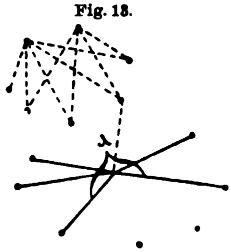
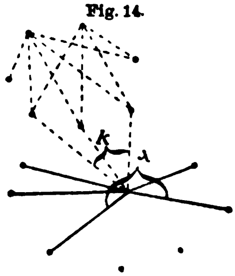


Fig. 14.



Punkt mit λ der $(a-1)$ übrigen Punkte verbindet. Für diese Funktion verwandelt sich die allgemeine Formel Va (S. 146) in:

$$\Phi\binom{\lambda}{a,\,1} = \Phi\binom{\lambda-1}{a,\,1} + (\lambda-2)\,\Phi\binom{\lambda-1}{a-1,\,1} - (\lambda-1)\,\Phi\binom{\lambda-2}{a-1,\,1} - \Phi\binom{\lambda-1}{a-1}.$$

Um die Rekursionen auf Funktionen auszuführen, die statt des Argumentes λ das Argument 0 haben, setze man:

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{aligned}\Phi\binom{\lambda}{a,\,1} = \Phi\binom{0}{a,\,1} &+ \alpha_{1(\lambda)}\Phi\binom{0}{a-1,\,1} + \alpha_{2(\lambda)}\Phi\binom{0}{a-2,\,0} + \cdots\\ &+ \beta_{1(\lambda)}\Phi\binom{0}{a-1} + \beta_{2(\lambda)}\Phi\binom{0}{a-2} + \cdots\end{aligned}\right.$$

Verfährt man zur Bestimmung der Funktionen $\alpha_{i(\lambda)}$ und $\beta_{i(\lambda)}$ wie vorhin, so ergeben sich der Reihe nach dafür die Differenzengleichungen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1(\lambda)} = \alpha_{1(\lambda-1)} - 1, &&\text{daraus:}\quad \alpha_{1(\lambda)} = -\lambda,\\
&\alpha_{2(\lambda)} = \alpha_{2(\lambda-1)}, &&\quad\text{„}\qquad \alpha_{2(\lambda)} = 0,\\
&\qquad\text{ebenso}\ \alpha_{3(\lambda)} = \alpha_{4(\lambda)} = \cdots = 0;\\
&\beta_{1(\lambda)} = \beta_{1(\lambda-1)} - 1, &&\text{daraus:}\quad \beta_{1(\lambda)} = -\lambda,\\
&\beta_{2(\lambda)} = \beta_{2(\lambda-1)} + 2(\lambda-1), &&\quad\text{„}\qquad \beta_{2(\lambda)} = \lambda(\lambda-1),\\
&\beta_{3(\lambda)} = \beta_{3(\lambda-1)} &&\quad\text{„}\qquad \beta_{3(\lambda)} = 0,\\
&\qquad\text{ebenso}\ \beta_{4(\lambda)} = \beta_{5(\lambda)} = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Also ergiebt sich:

$$\Phi\binom{\lambda}{a,\,1} = \Phi\binom{0}{a,\,1} - \lambda\left\{\Phi\binom{0}{a-1,\,1} + \Phi\binom{0}{a-1}\right\} + \lambda(\lambda-1)\Phi\binom{0}{a-2}.$$

III.

Man füge diesmal zu dem Komplexe mit $\Phi\binom{0}{a}$ Wegen von $\varkappa$ Punkten des Unterkomplexes nach einem der a unverbundenen Punkte die Geraden hinzu, die aber gleichartig sein müssen (siehe Kapitel V, S. 157) und bezeichne mit $\Phi\binom{0}{a,\,\varkappa}$ die Wegezahl des neuen Komplexes, mit $\Phi\binom{\lambda}{a,\,\varkappa}$ aber die des Komplexes, der entsteht, wenn man den eben verbundenen Punkt weiter mit λ der $(a-1)$ übrigen Punkte verbindet. Für $\Phi\binom{\lambda}{a,\,\varkappa}$ ergiebt sich dann die Rekursionsformel:

$$\text{IV.}\quad \left|\begin{aligned} \Phi\binom{\lambda}{a,\,\varkappa} &= \Phi\binom{\lambda-1}{a,\,\varkappa} + (\lambda+\varkappa-3)\,\Phi\binom{\lambda-1}{a-1,\,\varkappa} \\ &\quad - (\lambda-1)\,\Phi\binom{\lambda-2}{a-1,\,\varkappa} - \varkappa\,\Phi\binom{\lambda-1}{a-1,\,\varkappa-1}. \end{aligned}\right.$$

Um auch hier die Rekursion auf Funktionen durchzuführen, die statt λ das Argument 0 aufweisen, setze man:

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{aligned} \Phi\binom{\lambda}{a,\,\varkappa} &= \Phi\binom{0}{a,\,\varkappa} + \overset{1}{\alpha}_{(\lambda,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa} + \overset{2}{\alpha}_{(\lambda,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa} + \cdots \\ &\quad + \overset{1}{\beta}_{(\lambda,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa-1} + \overset{2}{\beta}_{(\lambda,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa-1} + \cdots \\ &\quad + \overset{1}{\gamma}_{(\lambda,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa-2} + \overset{2}{\gamma}_{(\lambda,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa-2} + \cdots \end{aligned}\right.$$

Durch Einsetzen der aus V für

$$\Phi\binom{\lambda-1}{a,\,\varkappa},\quad \Phi\binom{\lambda-1}{a-1,\,\varkappa}\ \text{u. s. w.}$$

erhältlichen Werte in IV. wird der Teil der rechten Seite von IV, der Glieder mit dem Argumente $\varkappa$ bekommt:

$$\begin{aligned} &\Phi\binom{0}{a,\,\varkappa} + \overset{1}{\alpha}_{(\lambda-1,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa} + \overset{2}{\alpha}_{(\lambda-1,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa} \\ &\qquad + \overset{3}{\alpha}_{(\lambda-1,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa} + \cdots \\ &+ (\lambda-\varkappa+3)\left\{\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa} + \overset{1}{\alpha}_{(\lambda-1,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa} \right. \\ &\qquad \left. + \overset{2}{\alpha}_{(\lambda-1,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa} + \cdots\right\} \\ &- (\lambda-1)\left\{\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa} + \overset{1}{\alpha}_{(\lambda-2,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa} \right. \\ &\qquad \left. + \overset{2}{\alpha}_{(\lambda-2,\,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa} + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten dieser Entwickelung mit der der rechten Seite von V. ergeben sich für die Funktionen $\overset{1}{\alpha}, \overset{2}{\alpha}$ u. s. die Differenzengleichungen:

$$\overset{1}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} = \overset{1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} + \varkappa - 2,$$

$$\overset{2}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} = \overset{2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} + (\lambda+\varkappa-3)\,\overset{1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} - (\lambda-1)\,\overset{1}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

VI. $$\overset{\nu}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} = \overset{\nu}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} + (\lambda+\varkappa-3)\,\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} - (\lambda-1)\,\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)},$$

deren Lösungen (unter Berücksichtigung von

$$\overset{1}{\alpha}_{(0,\varkappa)} = \overset{2}{\alpha}_{(0,\varkappa)} = \cdots = 0)$$

sind:

$$\overset{1}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} = \lambda(\varkappa-2), \quad \overset{2}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} = \binom{\lambda}{2}(\varkappa-1)(\varkappa-2); \cdots$$

allgemein:

VIa. $$\overset{\nu}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} = \binom{\lambda}{\nu}\frac{(\varkappa+\nu-3)!}{(\varkappa-3)!}.$$

Hieraus folgt, dass:

VIb. $$\overset{\nu}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} - \overset{\nu}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa-1)} = \nu\binom{\lambda}{\nu}\frac{(\varkappa+\nu-4)!}{(\varkappa-3)!} = \lambda\cdot\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)}$$

eine später zu verwendende Beziehung.

Der Teil der rechten Seite von IV, der beim Einsetzen Glied mit dem Argumente $\varkappa-1$ erhält, ist weiter:

$$\begin{aligned}
&+\overset{1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa-1} + \overset{2}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa-1}\\
&\qquad + \overset{3}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa-1} + \cdots\\
&+(\lambda+\varkappa-3)\Big\{\overset{1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa-1}\\
&\qquad + \overset{2}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa-1} + \cdots\Big\}\\
&-(\lambda-1)\Big\{\overset{1}{\beta}_{(\lambda-2,\varkappa)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa-1}\\
&\qquad + \overset{2}{\beta}_{(\lambda-2,\varkappa)}\Big)\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa-1} + \cdots\Big\}\\
&-\varkappa\cdot\Big\{\Phi\binom{0}{a-1,\,\varkappa-1} + \overset{1}{\alpha}_{\lambda-1,\varkappa-1)}\Phi\binom{0}{a-2,\,\varkappa-1}\\
&\qquad + \overset{2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa-1)}\Phi\binom{0}{a-3,\,\varkappa-1} + \cdots\Big\}.
\end{aligned}$$

Gleichsetzung der Koeffizienten mit solchen entsprechender Glie der rechten Seite von V. giebt zunächst:

VII. $$\overset{1}{\beta}_{(\lambda,\varkappa)} - \overset{1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)} = -\varkappa,$$

woraus:

$$\overset{1}{\beta}_{(\lambda,\varkappa)} = -\lambda\varkappa.$$

Die allgemeine Funktionalgleichung für die Funktionen β ist:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} \overset{\nu}{\beta}_{(\lambda,\varkappa)} - \overset{\nu-1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)} = (\lambda+\varkappa-3)\,\overset{\nu-1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa)} \\ \qquad\qquad - (\lambda-1)\,\overset{\nu-1}{\beta}_{(\lambda-2,\varkappa)} - \varkappa\cdot\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa-2)}. \end{cases}$$

Die Bestimmung der genannten Funktionen kann auf folgende Weise durch Zurückführung auf die Funktionen $\overset{\nu}{\alpha}$ geschehen:

Nach VIb ist:

$$\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa-1)} = \overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} - (\lambda-1)\,\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)}.$$

Dies in VIII. substituiert und gleichzeitig gesetzt:

$$\overset{\nu}{\beta}_{(\lambda,\varkappa)} = \varkappa\cdot\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}\cdot\varphi_{(\lambda-\nu)},$$

wo $\varphi_{(\lambda-\nu)}$ eine noch näher zu bestimmende Funktion bedeutet, führt auf:

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} \varphi_{(\lambda-\nu)}\,\varkappa\,\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)} - \varkappa\,\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)}\{\varphi_{(\lambda-\nu-1)}-1\} \\ \qquad = (\lambda+\varkappa-3)\varkappa\cdot\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)}\,\varphi_{(\lambda-\nu)} - (\lambda-1)\varkappa\cdot\overset{-2}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)} \\ \qquad\qquad \cdot\{\varphi_{(\lambda-\nu-1)}-1\}. \end{cases}$$

Diese Gleichung wird auf VI (S. 154) zurückgeführt, also identisch erfüllt, wenn:

$$\varphi_{(\lambda-\nu)} = \varphi_{(\lambda-\nu-1)} - 1,$$

woraus im Hinblick auf VII. folgt:

$$\varphi_{(\lambda-\nu)} = -(\lambda-\nu-1),$$

so dass also ist:

$$\text{X.}\qquad \overset{\nu}{\beta}_{(\lambda,\varkappa)} = -\varkappa\cdot\overset{\nu-1}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}(\lambda-\nu+1).$$

Zur Bestimmung der Funktionen γ führen die Glieder mit den Argumenten $(\varkappa-2)$; es sind:

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-1},\ {}_{\varkappa-2}\right) + \overset{2}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-2},\ {}_{\varkappa-2}\right) \\ &\qquad + \overset{3}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-3},\ {}_{\varkappa-2}\right) + \cdots \\ &\quad + (\lambda+\varkappa-3)\cdot\Bigl\{\overset{1}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-2},\ {}_{\varkappa-2}\right) \\ &\qquad + \overset{2}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-3},\ {}_{\varkappa-2}\right) + \cdots\Bigr\} \\ &\quad - (\lambda-1)\Bigl\{\overset{1}{\gamma}_{(\lambda-2,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-2},\ {}_{\varkappa-2}\right) \\ &\qquad + \overset{2}{\gamma}_{(\lambda-2,\varkappa)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-3},\ {}_{\varkappa-2}\right) + \cdots\Bigr\} \\ &\quad - \varkappa\Bigl\{\overset{1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa-1)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-2},\ {}_{\varkappa-2}\right) \\ &\qquad + \overset{2}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa-1)}\,\Phi\left(\overset{0}{a}_{-3},\ {}_{\varkappa-2}\right) + \cdots\Bigr\} \end{aligned}$$

Für die Funktionen γ folgt wie vorhin die Gleichung:

$$\text{XI.}\quad\left\{\begin{aligned}\overset{\nu}{\gamma}_{(\lambda,\varkappa)} - \overset{\nu}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)} &= (\lambda+\varkappa-3)\,\overset{\nu-1}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)}\\ &\quad - (\lambda-1)\,\overset{\nu-1}{\gamma}_{(\lambda-2,\varkappa)} - \varkappa\cdot\overset{\nu-1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa-1)}.\end{aligned}\right.$$

Nun ist nach X und VIb:

$$\begin{aligned}-\varkappa\cdot\overset{\nu-1}{\beta}_{(\lambda-1,\varkappa-1)} &= \varkappa\cdot(\varkappa-1)\,\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa-1)}(\lambda-\nu+1)\\ &= \varkappa(\varkappa-1)(\lambda-\nu+1)\left\{\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} - (\lambda-1)\,\overset{\nu-3}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)}\right\}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in XI. folgt daraus:

$$\begin{aligned}\overset{\nu}{\gamma}_{(\lambda,\varkappa)} - \overset{\nu}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)} &= (\lambda+\varkappa-3)\cdot\overset{\nu-1}{\gamma}_{(\lambda-1,\varkappa)} - (\lambda-1)\cdot\overset{\nu-1}{\gamma}_{(\lambda-2,\varkappa)}\\ &\quad - \varkappa\cdot(\varkappa-1)(\lambda-\nu+1)\,\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)} + \varkappa(\varkappa-1)(\lambda-1)(\lambda-\nu+1)\,\overset{\nu-3}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)}.\end{aligned}$$

Setzt man:

$$\overset{\nu}{\gamma}_{(\lambda,\varkappa)} = \varkappa(\varkappa-1)\,\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}f(\lambda-\nu),$$

so fällt der Faktor $\varkappa(\varkappa-1)$ überall weg, und man findet:

$$\text{XII.}\quad\left\{\begin{aligned}&\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}f_{(\lambda-\nu)} - \overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)}\{f_{(\lambda-\nu-1)} + (\lambda-\nu+1)\}\\ &\qquad = (\lambda+\varkappa-3)\,\overset{\nu-3}{\alpha}_{(\lambda-1,\varkappa)}f(\lambda-\nu)\\ &\qquad\quad - (\lambda-1)\,\overset{\nu-3}{\alpha}_{(\lambda-2,\varkappa)}\{f_{\lambda-\nu-1)} + (\lambda-\nu+1)\}.\end{aligned}\right.$$

Wieder beobachtet man, dass bei Weglassung der Faktoren

$$f_{(\lambda-\nu)} \quad\text{und}\quad \{f_{(\lambda-\nu-1)} + (\lambda-\nu+1)\}$$

die Gleichung VI übrig bleibt, und daraus folgt, dass XII. identisch wird für:

$$f_{(\lambda-\nu)} = f_{(\lambda-\nu+1)} + \lambda - \nu + 1,$$

oder

$$f(\lambda-\nu) = \binom{\lambda-\nu+2}{2}.$$

Man findet also:

$$\overset{\nu}{\gamma}_{(\lambda,\varkappa)} = \varkappa\cdot(\varkappa-1)\binom{\lambda-\nu+2}{2}\overset{\nu-2}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}.$$

Ganz analog ergiebt sich für die folgenden Funktionen:

$$\overset{\nu}{\delta}_{(\lambda,\varkappa)} = -\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\binom{\lambda-\nu+3}{3}\overset{\nu-3}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}$$

und es zeigt sich, dass die aufeinanderfolgenden Funktionen $\overset{\nu}{\alpha}, \overset{\nu}{\beta}, \overset{\nu}{\gamma}$ nach dem Gesetz gebildet sind:

$$(-1)^i\frac{\varkappa!}{(\varkappa-i)!}\binom{\lambda-\nu+i}{i},$$

wenn man α den Wert $i=0$, β den Wert $i=1$, u. s. w. beiordnet.

Führt man dies in Gleichung V (S. 153) ein, so erhält man folgendes Resultat für die ausgeführte Rekursion:

$$\Phi\binom{\lambda}{a,\ \varkappa} = \sum_{0\ldots}^{i}\sum_{0\ldots}^{\nu}(-1)^{i}\,\Phi\binom{0}{a-\nu,\ \varkappa-i}\,\overset{\nu-i}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}\,\frac{\varkappa!}{(\varkappa-i)!}\binom{\lambda-\nu+i}{i},$$

oder, wenn man den Wert für $\overset{\nu-i}{\alpha}_{(\lambda,\varkappa)}$ aus Gleichung VIa einsetzt:

$$\left\{\begin{aligned}\Phi\binom{\lambda}{a,\ \varkappa} - \sum_{0\ldots}^{i}\sum_{0\ldots}^{\nu}(-1)^{i}\binom{\lambda}{\nu-i}\frac{(\varkappa+\nu-i-3)!}{(\varkappa-3)!}\,\frac{\varkappa!}{(\varkappa-i)!}\binom{\lambda-\nu+i}{i}\\ \cdot\Phi\binom{0}{a-\nu,\ \varkappa-i}\end{aligned}\right.$$

was sich noch folgendermaßen vereinfachen lässt:

$$\Phi\binom{\lambda}{a,\ \varkappa} - \sum_{0\ldots}^{i}\sum_{0\ldots}^{\nu}(-1)^{i}\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\binom{\varkappa}{i}\binom{\varkappa-3+\nu-i}{\varkappa-3}\,\Phi\binom{0}{a-\nu,\ \varkappa-i}.$$

Nur kurz erwähnt soll werden, dass diese Formel dazu dienen kann, Funktionen, die Wegezahlen von Komplexen ausdrücken, z. B. $2\binom{n-a}{2}(n-2)!$ (S. 139) in merkwürdige Doppelsummen zu verwandeln.

Kapitel V.

Studium der Formel VIII (S. 150).

Sämtliche von einem Punkte irgend eines Komplexes ausgehende Geraden können das Geradenbüschel dieses Punktes genannt werden. Sind nun die Geraden eines Büschels so beschaffen, dass alle Komplexe, in denen man eine beliebige von diesen Geraden in ein Elementenpaar verwandelt, dieselbe Wegezahl besitzen, so sollen sie gleichartig heissen. Die Wegezahl eines Komplexes ist offenbar eine Funktion jeder Anzahl gleichartiger Geraden in ihm.

Es werde jetzt die Formel VIII (Kapitel III, S. 150) näher betrachtet: Zunächst zeigt sich, dass die verschiedenen Veränderungen von W in dieser Formel sich immer nur auf das Geradenbüschel nach den Punkten $1, \ldots \sigma_1$ beziehen. Man schreibt daher W besser als Funktion von σ_1; deutet man durch Beibehalten von ϱ im Argument an, dass ϱ Geraden, die von demselben Punkte ausstrahlen, unverändert erhalten bleiben sollen, so kann die Formel folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left\{\begin{aligned}\overline{\overline{W}}_{(\varrho,0)} - \overline{\overline{W}}_{(\varrho,\sigma_1)}\binom{\sigma_1-1}{2} - (\sigma_1-2)\sum_{1\ldots\sigma_1}^{i}\overline{\overline{W}}_{\left(\varrho,\ \sigma-[AB]i\right)}\\ +\sum_{1\ldots\sigma_1}^{i_1}i_2\,\overline{\overline{W}}_{\left(\varrho,\ \sigma-[AB]i-1\right)}.\end{aligned}\right.$$

In der voranstehenden Formel dürfen die Geraden nach den Punkten $1\ldots\sigma_1$ noch ungleichartig sein; ersetzt man sie durch

σ gleichartige, so werden die Funktionen unter den beiden Summenzeichen unter sich gleich, und es entsteht die Formel:

$$\text{I.}\qquad W_{(\varrho,0)} = W_{(\varrho,\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)W_{(\varrho,\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}W_{(\varrho,\sigma-2)}.$$

Aus ihr wird ersichtlich, dass $W_{(\varrho,\sigma)}$ sich durch $W_{(\varrho,0)}$, $W_{(\varrho,1)}$ und $W_{(\varrho,2)}$ ausdrücken lässt; setzt man zu dem Ende unter Weglassung von ϱ:

$$\text{II.}\qquad W_{(\sigma)} = f_{1(\sigma)}W_{(2)} - f_{2(\sigma)}W_{(1)} + f_{3(\sigma)}W_{(0)},$$

wo $f_{1(\sigma)}$, $f_{2(\sigma)}$, $f_{3(\sigma)}$ noch zu bestimmende Funktionen von σ sind, so findet man durch Einführung in I.:

$$\begin{aligned} W_{(0)} = W_{(2)}&\left[f_{1(\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{1(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{1(\sigma-2)}\right]\\ + W_{(1)}&\left[f_{2(\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{2(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{2(\sigma-2)}\right]\\ + W_{(0)}&\left[f_{3(\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{3(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{3(\sigma-2)}\right] \end{aligned}$$

und erhält für $f_{1(\sigma)}$, $f_{2(\sigma)}$ und $f_{3(\sigma)}$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & 0 = f_{1(\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{1(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{1(\sigma-2)}\\ \text{b)} & 0 = f_{2(\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{2(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{2(\sigma-2)}\\ \text{c)} & 1 = f_{3(\sigma)}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{3(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{3(\sigma-2)}. \end{array}\right.$$

Setzt man in IIIa:

$$f_{1(\sigma)} = \sigma\cdot\varphi_{(\sigma)},$$

so hebt sich das Produkt $\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)$ aus der Gleichung, und es ergiebt sich:

$$2\varphi_{(\sigma-1)} = \varphi_{(\sigma)} + \varphi_{(\sigma-2)},$$

eine Gleichung, deren allgemeine Lösung ist:

$$\varphi_{(\sigma)} = c_1\sigma + c_2,$$

wo c_1 und c_2 zwei beliebige Konstanten sind.

Die Gleichungen IIIa und IIIb haben also zur allgemeinen Lösung:

$$f_{1(\sigma)} = f_{2(\sigma)} = \sigma(c_1\sigma + c_2).$$

Nun muss aber vermöge Gleichung II sein:

$$f_{1(2)} = 1,\qquad f_{1(1)} = 0,$$
$$f_{2(1)} = -1,\quad f_{2(2)} = 0.$$

Bestimmt man danach c_1 und c_2, so findet man:

$$f_{1(\sigma)} = \binom{\sigma}{2},\quad f_{2(\sigma)} = \sigma(\sigma-2).$$

Die Lösung von Gleichung IIIc gelingt auf folgendem Wege:

Da das in Kapitel I, 2. (S. 139) behandelte Büschel aus gleichartigen Geraden besteht, so muss die dort gefundene Funktion

$$2\binom{n-a}{2}(n-2)!$$

der Formel I (S. 158) genügen, wodurch, wenn $a = \sigma$ gesetzt wird, die identische Gleichung entsteht:

$$n(n-1) = 2\binom{n-\sigma}{2}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)\binom{n-\sigma+1}{2} + 2\binom{\sigma}{2}\binom{n-\sigma+2}{2}.$$

Diese geht für $n = 2$ über in:

$$\text{IV.} \qquad 1 = \binom{\sigma-1}{2}\binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)\binom{\sigma-2}{2} + \binom{\sigma}{2}\binom{\sigma-3}{2}.$$

Durch Vergleichung von IV. mit IIIc zeigt sich, dass

$$f_{3(\sigma)} = \binom{\sigma-1}{2}$$

eine partikuläre Lösung der Gleichung IIIc ist, und zwar gerade die hier gesuchte, weil, wie es Gleichung II verlangt,

$$f_{3(1)} = f_{3(2)} = 0.$$

Das gesuchte Resultat ist demnach:

$$W_{(\sigma)} = \binom{\sigma}{2} W_{(2)} - \sigma(\sigma-2) W_{(1)} + \binom{\sigma-1}{2} W_{(0)}.$$

Es lässt sich in den merkwürdigen Satz formulieren:

Die Wegezahlen der Komplexe, die ein Büschel gleichartiger Geraden enthalten, lassen sich sämtlich als **ein und dieselbe** Funktion der Wegezahlen derjenigen drei Komplexe darstellen, in welchen 1) alle Geraden des Büschels fehlen, das Büschel 2) auf eine Gerade, 3) auf zwei Geraden reduziert ist.

Da bei der Frage nach den Rösselsprüngen eines Schachbretts die sogenannten geschlossenen Rösselsprünge besonders interessieren, so hätte man auch die vorstehenden Untersuchungen von Anfang an auf die Zahl der an jedem Komplexe existierenden geschlossenen Wege abzielen können. Dabei würde sich gezeigt haben, dass die vorstehenden Überlegungen auch auf diese Form der Aufgabe Anwendung finden.

Auch lassen sich die Rekursionsformeln des Kapitel III leicht so abändern, dass sie auf die „Hamiltonschen Rundreisen“ (Math. Mußestunden von H. Schubert, § 25) übertragen werden können.

Kapitel VI.

Angabe eines Weges zur allgemeinen Lösung der in Kapitel IV gestellten Aufgabe.

Aus der Endformel des vorigen Kapitels ergiebt sich leicht die folgende:

$$W_{(\lambda)} = W_{(0)} - \lambda[W_{(0)} - W_{(1)}] + \binom{\lambda}{2}[W_{(0)} - 2W_{(1)} + W_{(2)}],$$

wofür man nach Kapitel II unter Anwendung der dort eingeführten Bezeichnungsweise schreiben darf:

$$W_{(\lambda)} = W_{(0)} - \lambda W^{1} + \binom{\lambda}{2} W^{2}.$$

Nun lässt sich aber W^1 (welches besagt, dass sämtliche λ Geraden des Bündels aus dem Komplex getilgt werden sollen, die Wegelemente aber, die an Stelle irgend einer dieser Geraden treten, in jedem Wege vorkommen müssen) durch Wiederholung des in Kapitel III zur Bestimmung von $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,\,a)}$ angewendeten Verfahrens durch Wegezahlen von Komplexen ausdrücken, in denen keine der Geraden des Bündels vorkommt. Ganz analog lässt sich W^2 behandeln (welches ausdrücken soll, dass nach Tilgung der λ Geraden die Wegelemente von irgend zwei dieser Geraden in jedem Wege vorhanden sein müssen).

Dadurch wird $W_{(\lambda)}$ auf $W_{(0)}$ zurückgeführt und damit die in Kapitel IV gestellte und für einige Spezialfälle dort durchgeführte wichtige Aufgabe allgemein gelöst.

Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Kurven.

Von

F. Kosch,

Oberlehrer an der Königl. Oberrealschule zu Breslau.

Die polytropischen Kurven besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass auf ihren Normalen durch zwei feste bestimmte Gerade ein Stück abgeschnitten wird, dass allemal durch die Kurve selbst halbiert wird. Da dieser Satz noch nicht bekannt zu sein scheint, so lasse ich seinen Beweis hier folgen und knüpfe zugleich eine einfache Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt daran an, die mit ihm im Zusammenhange steht.

In Bezug auf ihre Asymptoten lautet bekanntlich die Gleichung der polytropischen Kurve

$$x^n y = x_0^n y_0;$$

sie lässt sich leicht auf die Form bringen

$$x^\lambda y^\mu = a, \tag{1}$$

und man kann die Konstanten λ, μ, a so wählen, dass

$$\lambda + \mu = 1$$

wird, wobei λ und μ positiv sein sollen.

Die Richtungskonstante der Tangente ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \tau = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{y}{x}, \tag{2}$$

und die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkte $P(xy)$ lautet

$$\eta - y = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{y}{x}(\xi - x).$$

Es seien A_1 und A_2 die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenaxen (vergl. die umstehende Figur). Unter Berücksichtigung, dass $\lambda + \mu = 1$ ist, findet man dann

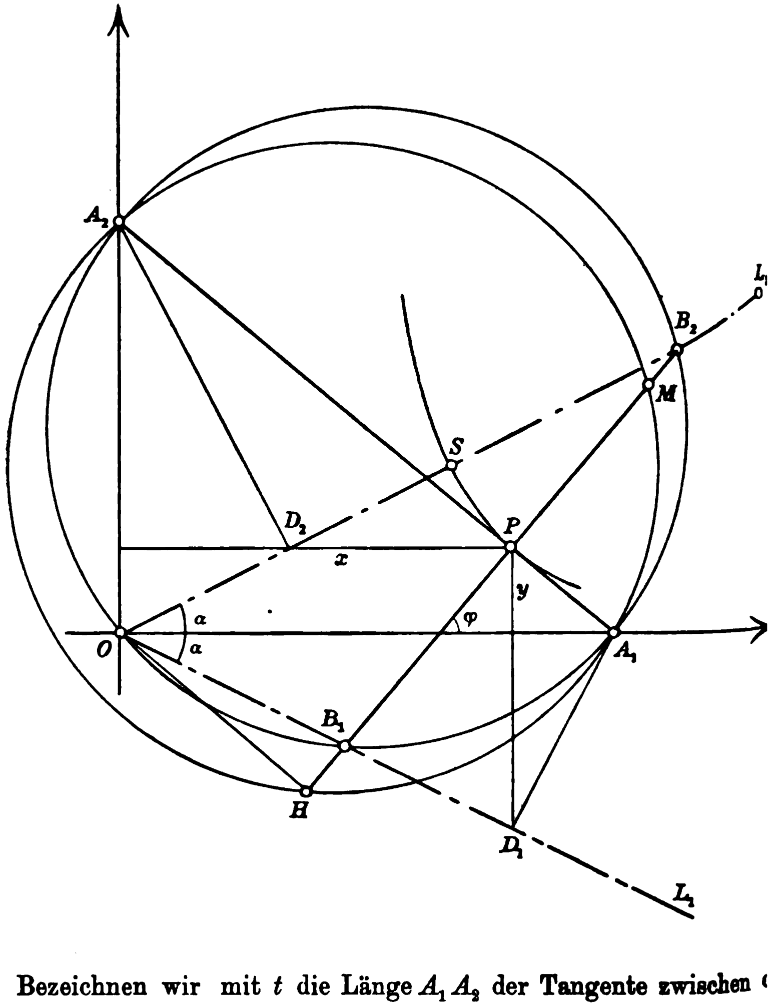
$$\left\{\begin{aligned} \overline{OA_1} &= \frac{x}{\lambda}, \\ \overline{OA_2} &= \frac{y}{\mu}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Wir setzen nun

$$4)\qquad \tan^2\alpha = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \text{also} \quad \begin{cases} \sin^2\alpha = \mu \\ \cos^2\alpha = \lambda, \end{cases}$$

und haben auch

$$5)\qquad \begin{cases} \overline{OA_1} = \dfrac{x}{\cos^2\alpha}, \\ \overline{OA_2} = \dfrac{y}{\sin^2\alpha}. \end{cases}$$



Bezeichnen wir mit t die Länge $A_1 A_2$ der Tangente zwischen Asymptoten, so haben wir

$$6)\qquad t^2 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = \frac{x^2}{\cos^4\alpha} + \frac{y^2}{\sin^4\alpha}.$$

Die Abschnitte $\overline{PA_1}$ und $\overline{PA_2}$ auf der Tangente finden sich aus

$$\overline{PA_1} = \frac{y}{\sin\tau},$$

$$\overline{PA_2} = -\frac{x}{\cos\tau},$$

daher

$$\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_1}} = -\frac{x}{y}\operatorname{tg}\tau = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Dies giebt den bereits bekannten Satz:

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente wird im Berührungspunkt im Verhältnis der Exponenten geteilt.

Da $\overline{A_1A_2} = t$ gesetzt war, so ist auch

$$\text{7)} \qquad \begin{cases} \overline{PA_2} = \lambda t, \\ \overline{PA_1} = \mu t. \end{cases}$$

Wir zeichnen den Umkreis des Dreiecks OA_1A_2, errichten in P die Normale, die den Umkreis in B_1 und B_2 schneidet, und finden, da A_1A_2 Durchmesser dieses Kreises ist, dass

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2}.$$

Wir haben dann ferner

$$\overline{PB_1^2} = \overline{PB_2^2} = \overline{PA_1}\,\overline{PA_2} = \lambda\mu t^2,$$

oder

$$\text{8)} \qquad \overline{PB_1} = \overline{PB_2} = t\sqrt{\lambda\mu}.$$

Denkt man sich nun die beiden Punkte B_1 und B_2 mit A_2 verbunden, dann sieht man, dass

$$\operatorname{tang} \sphericalangle B_1A_2P = \operatorname{tang} \sphericalangle B_2A_2P = \frac{t\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda t} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \operatorname{tang}\alpha$$

ist; d. h. es ist

$$\sphericalangle B_1A_2P = \sphericalangle B_2A_2P = \alpha.$$

Zieht man endlich vom Koordinatenanfangspunkte O aus die beiden Geraden L_1 und L_2 nach den Punkten B_1 und B_2, so hat man als Peripheriewinkel über gleichen Bogen

$$\sphericalangle B_1OP = \sphericalangle B_2OP = \alpha,$$

d. h. die beiden Geraden L_1 und L_2 haben eine feste Lage. Wir wollen sie analog ihrer Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel die Axen der polytropischen Kurve nennen.

Wir haben nun die beiden Sätze gewonnen:

1. Das zwischen den Axen liegende Stück der Normale wird durch die polytropische Kurve halbiert.
2. Das von der Tangente und den beiden Asymptoten und das von der Normale und den beiden Axen gebildete Dreieck haben ein und denselben Umkreis.

Der Schnittpunkt S der Kurve mit der Axe L_2 heisse der Scheitel. Für ihn ist

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha$$

und daher auch

$$\operatorname{tang} \tau = -\frac{\lambda}{\mu} \operatorname{tang} \alpha = -\cot \alpha,$$

d. h. die Kurve schneidet die Axe rechtwinklig.

Zieht man von P die Senkrechten auf die Asymptoten und bringt sie zum Schnitt mit den Axen in den Punkten D_1 und D_2, errichtet man endlich in D_1 und D_2 Lote auf den Axen, so gehen diese, wie aus den Gleichungen 5 folgt, durch die Punkte A_1 und A_2.

Versteht man unter ξ und η die Koordinaten von B_2, so ist

$$\xi = \overline{OB}_2 \cos \alpha,$$

$$\eta = \overline{OB}_2 \sin \alpha,$$

und mit Hilfe der Gleichung der Normale

$$\eta - y = \frac{\mu}{\lambda} \frac{x}{y} (\xi - x)$$

findet man dann

$$\overline{OB}_2 = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}$$

und analog

$$\overline{OB}_1 = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Nun ist

$$\frac{x}{\cos \alpha} = OD_1 \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sin \alpha} = OD_2,$$

daher gewinnen wir noch die einfachen Beziehungen

$$9) \quad \begin{cases} \overline{OB}_2 = \overline{OD}_1 + \overline{OD}_2, \\ \overline{OB}_1 = \overline{OD}_1 - \overline{OD}_2. \end{cases}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung des Krümmungsradius über. Es war

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{y}{x},$$

daher

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2}$$

$$= -\frac{\lambda}{\mu} \frac{-\frac{\lambda}{\mu} y - y}{x^2}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu^2} \frac{y}{x^2}.$$

Nun ist

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\lambda}{\mu^2}\frac{y}{x^3}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^3}{x^3}\left(\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\lambda}{\mu^2}\frac{y}{x^3}}$$

d unter Berücksichtigung von Gleichung 6)

$$\varrho = \frac{\lambda^2\mu^2 t^3}{xy}.$$

Benutzt man ferner die Gleichungen 3) und 7), so hat man

$$\varrho = \frac{\overline{PA_1}\,\overline{PA_2}\cdot t}{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}.$$

Fällt man nun vom Punkte O auf die Normale das Lot OH, ist der Inhalt vom Dreieck OA_1A_2 sowohl

$$\frac{1}{2}\,\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2} \quad \text{als auch} \quad \frac{1}{2}t\cdot\overline{PH}.$$

Daher gewinnt man

$$\varrho = \frac{\overline{PA_1}\,\overline{PA_2}}{\overline{PH}},$$

ıd dieser Ausdruck führt zu folgender einfachen Konstruktion:

Man lege durch die drei Punkte HA_1A_2 den Kreis, so ꞉ht dieser auch durch den Krümmungsmittelpunkt.

Für den Scheitelpunkt S fällt dieser Hilfskreis mit dem Umkreis ꞉s Dreiecks OA_1A_2 zusammen; daher ist für ihn der Krümmungs-.ittelpunkt der Spiegelpunkt des Punktes O in Bezug auf die Scheitel-ıngente.

Um zu beweisen, dass die ermittelten Eigenschaften der Normale ur den polytropischen Kurven zukommen, gehen wir von der Be-ingung aus, es sei

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = z.$$

Nennen wir φ den Winkel, den B_1B_2 mit der x-Axe bildet, ıo ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{z\sin\varphi + y}{z\cos\varphi + x}$$

und

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{z\sin\varphi - y}{x - z\cos\varphi},$$

oder auch

$$z(\sin\varphi - \operatorname{tang}\alpha\cos\varphi) = x\operatorname{tang}\alpha - y,$$

$$z(\sin\varphi + \operatorname{tang}\alpha\cos\varphi) = x\operatorname{tang}\alpha + y,$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\alpha} = \frac{x \operatorname{tang}\alpha - y}{x \operatorname{tang}\alpha + y},$$

oder

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x}{y}\operatorname{tang}^2\alpha.$$

Nun ist

$$\operatorname{tang}\varphi = -\cot\tau = -\frac{dx}{dy},$$

und wenn man setzt

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{\mu}{\lambda},$$

so hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\,\frac{\lambda}{\mu},$$

und dieser Differentialgleichung genügt nur die Gleichung der polytropischen Kurve

$$x^\lambda y^\mu = a.$$

Ein Satz über hyperboloidisch gelegene Tetraeder.

Von Dr. **Karl Doehlemann** in **München.**

1. Ein bekannter Satz von Chasles* lautet: Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Tetraeder die Erzeugenden eines Hyperboloids sind, so liegen auch die Schnittlinien entsprechender Ebenen auf einem Hyperboloid. Hermes** und Schur*** haben darauf bezügliche allgemeinere Theoreme angegeben. In neuester Zeit hat Kohn† den Begriff der schiefperspektiven Lage zweier Tetraeder aufgestellt. Er bezeichnet zwei Tetraeder als schiefperspektiv, wenn das eine in das andere durch eine gescharte Kollineation des Raumes übergeführt werden kann. Es giebt dann zwei Gerade, die Axen dieser Kollineation, welche sowohl die vier Verbindungslinien der Ecken, als auch die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen der Tetraeder treffen und es zeigt sich weiter, dass die Existenz zweier solchen Geraden auch die hinreichende Bedingung für die schiefperspektive Lage abgiebt.

Es entsteht nun die Frage: Kann es auch vorkommen, dass bei zwei hyperboloidisch gelegenen Tetraedern das Hyperboloid der Verbindungslinien der Ecken identisch wird mit dem Hyperboloid der Schnittgeraden entsprechender Ebenen? In diesem Falle giebt es dann unendlich viele Gerade, welche gleichzeitig diesen acht Geraden begegnen.

2. Das eine der beiden Tetraeder, $ABCD$, sei als Fundamentaltetraeder gewählt. Die Elemente irgend einer symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

* Chasles: Aperçu historique, Note XXXII.
** Hermes: Crelles Journal Bd. 56, 1858.
*** Schur: Mathematische Annalen Bd. 19, 1882.
† Kohn: Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1898.

ıutzen wir, um vier Punkte A', B', C', D' zu definieren in der Art, ıs die vier Elemente der ersten Zeile die homogenen Koordinaten des ıktes A', die der zweiten Zeile die des Punktes B' u. s. f. Dann bilden vier Verbindungsgeraden AA', BB', CC', DD' die Erzeugenden eines perboloids (Hermes l. c.) und die Gleichungen dieser vier hyperoidischen Geraden a, b, c, d werden also:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \cdot & & \frac{x_2}{a_{12}} & = & \frac{x_3}{a_{13}} & = & \frac{x_4}{a_{14}} \\ \frac{x_1}{a_{21}} & & \cdot & = & \frac{x_3}{a_{23}} & = & \frac{x_4}{a_{24}} \\ \frac{x_1}{a_{31}} & = & \frac{x_2}{a_{32}} & & \cdot & = & \frac{x_4}{a_{34}} \\ \frac{x_1}{a_{41}} & = & \frac{x_2}{a_{42}} & = & \frac{x_3}{a_{43}} & & \cdot \end{array}\right.$$

Es ist jetzt das Hyberboloid H der vier Geraden a, b, c, d zu bemmen. Wir benutzen dazu eine Form der Darstellung, welche Prossor G. Bauer in seinen Vorträgen anwendet. Sind nämlich

$$p'_{ip},\ p''_{ip},\ p_{ip}$$

ıe homogenen Koordinaten von drei Geraden, so ist das durch dieselbe estimmte Hyperboloid gegeben durch:

$$\begin{vmatrix} p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + p_{14}x_4 & p_{21}x_1 + p_{23}x_3 + p_{24}x_4 & p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{34}x_4 \\ p'_{12}x_2 + p'_{13}x_3 + p'_{14}x_4 & p'_{21}x_1 + p'_{23}x_3 + p'_{24}x_4 & p'_{31}x_1 + p'_{32}x_2 + p'_{34}x_4 \\ p''_{12}x_2 + p''_{1}\,x_3 + p''_{14}x_4 & p''_{21}x_1 + p''_{23}x_3 + p''_{24}x_4 & p''_{31}x_1 + p''_{32}x_2 + p''_{34}x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Wendet man dies auf die Geraden a, b, c an, so erhält man das Hyperboloid

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} H = a_{34}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})x_1x_2 + a_{24}(a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34})x_1x_3 \\ \quad + a_{23}(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24})x_1x_4 + a_{12}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})x_3x_4 \\ \quad + a_{13}(a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34})x_2x_4 + a_{14}(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24})x_2x_3 = 0. \end{array}\right.$$

Die in den Klammern stehenden Determinanten geben durch ihr Verschwinden die Bedingungen, dass sich zwei der Geraden a, b, c, d schneiden. Da wir voraussetzen, dass die Verbindungslinien a, b, c, d hyperboloidisch liegen, so müssen wir also diese Klammerausdrücke als von Null verschieden annehmen.

3. Andererseits bestimmen wir jetzt das Hyperboloid H', auf dem die vier Schnittlinien a_1, b_1, c_1, d_1 der Ebenen BCD und $B'C'D'$ ACD und $A'C'D'$, ABD und $A'B'D'$, endlich ABC und $A'B'C'$ liegen. Die vier Ebenen $B'C'D'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$, $A'B'C'$ sind der Reihe nach:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = 0, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 = 0, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4 = 0, \end{array}\right.$$

wobei α_{ik} die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante. Bringen wir diese Ebenen zum Schnitt mit den entsprechenden Seitenflächen des ersten Tetraeders, so sind die vier Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 bezw.

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 0, & \cdot & \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = 0, \\ x_2 = 0, & \alpha_{21}x_1 & \cdot \quad \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = 0, \\ x_3 = 0, & \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 & \cdot \quad \alpha_{34}x_4 = 0, \\ x_4 = 0, & \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 & \cdot \quad = 0. \end{array}$$

Für das durch diese vier Geraden bestimmte Hyperboloid H' erhält man dann unter Anwendung der gleichen Determinante und nach einigen leichten Umformungen

$$4)\quad \begin{cases} H' = \alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}x_1^2 + \alpha_{21}\alpha_{23}\alpha_{24}x_2^2 + \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{34}x_3^2 + \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}x_4^2 \\ \quad + \alpha_{12}(\alpha_{14}\alpha_{23} + \alpha_{24}\alpha_{13})x_1x_2 + \alpha_{13}(\alpha_{14}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{34})x_1x_3 \\ \quad + \alpha_{14}(\alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{34})x_1x_4 + \alpha_{23}(\alpha_{24}\alpha_{31} + \alpha_{34}\alpha_{21})x_2x_3 \\ \quad + \alpha_{24}(\alpha_{23}\alpha_{41} + \alpha_{12}\alpha_{34})x_2x_4 + \alpha_{34}(\alpha_{32}\alpha_{41} + \alpha_{13}\alpha_{24})x_3x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Stellen wir jetzt die Bedingungen dafür auf, dass das Hyperboloid H' der Schnittgeraden mit dem Hyperboloid H der Verbindungsgeraden zusammenfalle. Dann müssen zunächst in der Gleichung 4) die Glieder mit x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 verschwinden. Dies können wir auf zweierlei Weise erreichen: entweder setzen wir zwei α mit verschiedenen Zeigern $= 0$ z. B. $\alpha_{12} = 0$ und $\alpha_{34} = 0$, oder wir nehmen an, dass drei α mit einem gemeinsamen Zeiger verschwinden, z. B.:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = 0.$$

Prüfen wir zunächst die letztere Annahme, so hat sie, vermöge der Gleichungen 3) sofort zur Folge, dass die Ebene $B'C'D'$ mit der Ebene BCD und A' mit A zusammenfällt. Überdies verschwindet dann überhaupt die ganze Gleichung 4). Dadurch verliert diese Annahme, sofern sie eben nur einen Spezialfall vorstellt, ihr Interesse.

Bleiben wir also bei der ersten Voraussetzung, wonach

$$5)\qquad \alpha_{12} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{34} = 0.$$

Dies hat zur Folge, dass in Gleichung 4) auch die Glieder mit x_1x_2 und x_3x_4 wegfallen. Das Gleiche muss demnach auch in der Gleichung 2) eintreten und da die Klammerausdrücke nicht verschwinden dürfen, so muss also sein

$$6)\qquad a_{34} = 0 \quad \text{und} \quad a_{12} = 0.$$

Die geometrische Bedeutung der Bedingungen 5) und 6) ist sofort anzugeben: $\alpha_{12} = 0$ bedeutet nach 3), dass die Ebene $B'C'D'$ durch B und die Ebene $A'C'D'$ durch A hindurchgeht. Vermöge $\alpha_{34} = 0$ gehen die Ebenen $A'B'D'$ und $A'B'C'$ bezw. durch D und C. Endlich liegen vermöge der Bedingungen 6) A' in ACD, B' in BCD, C' in ABC, D' in ABD. Dann sind aber die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander gleichzeitig ein- und umschrieben und zwar nach der von Möbius gefundenen Art.* Die den Ecken einer Fläche entsprechenden Ebenen schneiden sich immer in einem Punkte dieser Fläche. Es tritt dann auch eine Zuweisung der Ecken der beiden Tetraeder ein. Schreibt man die darnach einander zugeordneten Ecken der beiden Tetraeder unter einander, so ergiebt sich für die beiden Tetraeder das Schema

$$\begin{matrix} A\,B\,C\,D \\ B'A'D'C'. \end{matrix}$$

5. Führt man in die Gleichungen von H und H' die Bedingungen 5) und 6) ein, so reduzieren sich dieselben auf die folgenden:

$$7)\quad a_{24}a_{14}a_{23}x_1x_3 - a_{23}a_{13}a_{24}x_1x_4 + a_{13}a_{14}a_{32}x_2x_4 - a_{14}a_{13}a_{24}x_2x_3 = 0,$$

$$8)\quad \alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{32}x_1x_3 + \alpha_{14}\alpha_{13}\alpha_{42}x_1x_4 + \alpha_{24}\alpha_{23}\alpha_{41}x_2x_4 + \alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{31}x_2x_3 = 0.$$

Die gleichen Bedingungen reichen aber schon aus, um 7) und 8) identisch werden zu lassen. Dies ist ja der Fall, wenn

$$\frac{a_{24}a_{14}a_{23}}{\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{32}} = -\frac{a_{23}a_{13}a_{24}}{\alpha_{14}\alpha_{13}\alpha_{42}} = \frac{a_{13}a_{14}a_{23}}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{41}} = -\frac{a_{14}a_{13}a_{24}}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{31}}$$

und diese Beziehungen sind erfüllt, da mit Rücksicht auf 5) und 6) und nach bekannten Determinantensätzen

$$9)\quad \begin{cases} a_{13}\alpha_{23} + a_{14}\alpha_{24} = 0, \\ a_{23}\alpha_{13} + a_{24}\alpha_{14} = 0, \\ a_{31}\alpha_{41} + a_{32}\alpha_{42} = 0, \\ a_{41}\alpha_{31} + a_{42}\alpha_{32} = 0. \end{cases}$$

Die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 werden dann aber der Reihe nach:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, & & \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = 0, \\ x_2 = 0, & & \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = 0 \\ x_3 = 0, & \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 = 0, & \\ x_4 = 0, & \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 = 0, & \end{array}$$

und mit Bezug auf die Relationen 9) ergiebt sich, dass dies die Geraden b, a, d, c sind. Es sind also nicht nur die Hyperboloide H und H' identisch, sondern es fallen überdies a_1, b_1, c_1, d_1 bezw. mit b, a, d, c zusammen. Dies ist geometrisch ohne weiteres einzusehen, denn die Ebenen ABC und $A'B'C'$ z. B. müssen sich in der Linie CC' schneiden, da ABC durch C' und $A'B'C'$ durch C geht.

6. Zwei Möbiussche Tetraeder liegen bekanntlich auf dreifache Weise hyperboloidisch. Dementsprechend erhalten wir noch folgende zwei hyperboloidische Quadrupel:

$$AD',\ BC',\ CB',\ DA',$$

sowie

$$AC',\ BD',\ CA',\ DB'.$$

Der Beweis ergiebt sich leicht unter Benutzung der Gleichungen 5), welche übrigens folgende Form annehmen:

* Zwei Tetraeder können auch noch auf drei verschiedene andere Weisen einander gleichzeitig ein- und umschrieben sein, wie G. Bauer gezeigt hat: Sitzungsbericht der bayer. Akademie, 1897.

$$a_{33}a_{14}a_{24} + a_{44}a_{13}a_{23} = 0;$$
$$a_{11}a_{23}a_{24} + a_{22}a_{13}a_{24} = 0.$$

Aus der ersten derselben ist das Verhältnis $\frac{a_{33}}{a_{44}}$, aus der zweiten das Verhältnis $\frac{a_{11}}{a_{22}}$ bestimmt, wenn man die übrigen a_{ik} mit Beachtung von 6) beliebig wählt.

Es hat sich also gezeigt:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in zwei hyperboloidisch gelegenen Tetraedern das Hyperboloid der Verbindungslinien zusammenfalle mit dem Hyperboloid der Schnittgeraden, ist die, dass die beiden Tetraeder einander nach der Möbius'schen Art gleichzeitig ein- und umschrieben sind. Es fallen dann und nur dann die ersten vier Geraden mit den letztgenannten je einzeln zusammen."

München, März 1899.

Über eine Eigenschaft der Hyperbel.

Von **W. Fr. Meyer** in **Königsberg** in Preussen.

Die aus den Elementen der Integralrechnung bekannte Formel

I. $$2\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + l(x+\sqrt{1+x^2})$$

erlaubt eine einfache geometrische Deutung und führt so zu einer eleganten Eigenschaft der Hyperbel.

Es sei (vergl. die Figur)

1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel, $P(x, y)$ ein beliebiger Punkt von ihr (etwa im ersten Quadranten); PX, PY seine rechtwinkligen Koordinaten. Der Hyperbelbogen PS begrenzt, einmal zusammen mit den Strecken PX, XS eine Fläche J_x, andererseits mit den Strecken PY, YO, OS eine Fläche J_y. Zwischen beiden Flächen besteht offenbar die Relation:*

2) $$J_y + J_x = xy.$$

Die Formel I. geht daher über in

3) $$J_y - J_x = ab \cdot l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Um die geometrische Bedeutung der rechten Seite von 3) zu erkennen, lege man durch P eine Parallele zur nicht anliegenden Asymptote, bis sie die anliegende in P_1 trifft; PP_1 werde mit η, OP_1 mit ξ bezeichnet.

Die Gleichung der Hyperbel in den schiefwinkligen Asymptotenkoordinaten ξ, η ist bekanntlich:

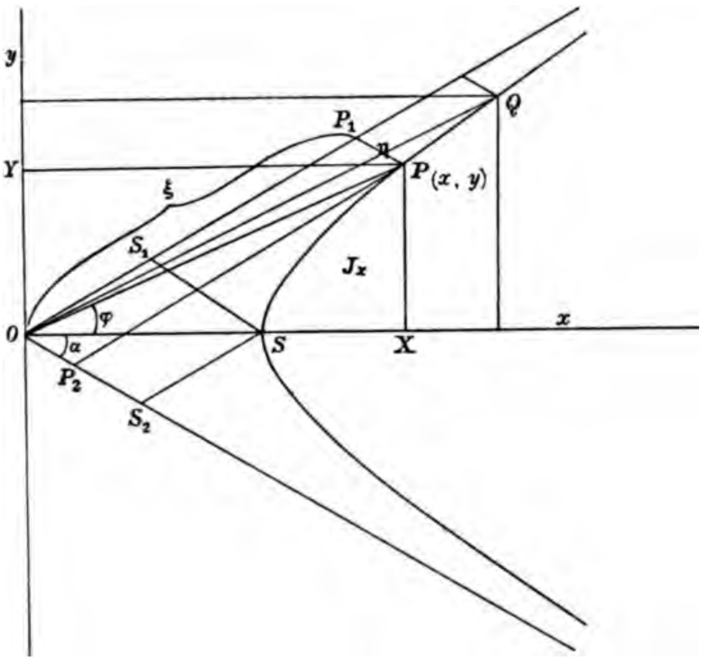
* Diese Relation ist äquivalent mit der Formel $d(xy) = x\,dy + y\,dx$.

$$4)\qquad \xi\eta = \frac{1}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{ab}{2},$$

wo $\frac{ab}{2}$ der Inhalt des für die Hyperbel konstanten Parallelogramms ist, und ξ wird, in den rechtwinkligen Koordinaten x, y ausgedrückt:

$$5)\qquad \xi = \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha} = \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2+b^2}{2ab}$$
$$= \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Legt man also auch durch den Scheitel S eine Parallele SS_1 zu PP_1, und bezeichnet die durch den Hyperbelbogen PS nebst den Strecken SS_1,



S_1P_1, P_1P begrenzte Fläche als „Asymptotenfläche" A,* so zeigt sich nach Einsetzung der Grenzen, dass

$$6)\qquad A = \frac{ab}{2}\, l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

wird, somit wegen 3), als geometrischer Inhalt von I.:

$$\text{II.}\qquad J_y - J_x = 2A.$$

Um diese Thatsache noch einfacher zu formulieren, ziehe man den Radiusvektor $OP = r$, so begrenzt dieser, zusammen mit OS und dem

* A ist übrigens inhaltsgleich mit der andern Asymptotenfläche, die man erhält, wenn man durch P und S Parallelen PP_2, SS_2 zur andern Asymptote legt.

Hyperbelbogen SP eine Sektorfläche Σ, die „Mittelpunktssektor" des Bogens SP heisse. Die Figur* zeigt, dass

$$\Sigma + J_x = \frac{1}{2}xy, \tag{7}$$

dadurch nimmt aber II. die Gestalt** an:

$$\text{III.} \qquad \Sigma = A.$$

Setzt man diese Relation für zwei, auf derselben Seite von S gelegene Punkte P, Q der Hyperbel an und subtrahiert, so kommt:

IV. „Für einen, den Scheitel nicht*** enthaltenden Hyperbelbogen ist der Mittelpunktssektor inhaltsgleich mit der Asymptotenfläche."

Nunmehr zeigen wir die Umkehrung, d. h. dass die Eigenschaft II (oder III oder IV) für die Hyperbel, genauer, für die Hyperbeln von gegebenen Axen- und Asymtotenrichtungen charakteristisch† ist.

Wir suchen alle Kurven, die der Forderung II genügen, d. h. die Differentialgleichung

$$\text{V.} \qquad xy' - y = 2\frac{dA}{dx}$$

erfüllen. Rechts führe man $\xi(5)$ als Zwischenvariable ein, setze demnach:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}. \tag{8}$$

Um hier die beiden Faktoren rechts bequem darzustellen, führe man die Asymptotenrichtung explizite ein, i. e. die Grösse:

$$\varkappa = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \tag{9}$$

---

* Die Formel 7) ist äquivalent mit der Integralformel

$$\int r^2 d\varphi = xy - 2\int y\,dx.$$

** Die Formel lässt sich auch (wenn man noch die Parallelen SS_1, PP_1 zur andern Asymptote zieht) elementargeometrisch ableiten, damit aber auch die Integralformel I., falls man nur noch

$$\int\frac{dx}{x} = lx$$

zu Hilfe nimmt. In den Lehrbüchern wird die Formel I. in der Regel nur verifiziert.

*** Um auch den Fall mit zu umfassen, dass der Hyperbelbogen den Scheitelpunkt enthält, bedarf die Formulierung von IV. einer geringen Modifikation.

† Inhaltlich muss sich daher die Differentialgleichung V. mit

$$\frac{d(\xi\eta)}{dx} = 0$$

decken. In der That ergiebt eine einfache Rechnung, dass

$$\frac{d(\xi\eta)}{dx} = \frac{1+\varkappa^2}{4\varkappa^2}\frac{d}{dx}(x^2\varkappa^2 - y^2)$$

ist.

Dann geht 1) über in

1′) $$x^2\varkappa^2 - y^2 = a^2\varkappa^2,$$

ırend $\sin 2\alpha$ den Wert

ʟ0) $$\sin 2\alpha = \frac{2\varkappa}{1+\varkappa^2}$$

ımmt. Dann wird

11) $$\frac{dA}{d\xi} = \eta \sin 2\alpha = \frac{x\varkappa - y}{\sqrt{1+\varkappa^2}},$$

12) $$\frac{d\xi}{dx} = (\varkappa + y')\frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{2\varkappa},$$

mit

13) $$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2\varkappa}(x\varkappa - y)(\varkappa + y'),$$

14) $$2\frac{dA}{dx} = \frac{1}{\varkappa}(x\varkappa^2 - yy') + (xy' - y).$$

Damit reduziert sich aber die Differentialgleichung V. auf:

15) $$x\varkappa^2 - yy' - 0$$

die Differentialgleichung der Hyperbeln 1′) bei festem $\varkappa$.

Das liefert den Satz:

VI. „Durch die Spitze O eines rechtwinkligen Axensystems Ox, Oy lege man zwei, gegen die x-Axe gleichgeneigte Gerade a_1, a_2, deren erstere den ersten Quadranten passieren möge. P sei ein fester Punkt im ersten Quadranten, Q ebendaselbst und auf der nämlichen Seite von a_1 ein variabler Punkt. Soll dann für einen Bogen PQ stets der Mittelpunktssektor gleich der „a_1-Fläche“* sein, so ist PQ Bogen der Hyperbel, die Ox, Oy zu Axen, a_1, a_2 zu Asymptoten hat und durch P geht.“

Es ist unschwer, den Satz auf eine beliebige lineare Relation

16) $$nJ_y - mJ_x - 2\varkappa\varrho A = 0$$

mit konstanten Koeffizienten n, m, ϱ auszudehnen. Denn eine analoge Rechnung liefert die entsprechende Differentialgleichung in der Gestalt:

17′) $$y' = \frac{x \cdot \varkappa^2\varrho + y(m - \varkappa\varrho)}{x(n - \varkappa\varrho) + y\varrho},$$

die nach bekannter Methode sofort integrierbar ist, und umgekehrt gehört zu jeder Differentialgleichung

18) $$y' = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

(bei geeigneter Einschränkung der Vorzeichen der Koeffizienten α, β, γ, δ) eine lineare Relation 16) mit reell-geometrischer Bedeutung.

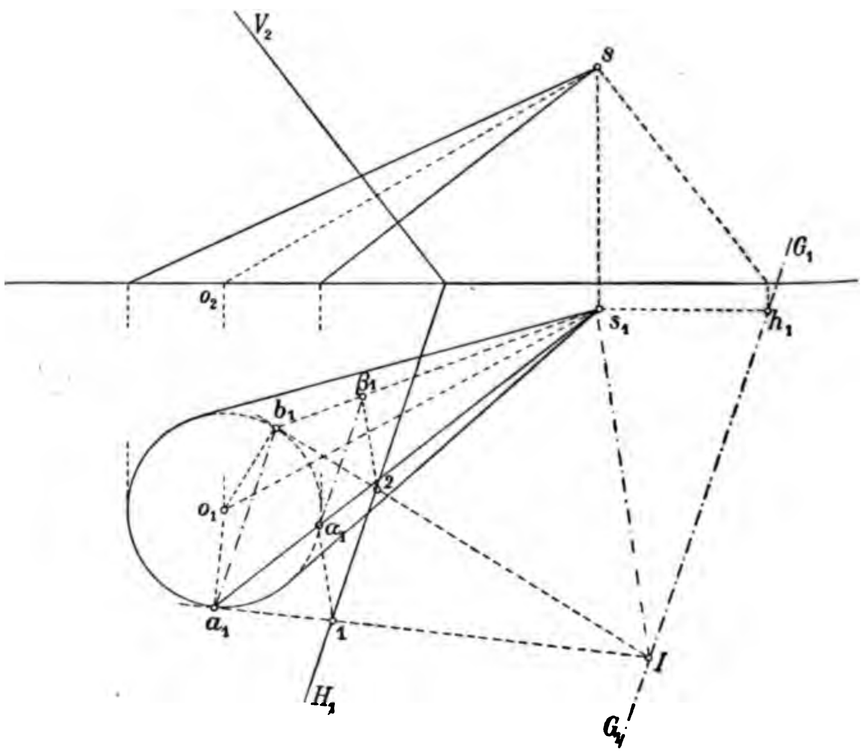
* Die Bezeichnung „a_1-Fläche“ ist das Analogon zu „Asymptotenfläche“.

Zur Konstruktion der konjugierten Durchmesser ebener Kegelschnitte.

Von **Josef Adamczik**, a.o. Professsor a. d. k. k. Bergakademie in **Příbram.**

Für jeden ebenen Kegelschnitt ist die Schnittkurve, für die Kegelspit als Centrum, perspektivisch kollinear zur Basis- oder Leitkurve der Kege fläche. Legt man durch die Kegelspitze eine zur Schnittebene paralle Ebene, so erhält man in der Spur dieser Ebene auf der Basisebene die zu Kollineationsaxe parallele Gegenaxe. Diese Gegenaxe entspricht dem Bil

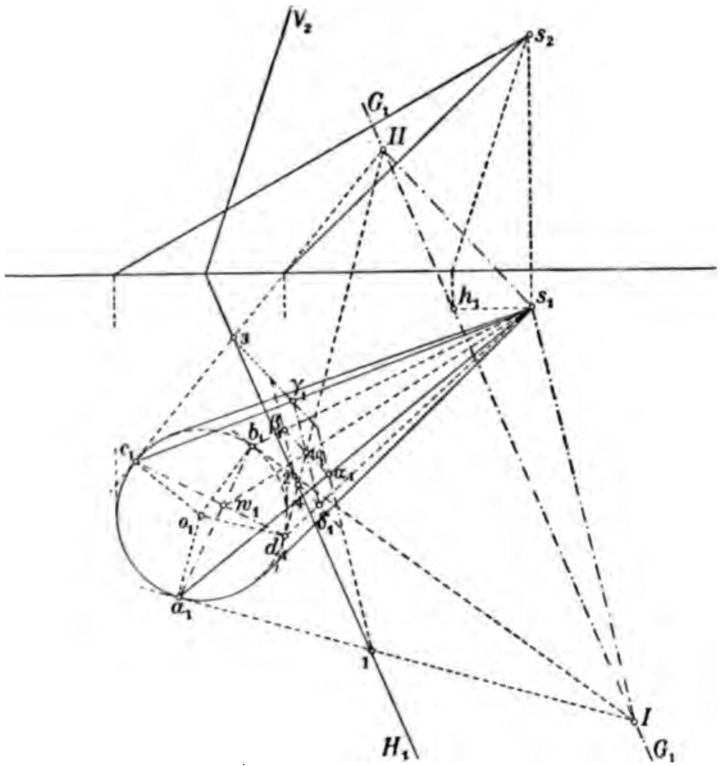
Fig. 1.



einer unendlich fernen Geraden der Schnittebene, sobald die Basisebe als Bildebene gedacht wird. Demnach werden zwei in der Schnittebe gezogene parallele Gerade ihren Verschwindungspunkt in dieser Gegena haben müssen und dieser wird erhalten, wenn man durch das Centru also die Kegelspitze einen Parallelstrahl zu diesen Geraden zieht, bis de selbe die Gegenaxe im gesuchten Verschwindungspunkte trifft. Da si die einander entsprechenden Geraden auf der Kollineationsaxe schneid müssen, so erhält man auch sofort im Schnitte der gezogenen Geraden n der Kollineationsaxe je einen weiteren Punkt der diesen Geraden entsprechend Bilder in der Basisebene. Einander zugehörige Punkte auf diesen Gerad werden leicht mittels der durch das Centrum gezogenen Kollineationsstrahlen (in unserem Falle Kegelerzeugende) erhalten. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers einer Ellipse sind parallel. Demnach kann man nach dem Vorigen sofort irgend einen beliebigen Durchmesser eines Kegelschnittes konstruieren.

Man zieht von einem beliebigen Punkte I der Gegenaxe G_1 (siehe Fig. 1) die zwei Tangenten an die Basiskurve, in den Berührungspunkten

Fig. 2.

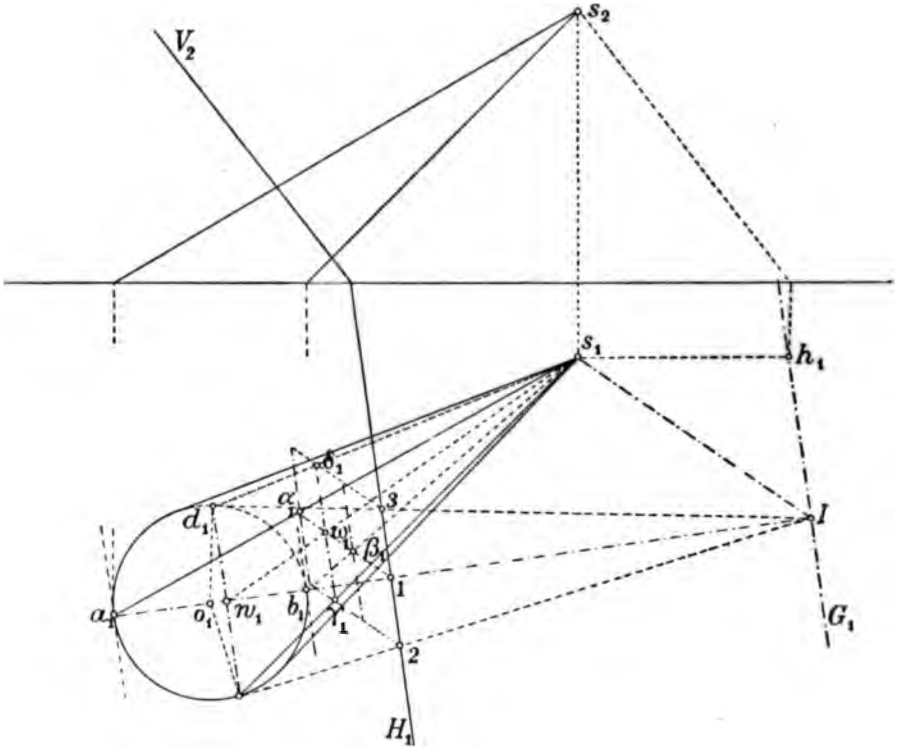


a_1 und b_1 zieht man die zugehörigen Erzeugenden des Kegels, sowie durch die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der Spur der Schnittebene (Kollineationsaxe) die zu s_1I parallelen Geraden $(1)\alpha_1$ und $(2)\beta_1$. — Letztere entsprechen den Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers $\alpha_1\beta_1$.

Um einen zweiten konjugierten Durchmesser zu erhalten, hat man nach durchgeführter obiger Konstruktion (siehe Fig. 2) nur s_1II parallel zum erhaltenen Durchmesser $\alpha_1\beta_1$ zu ziehen, um im Punkte II der Gegenaxe jenen Punkt zu finden, von welchem aus die Tangenten an die Basiskurve IIc_1 und IId_1 zu ziehen sind, worauf man auf gleiche Weise wie vorher den konjugierten Durchmesser $\gamma_1\delta_1$ erhält, da die Tangenten in γ_1 und δ_1 eben parallel zu $\alpha_1\beta_1$ erhalten werden.

Im allgemeinen wird es immerhin am zweckmässigsten sein, durch Ziehen der zur Spur der Schnittebene parallelen Tangenten an die Basiskurve (siehe Fig. 3) jene Punkte a_1 und b_1 zu erhalten, welche einerseits den höchsten Punkt α_1 und andererseits den tiefsten Punkt β_1 der Schnittkurve ergeben, für welche also die Vertikalprojektionen der Tangenten horizontal erscheinen; man reicht dann auch bei dieser Konstruktionsmethode mit einem einzigen Hilfs-

Fig. 3.



punkte I der Gegenaxe aus. Dabei wird aber, wie sich jedermann leicht überzeugen kann, die Konstruktion des Parallelogramms der Schnittkurve mit viel grösserer Sicherheit und Genauigkeit erhalten, als wenn man den in allen Lehrbüchern beschriebenen Vorgang einhält, nach Erhalt des Durchmessers $\alpha_1\beta_1$, diesen in ω_1 zu halbieren, damit den zugehörigen Punkt w_1 und aus diesem erst die Punkte c_1 und d_1 der Basis zu bestimmen. Dies führt bei einigermaßen ungünstigen Annahmen überhaupt nicht zu entsprechenden Resultaten, da die Konstruktionsfehler das Resultat entstellen. Die Drehung der Tangenten in der Nähe der Punkte γ_1 und δ_1 erfolgt so rasch, dass ein Parallelismus der Tangenten $(2)\gamma_1$ und $(3)\delta_1$ mit dem Durchmesser $\alpha_1\beta_1$ nach letzterer Methode wenigstens nicht so leicht zu erzielen ist, wie durch den hier beschriebenen, gewiss auch einfacheren Vorgang.

Dynamik der Kurbelgetriebe.

Von

Prof. Dr. Hans Lorenz

in Halle a. S.

Schluss.

Dieser Satz ist übrigens als Vermutung bereits einmal ausgesprochen worden und zwar von dem schon genannten Ingenieur Fränzel am Schlusse einer Arbeit,* welche Versuche über die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit von Schiffsmaschinen behandelte. Es entsteht nun die Frage, ob der Satz praktisch verwendbar ist. Bei der Beantwortung derselben dürfen wir nicht den Umstand aus den Augen verlieren, dass von den Bedingungsgleichungen 163a) nur eine beschränkte Zahl verwendbar sind, während die übrigen unberücksichtigt bleiben müssen. Man wird darum niemals ein vollkommen gleichförmig, d. h. geradlinig verlaufendes resultierendes Tangentialdruckdiagramm erwarten dürfen, sondern gewisse Schwankungen desselben in den Kauf nehmen müssen. Würden z. B. alle Einzeldiagramme den Verlauf von Fig. 32 haben, so lehrt unser Beispiel, dass nach der Beseitigung aller Glieder, welche mit Funktionen von φ, 2φ und 3φ behaftet sind und schon die Erfüllung von sechs Bedingungsgleichungen erfordern, immer noch erhebliche Schwankungen durch die Funktionen mit 4φ unausgeglichen bleiben. Ausserdem darf nicht vergessen werden, dass für den Massenausgleich auch die Bedingungen für das Verschwinden der Momente der Massendrücke eine Rolle spielen, während entsprechende Gleichungen für den Tangentialdruck nicht bestehen.

Dies zeigt sich besonders deutlich bei der Dreikurbelmaschine, welche gewöhnlich mit den Winkeln $\alpha_2 = 120^0$, $\alpha_3 = 240^0$ ausgeführt wird. Sind die hin- und hergehenden Massen aller drei Getriebe einander gleich, so verschwinden hierbei bis einschliesslich der Glieder von zweiter Ordnung die Massendrücke, aber die Massendruckmomente bleiben sogar in der ersten Ordnung noch unausgeglichen.

* Umdrehungsgeschwindigkeiten der Schiffsmaschinen, Marine-Rundschau November 1897.

Bei gleicher Verteilung der Arbeiten auf alle drei Getriebe verschwinden ebenfalls die Schwankungen im Drehkraftdiagramm, soweit sie von Funktionen von φ und 2φ abhängen, dagegen verschwindet nicht, wie es Gleichung 163a) fordert,

$$\Sigma T_m \cos 3\alpha = 3 T_m,$$

obwohl

$$\Sigma T_m \sin 3\alpha = 0$$

wird. Trotzdem darf man unter diesen Verhältnissen einen sehr gleichförmigen Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms erwarten, wogegen nicht zu übersehen ist, dass man bei der praktischen Unmöglichkeit, die hin- und hergehenden Massen der Getriebe einander gleich zu machen, auf den Massenausgleich bei diesen Maschinen verzichten muss.

Für die Vierkurbelmaschine bildet naturgemäss der Ausgleich der Momente der Massendrucke, auch wenn derselbe, wie wir sahen, nur in Bezug auf diejenigen erster Ordnung erreichbar ist, eine weitere Einschränkung. Ausserdem erscheint es fraglich, ob die beiden Gleichungen

$$\Sigma T_m \cos 3\alpha = 0, \quad \Sigma T_m \sin 3\alpha = 0$$

oder, was nach der Folgerung aus 163a) auf dasselbe hinausläuft,

$$\Sigma q \cos 3\alpha = 0, \quad \Sigma q \cos 3\alpha = 0,$$

worin q das Verhältnis irgend einer der hin- und hergehenden Gewichte zu demjenigen des ersten Getriebes bedeutet, mit den beiden andern Gleichungen

$$\Sigma q \cos \alpha \;\; = 0, \quad \Sigma q \sin \alpha \;\; = 0,$$
$$\Sigma q \cos 2\alpha = 0, \quad \Sigma q \sin 2\alpha = 0$$

überhaupt verträglich sind, ganz abgesehen von den Gliedern mit höheren Vielfachen der Winkel, die wir gar nicht erst berücksichtigen wollen.

Zur Untersuchung dieser Frage wollen wir zunächst einmal die Grössen q aus den Gleichungen

$$1 + q_2 \cos \alpha_2 + q_3 \cos \alpha_3 + q_4 \cos \alpha_4 = 0,$$
$$q_2 \sin \alpha_2 + q_3 \sin \alpha_3 + q_4 \sin \alpha_4 = 0,$$
$$1 + q_2 \cos 3\alpha_2 + q_3 \cos 3\alpha_3 + q_4 \cos 3\alpha_4 = 0,$$
$$q_2 \sin 3\alpha_2 + q_3 \sin 3\alpha_3 + q_4 \sin 3\alpha_4 = 0$$

in derselben Weise eliminieren, wie früher aus den Gleichungen 55) bis 58).

Wir erhalten alsdann entsprechend Gleichung 62)

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha_2 \sin 3(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 3\alpha_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \\ + \sin \alpha_3 \sin 3(\alpha_4 - \alpha_2) + \sin 3\alpha_3 \sin(\alpha_4 - \alpha_2) \\ + \sin \alpha_4 \sin 3(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 3\alpha_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Zerlegen wir nunmehr die Produkte mit Hilfe der Transformation

$$\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2}\cos(u - v) - \frac{1}{2}\cos(u + v),$$

so wird z. B. aus der ersten Reihe unserer Eliminationsformel:

$$\cos 2(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)\cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$$
$$- \cos 2(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)\cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$$

oder

$$2\cos^2(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)\cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) - \cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)$$
$$- 2\cos^2(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)\cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) + \cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4).$$

Verfahren wir ebenso mit den beiden letzten Reihen und setzen noch wie früher Gleichung 63):

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) = 2\cos^2\frac{\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}{2} - 1 = 2\xi^2 - 1,$$
$$\cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = 2\cos^2\frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}{2} - 1 = 2\eta^2 - 1,$$
$$\cos(-\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 2\cos^2\frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}{2} - 1 = 2\zeta^2 - 1,$$

so geht unsere Gleichung über in

$$\xi^2\eta^2(\xi^2 - \eta^2) + \eta^2\zeta^2(\eta^2 - \zeta^2) + \zeta^2\xi^2(\zeta^2 - \xi^2) = 0,$$

oder auch

$$(\xi^2 - \eta^2)(\eta^2 - \zeta^2)(\zeta^2 - \xi^2) = 0.$$

Diese Gleichung kann also nur bestehen, wenn entweder

$$\xi = \pm\eta \quad \text{oder} \quad \eta = \pm\zeta \quad \text{bezw.} \quad \zeta = \pm\xi$$

wird, d. h. also, wenn wir uns der Bedeutung der Grössen ξ, η, ζ nach Gleichung 63) erinnern, dass

$$\cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = \pm\cos\frac{\alpha - \gamma}{2},$$

oder

$$\cos\frac{\alpha - \gamma}{2} = \mp\cos\frac{\beta - \delta}{2} \quad \text{bezw.} \quad \cos\frac{\beta - \delta}{2} = \mp\cos\frac{\alpha + \gamma}{2}$$

wird. Da alle diese Ergebnisse mit Gleichung 64), welche auch aus der Vereinigung der ersten vier Formeln 163a) hergeleitet werden konnte, unvereinbar sind, so erkennen wir, dass die Berücksichtigung der Bedingungen

$$\Sigma T_m \cos 3\alpha = 0, \quad \Sigma T_m \sin 3\alpha = 0$$

für die Vierkurbelmaschine unzulässig ist. Damit fällt aber, wenigstens für diese Maschinengattung wie für die Dreikurbelmaschine der oben abgeleitete Satz überhaupt, da, wie unser Beispiel (Fig. 32) lehrte, die Koeffizienten der Glieder mit 3φ ungefähr von demselben Gewichte sind wie diejenigen von φ, und es unzulässig erscheint, unter solchen Gliedern willkürlich einzelne auszugleichen, während die Wirkung der andern bestehen bleibt.

Alle diese Schwierigkeiten fallen dagegen fort, wenn man sich angesichts der überwiegenden Bedeutung der mit Funktionen von 2φ behafteten Glieder im Tangentialdruckdiagramm damit begnügt, nur diese im resultierenden Diagramm zum Verschwinden zu bringen, d. h. also ohne Rücksicht auf den nebenhergehenden Massenausgleich und die beiden Bedingungen

$$164)\qquad \Sigma T_m \cos 2\alpha = 0, \quad \Sigma T_m \sin 2\alpha = 0$$

zu erfüllen. Im Grunde genommen heisst dies nichts anderes, als dass man im resultierenden Drehkraftdiagramm auf die Beseitigung der Wirkung der endlichen Schubstangenlänge und der untergeordneten Verschiedenheiten in der Form der Einzeldiagramme verzichtet.

Die Bedingungen 164) besagen dann, dass man einen möglichst gleichförmigen Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms dann erwarten darf, wenn die auf die einzelnen Kurbeln entfallenden Arbeiten (oder bei gleichen Kurbelradien die mittleren Tangentialdrucke) sich durch Aneinanderreihen mit

Fig. 37.

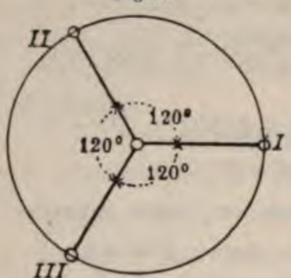
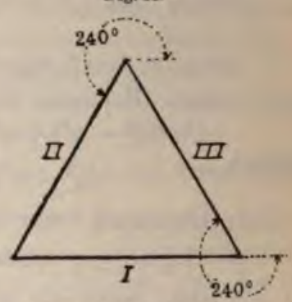


Fig. 38.



den doppelten Kurbelwinkeln zu einem geschlossenen Polygon (Vieleck) vereinigen lassen.*

Die Konstruktion dieses Polygons der mittleren Tangentialdrucke bezw. Arbeiten ist nun für alle praktischen Fälle sehr einfach und lässt, unbeschadet des Massenausgleichs, dem Konstrukteur einen weiten Spielraum für die Wahl einer passenden Arbeitsverteilung auf die einzelnen Getriebe und für die Kurbelwinkel. Es dürfte zweckmässig sein, die Anwendung des Polygons sogleich an einigen Beispielen zu erläutern. Für die Zweikurbelmaschine giebt es nur eine Lösung, nämlich die gleiche Verteilung der Arbeiten auf beide Kurbeln, welche miteinander einen Winkel von 90° bilden müssen. Dann ist der Doppelwinkel 180° und das Polygon geht in eine in sich zurücklaufende Gerade über.

Für die Dreikurbelmaschine mit Winkeln von 120°, welche Anwendung allein von praktischer Bedeutung ist (Fig. 37), ergiebt die

* Diesen Satz mit seinen praktischen Konsequenzen habe ich zuerst durch einen Vortrag: „On the uniformity of turning moments of marine engines" vor der Institution of Naval Architects im April 1900 veröffentlicht. Der Vortrag ist in den Transactions dieser Gesellschaft für das Jahr 1900 abgedruckt und auch in die englischen Zeitschriften „Engineering" und „Engineer" übergegangen.

Aneinanderreihung ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 38), sodass man hierbei an die gleiche Arbeitsverteilung gebunden ist. Dass man damit günstige Tangentialdruckdiagramme erhält, ist hinlänglich bekannt, ebenso dass durch jede Abweichung von der gleichen Arbeitsverteilung das Tangentialdruckdiagramm eine Verschlechterung erfährt, wenn man nicht gleichzeitig eine entsprechende Änderung der Kurbelwinkel eintreten lässt.

Bei der Vierkurbelmaschine, welche ja infolge des hier möglichen Massenausgleiches ein höheres Interesse beansprucht, verfügt man über eine beliebig grosse Auswahl von Kurbelstellungen bezw. Arbeitsverteilungen. Ich will voraussetzen, dass die Kurbelwinkel vollständig — etwa durch die Bedingungen des Massenausgleiches — gegeben sind (siehe Fig. 39). Alsdann erhält man in Fig. 40 mit den Doppelwinkeln ein Viereck, welches zweckmässig so gezeichnet wird, dass die zwei im Kurbelkreise aufeinander folgenden Kurbeln entsprechenden Arbeiten als Polygonseiten sich gegenüber stehen. Von den Seiten dieses Vierecks sind alsdann zwei vollkommen willkürlich und man erhält durch die Längen von *I*, *II*, *III* und *IV*, bezw. durch die Verhältnisse derselben zu einander, auf die es ja allein an-

Fig. 39.

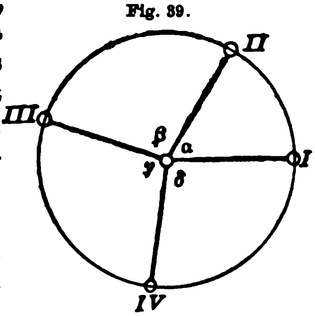
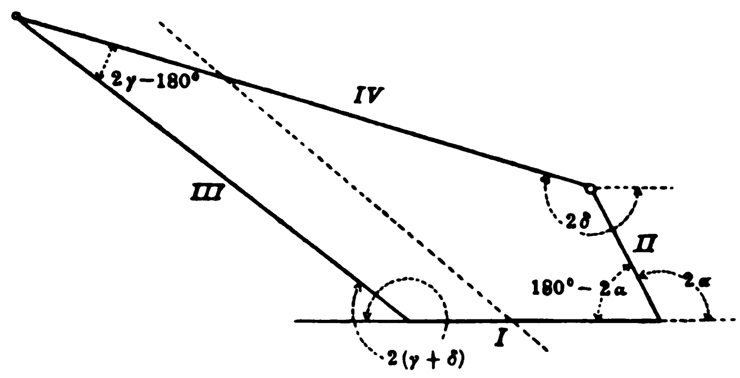


Fig. 40.

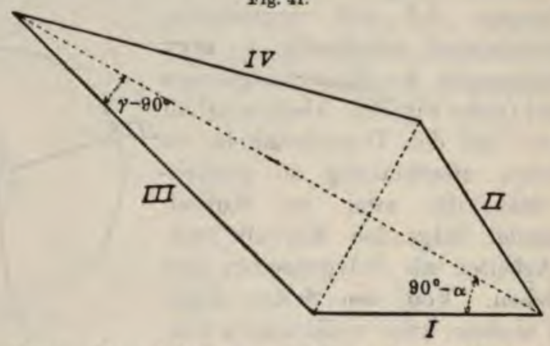


kommen kann, schon eine brauchbare Arbeitsverteilung, welche die Bedingungen 164) erfüllt und ohne weiteres neben dem Massenausgleich bestehen kann. Jede Parallele zu einer dieser vier Seiten ergiebt naturgemäss ebenfalls eine brauchbare Arbeitsverteilung, woraus wir schliessen können, dass bei einer Vierkurbelmaschine mit gegebenen Kurbelwinkeln durch die Wahl des Verhältnisses zweier Arbeiten zu einander die ganze Arbeitsverteilung mit Rücksicht auf den günstigen Verlauf des

Drehkraftdiagramms bestimmt ist, ohne dass der Massenausgleich dadurch gestört wird.

Durch die in der Praxis allein übliche symmetrische Anordnung der Kurbeln (und damit nach Schlicks Bedingungen auch der Getriebeebenen unter einander) ist nun dieses Verhältnis gegeben. Das Polygon der Tangentialdrucke bezw. Arbeiten kann alsdann durch eine Diagonale in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden, wie es in Fig. 41 geschehen ist. Da in diesen Dreiecken die beiden Winkel an den Spitzen $180-2\alpha$ und $2\gamma-180^0$ sind, so ergiebt sich mit $\beta=\delta$

Fig. 41.



für die Verteilung der Arbeiten, welche wir der Kürze halber mit I, II, III und IV bezeichnen wollen, die Regel

165) $$\frac{I}{III}=\frac{II}{IV}=\frac{\sin(\gamma-90^0)}{\sin(90^0-\alpha)}=-\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$

und

166) $$I=II,\quad III=IV.$$

Dieser Fall ist besonders wichtig für Dreifachexpansionsmaschinen, deren Niederdruckcylinder, um nicht zu grosse Dimensionen anzunehmen, geteilt werden muss, wodurch eine Vierkurbelmaschine entsteht. Man erkennt übrigens auch, dass, wenn das Verhältnis

$$I:III=II:IV$$

gegeben ist, durch Gleichung 165) und die Schlicksche Formel 65):

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$$

die beiden Winkel α und γ selbst berechnet werden können. Für die Praxis wird man es indessen vorziehen, die Winkel aus dem Abstandsverhältnis der Getriebeebenen zu bestimmen und daraus erst mit 165) die Arbeitsverteilung berechnen. Jedenfalls ist dieses Verfahren höchst einfach und zur Vermeidung grosser Baulängen der Maschinen auch zweckmässig. Als Beispiel hierfür erwähne ich das Diagramm* der

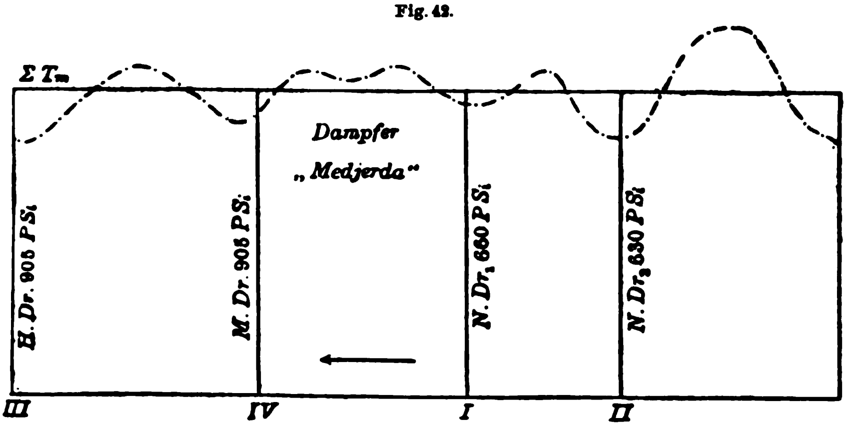
* In der Figur sind die Linien, an denen die Arbeiten verzeichnet sind, mit den Abständen (in Bogenmaß, wenn die ganze Länge der Figur 2π beträgt) der Kurbeln im Kurbelkreise von einander eingetragen, wobei, wie der Pfeil andeutet, die Hochdruckskurbel I vorausläuft.

Maschine des Dampfers „Medjerda" (Fig. 42), bei welchem der Hoch- und Mitteldruckcylinder je 905 PS_i (indizierte Pferdestärken), die beiden Niedercylinder dagegen 660 bezw. 630 PS_i leisteten, während die Kurbelwinkel

$$\alpha = 64{,}5^0, \quad \beta = \delta = 94{,}25^0 \quad \text{und} \quad \gamma = 107^0$$

betrugen. Die Bedingung 165) ist hier, wenn man für jeden der Niederdruckcylinder den Mittelwert 645 PS_i einführt, fast genau er-

Fig. 42.



füllt und der Verlauf des Drehkraftdiagramms in der That ein sehr günstiger, obwohl die Erbauer, die Firma Wigham, Richardson & Co. in Newcastle upon Tyne (England) dazu nur durch Probieren, ohne Kenntnis unserer Formel 165) gelangten.

Bei Maschinen mit vierfacher Expansion ist es nun mit Rücksicht auf ein gleiches Temperaturgefälle des arbeitenden Dampfes in

Fig. 43.

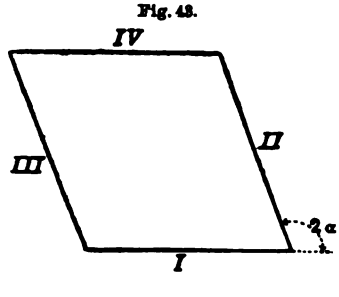
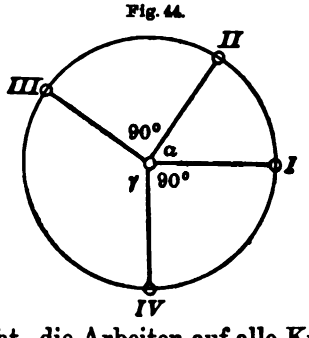
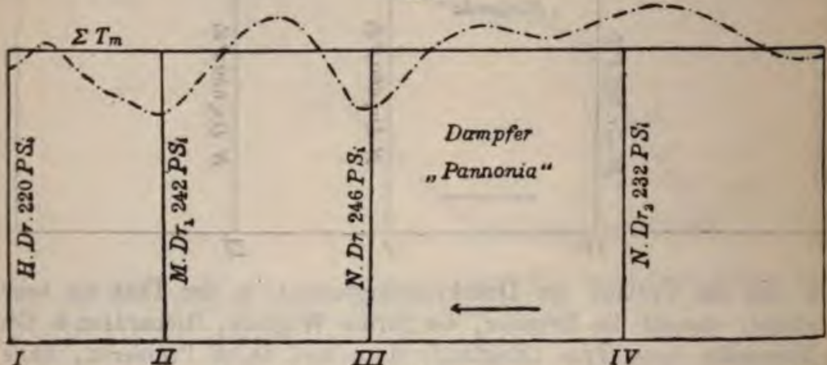


Fig. 44.



den einzelnen Cylindern häufig erwünscht, die Arbeiten auf alle Kurbeln gleichmässig zu verteilen, wodurch das Polygon der mittleren Tangentialdrucke in einen Rhombus übergeht (siehe Fig. 43). Da hierin je zwei Seiten einander parallel sind, so müssen die entsprechenden Kurbeln im Kurbelkreis nach 165) mit einander rechte Winkel bilden, wie dies in Fig. 44 angedeutet ist, d. h.: Sollen in einer Vierkurbelmaschine die Arbeiten auf alle vier Kurbeln gleich verteilt sein, so fordert der günstigste Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms zwei einander im Kurbelkreis gegenüberstehende rechte Winkel, während die Wahl eines der beiden andern Winkel, welche sich natürlich zu 180° ergänzen müssen, freisteht. Sind zwei rechte Winkel im Kurbelkreis gegeben, so kann man auch durch eine Parallele zu einer der Seiten in Fig. 43 eine andere Arbeitsverteilung erzielen, sodass also der letzte Satz in seiner Umkehrung nicht allgemein gilt. Indessen müsste alsdann immer $I = IV$ und $II = III$ sein, was infolge der Dimensionierung der Cylinder nur selten mit anderweitigen Forderungen (z. B. derjenigen des Verschwindens der Massendruckmomente) vereinbar erscheint, so dass es einfacher ist,

Fig. 45.



ein für allemal die beiden Winkel $\beta = \delta = 90^0$ als an die gleiche Arbeitsverteilung geknüpft festzuhalten. Als Beispiel füge ich das Diagramm der aus den Werkstätten der schon oben genannten englischen Firma stammenden Maschine des Dampfers „Pannonia“ an, welche im Hochdruckcylinder 220 PS_i, im ersten Mitteldruckcylinder 242 PS_i im zweiten 232 PS_i und im Niederdruckcylinder 246 PS_i, leistete, also eine nahezu gleiche Arbeitsverteilung besass, während die Kurbelwinkel $\alpha = 70^0$, $\beta = \delta = 90^0$ und $\gamma = 110^0$ betrugen. Auch hier wurde der, wie Fig. 45 zeigt, sehr gleichmässige Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms nur durch mühsames Probieren gewonnen, während man nach der obigen Regel unmittelbar dazu gelangt wäre.

Der gleichen Arbeitsverteilung auf alle vier Cylinder haftet indessen wegen der beiden rechten Winkel im Kurbelkreise ein Nachteil an, der nicht unterschätzt werden darf. Die aus 165) mit

$$I = II = III = IV$$

folgende Bedingungsgleichung

$$\cos \gamma = -\cos \alpha$$

führt nämlich mit der für den Massenausgleich zweiter Ordnung geltenden Formel

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$$

f $\alpha=\beta=\gamma=\delta=90^0$, eine Anordnung, welche, wie wir schon früher nen, die Bedingungen für das Verschwinden der Massendruck-omente ebensowenig erfüllen kann wie z. B. die Dreikurbelmaschine it Winkeln von 120⁰. Daraus geht hervor, dass man bei gleicher rbeitsverteilung entweder auf den Massenausgleich zweiter rdnung (nicht aber auf den viel wichtigeren erster Ordnung) oder ber auf die günstigste Form der resultierenden Tangential-raft verzichten muss. Welcher von diesen beiden Gesichtspunkten ie grössere Beachtung erheischt, kann natürlich nur von Fall zu 'all entschieden werden, wenn man es nicht vorzieht, bei Vierkurbel-naschinen überhaupt die gleiche Arbeitsverteilung fallen zu lassen und nit der Erfüllung von 165), also zwei Paaren gleich starker Getriebe uch dem Massenausgleich gerecht zu werden.

Sind diese Bedingungen oder auch allgemeiner die Gleichung 164) rfüllt, so bleiben doch noch, wie die Fig. 42 und 45 zeigen, Schwank-ngen im Verlaufe der Drehkraftkurve bestehen, welche von dem Ein-usse der Schubstangenlänge und den Abweichungen der Form der inzeldiagramme von der einfachsten Gestalt herrühren, die wir durch e zwei Schwingungen während jeder Umdrehung darstellende Funktion ergl. die allgemeine Form 159)

159b) $$T=T_m(1-\cos 2\varphi)$$

finieren können. Bei der unberechenbaren Grösse und Form dieser weichungen erscheint es ganz nutzlos, über die durch unsere Vor-hrift 164) nicht ausgeglichenen Schwankungen von vorn herein etwas szusagen, so erwünscht dies auch vom praktischen Gesichtspunkte s wäre. So viel ist natürlich einleuchtend, dass dieselben relativ um geringer ausfallen, je mehr Kurbeln die Maschine enthält. Dagegen t es möglich, diese Schwankungen in ihrer ungefähren Grösse oraus zu bestimmen, wenn die Gleichung 164) nicht erfüllt wird. Für nehrere Kurbeln erhält man nämlich aus 159b) für den resultierenden Tangentialdruck die Gleichung:

159c) $$\Sigma T=\Sigma T_m-\cos 2\varphi\,\Sigma T_m\cos 2\alpha+\sin 2\varphi\,\Sigma T_m\sin 2\alpha$$

und daraus für das Maximum oder Minimum der Schwankungen von ΣT um die durch ΣT_m bestimmte Gerade

167) $$\Sigma(T-T_m)_{min.}^{max.}=\pm\sqrt{(\Sigma T_m\cos 2\alpha)^2+(\Sigma T_m\sin 2\alpha)^2}.$$

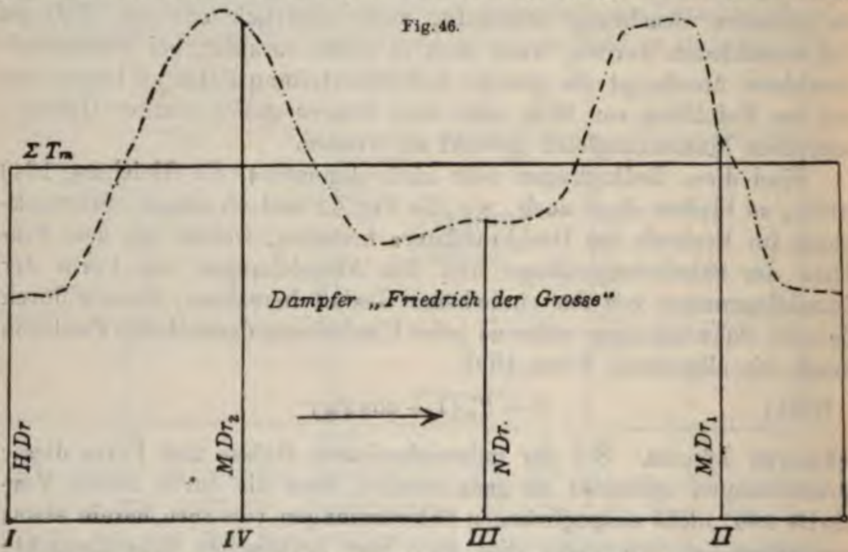
Wenn auch die so erhaltenen Werte infolge der Unberechenbarkeit ler oben erwähnten Nebeneinflüsse auf keine grosse Genauigkeit nspruch erheben dürfen, so erkennt man doch aus 159b), dass die axima und Minima je zweimal während jeder Umdrehung auftreten üssen. Dass diese Folgerung sich mit der Erfahrung deckt, geht aus dem in Fig. 56 dargestellten Diagramm der Maschinen des Dampfers „Friedrich der Grosse“ hervor, bei denen eine angenähert gleiche Arbeitsverteilung vorlag, ohne dass im Kurbelkreis, wie unsere Bedingung 64) forderte, rechte Winkel enthalten sind. Die Kurbelwinkel sind vielmehr

$$\alpha = 51{,}45^0, \quad \beta = \gamma = \delta = 102{,}85^0,$$

womit sich der wenig günstige Verlauf der Drehkraftkurve hinreichend erklärt.

12. Die Widerstandsarbeit. Die in einer Maschine vom sogenannten motorischen Mittel, z. B. dem Dampfe aufgewendete (indizierte)

Fig. 46.



Arbeit, welche wir mit L_i bezeichnen wollen, dient nun einerseits zur Überwindung der Reibung und andererseits zur Leistung effektiver oder Nutzarbeit L_e. Das Verhältnis der Nutzarbeit zur indizierten bezeichnet man als den mechanischen Wirkungsgrad der Maschine. Während nun der Franzose Pambour, welcher sich wohl zuerst mit diesen Fragen beschäftigte, den Zusammenhang zwischen den beiden Arbeitsbeträgen, wenigstens für eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit der Welle, als linear voraussetzte, ihm also etwa die Form

$$L_i = \alpha + \beta L_e$$

gab, findet man neuerdings häufig die Ansicht verbreitet, dass entweder die Reibungsarbeit der Maschine konstant, d. h. die Grösse

$$L_i - L_e = L_r = \text{const.}$$

unabhängig von dem Werte der beiden Einzelbeträge L_i und L_e sei, oder auch dass der mechanische Wirkungsgrad der Maschine

$$\eta = \frac{L}{L_i} = \text{const.}$$

sich nicht mit der Belastung ändere. Wenn man auch die Giltigkeit der letztgenannten Annahme an enge Belastungsgrenzen knüpfte, so ist sie doch schon angesichts des Umstandes nicht aufrecht zu erhalten, dass eine Maschine, ohne überhaupt nach aussen Arbeit abzugeben, doch zum Leergange indizierte Arbeit braucht, also hierbei mit einem Wirkungsgrad $\eta = 0$ läuft. Auch die zweite Voraussetzung der Unabhängigkeit der Reibungsarbeit von der Maschinenbelastung lässt sich mit der Erfahrung nur in solchen Fällen in Einklang bringen, in denen für eine ganz ausgezeichnete Schmierung aller bewegten Organe gesorgt ist. Alsdann ist nämlich die Reibung als ein Widerstand aufzufassen, welchen die Teilchen der an den bewegten Organen haftenden Schmierflüssigkeit der Trennung von einander entgegensetzen. Dieser Widerstand ist aber bekanntlich unabhängig von dem durch die Belastung der Maschine ausgeübten Drucke (in den Gleitflächen), während andererseits eine Veränderlichkeit mit der Geschwindigkeit der Bewegung nicht erheblich ins Gewicht fällt.

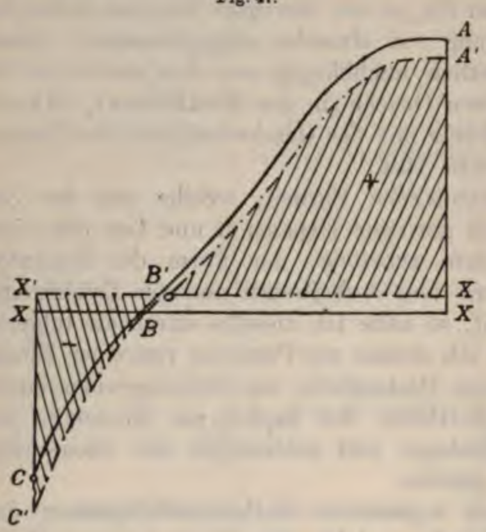
Da nun auch die Pambour'sche Formel, welche aus der Zeit stammt, in der man nur mit geringer Expansion und fast ohne jede Kompression in den Maschinen arbeitete, der Form des Indikatordiagramms nicht gerecht wird und deshalb mit neueren Erfahrungen häufig im Widerspruche steht, so habe ich dieselbe durch die folgende Betrachtung erweitert, wobei ich ebenso wie Pambour von einer Einzeluntersuchung der verschiedenen Bestandteile des Reibungswiderstandes (in den Stopfbüchsen, der Gleitbahn, den Zapfen am Kreuzkopf und der Kurbel sowie dem Wellenlager und schliesslich der Steuerungsorgane) absehen zu können glaubte.

Aus Fig. 29, welche das sogenannte Kolbenkraftdiagramm darstellt, erkennt man nämlich, dass nicht während des ganzen Hubes des Kolbens positive Arbeit im Cylinder geleistet wird, sondern dass die Maschine gegen Ende des Hubes als Kompressor Arbeit verzehrt. Diese Arbeit muss die Maschine rückwärts dem Vorrate von kinetischer Energie in den Getriebeteilen, bezw. bei Vorhandensein mehrerer Cylinder von diesen und zwar stets erst durch Vermittelung der Getriebeteile entnehmen. Ausser einem konstanten Reibungswiderstande, welcher vorwiegend am Kolben und in der Stopfbüchse auftritt, wird demnach erst während der ersten Periode des Hubes von der positiven Arbeit ein Betrag abzuziehen sein, welcher zu dieser in einem bestimmten Verhältnisse steht und schliesslich zu der im zweiten Teile des Hubes aufzuwendenden negativen Arbeit ein entsprechender Betrag hinzutreten. Wenden wir auf diese Beträge die für die Reibung giltige Proportionalität mit der Belastung an, so brauchen wir nur während der ersten Hubperiode von den Ordinaten des positiven Diagrammteiles einen ihnen proportionalen Betrag abzuziehen, während der zweiten Periode dagegen den negativen Ordinaten einen entsprechenden Betrag hinzuzufügen. Auf diese Weise erhält man aus dem in Fig. 47 dargestellten Kolbenkraftdiagramm $XBXABC$ (bei dem im Gegensatz zu Fig. 29 nur die Kompression der Deutlichkeit halber etwas stärker angenommen und ausserdem sämtliche Ordinaten von der Basis XX entweder positiv oder negativ aus aufgezeichnet wurden) zunächst das Diagramm $XBXA'BC'$. Durch den konstanten Betrag des Reibungswiderstandes rückt schliesslich die Diagrammbasis einfach nach $X'X'$ und man erhält nunmehr die Figur

$$X'B'X'A'B'C'$$

als Diagramm der treibenden Kraft mit Rücksicht auf die Reibungswiderstände.

Fig. 47.



Aus demselben ergiebt sich das um die Reibung verminderte Tangentialdruckdiagramm wieder durch die in Fig. 30 angedeutete Konstruktion. Man erkennt übrigens, dass unser Verfahren im wesentlichen auf eine getrennte Anwendung der Pambour-schen linearen Beziehung einmal auf den positiven, dann auf den negativen Bestandteil des Kolbenkraftdiagramms hinausläuft. Der analytische Zusammenhang zwischen der effektiven und indizierten Arbeit bezw. der Wirkungsgrad lässt sich ebenfalls sofort angeben. Bezeichnet man den mittleren positiven Druck auf dem ersten Teile s' des Hubes mit p', den negativen auf dem zweiten Teile s'' mit p'' gemessen in kg|qcm, die Kolbenfläche mit F und den konstanten Reibungswiderstand mit f, ebenfalls gemessen in kg|qcm, so ist zunächst die indizierte Arbeit

$$168)\qquad L_i = F(p's' - p''s'')$$

und die effektive, wenn δ einen kleinen Bruch bedeutet

$$169)\qquad L_e = F'p's'(1-\delta) - \frac{F'p''s'}{1-\delta} - Ff(s'+s''),$$

oder wegen der Kleinheit von δ genügend genau

$$169\text{a})\qquad L_e = F(p's' - p''s'') - F(p's' + p''s'')\delta - Ff(s'+s'').$$

Der mechanische Wirkungsgrad wird alsdann

$$170)\qquad \eta = \frac{L_e}{L_i} = 1 - \frac{p's'+p''s''}{p's'-p''s''}\delta - \frac{f(s'+s'')}{p's'-p''s''}.$$

Die beiden Konstanten dieser Formel f und δ müssen natürlich durch zwei Versuche, am besten durch einen Leerlaufs- und einen Bremsversuch ermittelt werden.

Beispiel. Die beiden Konstanten seien bei einer vorgelegten Maschine

$$f = 0{,}1 \text{ kg} | \text{qcm} \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}06.$$

Arbeitet die Maschine ohne jede Kompression, d. h. ohne negative Arbeit im Indikatordiagramm, so ist

$$p'' = 0, \quad s'' = 0.$$

Ist weiterhin der mittlere Druck $p' = 2{,}5$ kg|qcm, während des Kolbenweges $s' = 1$, so ergiebt sich ein mechanischer Wirkungsgrad von

$$\eta = 1 - \frac{2{,}5 \cdot 0{,}06 + 0{,}1}{2{,}5} = 0{,}9.$$

Lässt man dagegen dieselbe Maschine mit kleiner Füllung und hoher Kompression laufen, so dass $p' = 4{,}5$ kg|qcm auf dem Kolbenwege

$$s' = 0{,}6 \quad \text{und} \quad p'' = 3{,}5 \text{ kg} | \text{qcm}$$

auf dem Wege $s'' = 0{,}4$ (d. h. $s' + s'' = 1$) wird, so erhält man zunächst einen mittleren Dampfdruck von

$$p_m = p' s' - p'' s'' = 1{,}3 \text{ kg} | \text{qcm}$$

also bei derselben Umdrehungszahl wie im ersten Falle nur

$$1{,}3 : 2{,}5 = 0{,}52$$

der früheren indizierten Leistung. Der mechanische Wirkungsgrad aber wird

$$\eta = 1 - \frac{4{,}1 \cdot 0{,}06 + 0{,}1}{1{,}3} = 0{,}734,$$

so dass die effektive Leistung sogar auf 0,424 derjenigen im ersten Falle herabsinkt.

Das wichtigste Ergebnis der vorstehenden Theorie der Reibungsarbeit für die Dynamik des Kurbelmechanismus ist der Umstand, dass sie, wenigstens für jede gegebene mittlere Winkelgeschwindigkeit unmittelbar durch die Form und den Inhalt des Indikatordiagramms bestimmt ist und daher durch die obige Konstruktion sofort im Tangentialdruckdiagramm, deren Ordinate dadurch die Werte T' annehmen, berücksichtigt werden kann. Dies gilt naturgemäss auch für mehrkurbelige Maschinen, so dass sich eine besondere Untersuchung derselben in Bezug auf die Reibungsverluste erübrigt. Wir werden demnach in der Folge bei einem vorgelegten Drehkraftdiagramm immer voraussetzen, dass in demselben die Reibung schon durch entsprechende Abzüge in Rechnung gezogen ist. Da hierdurch der allgemeine Verlauf der Tangentialkraft keine nennenswerte Änderung erfährt, so war es nicht nötig, die Reibung bei der Beseitigung der Schwankungen der Drehkraft besonders zu behandeln. Dieselbe ist vielmehr hierfür unbedenklich zu denjenigen Beträgen zu rechnen, deren Schwankungen ohnehin in Kauf genommen werden müssen.

Was schliesslich die Nutzarbeit betrifft, so ist dieselbe dann vollständig bestimmt, wenn das Gesetz des Nutzwiderstandes W am Kolben bezw. am Kurbelzapfen als Funktion der Kurbelstellung analytisch oder graphisch gegeben ist. In der Praxis wird meist das letztere der Fall sein, so dass man neben der Kurve des Tangentialdruckes eine solche des Nutzwiderstandes erhält. Ist in der ersteren schon die Reibung berücksichtigt, so muss der durch Planimetrieren festzustellende Inhalt beider Kurven über der ganzen Abscissenaxe (d. i. $= 2\pi$), welcher, wie wir gesehen haben, ein Maß für die Arbeit bildet, im Beharrungszustande übereinstimmen, oder auch, es muss der mittlere Nutzwiderstand W_m gleich dem mittleren wirksamen Tangentialdruck T'_m bezw. bei mehrkurbligen Maschinen $\Sigma T'_m$ sein. Wir werden sehen, dass in diesem Fall die Ermittelung der Winkelgeschwindigkeit für jede Kurbelstellung keine Schwierigkeiten bietet.

Solche treten erst auf, wenn der Nutzwiderstand selbst von der Winkelgeschwindigkeit abhängig ist. Dieser Fall tritt z. B. ein bei Dampfmaschinen, welche direkt mit dem Anker einer Dynamomaschine gekuppelt sind. Der Zusammenhang zwischen dem Nutzwiderstand und der Winkelgeschwindigkeit ist hierbei ein recht verwickelter, weil durch die Schwankungen der letzteren auch die Feldstärke berührt wird. Glücklicherweise kann man sich in diesem Falle immer durch Anwendung so schwerer Schwungmassen helfen, dass im Beharrungszustande die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit auf ein beliebig kleines Maß zurückgeführt werden und der Nutzwiderstand praktisch als konstant erscheint. Hat man es dagegen mit Schiffsmaschinen zu thun, welche vermittelst ihrer Kurbelwelle einen Schraubenpropeller bethätigen, so ist es unmöglich von den rotierenden Massen, deren Trägheitsmoment niemals auch nur annähernd so gross gemacht werden kann, wie dasjenige von Schwungrädern entsprechend starker stationärer Maschinen, einen hinreichenden Ausgleich der Schwankungen der Winkelgewindigkeit zu erwarten. In diesem Falle bleibt nichts weiter übrig als das Widerstandgesetz selbst einzuführen und danach die Differentialgleichung zu integrieren. Streng genommen sollte man dieses Gesetz auf theoretischem Wege aus der Schraubenbewegung im Wasser mit Rücksicht auf die Ortsveränderung des Schiffskörpers, welche, wie wir oben gesehen haben, den Schwankungen der Umdrehungsgeschwindigkeit des Propellors gar nicht oder doch nur ganz unwesentlich beeinflusst wird, ableiten. Hierzu reicht indessen der augenblickliche Stand der technischen Hydrodynamik nicht aus, so dass man auf rein empirische Formeln angewiesen ist. Von allen derartigen Vorschlägen, welche mehr oder weniger theoretisch begründet sind, deckt sich am besten mit der Erfahrung der einfache Ausdruck

$$W = C\varepsilon^2, \tag{171}$$

welcher, wie wir sehen werden, den Vorteil gewährt, dass sich die Differentialgleichung der Bewegung leicht integrieren lässt. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass nicht unter Umständen verwickeltere Gesetze in Frage zu ziehen wären, etwa von der Form:

172) $$W = f(\varphi, \varepsilon).$$

Sind die Schwankungen von ε nicht sehr gross, so können wir, unter ε_m den Mittelwert verstanden, mit

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varDelta\varepsilon$$

nach dem Taylor'schen Lehrsatze auch angenähert schreiben

172a) $$W = f(\varphi, \varepsilon_m) + \varDelta\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon_m}.$$

Wir werden sehen, dass auch mit diesem Widerstandsgesetz die Differentialgleichung der Bewegung integrabel wird bezw. sich analytisch auf dieselbe Form zurückführen lässt, welche aus Gleichung 171) hervorgeht. Andere Widerstandsgesetze, z. B. solche, in welche auch die Beschleunigung $d\varepsilon : dt$ eintritt, hier zu behandeln, dürfte sich erübrigen, da für dieselben zunächst kein praktisches Bedürfnis vorliegt.

13. **Die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit bei gegebener Widerstandskurve.** Wir setzen eine Maschine voraus, deren Dimensionen und sämtliche bewegte Massen ihrem Gewichte nach gegeben sind. Ebenso sei das resultierende Tangentialkraftdiagramm mit Rücksicht auf die Reibungsverluste bekannt, so dass es mit der Widerstandskurve vereinigt werden kann. Tragen wir dann noch in das Diagramm die Linie der Änderungen der potentiellen Energie ein, also die Werte von $dV : d\varphi$ als Ordinaten an die zugehörigen Abscissen φ und addieren dieselben algebraisch zu den Differenzen $T' - W$, so ist der Zuwachs der kinetischen Energie J von einer Anfangslage ab, z. B. der inneren Totlage der Anfangskurbel, vollständig bestimmt durch die Energiegleichung

173) $$J - J_0 = \int_0^{\varphi}\left(T' - W - \frac{dV}{d\varphi}\right)d\varphi.$$

Da unter den Integralzeichen lediglich Winkelfunktionen stehen, so bietet die Integration wenigstens auf graphischem Wege keine Schwierigkeiten und man erhält, wenn man das Integral der rechten Seite mit $\varDelta L$ bezeichnet,

173a) $$J - J_0 = \varDelta L,$$

womit die Aufgabe vom theoretischen Standpunkte aus erledigt ist.

Führt man dann für die kinetische Energie die früher entwickelten Ausdrücke 150), 151) bezw. 154) ein, welche sich kürzer in der Form schreiben lassen

174) $$J = \varepsilon^2 U \quad \text{bezw.} \quad J_0 = \varepsilon_0^2 U_0,$$

worin U eine Winkelfunktion bedeutet, die für $\varphi = 0$ in U_0 übergeht, während hierfür die Winkelgeschwindigkeit $\varepsilon = \varepsilon_0$ wird, so geht die Gleichung 173a) über in

173b) $$\varepsilon^2 U - \varepsilon_0^2 U_0 = \varDelta L.$$

Handelt es sich um die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ε für jede Kurbelstellung, so tritt sofort eine Schwierigkeit insofern auf, als in der Praxis niemals die Totpunktsgeschwindigkeit ε_0, sondern stets die mittlere Winkelgeschwindigkeit ε_m, definiert durch die mittlere Umdrehungsdauer t_m

175) $$\varepsilon_m = \frac{2\pi}{t_m}$$

gegeben bezw. vorgeschrieben ist. Wenn auch für zahlreiche Aufgaben der Unterschied von ε_m und ε_0 nicht schwer ins Gewicht fällt, so erscheint es doch angebracht, prinzipiell ein etwas strengeres Verfahren an die Stelle der häufig zu findenden Gleichstellung beider Werte zu setzen, wobei wir die praktische Erfahrung benützen wollen, dass die Schwankungen von ε nur relativ kleine Beträge erreichen. Wir schreiben demnach

176) $$\varepsilon = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon$$

und erhalten für die Umdrehungsdauer wegen $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt}$

$$t_m = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varepsilon_m + \Delta\varepsilon}.$$

Ist nun $\Delta\varepsilon$ sehr klein gegen ε_m, so haben wir statt dessen angenähert

$$t_m = \frac{1}{\varepsilon_m}\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{\varepsilon_m^2}\int_0^{2\pi} \Delta\varepsilon\, d\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_m^2}\int_0^{2\pi} \Delta\varepsilon\, d\varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 175), so erkennt man, dass auf Grund unserer Annäherung

177) $$\int_0^{2\pi} \Delta\varepsilon\, d\varphi = 0$$

wird. Diese Eigenschaft der Winkelgeschwindigkeit, dass man das Integral ihrer Schwankungen erstreckt über den ganzen Umfang des Kurbelkreises im Beharrungszustande vernachlässigen darf, erlaubt uns nun, auf einfache Weise die oben erwähnte Schwierigkeit zu umgehen. Wir erhalten nämlich aus 173b)

173c) $$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 \frac{U_0}{U} + \frac{\Delta L}{U}.$$

und daraus

178) $$\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = \varepsilon_0^2 U_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{U} + \int_0^{2\pi} \frac{\Delta L}{U}\, d\varphi,$$

worin sich die Integrationen der rechten Seite, wie schon oben in 173) auf graphischem Wege leicht durchführen lassen. Führen wir auf der linken Seite wieder unseren Ausdruck 176) ein, so erhalten wir unter Vernachlässigung des Quotienten $\Delta^2\varepsilon : \varepsilon_m^2$ angenähert

$$\int_0^{2\pi}\varepsilon^2 d\varphi = \varepsilon_m^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_m}\right)d\varphi = 2\pi\varepsilon_m^2 + 2\varepsilon_m\int_0^{2\pi}\Delta\varepsilon\, d\varphi;$$

oder wegen 177)

177a)
$$\int_0^{2\pi}\varepsilon^2 d\varphi = 2\pi\varepsilon_m^2.$$

Dies giebt aber in 178) eingeführt den gewünschten Zusammenhang

178a)
$$2\pi\varepsilon_m^2 = \varepsilon_0^2\, U_0\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{U} + \int_0^{2\pi}\frac{\Delta L}{U}\, d\varphi$$

zwischen der mittleren und der Totpunktsgeschwindigkeit. Für stationäre Maschinen, bei denen die kinetische Energie der schweren Schwungmasse gegenüber derjenigen der hin- und hergehenden Teile stets weitaus überwiegt, kann man die letzte Gleichung noch wesentlich vereinfachen, indem man [siehe Gleichung 151)]

$$U = U_0 \sim \frac{r^2}{2}\{M_0 + \Sigma(m - m'\cos 2\alpha + m''\cos\alpha - m''\cos 3\alpha)\}$$

setzt. Mit der Abkürzung

$$\int_0^{2\pi}\Delta L\, d\varphi = 2\pi\Delta L_m$$

erhält man alsdann statt 178a)

178b)
$$\varepsilon_m^2 = \varepsilon_0^2 + \frac{\Delta L_m}{U_0}.$$

In derselben Weise kann man natürlich auch die zur Berechnung beliebiger Werte von ε dienende Formel 173c) vereinfachen und erhält so angenähert

179)
$$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 + \frac{\Delta L}{U_0}.$$

Danach wird die Winkelgeschwindigkeit ein Maximum, wenn der Arbeitsüberschuss ΔL, dargestellt durch den über die Widerstandskurve hinausragenden Teil der Tangentialdrucklinie, einen Maximalwert ererreicht hat, während ein Minimum eintritt, wenn der Flächenüberschuss der Widerstandskurve über die Tangentialkraftkurve am grössten geworden ist. Bezeichnen wir diese beiden Werte mit ε_{max} und ε_{min} sowie die entsprechenden Flächenüberschüsse mit ΔL_1 und ΔL_2, so erhalten wir aus 179):

179a) $$\varepsilon_{max}^2 - \varepsilon_{min}^2 = \frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{U_0},$$

oder, wenn wir angenähert setzen

$$\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min} = 2\,\varepsilon_m$$

180) $$\delta = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_m} = \frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{2\,\varepsilon_m^2\, U_0}.$$

Diese Grösse bezeichnet man wohl auch als den **Ungleichförmigkeitsgrad** oder kurz als die **Ungleichförmigkeit der Maschine.** Wird der Wert derselben ebenso vorgeschrieben, wie die mittlere

Fig. 48.

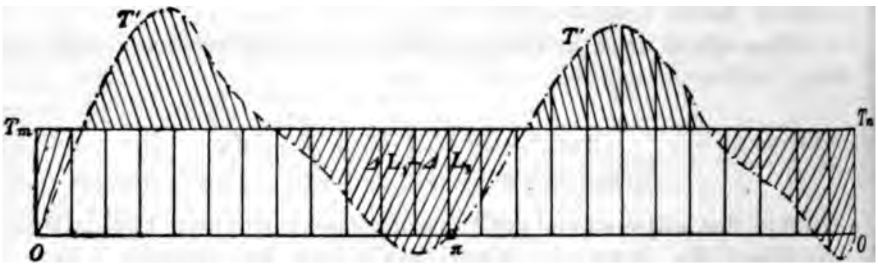
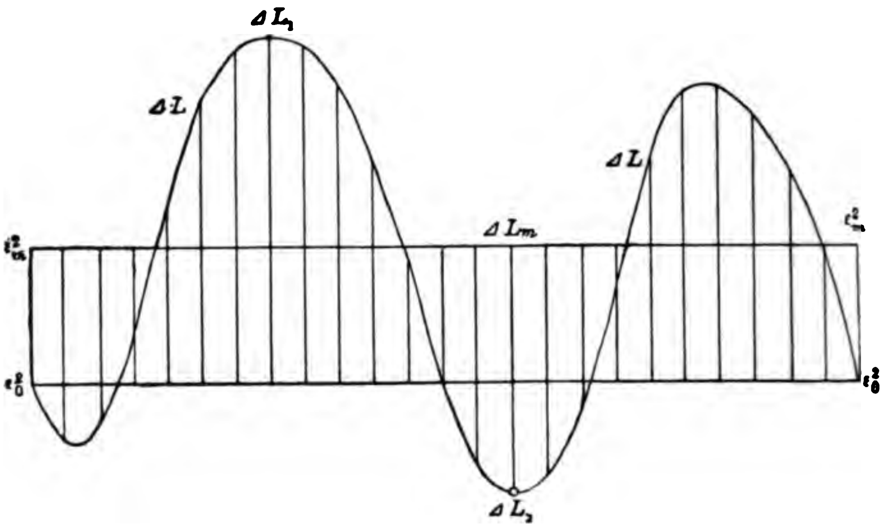


Fig. 49.



Winkelgeschwindigkeit, so ist man durch Gleichung 180) in den Stand gesetzt, die Grösse U_0, in welcher die Schwungradmasse die Hauptrolle spielt, zu berechnen. In der Praxis ist es üblich, die aus der so ermittelten Grösse U_0 bei gegebenem Kurbelradius folgende Masse (reduziert auf den Kurbelzapfen) vollständig im Schwungrad unterzubringen, so dass der von den hin- und hergehenden Teilen, deren Massen erst nach ihrer Konstruktion festgestellt werden können, stammende Einfluss den schliesslichen Ungleichförmigkeitsgrad nur vermindern, d. h. aber verbessern kann.

Das hier durchgeführte Rechnungsverfahren läuft nun, da die Arbeitskurve T' immer, die Widerstandskurve dagegen in vielen Fällen lediglich durch Linienzüge gegeben sind, auf die graphische Auswertung der Integrale ΔL hinaus. Dieselbe erfolgt am einfachsten durch Planimetrieren der einzelnen Streifen der schraffierten Fläche in Fig. 48 und Auftragen dieser Ergebnisse in einem besonderen Diagramm Fig. 49, welches dann in einem zunächst willkürlichen Maßstabe sogleich nach Formel 179) den Verlauf der Schwankungen von ε^2 angiebt. Der wiederum durch Planimetrieren bestimmten mittleren Höhe dieser Integralkurve entspricht sodann der Wert von ε_m^2. Um nun die absolute Grösse z. B. der Differenz

$$\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 - \varepsilon^2_m$$

zu finden, braucht man nur das Verhältnis der entsprechenden Ordinatendifferenz in Fig. 49 durch die Summe der Ordinaten des Rechtecks $O T_m T_m O$ in Fig. 48, welches die Gesamtarbeit L während einer Umdrehung darstellt, zu dividieren und dann dieses Verhältnis mit dem Quodienten $L : U_0$, worin L und U_0 in mkg gegeben sein müssen, zu multiplizieren.

Ist umgekehrt die Ungleichförmigkeit

$$\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$$

und ausserdem ε_m sowie die effektive Leistung L der Maschine gegeben, so erhält man mit der vorstehend geschilderten Methode aus dem Tangentialkraftdiagramm die für die Schwungradmasse grundlegende Grösse U_0.

Beispiel. Das in Fig. 48 dargestellte Tangentialkraftdiagramm gehöre einer doppeltwirkenden Eincylindermaschine von $N_e = 100$ effektiven Pferdestärken an, welche in der Minute $n = 75$ Umdrehungen vollzieht; der Kurbelradius der Maschine sei $r = 0{,}5$ m.

Aus der Umdrehungszahl folgt zunächst

$$\varepsilon_m = \frac{\pi n}{30} = 7{,}854, \quad \varepsilon_m^2 = 61{,}685$$

und die Arbeit während einer Umdrehung

$$L = \frac{N_e \cdot 60}{n} = 6000 \text{ mkg.}$$

Weiter ergiebt sich aus Fig. 41 das Maximum ΔL_1 entspr. ε^2_{max} und das Minimum ΔL_2 entspr. ε^2_{min} und ebenso ΔL_m entspr. ε^2_m, so dass wir, indem wir die der Figur entnommenen Verhältniswerte einsetzen, die Formeln erhalten

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon^2_m - 0{,}054 \frac{L}{U_0} = \varepsilon^2_m - \frac{320}{U_0}$$

$$\varepsilon^2_{max} = \varepsilon^2_m + 0{,}082 \frac{L}{U_0} = \varepsilon^2_m + \frac{492}{U_0}$$

$$\varepsilon^2_{min} = \varepsilon^2_m - 0{,}098 \frac{L}{U_0} = \varepsilon^2_m - \frac{588}{U_0}$$

$$\varepsilon^2_{max} - \varepsilon^2_{min} = \quad 0{,}180 \frac{L}{U_0} = \frac{1080}{U_0}.$$

In derselben Weise kann man die Winkelgeschwindigkeit für jede beliebige Stelle nunmehr aus dem bis zur entsprechenden Kurbelstellung erzielten Arbeitsüberschuss ΔL im Verhältnis zur Gesamtarbeit L ermitteln, so dass die Aufgabe gelöst ist, wenn man

$$U_0 \sim \frac{r^2}{2} M_0$$

kennt. Hat z. B. das Schwungrad ein Gewicht von $G_0 = 4000$ kg, und einen Trägheitsradius von $k_0 = 2{,}5$ m, so ist

$$M_0 = \frac{G_0}{g} \cdot \frac{k_0^2}{r^2},$$

oder

$$U_0 = \frac{r^2}{2} M_0 = \frac{408 \cdot 6{,}25}{2} = 1275 \text{ mkg}$$

und wir erhalten aus unseren obigen Ausdrücken:

$$\varepsilon_0^2 = 61{,}685 - 0{,}251 = 61{,}434; \qquad \varepsilon_0 = 0{,}998 \cdot \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_{max}^2 = 61{,}685 + 0{,}368 = 62{,}053; \qquad \varepsilon_{max} = 1{,}003 \cdot \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_{min}^2 = 61{,}685 - 0{,}462 = 61{,}223; \qquad \varepsilon_{min} = 0{,}996\, \varepsilon_m.$$

Die Ungleichförmigkeit der Maschine wird demnach

$$\delta = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_m} = 0{,}007.$$

Soll dagegen umgekehrt aus der Ungleichförmigkeit und dem Drehkraftdiagramm die Schwungmasse ermittelt werden, so kann man sich natürlich wieder der hier benutzten Formeln bedienen; man erhält durch Elimination von ε_{max} und ε_{min} eine quadratische Gleichung für $1 : U_0$ bezw. U_0. Einfacher und bei hinreichender Genauigkeit auch zweckmässiger erscheint indessen hierfür die Gleichung 180), welche allerdings auf der Annahme beruht, dass die mittlere Winkelgeschwindigkeit gleich dem Mittelwerte des Maximums und des Minimums gesetzt werden darf. Die Zulässigkeit dieser Annahme geht übrigens aus Fig. 49 hinreichend hervor.

Unsere in vorstehendem Beispiel praktisch vorgeführte Methode der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit für jede Kurbelstellung unterscheidet sich nun insofern von dem üblichen Radingerschen Verfahren, als wir die Veränderlichkeit der kinetischen Energie mit der Kurbelstellung φ gänzlich vernachlässigten, während man dieselbe sonst durch Vereinigung der Massendrücke mit dem wirksamen Kolbendruck im Indikatordiagramm berücksichtigt. Da nun die Massendrücke selbst wiederum nur unter der vorläufigen Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeit berechnet und aufgezeichnet werden können, so dürfte, wenigstens im Falle schwerer Schwungmassen oder was auf dasselbe hinausläuft, geringer Ungleichförmigkeit, das hier entwickelte einfachere Verfahren vorzuziehen sein.

Anders liegt die Sache natürlich, wenn die hin- und hergehenden Massen im Vergleich zu der auf den Kurbelradius bezogenen rotierenden nicht mehr vernachlässigt oder doch als klein bezeichnet werden können. Alsdann bleibt nichts weiter übrig, als zunächst die Totpunktsgeschwindigkeit ε_0 durch graphische Integration nach Gleichung 178a) aus ε_m zu ermitteln und dieses Verfahren auch auf Gleichung 173c) anzuwenden.

Bei stehenden Maschinen, welche zum Antriebe von Schiffen vorwiegend benutzt werden und bei ihrem geringeren Raumbedürfnis in neuerer Zeit auch für stationäre Zwecke eine grosse Verbreitung erlangten, spielen übrigens die Änderungen der potentiellen Energie, d. h. die Wirkungen der auf- und niedergehenden Gewichte eine grosse Rolle. Diese Gewichte unterstützen beim Niedergange des Kolbens den Dampfdruck, während sie beim Aufgange Arbeit verzehren. Kombiniert man demnach, wie in Formel 173) angedeutet, das Diagramm der effektiven Dampfdrücke T' (Fig. 50) mit demjenigen der $-\frac{dV}{d\varphi}$ (Fig. 51), so ergiebt sich ein Diagramm (Fig. 52), auf welches unsere frühere einfache Darstellung der Tangentialdrücke etwa durch

$$T = T_m + A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi$$

nicht mehr passt. Erstrebt man demnach bei einer mehrkurbeligen Maschine einen möglichst gleichförmigen Gang, so erscheint die Befolgung der früher angegebenen Regeln für die Arbeitsverteilung allein noch nicht hinreichend, vielmehr ist die Beseitigung der Schwankungen der potentiellen Energie, d. h. die Erfüllung des Massenausgleiches hierfür unbedingt erforderlich. Erstreckt sich dieser Ausgleich ausserdem noch auf die Schwankungen zweiter Ordnung, so können auch die hauptsächlichsten Veränderungen der kinetischen Energie J mit der Kurbelstellung φ als beseitigt gelten und man ist, ohne dass die rotierenden Massen gegenüber den hin- und hergehenden gross zu sein brauchen, berechtigt, angenähert die Grösse $U = U_0$ zu setzen. Inwiefern diese einzelnen Forderungen mit einander verträglich sind, haben wir übrigens schon oben in § 11 diskutiert, so dass ich mich an dieser Stelle mit dem Hinweise auf die dortigen Ausführungen begnügen darf. Jedenfalls erkennt man, dass eine spezielle Behandlung der Mehrkurbelmaschine nunmehr nichts Neues bieten kann.

Fig. 50.

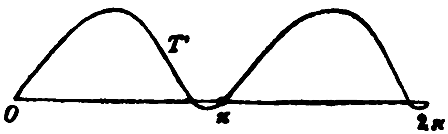


Fig. 51.

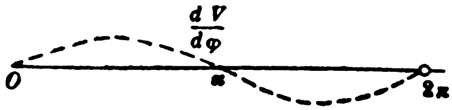
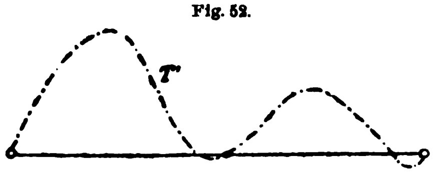


Fig. 52.



14. Die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit bei einem von ihr abhängigen Nutzwiderstande. Wie schon früher erwähnt wurde, können wir in diesem Falle mangels der Kenntnis des von der gesuchten Winkelgeschwindigkeit selbst abhängigen Verlaufes der

Widerstandskurve W die in Gleichung 173) angedeutete Integration auf der rechten Seite nicht ausführen und müssen demnach auf die Differentialgleichung

181) $$\frac{dJ}{d\varphi} = T' - W - \frac{dV}{d\varphi}$$

selbst zurückgreifen. Diese Gleichung gilt übrigens auch für den Fall, dass im Getriebe elastische Formänderungen auftreten, deren Schwingungsenergie alsdann in J mit enthalten ist, während die elastischen Spannungen zu $dV : d\varphi$ hinzutreten. Wir wollen indessen von diesen Formänderungen und Schwingungen, welche die Behandlung des Problems ganz bedeutend erschweren, an dieser Stelle absehen bezw. die elastischen Formänderungen als verschwindend klein vernachlässigen. Setzen wir nunmehr, wie schon im vorigen Paragraphen, $J = \varepsilon^2 U$ und führen als Widerstandsgesetz das durch Gleichung 171) gegebene ein, so erhalten wir statt 181)

$$\varepsilon^2 \frac{dU}{d\varphi} + U \frac{d\varepsilon^2}{d\varphi} = T' - \frac{dV}{d\varphi} - C\varepsilon^2$$

oder kürzer

182) $$\varepsilon^2 \left(\frac{dU}{d\varphi} + C\right) + U \frac{d\varepsilon^2}{d\varphi} = T''.$$

Hierin sind die Ausdrücke

$$U, \quad \frac{dU}{d\varphi} + C \quad \text{und} \quad T'' = T' - \frac{dV}{d\varphi}$$

lediglich Funktionen des Kurbelwinkels φ. Hätten wir ein allgemeineres Widerstandsgesetz, z.B. 172), so könnten wir dasselbe, wie schon früher bemerkt, in der Erwartung geringer Schwankungen $\Delta\varepsilon$ von ε auf die Form 172a) bringen. Ausserdem aber hätten wir dann unter Vernachlässigung von $(\Delta\varepsilon)^2$

$$J = \varepsilon^2 U = \varepsilon_m^2 U + 2\varepsilon_m U \Delta\varepsilon,$$

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \varepsilon_m^2 \frac{dU}{d\varphi} + 2\varepsilon_m \frac{dU}{d\varphi} \Delta\varepsilon + 2\varepsilon_m U \frac{d\Delta\varepsilon}{d\varphi}$$

und die Gleichung 181) würde übergehen in

182a) $$\Delta\varepsilon \left[2\varepsilon_m \frac{dU}{d\varphi} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\varepsilon_m\right] + 2\varepsilon_m U \frac{d\Delta\varepsilon}{d\varphi} = T' - f(\varphi, \varepsilon_m) - \frac{dV}{d\varphi}.$$

Auch hierin sind der Klammerausdruck der linken Seite, sowie U und die ganze rechte Seite lediglich Funktionen von φ, so dass, wenn wir uns $\Delta\varepsilon$ noch durch ε^2 ersetzt denken können, die Integration von 182a) auf diejenige von 182) zurückgeführt ist. Wir wollen uns daher in der Folge nur mehr mit der einfacheren Gleichung 182) beschäftigen. Multiplizieren wir dieselbe mit einer zunächst noch unbekannten Funktion Ψ von φ als integrierendem Faktor, so geht sie über in

182b) $$\varepsilon^2 \left(\frac{dU}{d\varphi} + C\right)\Psi + U\Psi \frac{d\varepsilon^2}{d\varphi} = T''\Psi,$$

deren linke Seite als Differentialquotient von $\varepsilon^2 U \Psi$ aufgefasst werden kann, wenn die Bedingungsgleichung

$$\frac{d(U\Psi)}{d\varphi} = \left(\frac{dU}{d\varphi} + C\right)\Psi$$

oder

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = \frac{C}{U}d\varphi$$

erfüllt ist. Daraus ergiebt sich aber der Wert des integrierenden Faktors zu

183) $$\Psi = \Psi_0 e^{C\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{U}}$$

wenn Ψ_0 der Anfangsstellung $\varphi = 0$ entspricht. Aus Gleichung 182b) folgt nunmehr durch Integration nach φ

184) $$\varepsilon^2 U\Psi - \varepsilon_0^2 U_0 \Psi_0 = \int\limits_0^\varphi T''\Psi d\varphi$$

oder mit 183)

184a) $$\varepsilon^2 U e^{C\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{U}} - \varepsilon_0^2 U_0 = \int\limits_0^\varphi T'' e^{C\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{U}} d\varphi.$$

Wenn es gestattet ist, $U = U_0$ zu setzen, was für ausgeglichene Mehrkurbelmaschinen beiläufig zutrifft, so darf man statt 184a) auch schreiben

184b) $$U_0\left(\varepsilon^2 e^{\frac{C\varphi}{U_0}} - \varepsilon_0^2\right) = \int\limits_0^\varphi T'' e^{\frac{C\varphi}{U_0}} d\varphi.$$

Während nun im Falle einer vorgelegten Widerstandskurve die mittlere Winkelgeschwindigkeit ε_m willkürlich gegeben, bezw. der Maschine vorgeschrieben werden konnte, richtet sich dieselbe hier nach dem Werte der Konstanten C des Widerstandsgesetzes. Für den mittleren effektiven Tangentialdruck, welcher mit dem mittleren Nutzwiderstand identisch sein muss, haben wir daher

$$T_m'' = W_m = \frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi,$$

oder wenn die Schwankungen $\Delta\varepsilon$ von ε nur klein ausfallen, was praktisch immer angenommen werden darf, so folgt aus den Gleichungen 177) und 177a), welche alsdann auch hierfür giltig sind,

185) $$T_m'' = W_m = C\varepsilon_m^2.$$

Diese Formel kann man auch dazu benutzen, um bei vorgeschriebener Leistung und mittlerer Winkelgeschwindigkeit die Konstante C zu ermitteln, welche z. B. bei Schiffsschrauben mit deren Steigung eng zusammenhängt. Für die Berechnung der Totpunktsgeschwindigkeit ε_0 ist übrigens, wenn C gegeben ist, die Kenntnis von ε_m hier nicht notwendig, man erhält vielmehr schon aus 184) durch Integration zwischen 0 und 2π für den Beharrungszustand, welcher durch

$$\varepsilon_{2\pi} = \varepsilon_0$$

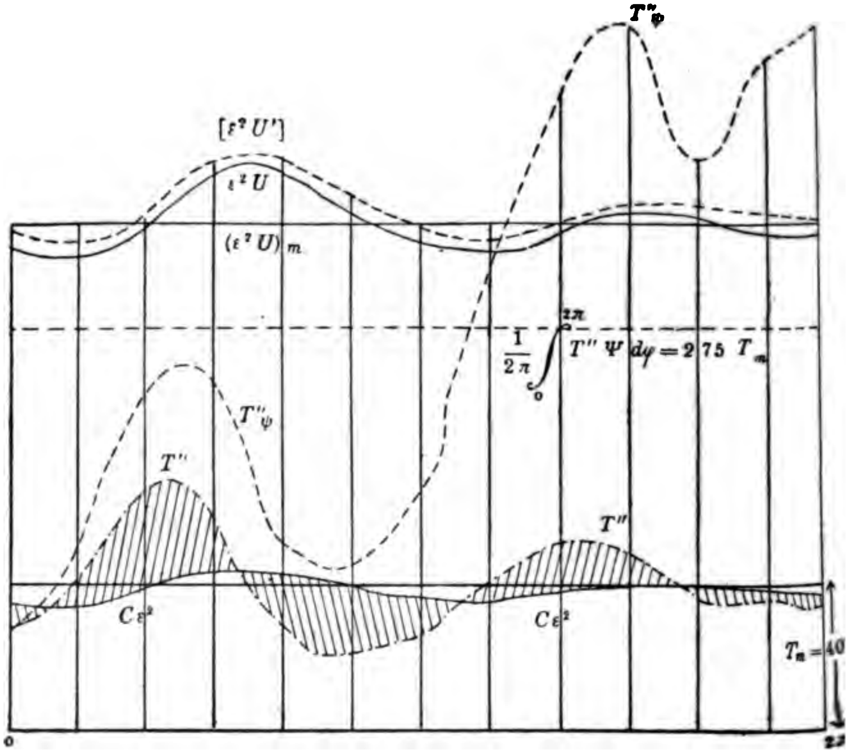
gekennzeichnet ist,

186) $$\varepsilon_0^2 U_0 (\Psi_{2\pi} - \Psi_0) = \int_0^{2\pi} T'' \Psi d\varphi,$$

oder auch

186a) $$\varepsilon_0^2 U_0 \left(e^{c\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{U}} - 1\right) = \int_0^{2\pi} T'' e^{c\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{U}} d\varphi,$$

Fig. 53.



worauf dann die Bestimmung beliebiger Werte von ε aus 184) bew. 184a) ohne weiteres möglich ist.

Bei der praktischen Anwendung der vorstehenden Formeln ist man natürlich, da T'' nur empirisch in Gestalt einer Kurve vorliegt, auf graphische Integrationen angewiesen. Hierbei verfährt man, wie es in Fig. 53 geschehen ist, so, dass zunächst das Produkt $T'' \Psi$ gebildet wird, wobei man übrigens unbedenklich $\Psi_0 = 1$ setzen darf, da diese Konstante sich ja doch aus der Gleichung 184) bezw. 186) weghebt. Dieses Produkt giebt dann die in Fig. 53 gestrichelte ansteigende Linie an, deren über der Abscisse gelegenen Flächenstreifen ein Maß für das Integral der rechten Seite von 184) bildet. Dividiert man nunmehr die Gesamtfläche dieser Kurve mit $\Psi_{2\pi} - 1$, so erhält man in einem willkürlichen Maßstabe die Grösse $\varepsilon_0^2 U_0$ und dann aus den einzelnen Flächenstreifen mit Hilfe von 184) alle andern Werte von $\varepsilon^2 U$. Diese Werte sind in Fig. 53 zu einer Kurve vereinigt worden, welche oberhalb derjenigen von T'' verläuft. Dividiert man nun diese Ordinaten derselben mit den zugehörigen Werten von U, so erhält man eine weitere Kurve der ε^2, welche mit C multipliziert sofort die Widerstandskurve $W = C\varepsilon^2$ ergiebt. Im vorliegenden Falle wurde der Einfachheit halber $U = U_0 =$ const. angenommen, wodurch erreicht wird, dass man mit dem Verhältnis der Mittelwerte $(\varepsilon^2 U)_m$ und T''_m sofort die Widerstandskurve ableiten kann.

Beispiel. Wir setzen eine ausgeglichene Schiffsmaschine voraus, welche mit $n = 100$ minutlichen Umdrehungen $N = 4000$ PS_i leisten möge. Alsdann ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\varepsilon_m = 10{,}5$ und bei einem Kurbelradius von $r = 0{,}7$ m der auf den Kurbelzapfen reduzierte mittlere Tangentialdruck

$$W_m = T_m = T_m'' = \frac{75 \cdot N_i}{\varepsilon_m \cdot r} = 40750 \text{ kg}$$

und damit die Konstante des Propellerwiderstandes

$$C = \frac{W_m}{\varepsilon_m^2} = 373 \text{ kg}.$$

Die auf den Kurbelzapfen reduzierte rotierende Masse sei $M = 1800$, die hin- und hergehenden Massen seien so weit ausgeglichen, dass wir

$$U = U_0 = \frac{M}{2r} = \text{Const.}$$

setzen dürfen. Alsdann ergiebt sich mit $\Psi_0 = 1$

$$\Psi = e^{\frac{2rC}{M} \cdot \varphi} = e^{0.289\,\varphi} = 1{,}336^{\varphi}.$$

Wir haben nun in Fig. 53 absichtlich ein willkürliches Diagramm mit sehr starken Schwankungen des Tangentialdruckes gewählt, so zwar, dass

$$T''_{max} = 1{,}68\, T''_m \qquad \text{und} \qquad T''_{min} = 0{,}53\, T''_m$$

wird. Der Mittelwert der Kurve der $T''\Psi$ ist ebenfalls in Fig. 53 eingetragen und ergiebt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T''\Psi\, d\varphi = 2{,}75\, T'_m.$$

Weiter findet sich $\Psi_{2\pi} = 6{,}166$, also $\Psi_{2\pi} = 1 = 5{,}166$, also nach Gleichung 186a)

$$\varepsilon_0^2 U_0 = \frac{2\pi \cdot 2{,}75 \cdot T_m''}{5{,}166} = 3{,}3\, T_m''$$

und daraus sofort

$$\varepsilon_0^2 = 0{,}955\, \varepsilon_m^2, \quad \varepsilon_0 = 0{,}97\, \varepsilon_m.$$

Für die Ermittelung der Werte von ε^2 wurde die ganze Figur in Streifen von $\frac{\pi}{6} = 30^0$ zerlegt und deren mittlere Ordinaten in Gleichung 184a) eingeführt. Das Ergebnis bildet die ausgezogene Kurve der $\varepsilon^2 U$, aus der dann diejenige der $C\varepsilon^2$ sofort folgt. Man erkennt übrigens schon aus dem Verlaufe von $\varepsilon^2 U$, dass die Schwankungen des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit sich in den Grenzen

$$\varepsilon^2_{max} = 1{,}12\,\varepsilon_m, \quad \varepsilon^2_{min} = 0{,}94\,\varepsilon_m$$

entsprechend den Werten

$$\varepsilon_{max} = 1{,}06\,\varepsilon_m, \quad \varepsilon_{min} = 0{,}98\,\varepsilon_m$$

halten. Im Vergleich zu den grossen Schwankungen der Drehkraft sind diejenigen der Widerstandskurve demnach sehr unbedeutend.

Die geringen Abweichungen der erhaltenen Widerstandskurve vom Mittelwerte $W_m = T''_m$ führen auf die Vermutung, dass es praktisch zulässig sein dürfte, die Winkelgeschwindigkeit ε auch nach den Formeln des vorigen Paragraphen, also durch

$$\varepsilon^2 U - \varepsilon_0{}^2 U_0 = \int_0^{\varphi} (T'' - W_m)\, d\varphi = \Delta L$$

auf graphischem Wege zu ermitteln. In der That zeigt die auf diese Weise erhaltene über der Linie $\varepsilon^2 U$ gestrichelt eingetragene und mit $[\varepsilon^2 U]$ bezeichnete Linie, für welche noch dazu vorerst $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_m$ angenommen wurde, einen nur wenig abweichenden Verlauf. Dieses überaus einfache Verfahren ist also praktisch sehr wohl zulässig, vorausgesetzt, dass man nachträglich die ganze Linie um die Differenz

$$\varepsilon_0{}^2 U - (\varepsilon^2 U)_m$$

verschiebt bezw. diese Verschiebung in der Widerstandskurve selbst nachholt. Jedenfalls also sollte man nicht versäumen, bei Anwendung dieser Nährungsmethode dieselbe durch eine nochmalige Probe mit der durch sie erhaltenen Widerstandskurve zu kontrollieren, wenn man es nicht vorzieht, überhaupt das oben geschilderte exakte Verfahren durchzuführen.

Über die Derivierte eines Vektors.

Von

M. Fr. Daniëls
in Freiburg (Schweiz).

In der Kinematik von J. Somoff findet sich (S. 51—55) eine Methode zur Bestimmung der Projektionen auf drei bewegliche rektanguläre Koordinatenaxen $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ von der geometrischen Derivierten eines Vektors $\bar{u}$.

Wir werden hier in einfacher Weise und auf anderem Wege die von Somoff gefundenen Formeln ableiten, und einige für die Mechanik wichtige Anwendungen davon machen. Wir bedienen uns dabei der Vektormethode, welche aus den Untersuchungen von Hamilton, Grassmann, de Saint-Venant[1]), Resal[2]), Somoff[3]), Massau[4]), Gibbs[5]), Heaviside[6]), Föppl[7]), Demoulin[8]) u. a. hervorgegangen, nach dem Ausdruck Heaviside's[9]) als eine Art Quaternionenrechnung ohne Quaternionen betrachtet werden kann, die auf dem systematischen Gebrauch zweier Vektorenkombinationen beruht.

Die erste wird von Grassmann das innere Produkt, von Resal, Massau, Demoulin u. A. le produit géometrique, von Heaviside und Föppl das skalare Produkt genannt; wir schreiben es mit Föppl, dem wir in der Notation gefolgt sind,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Vektoren, A und B ihre Tensoren sind.

1) Comptes Rendus 1845.
2) Traité de Cinématique Pure 1862.
3) Kinematik, übersetzt von A. Ziwet 1878.
4) Cours de Mécanique de l'Université de Gand. 1879.
5) On Vektoranalysis, Newhaven 1881.
6) Electrical Papers 1892.
7) Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität 1884. Geometrie der Wirbelbewegung 1897.
8) Mém. s. l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes droites 1894.
9) Electrical Papers Vol. II p. 521.

Die zweite Kombination wird von Massau u. A. moment géometrique, von Heaviside und Föppl das Vektorprodukt genannt und geschrieben $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Es ist $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein neuer Vektor, senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und zu $\mathfrak{B}$ mit einem Tensor gleich $AB\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und so gerichtet, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ im Raume ein Rechtssystem bilden. Sind $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ die Projektionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf die drei rechtwinkligen Axen, welche die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ tragen, so ist

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathfrak{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathfrak{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathfrak{k}.$$

Offenbar stellt nach der obigen Definition $V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ die Geschwindigkeit eines Punktes vor, dessen Radius Vektor $\mathfrak{r}$ ist, und der mit einer Winkelgeschwindigkeit, gleich dem Tensor von $\mathfrak{u}$, sich dreht um eine durch O gehende Axe, welche dem Vektor $\mathfrak{u}$ parallel ist.

1. Für den Vektor $\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}$, wo $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei unveränderliche Einheitsvektoren sind, ist bekanntlich die Derivierte in Bezug auf eine Variabele t

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathfrak{k}.$$

Es kommt aber oft vor, besonders in der Mechanik, dass die Einheitsvektoren $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ in den drei zu einander senkrecht stehenden Axen, in Bezug auf welche ein Vektor

I) $$\mathfrak{B} = B_1\mathfrak{l} + B_2\mathfrak{m} + B_3\mathfrak{n}$$

zerlegt worden ist, selbst, sowie ihre skalaren Koeffizienten B_1, B_2, B_3 Funktionen der unabhängigen Variabelen t (gewöhnlich die Zeit) sind. Was wird in diesem Falle $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ oder $\dot{\mathfrak{B}}$ sein?

Da die Axen zu einander senkrecht sind, so bestehen die Relationen:

1) $$\mathfrak{l}^2 = 1, \quad \mathfrak{m}^2 = 1, \quad \mathfrak{n}^2 = 1,$$

2) $$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{n}\mathfrak{l} = 0, \quad \mathfrak{l}\mathfrak{m} = 0,$$

welche differenziert noch die weiteren Beziehungen:

3) $$\dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{l} = 0, \qquad \dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{m} = 0, \qquad \dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{n} = 0,$$

4) $$\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n} = -\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{n}}, \quad \dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{l} = -\mathfrak{n}\dot{\mathfrak{l}}, \quad \dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{m} = -\mathfrak{l}\dot{\mathfrak{m}},$$

liefern.

Aus der Gleichung I) folgt durch Differenzierung:

II) $$\dot{\mathfrak{B}} = (B_1\dot{\mathfrak{l}} + B_2\dot{\mathfrak{m}} + B_3\dot{\mathfrak{n}}) + (\dot{B}_1\mathfrak{l} + \dot{B}_2\mathfrak{m} + \dot{B}_3\mathfrak{n}).$$

Im zweiten Teil des rechtsstehenden Ausdrucks sind nur die skalaren Koeffizienten B_1, B_2, B_3 differenziert; wir wollen das durch $[\dot{\mathfrak{B}}]$ oder $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$ andeuten.

Der erste Teil aber kann umgeformt werden. Durch Anwendung für jeden Vektor giltigen Identität

$$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{l} + \mathfrak{C}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m} + \mathfrak{C}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}$$

: ihn geht er über in

$$(B_1\dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{l} + B_2\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{l} + B_3\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{l})\mathfrak{l} + (B_1\dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{m} + B_2\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{m} + B_3\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{m})\mathfrak{m} \\ + (B_1\dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{n} + B_2\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n} + B_3\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{n})\mathfrak{n},$$

ler durch Hinzuziehung der Relationen 3) und 4) in

$$(B_3\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{l} - B_2\dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{m})\mathfrak{l} + (B_1\dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{m} - B_3\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n})\mathfrak{m} + (B_2\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n} - B_1\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{l})\mathfrak{n}.$$

Es ist dies aber $V\mathfrak{u}\mathfrak{B}$, wenn

$$\mathfrak{u} = \dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{l} + \dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{m} + \dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}.$$

Ist die Zeit t die unabhängige Variabele, so ist $\mathfrak{u}$ ein nur von Stand und Geschwindigkeit der beweglichen Axen abhängiger Vektor.

Es geht also II) über in

$$\text{III)} \qquad \dot{\mathfrak{B}} = V\mathfrak{u}\mathfrak{B} + [\dot{\mathfrak{B}}],$$

was symbolisch auch geschrieben werden kann

$$\dot{\mathfrak{B}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{B}.$$

Differenzieren wir den Vektor $\mathfrak{u}$ selbst nach Gleichung III), so bekommen wir $\dot{\mathfrak{u}} = V\mathfrak{u}\mathfrak{u} + [\dot{\mathfrak{u}}]$; es ist also

$$\dot{\mathfrak{u}} = [\dot{\mathfrak{u}}].$$

2. Um den zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{B}$ in Bezug auf t zu finden, differenzieren wir $\mathfrak{B}$ noch einmal in der durch Gleichung III) gegebenen Weise. Wir bekommen dann:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{B}} &= \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\mathfrak{B}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(V\mathfrak{u}\mathfrak{B} + [\dot{\mathfrak{B}}]\right) = V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{B} \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial t}V\mathfrak{u}\mathfrak{B} + V\mathfrak{u}\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{B} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathfrak{B}, \end{aligned}\right.$$

welche Gleichung symbolisch auch geschrieben werden kann:

$$\ddot{\mathfrak{B}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)}\mathfrak{B},$$

falls man nur bedenkt, dass

$$V\mathfrak{u}\frac{d}{\partial t}\mathfrak{B} = V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{B}}] \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}V\mathfrak{u}\mathfrak{B} = V\dot{\mathfrak{u}}\mathfrak{B} + V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{B}}]$$

nicht dieselbe Bedeutung haben und deshalb die beiden Symbole

$$V\mathfrak{u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

nicht commutativ sind.

Mit dieser Einschränkung ist, wie man jetzt leicht einsieht, die dritte Derivierte $\left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(3)}\mathfrak{B}$ und die n^{te} Derivierte

$$\left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n)}\mathfrak{B}.$$

Wir gehen jetzt dazu über, von der entwickelten Differentiationsformel einige für die Mechanik wichtige Anwendungen zu machen.

3. Mit einem sich bewegenden, festen Körper ist ein rechtwinkliges Axensystem $(O'\xi\eta\zeta)$ verbunden, dessen Ursprung O' in Bezug auf drei feste Axen $(Oxyz)$, welche die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ tragen, die Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ hat. Die Lage eines Punktes P des Körpers, dem im beweglichen System die Koordinaten ξ, η, ζ zukommen, wird dann bestimmt durch den Vektor

$$\mathfrak{R} = (x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j} + z_0\mathfrak{k}) + (\xi\mathfrak{l} + \eta\mathfrak{m} + \zeta\mathfrak{n})$$

oder

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r},$$

wenn $\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ Einheitsvektoren in den Richtungen der drei beweglichen Axen $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ sind.

Für die Geschwindigkeit finden wir dann, wenn wir bedenken erstens, dass die auftretenden $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{r}$ Funktionen der Zeit t sind, zweitens, dass $[\dot{\mathfrak{r}}] = 0$ und deshalb $\dot{\mathfrak{u}} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ ist

$$\dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}.$$

Der erste Teil $\dot{\mathfrak{R}}_0$ ist für alle Punkte des Körpers derselbe, und stellt deshalb eine Translationsgeschwindigkeit vor; der zweite Teil $V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ ist die Geschwindigkeit, welche der Punkt haben würde, wenn der Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich dem Tensor von $\mathfrak{u}$ sich drehte um eine durch O' gehende und mit $\mathfrak{u}$ zusammenfallende Axe.

4. Die Beschleunigung des Punktes P wird gefunden, wenn $\dot{\mathfrak{R}}$ von neuem in Bezug auf t nach Gleichung III) differenziert wird. Dabei können wir den Vektor $\dot{\mathfrak{R}}$ nach den drei beweglichen Axen $(O'\xi\eta\zeta)$ zerlegt denken, es wird dann

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(\dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}),$$

oder, da $[\dot{\mathfrak{r}}] = 0$ ist,

$$\ddot{\mathfrak{R}} = V\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{R}}_0 + [\ddot{\mathfrak{R}}_0] + V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + V\dot{\mathfrak{u}}\mathfrak{r}.$$

5. Sind nicht nur $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, sondern auch die Koordinaten ξ, η, ζ Funktionen der Zeit, m. a. W. bewegt sich der Punkt P in Bezug auf die beweglichen Axen, so ist der Vektor

$$[\dot{\mathfrak{r}}] = \dot{\xi}\mathfrak{l} + \dot{}\,\mathfrak{m} + \dot{\zeta}\mathfrak{n},$$

der offenbar die Geschwindigkeit in der relativen Bewegung vorstellt, nicht mehr gleich Null, und $\ddot{\mathfrak{R}}$ wird in dem Falle:

$$\dot{\mathfrak{R}} = (\dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}) + [\dot{\mathfrak{r}}],$$

ist also die Summe der Geschwindigkeit, welche ein momentan mit P zusammenfallender Systempunkt haben würde, $\dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ und der Geschwindigkeit in der relativen Bewegung $[\dot{\mathfrak{r}}]$.

6. Wollen wir wissen, wie die Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit zusammenhängt mit der Beschleunigung der relativen Geschwindigkeit, so brauchen wir den Ausdruck für die absolute Geschwindigkeit des Punktes P

$$\dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + [\dot{\mathfrak{r}}]$$

nur noch einmal nach der Differentiationsformel III) zu differenzieren.

Wir finden dann für die Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit:

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + [\dot{\mathfrak{r}}]\right)$$

oder

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\mathfrak{R}}_0 + \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)}\mathfrak{r}$$

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\mathfrak{R}}_0 + \left(V\mathfrak{u}V\mathfrak{u} + V\mathfrak{u}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}V\mathfrak{u} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{r}$$

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left\{V\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{R}}_0 + [\ddot{\mathfrak{R}}_0] + V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + V\dot{\mathfrak{u}}\mathfrak{r}\right\} + 2V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}] + [[\ddot{\mathfrak{r}}]].$$

Der erste in Klammern stehende Ausdruck ist die Beschleunigung des Systempunktes p, mit welchem der Punkt P momentan zusammentrifft; der Vektor $[[\ddot{\mathfrak{r}}]]$, wo die doppelten Klammern stehen, um anzugeben, dass in

$$\mathfrak{r} = \xi\mathfrak{l} + \eta\mathfrak{m} + \zeta\mathfrak{n}$$

nur $\xi\eta\zeta$ zweimal in Bezug auf t differenziert werden sollen — stellt die Beschleunigung der relativen Geschwindigkeit vor. — Der Vektor

$$2V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}]$$

endlich, der offenbar senkrecht steht zu $\mathfrak{u}$ und $[\dot{\mathfrak{r}}]$, bildet die komplementäre oder zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung (Coriolis).

7. Es ist jetzt auch möglich, in einfacher Form die Beziehung zwischen den relativen und absoluten Beschleunigungen höherer Ordnung anzugeben.

So ist z. B. die Beschleunigung zweiter Ordnung der absoluten Geschwindigkeit

$$\dddot{\mathfrak{R}} = \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)}\dot{\mathfrak{R}}_0 + \left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(3)}\mathfrak{r}.$$

Es enthält die rechte Seite einen Teil,

$$\left(V\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)}\dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + 2V\mathfrak{u}V\dot{\mathfrak{u}}\mathfrak{r} + V\dot{\mathfrak{u}}V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + V\ddot{\mathfrak{u}}\mathfrak{r},$$

der nur von $\mathfrak{r}$, nicht von $[\dot{\mathfrak{r}}]$ und $[[\ddot{\mathfrak{r}}]]$ abhängt, der also allein übrig bleibt, wenn $[\dot{\mathfrak{r}}]$ und $[[\ddot{\mathfrak{r}}]]$ gleich Null gesetzt, m. a. W. der Punkt P als fest mit den beweglichen Axen verbunden gedacht wird. Es ist das die Beschleunigung zweiter Ordnung des Systempunktes p, mit welchem P momentan zusammen trifft. Ausserdem kommt vor

$$\left[[[\dddot{\mathfrak{r}}]]\right] \text{ oder } \frac{\partial^3 \mathfrak{r}}{\partial t^3},$$

und dieser Vektor ist offenbar die Beschleunigung zweiter Ordnung der relativen Geschwindigkeit. Was dann noch übrig bleibt

$$3\left\{\mathrm{V}\mathfrak{u}\,\mathrm{V}\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}] + 2\mathrm{V}\dot{\mathfrak{u}}[\dot{\mathfrak{r}}] + \mathrm{V}\mathfrak{u}[[\ddot{\mathfrak{r}}]]\right\}$$

ist die komplementäre Beschleunigung zweiter Ordnung.

Allgemein gilt für die Beschleunigung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{R}^{(n)}$ der absoluten Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{R}}$

$$\mathfrak{R}^{(n)} = \left(\mathrm{V}\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\mathfrak{R}_0 + \left(\mathrm{V}\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n)}\dot{\mathfrak{r}},$$

wo der von $[\dot{\mathfrak{r}}]$, $[[\ddot{\mathfrak{r}}]]$ ... u. s. w. unabhängige Teil die Beschleunigung derselben Ordnung des Systempunktes ist, der augenblicklich mit P zusammenfällt; $\frac{\partial^n \mathfrak{r}}{\partial t^n}$ die Beschleunigung $n-1^{\text{ster}}$ Ordnung der relativen Geschwindigkeit und der übrig bleibende Teil die komplementäre Beschleunigung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellt.

8. Sind v_x, v_y, v_z die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit eines Punktes P in Bezug auf die beweglichen Axen — ist also

$$\dot{\mathfrak{R}} = v_x \mathfrak{l} + v_y \mathfrak{m} + v_z \mathfrak{n},$$

so bestehen nach Bour (Journal de Liouville, 2me Sérié t. VIII 1863) die Beziehungen

$$J_{ax} = q v_z - r v_y + \frac{d v_x}{dt}$$

$$J_{ay} = r v_x - p v_z + \frac{d v_y}{dt}$$

$$J_{az} = p v_y - q v_x + \frac{d v_z}{dt},$$

wo J_{ax}, J_{ay}, J_{az}, die Projektionen der Beschleunigung von der absoluten Geschwindigkeit auf die beweglichen Axen sind.

Es können dieselben leicht durch die Differentiation nach Gleichung III) aus

$$\dot{\mathfrak{R}} = v_x \mathfrak{l} + v_y \mathfrak{m} + v_z \mathfrak{n}$$

gefunden werden. Wir bekommen nämlich

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \mathrm{V}\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{R}} + [\ddot{\mathfrak{R}}],$$

und wenn wir bedenken, dass allgemein

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (A_2 B_3 + A_3 B_2)\mathfrak{l} + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\mathfrak{m} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\mathfrak{n}$$

und deshalb, sobald p, q, r die Projektionen von $\mathfrak{u}$ auf $O'\xi$, $O'\eta$,
sind,

$$V\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{R}} = (qv_z - rv_y)\mathfrak{l} + (rv_x - pv_z)\mathfrak{m} + (pv_y + qv_z)\mathfrak{n}$$

ist auch noch

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{R}} = \left(qv_z - rv_y + \frac{dv_x}{dt}\right)\mathfrak{l} + \left(rv_x - pv_z + \frac{dv_y}{dt}\right)\mathfrak{m} \\ + \left(pv_x - qv_x + \frac{dv_z}{dt}\right)\mathfrak{n}. \end{aligned}\right.$$

Es ist aber

$$\ddot{\mathfrak{R}} = J_{ax}\mathfrak{l} + J_{ay}\mathfrak{m} + J_{az}\mathfrak{n},$$

und deshalb

$$J_{ax} = qv_z + rv_x + \frac{dv_x}{dt} \text{ u. s. w.}$$

9. Es ist klar, dass die Differentiation nach der Formel

$$\dot{\mathfrak{R}} = V\mathfrak{u}\mathfrak{R} + [\dot{\mathfrak{R}}]$$

auch noch angewandt werden kann, wenn die Bewegung in ei
Ebene oder parallel zu derselben stattfindet. In dem Falle lassen
mit derselben die Ebenen xy und $\xi\eta$ zusammenfallen. Es ist dan

$$z_0 = \zeta = 0,$$

und weil wohl die Richtung von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$, nicht aber die von $\mathfrak{n}$ s
ändern kann — von einer Änderung des Tensors von $\mathfrak{n}$ kann ü
haupt keine Rede sein —, so ist $\dot{\mathfrak{n}} = 0$, deshalb auch $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = -\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{n}}$
und

$$\mathfrak{u} = \dot{\mathfrak{l}}\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$$

d. h. die Rotationsaxe fällt mit der Richtung $\mathfrak{n}$ zusammen, steht
zur Ebene senkrecht. Das skalare Produkt eines beliebigen
der Ebene liegenden Vektors mit $\mathfrak{u}$ ist deshalb Null.

Für einen Punkt P der beweglichen Figur, der bestimmt ist du
den Vektor

$$\mathfrak{R} = (x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j}) + (\xi\mathfrak{l} + \eta\mathfrak{m}) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}$$

wird, da $[\dot{\mathfrak{r}}] = 0$ ist, die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r} \tag{5}$$

sein. Für den Punkt C, bestimmt durch den Vektor $\mathfrak{r}_c$, welcher
Gleichung

$$\dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}_c = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r}_c = \frac{1}{\mathfrak{u}^2} \cdot V\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{R}}_0 \tag{6}$$

genügt, ist die Geschwindigkeit Null. Subtrahieren wir die Gleichun
von 5), so bekommen wir

$$\dot{\mathfrak{R}} = V\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c).$$

Die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte der bewegli
Figur sind deshalb so, als ob dieselbe augenblicklich sich um

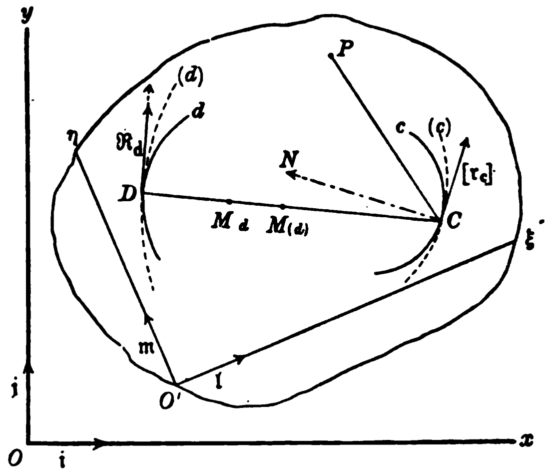
durch den Punkt C — Momentancentrum — gehende und senk zur Ebene stehende Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich Tensor von $\mathfrak{u}$ drehte.

Da $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{R}_0$ und $\dot{\mathfrak{R}}_0$ von der Zeit abhängige Vektoren sind, sc schreibt das Momentancentrum in der beweglichen Figur gewisse Kurve c, deren Gleichung ist

$$\mathfrak{r}_c = \frac{1}{\mathfrak{u}^2} V \mathfrak{u} \dot{\mathfrak{R}}_0.$$

Es beschreibt aber auch eine Kurve (c) in der festen Ebe und die Gleichung dieser Kurve ist

$$\mathfrak{R}_c = \mathfrak{R}_0 + \frac{1}{\mathfrak{u}^2} V \mathfrak{u} \dot{\mathfrak{R}}_0.$$



10. Ist der Punkt P nicht, wie wir bisher voraussetzten, fest der beweglichen Figur und mit den Axen $O'\xi\eta$ verbunden, also nicht Null, so wird die Geschwindigkeit desselben sein

$$\dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + [\dot{\mathfrak{r}}],$$

oder auch nach Gleichung 6)

$$\dot{\mathfrak{R}} = V\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c) + [\dot{\mathfrak{r}}].$$

In dieser Lage wäre z. B. ein Punkt, welcher dem Momen centrum in seiner Bewegung auf den Kurven c und (c) folgen w und da für denselben die von O und O' aus gerechneten Vectore und $\mathfrak{r}_c$ sind, so ist

$$\dot{\mathfrak{R}}_c = V\mathfrak{u}[\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_c) + [\dot{\mathfrak{r}}_c],$$

oder

$$\dot{\mathfrak{R}}_c = [\dot{\mathfrak{r}}_c],$$

d. h. es sind die Geschwindigkeiten, womit sich der genannte Punkt auf den Kurven (c) und c bewegt, gleich gross, oder: die Kurve c rollt ohne Gleitung auf der Kurve (c).

11. Ein Punkt P der Figur beschreibt bei ihrer Bewegung in der Ebene eine Kurve, von der es leicht ist, den Krümmungsradius zu bestimmen.

Da nämlich die Geschwindigkeit des Punktes

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)$$

ist, wird seine Beschleunigung

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(\mathrm{V}\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)\right\}$$

sein. Wollen wir die normale Komponente dieser Beschleunigung haben, so müssen wir skalar mit einem Einheitsvektor in der Richtung PC, d. i. mit $\frac{\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}}{\overline{PC}}$ multiplizieren; wir bekommen dann:

$$\text{7)} \qquad \frac{(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\ddot{\mathfrak{R}}}{\overline{PC}} = \frac{(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\mathrm{V}\mathfrak{u}\,\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)}{\overline{PC}} + \frac{(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)}{\overline{PC}}.$$

Für die normale Beschleunigung, welche links steht, kann bekanntlich geschrieben werden:

$$\frac{\dot{\mathfrak{R}}^2}{\overline{PM}} \quad \text{oder} \quad \frac{\{\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)\}^2}{\overline{PM}} \quad \text{oder} \quad \frac{r^2 \cdot \overline{PC}^2}{\overline{PM}},$$

wenn r der Tensor von $\mathfrak{u}$ und M das Krümmungscentrum ist.

Für den ersten Term rechts können wir, da $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c$ zu einander senkrecht sind, schreiben:

$$\frac{\mathfrak{u}^2(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)^2}{\overline{PC}} \quad \text{oder} \quad \frac{r^2 \cdot \overline{PC}^2}{\overline{PC}} \quad \text{oder} \quad r^2 \cdot \overline{PC},$$

und für den zweiten, wenn wir bedenken, dass

$$(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\mathrm{V}\dot{\mathfrak{u}}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)$$

und $[\dot{\mathfrak{r}}]$ Null sind, und dass die Vectoren $\mathfrak{u}$, $[\dot{\mathfrak{r}}_c]$ und $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)$ ein Linkssystem bilden:

$$\frac{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)\mathrm{V}\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c]}{\overline{PC}} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{u}\mathrm{V}[\dot{\mathfrak{r}}](\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)}{\overline{PC}} \quad \text{oder} \quad -rv\sin\theta,$$

wenn v der Tensor der Geschwindigkeit $[\mathfrak{r}_c]$ und θ der Winkel zwischen $[\dot{\mathfrak{r}}_c]$ und $\overline{CP}$ ist. Es geht dadurch, wenn wir noch

$$\overline{PM} = \overline{PC} - \overline{MC}$$

setzen, die Gleichung 7) über in:

$$\frac{r^2 \cdot \overline{PC}^2}{\overline{PC} - \overline{MC}} = r^2 \cdot \overline{PC} - rv\sin\theta,$$

welche nach einer einfachen Reduktion, bei welcher wir $\frac{v}{r} = k$ setzen, die bekannte Formel von **Euler-Savary**

$$\frac{1}{\overline{PC}} - \frac{1}{\overline{MC}} = \frac{1}{k \sin \theta}$$

liefert.

12. Ist mit den beweglichen Axen $O'\xi\eta$ eine Kurve d fest verbunden (siehe Figur), so wird diese bei der Bewegung fortwährend eine andere Kurve (d), ihre Enveloppe, berühren. Der Kontaktpunkt D ist kein fester Punkt der beweglichen Figur; er bewegt sich im Gegenteil auf der Kurve d mit der relativen Geschwindigkeit $[\dot{\mathfrak{r}}_d]$, wie er auf der Enveloppe (d) mit der absoluten Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{R}}_d$ fortschreitet.

Beide Geschwindigkeiten haben dieselbe Richtung, nämlich die der gemeinschaftlichen Tangente. Nun ist

$$\mathfrak{R}_d = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}_d$$

und deshalb nach Gleichung III):

$$\dot{\mathfrak{R}}_d = \dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r}_d + [\dot{\mathfrak{r}}_d]$$

oder, weil $\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r}_c + \dot{\mathfrak{R}}_0 = 0$ ist:

$$\dot{\mathfrak{R}}_d = \mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c) + [\dot{\mathfrak{r}}_d].$$

Da $\dot{\mathfrak{R}}_d$ und $[\dot{\mathfrak{r}}_d]$ die Richtung der gemeinschaftlichen Tangente haben, so hat auch ihre Differenz

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)$$

diese Richtung; die genannte Tangente steht also senkrecht zur Verbindungsgeraden $\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c$, d. i. senkrecht zu $\overline{CD}$.

Offenbar ist die Differenz

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)$$

die Geschwindigkeit, womit die Kurve d auf der Kurve (d) gleitet. Sie wird Null, wenn $\mathfrak{r}_d = \mathfrak{r}_c$ ist, d. h. die Kurve der Momentancentra c ist die einzige, welche bei der Bewegung der Figur auf ihrer Enveloppe (c) rollt ohne Gleitung.

Da $[\dot{\mathfrak{r}}_d]$ dieselbe Richtung hat wie

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c),$$

dürfen wir

$$[\dot{\mathfrak{r}}_d] = m\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)$$

setzen, wo m ein skalarer Faktor ist; es wird dadurch

$$\dot{\mathfrak{R}}_d = (1 + m)\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)$$

und wenn wir noch einmal nach Gleichung III) differenzieren:

$$8)\quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{R}}_d = (1 + m)[\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c) + \mathrm{V}\dot{\mathfrak{u}}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c) + \mathrm{V}\mathfrak{u}([\dot{\mathfrak{r}}_d] - [\dot{\mathfrak{r}}_c])] \\ + \dot{m}\mathrm{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c). \end{aligned} \right.$$

Projizieren wir diese Beschleunigung auf die Normale $\overline{DC}$, indem wir mit einem Einheitsvektor in dieser Richtung also mit $\frac{\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_d}{\overline{DC}}$ skalar multiplizieren, so bekommen wir links die normale Komponente der Beschleunigung, für welche auch

$$\frac{\mathfrak{R}_d^2}{\overline{DM}_{(d)}} \quad \text{oder} \quad \frac{(1+m)^2\{V\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)\}^2}{\overline{DM}_{(d)}} \quad \text{oder} \quad \frac{(1+m)^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{\overline{DM}_{(d)}}$$

geschrieben werden kann, wo $M_{(d)}$ der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe (d) ist. Der erste Term rechts wird

$$(1+m)\cdot r^2 \cdot \overline{DC},$$

der zweite und vierte werden Null, und der dritte wird:

$$\frac{(1+m)}{\overline{DC}} \cdot (\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_d) V\mathfrak{u}\{m V\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c) - [\dot{\mathfrak{r}}_0]\}$$

oder

$$\frac{(1+m)}{\overline{DC}} \cdot (\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_d)\{m\mathfrak{u}^2(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_d) - V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c]\}$$

oder endlich noch

$$(1+m)\{mr^2 \cdot \overline{DC} - rv \sin\theta\}$$

wo v, r und θ wieder die oben angegebene Bedeutung haben. Die ganze Gleichung 8) wird dadurch:

$$\frac{(1+m)^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{\overline{DM}_{(d)}} = (1+m)^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC} - (1+m) \cdot rv \sin\theta.$$

Vereinfachen wir diese Gleichung, indem wir wieder

$$\frac{v}{r} = k \quad \text{und} \quad \overline{DM}_{(d)} = \overline{DC} - \overline{M_{(d)}C}$$

setzen, so bekommen wir

9) $$\frac{1}{\overline{DC}} - \frac{1}{\overline{M_{(d)}C}} = \frac{1+m}{k \sin\theta}.$$

Wird auf

$$[\dot{\mathfrak{r}}_d] = m V\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)$$

nur die Operation $\frac{\partial}{\partial t}$, nicht die Operation $V\mathfrak{u}$ angewandt, so bekommt man:

$$[[\ddot{\mathfrak{r}}]] = m V\dot{\mathfrak{u}}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c) + m V\mathfrak{u}([\dot{\mathfrak{r}}_d] - [\dot{\mathfrak{r}}_c]) + \dot{m} V\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c),$$

und wenn dieselbe wieder mit dem Einheitsvektor $\frac{\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_d}{\overline{DC}}$ skalar multipliziert wird, so wird die linke Seite gleich der normalen Beschleunigung in der relativen Bewegung, also gleich

10) $$\frac{[\dot{\mathfrak{r}}_d]^2}{\overline{DM}_d} = \frac{m^2\{V\mathfrak{u}(\mathfrak{r}_d - \mathfrak{r}_c)\}^2}{\overline{DM}_d} = \frac{m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{\overline{DM}_d},$$

wenn M_d Krümmungscentrum der relativen Bahn des Punktes D, d. i. der Kurve d ist.

Der erste und dritte Term rechts werden wieder Null, und fü[redacted] den zweiten findet man, in ganz ähnlicher Weise verfahrend wie obe[redacted]

$$m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC} - mrv \sin\theta.$$

Die Gleichung 10) geht dadurch über in:

$$\frac{m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{\overline{DM}} = m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC} - mrv \sin\theta,$$

oder, wenn wir wieder

$$\overline{DM_d} = \overline{DC} - \overline{M_d C} \quad \text{und} \quad \frac{v}{r} = k$$

setzen, in

11) $$\frac{1}{\overline{DC}} - \frac{1}{\overline{M_d C}} = \frac{m}{k \sin\theta}.$$

Subtrahieren wir endlich 11) von 9), so bekommen wir:

$$\frac{1}{\overline{M_d C}} - \frac{1}{\overline{M_{(d)} C}} = \frac{1}{k \sin\theta},$$

was mit der oben gegebenen Euler-Savaryschen Gleichung den bekannten Satz liefert: Wenn eine Kurve d sich in ihrer Ebene bewegt, so fällt das Krümmungscentrum ihrer Enveloppe (d) zusammen mit dem Krümmungscentrum der Trajektorie vom Krümmungsmittelpunkt der Kurve d.

13. Es lässt sich mit Hilfe der Gleichung III) auch in direkter einfacher Weise die bekannte Relation

$$\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_{(c)}} = \frac{1}{k}$$

beweisen, wo R_c und $R_{(c)}$ die Krümmungsmittelpunkte sind von den Kurven c und (c) der Momentancentra.

Aus der früher gefundenen Gleichung

$$\dot{\mathfrak{R}}_c = [\dot{\mathfrak{r}}_c]$$

folgt nämlich durch Anwendung der Gleichung III):

$$\ddot{\mathfrak{R}}_c = V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c] + [[\dot{\mathfrak{r}}_c]]$$

und wenn wir diese mit einem Einheitsvektor in der Richtung der Normale CN, d. i. mit

$$-\frac{V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c]}{TV\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c]} \quad \text{oder} \quad -\frac{V\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c]}{rv}$$

multiplizieren, so wird die linke Seite die normale Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit also $\frac{(\mathfrak{R}_c)^2}{\mathfrak{R}_{(c)}}$ vorstellen; der erste Term rechts wird

$$-\frac{(\mathfrak{V}\,\mathfrak{u}\,[\dot{\mathfrak{r}}_c])^2}{rv}$$

er

$$-\frac{\mathfrak{u}^2\cdot[\dot{\mathfrak{r}}_c]^2}{rv},$$

er

$$-\frac{1}{k}\cdot[\dot{\mathfrak{r}}_c]^2,$$

l der zweite stellt die normale Beschleunigung der relativen Gewindigkeit

$$\frac{[\dot{\mathfrak{r}}_c]^2}{R_c}$$

:. Dividieren wir die ganze Gleichung durch $[\dot{\mathfrak{r}}_c]^2$, so bekommen r also

$$\frac{1}{R_c}-\frac{1}{R_{(c)}}=\frac{1}{k}.$$

Bemerkungen zu Bernhard Riemanns Vorlesungen über elliptische Funktionen.

Von

H. Stahl

in Tübingen.

Bei der Herausgabe dieser Vorlesungen (Leipzig 1899) habe ich eine Reihe von Erläuterungen und Ergänzungen hinzugefügt, die mit dem Text in enger Verbindung stehen. An dieser Stelle möchte ich noch ein paar Zusätze geben, die in erweitertem Sinne eine Ergänzung zu den Riemannschen Ausführungen bilden. Es sind dies Sätze über algebraische Funktionen und Anwendungen derselben auf das Abelsche Theorem und das Additionstheorem der elliptischen Funktionen in der Anordnung, wie sie auch in der Einleitung meiner „Theorie der Abelschen Funktionen", Leipzig 1896, S. 2—5 kurz zusammengestellt sind, um das Verständnis der dort entwickelten analogen Teile in der Theorie der Abelschen Funktionen (Abschnitt II und III) zu erleichtern. Die Sätze an sich sind bekannt, es handelt sich nur um die Form, die ihnen hier gegeben wird.*

Die Betrachtung schliesst unmittelbar an Abschnitt A §§ a und b in Riemanns Vorlesungen (citiert R) an und setzt nur die Kenntnis dieser beiden Paragraphen voraus.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Funktion $R(x, y)$.

Im R. A § a wurde

$$1) \qquad y = \sqrt{(x, k)} = \sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x}$$

als Funktion von x untersucht und gezeigt, dass diese Funktion in der zweiblättrigen Verzweigungsfläche T einwertig ist.** Unsere Aufgabe soll die Untersuchung gewisser algebraischer Funktionen sein, nämlich

* Eine andere Fassung und Begründung derselben Sätze findet sich in Thomae, Abriss einer Theorie der Funktionen etc. (3. Aufl. Halle 1890, §§ 81—84 u. 107, 108).

** Benutzt man noch die Abbildung der Fläche T mittels des elliptischen Integrals Gattung u (1) § 5 auf das Periodenparallelogramm, durch welche die Identität der rationalen Funktionen $R(x, y)$ mit den doppelt periodischen Funktionen $F(u)$ von u begründet wird, so erkennt man leicht die Analogie zwischen den Sätzen in §§ 1—3 mit den Sätzen von Liouville über doppelt periodische Funktionen (vergl. R. Abschnitt I § 1).

der **rationalen Funktionen** $R(x, y)$ der beiden Variabeln (x, y), die durch die Gleichung 1) verbunden sind. Es gelten hier mit charakteristischen Abweichungen ähnliche Sätze, wie für eine rationale Funktion einer einzigen Variabeln.

Eine rationale Funktion $R(x, y)$ lässt sich mit Hilfe von 1) leicht auf die Form bringen

$$2)\qquad R(x, y) = \frac{M + Ny}{P},$$

wo M, N, P ganze rationale Funktionen von x sind, die keinen Faktor mehr gemein haben. Es gelten nun folgende Sätze.

I. Eine Funktion $R(x, y)$ ist eine eindeutige Funktion des Ortes in der Verzweigungsfläche T von y.

Da nämlich in der Fläche T sowohl x wie y eindeutige Funktionen des Ortes sind, so gilt dasselbe für den Ausdruck 2). Die Funktion $R(x, y)$ hat demnach auch in der Umgebung eines jeden Punktes von T eine Entwickelung von demselben Charakter wie y, also eine Entwickelung nach Potenzen von $(x - a)$ oder $(x - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ oder $x^{\frac{1}{2}}$, je nachdem der Punkt (x, y) ein regulärer Punkt (a, b) oder ein Verzweigungspunkt $(\alpha, 0)$ oder der Verzweigungspunkt $(x = y = \infty)$ ist. Die Funktion 2) wird ferner unendlich nur in einer endlichen Zahl von Punkten und in diesen nur in endlicher Ordnung, wie leicht zu sehen (vergl. auch Satz II). Die Entwickelungen in diesen Punkten enthalten daher auch nur eine endliche Zahl von unendlich werdenden Gliedern. Jede Entwickelung von R gilt innerhalb eines Konvergenzkreises, der durch den nächsten Unstetigkeitspunkt der Funktion R oder aber durch den nächsten Verzweigungspunkt von T geht. Wegen der Eindeutigkeit in T nennt man die Gesamtheit der rationalen Funktionen von (x, y) ein System von gleichverzweigten oder wie T verzweigten Funktionen.

Die beiden Werte von $R(x, y)$, die demselben Wert von x entsprechen, fallen immer und nur dann zusammen, wenn die beiden Werte von y zusammenfallen, d. h. also in den Verzweigungspunkten der Fläche T. Eine rationale Funktion $M : P$ von x allein hat die Eigentümlichkeit, dass ihre Werte und Entwickelungen dieselben sind in zwei regulären, über einander liegenden Punkten von T, d. h. in zwei Punkten, die gleiches x, aber entgegengesetztes y haben. Eine Funktion der Form $Ny : P$ hat die Eigentümlichkeit, dass ihre Werte und Entwickelungen in zwei solchen Punkten von T von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

II. Die Zahl der 0^1 und ∞^1 Punkte einer Funktion $R(x, y)$ in der Fläche T ist die gleiche und heisst die Ordnung der Funktion $R(x, y)$.

Bei dieser Ausdrucksweise ist festzuhalten, dass in einem Punkte (a, b) von T, der kein Verzweigungspunkt ist, die Grösse $x - a$, in einem Verzweigungspunkt $x=\alpha$ die Grösse $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ und in dem Verzweigungspunkt $x=\infty$ die Grösse $x^{-\frac{1}{2}}$ als unendlich klein von der ersten Ordnung gilt; ferner dass ein Punkt, in dem die Funktion $=0^p$ oder $=\infty^q$ wird, bez. für $p\,0^1$ oder $q\,\infty^1$ Punkte gilt. Wir setzen indes in den folgenden Paragraphen der Einfachheit halber voraus, dass die 0 und ∞ Punkte von $R(x,y)$ nur von der ersten Ordnung sind und nicht in Verzweigungspunkte oder ins Unendliche fallen. Zum Beweise von II) braucht man nur die Zahl der 0^1 und ∞^1 Punkte von $R(x,y)$ wirklich zu bestimmen.

Wir betrachten zuerst eine ganze rationale Funktion $G(x,y)$ von der Form

$$\text{3)}\quad \begin{cases} G(x,y) = M + Ny = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \\ \qquad + y(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}). \end{cases}$$

Diese Funktion wird für $x=\infty$ gleich ∞^{2n} (da $x=\infty^2$ und $y=\infty^3$ ist). Die Nullpunkte der Funktion ergeben sich aus den beiden Gleichungen

$$M + Ny = 0 \quad \text{und} \quad y^2 = (x,k),$$

oder, wenn man y eliminiert, aus

$$M^2 - N^2\cdot(x,k) = 0.$$

Diese Gleichung ist vom Grade $2n$ in x oder sie hat $2n$ Wurzeln $x=x_1, x_2, \ldots x_{2n}$. Zu jedem dieser $2n$ Werte x_i gehört ein bestimmter Wert $y_i = -(M:N)_{x_i}$, so dass die Funktion $G(x,y)$ $2n\,0^1$ Punkte (x_i, y_i) hat. Daher ist die Zahl der 0^1 und ∞^1 Punkte der Funktion dieselbe $=2n$ oder die Funktion $G(x,y)$ ist von der geraden Ordnung $2n$.

Betrachtet man dagegen eine ganze rationale Funktion von der Form

$$\text{3a)}\quad \begin{cases} G(x,y) = M + Ny = (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \\ \qquad + y(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}), \end{cases}$$

so ist die Ordnung eine andere. Die Funktion 3a) wird für $x=\infty$ gleich ∞^{2n-1}. Die Nullpunkte von 3a) ergeben sich wieder aus der Gleichung $M^2 - N^2\cdot(x,k) = 0$, die jetzt vom Grade $2n-1$ in x ist. Zu jeder der $2n-1$ Wurzeln x_i gehört wieder ein bestimmtes y_i. Daher ist die Zahl der 0^1 und ∞^1 Punkte der Funktion 3a) dieselbe $=2n-1$ oder die Funktion 3a) ist von der ungeraden Ordnung $2n-1$.

Die beiden Funktionen 3) und 3a) sind die allgemeinsten, ganzen rationalen Funktionen (x,y) der genannten Ordnung oder diejenigen, welche im Vergleich zu ihrer Ordnung die meisten willkürlichen Koeffizienten oder willkürlichen Nullpunkte haben. Für jeden anderen Grad von M und N hat die Funktion ebenfalls eine bestimmte Ordnung, indes ist die Zahl der willkürlichen Koeffizienten der Funktion dann nicht mehr die grösste im Vergleich zu dieser Ordnung.

Geht man zur gebrochenen, rationalen Funktion $R(x, y)$ über, so ist die allgemeinste Form derselben

$$4)\quad \begin{cases} R(x,y) = \dfrac{M+Ny}{P} \\ \qquad = \dfrac{(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)+y(b_0+b_1x+\cdots+b_{m-2}x^{m-2})}{c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m}. \end{cases}$$

Sind $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ die Wurzeln von $P=0$, so wird die Funktion $4) = \infty^1$ in jedem der Punkte

$$(x'_i, +y'_i) \quad \text{und} \quad (x'_i, -y'_i),$$

also im ganzen in $2m$ Punkten von T. Sie wird $= 0^1$ in den durch die Gleichungen

$$M^2 - N^2\cdot(x, k) = 0 \quad \text{und} \quad M + Ny = 0$$

bestimmten Punkten, also ebenfalls in $2m$ Punkten

$$(x^0_h, y^0_h)(h = 1, \ldots, 2m).$$

Die Funktion 4) ist also im allgemeinen von der Ordnung $2m$. Fallen einzelne der ∞^1 Punkte mit 0^1 Punkt zusammen, so erniedrigt sich die Ordnung um die Zahl dieser Punkte. Ist der Grad von M, N, P in x ein anderer als der in 4) angegebene, so ist die Ordnung ebenfalls leicht zu bestimmen. Die Funktion hat aber dann nicht mehr die grösste Zahl von willkürlichen Koeffizienten im Vergleich zu ihrer Ordnung.

§ 2. Bildung von $R(x, y)$ aus den 0^1 und ∞^1 Punkten.

An diese Sätze schliesst sich die Aufgabe, eine Funktion $R(x, y)$ aus gegebenen Elementen zu bilden. Für eine rationale Funktion $R(z)$ einer einzigen Variabeln z gelten bekanntlich die zwei eng verbundenen Sätze:

Eine Funktion $R(z)$ von der Ordnung m ist durch ihre $m\infty^1$ und $m0^1$ Punkte bis auf einen konstanten Faktor bestimmt; diese $2m$ Elemente sind unabhängig von einander.

Eine Funktion $R(z)$ von der Ordnung m ist durch ihre $m\infty^1$ Punkte und die zugehörigen Residuen bis auf eine additive Konstante bestimmt; auch diese $2m$ Elemente sind unabhängig von einander.

Entsprechend hat man hier die beiden Aufgaben, eine rationale Funktion $R(x, y)$ zu bilden, wenn entweder ihre ∞^1 und 0^1 Punkte oder ihre ∞^1 Punkte und die zugehörigen Residuen gegeben sind. Es zeigt sich aber dabei, dass jedesmal nur ein Teil dieser Elemente willkürlich wählbar ist und es handelt sich daher weiter um eine Untersuchung der Abhängigkeit dieser Elemente von einander.

Die erste der beiden Aufgaben lautet:

Eine Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m aus den $m\infty^1$ und den $m0^1$ Punkten zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen $2m$ Punkten anzugeben.

Wir lösen die Aufgabe zuerst wieder für eine **ganze rationale** Funktion $G(x, y)$, deren ∞^1 Punkte sämtlich in den Verzweigungspunkt $x = \infty$, $y = \infty$ fallen. Die gesuchte Funktion hat die grösste Anzahl von willkürlichen Koeffizienten im Vergleich zu ihrer Ordnung, wenn sie von der Form 3) oder 3a) § 1 ist. Es sind daher wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens sei $m = 2n$, also m **gerade**. Die 0^1 Punkte der Funktion seien

$$(x^0_i, y^0_i)\ (i = 1, 2, \ldots 2n).$$

Dann ist für die gesuchte Funktion die Form 3) § 1 zu wählen, welche $n+1+n-1 = 2n$ homogene Koeffizienten a, b hat. Nun sind die $2n-1$ Verhältnisse dieser Koeffizienten bereits bestimmt durch die $2n-1$ ersten 0^1 Punkte

$$(x^0_i, y^0_i)\ (i = 1, \ldots 2n-1),$$

die beliebig gewählt werden können. Die so bestimmte Funktion $G(x, y)$ enthält dann noch einen unbestimmten Faktor; sie ist aber, abgesehen von diesem Faktor, auch die einzige Funktion, die den gestellten Bedingungen genügt; denn gäbe es eine zweite solche Funktion, so hätte man in dem Quotienten beider eine Funktion, die in T eindeutig und nirgends mehr unendlich wäre. Eine solche Funktion ist aber nach bekannten Sätzen eine Konstante.

Nach dieser Betrachtung ist der letzte oder $2n^{\text{te}}$ 0^1 Punkt (x^0_{2n}, y^0_{2n}) der Funktion durch die übrigen bestimmt und es muss zwischen den Koordinaten (x^0_i, y^0_i) der $2n$ 0^1 Punkte **eine Relation** bestehen. Um diese aufzustellen, hat man nur den Ausdruck 3) § 1, gebildet für die $2n$ 0^1 Punkte (x^0_i, y^0_i) gleich 0 zu setzen. Dies giebt $2n$ Gleichungen, aus denen die Koeffizienten a, b zu eliminieren sind. Man erhält so die gesuchte Bedingung in Determinantenform, nämlich

$$1)\quad |1 \quad x_i^0 \ldots x_i^{0\,n}, \quad y_i^0 \quad y_i^0 x_i^0 \ldots y_i^0 x_i^{0\,n-2}| = 0 \quad (i = 1, \ldots 2n),$$

wenn man zur Abkürzung für eine $2n$ Reihen von der Form 1) enthaltende Determinante nur die i^{te} Reihe anschreibt.

Ersetzt man in dieser Determinante (x^0_{2n}, y^0_{2n}) durch die Koordinaten (x, y) eines variabeln Punktes, so stellt sie bis auf einen unbestimmt bleibenden, konstanten Faktor die gesuchte Funktion $G(x, y)$ dar, gebildet aus den $2n-1$ ersten, willkürlichen 0^1 Punkten.

Zweitens sei $m = 2n-1$, also m **ungerade**. Die 0^1 Punkte seien

$$(x_i^0, y_i^0)\ (i = 1, \ldots, 2n-1).$$

Dann ist für die gesuchte Funktion die Form 3a) § 1 zu wählen. Auch hier zeigt sich, dass die Funktion schon durch die

$$m - 1 = 2n - 2$$

ersten 0^1 Punkte bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist und dass zwischen den $2n-1$ 0^1 Punkten die Relation besteht:

$$2)\quad |1 \quad x_i^0 \ldots x_i^{0\,n-1} \quad y_i^0 \quad y_i^0 x_i^0 \ldots y_i^0 x_i^{0\,n-2}| = 0 \ (i = 1, \ldots 2n-1).$$

Zugleich folgt, dass eine ganze rationale Funktion $G(x, y)$ nicht von der Ordnung $m = 1$ sein kann; dann wäre nämlich $n = 1$ und die Funktion 3a) § 1 eine Konstante.

Wir kommen zur Lösung der Aufgabe für die **allgemeine rationale Funktion**, d. h. zur Bildung einer Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m aus den m 0^1 Punkten und den m ∞^1 Punkten

$$(x_i^0, y_i^0) \quad \text{und} \quad (x'_i, y'_i)\,(i = 1, \ldots, m).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, die gegebenen Punkte haben eine allgemeine Lage, sie sollen also nicht in Verzweigungspunkte von T fallen und ausserdem sollen nicht zwei von ihnen übereinanderliegende Punkte in den beiden Blättern von T sein.

Die gesuchte Funktion $R(x, y)$ hat die grösste Zahl von willkürlichen Koeffizienten im Vergleich zu ihrer Ordnung, wenn sie von der Form 4) § 1 ist. Der Nenner P ist offenbar

$$3) \qquad P = \overline{x - x'_1} \cdot \overline{x - x'_2} \ldots \overline{x - x'_m}.$$

Dieser Ausdruck wird aber $= 0^1$ in den $2m$ Punkten (x_i', y_i') und $(x_i', -y_i')$ von T. In den letzten m Punkten $(x_i', -y_i')$ muss daher auch der Zähler verschwinden. Dieser hat $2m$ homogene Koeffizienten, von denen nur die $2m - 1$ Verhältnisse in Betracht kommen. Lässt man nun den Zähler in 4) § 1 zunächst für die m Punkte $(x_i', -y_i')$ und dann noch für die $m - 1$ ersten 0^1 Punkte

$$(x_i^0, y_i^0)\,(i = 1, \ldots, m - 1)$$

verschwinden, so ist er bis auf einen unbestimmt bleibenden, konstanten Faktor vollkommen bestimmt und damit ist auch der letzte 0^1 Punkt bestimmt. Es muss also zwischen den m ∞^1 Punkten und den m 0^1 Punkten **eine** Relation bestehen. Auch hier ist die so bestimmte Funktion (abgesehen von dem konstanten Faktor) die einzige, die den gestellten Bedingungen genügt.

Die Relation zwischen den $2m$ 0^1 und ∞^1 Punkten

$$(x_i^0, y_i^0) \quad \text{und} \quad (x_i', y_i')\,(i = 1, \ldots, m)$$

wird erhalten, indem man den Ausdruck $M + Ny$ im Zähler von 4) § 1, gebildet für die $2m$ Punkte $(x_i', -y_i')$ und (x_i^0, y_i^0) gleich 0 setzt und aus diesen $2m$ Gleichungen die $2m$ Koeffizienten a, b eliminiert. Man erhält in ähnlicher Abkürzung wie bei 1) oder 2):

$$4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_i' & x_i'^2 \ldots x_i'^m & -y_i' & -y_i'x_i' \ldots -y_i'x_i'^{m-2} \\ 1 & x_k^0 & x_k^{02} \ldots x_k^{0m} & +y_k^0 & +y_k^0x_k^0 \ldots +y_k^0x_k^{0m-2} \end{vmatrix} = 0$$

$$(i = 1, \ldots, m)(k = 1, \ldots, m).$$

Ersetzt man in der Determinante 4) (x_m^0, y_m^0) durch die variabeln Koordinaten (x, y), so stellt sie den Zähler der gesuchten Funktion $R(x, y)$ dar bis auf einen konstanten Faktor. Zugleich ergiebt sich die Folgerung, dass eine rationale Funktion in (x, y) von der **ersten**

Ordnung unmöglich ist. Denn für $m = 1$ wäre $P = x - x_1'$; N würde wegfallen, M wäre vom Grade 1 in x und da es für $(x_1', -y_1')$ verschwinden müsste, wäre $M = x - x_1'$, also $M = P$, d. h. die Funktion wäre eine Konstante. Wir fassen den Inhalt dieses Paragraphen zusammen in den Satz:

I. Eine rationale Funktion $R(x, y)$ von der m Ordnung kann nur bestehen, wenn $m \geqq 2$ ist. Die Funktion ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn von ihren m 0^1 und m ∞^1 Punkten alle beliebig gegeben sind mit Ausnahme von einem. Der letzte der $2m$ Punkte ist eindeutig durch die übrigen bestimmt. Die zwischen den $2m$ 0^1 und ∞^1 Punkten bestehende Relation ist die Gleichung 4).

§ 3. Bildung von $R(x, y)$ aus den ∞^1 Punkten und Residuen.

Die zweite Aufgabe lautet:

Eine Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m aus den m ∞^1 Punkten und den m zugehörigen Residuen zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen $2m$ Elementen aufzustellen.

Die m ∞^1 Punkte seien $(x_1', y_1'), \ldots, (x_m', y_m')$ und die zugehörigen Residuen $B_1, \ldots, B_m$. Es soll also im Punkte (x_i', y_i') der Ausdruck

$$R(x, y) - B_i : (x - x_i')$$

endlich sein oder, wie wir sagen, es soll im Punkte (x_i', y_i') $R(x, y)$ unendlich werden wie $B_i : (x - x_i')$.

Zur Lösung der Aufgabe benutzen wir die besondere rationale Funktion $(y + y_i') : (x - x_i')$. Diese ist von der zweiten Ordnung; sie wird $= \infty^1$ im Punkte (x_i', y_i') und im Verzweigungspunkt $(x = y = \infty)$, da für diesen der Zähler $y + y_i' = \infty^3$, der Nenner $x - x_i' = \infty^2$ ist. Dagegen bleibt die Funktion endlich im Punkt $(x_i', -y_i')$. Bildet man nun den Ausdruck

$$1) \qquad \frac{B_1}{2y_1'} \frac{y + y_1'}{x - x_1'} + \cdots + \frac{B_m}{2y'_m} \frac{y + y'_m}{x - x'_m} + C_0,$$

so hat man eine rationale Funktion von (x, y), die in den Punkten

$$(x_1', y_1') \ldots (x_m', y_m')$$

∞^1 wird und zwar in (x_i', y_i') wie $B_i : (x - x_i')$. Damit dieselbe endlich bleibt im Punkt $(x = y = \infty)$, muss die Gleichung bestehen

$$2) \qquad \frac{B_1}{y_1'} + \cdots + \frac{B_m}{y_m'} = 0.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so stellt der Ausdruck 1) gerade die gesuchte Funktion $R(x, y)$ dar, wobei die additive Konstante C_0 unbestimmt bleibt. Bringt man 1) auf gleichen Nenner, so erhält man für $R(x,y)$ die frühere Form 4) § 1. Zwischen den $2m$ gegebenen Elementen (x_i', y_i') und B_i besteht auch hier eine Relation 2), so dass eines der gegebenen Elemente, etwa B_m, durch die übrigen $2m-1$ willkürlich wählbaren Elemente bestimmt ist. Auch hier zeigt sich, dass $m \gtreqless 2$ sein muss, weil für $m=1$ nach 2) $B_1 = 0$, also die Funktion 1) eine Konstante wäre.

Die Darstellung 1) giebt zugleich nochmals und in etwas einfacherer Form als früher die Bedingung, die zwischen dem $m\,0^1$ und $m\,\infty^1$ Punkten einer Funktion $R(x,y)$ besteht. Denn bezeichnet man wie im vorigen Paragraphen die $m\,0^1$ Punkte durch (x_i^0, y_i^0), setzt den Ausdruck 1) gebildet für diese m Punkte $=0$ und eliminiert mit Hilfe von 2) die Grössen B_i, so erhält man die gesuchte Bedingung in der Form:

$$3)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{y_1{}^0+y_1'}{x_1{}^0-x_1'} & \cdots & \dfrac{y_1{}^0+y'_m}{x_1{}^0-x'_m} & 1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{y_m{}^0+y_1'}{x_m{}^0-x_1'} & \cdots & \dfrac{y_m{}^0+y_m'}{x_m{}^0-x_m'} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Betrachtungen geben den Satz:

I. Eine Funktion $R(x,y)$ von der Ordnung m ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn ihre $m\,\infty^1$ Punkte und von den m zugehörigen Residuen alle bis auf eines gegeben sind. Das letzte Residuum ist alsdann eindeutig bestimmt. Die zwischen den $2m$ Elementen bestehende Relation ist die Gleichung 2); die Relation zwischen den ∞^1 und 0^1 Punkten der Funktion die Gleichung 3).*

Die letzte Untersuchung löst zugleich die Aufgabe:

Eine gegebene Funktion $R(x,y)$ in Partialbrüche zu zerlegen oder von ihr die ∞^1 Punkte und die zugehörigen Residuen zu bestimmen.

Die Lösung ist folgende. Man bringe die Funktion $R(x,y)$ auf die Form $M+Ny:P$, wo M, N, P rationale Funktionen von x allein

---

* Die Gleichung 2) ist im wesentlichen identisch mit dem Satze II in R. A § c. Denn bildet man die Integralfunktion

$$W = \int \frac{R(xy)}{y}\,dx,$$

so wird dieselbe logarithmisch unendlich in den m Punkten

$$(x_1'y_1'), \ldots, (x_m'y_m')$$

und zwar in $(x_i'\,y_i')$ wie

$$\frac{B_i'}{y_i'}\log(x-x_i').$$

Die Gleichung 2) sagt daher aus: Die Summe der Koeffizienten, die zu den logarithmischen Unstetigkeitspunkten (x_i', y_i') des elliptischen Integrals W gehören, ist gleich Null.

sind. Alsdann bestimme man die Wurzeln x_i' des Nenners $P=0$ und sondere von den zu x_i' gehörigen beiden Wertepaaren (x_i', y_i') und $(x_i', -y_i')$ dasjenige (etwa das letzte) ab, für das auch der Zähler $M+Ny=0$ wird. Das zu dem übrig bleibenden ∞^1 Punkt (x_i', y_i') gehörige Residuum B_i ist bestimmt durch $B_i = \lim\limits_{x_i', y_i'} (x-x_i') R(x,y)$. Der Ausdruck 1) stellt alsdann die Partialbruchzerlegung der Funktion $R(x, y)$ dar.

Die Gleichung 4) § 2 oder 3) § 3 bezieht sich auf die 0^1 und ∞^1 Punkte einer Funktion $R(x, y)$ und giebt eine rationale Relation zwischen ihren Koordinaten an. Wir werden im § 4 zeigen, dass die Gleichung 2) zu einer zweiten, transcendenten Form dieser Abhängigkeit zwischen den 0^1 und ∞^1 Punkten führt.

§ 4. Das Abelsche Theorem für das Integral erster Gattung.

Am Schluss von § 3 wurde erwähnt, dass die Bedingungsgleichung 4) § 2 oder 3) § 3, die zwischen den Koordinaten der 0^1 und ∞^1 Punkte

$$(x_i^0, y_i^0) \quad \text{und} \quad (x_i', y_i')\, (i=1, \ldots, m)$$

einer rationalen Funktion $R(x, y)$ besteht, sich noch in einer zweiten, transcendenten Form darstellen lasse. Um diese herzuleiten, führen wir statt $R(x, y)$ eine andere rationale Funktion $r = r(x, y)$ von derselben Ordnung m ein durch die Gleichung $R = (r-\alpha):(r-\beta)$. r ist also eine rationale Funktion, die in den m Punkten (x_i^0, y_i^0) denselben Wert α, in den m Punkten (x_i', y_i') denselben Wert β annimmt. Man bezeichne nun die m Punkte, in denen r denselben Wert ϱ annimmt, durch (x_i, y_i) und wende auf die Funktion $P = (r-\alpha):(r-\varrho)$ die Gleichung 2) § 3 an. Da die ∞^1 Punkte von P die m Punkte (x_i, y_i) sind, so erhält man $\sum A_i : y_i = 0$, wenn A_i das Residuum von P für den Punkt (x_i, y_i) ist. Das Residuum lässt sich leicht bestimmen; es ist nämlich

$$A_i = \lim_{x=x_i} (x-x_i) P = (\varrho-\alpha) \lim_{\substack{x=x_i \\ r=\varrho}} \frac{x-x_i}{r-\varrho} = (\varrho-\alpha)\left(\frac{dx}{dr}\right)_{\substack{x_i \\ \varrho}}$$

$$= (\varrho-\alpha)\frac{dx_i}{d\varrho}.$$

Lässt man den gemeinsamen Faktor $(\varrho-\alpha):d\varrho$ weg, so folgt die Gleichung $(i=1, \ldots m)$:

$$1) \qquad \sum_i \frac{dx_i}{2y_i} = \sum \frac{dx_i}{2\sqrt{(x_i, k)}} = 0.$$

Wenn also eine rationale Funktion $r(x, y)$ von der Ordnung m denselben Wert ϱ annimmt in den m Punkten (x_i, y_i), so besteht zwischen den Koordinaten dieser m Punkte und den m Differentialen dx_i (die eine gewisse Fortschrittsrichtung der Punkte (x_i, y_i) in der Fläche T angeben) eine Relation von der Form 1), unabhängig von dem jedesmaligen Wert von ϱ.

Das Differential $du = \frac{dx}{2y}$ ist nach R. II. § 4 (2) das elliptische Differential erster Gattung. Die Gleichung 1) heisst daher das Abelsche Theorem für das Differential erster Gattung. Dasselbe lautet:

I. Für das Differential erster Gattung ist die Summe der Differentiale, gebildet mit den m Punkten (x_i, y_i), in welchen eine rationale Funktion r von der Ordnung m denselben Wert ϱ annimmt, gleich 0.

Man kann noch weiter gehen. Dem Wert $r = \varrho$ entsprechen die m Punkte (x_i, y_i), dem Wert $r = \alpha$ die Punkte (x_i^0, y_i^0), dem Wert $r = \beta$ die Punkte (x_i', y_i'). Lässt man nun ϱ eine kontinuierliche Reihe von Werten zwischen den Grenzen β und α durchlaufen, so durchläuft jeder der Punkte (x_i, y_i) in der Fläche T eine bestimmte Kurve C_i zwischen den zugehörigen Punkten (x_i', y_i') und (x_i^0, y_i^0). Wir setzen voraus, dass die m Kurven C_i sich unter einander und mit den Querschnitten a, b der Fläche T nicht schneiden. Summiert man alsdann die für alle Werte von ϱ zwischen β und α gebildeten Gleichungen 1) oder mit anderen Worten, integriert man 1) längs der Kurven C_i zwischen den Punktsystemen (x_i', y_i') und (x_i^0, y_i^0), so erhält man

2) $$\sum_i \int_{x_i', y_i'}^{x_i^0, y_i^0} \frac{dx}{2y} = \sum_i \int_{x_i', y_i'}^{x_i^0, y_i^0} \frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}} = 0.$$

Dies ist die gesuchte transcendente Gleichung zwischen den m 0^1 und ∞^1 Punkten der rationalen Funktion $R(x, y)$. Man nennt diese Gleichung 2) das Abelsche Theorem für das Integral erster Gattung. Dasselbe lautet:

II. Für das elliptische Integral erster Gattung ist die Summe der m Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen (x_i', y_i') und (x_i^0, y_i^0), für welche eine rationale Funktion $R(x, y)$ bez. die Werte ∞^1 und 0^1 oder eine rationale Funktion $r(x, y)$ bez. die Werte β und α annimmt, gleich 0.

Wählt man statt der m unteren Grenzpunkte (x_i', y_i'), die dem Wert $r = \beta$ entsprechen, m beliebige Anfangswerte, etwa $(x, y) = (0, 0)$ und für die m oberen Grenzpunkte die Punkte (x_i, y_i), die dem Wert $r = \varrho$ entsprechen, so nimmt die Gleichung 2) die Form an

$$\sum_i \int_0^{x_i} du = C,$$

die wir auch schreiben

3) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = C,$$

wo C eine von 0 verschiedene Konstante ist. Dies giebt den Zusatz:

IIa) Für das Integral erster Gattung ist die Summe der m Integrale, erstreckt von einem beliebigen Anfangspunkt $(0, 0)$ bis zu einem System von m Punkten (x_i, y_i), in welchem eine rationale Funktion $r(x, y)$ einen bestimmten Wert ϱ annimmt, konstant d. h. unabhängig von diesem Wert ϱ.

Die Hauptbedeutung des Abelschen Theorems für das Integral erster Gattung liegt in seiner Umkehrbarkeit oder in dem Satze:

III. Sind $2m$ Punkte (x_i', y_i') und (x_i^0, y_i^0) in T so beschaffen, dass sie der Gleichung 2) genügen, so existiert immer eine (und abgesehen von einem konstanten Faktor nur eine) rationale Funktion $R(x, y)$ von der Ordnung m, für welche die m Punkte (x_i', y_i') die ∞^1 und die m Punkte (x_i^0, y_i^0) die 0^1 Punkte sind.

Wir unterdrücken den Beweis dieses Satzes,* geben aber im folgenden Paragraph noch eine wichtige Anwendung desselben.

§ 5. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen.**

Betrachtet man in dem Integral erster Gattung

1) $$u = \int_0^x \frac{dx}{2y} = \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}},$$

dessen Periodizitätsmoduln $2K$ und $2iK'$ sind (R. II § 5), x und y als Funktionen von u und setzt

2) $$x = f(u), \quad 2y = 2\sqrt{(x, k)} = f'(u),$$

so zeigt sich (vergl. R. II § 8), dass diese Funktionen eindeutige und doppeltperiodische Funktionen der Variabeln u sind mit den Perioden $2K$ und $2iK'$. Solche Funktionen heissen elliptische Funktionen von u. Ebenso sind die Wurzelfunktionen

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{1-x}, \quad \sqrt{1-k^2x}$$

elliptische Funktionen von u mit etwas anderen Perioden. Man bezeichnet sie nach Jacobi durch

3) $$\sqrt{x} = sn\, u, \quad \sqrt{1-x} = cn\, u \quad \sqrt{1-k^2x} = dn\, u.$$

Die erste ist eine ungerade, die beiden anderen sind gerade Funktionen von u (R. II § 8).

Es gilt nun der Satz:

II. Die elliptische Funktion $x = f(u)$ besitzt ein algebraisches Additionstheorem, d. h. $f(u_1 + u_2)$ lässt sich

* Vergl. hierzu meine Theorie der Abelschen Funktionen S. 151.

** Riemann giebt in R. IV § 14 eine anderer Herleitung dieses Theorems.

rational durch die Funktionen $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f'(u_1)$, $f'(u_2)$ oder algebraisch durch die Funktionen $f(u_1)$ $f(u_2)$ allein darstellen.

Ein gleiches Additionstheorem gilt für die Funktion $2y = f'(u)$, für die drei Funktionen 3) und allgemein für jede doppeltperiodische Funktion. Wir geben den Beweis für die Funktion $\sqrt{x} = sn\, u$.

Im einfachsten Fall ist $R(x, y)$ eine ganze Funktion der dritten Ordnung, nämlich

$$R(x, y) = Ax + By + C,$$

wo A, B, C Konstanten sind.

Die drei 0^1 Punkte derselben (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) sind nach dem Abelschen Theorem einerseits durch eine algebraische Gleichung, nämlich (§ 2 Gleichung 2):

$$4) \quad |1 \;\; x_i \;\; y_i| = 0 \quad \text{oder} \quad |1, x_i \;\; \sqrt{(x_i, k)}| = 0 \quad (i = 0, 1, 2),$$

andererseits durch eine transcendente Gleichung, nämlich (§ 4 Gleichung 3)

$$5) \qquad u_0 + u_1 + u_2 = c \quad (c \neq 0)$$

verbunden. Die Äquivalenz dieser beiden Bedingungsgleichungen 4) und 5) führt nun zum Beweis des Additionstheorems von $sn\, u$. Aus der Gleichung 4) folgt

$$(x_1 - x_2)\sqrt{(x_0, k)} + (x_2 - x_0)\sqrt{(x_1, k)} + (x_0 - x_1)\sqrt{(x_2, k)} = 0,$$

oder

$$(x_1 - x_2)^2(x_0, k) - [(x_0 - x_2)\sqrt{(x_1, k)} - (x_0 - x_1)\sqrt{(x_2, k)}]^2 = 0.$$

Setzt man hierin z statt x_0, so hat man eine Gleichung dritten Grades in z, deren Wurzeln $z = x_0, x_1, x_2$ sind. Daher besteht die identische Gleichung in z:

$$6) \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)^2(z, k) - [(z - x_2)\sqrt{(x_1, k)} - (z - x_1)\sqrt{(x_2, k)}]^2 \\ \qquad = k^2(x_1 - x_2)^2(z - x_0)(z - x_1)(z - x_2). \end{cases}$$

Setzt man hierin $z = 0$, so folgt

$$k(x_1 - x_2)\sqrt{x_0 x_1 x_2} = x_1\sqrt{(x_2, k)} - x_2\sqrt{(x_1, k)},$$

oder durch Auflösung nach x_0

$$7) \quad \frac{1}{k\sqrt{x_0}} = \frac{(x_1 - x_2)\sqrt{x_1 x_2}}{x_1\sqrt{(x_2, k)} - x_2\sqrt{(x_1, k)}} = \frac{x_1\sqrt{(x_2, k)} + x_2\sqrt{(x_1, k)}}{(1 - k^2 x_1 x_2)\sqrt{x_1 x_2}}.$$

Da nach 5) $\sqrt{x_0} = sn\, u_0 = sn(c - u_1 - u_2)$, also eine Funktion von $u_1 + u_2$ ist, so kann man den Ausdruck 7) $= \varphi(u_1 + u_2)$ setzen. Um die Funktion φ zu bestimmen, mache man, nachdem der Faktor $\sqrt{x_1 x_2}$ weggehoben ist, $u_2 = 0$ also $x_2 = 0$, $(x_2, k) = 0$. Dann erhält man

$$\varphi(u_1) = \sqrt{x_1} = sn\, u_1,$$

also für 7) den Wert $sn(u_1 + u_2)$.

Hiernach folgt aus 7), wenn man die Funktionen 3) einführt, das Additionstheorem der Funktion $sn\,u$

$$8)\qquad sn(u_1 \pm u_2) = \frac{sn\,u_1\, cn\,u_2\, dn\,u_2 \pm sn\,u_2\, cn\,u_1\, dn\,u_1}{1-k^2 sn^2 u_1\, sn^2 u_2}.$$

Die unteren Zeichen ergeben sich, wenn man berücksichtigt, dass $sn\,u$ eine ungerade, $cn\,u$ und $dn\,u$ gerade Funktionen von u sind.

Ebenso erhält man aus Gleichung 6), wenn man $s = 1$ und $s = \frac{1}{k}$ setzt, das Additionstheorem der Funktionen $cn\,u$ und $dn\,u$, nämlich

$$9)\qquad cn(u_1 \pm u_2) = \frac{cn\,u_1\, cn\,u_2 \mp sn\,u_1\, sn\,u_2\, dn\,u_1\, dn\,u_2}{1-k^2 sn^2 u_1\, sn^2 u_2},$$

$$10)\qquad dn(u_1 \pm u_2) = \frac{dn\,u_1\, dn\,u_2 \mp k^2 sn\,u_1\, sn\,u_2\, cn\,u_1\, cn\,u_2}{1-k^2 sn^2 u_1\, sn^2 u_2}.$$

Druckfehler in B. Riemann, Elliptische Funktionen.

S. III Z. 6 u. 7 v. u. lies Sommer 1861 und Winter 1861/62 statt Winter 1861/62 und Sommer 1862 (entsprechend S. IV und V und an späteren Stellen).

S. 54 Z. 18 v. o. lies Teil statt Teiler.

S. 64 Z. 3 v. u. am Rand zuzufügen: (15).

S. 81 Z. 7 v. o. lies $= \Psi(x)\sqrt{(x, k)}$ statt $= \Phi(x)\sqrt{(x, k)}$.

S. 88 Z. 10 v. u. in der zweiten Gleichung 9) lies g_3 statt g_2.

S. 88 Z. 3 v. u. lies $g_2'^3$ statt $g_2'^2$.

S. 111 Z. 16 v. u. lies Gleichung 10) statt Gleichung 35).

S. 113 Z. 16 v. o. lies $Z(u \pm iK')$ statt $Z(u \pm K')$.

S. 117 Z. 8 v. o. lies $E(u + 2iK')$ statt $E(u + 2K')$.

S. 136 Z. 4 v. o. lies $p(u)$ statt $p'(u)$.

S. 143 Z. 7 v. u. lies $v =$ statt $u =$.

S. 143 Z. 4 v. u. lies $\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'}$ statt $\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1}$.

Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie.

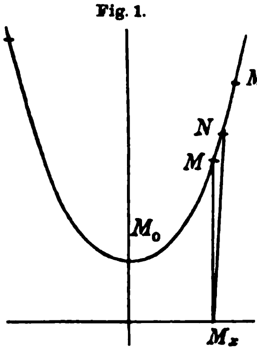
Von

J. Jung

in Pilsen.

Der Ruhelage eines homogenen, an den Enden aufgehängten Fadens (Fig. 1), der „Kettenlinie“, entspricht folgende Hilfskonstruktion (Fig. 2): Denkt man den Faden in der Geraden a vertikal ausgespannt, wobei etwa dem linken Aufhängepunkte M_1 das untere Ende M'_1, dem rechten M_2 das obere Ende M'_2 des Fadenbildes auf a entspricht, so schneiden sich die Geraden g' durch die Fadenbildpunkte M' parallel den Tangenten in den zugehörigen Fadenpunkten M sämtlich in einem Punkte O, dessen Abstände von den M' die bezüglichen Fadenspannungen der Grösse und Richtung nach darstellen, falls das Gewicht der Längeneinheit als Gewichtseinheit gewählt wird. Es ist ja die Spannung OM' für den Fadenpunkt M (mit dem Richtungssinn entsprechend der Bewegung von M_1 nach M_2) notwendigerweise die Resultierende aus der Spannung in M_2 und dem Gewicht des Fadenstückes MM_2.

Fig. 1.



Überdies haben aber die Längen $\overline{OM'}$ eine höchst einfache geometrische Bedeutung: sie sind die Ordinaten der Fadenpunkte M bezüglich einer bestimmten Horizontalen unterhalb des Kurvenpunktes M_0 mit wagerechter Tangente. An der Ruhelage des beliebigen Fadenstückes $M_a M_b$ (Fig. 3) wird offenbar nichts geändert, wenn man in M_a statt des Stückes $M_1 M_a$ ein Stück $M_a N_a$ aus demselben Fadenstoffe und von der Länge $\overline{M'_a O}$ vertikal herabhängend anknüpft, und ebenso in M_b statt des folgenden $M_b M_2$ ein vertikal hängendes $M_b N_b$ von der Länge $\overline{M'_b O}$, weil eben die Gewichte dieser (über unendlich kleine Rollen etwa) in M_a und M_b ziehenden Stücke den dortigen Spannungen gleich sind. Nun müssen aber die unteren Enden N_a, N_b in gleicher Höhe liegen; denn würde man ein geradliniges, gleichartiges Fadenstück $N_a N_b$ zwischen sie einschalten und, um Gestaltsänderung zu verhüten, den ganzen nun geschlossenen Faden

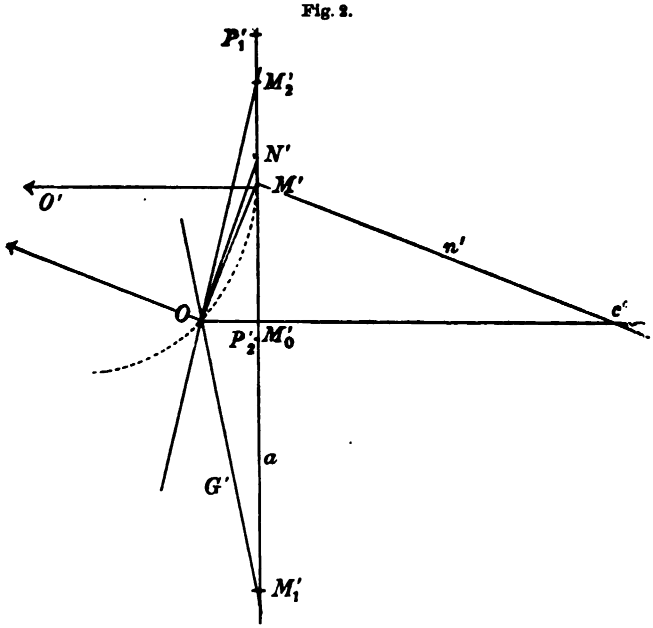
$$M_a M_b N_b N_a M_a$$

durch eine innen reibungslose, kongruente Röhre ziehen, so würde im Falle ungleich hoher N_a, N_b der Faden als Perpetuum mobile fortwährend im einen Sinne in sich selbst sich verschieben, weil eben der Fadenteil

$$'N_a M_a M_b N_b$$

für sich im Gleichgewicht, daher ohne Kraftaufwand verschiebbar ist, so dass dem beständigen Abwärtsgleiten des Stückes auf der schiefen

Fig. 2.



Ebene $N_a N_b$ nichts entgegenwirkte. Vergl. Stevins Überlegung bei der schiefen Ebene behufs Ermittelung ihrer Gleichgewichtsgesetze.*

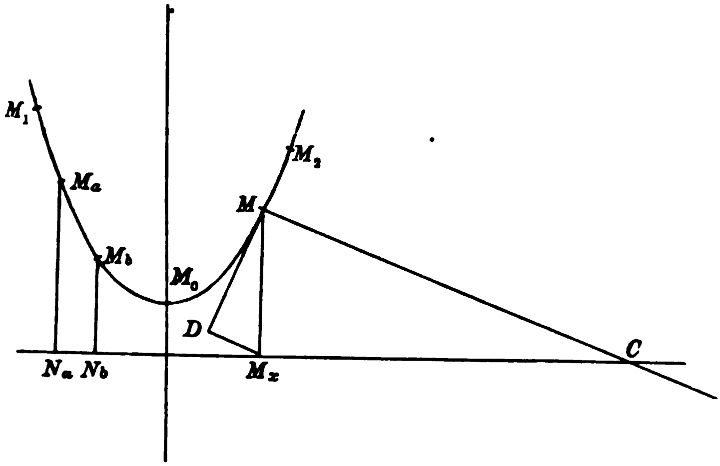
Die dergestalt sich bietende Abscissenaxe verläuft also im Abstande OM'_0, d. i. der Abstand zwischen O und a, unterhalb des tiefsten Kurvenpunktes M_0. Sie ist aber noch in anderer Hinsicht bedeutsam für die Kettenlinie. Wie erwähnt, laufen die Strecken von O zu den Bildpunkten auf a parallel den Tangenten der Fadenpunkte, und es schliessen daher zwei benachbarte derartige Strecken OM', ON' (Fig. 2) einen Winkel ein gleich dem Kontingenzwinkel, der zu dem Kurvenelemente MN (Fig. 1) gehört. Dieses Element aber ist längengleich mit dem Element $\overline{M'N'}$ auf a zwischen den Strecken parallel den Tangentenrichtungen. Man braucht daher bloss deren Durchschnittspunkt von O in einen Punkt O'

---

* Z. B. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung u. s. w.

bei Festhaltung des eingeschlossenen Winkels zu verlegen derart, dass $M'N'$ senkrecht steht auf den einschliessenden Strecken $O'M'$, $O'N'$, um sofort den Krümmungshalbmesser für M in Gestalt der Strecke $\overline{O'M'}$ zu erhalten. Es wird also O auf dem Kreise durch O, welcher a in M' berührt, zu verschieben sein, bis der erreichte Punkt O' das andere Ende des Durchmessers mit M' als dem einen Ende bildet. Die erhaltene Strecke wird aber ohne weiteres auch von der Normalen n' durch M' zu OM' auf der Geraden OM'_0 (senkrecht zu a) abgeschnitten, in Gestalt der Strecke OC', wo C' der Schnittpunkt von OM'_0 und n' ist (Fig. 2).

Fig. 3.



Somit ist der Krümmungshalbmesser für den beliebigen Kurvenpunkt M gleich dem Durchmesser des Kreises durch M', welcher in O die Parallele a' zu a berührt.

Klappt man nun das Dreieck $OM'C'$ (Fig. 2) um und legt O auf M (Fig. 3), M' auf den Ordinatenfusspunkt M_x von M, so fällt $M'C'$ mit der Abscissenaxe zusammen und OC' mit der auswärts gezogenen Kurvennormale in M; ursprünglich stehen ja die Schenkel des Winkels $M'OC'$ senkrecht auf je einem Schenkel von M_xMC, wo C den Schnittpunkt der Kurvennormale mit der Abscissenaxe bedeutet.

Also ist die letztere erfüllt von den Spiegelbildern aller Krümmungsmittelpunkte der Kettenlinie bezüglich der ihnen einzeln zugehörigen Kurventangenten. Oder: Das Stück jeder Kurvennormale zwischen Kurve und Abscissenaxe ist gleich dem Krümmungshalbmesser auf dieser Normalen.

Die Abscissenaxe ist also als „Leitlinie" der Kettenlinie zu bezeichnen. Sie ist des weitern noch ausgezeichnet dadurch, dass sie im Verein mit der Ordinatenaxe (durch M_0), der Ordinate des Kurvenpunktes M und dem Bogen M_0M ein dem Bogen proportionales Flächenstück begrenzt; d.h.: ist die Ordinate des tiefsten Punktes M_0, oder — was dasselbe ist — dessen Krümmungshalbmesser Längeneinheit, so ist der Maßzahl nach der Bogen M_0M gleich der Fläche zwischen Ordinatenaxe, Abscissenaxe, Kurve und Ordinate des Kurvenpunktes M. Es ist ja jedes unendlich schmale Dreieck M_xMN (Fig. 1), wo MN benachbarte Kurvenpunkte sind, symmetrisch kongruent dem entsprechenden Dreieck $OM'N'$ (Fig. 2), da ja die Winkel M_xMN und $OM'N'$ übereinstimmen, und gleich dem halben Flächenzuwachs beim Übergang von M zu N.

Projiziert man (Fig. 3) den Ordinatenfusspunkt M_x von M nach D auf die Tangente von M, so ist das Dreieck M_xMD symmetrisch kongruent dem Dreiecke $OM'M'_0$ (Fig. 2), da ja

$$\overline{M_xM} = \overline{OM'} \quad \text{und} \quad \sphericalangle DMM_x = \sphericalangle M'_0M'O.$$

Folglich haben die Projektionen M_x aller Kurvenpunkte von den zugehörigen Tangenten einen gleichen Abstand von der Grösse des Krümmungshalbmessers im tiefsten Punkt der Kettenlinie. Dagegen ist die Projektion der Ordinate eines Punktes auf dessen Tangente stets gleich dem Bogen von diesem Punkte bis zum tiefsten Punkt.

Die Kurve der D erhält man also auch durch Abwickeln eines Fadens von der Kettenlinie mit dem freien Ende in M_0, sie ist daher eine Evolvente der Kettenlinie. Mit Rücksicht auf die Konstanz von DM_x, der „Tangente" der D-Kurve, kann man sagen: Bei der Kettenlinienevolvente durch den tiefsten Punkt der Kettenlinie sind die Tangentenstücke bis zur Leitlinie der Kettenlinie sämtlich gleich dem Krümmungshalbmesser im tiefsten Punkte der letztern, sie ist eine „Tractorie".

Der blosse Anblick der Hilfszeichnung (Fig. 2) zeigt die Beziehungen zwischen der Ordinate y, der Bogenlänge s, dem Tangentenneigungswinkel α, dem Krümmungshalbmesser ϱ und der Fläche f bei der gewählten Längeneinheit:

$$f = \operatorname{tg} \alpha = s, \quad \sec \alpha = y, \quad \varrho = y^2 = 1 + s^2 = \sec^2 \alpha = 1 + f^2.$$

Um die Beziehung zwischen y und der Abscisse x zu finden, seien folgendermaßen zwei sehr einfache Hilfskurven (Fig. 4) eingeführt.* Die eine ist der Ort des in M_0 anfangs befindlichen Fadenendes, falls das Fadenstück M_0M vom jeweiligen Kettenlinienpunkte M aus vertikal aufwärts gespannt wird, die andere der Ort desselben bei Abwärtsspannung des Stückes M_0M. Von den drei Punkten mit gleicher Abscisse, deren einer ein Punkt M ist, während die andern, P_1, P_2, den beschriebenen Kurven angehören, liegt also M immer in der Mitte von $\overline{P_1P_2}$. Man frage nun nach der Tangentenrichtung in $P_1(P_2)$. Rückt

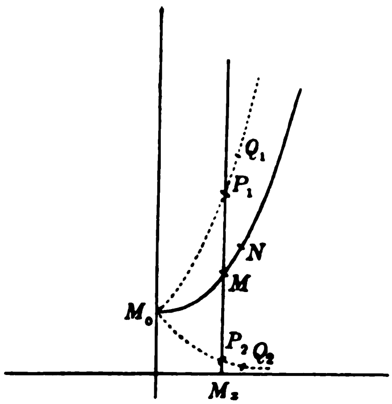
* Vergl. die rechnende Ableitung von Gretschel, Elem. Ableit. d. Haupteigenschaften der Kettenlinie, Grunerts Archiv, 43. T.

M nach dem benachbarten N auf der Kettenlinie, so gelangt das aufwärts geführte Fadenende von P_1 nach Q_1, dessen Ordinatenzuwachs gegenüber P_1 augenscheinlich gleich ist dem von N gegenüber M, jedoch vergrössert um die Verlängerung des Fadenstückes M_0M, also vergrössert um das Element MN. Oder: Man kommt von P_1 zu Q_1 durch Fortschreiten parallel der Tangente in M um das Element $\overline{MN}$ und hierauf um ebensoviel vertikal aufwärts, und von P_2 zu Q_2 ebenso durch schliessliches Abwärtsschreiten um $\overline{MN}$. Natürlich dürfen die Fortschritte bei gehöriger Richtung auch endlich lang bei gleicher Grösse untereinander sein, wenn man nur in Punkte auf den Tangenten in $P_1(P_2)$ gelangen will, und man braucht also in der Hilfszeichnung (Fig. 2) nur von M' auf- und abwärts die Strecke $\overline{OM}$ aufzutragen auf a bis P'_1, P'_2, um Strecken OP'_1, OP'_2 von den verlangten Tangentenrichtungen zu erhalten. Bei $\overline{OM'}_0 = 1$ ist aber $\overline{M'_0P'_1}$ zugleich Richtungskoeffizient der Tangente in P_1, $\overline{M'_0P'_2}$ der absolute Wert des offenbar negativen Richtungskoeffizienten für P_2 bei positiver Abscisse, und da auch

$$\overline{M'_0P'_1} = \overline{M'_0M'} + \overline{OM'},$$
$$\overline{M'_0P'_2} = \overline{OM'} - \overline{M'_0M'},$$

so sind $M'_0P'_1$, $M'_0P'_2$ andererseits die Ordinaten von P_1 und P_2 selbst, und man kann sagen: Längs der Kurven P_1, P_2 sind die Richtungskoeffizienten der Tangenten gleich den zugehörigen Ordinaten und zwar bei P_1 mit demselben, bei P_2 mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Fig. 4.



Dasselbe ergiebt sich auch so: die P_1-Kurve z. B. erhält man durch Summieren der Kettenlinienordinaten und der entsprechenden einer Kurve, deren Ordinaten die Bogenstücke, also, nach dem frühern, die Flächenstücke längs der Kettenlinie sind. Summiert man nun zusammengehörige Richtungskoeffizienten der Kettenlinie und der neuen Kurve, also die Bogen der erstern und deren Ordinaten (der Richtungskoeffizient der Flächeninhaltskurve ist ja Endordinate der Hauptkurve), so erhält man wieder die Ordinaten der P_1, aber diese sind zugleich Richtungskoeffizienten der Summenkurve, d. i. P_1. Gleiches gilt bei P_2.

Somit nimmt die Ordinatengrösse sowohl bei P_1 als bei P_2 bei konstantem, unendlich kleinem Abscissenzuwachs je einen konstanten Faktor an und daher auch bloss vom Abscissenzuwachs abhängige Faktoren bei endlicher Grösse des letztern. Der Logarithmus (in irgend einem

System) der Ordinate, welcher für $x = 0$ verschwindet, wächst (nimmt ab) bei ein und demselben Abscissenfortschritt um ein und denselben Betrag, ist also der Abscisse proportional, so dass man für P_1 jedenfalls hat

$$y = b^{k_1 x} = m^x,$$

für P_2 aber

$$y = b^{-k_2 x} = n^{-x},$$

wo b die Basis der Logarithmen bedeutet und k_1, k_2, m, n positive Zahlen sind. Es kommt nur auf die Bestimmung von m und n an. Es ist ja der Richtungskoeffizient gleich bez. entgegengesetzt gleich der Ordinate, welche beim Wachsen der Abscisse um ξ einen Zuwachs

$$m^{x+\xi} - m^x = y(m^\xi - 1) \quad \text{bez.} \quad n^{-x-\xi} - n^{-x} = y(n^{-\xi} - 1)$$

erfährt. Also muss bestehen

$$m^\xi - 1 = \xi, \quad m = \lim\left[(1+\xi)^{\frac{1}{\xi}}\right]_{\xi=0},$$

$$n^{-\xi} - 1 = -\xi, \quad n = \lim\left[(1-\xi)^{-\frac{1}{\xi}}\right]_{\xi=0}.$$

Bei Beschränkung auf bloss elementare Mittel würde man die Gleichheit von m und n zeigen durch den Nachweis für

$$\frac{m}{n} = \lim\left[(1-\xi^2)^{\frac{1}{\xi}}\right]_{\xi=0} = 1,$$

und dieser ist ja geliefert durch die Entwickelung

$$\frac{m}{n} = \lim\left[1 - \xi + \frac{1(1-\xi)}{1\cdot 2}\xi^2 - \cdots\right]_{\xi=0},$$

worin der Bestandteil ausser 1 augenscheinlich kleiner ist als

$$\xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots = \frac{\xi}{1-\xi},$$

was für $\xi = 0$ verschwindet. Mit der Bezeichnung e für m und n ergiebt sich somit die Kettenliniengleichung

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

bei Annahme der Längeneinheit gleich dem Krümmungshalbmesser im tiefsten Punkte. Hat dieser aber die Länge r, so hat man

$$y = \frac{r}{2}\left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right)$$

als Gleichung der Kettenlinie bei Wahl der Leitlinie zur Abscissenaxe.

Berichtigungen zu Steiner's Gesammelten Werken.

Von R. Sturm in Breslau.

In Steiner's Gesammelten Werken, für deren Herausgabe wir Geometer der Akademie der Wissenschaften in Berlin nicht dankbar genug sein können, besitzen wir eine äusserst wertvolle Fundgrube für Aufgaben aus der synthetischen Geometrie. Ich habe schon vielfach Themen für Dissertationen und Prüfungsarbeiten aus ihnen entnommen.

Bei der Herausgabe war es natürlich unmöglich, die grosse Fülle ohne Beweis mitgeteilter Sätze auf ihre Richtigkeit zu prüfen; und so sind denn eine Zahl von nicht richtigen Behauptungen stehen geblieben. Ich glaube, dass eine Liste von derartigen Irrtümern oder Versehen allen Geometern willkommen sein wird; auf Vollständigkeit kann sie selbstverständlich keinen Anspruch machen; sie veranlasst aber vielleicht Andere zu Ergänzungen.

Bd. I.: S. 9 Z. 19 u. v. ist hinzuzufügen: oder in einer Geraden (briefliche Mitteilung von Reye).

S. 11 ist VIII so zu verbessern: Der Ort des Scheitels ... besteht aus drei Kurven zweiten Grades, von denen jedoch nur zwei reell sind. Von diesen reellen Kurven liegt freilich beim Ellipsoid und zweimanteligen Hyperboloid die eine, eine Ellipse bezw. Hyperbel, im Innern, so dass von ihren Punkten nicht reelle Berührungskegel kommen; beim einmanteligen Hyperboloide aber kommen von allen Punkten beider reellen Kurven reelle Tangentialkegel. Vergl. auch Bd. II S. 724 Aufgabe erster Absatz, wo „eine Linie" ein sehr unbestimmter Ausdruck ist (Mitteilung von Reye).

S. 128 Z. 10, 9 v. u. l.: so schneiden sich auch die beiden übrigen und zwar im allgemeinen in einem andern Punkte; vergl. Nr. 78 S. 454 desselben Bandes, wo der richtige Satz steht.

S. 151 Anm. Satz III ist nur richtig, wenn A, B selbst zu zwei Kanten des Kegels parallel sind, und ebenso ist Satz IV nur richtig, wenn beide Kegelschnitte den unendlich fernen Kegelschnitt des Kegels zweimal treffen (Mitteilung von Reye).

S. 159 Lehrsatz 4. Es ist übersehen worden, dass bei Vielecken von gerader Seitenzahl es stets zwei Arten giebt; gerade die einfachere Art fehlt. Ferner fehlt beim Dreiecke das Doppelzeichen $\pm$ vor $2Rr$, und ähnliches gilt beim Fünfeck. Die Formeln sind daher so zu vervollständigen bezw. umzuändern:

I. für ein Dreieck: $(R^2 - a^2)^2 - 4R^2r^2 = 0$;

II. für ein Viereck erster Art: $R = a$,
für ein Viereck zweiter Art: $(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2) = 0$, wie bei Steiner;

III. für ein Fünfeck:

$$(R^2 - a^2)^6 - 12(R^2 - a^2)^4 R^2 r^2 + 16(R^2 - a^2)^2 R^2 r^4 (R^2 + 2a^2) - 64 R^2 r^6 a^4 = 0;$$

IV. für ein Sechseck erster Art: $(R^2 - a^2)^2 - 4r^2 a^2 = 0$,
für ein Sechseck zweiter Art wie bei Steiner;

V. für ein Achteck erster Art: $(R^2 - a^2)^4 - 16 R^2 r^4 a^2 = 0$,
für ein Achteck zweiter Art wie bei Steiner.

Vergl. meine Liniengeometrie Bd. I S. 35 erste Anmerkung.

S. 445 Z. 2 v. o. streiche: gleichseitiges (Mitteilung von Reye).

S. 527 Anm. 25). Im Originale stand: „Wenn vier beliebige feste Ebenen gegeben sind, von welcher krummen Fläche werden dann alle Geraden berührt, die von denselben in einem und demselben gegebenen Doppelverhältnisse geschnitten werden? Dieser Aufgabe steht eine andere zur Seite, welche?"

Damit ist natürlich die duale gemeint, in welcher vier Punkte gegegeben sind und es sich um den Ort der Geraden handelt, von denen nach ihnen vier Ebenen von dem gegebenen Doppelverhältnisse gehen. Steiner hat sich insofern geirrt, dass der Ort nicht der Komplex der Tangenten einer Fläche ist; aber er hat doch wenigstens richtig einen Komplex, einen dreifach unendlichen Strahlenort, vermutet. Der Ort der fraglichen Geraden ist bekanntlich der sogenannte tetraedrale oder Reye'sche Komplex und zwar, wenn die Punkte des dualen Problems die Ecken des Tetraeders der Ebenen des ursprünglichen Problems sind, in beiden Fällen der nämliche.

Die Verbesserung in Anm. 25) ist weniger richtig, als was Steiner vermutete; denn erstens wird als Ort eine Kongruenz bezeichnet, also ein Ort von niedrigerer Mannigfaltigkeit, und dann findet noch eine Verwechselung der beiden dualen Probleme statt. Das Sekantensystem (oder besser die Kongruenz der Doppelsekanten) einer kubischen Raumkurve, welches fälschlich in der Anm. als Ort bezeichnet wird, ergiebt sich, wenn fünf Punkte gegeben sind, durch alle Geraden, von denen Ebenen nach ihnen gehen, deren Büschel einem gegebenen Grundgebilde von fünf Elementen projektiv ist. Ersetzt man im ursprünglichen Steinerschen Probleme die vier Ebenen durch fünf, so ergiebt sich die Kongruenz der Schmiegungsaxen (Schnittlinien von Schmiegungsebenen) einer kubischen Raumkurve.

Vergl. hierzu: Reye, Geometrie der Lage, 1. Aufl. Abt. II 15. Vortrag, 3. Aufl. Abt. III 1. Vortrag, H. Müller, Math. Annalen Bd. 1 S. 413, R. Sturm, ebenda Bd. 6 S. 513, sowie meine Liniengeometrie Bd. I S. 9 und S. 333 flg.

Das in Anm. 25) gemachte Versehen ist leider übergegangen in den dritten Abdruck von Steiners Systematischer Entwickelung (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 82, 83). Und in Schröters Buch über die Flächen zweiter Ordnung und die Raumkurven dritter Ordnung S. 233 steht auch als Ort der Geraden bei vier gegebenen Punkten die Kongruenz der Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve; es werden da ntereinander ein richtiger und ein falscher Satz (durch „oder“ verbunden) zwei verschiedene Fassungen der nämlichen Eigenschaft ausgesprochen.*

Bd. II: S. 103 Z. 14 v. u. streiche „positiven“.

S. 114. Die in den letzten drei Zeilen behauptete Konstanz ist nur htig, wenn überdies irgend zwei aus den Ecken gebildete Gruppen den-ben Punkt mittlerer Entfernung haben. Findet bloss $\Sigma \sin 2A = 0$ statt, treten an Stelle der Kreise gerade Linien, welche senkrecht sind zu n Verbindungslinien der Punkte mittlerer Entfernungen irgend zweier s den Ecken gebildeten Gruppen von Punkten; vergl. Journal f. Math. l. 97 S. 61.

S. 163 Z. 2, 1 v. u. streiche: sie ist eine kürzeste Linie für die letztere.

S. 165 Z. 15, 16 v. o. l.: sind beide gleich gewunden (Mitteilung von eye).

S. 176 Z. 12 v. u. lies 1 statt h.

S. 199. In Lehrsatz 23 ist die Umkehrung, nach welcher unter allen guren von gleichem Inhalt, deren Grenzlinie ... besteht, das Kreisstück e kleinste Summe L jener Begrenzungslinien hat, vorsichtiger zu fassen, da cht immer ein Kreisstück möglich ist; es ist die Bedingung hinzuzufügen: enn aus jenen Begrenzungslinien und dem Inhalte ein Kreisstück mög-ch ist.

S. 201 Nr. 30, S. 254 Nr. 8 I und S. 261 Nr. 20, 21, sowie S. 734 nm. 16) bis 18). Dem Lehrsatz: „Von allen Linien beliebiger Form, aber gebener Länge L, welche zwei beliebige Punkte A, B auf den Schenkeln nes gegebenen Winkels verbinden, schliesst der Kreisbogen von dieser änge um den Scheitel C des Winkels als Centrum die grösste Fläche ein“, ektorsatz) ist die Beschränkung hinzuzufügen, dass der Winkel ein konkaver i; im Falle eines konvexen Winkels liefert eine andere Figur das Maximum ergl. Journal f. Math. Bd. 96 S. 48).

S. 238 Nr. 64 I ist zu erwähnen, dass die Ergebnisse nur für ein lches einem Kreise eingeschriebenes Viereck gelten, das den Mittelpunkt s Kreises einschliesst. Hinsichtlich des anderen Falls, sowie auch des umpfwinkligen Dreiecks (da in II der Satz auf das spitzwinklige beschränkt ird) vergl. a. eben a. Orte S. 64—66.

---

* Es möge hier gestattet sein, auf zwei andere Mannigfaltigkeitsversehen in iesem sonst so wertvollen Buche aufmerksam zu machen:

Auf S. 240—241 wird eine Eigenschaft für 7 Punkte einer Raumkurve dritter rdnung besprochen. Damit aber 7 Punkte derselben kubischen Raumkurve an-ehören, muss diese Eigenschaft in zwei verschiedenen Weisen (für zwei der Punkte je als siebenten) erfüllt werden; denn dass 7 Punkte auf der nämlichen aumkurve liegen, ist eine doppelte Bedingung.

Und S. 702 (und ähnlich S. 40 des Schröterschen Buches über die Raumkurven ierter Ordnung erster Spezies) steht: Der Büschel von Raumkurven vierter Ord-ung in einem Flächennetze oder -bündel zweiter Ordnung ist ein Gebilde von infach-unendlicher Mannigfaltigkeit; es muss natürlich: Bündel und doppelt-endlich heissen.

S. 289 Z. 6 v. o. l. $\sqrt{2}$ statt $\sqrt{3}$.

S. 306 Nr. IV. Bei diesem Satze, dem Analogon zum Sektorsatz, ist wohl auch eine Einschränkung notwendig.

S. 331 Z. 14 v. o. l. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ statt $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (Dörholt, Über einem Dreiecke ein- und umgeschriebene Kegelschnitte, Dissertation Münster 1884).

S. 347 Z. 16 v. u. l. nur r st. nur s und r (vergl. Rathke: Über zwei Konfigurationen von Punkten, Dissertation Marburg 1885).

S. 452. Vor Anfang der 4. Zeile v. o. ist entsprechend dem Original einzuschalten: Danach berührt die E^2 nur noch den Kreis A^2 reell doppelt bis $l = u$ wird, wo sie ihn in U vierpunktig berührt und zum Krümmungskreise hat.

S. 460 Z. 16 v. o. l. $>$ st. $<$ (wie im Original).

S. 461. Die Formeln in den drei letzten Zeilen sind auf S. 790 falsch verbessert; sie lauten richtig:

$$\lambda^2 = \frac{\mathfrak{d}}{4\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(4\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 - \mathfrak{d}d^2),$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\mathfrak{b}}{4\mathfrak{a}\mathfrak{d}}(4\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 - \mathfrak{d}d^2),$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\mathfrak{a}}{4\mathfrak{b}\mathfrak{d}}(4\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 - \mathfrak{d}d^2).$$

(Hinsichtlich der letzten drei Verbesserungen vergl. Fiedler, Acta mathematica Bd. 5 S. 331.)

S. 526 Z. 4 v. o. l. 20 st. 25 — Z. 17 v. o. l. zwölften st. sechsten.

S. 575 Z. 2 v. o. l. $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ st. $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$.

S. 591 Z. 13 v. o. l. Die beiden Zahlen x und y sind:

$$x = \frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4), \quad y = m(m-2)(m-4)(m+2).$$

(Wegen dieser Verbesserungen vergl. man B. Sporer, Zeitschr. f. Math. Bd. 37 S. 67, 358, Bd. 40 S. 168, 169; ebenso Bd. 37 S. 346 eine Bemerkung zu der Anm. auf S. 586.)

Auf S. 495, 605 (Plückersche Formeln) hätte doch Plücker erwähnt werden müssen.

S. 659 ist der letzte Absatz der Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung folgendermassen zu verändern: Es giebt doppelt unendlich viele Geraden D, deren zweite Polare sich auf eine Gerade d reduziert; die von Steiner erwähnten 100 Geraden, denen allein er diese Eigenschaft zuschreibt, zeichnen sich unter jenen durch die — freilich von ihm auch erwähnte — Eigenschaft aus, dass je vieren dieselbe Gerade d zugehört (vergl. Salmon, Analytische Geometrie des Raums 1. Aufl. der Fiedler'schen deutschen Bearbeitung Bd. II S. 412; Cremona, Mémoire sur les surfaces du troisième ordre, Journal f. Math. Bd. 68 S. 53, 62; R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung S. 110, 168).

S. 663 Nr. 2 ist so zu verbessern: Nimmt man in jeder durch den Punkt p gehenden Geraden A einen solchen Punkt q, dessen Abstand von der „mittlere Faktor" zwischen den Abschnitten der Geraden ist, so dass:

$$pq^n = \pm pa_1 \cdot pa_2 \cdots pa_n$$

st, so besteht der Ort dieses Punktes q aus zwei Kurven n^{ter} Ordnung: Q^n, Q'^n. Dieselben haben die durch p parallel zu den Asymptoten der C^n gezogenen Geraden zu n-punktig berührenden Asymptoten, berühren sich also auch untereinander in ihren unendlich fernen Punkten n-punktig. Im Falle eines geraden n ist p für beide Kurven Mittelpunkt, während wenn n ungerade ist, sie symmetrisch zueinander liegen in Bezug auf p. Jede der beiden Kurven hat mit C^n noch $n(n-1)$ Punkte gemein. Auf den Geraden von p nach diesen $2n(n-1)$ Punkten r gilt, wenn $a_1, a_2, .. a_{n-1}$ die übrigen Schnitte mit C^n sind:

$$pr^{n-1} = \pm pa_1 \cdot pa_2 \ldots pa_{n-1}.$$

Dass durch die $2n(n-1)$ Punkte r Kurven $(2n-2)^{ter}$ Ordnung gehen, ist zu streichen, weil es selbstverständlich ist.

Der letzte Absatz von Nr. 2 lautet richtiger so:

Unter den Geraden durch p giebt es n solche, bei denen das Produkt $pa_1 \cdot pa_2 \cdots pa_n$ einen extremen Wert annimmt. Sind diese Geraden sämtlich reell, so handelt es sich um lauter Minima, wenn alle Asymptoten von C^n reell sind; jedes Paar imaginärer Asymptoten von C^n bewirkt, dass an die Stelle eines Minimums ein Maximum tritt.

Diese n ausgezeichneten Geraden sind Normalen von Q^n und Q'^n, und zwar jede eine n-fache für jede der beiden Kurven derartig, dass, wofern die Gerade reell ist, bei ungeradem n auf jeder Kurve ein reeller Fusspunkt vorhanden ist, bei geradem n aber entweder nur zwei und dann auf derselben Kurve befindliche Fusspunkte reell sind oder kein einziger.

Der Punkt p ist nicht ein vielfacher singulärer Punkt, wie Steiner behauptet; er gehört keiner der beiden Kurven Q^n an.

S. 665 Z. 6, 7 v. o. ist die Frage nach der Enveloppe der Kreise keine richtige; denn es entsteht — in gleicher Weise bei der Hyperbel wie bei der Ellipse — ein Büschel von Kreisen.

S. 667 Z. 9 v. o. l.: so durchläuft der Punkt q eine Gerade.

(Vergl. hierzu: R. Molke, Über diejenigen Sätze Steiner's, welche sich auf die durch einen Punkt gehenden Transversalen einer Kurve n^{ter} Ordnung beziehen, Dissertation Breslau 1897.)

S. 671 Z. 15, 16 v. o. l. r st. α — Z. 25 v. o. l. $A_1 B_1 C_1$ st. ABC.

S. 673 Z. 3 v. u. l. $(d^2 - r^2)$ st. $(r^2 - a_1^2 - d^2)$.

S. 676 Z. 11 v. o. l. sämtlich Ellipsen oder sämtlich Hyperbeln.

S. 677 Z. 17 v. o. l. $\frac{1}{16}$ st. 4^4.

(Man vergl. hierzu die oben erwähnte Dissertation von Dörholt.)

S. 680 Z. 11, 12 v. o. l. auch dem Vorzeichen nach gleiche Produkte der Halbaxenquadrate st. gleiches Axenprodukt — Z. 15 v. o. l. absolute Werte der genannten Produkte st. Axenprodukte.

S. 682 Z. 14 v. u. Die Umkehrung ist nicht richtig — Z. 1 v. u. „geometrisch konstruierbar“ kann nicht für alle Fälle gelten.

S. 683. Die zu den Fällen 16 bis 21 gehörigen Werte von L werden von Wiman (Zeitschr. f. Math. Bd. 40 S. 296) auf 22, 19, 26, 42, 33, 51 reduziert.

S. 690 Z. 13 v. o. l. $a\beta\gamma$ st. $\alpha\beta\gamma$.

S. 710 Z. 19 v. o. l. $\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ st. $K_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ — Z. 8 v. u. l. Hyperbel H^2.

S. 713 Z. 7, 9 v. o. sind Maximum und Minimum zu vertauschen.

(Vergl. R. Pyrkosch, Über Poncelet'sche Dreiecke, insbesondere solche, welche konfokalen Kegelschnitten ein- und umgeschrieben sind. Dissertation Breslau 1897.)

S. 728 letzter Absatz: Der dort geführte — aber nur für das spitzwinklige Dreieck geltende — Beweis rührt nicht von Steiner, sondern von H. A Schwarz her. In ihm l. $a\alpha$ und $a_4\alpha_4$ st. $a\alpha + a_4\alpha_4$.

S. 739 Anm. 25) erster Absatz. Zur Feststellung der richtigen Zahl 3264 der fünf gegebene Kegelschnitte berührenden Kegelschnitte ist auch Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie S. 338 zu nennen.

Die in derselben Anmerkung auf Grund einer Notiz aus dem Nachlass Steiner's besprochene Aufgabe: „Einem gegebenen Dreiecke ein anderes von kleinstem Umfange umzuschreiben“ hat doch wohl nicht die dort erwähnte Lösung; vielmehr bildet das gegebene Dreieck selbst die Lösung, und verliert damit das Problem alles Interesse.

Die Bedingungen unter denen $\int \frac{x^{n+\mu}\,dx}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}}$ algebraisch ist.

Von Oberlehrer **P. Kokott** in **Gr. Strehlitz.**

Wenn $\int \frac{x^{n+\mu}\,dx}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}}$ (n und μ positiv) algebraisch ist, so kann man der algebraischen Funktion die Form

$$C\cdot(p_{\mu+1}x^{\mu+1}+p_\mu x^\mu+\cdots+p_2x^2+p_1x-1)\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}$$

geben. Durch Differentiation beider Seiten erhält man:

$$\begin{aligned}x^{n+\mu} = {} & C[(\mu+1)p_{\mu+1}x^\mu+\cdots+2p_2x+p_1][1+\varepsilon_1x+\cdots\cdot\varepsilon_nx^n] \\ & +\frac{C}{2}[p_{\mu+1}x^{\mu+1}+\cdots+p_1x-1][\varepsilon_1+2\varepsilon_2x+\cdots+n\varepsilon_nx^{n-1}].\end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten erhält man:

$$\varepsilon_k p_1 + 2\varepsilon_{k-1}p_2 + \cdots + (\mu+1)\varepsilon_{k-\mu}p_{\mu+1}$$
$$+\frac{1}{2}\{-(k+1)\varepsilon_{k+1} + kp_1\varepsilon_k + \cdots + (k-\mu)p_{\mu+1}\varepsilon_{k-\mu}\} = 0,$$

er

$$(k+1)\varepsilon_{k+1} = p_1(k+2)\varepsilon_k + p_2(k+3) + \cdots$$
$$+ p_{\mu+1}(k+\mu+2)\varepsilon_{k+\mu} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ausserdem ist:

$$p_1(n+2)\varepsilon_n + p_2(n+3)\varepsilon_{n-1} + \cdots + p_{\mu+1}(n+\mu+2)\varepsilon_{n-\mu} = 0,$$
$$p_2(n+4)\varepsilon_n + p_3(n+5)\varepsilon_{n-1} + \cdots p_{\mu+1}(n+\mu+3)\varepsilon_{n-\mu+1} = 0,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$p_\mu(n+2\mu)\varepsilon_n + p_{\mu+1}(n+2\mu+1)\varepsilon_{n-1} = 0,$$
$$C = \frac{1}{\varepsilon_n p_{\mu+1}\left(\frac{n}{2}+\mu+1\right)}.$$

Im ganzen erhält man $n+\mu+1$ Gleichungen mit $n+\mu+2$ Unbekannten. Es sei noch bemerkt, dass die letzten Gleichungen bis auf die Gleichung für C in dem allgemeinen Ausdruck für ε_{k+1} enthalten sind, wenn man $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots \varepsilon_{n+\mu}$ gleich Null setzt. Für die einzelnen ε-Grössen ergiebt sich:

$$\varepsilon_0 = 1$$
$$\varepsilon_1 = 2p_1$$
$$\varepsilon_2 = 3p_1^2 + 2p_2$$
$$\varepsilon_3 = 4p_1^3 + 6p_2p_1 + 2p_3$$
$$\varepsilon_4 = 5p_1^4 + 12p_1^2p_2 + 6p_1p_3 + 2p_4 + 3p_2^2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Um den allgemeinen Ausdruck für ε_k als Funktion der p-Grössen zu finden, ist es zweckmässig p_ϱ als eine Grösse ϱ^{ter} Dimension aufzufassen; es ist dann klar, dass ε_k nur aus Gliedern von der Dimension k bestehen kann. Man hat also

$$\varepsilon_k = \Sigma C_\varrho p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_{k+1}^{\lambda_{\mu+1}},$$

wobei $\lambda_1 + 2\lambda_2 + (\mu+1)\lambda_{\mu+1} = k$ ist. Um C_ϱ zu finden, behaupten wir, dass man zur Summe der λ-Grössen 1 hinzuzählen muss, dann die Fakultät zu bilden hat und dieselbe durch das Produkt der Fakultäten der einzelnen λ-Grössen dividieren muss. Gesetzt, diese Regel gelte für alle Indices, welche gleich oder kleiner als k sind, dann gilt sie auch für $k+1$. Man hat nämlich:

$$(k+1)\varepsilon_{k+1} = p_1(k+2)\varepsilon_k + \cdots + p_{\mu+1}(k+\mu+2)\varepsilon_{k-\mu}$$
$$= \Sigma C_\varrho p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_{\mu+1}^{\lambda_{\mu+1}}.$$

Hierbei muss $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + (\mu+1)\lambda_{\mu+1} = k+1$ sein.

Fassen wir einen bestimmten Term $p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_{\mu+1}^{\sigma_\mu+1}$ ins Auge, so ist derselbe entstanden aus dem Term

$$
\begin{array}{lllll}
p_1^{\sigma_1-1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_{\mu+1}^{\sigma_\mu+1} & \text{aus der Entwickelung von } \varepsilon_k \\
p_1^{\sigma_1} \; p_2^{\sigma_2-1} \ldots p_{\mu+1}^{\sigma_\mu+1} & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } \varepsilon_{k-} \\
p_1^{\sigma_1} \cdot p_2^{\sigma_2} \ldots p_{\mu+1}^{\sigma_\mu+1-1} & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, } \varepsilon_{k-}
\end{array}
$$

Der Koeffizient von $p_1^{\sigma_1-1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_{\mu+1}^{\sigma_\mu+1}$ heisst nach der gemachten Voraussetzung

$$\frac{\Sigma \sigma!}{(\sigma_1-1)!\ \sigma_2! \ldots \sigma_{\mu+1}!};$$

die andern entsprechend

$$\frac{\Sigma \sigma!}{\sigma_1!\ (\sigma_2-1)! \ldots \sigma_{\mu+1}!} \text{ u. s. f.}$$

Der Koeffizient von $p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots . p_{\mu+1}^{\sigma_\mu+1}$ in ε_{k+1} heisst also:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Sigma \sigma!}{\sigma_1!\ \sigma_2! \ldots \sigma_{\mu+1}!}\{(k+2)\sigma_1 + (k+3)\sigma_2 + \cdots + (k+\mu+2)\sigma_{\mu+1} \ldots\} \\
&= \frac{\Sigma \sigma!}{\sigma_1!\ \sigma_2! \ldots \sigma_{\mu+1}!}\{k\Sigma\sigma + \Sigma\sigma + k + 1\} \\
&= \frac{(k+1)(\Sigma\sigma+1)!}{\sigma_1!\ \sigma_2! \ldots \sigma_{\mu+1}!}
\end{aligned}
$$

(Sollten in dem Term ein oder mehrere Grössen p nicht vorkommen, oder nur in der ersten Potenz enthalten sein, so ist der Beweis derselbe.) $k+1$ fällt auf beiden Seiten weg; das Gesetz gilt für $k = 0, 1, 2$; folglich ist es allgemein giltig. Da n und μ von einander völlig unabhängig sind, gilt die Formel für ε_k auch für $n+1$, $n+2$ bis $n+\mu$. Nachdem wir so ε_k als Funktion von $p_1, p_2 \ldots p_{\mu+1}$ bestimmt haben, müssen wir jetzt diese Grössen selbst berechnen. Dazu dienen die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&p_1(n+2)\varepsilon_n + p_2(n+3)\varepsilon_{n-1} + \cdots + p_{\mu+1}(n+\mu+2)\varepsilon_{n+\mu} = 0 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad p_\mu(n+2\mu)\varepsilon_n + p_{\mu+1}(n+2\mu+1)\varepsilon_{n-1} = 0
\end{aligned}
$$

Dieselben sind äquivalent mit

$$\varepsilon_{n+1} = 0, \quad \varepsilon_{n+2} = 0 \ldots \varepsilon_{n+\mu} = 0;$$

da nur μ Gleichungen zur Verfügung stehen, aber $\mu+1$ Unbekannte zu berechnen sind, bleibt eine p-Grösse willkürlich; wir wählen dazu p_1.

C ist endlich bestimmt durch die Gleichung:

$$C = \frac{1}{\varepsilon_n\left(\frac{n}{2} + \mu + 1\right) p_{\mu+1}}.$$

Wir erhalten also folgenden Satz:

Damit $\int \frac{x^{n+u}\, dx}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_n x^n}}$ algebraisch sein kann, müssen die Koeffizienten des Radikals ganze ganzzahlige Funktionen von μ Grössen sein, welche selbst wieder die Wurzeln von μ nach dem Gesetze ε_k gebilleten Gleichungen sind. Diese Wurzeln sind die Koeffizienten desjenigen ganzen Polynoms, welches als Faktor vor das Radikal tritt. Der Koeffizient der ersten Potenz des Polynoms bleibt willkürlich.

Anwendungen.

Ist $\mu = 0$, so hat man:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}} = \frac{1}{\varepsilon_n\left(\frac{n}{2}+1\right)p_1}(p_1 x - 1)\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots \varepsilon_n x^n}.$$

Da p_2, p_3 etc. gleich Null sind, so sind gar keine Bedingungsgleichungen vorhanden; p_1 ist willkürlich;

$$\varepsilon_k = \frac{(k+1)!}{k!}p_1{}^k = (k+1)p_1{}^k;$$

lässt man noch p_1 mit x in eine Grösse aufgehen, so erhält man:

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{1+2y+3y^2+\cdots+(n+1)y^n}}$$
$$= \frac{1}{(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)}(y-1)\sqrt{1+2y+\cdots+(n+1)y^n}.$$

Ist $\mu = 1$, so hat man:

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_n\left(\frac{n}{2}+2\right)p_2}(p_2 x^2 + p_1 x - 1)\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\cdots+\varepsilon_n x^n}.$$

Die Gleichung für p_2 heisst dann

$$(n+2)p_1{}^{n+1} + (n+1)np_1{}^{n-1}p_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}p_1{}^{n-3}p_2{}^2$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}p_1{}^{n-5}p_2{}^3 + \cdots = 0.$$

Dividiert man beide Seiten durch $p_1{}^{n+1}$ und setzt man für

$$\frac{p_2}{p_1{}^2} = z,$$

so erhält man für gerade n von der Form $2p$, also ungerade $n+1$ von der Form $2p+1$:

$$1\binom{n+2}{1} + 2\binom{n+1}{1}z + 3\binom{n}{3}z^2 + \cdots + (p+1)\binom{p+2}{p+1}z^p = 0.$$

Für ungerade n der Form $2p-1$ also $n+1 = 2p$ heisst die Bestimmungsgleichung für z:

$$1\binom{n+2}{1} + 2\binom{n+1}{2}z + 3\binom{n}{3}z^2 + \cdots + (p+1)\binom{p+1}{p+1}z^p = 0.$$

Es sei hier nur flüchtig angedeutet, dass diese Gleichungen mit den Kreisteilungsgleichungen im Zusammenhange stehen. Sei z_1 eine Wurzel der Gleichung, so ist:

$$\varepsilon_2 = 3 + 2z_1, \quad \varepsilon_3 = 4 + 6z, \quad \varepsilon_4 = 5 + 12z_1 + 3z_1^2$$

u. s. f.; p_1 kann mit x in eine Grösse verschmolzen werden.

Z. B.:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 + 2x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots + \varepsilon_4 x^4}}$$
$$= \frac{1}{a \cdot \varepsilon_4 \cdot 4}(ax^2 + x - 1)\sqrt{1 + 2x + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 x^3 + \varepsilon_4 x^4}$$

$\varepsilon_5 = 0$ bedeutet:

$$12a^2 + 20a + 6 = 0, \quad a = -\frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{7}).$$

Hat man

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{1 + \frac{b}{a}x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\frac{b}{a}\left(\mu + \frac{3}{2}\right) p_\mu} \{p_\mu x^\mu + p_{\mu+1} x^{\mu+1} p_2 x^2 + p_1 x - 1\} \sqrt{1 + \frac{b}{a} x},$$

so ist $p_1 = \frac{b}{2a}$. Die übrigen Koeffizienten bestimmen sich linear hintereinander aus:

$$\begin{aligned}
&3p_1^2 + 2p_2 = 0, \\
&4p_1^3 + 6p_1p_2 + 2p_3 = 0 \\
&5p_1^4 + 12p_1^2p_2 + 6p_1p_3 + 2p_4 = 0. \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Über Gebiete von Schraubengeschwindigkeiten eines starren Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen.

Von

P. Somoff

in Warschau.

I. Die Grenzebenen erster Art.

1. In meiner früheren Arbeit: „Über Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen"* wurde eine Methode angedeutet, um mögliche Schraubenaxen und die Grenzen für die Parameterwerte der Schraubengeschwindigkeiten zu bestimmen, wenn ein starrer Körper sich auf feste Flächen stützt. Aber die Untersuchung von Gebieten aller möglichen Schraubenaxen, wie der Richtung so auch der Lage nach, bei verschiedener Zahl von Stützflächen, die Bestimmung der Bedingungen, bei welchen diese Gebiete sich möglichst zusammenziehen und endlich die Bestimmung der kleinsten Zahl von Stützflächen, welche den Körper festlegen können, und der dazu nötigen und hinreichenden Bedingungen wurde ausser Betracht gelassen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Fragen in möglichst allgemeiner Weise beantwortet.

2. Es seien ξ, η, ζ die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω und λ, μ, ν ihre Momente auf geradlinige rechtwinkelige Koordinatenaxen (x, y, z) bezogen, so dass

$$1)\qquad \lambda = y\zeta - z\eta, \quad \mu = z\xi - x\zeta, \quad \nu = x\eta - y\xi$$

ist. Da die absolute Grösse der Winkelgeschwindigkeit keine Rolle spielt, so wollen wir dieselbe der Bequemlichkeit wegen gleich Eins setzen. Es mögen ebenso ξ_i, η_i, ζ_i, λ_i, μ_i, ν_i die Koordinaten der Normale n_i einer Stützfläche Σ_i in ihrem Berührungspunkte zur Körperfläche S_i bedeuten. Die positiven Richtungen von ω und n_i werden wir so annehmen, wie es in dem oben citierten Aufsatze [§ 2]** gethan wurde. Im Falle einer Stützfläche genügen die möglichen Schraubengeschwindigkeiten einer der Bedingungen [§ 3]:

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, 42. Band, 1897, S. 133, 161.

** Der Kürze wegen werden wir weiter durch die Klammer [ ] die Citate aus der obengenannten Arbeit in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1897, bezeichnen, ohne jedesmal den Titel anzuführen.

2) $$p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$
oder
3) $$p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$
wo p den Parameter der Schraubengeschwindigkeit, δ_1 den kürzesten Abstand zwischen der Normale n_1 und der Schraubenaxe und φ_1 den Winkel zwischen diesen Geraden bezeichnet, wobei dieser Winkel nach der im [§ 3] gegebenen Regel bestimmt werden muss. Die Bedingung 2) entspricht dem Falle, dass ω mit der positiven Richtung der Stütznormale einen spitzen Winkel bildet und die Bedingung 3) dem Falle, dass dieser Winkel stumpf ist. Die bekannte Formel für das relative Moment zweier Vektoren benutzend, finden wir:

4) $$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\xi_1 \lambda + \eta_1 \mu + \zeta_1 \nu + \lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \zeta}{\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta}.$$

Da im Falle 2)
$$\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta > 0$$
und im Falle 3)
$$\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta < 0$$
ist, so kann man beide Fälle in einer Ungleichheit

5) $$(\lambda_1 + p\xi_1)\xi + (\mu_1 + p\eta_1)\eta + (\nu_1 + p\zeta_1)\zeta + \xi_1 \lambda + \eta_1 \mu + \zeta_1 \nu \geqq 0$$
vereinigen.

3. Bei Betrachtung von zwei oder mehreren Stützflächen spielt eine wichtige Rolle die Ebene

6) $$S_{ik} = A_{ik}\xi + B_{ik}\eta + C_{ik}\zeta + D_{ik} = 0,$$
wo
7) $$A_{ik} = (\eta_i \zeta - \zeta_i \eta)(\xi_k \xi + \eta_k \eta + \zeta_k \zeta) - (\eta_k \zeta - \zeta_k \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta),$$
8) $$B_{ik} = (\zeta_i \xi - \xi_i \zeta)(\xi_k \xi + \eta_k \eta + \zeta_k \zeta) - (\zeta_k \xi - \xi_k \zeta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta),$$
9) $$C_{ik} = (\xi_i \eta - \eta_i \xi)(\xi_k \xi + \eta_k \eta + \zeta_k \zeta) - (\xi_k \eta - \eta_k \xi)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta),$$
10) $$D_{ik} = (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta)(\lambda_k \xi + \mu_k \eta + \nu_k \zeta) - (\xi_k \xi + \eta_k \eta + \zeta_k \zeta)(\lambda_i \xi + \mu_i \eta + \nu_i \zeta).$$

Wir werden sehen, dass solche Ebenen, wenn ein System paralleler Schraubenaxen gegeben ist, entweder mögliche Schraubenaxen mit verschiedener Richtung der Winkelgeschwindigkeit von einander trennen oder auch überhaupt mögliche Schraubenaxen begrenzen. In beiden Fällen werden wir diese Ebenen **echte Grenzebenen erster Art** nennen und mit dem Symbole S'_{ik} bezeichnen. Im Falle von m Stützflächen giebt es $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Ebenen, welche durch die Gleichungen 6) bestimmt werden; nicht alle diese Ebenen sind aber echte Grenzebenen, wie wir es später sehen werden. Sind sie es nicht, so werden wir dieselben **unechte Grenzebenen erster Art** nennen und mit dem

Symbole S''_{ik} bezeichnen. Die Bezeichnung S_{ik} wollen wir für den Fall behalten, dass kein Unterschied zwischen den echten und unechten Grenzebenen gemacht wird.

4. Sind zwei Stützflächen Σ_1 und Σ_2 gegeben, so werden alle möglichen Schraubengeschwindigkeiten ausser der Ungleichheit 5) noch durch die folgende bestimmt:

$$11) \quad (\lambda_2 + p\xi_2)\xi + (\mu_2 + p\eta_2)\eta + (\nu_2 + p\zeta_2)\zeta + \xi_2\lambda + \eta_2\mu + \zeta_2\nu \geqq 0.$$

Stellen wir uns die Parameterkugel [§ 5] mit dem Mittelpunkte im Anfangspunkte der Koordinaten vor. Durch zwei zu den Stütznormalen senkrechte Diametralebenen wird die Oberfläche derselben in vier sphärische Zweiseite geteilt, welchen vier verschiedene Zeichenverbindungen der Cosinuse

$$12) \quad \xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta, \quad \xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta$$

entsprechen. Jeder Punkt der Kugelfläche bestimmt eine Richtung der Winkelgeschwindigkeit auf den Schraubenaxen eines Parallelenbündels. Den Punkten der beiden Zweiseite, für welche beide Grössen 12) positiv oder negativ sind, entsprechen Parallelenbündel solcher Schraubenaxen, auf welchen die Winkelgeschwindigkeit die eine oder auch die andere Richtung haben kann, je nachdem der Parameter grösser oder kleiner als jede der beiden Grössen

$$13) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist [§ 5]. Den Punkten der zwei anderen Zweiseite entsprechen solche mögliche Schraubenaxen, deren Parameterwerte in den Grenzen 13) eingeschlossen sind und bei denen die Winkelgeschwindigkeit nur die eine von den beiden Richtungen haben kann.

Unter den Schraubenaxen eines Parallelenbündels, welche dem ersten und zweiten Gebiete auf der Parameterkugel entsprechen, giebt es solche, für welche die beiden Grenzen 13) der Parameterwerte zusammenfallen, so dass p alle möglichen Werte bekommen kann; diese Axen genügen der Bedingung

$$14) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 0.$$

Wenn man die Formel 4) benutzt und die Ausdrücke 1) einführt, bekommt man:

$$15) \quad S_{12} = A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} = 0,$$

wo die Koeffizienten nach dem Schema des § 3 gebildet sind. Diese Ebene ist, nach dem oben Gesagten, eine unechte Grenzebene S_{12}'', da jetzt auf jeder Axe die Winkelgeschwindigkeit beide Richtungen haben kann. Die Ebene trennt nur die Axen, für welche

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 > \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist, von den Axen, die der entgegengesetzten Ungleichheit genügen.

Wenden wir uns zu den zwei anderen Gebieten auf der Parameterkugel. Den Schraubenaxen, welche durch die Punkte dieses Gebietes bestimmt werden, entprechen entgegengesetzte Zeichen der Grössen 12); und man kann leicht einsehen, dass jetzt parallele Schraubenaxen durch die Ebene 15) in der Weise getrennt werden, dass auf der einen Seite derselben Schraubenaxen mit der einen, auf der anderen Seite mit der entgegengesetzten Richtung der Winkelgeschwindigkeit liegen, $(+\omega)$ und $(-\omega)$. Diese Ebene ist jetzt also eine echte Grenzebene S'_{12}. Auf jeder der Schraubenaxen des gegebenen Parallelenbündels, welche dieser Ebene selbst angehören, kann der Parameter nur einen bestimmten Wert annehmen, wobei aber beide Richtungen der Winkelgeschwindigkeit möglich werden.

5. Für das Folgende ist es wichtig zu bestimmen, auf welcher Seite der echten Grenzebene die Schraubenaxen mit der einen oder anderen Richtung der Winkelgeschwindigkeit, $(+\omega)$ oder $(-\omega)$, liegen. Im Falle einer echten Grenzebene haben die Grössen 12) verschiedene Zeichen; und wenn ω so gerichtet ist, dass

$$16)\qquad \xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta > 0, \quad \xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta < 0,$$

so haben wir

$$17)\qquad \delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 \leqq \delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2$$

und dem entsprechend

$$18)\qquad A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} \geqq 0.$$

Bei entgegengesetzter Richtung von ω finden wir ebenso:

$$19)\qquad \delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 \geqq \delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2$$

und folglich

$$20)\qquad A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} \leqq 0.$$

Das erste Gebiet der Schraubenaxen wollen wir das Gebiet $(+\omega)$, das andere das Gebiet $(-\omega)$ nennen.

Es seien $\alpha_{12}, \beta_{12}, \gamma_{12}$ die Winkel, welche die Normale zur Ebene S'_{12} mit den Koordinatenaxen bildet, und P_{12} die Länge des auf diese Ebene vom Anfangspunkte gefällten Perpendikels; dann ist

$$21)\qquad \varkappa_{12}\cos\alpha_{12} = A_{12}, \quad \varkappa_{12}\cos\beta_{12} = B_{12}, \quad \varkappa_{12}\cos\gamma_{12} = C_{12},$$

$$22)\qquad \varkappa_{12}P_{12} = -D_{12},$$

wo

$$23)\qquad \varkappa_{12} = \pm\sqrt{A_{12}^2 + B_{12}^2 + C_{12}^2} = \pm\sqrt{q_1^{\,2} + q_2^{\,2} - 2q_{12}q_1q_2}$$

und zur Abkürzung im Folgenden

$$24)\qquad \xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta = q_i$$

$$25)\qquad \xi_i\xi_k + \eta_i\eta_k + \zeta_i\zeta_k = q_{ik}$$

gesetzt und nach unserer früheren Annahme

$$26)\qquad \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 = 1$$

ist. Was das Vorzeichen von $\varkappa_{12}$ betrifft, so ist zu beachten, dass dem positiven Werte von $\varkappa_{12}$ immer die Richtung der Normale von der Ebene in das Gebiet $(+\omega)$ entspricht. Denn im Falle $D_{12} > 0$, liegt 19) der Anfangspunkt der Koordinaten im Gebiete $(+\omega)$, es ist aber zugleich 22) $\varkappa_{12} < 0$ für die Richtung des Perpendikels aus dem Anfangspunkte der Koordinaten auf die Ebene S'_{12}, also $\varkappa_{12} > 0$ für die Richtung von der Ebene in das Gebiet $(+\,\omega)$.

Es ist noch zu bemerken, dass für eine Schraubenaxe $(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu)$ eines Parallelenbündels (ξ, η, ζ) wir folgendes Kriterium haben: sie gehört dem Gebiete $(+\,\omega)$ oder $(-\,\omega)$ an, je nachdem

$$27)\quad \begin{cases} (\xi_2 q_1 - \xi_1 q_2)\lambda + (\eta_2 q_1 - \eta_1 q_2)\mu + (\zeta_2 q_1 - \zeta_1 q_2)\nu \\ \qquad + (\lambda_2 q_1 - \lambda_1 q_2)\xi + (\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2)\eta + (\nu_2 q_1 - \nu_1 q_2)\zeta \end{cases}$$

positiv oder negativ ist. Es ist dabei zu beachten, dass bei Existenz einer echten Grenzebene q_1 und q_2 entgegengesetzte Zeichen haben (§ 4).

6. Im folgenden Paragraphen werden wir die Gebiete aller derjenigen Schraubenaxen betrachten, deren Parameterwerte innerhalb gegebener Grenzen eingeschlossen sind. Zu diesem Zwecke sind noch einige vorläufige Bemerkungen notwendig, die solche zu den Schraubenflächen normale Ebenen betreffen, welche die Stütznormalen enthalten und einer gegebenen Richtung parallel sind [§ 8]. Es sei

$$28)\quad A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$$

die Gleichung einer solchen Ebene N_i. Da jede in dieser Ebene liegende Gerade der Bedingung

$$\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = 0$$

genügt, so sind nach der Formel 4):

$$29)\quad \begin{cases} A_i = \eta_i \zeta - \zeta_i \eta, \quad B_i = \zeta_i \xi - \xi_i \zeta, \quad C_i = \xi_i \eta - \eta_i \xi, \\ D_i = -(\lambda_i \xi + \mu_i \eta + \nu_i \zeta). \end{cases}$$

Durch diese Ebene werden die Axen mit verschiedenen Zeichen $\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i$ von einander getrennt. Setzen wir

$$30)\quad \varkappa_i \cos \alpha_i = A_i, \quad \varkappa_i \cos \beta_i = B_i, \quad \varkappa_i \cos \gamma_i = C_i, \quad \varkappa_i P_i = -D_i,$$

so können wir für das Vorzeichen von

$$31)\quad \varkappa_i = \pm \sqrt{1 - q_i^2},$$

ähnlich wie im § 5, folgende Regel bemerken: wenn $q_i > 0$ ist, so entspricht der Richtung der Normale zur Ebene 28) in das Gebiet, wo

$$\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i > 0$$

ist, der positive Wert von $\varkappa_i$.

Um denjenigen Winkel ε_{12} zwischen zwei Normalebenen N_1 und N_2 zu bestimmen, welcher die Grenzebene S'_{12} einschliesst, müssen wir in Acht nehmen, dass die Ebene S'_{12} die Durchschnittsgerade von N_1 und N_2 enthält und in demjenigen Gebiete liegt, wo beide Grössen 13) gleiche Zeichen haben, d. h. in den Gebieten $(+\,+)$ und $(-\,-)$, [§ 7]. Da im Falle einer echten Grenzebene q_1 und q_2 entgegengesetzte Zeichen haben, so giebt uns die oben für $\varkappa_i$ angeführte Regel die Formel:

$$32)\quad \cos \varepsilon_{12} = \frac{q_{12} - q_1 q_2}{\sqrt{(1 - q_1^2)(1 - q_2^2)}}.$$

Endlich müssen wir noch die Formeln für die Winkel ε_1 und ε_2, welche die Ebenen N_1 und N_2 mit S'_{12} bilden, hinschreiben. Mit Beachtung der nötigen Vorzeichen finden wir leicht:

$$33)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon_1 = \dfrac{q_{12}q_1 - q_2}{\sqrt{(1-q_1^2)(q_1^2+q_2^2-2q_{12}q_1q_2)}}, \\ \cos\varepsilon_2 = -\dfrac{q_2q_{12}-q_1}{\sqrt{(1-q_2^2)(q_1^2+q_2^2-2q_{12}q_1q_2)}}. \end{cases}$$

7. Zu unserer Aufgabe zurückkehrend, wollen wir zuerst solche Schraubenaxen eines Parallelenbündels bestimmen, für welche der Parameter zwischen gegebenen Grenzen

$$34)\qquad p_1 \leqq p \leqq p_2$$

liegt und die Winkelgeschwindigkeit dabei beide Richtungen haben kann. Solche Axen können nur der echten Grenzebene S'_{12} angehören, da für dieselben die Grössen 13) zusammenfallen müssen. Die gesuchten Axen bilden in dieser Ebene einen Streifen von einer Breite, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann. Es bezeichne h den Abstand einer dieser Axen von der ihnen parallelen Durchschnittsgeraden der Ebenen N_1 und N_2, positiv gerechnet, wenn die Axe in dem Gebiete $(++)$ liegt. Wir haben dann [§ 6]:

$$h = \frac{\delta_1}{\sin\varepsilon_1} = \frac{\delta_2}{\sin\varepsilon_2}.$$

Für die am Rande des Streifens liegenden Axen kann man aber schreiben:

$$\delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2 = p_1,$$
$$\delta_1' \operatorname{tg}\varphi_1' = \delta_2' \operatorname{tg}\varphi_2' = p_2,$$

wobei $\varphi'_1 = \varphi_1$, $\varphi'_2 = \varphi_2$, wenn p_1 und p_2 dasselbe Zeichen haben, und

$$\varphi'_1 = \pi - \varphi_1, \quad \varphi'_2 = \pi - \varphi_2,$$

wenn die eine von den Grössen p_1, p_2 positiv, die andere negativ ist [§ 2]. Da aber h und p immer dasselbe Zeichen haben, so ist:

$$35)\quad \begin{cases} h_1 = p_1 \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi_1}{\sin\varepsilon_1} = p_1 \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi_2}{\sin\varepsilon_2}, \\ h_2 = p_2 \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi_1}{\sin\varepsilon_1} = p_2 \dfrac{\operatorname{cotg}\varphi_2}{\sin\varepsilon_2}, \end{cases}$$

wo $\operatorname{cotg}\varphi_1$, $\operatorname{cotg}\varphi_2$, $\sin\varepsilon_1$, $\sin\varepsilon_2$ positiv gerechnet sind. Die Breite des Streifens ist also:

$$b = h_2 - h_1 = (p_2 - p_1)\frac{\operatorname{cotg}\varphi_1}{\sin\varepsilon_1} = (p_2 - p_1)\frac{\operatorname{cotg}\varphi_2}{\sin\varepsilon_2},$$

oder nach den Formeln 33):

$$b = (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{q_1^2+q_2^2-2q_{12}q_1q_2}{1-q_1^2-q_2^2-q_{12}^2+2q_{12}q_1q_2}}.$$

Auf jeder Axe dieses Streifens kann der Parameter nur einen bestimmten in den Grenzen 34) eingeschlossenen Wert annehmen.

8. Nach einer Bemerkung in [§ 7] liegen alle Axen, für welche die Differenz zwischen den Grenzwerten möglicher Parameter dieselbe ist, die Grenzwerte selbst aber beliebig bleiben, in einer der Grenzebene parallelen Ebene. Dabei ist die Entfernung zwischen den beiden Ebenen der gegebenen Differenz proportional. Das ist jetzt auch aus den Formeln der Paragraphen 3 und 4 ersichtlich. Indem wir nämlich die Bedingung

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = a \tag{36}$$

entwickeln, finden wir die Gleichung der genannten Ebene in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} &(\xi_2\lambda + \eta_2\mu + \zeta_2\nu + \lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta)(\xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta) \\ &\qquad - (\xi_1\lambda + \eta_1\mu + \zeta_1\nu + \lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta)(\xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta) \\ &\quad = a(\xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta)(\xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta), \end{aligned}\right. \tag{37}$$

wo die laufenden Koordinaten in λ, μ, ν enthalten sind. Wir finden leicht, dass die Entfernung dieser Ehene von der Ebene S'_{12}

$$\Delta_a = -a \frac{q_1 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2 q_{12} q_1 q_2}} \tag{38}$$

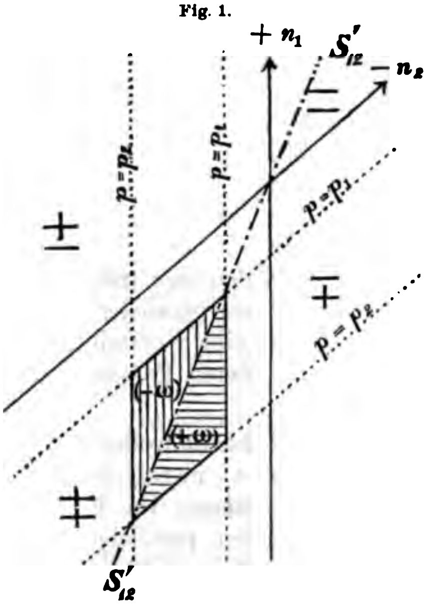
ist. Diese Formel zeigt zugleich, dass diejenigen Richtungen der Schraubenaxen, für welche die Entfernung Δ_a bei gegebener Parameterdifferenz dieselbe ist, durch einen Kegel vierten Grades bestimmt werden.

9. Wir wollen jetzt voraussetzen, dass nicht nur die Differenz, sondern auch die Grenzwerte p_1, p_2 selbst gegeben sind, und alle diejenigen Schraubenaxen aufsuchen, für welche die möglichen Parameterwerte in diese oder noch engere Grenzen

$$p_1 < p_1' < p < p'_2 < p_2$$

eingeschlossen sind. Im Falle nur einer Stützfläche mit der Normale n_1 würden alle Axen eines Parallelenbündels, für welche $p \geqq p_1$ ist, auf einer Seite der Ebene liegen, die der gegebenen Axenrichtung und der Normale n_1 parallel ist und von der letzteren die Entfernung $p_1 \operatorname{cotg} \varphi_1$ hat; alle Axen, welche der Bedingung 34) genügen, würden daher zwischen zwei solche Ebenen eingeschlossen sein, deren gegenseitige Entfernung $\pm(p_2 - p_1) \operatorname{cotg} \varphi_1$ wäre. Ebenso müssten im Falle einer anderen Stützfläche mit der Normale n_2 alle solche Schrauben-

Fig. 1.



axen zwischen zwei anderen, der Normale n_2 parallelen Ebene liegen, deren Entfernung $\pm(p_2 - p_1)\operatorname{cotg}\varphi_1$ gleich wäre. Sind also beide Stützflächen gegeben, so liegen alle gesuchten Schraubenaxen im Innern eines vierkantigen Prismas (Fig. 1), dessen Flächen von den genannten vier Ebenen gebildet werden. Eine von den Diagonalebenen dieses Prismas fällt mit der Grenzebene S'_{12} zusammen, wie daraus ersichtlich ist, dass zwei entgegengesetze Kanten desselben den Gleichheiten

$$\delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2 = p_1,$$

$$\delta'_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = \delta'_2 \operatorname{tg}\varphi_2 = p_2,$$

genügen, welche nur für die in der Grenzebene liegenden Axen möglich sind. Zwei andere Kanten des Prismas stellen solche Schraubenaxen dar, auf denen der Parameter alle Werte zwischen p_1 und p_2 annehmen kann. Auf allen anderen dem Prisma angehörenden Axen sind Parameterwerte möglich, welche zwischen engeren Grenzen p_1', p_2' liegen, die in die gegebenen Grenzen p_1, p_2 eingeschlossen sind.

10. Jetzt kann man sich das ganze System der Schraubenaxen vorstellen, für welche bei allen möglichen Richtungen derselben die Parameterwerte innerhalb gegebener Grenzen liegen. Wenn ein fester Körper sich nicht nur auf zwei feste Flächen stützt, sondern dieselben beständig berührt, so bildet bekanntlich das ganze mögliche Schraubenaxensystem einen Komplex zweiten Grades. Er wird von solchen Kongruenzen ersten Grades gebildet, welche Schraubenaxen mit einem und demselben Parameterwerte tragen. Stellen wir uns nun zwei dieser Kongruenzen vor: die Kongruenz (p_1) und die Kongruenz (p_2). In einem jeden Parallelenbündel giebt es eine Axe, welche der einen, und eine Axe, die der anderen Kongruenz angehört. Wenn der feste Körper sich nur auf zwei Flächen stützt, so bilden diese zwei Axen zwei entgegengesetzte Kanten des oben besprochenen Prismas, welches somit bestimmt wird, wenn man durch diese Kanten zwei den Normalen der Stützflächen parallele Ebenen zieht. Indem wir uns alle Paare paralleler Geraden der beiden Kongruenzen denken, bekommen wir eine Vorstellung von dem ganzen Systeme möglicher Schraubenaxen, deren Parameter nicht aus gegebenen Grenzen heraustreten.

11. Zum Schlusse wollen wir die Hüllflächen der Grenzebenen und der ihnen parallelen Ebenen konstanter Parameterdifferenz bestimmen. Da die Lage der Grenzebene von der Richtung der entsprechenden parallelen Schraubenaxen abhängt, so umhüllen die Grenzebenen eine Fläche. Diese Fläche kann ohne weiteres angegeben werden, wenn man in Betracht zieht, dass alle in der Grenzebene liegenden Axen der Bedingung 14) genügen, also dem bekannten Komplexe zweiten Grades angehören, dessen Singularitätenfläche in eine Linienfläche dritten Grades und in eine Ebene zerfällt.

Diese Fläche ist ein Cylindroid, welches alle Schrauben enthält, die zu allen möglichen Geschwindigkeitsschrauben des starren Körpers reziprok sind, wenn derselbe zwei feste Flächen beständig berührt.

Das kann auch unmittelbar gefunden werden, wenn man nur beachtet, dass jede Grenzebene, da sie untereinander parallele mögliche Schrauben des genannten Komplexes enthält, eine singuläre Ebene sein muss. Nimmt man den Anfangspunkt der Koordinaten in der Mitte des kürzesten Abstandes zwischen den Normalen n_1 und n_2 und die Koordinatenaxen nach den Halbierungsgeraden der Winkel zwischen denselben, so ist die Gleichung des Komplexes:

$$39)\qquad (\lambda\eta - \mu\xi)\sin 2\vartheta_{12} + 2r_{12}\xi\eta = 0,$$

wo $2\vartheta_{12}$ den Winkel zwischen den positiven [§ 2] Richtungen der beiden Normalen und $2r_{12}$ den kürzesten Abstand derselben bezeichnen. Wenn wir hier

$$40)\qquad \lambda = y\zeta - z\eta,\quad \mu = z\xi - x\zeta$$

setzen und ξ, η, ζ als konstant, x, y, z aber als laufende Koordinaten betrachten, so ist die Gleichung der Grenzebene:

$$41)\quad \zeta\xi\sin 2\vartheta_{12}\cdot x + \eta\zeta\sin 2\vartheta_{12}\cdot y - (\xi^2+\eta^2)\sin 2\vartheta_{12}\cdot z + 2r_{12}\xi\eta = 0.$$

Und wenn man jetzt $\xi:\eta:\zeta$ als veränderlich betrachtet, bekommt man die Gleichung der Hüllfläche in der Form:

$$\begin{vmatrix} -2\sin 2\vartheta_{12}\cdot z, & 2r_{12}, & \sin 2\vartheta_{12}\cdot x \\ 2r_{12}, & -2\sin 2\vartheta_{12}\cdot z, & \sin 2\vartheta_{12}\cdot y \\ \sin 2\vartheta_{12}\cdot x, & \sin 2\vartheta_{12}\cdot y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$42)\qquad \sin 2\vartheta_{12}\cdot(x^2+y^2)z + 2r_{12}xy = 0.$$

Wir führen dieses bekannte Resultat an zum Vergleich mit einer anderen Hüllfläche, welche für d n Fall, dass ein fester Körper sich auf zwei Flächen nur stützt, charakteristisch ist. Wir haben gefunden (§ 7), dass die Schraubenaxen einer gegebenen Richtung, für welche die Differenz zwischen den extremen Werten ihrer Parameter konstant ist, in einer der Grenzebene parallelen Ebene liegen. Alle solche Ebenen, welche derselben Parameterdifferenz entsprechen, umhüllen eine Fläche, die in einer einfachen Beziehung zur Fläche 41) steht. Bei der eben angenommenen Lage der Koordinatenaxen nimmt die Bedingung 36) folgende Form an:

$$\frac{(\lambda - r_{12}\eta)\cos\vartheta_{12} + (\mu + r_{12}\xi)\sin\vartheta_{12}}{\xi\cos\vartheta_{12} + \eta\sin\vartheta_{12}} - \frac{(\lambda + r_{12}\eta)\cos\vartheta_{12} - (\mu - r_{12}\xi)\sin\vartheta_{12}}{\xi\cos\vartheta_{12} - \eta\sin\vartheta_{12}} = a,$$

oder mit Ausschluss der Schraubenaxen, welche der Gleichung

$$\xi^2\cos^2\vartheta_{12} - \eta^2\sin\vartheta_{12} = 0$$

genügen, d.h. zu einer oder der anderen von den Normalen n_1, n_2 senkrecht sind:

$$43)\quad (\lambda\eta - \mu\xi)\sin\vartheta_{12} + 2r_{12}\xi\eta + \xi^2 a\cos^2\vartheta_{12} - \eta^2 a\sin^2\vartheta_{11} = 0.$$

Dieser Komplex ist von derselben Art wie der Komplex 39); und aus demselben Grunde sind die Ebenen gleicher Parameterdifferenz seine singulären Ebenen. Die Gleichung einer solchen Ebene bekommt man, wenn man wieder die Ausdrücke 40) einführt und ξ, η, ζ als konstant betrachtet. Die Gleichung ihrer Hüllfläche finden wir wieder in der Form der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2(a\cos^2\vartheta_{12} - \sin 2\vartheta_{12}\cdot z), & 2r_{12}, & \sin 2\vartheta_{12}\cdot x \\ 2r_{12}, & -2(a\sin^2\vartheta_{12} + \sin 2\vartheta_{12}\cdot z), & \sin 2\vartheta_{12}\cdot y \\ \sin 2\vartheta_{12}\cdot x, & \sin 2\vartheta_{12}\cdot y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\sin 2\vartheta_{12}\cdot(x^2+y^2)z + 2r_{12}xy + a\cos^2\vartheta_{12}\cdot x^2 - a\sin^2\vartheta_{12}\cdot y^2 = 0.$$

Durch eine Koordinatentransformation

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \quad z = z' + h,$$

wo

$$44) \qquad h = \frac{a}{2}\operatorname{cotg} 2\vartheta_{12}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{a}{2r_{12}}$$

ist, nimmt die Gleichung der Fläche die Form

$$45) \qquad \sin 2\vartheta_{12}\cdot(x'^2+y'^2)z' + \sqrt{4r_{12}^2 + a^2}\cdot x'y' = 0$$

an. Sie ist also auch ein Cylindroid. Da alle Cylindroide ähnlich sind und der Koeffizient $\sqrt{4r_{12}^2+a^2}/\sin 2\vartheta_{12}$ die Höhe (die reelle Länge der Doppelgeraden) desselben bestimmt, so finden wir leicht, dass alle Flächen 45) aus der Fläche 42) durch eine Dilatation im Verhältnis $\sqrt{4r_{12}^2+a^2}/2r_{12}$ und durch eine Schraubenverschiebung, welche durch die Formeln 44) bestimmt wird, erhalten werden können.

Alles Gesagte zusammenfassend, bekommen wir eine volle und ziemlich anschauliche Vorstellung von dem ganzen Systeme möglicher Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers, welcher sich auf zwei Flächen stützt, von denselben sich aber auch entfernen kann.

II. Das System dreier Grenzebenen erster Art.

12. Bei einem festen Körper, welcher sich auf drei Flächen stützt, muss man zwei verschiedene Gruppen von möglichen Schraubenaxen unterscheiden*, je nach den Richtungen derselben. Die Axen der ersten Gruppen bilden nur stumpfe oder nur spitze Winkel mit den positiven Richtungen der Stütznormalen; jede Gerade einer solchen Richtung erscheint dann als eine mögliche Schraubenaxe. Der anderen Gruppe gehören alle übrigen Geraden an, von welchen aber schon nicht alle die möglichen Schraubenaxen darstellen [§§ 11, 12 und 13].

Die drei Grenzebenen erster Art S_{23}, S_{31}, S_{12}, welche im Falle von drei Stützflächen bei jedem gegebenen Parallelenbündel von Geraden

* In meiner im § 1 zitierten Arbeit werden diese Schraubenaxen in vier Gruppen geteilt, was jetzt aber unnötig ist.

kbar sind, können als echte oder als unechte Grenzebenen er-
einen. Da für eine echte Grenzebene nötig ist, dass die gegebene
nrichtung mit der einen von zwei Stütznormalen einen spitzen und
der anderen einen stumpfen Winkel bildet, so haben wir bei den
raubenaxen erster Gruppe nur unechte Grenzebenen; bei den Axen
zweiten Gruppe aber sind zwei von den Grenzebenen echte und
dritte eine unechte.

Unabhängig von der Richtung, welche die drei Grenzebenen be-
nmt, haben dieselben folgende Haupteigenschaften.

1. Drei Grenzebenen S_{kl}, S_{li}, S_{ik}, welche von drei Stützflächen Σ_i, Σ_l abhängen, schneiden sich immer in einer Geraden σ_{ikl}, die der ebenen Richtung der Schraubenaxen parallel ist; denn die Gerade, che der Bedingung

$$\text{6)} \qquad \delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = \delta_k \operatorname{tg} \varphi_k = \delta_l \operatorname{tg} \varphi_l$$

ügt, gehört allen drei Grenzebenen an.

2. Wenn man eine Stützfläche Σ_i und die entsprechende Fläche festen Körpers so abändert, dass die Stütznormale n_i sich selbst allel bleibt, so bleibt auch jede der beiden Grenzebenen S_{li}, S_{ik}, che von der Lage dieser Normale abhängen, sich selbst parallel; n die Richtungen der Grenzebenen hängen nur von den Richtungen, it aber von den Lagen der Stütznormalen ab.

3. Da jede Grenzebene ein Cylindroid berührt (§ 11), so schneiden die einer gegebenen Richtung parallelen Tangentialebenen dreier indroide, welche durch die drei paarweise genommenen Stütznormalen timmt werden, in einer Geraden σ_{ikl}.

4. Die Gerade σ_{ikl} stellt die Schraubenaxe eines gegebenen allelenbündels dar, welche allein möglich wäre, wenn der feste per sich von den drei Stützflächen nicht entfernen könnte.

Um die Lage der Geraden σ_{ikl} zu bestimmen, wenn ihre Richtung $\eta, \zeta)$ gegeben ist, wollen wir ihre Momente λ_{ikl}, μ_{ikl}, ν_{ikl} berechnen. Bedingung 46) gemäss und die Formeln 4), 10) und 24) zur fe nehmend, kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
(\xi_k q_l - \xi_l q_k)\lambda_{ikl} + (\eta_k q_l - \eta_l q_k)\mu_{ikl} + (\zeta_k q_l - \zeta_l q_k)\nu_{ikl} &= D_{kl},\\
(\xi_l q_i - \xi_i q_l)\lambda_{ikl} + (\eta_l q_i - \eta_i q_l)\mu_{ikl} + (\zeta_l q_i - \zeta_i q_l)\nu_{ikl} &= D_{li},\\
(\xi_i q_k - \xi_k q_i)\lambda_{ikl} + (\eta_i q_k - \eta_k q_i)\mu_{ikl} + (\zeta_i q_k - \zeta_k q_i)\nu_{ikl} &= D_{ik},
\end{aligned}$$

r auch

$$\begin{aligned}
V_{ikl}(\zeta\mu_{ikl} - \eta\nu_{ikl}) &= \xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik},\\
V_{ikl}(\xi\nu_{ikl} - \zeta\lambda_{ikl}) &= \eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik},\\
V_{ikl}(\eta\lambda_{ikl} - \xi\mu_{ikl}) &= \zeta_i D_{kl} + \zeta_k D_{li} + \zeta_l D_{ik},
\end{aligned}$$

$$\text{7)} \qquad V_{ikl} = \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix}$$

Hieraus, die Beziehung

$$\xi\lambda_{ikl} + \eta\mu_{ikl} + \zeta\nu_{ikl} = 0$$

beachtend, finden wir:

$$48)\begin{cases} V_{ikl}\lambda_{ikl} = \eta(\zeta_i D_{kl} + \zeta_k D_{li} + \zeta_l D_{ik}) - \zeta(\eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik}), \\ V_{ikl}\mu_{ikl} = \zeta(\xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik}) - \xi(\zeta_i D_{kl} + \zeta_k D_{li} + \zeta_l D_{ik}), \\ V_{ikl}\nu_{ikl} = \xi(\eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik}) - \eta(\xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik}). \end{cases}$$

13. Wir wollen weiter für den Fall von drei Stützflächen nur die Schraubenaxen der zweiten Gruppe im Auge behalten und daher von den drei Grenzebenen S_{23}, S_{31}, S_{12} zwei als echte voraussetzen. Ein Paar von Scheitelwinkeln, welche durch diese zwei Ebenen gebildet werden, schliesst alle möglichen Schraubenaxen der gegebenen Richtung ein, wobei der eine Winkel das Gebiet $(+\omega)$, der andere das Gebiet $(-\omega)$ bestimmt [§ 13]. Es ist leicht einzusehen, dass dann die dritte, unechte Grenzebene immer innerhalb dieser beiden Gebiete liegt. Um das zu zeigen, wollen wir für die Richtung des Parallelenbündels von Schraubenaxen einen von den drei hier möglichen Fällen [§ 11] annehmen:

$$49)\qquad q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \leqq 0.$$

Dann sind S'_{23} und S'_{31} echte Grenzebenen. Den Ungleichheiten 49) entsprechend haben wir jetzt für die möglichen Schraubenaxen des Gebietes $(+\omega)$:

$$50)\qquad \delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \leqq p \leqq \delta_3 \operatorname{tg}\varphi_3,$$

$$51)\qquad \delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 \leqq p \leqq \delta_3 \operatorname{tg}\varphi_3,$$

und für das Gebiet $(-\omega)$ entgegengesetzte Ungleichheitszeichen. In beiden Fällen gehört die Schraubenaxe, für welche

$$\delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2$$

ist, die also in der unechten Grenzebene S''_{12} liegt, zur Zahl der möglichen Schraubenaxen; die Ebene S''_{12} geht also durch die Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ hindurch.

14. Die relative Grösse des Bereiches möglicher Schraubenaxen gegebener Richtung hängt von der Grösse der Scheitelwinkel ab, welche von den zwei echten Grenzebenen gebildet werden und die möglichen Schraubenaxen einschliessen. Um die Grösse eines solchen Winkels ε_{12}, welcher bei Voraussetzung von 49) von den Ebenen S'_{23} und S'_{31} gebildet wird, zu finden, beachten wir das im § 5 über das Vorzeichen von $\varkappa_{12}$ Gesagte. Den Richtungen der Normalen zu den Ebenen S'_{23}, S'_{31}, in dem Gebiet $(+\omega)$, entsprechen den Ungleichheiten 50) und 51) gemäss:

$$\varkappa_{23} > 0, \quad \varkappa_{31} < 0;$$

da aber der Winkel zwischen diesen Normalen und der Winkel ε_{12} zusammen zwei Rechte bilden, so haben wir:

$$\cos\varepsilon_{12} = \frac{A_{23}A_{31} + B_{23}B_{31} + C_{23}C_{31}}{k_{23}k_{31}},$$

ler, nach den Formeln von §§ 3 und 5:

52) $$\cos\varepsilon_{12} = + \frac{q_3(q_{23}q_1 + q_{31}q_2 - q_{12}q_3) - q_1 q_2}{\sqrt{(q_2^2 + q_3^2 - 2q_{23}q_2q_3)(q_3^2 + q_1^2 - 2q_{31}q_3q_1)}}.$$

Dieser Formel analog, finden wir für die Richtungen der chraubenaxen, welche den Bedingungen

$$q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_1 \leqq 0,$$

ler

$$q_3 \geqq 0, \quad q_1 \geqq 0, \quad q_2 \leqq 0$$

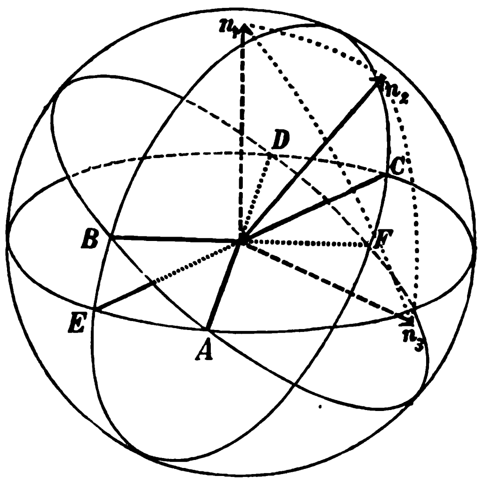
nügen:

53) $$\cos\varepsilon_{23} = \frac{q_1(q_{31}q_2 + q_{12}q_3 - q_{23}q_1) - q_2 q_3}{\sqrt{(q_3^2 + q_1^2 - 2q_{31}q_3q_1)(q_1^2 + q_2^2 - 2q_{12}q_1q_2)}},$$

54) $$\cos\varepsilon_{31} = \frac{q_2(q_{12}q_3 + q_{23}q_1 - q_{31}q_2) - q_3 q_1}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2 - 2q_{12}q_1q_2)(q_2^2 + q_3^2 - 2q_{23}q_2q_3)}}.$$

15. Die Richtungen der Schraubenaxen, für welche einer n den Winkeln ε_{23}, ε_{31}, ε_{12} konstante Grösse hat, werden auf r Parameterkugel (§ 4) rch Kurven (ε_{23}), (ε_{31}), $_2$) bestimmt, welche hnittlinien von Kegelchen vierten Grades mit r Parameterkugel sind; nn die Koordinaten ξ, ζ sind in q_1, q_2, q_3 ear enthalten. Um einen griff von der Lage ser Kurven zu bemmen, wollen wir den l 49) im Auge beten. Ihm entspricht der Kugelfläche ein ärisches Dreieck BCD g. 2), in welchem die rve (ε_{12}) die genannte lle spielt. Auf den

Fig. 2.



ten dieses Dreiecks wird eine von den Grössen q_1, q_2, q_3 gleich ll, da diese Seiten in den zu den Normalen n_1, n_2, n_3 senkrechten nen liegen. Für die Punkte dieser Seiten finden wir:

5) (CD) $$[\cos\varepsilon_{12}]_{q_1=0} = -\frac{q_{31}q_2 - q_{12}q_3}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 - 2q_{23}q_2q_3}},$$

6) (DB) $$[\cos\varepsilon_{12}]_{q_2=0} = -\frac{q_{23}q_1 - q_{12}q_3}{\sqrt{q_3^2 + q_1^2 - 2q_{31}q_3q_1}},$$

7) (BC) $$[\cos\varepsilon_{12}]_{q_3=0} = -1.$$

In den ersten zwei Ausdrücken ist das negative Zeichen gesetzt, weil nach der oben angewandten Regel des § 5 der positive Wert der Wurzel genommen werden muss, die Grösse q_3 aber, durch welche Zähler und Nenner dividiert sind, negativ 49) vorausgesetzt wird.

Für den Punkt D ergiebt sich

$$[\cos \varepsilon_{12}]_{q_1=0,\, q_2=0} = -q_{12},$$

und in den Punkten B und C wird $\cos \varepsilon_{12}$ unbestimmt. Der wirkliche Wert von $\cos \varepsilon_{12}$ hängt hier von dem Wege ab, auf welchem wir zu den Punkten B und C gelangen. Alle Linien (ε_{12}) gehen also durch die Punkte B und C hindurch. Indem wir auf dem Wege DC von D nach C gehen, finden wir für diesen letzteren Punkt:

$$\cos \varepsilon_{12} = -q_{31};$$

auf dem Wege DB, von D nach B gehend, bekommen wir für den Punkt B: $\cos \varepsilon_{12} = -q_{23}$.

Aus den Formeln 52), 53) und 54) sieht man, dass auf den Grenzen eines Gebietes der Parameterkugel zwei von den Grenzebenen zusammenfallen. So z. B. sind im Gebiete BDC, welches den Bedingungen 49) entspricht, die Ebenen S_{13} und S_{31} echte Grenzebenen, und der Winkel zwischen ihnen wird durch die Formel 52) bestimmt. Auf der Seite DC dieses Dreiecks, für deren Punkte $q_1 = 0$ ist, finden wir:

$$[\cos \varepsilon_{12}]_{q_1=0} = [\cos \varepsilon_{31}]_{q_1=0}, \quad [\cos \varepsilon_{23}]_{q_1=0} = 1.$$

Somit sehen wir, dass, obgleich die Kurve (ε_{12}), für welche

$$\cos \varepsilon_{12} = a$$

ist, beim Übergange aus dem Gebiete BDC in das Nachbargebiet BED auf der Grenze DC ihre Bedeutung verliert, da die Ebene S_{31} eine echte Grenzebene zu sein aufhört, — ihre Rolle die Kurve (ε_{31}) übernimmt, für welche $\cos \varepsilon_{31} = a$ ist und die im Gebiete BDC keine entsprechende Rolle spielte. Ähnliche Wechselwirkung findet zwischen den Kurven (ε_{12}) und (ε_{23}) beim Übergange über die Grenze BD statt. Beim Übergange über die Grenze BC gelangen wir aber schon in das Gebiet der Schraubenaxen erster Gruppe, und dort verlieren alle drei Kurven (ε_{23}), (ε_{31}), (ε_{12}) ihre Bedeutung, da alle drei Ebenen S_{23}, S_{31}, S_{12} unechte Grenzebenen werden.

16. Um Platz zu sparen wollen wir nur kurz, ohne Beweise, noch einige Eigenschaften der Winkel ε_{23}, ε_{31}, ε_{12} angeben.

Wenn die positiven Richtungen [§ 2] der drei Stütznormalen untereinander nur spitze Winkel bilden, so sind alle drei Winkel ε_{23}, ε_{31}, ε_{12} in den entsprechenden Gebieten der Parameterkugel stumpf.

Bei keiner Richtung der Stütznormalen kann ein solcher Winkel in dem ganzen ihm entsprechenden Gebiete spitz sein.

Keiner dieser Winkel kann im Innern eines der Gebiete der Parameterkugel gleich 0 oder π werden.

Maxima und Minima der Werte von ε_{23}, ε_{31}, ε_{12} können nur auf den Grenzen der Gebiete der Parameterkugel existieren. Das Vorkommen derselben hängt von den Zeichen der Grössen q_{23}, q_{31}, q_{12} einerseits und der Grössen

$$q_{31}\,q_{12} - q_{23}, \quad q_{12}\,q_{23} - q_{31}, \quad q_{23}\,q_{31} - q_{12}$$

anderseits ab.

III. Die Grenzebene zweiter Art.

17. Die Grenzebenen zweiter Art haben in der Frage der möglichst grossen Beschränkung der Verschiebungen eines starren Körpers und der Festlegung desselben eine sehr wesentliche Bedeutung. Da sie, wie wir gleich sehen werden, von vier Stütznormalen abhängen, so müssen wir uns zu dem Falle von vier Stützflächen wenden, wo diese Grenzebenen zum ersten Male auftreten.

Wir wollen die möglichen Schraubenaxen eines festen Körpers, welcher sich auf vier Flächen stützt, in drei Gruppen teilen.*

Es mögen zu der ersten Gruppe solche Schraubenaxen gehören, deren Richtungen mit allen vier Stütznormalen nur spitze oder nur stumpfe Winkel bilden. Auf jeder dieser Axen kann der Parameter p alle Werte bekommen, welche ausserhalb des Intervalles zwischen dem kleinsten und dem grössten von den vier Produkten

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 \tag{58}$$

liegen, wobei auf jeder dieser Axen, je nach der Grösse des Parameterwertes, die eine und die andere Richtung der Winkelgeschwindigkeit möglich ist [§ 19]. In diesem Falle ist keine von den sechs überhaupt denkbaren Grenzebenen erster Art eine echte.

Zur zweiten Gruppe sollen solche Schraubenaxen gehören, welche mit der einen Stütznormale einen spitzen und mit den anderen drei einen stumpfen Winkel bilden, oder umgekehrt. Jeder Parameterwert liegt zwischen gewissen, im allgemeinen endlichen Grenzen [§ 20]. Alle Axen einer gegebenen Richtung werden durch drei echte Grenzebenen bestimmt und bilden ein geschlossenes oder nicht geschlossenes Prisma.

Die Axen der dritten Gruppe werden dadurch bestimmt, dass sie mit zwei Normalen einen spitzen und mit zwei anderen einen stumpfen Winkel bilden und bei gegebener Richtung durch vier echte Grenzebenen bestimmt werden, wobei die möglichen Parameterwerte wieder zwischen gewissen, im allgemeinen endlichen Grenzen liegen [§ 21].

18. Die Richtungen der Stütznormalen können so gewählt werden, dass alle Schraubenaxen der ersten Gruppe ausbleiben [§ 19]. Für das

* Siehe die Anmerkung zum § 12.

Folgende ist dieser Umstand sehr wesentlich; wir wollen daher das analytische Merkmal des Verschwindens dieser Axen aufstellen. Die geometrische Bedingung dafür besteht darin [§ 18, S. 165], dass auf der Parameterkugel der negative Endpunkt einer jeden Stütznormalenrichtung innerhalb des sphärischen Dreiecks liegen muss, dessen Ecken durch die positiven Endpunkte anderer drei Normalenrichtungen gebildet werden. Offenbar ist es genügend, wenn diese Bedingung für eine der Normalen erfüllt wird. Solche Richtungen von vier Stütznormalen werden wir die Opposition derselben nennen. Es seien n_i, n_k, n_l, n_m die vier Stütznormalen und

59) $$V_{klm}, \quad V_{lim}, \quad V_{ikm}, \quad V_{ikl}$$

Determinanten, welche nach dem Schema 47) gebildet sind; wobei die Reihenfolge der Indices i, k, l, m immer der Reihenfolge der Zeilen

Fig. 3.

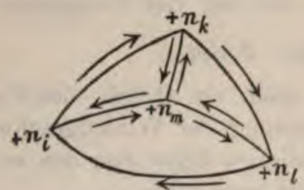
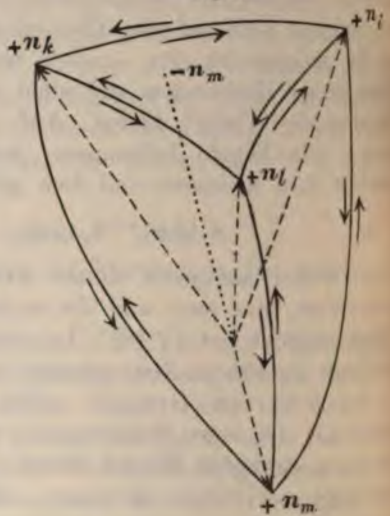


Fig. 4.



in den Determinanten entsprechend genommen werden soll. Den Normalen n_i, n_k, n_l entspricht auf der Parameterkugel ein sphärisches Dreieck $(n_i n_k n_l)$. Wenn man auf den Seiten dieses Dreiecks in der Richtung der Uhrzeiger herumgeht und dabei von n_i nach n_k und von n_k nach n_l gelangt, so ist $V_{ikl} > 0$. Fällt nun der positive Endpunkt der Richtung von n_m in das Gebiet des Dreiecks $(n_i n_k n_l)$, so haben alle vier Grössen 59) dasselbe Zeichen (Fig. 3), wenn aber der negative Endpunkt von n_m in diesem Dreiecke liegt, so haben V_{klm}, V_{lim} und V_{ikm} das entgegengesetzte Zeichen von V_{ikl} (Fig. 4). Da bei einer Permutation von zwei nebeneinander liegenden Indices einer der Grössen 59) das Zeichen derselben geändert wird, so kann man, anstatt

V_{ikl} die Determinante $-V_{lki}$ nehmend, sagen, dass im Falle der Opposition der vier Stütznormalen alle vier Grössen

60) $$V_{klm}, \quad V_{lim}, \quad V_{ikm}, \quad V_{lki}$$

dasselbe Zeichen haben.

Wenn weder der positive noch der negative Endpunkt von n_m ins Dreieck $(n_i n_k n_l)$ fällt, so werden weder die Grössen 59) noch die Grössen 60) dasselbe Zeichen haben; das über diese Grössen Gesagte ist also die notwendige und hinreichende Bedingung der Opposition der Normale n_m gegen die drei anderen. Wenn sie erfüllt ist, so ist sie auch für die anderen Normalen erfüllt; denn es werden dann die in einer Zeile stehenden Grössen

61) $$V_{lmi}, \quad V_{mki}, \quad V_{kli}, \quad V_{mlk}, \qquad (n_i)$$

62) $$V_{lmk}, \quad V_{mik}, \quad V_{ilk}, \quad V_{mli}, \qquad (n_k)$$

63) $$V_{kml}, \quad V_{mil}, \quad V_{ikl}, \quad V_{mki}, \qquad (n_l)$$

auch gleiche Zeichen haben.

19. Einem Systeme von vier Stütznormalen n_i, n_k, n_l, n_m entspricht eine Ebene P_{iklm}, welche wir die Grenzebene zweiter Art nennen werden. Sie soll durch das Zentrum der Parameterkugel gelegt werden und hat zu ihrer Gleichung

64) $$L_{iklm}x + M_{iklm}y + N_{iklm}z = 0,$$

wo

65) $$\left\{\begin{aligned} L_{iklm} &= \begin{vmatrix} \lambda_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \lambda_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \lambda_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \lambda_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}, \quad M_{iklm} = \begin{vmatrix} \mu_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \mu_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \mu_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \mu_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}, \\ N_{iklm} &= \begin{vmatrix} \nu_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \nu_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \nu_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \nu_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

sind. Unten werden wir sehen, dass diese Ebene eine besonders wichtige Rolle im Falle der Opposition von vier Normalen spielt; wir werden sie dann die echte Grenzebene zweiter Art nennen und für sie das Symbol P'_{iklm} gebrauchen. Wenn die vier Stütznormalen sich nicht in Opposition befinden, so werden wir diese Ebene eine unechte Grenzebene zweiter Art nennen und sie mit dem Symbole P''_{iklm} bezeichnen.

Unabhängig von der Rolle, welche die Ebene P_{iklm} im weiteren spielen wird, hat sie folgende kinematische Bedeutung. Wenn der feste Körper sich von den Stützflächen Σ_i, Σ_k, Σ_l, Σ_m nicht entfernen kann, so besitzt er zwei Freiheitsgrade, so dass alle seine möglichen Schraubenaxen ein Cylindroid bilden. Es seien ξ, η, ζ, λ, μ, ν die Koordinaten und p der Parameter einer seiner Schrauben. Da diese Schraube zu denjenigen Schrauben reziprok ist, welche auf den Normalen n_i, n_k, n_l, n_m liegen und den Parameterwert Null haben, so kann man schreiben:

$$
66) \quad \begin{cases}
(\lambda_i + p\xi_i)\xi + (\mu_i + p\eta_i)\eta + (\nu_i + p\zeta_i)\zeta \\
\qquad + \xi_i\,\lambda + \eta_i\,\mu + \zeta_i\,\nu = 0, \\
(\lambda_k + p\xi_k)\xi + (\mu_k + p\eta_k)\eta + (\nu_k + p\zeta_k)\zeta \\
\qquad + \xi_k\,\lambda + \eta_k\,\mu + \zeta_k\,\nu = 0, \\
(\lambda_l + p\xi_l)\xi + (\mu_l + p\eta_l)\eta + (\nu_l + p\zeta_l)\zeta \\
\qquad + \xi_l\,\lambda + \eta_l\,\mu + \zeta_l\,\nu = 0, \\
(\lambda_m + p\xi_m)\xi + (\mu_m + p\eta_m)\eta + (\nu_m + p\zeta_m)\zeta \\
\qquad + \xi_m\,\lambda + \eta_m\,\mu + \zeta_m\,\nu = 0.
\end{cases}
$$

Durch Elimination von λ, μ, ν erhalten wir hieraus eine Gleichung für ξ, η, ζ in Form einer Determinante, welche nach einigen einfachen Transformationen die Form des ersten Teiles der Gleichung 64) bekommt. Somit ist die Grenzebene zweiter Art allen Geraden des Cylindroids parallel, welcher die möglichen Schraubenaxen enthielte, wenn die Berührung des festen Körpers mit den vier Stützflächen obligatorisch wäre.

Wir wollen jetzt wieder annehmen, dass der feste Körper sich auf vier Flächen nur stützt. Wenn wir aus den paarweise genommenen Gleichungen 66) p eliminieren und die Ausdrücke für λ, μ, ν nach den Formeln 1) einführen, so bekommen wir die Gleichungen der sechs Grenzebenen erster Art, welche der gegebenen Axenrichtung (ξ, η, ζ) entsprechen. Wenn diese Richtung der Bedingung 64) genügt, so existiert eine Schraubenaxe (p), welche zugleich in allen diesen sechs Ebenen enthalten ist. Hieraus sehen wir, dass *bei einer Richtung von Schraubenaxen, welche der Grenzebene zweiter Art parallel ist, alle sechs dieser Richtung entsprechenden Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden.* Unten (§ 22) werden wir zu demselben Resultate auf einem anderen Wege gelangen.

20. *Die Gebiete möglicher Schraubenaxen von gegebener Richtung* haben im Falle von vier Stützflächen folgende Eigenschaften. Wenn die Stütznormalen sich nicht in Opposition befinden, so ist das Gebiet der möglichen Schraubenaxen eines gegebenen Parallelenbündels bei keiner Richtung desselben geschlossen; sind aber die Stütznormalen in Opposition, so bilden alle solche Gebiete geschlossene Prismen. Um das zu zeigen, bemerken wir, dass diese oder jene Form des Gebietes nicht von der gegenseitigen *Lage* der Stütznormalen, sondern nur von ihren *Richtungen* abhängt. Das folgt aus der geometrischen Definition der Grenzebenen erster Art, nach welcher ihre Richtung nur von den Winkeln abhängt, welche zwei Stütznormalen mit der gegebenen Schraubenaxenrichtung bilden. Wenn nun die Stützflächen und die entsprechenden Flächen des festen Körpers so abgeändert werden, dass die Stütznormalen sich selbst parallel bleiben, so bleibt ein nicht geschlossenes prismatisches Gebiet möglicher Schraubenaxen immer nicht geschlossen. Dagegen bleibt ein geschlossenes Gebiet immer geschlossen; es kann bei paralleler Verschiebung der Grenzebenen erster Art in eine Gerade zusammenschrumpfen und dann aus einem Gebiete $(+\omega)$ sich in ein Gebiet $(-\omega)$ verwandeln oder umgekehrt, wird aber immer ein geschlossenes Prisma bilden.

Um also zu sehen, ob ein Gebiet geschlossen ist oder nicht, kann man dieses bei einer speziellen Lage der sich parallel bleibenden Stütznormalen betrachten. Die Antwort findet man aber leicht, wenn die Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden. Wenn diese Normalen sich nicht in Opposition befinden, so kann man durch den Schnittpunkt der Normalen eine solche Ebene ziehen, dass die positiven Endpunkte aller Normalen auf einer Seite derselben sein werden. Um alle Axen, welche in dieser Ebene liegen, sind offenbar Drehungen möglich; es sind um dieselben natürlich auch andere Schraubenverschiebungen möglich, wenn die entsprechenden Parameter gewisse Bedingungen erfüllen. Jedenfalls sehen wir, dass dann auch unendlich entfernte Schraubenaxen möglich sind. Wenn aber die sich schneidenden Stütznormalen in Opposition sind, so sind für den festen Körper nur Drehungen möglich und zwar nur um solche Axen, welche durch den Schnittpunkt der Normalen gehen; d. h. für jede Axenrichtung zieht sich das prismatische Gebiet in eine Gerade zusammen. Daraus kann man schliessen, dass bei irgend einer anderen Lage der Stütznormalen, wenn nur dieselben in Opposition liegen, die prismatischen Gebiete geschlossen bleiben.

Damit in einem jeden Parallelenbündel die möglichen Schraubenaxen ein geschlossenes Prisma bilden, ist es notwendig und hinreichend, dass die vier Stütznormalen in Opposition liegen.

Da wir hauptsächlich die Frage über möglichst grosse Beschränkungen der Verschiebungen eines festen Körpers im Auge behalten, so wollen wir weiter die Opposition der vier Stütznormalen voraussetzen.

21. Bei dieser Voraussetzung werden keine Schraubenaxen erster Ordnung existieren; die zweite und die dritte Gruppe derselben müssen wir aber genauer betrachten, um die Bedeutung der Grenzebene zweiter Art für dieselben klar zu machen. Die Schraubenaxen der zweiten Gruppe, die einem Parallelenbündel angehören, werden, wie wir oben gesehen haben, von drei Grenzebenen erster Art in ein dreikantiges Prisma eingeschlossen, wobei die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenverschiebung nur eine Richtung, $(+\omega)$ oder $(-\omega)$, haben kann. Wir wollen zeigen, dass das Erscheinen dieser oder jener von diesen Richtungen von der Lage des die gegebene Axenrichtung bestimmenden Punktes auf der Parameterkugel auf solche Weise abhängt, dass den

Punkten, welche auf der einen Seite der Grenzebene zweiter Art liegen, die Drehung $(+\omega)$, denen auf der anderen Seite dieser Ebene die Drehung $(-\omega)$ entspricht. — Von den vier Kombinationen der Ungleichheitszeichen für q_1, q_2, q_3, q_4 [§ 18], ist es genügend, nur eine zu betrachten; wir nehmen:

$$67)\qquad q_1 \geqq 0,\quad q_2 \geqq 0,\quad q_3 \geqq 0,\quad q_4 \leqq 0.$$

Dann sind $S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}$ echte Grenzebenen erster Art, welche sich paarweise in den Geraden $\sigma_{234}, \sigma_{314}, \sigma_{124}$ schneiden (§ 12). Im Falle, dass die möglichen Schrauben das Gebiet $(+\omega)$ bilden, muss jede dieser Geraden auch in Bezug auf die nicht durch dieselbe hindurchgehende echte Grenzebene erster Art im Gebiete $(+\omega)$ (§ 4) liegen, z. B. muss die Gerade σ_{234} sich auf derjenigen Seite von S'_{14} befinden, welcher das Gebiet $(+\omega)$ entspricht, wenn nur die zwei Stützflächen Σ_1 und Σ_4 in Betracht genommen werden. Ebenso, wenn das dreikantige Prisma das Gebiet $(-\omega)$ enthält, so muss jede der drei Geraden $\sigma_{234}, \sigma_{314}, \sigma_{124}$ in Bezug auf eine der Grenzebenen erster Art, welche diese Gerade nicht enthält, im Gebiete $(-\omega)$ liegen. Somit besteht die Aufgabe in der Bestimmung des Zeichens für den ersten Teil der Gleichungen jeder der Ebenen $S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}$, wenn darin die Koordinaten entsprechender Geraden $\sigma_{234}, \sigma_{314}, \sigma_{124}$ eingesetzt werden. Für diese Koordinaten haben wir, ausser den die Richtung der Schraubenaxen bestimmenden Koordinaten ξ, η, ζ, Ausdrücke, welche dem Schema 48) nachgebildet werden müssen. Der erste Teil der Gleichung für S'_{14} kann nach den Formeln des § 3 so geschrieben werden:

$$S'_{14} = (\xi_4 q_1 - \xi_1 q_4)\lambda + (\eta_4 q_1 - \eta_1 q_4)\mu + (\zeta_4 q_1 - \zeta_1 q_4)\nu + D_{14}.$$

Indem man hier die Momente der Geraden σ_{234}, welche aus den Formeln

$$\begin{aligned}
V_{234}\lambda_{234} &= (\eta\zeta_2 - \zeta\eta_2)D_{34} + (\eta\zeta_3 - \zeta\eta_3)D_{42} + (\eta\zeta_4 - \zeta\eta_4)D_{23},\\
V_{234}\mu_{234} &= (\zeta\xi_2 - \xi\zeta_2)D_{34} + (\zeta\xi_3 - \xi\zeta_3)D_{42} + (\zeta\xi_4 - \xi\zeta_4)D_{23},\\
V_{234}\nu_{234} &= (\xi\eta_2 - \eta\xi_2)D_{34} + (\xi\eta_3 - \eta\xi_3)D_{42} + (\xi\eta_4 - \eta\xi_4)D_{23},
\end{aligned}$$

bestimmt werden, einsetzt und das Resultat mit $(S'_{14})_{234}$ bezeichnet, bekommt man:

$$68)\ \left\{\begin{aligned}
V_{234}(S'_{14})_{234} = (q_1 V_{402} - q_4 V_{102})D_{34} + (q_1 V_{403} - q_4 V_{103})D_{42}\\
- q_4 V_{104} D_{23} + V_{234} D_{14},
\end{aligned}\right.$$

wo

$$V_{0ik} = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix}$$

bedeutet. Weiter haben wir die Identität:

$$69)\qquad q_i V_{0kl} + q_k V_{0li} + q_l V_{0ik} = V_{ikl}.$$

Es ist nämlich

$$70)\qquad q_i V_{0kl} + q_k V_{0li} + q_l V_{0ik} = -\begin{vmatrix} 0 & \xi & \eta & \zeta \\ q_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ q_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ q_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix},$$

was durch einfache Determinantentransformation auf den Ausdruck V_{ikl} zurückgeführt werden kann. Die Formel 69) benutzend, kann man schreiben:

$$q_1 V_{402} - q_4 V_{102} = V_{124} - q_2 V_{041},$$
$$q^1 V_{403} - q_4 V_{103} = V_{134} - q_3 V_{041}.$$

Wenn man dieses in 68) einsetzt und den Zeichenwechsel, welcher von der Permutation der Indices abhängt (§ 18), beachtet, so erhält man

$$V_{234}(S'_{14})_{234} = V_{234}D_{14} + V_{314}D_{24} + V_{124}D_{34} - V_{041}(q_1 D_{34} + q_3 D_{42} + q_4 D_{23}).$$

Die Formel 10) giebt:

$$q_i D_{kl} + q_k D_{li} + q_l D_{ik} = 0;$$

also

$$71)\qquad (S'_{14})_{234} = \frac{V_{234}D_{14} + V_{314}D_{24} + V_{124}D_{34}}{V_{234}}.$$

Die Formel 10) wieder benutzend, kann man schreiben:

$$V_{234}D_{14} + V_{314}D_{24} + V_{124}D_{34}$$
$$= (\lambda_4\xi + \mu_4\eta + \nu_4\zeta)\begin{vmatrix} q_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ q_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ q_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 0 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} - q_4 \begin{vmatrix} (\lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta) & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ (\lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta) & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ (\lambda_3\xi + \mu_3\eta + \nu_3\zeta) & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 0 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Indem wir die erste dieser Determinanten der Determinante 70) ähnlich transformieren, finden wir, dass sie $q_4 V_{123}$ gleich ist. Also

$$V_{234}D_{14} + V_{314}D_{24} + V_{14}D_{34} = -q_4 \begin{vmatrix} \lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \lambda_3\xi + \mu_3\eta + \nu_3\zeta & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3 \\ \lambda_4\xi + \mu_4\eta + \nu_4\zeta & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Daher erhalten wir schliesslich:

$$72)\ (S'_{14})_{234} = -\frac{q_4}{V_{234}}(L_{1234}\xi + M_{1234}\eta + N_{1234}\zeta) + -\frac{q_4}{V_{234}}P'_{1234},$$

wo L_{1234}, M_{1234}, N_{1234} nach dem Schema 65) gebildet sind. Um die analogen Ausdrücke für σ_{314} und σ_{124} zu bekommen, muss man nur beachten, dass der Index $(\ _4)$ seinen Platz nicht ändert, die ersten drei Indices aber eine cirkuläre Permutation erleiden. Die Koeffizienten von P'_{1234} bleiben dabei ungeändert; somit bekommen wir:

$$73)\qquad (S'_{24})_{314} = -\frac{q_4}{V_{314}}P'_{1234},$$

$$74)\qquad (S'_{34})_{124} = -\frac{q_4}{V_{124}}P'_{1234}.$$

Überhaupt ist es nützlich, folgende allgemeine Formel sich zu merken:

75) $$(S'_{ik})_{klm} = -\frac{q_k}{V_{klm}} P'_{iklm},$$

und darauf zu achten, dass die Vertauschung der Indices (i) und (k) die Änderung des Zeichens nach sich zieht, d. h.

76) $$(S'_{ik})_{klm} = -(S'_{ki})_{klm},$$

weil dabei die Zeichen aller Glieder in P'_{iklm} wechseln; während die Vertauschung der Indices (k), (l) und (m) keinen Einfluss auf das Vorzeichen von $(S'_{ik})_{klm}$ ausübt, da dabei die Zeichen der beiden Grössen V_{klm} und P'_{iklm} wechseln. Das ist übrigens auch selbstverständlich, da die genannten Indices nur die Gerade σ_{klm} angeben, deren Lage von der Reihenfolge dieser Indices nicht abhängt.

Zu unserer Aufgabe zurückkehrend, können wir jetzt das Merkmal 60) für die Opposition der Stütznormalen benutzen; danach haben die Grössen

77) $$V_{234}, \quad V_{314}, \quad V_{124}, \quad V_{321}$$

dasselbe Zeichen; es hängt daher nur von dem Zeichen von P'_{1234} ab, ob das Gebiet $(+\omega)$ oder $(-\omega)$ erscheint, was zu beweisen war.

Man kann sich jetzt leicht überzeugen, dass die Ebene

78) $$P'_{1234} = 0$$

dieselbe Rolle auch in anderen Fällen der Schraubenaxen zweiter Gruppe spielt, d. h., wenn ihre Richtungen einem der drei Systeme von Ungleichheiten:

79) $$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_3 \leqq 0,$$

80) $$q_1 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_2 \leqq 0,$$

81) $$q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_1 \leqq 0,$$

oder den ihnen entgegengesetzten genügen. Dazu braucht man nur das am Schlusse des § 18 Gesagte zu beachten. Z. B. bei den Schraubenaxen, welche den Bedingungen 79) entsprechen, tritt die Normale n_3 an Stelle von n_4; in den Formeln 72), 73) und 74) wird daher statt q_4 der Cosinus q_3 stehen, und statt P'_{1234} muss jetzt P'_{1243} geschrieben werden, was nur zu einem Zeichenwechsel führt. Die Nenner dieser Formeln sind jetzt:

$$V_{243}, \quad V_{413}, \quad V_{123},$$

welche wegen der Opposition der Normalen ein und dasselbe, aber dem früheren entgegengesetzte Zeichen haben.

Ähnliches finden wir in den beiden übrigen Fällen, wo anstatt der ursprünglichen die Grössen:

$$\begin{matrix} q_2, & P'_{1432}, & V_{432}, & V_{312}, & V_{142}, \\ q_1, & P'_{4321}, & V_{231}, & V_{341}, & V_{421}, \end{matrix}$$

zu setzen sind.

Somit sehen wir, dass in allen Fällen der Axen zweiter Gruppe das Erscheinen der Gebiete $(+\omega)$ oder $(-\omega)$ ausschliesslich durch das Zeichen von P'_{1234} bedingt wird. Und zwar müssen, der Formel 27) gemäss, zum Erscheinen des Gebietes $(+\omega)$ die Grössen 72), 73), 74) positiv sein; dazu müssen

$$P'_{1234},\quad V_{234},\quad V_{314},\quad V_{124},\quad V_{321}$$

dasselbe Zeichen haben. Da aber, wegen der Opposition der Stütznormalen die letzteren vier von diesen Grössen schon dasselbe Zeichen haben, so kann man die genannte Bedingung in allgemeiner Form so aussprechen:

für das Gebiet $(+\omega)$:

82) $$V_{ikl}P'_{iklm} < 0,$$

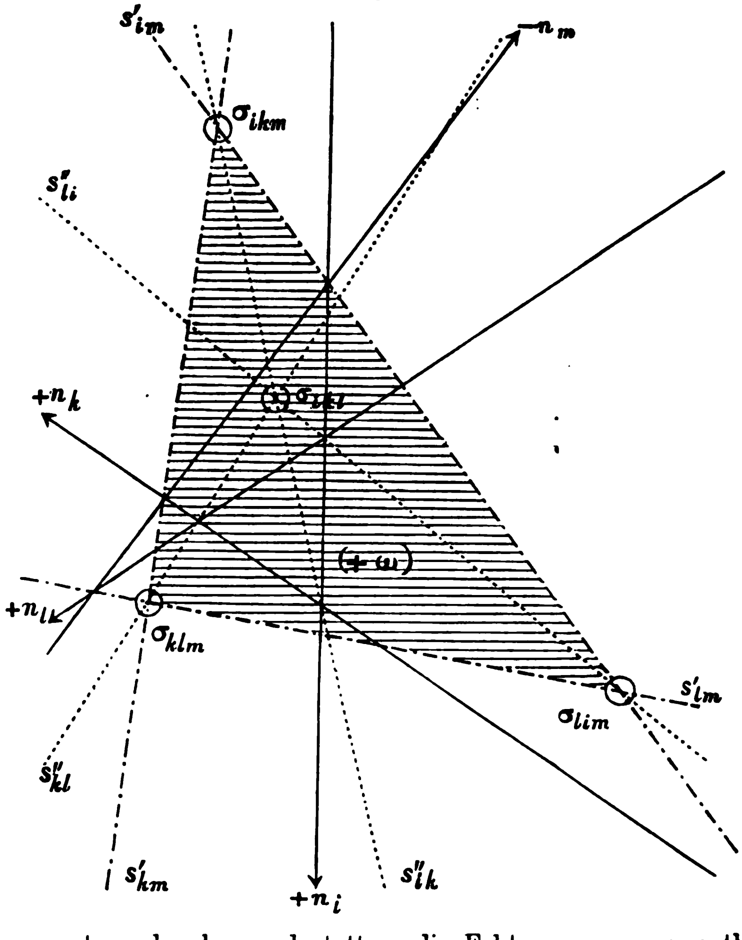
für das Gebiet $(-\omega)$:

83) $$V_{ikl}P'_{iklm} > 0.$$

22. Wir wissen, dass im Falle von drei Stützflächen die drei Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden. Im Falle von vier Stützflächen haben wir für die Axen der zweiten Gruppe drei echte Grenzebenen erster Art, $S'_{im} S'_{kl} S'_{lm}$ und drei unechte Grenzebenen S''_{kl}, S''_{li}, S''_{ik}. Wir wollen sehen, welche Lage diese drei letzteren Ebenen haben. Zu diesem Zwecke machen wir auf einer zu dem gegebenen Parallelenbündel von Schraubenaxen senkrechten Ebene die Abbildung des möglichen Axengebietes nach den Regeln von [§ 7]. Im betrachteten Falle stellt sich dieses Gebiet als ein Dreieck dar, dessen Seiten von den Spuren s'_{im}, s'_{km}, s'_{lm} dreier echten Grenzebenen erster Art gebildet werden. Die Ecken dieses Dreiecks sind die Spuren der Geraden σ_{klm}, σ_{lim}, σ_{ikm} (§ 12). Durch diese Ecken gehen auch die Spuren s''_{kl}, s''_{li}, s''_{ik} (Fig. 5) der drei unechten Grenzebenen. Nach dem im § 12 Gezeigten schneiden sich diese Geraden in einem Punkte σ_{ikl}, welcher notwendig im Innern des Dreiecks liegt; denn die unechte Grenzebene liegt (§ 13) immer in demjenigen Paare der von zwei echten Grenzebenen gebildeten Scheitelwinkel, welches das Gebiet möglicher Schraubenaxen enthält. Es soll die Gerade σ_{ikl} die Centralaxe der gegebenen Richtung genannt werden. Sie hat folgende Eigenschaft. Wenn man die Normale n_m, d. h. diejenige, welche auf die Lage aller drei echten Grenzebenen Einfluss hat, parallel verschiebt, so rücken auch die Ebenen S'_{im}, S'_{km}, S'_{lm}, sich selbst parallel bleibend fort (§ 20). Das Dreieck, welches das mögliche Axengebiet bestimmt, bleibt also sich selbst ähnlich; es kann dabei in einen Punkt zusammenschrumpfen; und wenn das geschieht, so fallen die Ecken des Dreiecks mit der Spur der Geraden σ_{ikl} zusammen. Wenn also alle sechs Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden, so haben sie zur Schnittlinie die Centralaxe der gegebenen Richtung.

Wenn die Lagen der Stütznormalen willkürlich gegeben sind, so schneiden sich alle sechs Ebenen in einer Geraden nur bei solchen Richtungen der Schraubenaxen, für welche die Grössen 72), 73), 74) und die ihnen ähnlichen den anderen Fällen der Schraubenaxen zweiten

Fig. 5.



Gruppe entsprechenden und statt q_4 die Faktoren q_1, q_2, q_3 enthaltenden Grössen gleich Null werden. Wenn keine der Grössen q_1, q_2, q_3, q_4 gleich Null ist, so muss die Bedingung 78) erfüllt werden, d. h. die Axenrichtungen müssen der Grenzebene zweiter Art parallel sein. Anderseits werden für die Schnittgerade der sechs Grenzebenen erster Art alle vier Grössen 58) einander gleich; diese Gerade stellt also eine Schraubenaxe dar, welche für den festen Körper möglich wäre, wenn er sich von vier Stützflächen nicht entfernen könnte. Daraus schliessen wir: Alle Axenrichtungen, für welche die sechs Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden, sind der Grenzebene zweiter Art parallel, und die Schnittgeraden gehören einem Cylindroid an.

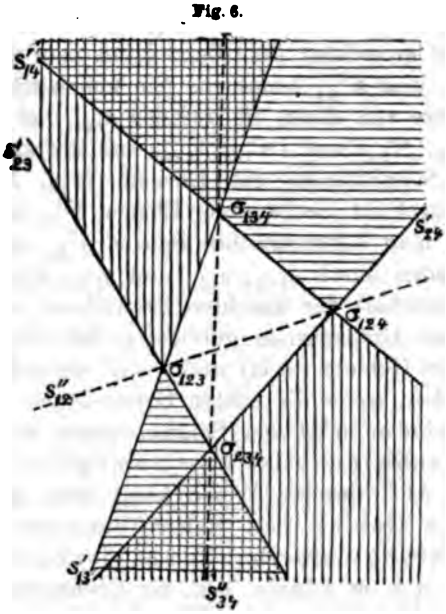
Offenbar ist dieser Schluss auch für die Schraubenaxen der dritten Gruppe richtig, zu deren Betrachtung wir jetzt übergehen.

23. Die Schraubenaxen der dritten Gruppe werden durch vier echte Grenzebenen bestimmt (§ 17). Die Opposition der Stütznormalen voraussetzend, können wir von Anfang an annehmen, dass jedes Gebiet möglicher Schraubenaxen einer gegebenen Richtung ein geschlossenes Prisma bildet. Von den Fällen, welche jetzt die Zeichen von q_1, q_2, q_3, q_4 betreffen, werden wir den Fall betrachten, welcher den Ungleichheiten

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \leqq 0, \quad q_4 \leqq 0,$$

oder den umgekehrten entspricht. Dann sind S'_{13}, S'_{23}, S'_{14}, S'_{24} echte Grenzebenen erster Art. Im allgemeinen kann man sich hier folgende drei Fälle vorstellen: 1. das Erscheinen eines geschlossenen Gebietes ($+\omega$) [Fig. 40], oder 2. eines geschlossenen Gebietes ($-\omega$) [Fig. 41] oder 3. vollkommenes Verschwinden möglicher Axen gegebener Richtung [Fig. 42]. In Wirklichkeit aber, wegen einiger Eigenschaften der Grenzebenen erster Art, ist die letztere Voraussetzung unzulässig*. Um das zu zeigen, wollen wir die ebene Darstellung der Axengebiete zu Hilfe nehmen. Jedes Paar der Spuren (s'_{13}, s'_{23}), (s'_{14}, s'_{24}) der echten Grenzebenen teilt die ganze Ebene (Fig. 6) in vier Gebiete, welche wir so bezeichnen werden: $(+\,+)_3$, $(-\,-)_3$, $(+\,-)_3$, $(-\,+)_3$ und $(+\,+)_4$, $(-\,-)_4$, $(+\,-)_4$, $(-\,+)_4$. Hier bedeutet z. B. $(+\,+)_3$ dasjenige Gebiet zwischen den Geraden s'_{13} und s'_{23}, welches in Bezug auf die Grenzebenen S'_{13}, S'_{23} das Gebiet $(+)$ ist; ebenso bezeichnet z. B. $(-\,+)_4$ dasjenige Gebiet zwischen den Geraden s'_{14} und s'_{24}, deren Punkten in Bezug auf die Ebene S'_{14} das Gebiet $(-\,\omega)$ und in Bezug auf die

Fig. 6.



* Die entsprechende Stelle in meiner in § 1 zitierten Arbeit [§ 21, S. 169 und 170], wo die Möglichkeit dieses Falles zugelassen wurde, muss geändert werden.

Ebene S'_{24} das Gebiet $(+\omega)$ entspricht. Ausserdem ist in Bezug auf jedes Paar der Geraden s'_{13}, s'_{23}), (s'_{14}, s'_{24}) das Gebiet $(+\omega)$ horizontal und das Gebiet $(-\omega)$ vertikal schraffiert. Da das wirklich mögliche Schraubenaxengebiet nur durch solche Punkte bestimmt wird, welche den beiden Gebieten $(+\omega)$ oder den beiden Gebieten $(-\omega)$ gemein sind, so wäre für das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxen notwendig und hinreichend, dass die Schenkel der Winkel $(++)_3$ und $(++)_4$ sich nicht schneiden; und dasselbe muss auch für die Winkel $(--)_3$ und $(--)_4$ erfüllt werden. Dann wird jede der Geraden $\sigma_{123}, \sigma_{124}, \sigma_{134}, \sigma_{234}$ in Beziehung zu den beiden sie nicht enthaltenden Grenzebenen folgenden Bedingungen genügen: sie wird in Bezug auf eine dieser Grenzebenen im Gebiete $(+\omega)$ und in Bezug auf die andere Ebene im Gebiete $(-\omega)$ liegen müssen. Umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt wären, so könnten die beiden Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ keine gemeinschaftlichen Punkte haben. Man kann aber zeigen, dass die Erfüllung dieser Bedingungen nicht erreichbar ist. Dazu kann man die beiden unechten Grenzebenen S''_{12} und S''_{34} benutzen. Sie haben nämlich die Eigenschaft, dass die erstere von ihnen die Geraden σ_{123} und σ_{124} als Schnittlinie der Ebenen (S'_{13}, S'_{23}) und (S'_{14}, S_{24}), und die andere die Geraden σ_{134} und σ_{234} als Schnittlinien der Ebenen (S'_{13}, S'_{14}) und (S'_{23}, S'_{24}) enthält. Dadurch ist die Lage der Ebenen S''_{12} und S''_{34} vollkommen bestimmt; und man bekommt ihre Spuren s''_{12} und s''_{34} (Fig. 6), wenn man die Geraden durch $\sigma_{123}, \sigma_{124}$ und $\sigma_{134}, \sigma_{234}$ zieht. Wir kennen aber die Eigenschaft der unechten Grenzebene, dass sie in denjenigen von zwei echten Grenzebenen gebildeten Scheitelwinkeln liegt, welche die möglichen Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ darstellen; das kann aber nicht erfüllt werden, wenn die echten Grenzebenen eine für das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxen notwendige Lage haben. Dieses Verschwinden ist also unmöglich.

Auf dieselbe Weise kann man leicht einsehen, dass das mögliche Gebiet von Schraubenaxen dritter Gruppe bei jeder Richtung derselben in ein vierkantiges Prisma eingeschlossen ist, d. h. es können z. B. die Grenzebenen keine solchen Lagen haben, wie es in Fig. 7 gezeichnet ist; denn dann könnten wieder die unechten Grenzebenen nicht die erforderliche Lage haben.

24. Es bleibt uns noch übrig, das Merkmal zu bestimmen, nach welchem man auch für die Schraubenaxen der dritten Gruppe die Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ unterscheiden könnte. Die Bezeichnungen von § 21 benutzend, kann man sagen, dass das Gebiet $(+\omega)$ den Bedingungen

$$(S'_{14})_{123} > 0, \quad (S'_{24})_{123} > 0$$

genügen muss; und das ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, da die anderen zwei Bedingungen

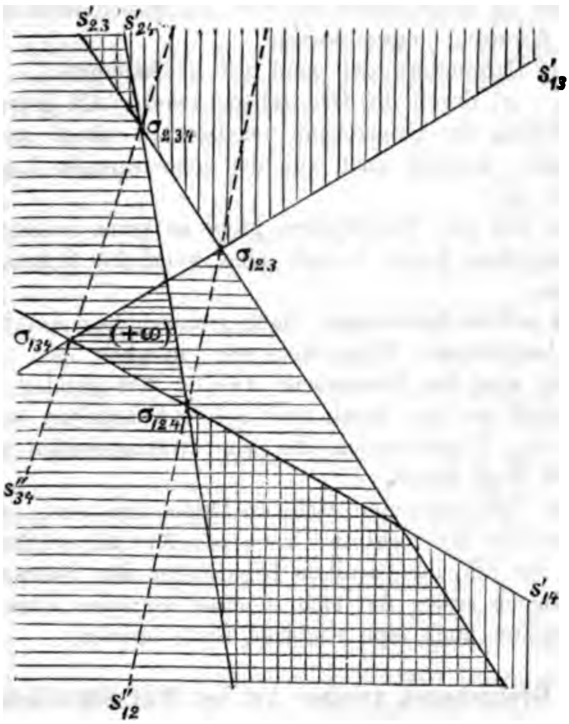
$$(S'_{13})_{124} > 0, \quad (S'_{23})_{124} > 0,$$

von selbst daraus folgen. Nach dem Schema 75) und 76) kann man schreiben:

$$(S'_{14})_{123} = -(S'_{41})_{123} = +\frac{q_1}{V_{123}} P'_{4123} = -\frac{q_1}{V_{123}} P'_{1234},$$

$$(S'_{24})_{123} = -(S'_{42})_{123} = -(S'_{42})_{213} = +\frac{q_2}{V_{213}} P'_{4213} = -\frac{q_2}{V_{123}} P'_{1234};$$

Fig. 7.



und wenn q_1 und q_2 positiv vorausgesetzt werden, finden wir für das Gebiet $(+\omega)$

$$V_{123} \cdot P'_{1234} < 0,$$

und überhaupt für alle Schraubenaxen der dritten Gruppe:

$$V_{ikl} \cdot P'_{iklm} < 0,$$

und für das Gebiet $(-\omega)$ das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen.

Somit sehen wir, dass das Merkmal, welches die Formeln 82) und 83) aussprechen, auf alle Schraubenaxen anwendbar ist, wenn der feste Körper sich auf vier Flächen stützt und die Stütznormalen sich in Opposition befinden.

25. Alles in diesem Kapitel zusammenfassend, haben wir für den Fall von vier Stützflächen folgende Resultate.

Den vier Stütznormalen kann man solche Richtungen geben (Opposition), dass in jedem Parallelenbündel von Geraden die möglichen Schraubenaxen ein geschlossenes prismatisches Gebiet bilden, welches durch drei oder durch vier Grenzebenen erster Art umgeben ist.

In jedem solchen Gebiete hat die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenverschiebung nur eine Richtung und die Parameterwerte sind in gewisse im allgemeinen endliche, für verschiedene Axen übrigens verschiedene Grenzen eingeschlossen.

Auf der Parameterkugel sind die Richtungen $(+\omega)$ von den Richtungen $(-\omega)$ durch die Grenzebene zweiter Art getrennt.

Die Richtung der Grenzebene zweiter Art hängt nicht nur von den Richtungen, sondern auch von den gegenseitigen Lagen der vier Stütznormalen ab.

Im Falle von vier Stützflächen giebt es keine solchen Parallelenbündel, in welchen keine Gerade eine mögliche Schraubenaxe darstellen könnte.

Es giebt solche Richtungen, nach welchen nur eine Schraubenaxe mit einem bestimmten Parameterwerte möglich ist. Alle solche Schraubenaxen sind der Grenzebene zweiter Art parallel und gehören einem Cylindroid an, das durch zwei solche Schrauben bestimmt wird, welche die zwei Transversalen der vier Stütznormalen sind und den Parameterwert Null haben.

Wenn die Stütznormalen nicht in Opposition sind, so kann man sich eine unechte Grenzebene zweiter Art als solche Ebene vorstellen, dass für alle ihr parallele Richtungen der Schraubenaxen die sechs Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden. Diese Ebene wird später auch eine wichtige Rolle spielen.

IV. Grenzebenen zweiter Art bei fünf Stützflächen.

26. Die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die möglichen Schraubenaxen nicht jede beliebige Richtung haben können, ist fünf. Dieser Fall ist daher für das Endziel der ganzen Untersuchung wichtig.

Wir werden wieder drei Gruppen von Schraubenaxen, je nach den Zeichen von

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad q_4, \quad q_5, \tag{84}$$

unterscheiden. Für die Axen der ersten Gruppe haben alle diese Grössen gleiche Zeichen; für die Axen der zweiten Gruppe haben vier und für die Axen der dritten Gruppe drei von denselben gleiche Zeichen.

Wir werden weiter voraussetzen, dass vier von den Stütznormalen in Opposition sind, so dass alle Schraubenaxen der ersten Gruppe verschwinden (§ 18).

Im ganzen kann man sich fünf Grenzebenen zweiter Art vorstellen, indem man jedesmal vier von den fünf Stütznormalen miteinander verbindet; es sind aber nur zwei von diesen Ebenen echte Grenzebenen. Sind nämlich die Normalen n_1, n_2, n_3, n_4 in Opposition und P'_{1234} die ihnen entsprechende Grenzebene zweiter Art, so wird die fünfte Normale, n_5, nur mit bestimmten drei von den ersteren Normalen in Opposition sein und eine zweite Grenzebene zweiter Art bestimmen. Um die entsprechenden Normalen auszusuchen, muss man beachten, dass auf der Parameterkugel die positiven Endpunkte der den vier sich in Opposition befindenden Normalen parallelen Durchmesser dieser Kugel die Ecken von vier sphärischen Dreiecken sind, welche die ganze Kugelfläche bedecken. Daher wird der negative Endpunkt des der fünften Normale parallelen Durchmessers notwendig im Innern eines dieser Dreiecke liegen; dann sind die den Ecken desselben entsprechenden Stütznormalen die gesuchten (§ 18). Wir werden weiter annehmen, dass n_2, n_3, n_4 diese Normalen sind, und dem entsprechend die zweite Grenzebene zweiter Art mit P'_{2345} bezeichnen. Die übrigen drei Grenzebenen können schon der Bedingung der Opposition nicht genügen, sind also unechte Grenzebenen zweiter Art und müssen so bezeichnet werden: P''_{1235}, P''_{1245}, P''_{1345}.

Um unter den fünf Grenzebenen zweiter Art die zwei echten aufzusuchen, wenn die Stütznormalen durch ihre Koordinaten gegeben sind, kann man das im § 18 über die Grössen 60) Gesagte benutzen. Jetzt haben wir nämlich zehn solcher Grössen. Wir stellen dieselben in fünf Gruppen zu vier Elementen nach dem Schema 60) zusammen und wählen solche Gruppen, in welchen die Elemente dasselbe Zeichen haben. Nehmen wir z. B. an, dass die Normalen n_1, n_2, n_3, n_4 in Opposition sind; dann müssen wir die Kombinationen der Normalen (n_2, n_3, n_4, n_5), (n_3, n_4, n_1, n_5), (n_4, n_1, n_2, n_5) und (n_1, n_2, n_3, n_5) untersuchen, wobei wir finden werden, dass für die eine derselben die Grössen V_{kl5}, V_{li5}, V_{ik5}, V_{lki} dasselbe Zeichen haben werden. Die dem entsprechende Ebene P_{ikl5} wird die gesuchte echte Grenzebene zweiter Art sein.

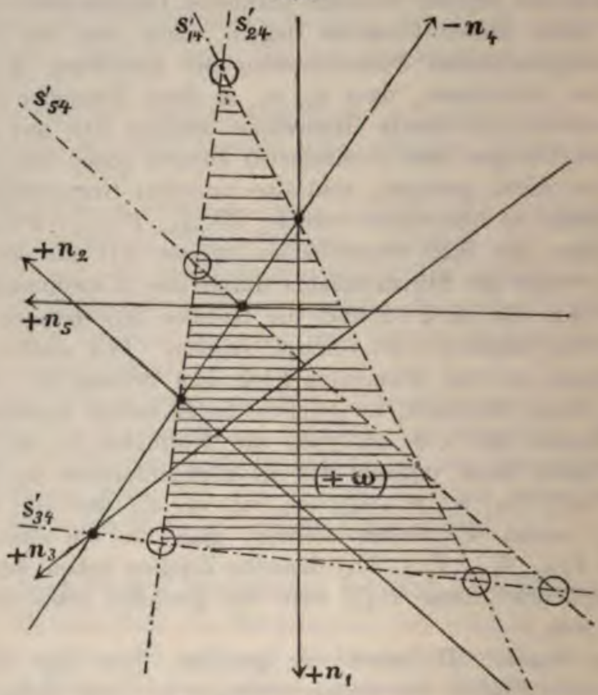
27. Im Kapitel III haben wir gesehen, dass eine Grenzebene zweiter Art die Fläche der Parameterkugel in zwei Gebiete, $(+\omega)$ und $(-\omega)$, teilt. Die beiden Ebenen P'_{1234} und P'_{2345} schneiden sich auf der Parameterkugel in einem Durchmesser desselben und teilen die Kugelfläche in vier Gebiete, welche je nach dem Vorzeichen von ω so bezeichnet werden können: $(++)$ $(--)$, $(+-)$ und $(-+)$. Jeden vier in Opposition liegenden Stütznormalen entspricht in einer zur gegebenen Axenrichtung senkrechten Ebene ein geschlossenes drei- oder viereckiges Gebiet, welches die möglichen Schraubenaxen bestimmt und welchem das eine oder das andere Zeichen der Winkelgeschwindigkeit entspricht. Im Falle von fünf Stützflächen erscheint also das mögliche Axengebiet als gemeinsamer Teil von zwei solchen

Drei- oder Vierecken, welchen dasselbe Zeichen von ω entspricht. Dieses Gebiet kann also jetzt nur bei solchen Axenrichtungen existieren, welche auf der Parameterkugel durch die Punkte der Gebiete $(++)$ oder $(--)$ bestimmt werden. Wir brauchen also nur das Merkmal von § 24 auf jede der Ebenen P'_{1234}, P'_{2345} anzuwenden, um die möglichen Axenrichtungen zu finden.

Wir sehen zugleich, dass **mindestens fünf Stützflächen** nötig sind, **damit die möglichen Schraubenaxen nicht alle Richtungen haben können.**

28. Die Bezeichnung P'_{1234} und P'_{2345} für die echten Grenzebenen beibehaltend, wollen wir jetzt die Schraubenaxen der **zweiten**

Fig. 8.



Gruppe näher betrachten und die Frage beantworten, ob für jede gegebene **mögliche** Axenrichtung die beiden in ebener Darstellung jetzt dreieckigen (§ 21) Gebiete auch wirklich immer einen gemeinschaftlichen Teil haben. Eine von den Grössen 84) hat jetzt das entgegengesetzte Zeichen von den vier anderen; diese Grösse kann aber weder q_1 noch q_5 sein, denn dann würden die Normalen n_1, n_2, n_3, n_4 oder die Normalen n_2, n_3, n_4, n_5 nicht in Opposition sein, was der Voraussetzung, dass die Ebenen P'_{1234} und P'_{2345} **echte** Grenzebenen sind, widerspricht. Es möge die gegebene Axenrichtung den Bedingungen

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_5 > 0$$
$$q_4 \leqq 0$$

oder den ihnen entgegengesetzten genügen. Die Grenzebenen erster Art, welche dann die beiden möglichen Axengebiete begrenzen, sind entsprechend: S'_{14}, S'_{24}, S'_{34} und S'_{24}, S'_{34}, S'_{54}. Wir sehen, dass die beiden Dreiecke zwei gemeinschaftliche Seiten s'_{24}, s'_{34} (die Spuren der Ebenen S'_{24}, S'_{34}) besitzen. Und da in den beiden Gebieten die Winkelgeschwindigkeit, bei gegebener Axenrichtung, welche auf der Parameterkugel den Gebieten $(++)$ und $(--)$ angehört, dieselbe Richtung hat, so sind auch die von den Seiten s'_{24}, s'_{34} eingeschlossenen Winkel der beiden Dreiecke gemeinsam. Daraus folgt die notwendige Existenz eines gemeinsamen Teiles der beiden Dreicke (Fig. 8).

29. Bei den Schraubenaxen der dritten Gruppe kann man, nach der Zahl der Kombinationen von Ungleichheiten

$$q_i \geqq 0, \quad q_k \geqq 0, \quad q_l \geqq 0,$$
$$q_m \leqq 0, \quad q_r \leqq 0,$$

zehn Fälle unterscheiden. Und in Abhängigkeit davon, in welcher Beziehung diese Kombinationen zu den beiden Kombinationen von vier die Opposition bildenden Stützuormalen stehen, kann das mögliche Axengebiet auf dreierlei Weise gebildet werden: es kann in ebener Darstellung als gemeinsamer Teil 1. von zwei Vierecken, 2. von einem Viereck und einem Dreieck und 3. von zwei Dreiecken erscheinen. Der Unterschied in der Bildung des möglichen Axengebietes hängt davon ab, welche von den zehn Grenzebenen erster Art jetzt echte sein werden. Die frühere Voraussetzung, dass P'_{1234} und P'_{2345} echte Grenzebenen zweiter Art sind, beibehaltend, finden wir leicht, dass positiven Werten von q_1 und q_5 zwei Vierecke, verschiedenen Zeichen dieser Grössen ein Viereck und ein Dreieck und negativen Werten derselben zwei Dreiecke entsprechen. In der folgenden Tabelle sind alle hier möglichen Fälle zusammengestellt, wobei die echten Grenzebenen erster Art und die Zahlen (III) und (IV) der ihnen entsprechenden Seiten möglicher Axengebiete eingeschrieben sind:

	$q_1\,q_5$	$q_2\,q_3\,q_4$							
1.	$++$	$+--$	S'_{13}	S'_{23}	S'_{14}	S'_{24}			IV
				S'_{23}		S'_{24}	S'_{53}	S'_{54}	IV
	$++$	$-+-$	S'_{12}	S'_{32}	S'_{14}	S'_{34}			IV
				S'_{32}		S'_{34}	S'_{52}	S'_{54}	IV
	$++$	$--+$	S'_{12}	S'_{42}	S'_{13}	S'_{43}			IV
				S'_{42}		S'_{43}	S'_{52}	S'_{53}	IV

	$q_1 q_5$	$q_2 q_3 q_4$		
2.	$+-$	$++-$	S'_{14} S'_{24} S'_{34}	III
			S'_{24} S'_{34} S'_{25} S'_{35}	IV
	$+-$	$+-+$	S'_{13} S'_{23} S'_{43}	III
			S'_{23} S'_{43} S'_{25} S'_{45}	IV
	$+-$	$-++$	S'_{12} S'_{32} S'_{42}	III
			S'_{32} S'_{42} S'_{53} S'_{54}	IV
	$-+$	$++-$	S'_{21} S'_{31} S'_{24} S'_{34}	IV
			S'_{24} S'_{34} S'_{54}	III
	$-+$	$+-+$	S'_{21} S'_{41} S'_{23} S'_{43}	IV
			S'_{23} S'_{43} S'_{53}	III
	$-+$	$-++$	S'_{31} S'_{41} S'_{32} S'_{42}	IV
			S'_{32} S'_{42} S'_{52}	III
3.	$--$	$+++$	S'_{21} S'_{31} S'_{41}	III
			S'_{25} S'_{35} S'_{45}	III

30. Es soll, ähnlich wie im § 28, gezeigt werden, dass auch bei den Schraubenaxen der dritten Gruppe die beiden Gebiete, welche zur Bestimmung der möglichen Axen dienen, auch wirklich immer einen gemeinsamen Teil haben. Wenn diese Gebiete beide viereckig sind oder das eine ein Viereck und das andere ein Dreieck darstellt, so ist das Gesagte auf dieselbe Weise ersichtlich wie in § 28: beide Figuren haben nämlich zwei gemeinschaftliche Seiten und einen und denselben von diesen Seiten eingeschlossenen inneren Winkel, da beide Figuren wieder einer solchen Richtung der Axen entsprechen, welche auf der Parameterkugel durch einen Punkt des Gebietes $(++)$ oder $(--)$ bestimmt wird. In der Fig. 9 ist der Fall von zwei Vierecken und in der Fig. 10 der Fall von einem Viereck und einem Dreieck dargestellt.

Wenn aber beide Gebiete durch Dreiecke bestimmt werden, muss eine andere Betrachtung zu Hilfe genommen werden. Man kann dazu die in § 22 angeführten Eigenschaften der unechten Grenzebenen erster Art benutzen. Wir haben jetzt vier solche Ebenen: S''_{23}, S''_{34}, S''_{42}, S''_{15}; die Spuren der drei ersteren von denselben schneiden sich in einem Punkte, der Spur der Geraden σ_{234}, welcher im Innern jedes der beiden von den Spuren der ersten Grenzebenen erster Art, S'_{21}, S'_{31}, S'_{41} und S'_{25}, S'_{35}, S'_{45}, gebildeten Dreieck liegt (die letzte Zeile der Tabelle in § 29).

Fig. 9.

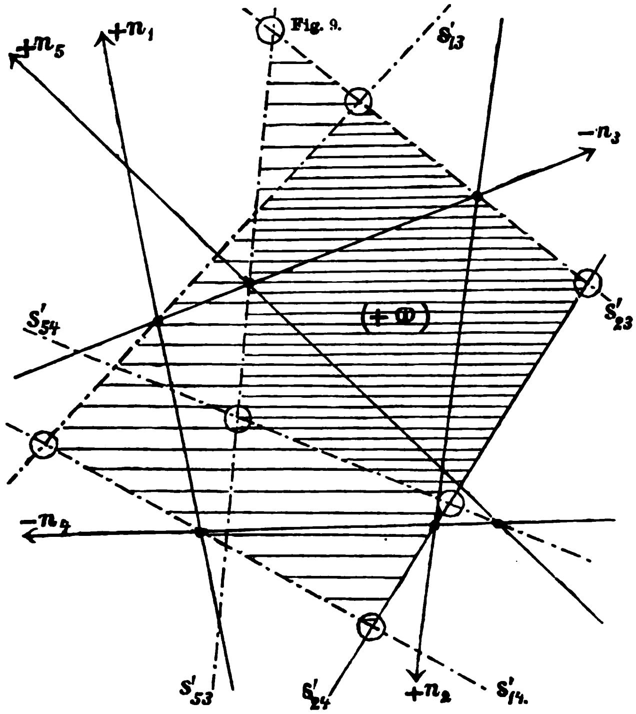
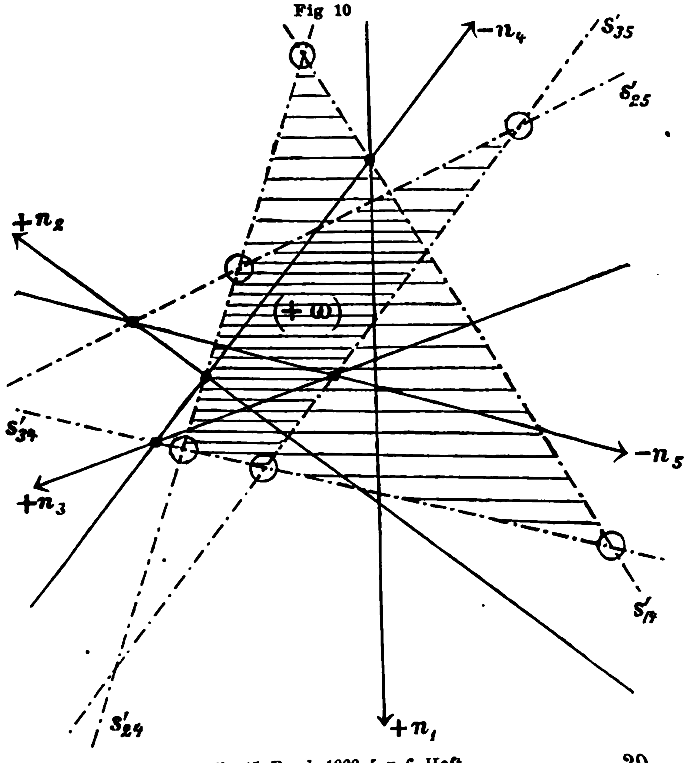
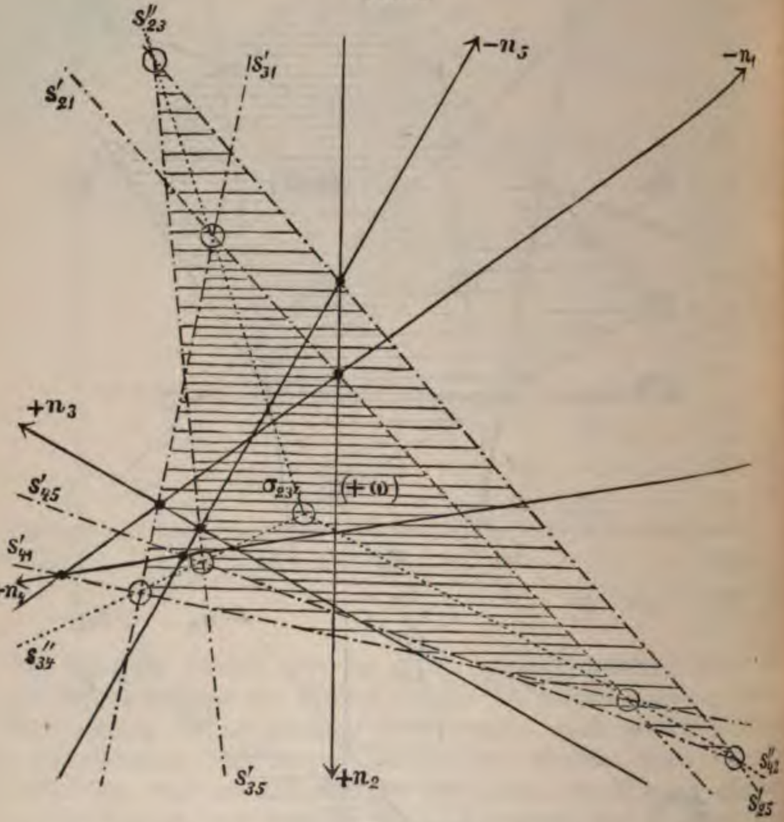

$+n_5$
$+n_1$
S'_{13}
$-n_3$
S'_{54}
S'_{23}
$(+\omega)$
$-n_4$
S'_{53}
S'_{24}
$+n_2$
S'_{14}.

Fig 10


$-n_4$
S'_{35}
S'_{25}
$+n_2$
$(+\omega)$
S'_{34}
$-n_5$
$+n_3$
S'_{14}
S'_{24}
$+n_1$

Daraus sieht man, dass diese Dreiecke notwendig einen gemeinsamen Teil haben müssen. Dieser Fall ist in Fig. 11 dargestellt.

Fig. 11.



31. In § 26 wurde schon bemerkt, dass im Falle von fünf Stützflächen ausser den zwei echten Grenzebenen zweiter Art noch drei unechte existieren. Für das Folgende werden einige Eigenschaften dieser letzteren Ebenen nötig sein.

Die drei unechten Grenzebenen zweiter Art schneiden sich mit den zwei echten Grenzebenen zweiter Art in einer Geraden. Wir wollen für die letzteren wieder die Bezeichnung P'_{1234}, P'_{2345} benutzen. Bei einer der Ebene P'_{1234} parallelen Axenrichtung schneiden sich die sechs Grenzebenen erster Art S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34} in einer Geraden σ_{1234} (§ 22), welche den Bedingungen

85) $$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

genügt. Ebenso bei einer der Ebene P'_{2345} parallelen Axenrichtung haben wir eine Gerade σ_{2345}, welche den sechs Ebenen S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{34}, S_{35}, S_{45} angehört und den Gleichheiten

$$\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 - \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 - \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$$

genügt. Daher hat die Durchschnittsgerade der Ebenen P'_{1234} und P'_{2345} die Eigenschaft, dass unter den ihr parallelen Geraden eine solche Gerade σ_{12345} existiert, für welche

86) $$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$$

sind, und welche allen zehn echten oder unechten Grenzebenen erster Art angehört. Dieses zeigt aber, dass die genommene Axenrichtung auch den Ebenen P''_{1345}, P''_{1245} und P''_{1235} parallel ist, so dass alle fünf Grenzebenen zweiter Art, welche zudem durch den Mittelpunkt der Parameterkugel gehen, sich in einer Geraden schneiden.

Die durch die Bedingungen 86) bestimmte Gerade σ_{12345} ist offenbar diejenige Schraubenaxe, welche dem festen Körper allein möglich bliebe, wenn derselbe sich nicht von den fünf Stützflächen entfernen könnte.

Eine andere Eigenschaft der drei unechten Grenzebenen zweiter Art, welche im Falle von sieben Stützflächen (§ 45) eine wichtige Bedeutung haben wird, besteht darin, dass alle diese Ebenen in demjenigen Paare der von den beiden echten Grenzebenen zweiter Art gebildeten Scheitelwinkel liegen, welches auf der Parameterkugel die möglichen Axenrichtungen bestimmt. Wählen wir z. B. eine der Ebene P''_{1235} parallele Richtung von Schraubenaxen. Man kann zeigen, dass dieselbe zu den möglichen Richtungen gehört. Unter den Geraden des gegebenen Parallelenbündels giebt es eine Gerade σ_{1235}, für welche

87) $$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$$

ist und welche den sechs Ebenen S_{12}, S_{13}, S_{15}, S_{23}, S_{25}, S_{35} angehört. Wir wollen zeigen, dass sie eine mögliche Schraubenaxe ist. Die genommene Axenrichtung kann verschiedenen Gebieten auf der Parameterkugel gehören, je nach der Zeichenkombination der Grössen 84). Nehmen wir zuerst an, dass sie zu demjenigen Gebiete gehört, welches den Bedingungen 85) genügt und dass für die Gerade σ_{1235} $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$ die anderen Grössen 87) übertrifft. Der Ebene P'_{1234} entspricht dann auf einer zur gegebenen Richtung senkrechten Ebene die Abbildung des möglichen Axengebietes in Form eines Dreiecks, welches von den Spuren der Ebenen S'_{14}, S'_{24}, S'_{34} begrenzt wird und das Gebiet $(+\omega)$ enthält. Die Spur der Geraden σ_{1235} liegt dann im Innern dieses Dreiecks, da sie mit der Spur der Geraden σ_{123}, welche diese Eigenschaft hat, zusammenfällt. Wenn wir das andere Gebiet, welches der Ebene P'_{2345} entspricht, betrachten, kommen wir zu demselben Schlusse: die Gerade σ_{1235} fällt mit der Geraden σ_{235} zusammen und liegt daher im Innern des von den Ebenen S'_{24}, S'_{34}, S'_{54} begrenzten Gebietes. Somit ist die Gerade σ_{1235} eine mögliche Schraubenaxe; die angenommene Axenrichtung gehört also auch zu den möglichen Richtungen. Zu einem ähnlichen Schlusse gelangen wir auch, wenn wir voraussetzen, dass $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$ kleiner als die Grössen 87) sei; der Unterschied kann nur darin bestehen, dass jetzt für die möglichen Schraubenaxen die entgegengesetzte Drehung $(-\omega)$ möglich ist (§ 4 und § 22). Wir haben bis jetzt solche Axenrichtungen betrachtet, welche den Bedingungen 85) genügen, d. h. für welche der Winkel $(n_1 \omega)$ mit derjenigen Normale, n_4, stumpf ist, die auf die Ebene P''_{1235} keinen Einfluss ausübt. Wenn eine andere, z. B. den Ungleichheiten

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_5 \geqq 0,$$
$$q_3 \leqq 0$$

entsprechende Richtung genommen wird, so besteht der Unterschied nur darin, dass jetzt auf der zu dieser Richtung senkrechten Ebene die Spur von σ_{1235} nicht im Innern, sondern auf der Grenze des möglichen Axengebietes liegen wird. In der That wird jetzt das der Ebene P'_{1234} entsprechende Gebiet durch die Spuren der Ebenen S'_{13}, S'_{23}, S'_{43} begrenzt; und die Spur der Geraden σ_{1235}, welche wieder mit der Geraden σ_{123} zusammenfällt, wird in derjenigen Ecke des Dreiecks liegen, in welcher sich die Spuren von S'_{13} und S'_{23} schneiden. Dieser Punkt ist aber auch die Ecke des anderen Dreiecks, welches der Ebene P'_{2345} entspricht und von den Spuren der Ebenen S'_{23}, S'_{43}, S'_{53} begrenzt wird; denn die Ebenen S'_{23} und S'_{53} schneiden sich in einer und derselben Geraden mit der Ebene S'_{13}, wie es aus den Gleichheiten 87) ersichtlich ist.

Ähnliche Resultate bekommt man, wenn das mögliche Axengebiet durch zwei Vierecke oder ein Viereck und ein Dreieck bestimmt wird, und sie können nicht nur für die Ebene P''_{1235}, sondern auch auf dieselbe Weise für die Ebenen P''_{1245} und P''_{1345} gezeigt werden.

32. Die Hauptresultate für den Fall von fünf Stützflächen können folgendermaßen ausgesprochen werden.

Die Richtungen der fünf Stütznormalen können so genommen werden, dass die möglichen Schraubenaxen bei jeder Richtung derselben geschlossene Prismen bilden.

Nicht alle Richtungen sind aber möglich; die möglichen Richtungen sind auf der Parameterkugel in ein Paar von Scheitelwinkeln eingeschlossen, welche durch zwei auf bestimmte Weise aus den fünf überhaupt möglichen Grenzebenen zweiter Art ausgewählten Ebenen gebildet werden.

Die drei übrigen Grenzebenen zweiter Art schneiden sich in einer Geraden mit den zwei ersteren und liegen in dem genannten Paare von Scheitelwinkeln.

Für jede mögliche Axenrichtung giebt es auch wirklich mögliche Schraubenaxen.

V. Grenzebenen zweiter Art bei sechs Stützflächen.

33. Wir werden weiter keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Gruppen der Schraubenaxen machen, da die Bedeutung

:r Grenzebene zweiter Art für alle Gruppen dieselbe ist, wie es schon vorhergehenden Kapitel klar gemacht wurde. Wir werden nur aussetzen, dass unter den sechs Stütznormalen solche vier ge- .den werden können, welche gegenseitig eine Opposition bilden. nach können bei keiner Axenrichtung die Grössen

88) $$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad q_4, \quad q_5, \quad q_6$$

.e positiv oder alle negativ sein.

Die Zahl der echten Grenzebenen erster Art wird davon)hängen, wieviele von den Grössen 88) das den anderen entgegen- ɜsetzte Zeichen haben werden; es können somit unter den 15 über- aupt denkbaren Grenzebenen erster Art 5, 8 oder 9 echte sein.

Die Zahl der überhaupt denkbaren Grenzebenen zweiter Art st, nach der Zahl von Kombinationen der zu vier genommenen Stütz- ormalen, auch 15. Für das Folgende ist es sehr wesentlich, die 'ahl der echten Grenzebenen unter denselben zu bestimmen. Diese 'ahl kann drei oder vier sein. Um das zu zeigen, wollen wir an- ıehmen, dass die Normalen n_i, n_k, n_l, n_m in Opposition sind, so dass hnen die echte Grenzebene zweiter Art P'_{iklm} entspricht. Wenn wir ine fünfte Normale n_r hinzufügen, so können wir unter den vier ıeuen Grenzebenen zweiter Art die zweite echte Ebene nach den łegeln von § 26 aufsuchen; es möge dieselbe P'_{klmr} sein. Wenn die echste Normale, n_s, eingeführt wird, so kann man auf dieselbe Weise estimmen: 1. diejenige Grenzebene zweiter Art, welche von den Normalen

89) $$n_i, \quad n_k, \quad n_l, \quad n_m, \quad n_s$$

ınd 2. diejenige, welche von den Normalen

90) $$n_k, \quad n_l, \quad n_m, \quad n_r, \quad n_s$$

ıbhängt. Hier können zwei Fälle eintreten. Es können bei der lritten Grenzebene ausser der Normale n_s diejenigen drei Normalen n_k, n_l, n_m Teil nehmen, welche auf die Lage der beiden ersten Grenz- ebenen, P'_{iklm} und P'_{klmr}, Einfluss haben; wir bekommen dann die Ebene P'_{klms}, und es ist klar, dass die vierte gesuchte Ebene mit ihr usammenfallen wird, da unter den Normalen 90) wieder dieselben Nor- malen n_k, n_l, n_m mit n_s in Opposition sein werden, während die Nor- male n_r dabei nicht mitwirken kann; denn sie selbst ist mit den Normalen n_k, n_l, n_m in Opposition. Wir bekommen also nur drei verschiedene echte Grenzebenen zweiter Art:

91) $$P'_{iklm}, \quad P'_{klmr}, \quad P'_{klms}.$$

Der zweite Fall wird dann auftreten, wenn bei der Bestimmung ler dritten Ebene andere drei von den vier ersten Normalen, als bei ler Bestimmung von P'_{klmr}, mitwirken. Es mögen z. B. n_i, n_l, n_m iese Normalen sein; sie geben die Ebene P'_{ilms}, und dann wird die ierte Ebene notwendig von dieser Ebene verschieden sein, da unter den Normalen 90), welche zu ihrer Bestimmung dienen, die Normale n_i nicht vorkommt. Es sei diese Ebene P'_{lmrs}; dann besteht das ganze System der echten Grenzebenen zweiter Art aus den Ebenen:

92) $$P'_{iklm},\quad P'_{klmr},\quad P'_{ilms},\quad P'_{lmrs}.$$

Keine andere von den Grenzebenen zweiter Art kann echt sein, da alle anderen zu vier genommenen Normalen nicht in Opposition sein können.

34. Die sechs Stütznormalen kombinieren sich bei der Bestimmung der echten Grenzebenen zweiter Art auf eine bestimmte Weise, wie es schon aus den Bezeichnungen 91) und 92) ersichtlich ist, jetzt aber noch besonders hervorgehoben werden soll, da dieser Umstand in der Frage über die Festlegung des starren Körpers durch Stütznormalen eine wichtige Rolle spielt.

Im Falle von drei echten Grenzebenen zweiter Art 91) kommen drei Normalen (n_k, n_l, n_m) in der Bezeichnung aller dreier Ebenen vor, was dadurch bedingt wird, dass dort jede der drei übrigen Normalen mit den drei ersteren in Opposition steht.

Im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art 92), nehmen zwei Normalen (n_l, n_m) an der Bestimmung aller vier Ebenen Teil, während jede von den übrigen vier Normalen nur zweimal vorkommt. Um die Unmöglichkeit anderer Kombinationen der Normalen zu zeigen, wollen wir alle Fälle näher betrachten, welche bei der Einführung der fünften und sechsten Normale vorkommen können, nachdem die erste echte Grenzebene P'_{iklm} schon bestimmt ist. Bei der Einführung der fünften Normale, n_r, bekommen wir eine zweite echte Grenzebene, welche eine der folgenden Bezeichnungen haben kann:

$$P'_{klmr},\quad P'_{ilmr},\quad P'_{ikmr},\quad P'_{iklr};$$

es sei P'_{klmr} diese Ebene. Wenn wir die sechste Normale, n_s, einführen, müssen wir mit ihr drei von den vier ersten und drei von den vier die zweite Grenzebene bestimmenden Normalen kombinieren. Dabei muss man den Fall, dass diese drei Normalen in den beiden Fällen dieselben sind, ausschliessen, da wir die Existenz von vier und nicht von drei echten Grenzebenen voraussetzen. Daher kann nur eine von den Ebenen

$$P'_{ilms},\quad P'_{ikms},\quad P'_{ikls}$$

als die dritte echte Grenzebene betrachtet werden. Da die vierte Grenzebene von n_s und von dreien der die zweite Grenzebene bestimmenden Normalen abhängt, so kann sie eine der folgenden drei Bezeichnungen annehmen:

$$P'_{lmrs},\quad P'_{kmrs},\quad P'_{klrs},$$

welche alle notwendig den Index (r) enthalten müssen, da die Ebene P_{klm}, ausgeschlossen ist. Somit erhalten wir vorläufig neun Fälle für die Kombinationen der Indices in der Bezeichnung der echten Grenzebenen zweiter Art:

93)	1.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ilms)$	$(lmrs)$
94)	2.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ilms)$	$(kmrs)$
	3.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ilms)$	$(klrs)$
	4.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikms)$	$(lmrs)$
95)	5.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikms)$	$(kmrs)$
	6.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikms)$	$(klrs)$
	7.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikls)$	$(lmrs)$
	8.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikls)$	$(kmrs)$
96)	9.	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikls)$	$(klrs)$.

Von ihnen sind aber in Wirklichkeit nur drei Fälle möglich. Die Wahl der echten Grenzebenen kann nämlich nicht von der Reihenfolge abhängen, in welcher die dieselben bestimmenden Stütznormalen auftreten; und es wird die Unmöglichkeit der sechs übrigen Fälle klar, wenn wir dieselben Grenzebenen, aber in anderer Reihenfolge als es oben gethan wurde, aufsuchen. Wenn wir z. B. den zweiten in der Tabelle gegebenen Fall 94) betrachten und mit den vier Normalen n_k, n_m, n_r, n_s anfangen, so müssen wir bei der Einführung der fünften Normale n_i für die zweite Grenzebene eine der vier Bezeichnungen

$$(imrs),\quad (ikrs),\quad (ikms),\quad (ikmr)$$

annehmen, während keine von diesen Kombinationen in der Reihe 94) vorkommt. Ähnliches kann auch in den Fällen 3, 4, 6, 7 und 8 gezeigt werden. In den Fällen 1, 5 und 9 aber hängt die Bestimmung der echten Grenzebene nicht von der Reihenfolge, in welcher wir die Normalen heranziehen, ab. Diese Fälle 93), 95) und 96) sind die einzig möglichen. Die Indices haben aber in ihnen die oben angegebene Eigenschaft.

35. Um die echten Grenzebenen zweiter Art aufzusuchen, wenn die Stütznormalen durch ihre Koordinaten gegeben sind, können wir dasselbe Verfahren, welches in § 26 angegeben wurde, gebrauchen. Wenn P_{iklm} eine echte Grenzebene sein soll, so müssen

97) $$V_{klm},\quad V_{lim},\quad V_{ikm},\quad V_{lki}$$

dasselbe Zeichen haben. Nehmen wir zuerst an, dass nur drei echte Grenzebenen 91) existieren. Statt der Bezeichnung P'_{iklm} wollen wir P'_{klmi} schreiben; dann müssen die zwölf Determinanten, unter welchen übrigens nur zehn verschieden sind,

98) $$\begin{cases} V_{mlk}\,, & V_{lik}\,, & V_{imk}\,, & V_{lmi}\,, \\ (V_{mlk}), & V_{lmr}, & V_{mkr}, & V_{klr}\,, \\ (V_{mlk}), & V_{lms}, & V_{mks}, & V_{kls}\,, \end{cases}$$

dasselbe Zeichen haben.

Im Falle von vier echten Grenzebenen 92) existieren ähnliche Bedingungen für 16 Determinanten, von welchen übrigens nur 12 verschieden sind. Wenn man in den Bezeichnungen 92) die Indices folgendermaßen umstellt:

$$99)\qquad P'_{iklm},\quad P'_{rklm},\quad P'_{islm},\quad P'_{rslm};$$

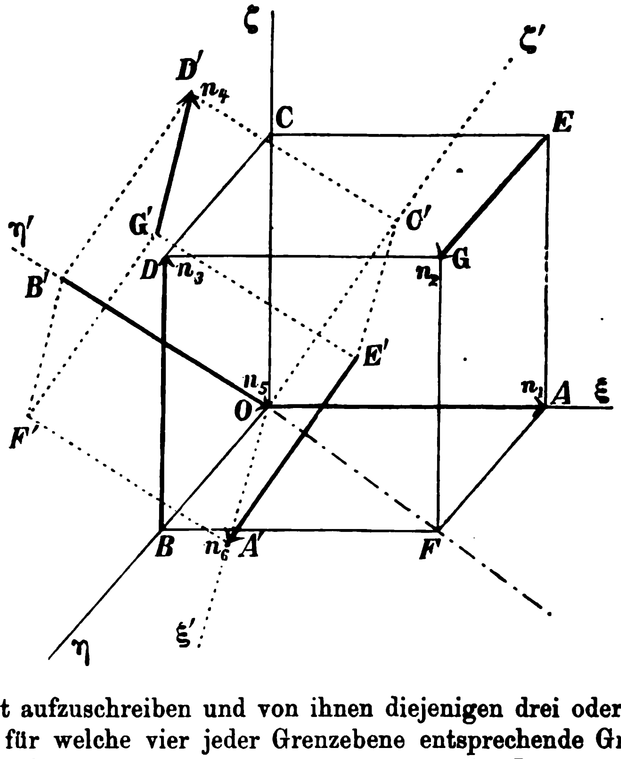
so kann man sagen, dass nicht nur vier in einer Reihe stehende Grössen, sondern alle 16 Grössen:

$$100)\qquad \begin{cases} V_{klm}, & V_{lim}, & V_{ikm}, & V_{lki}, \\ (V_{klm}), & V_{lrm}, & V_{rkm}, & V_{lkr}, \\ V_{slm}, & (V_{lim}), & V_{ism}, & V_{lsi}, \\ (V_{slm}), & (V_{lrm}), & V_{rsm}, & V_{lsr}, \end{cases}$$

dasselbe Zeichen haben müssen.

In Wirklichkeit ist es notwendig, die Zeichen aller 20 Grössen von der Art V_{ikl} zu bestimmen, die Bezeichnung aller 15 Grenzebenen

Fig. 12.



zweiter Art aufzuschreiben und von ihnen diejenigen drei oder vier auszuwählen, für welche vier jeder Grenzebene entsprechende Grössen 97) dasselbe Zeichen haben. Dann kann man noch die Indices in der Bezeichnung der gefundenen echten Grenzebenen so umstellen, dass 10 oder resp. 12 Grössen, 98) oder 100), alle positiv oder alle negativ werden.

Das folgende typische Beispiel wird nicht nur zur Beleuchtung des Gesagten dienen, sondern auch für das Weitere Bedeutung haben.

Es mögen die Normalen n_1, n_2, n_3 in den sich nicht schneidenden Kanten OA, EG, BD eines Würfels $OAFBDCEG$ liegen (Fig. 12); den Anfangspunkt der Koordinaten nehmen wir in einer Ecke desselben und die Koordinatenaxen den Normalen n_1, n_2, n_3 parallel und gleichgerichtet an. Es soll jetzt der Würfel mit den Koordinatenaxen um den Anfangspunkt derselben so gedreht werden, dass die neue Lage der Koordinatenaxen gegen die frühere durch die Eulerschen Winkel

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

bestimmt wird. Wir nehmen dann die drei anderen Normalen n_4, n_5, n_6 in den Kanten $G'D'$, $B'O'$, $E'A'$ des Würfels und der neuen Lage der Koordinatenaxen entgegengerichtet an. Die Kanten des Würfels gleich der Längeneinheit voraussetzend, bekommen wir für die Koordinaten der sechs Stütznormalen folgende Werte:

	ξ	η	ζ	λ	μ	ν
n_1	1	0	0	0	0	0
n_2	0	1	0	-1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	0
n_4	$-a^2(1-a)$	$-a^2(1+a)$	$-a^2$	$a^3(1+4a)$	$-a^3$	$-2a^4(1-2a)$
n_5	$a^2(1+a)$	$a^2(1-a)$	$-a^2$	0	0	0
n_6	$-a^2$	a^2	$-a$	$-a^3(1+2a)$	$a^3(1-2a)$	$2a^4$

wo $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nachdem wir die Werte der 20 Determinanten V_{ikl} ausgerechnet haben, stellen wir die Zeichen derselben in folgender Tabelle den 15 Grenzebenen zweiter Art entsprechend zusammen:

$(iklm)$	V_{klm}	V_{lim}	V_{ikm}	V_{lki}	
(1234)	$-$	$-$	$-$	$-$	P'_{1234}
(1235)	$+$	$+$	$-$	$-$	
(1236)	$-$	$+$	$-$	$-$	
(2345)	$+$	$+$	$+$	$+$	P'_{2345}
(1345)	$+$	$-$	$-$	$-$	
(1245)	$-$	$-$	$-$	$+$	
(3456)	$-$	$-$	$-$	$-$	P'_{3456}
(2456)	$-$	$-$	$+$	$+$	

$(iklm)$	V_{klm}	V_{lim}	V_{ikm}	V_{lki}	
(2356)	+	−	−	−	
(1256)	+	−	−	+	
(1356)	+	−	−	+	
(1456)	−	−	+	−	
(1246)	+	−	−	+	
(1346)	−	−	−	−	P'_{1346}
(2346)	−	−	−	+	

Hieraus finden wir, dass

101) $$P'_{1234},\quad P'_{2345},\quad P'_{3456},\quad P'_{1346}$$

echte Grenzebenen sind.

Es ist wesentlich zu beachten, dass bei einer Permutation der Indices in der Bezeichnung einer echten Grenzebene zweiter Art die Zeichen der ihr entsprechenden Grössen 97) nur alle auf einmal wechseln können; bei einer unechten Grenzebene aber können entweder alle oder nur zwei von den Grössen 97) ihre Zeichen wechseln und jedenfalls nur so, dass niemals die Zeichen aller vier Grössen gleich werden; denn die Wahl der echten Grenzebenen zweiter Art kann nicht davon abhängen, in welcher Reihenfolge die Indices der sechs Stütznormalen genommen werden. Wir können diese Bemerkung benutzen, um für alle Grössen 100) dasselbe Zeichen zu erhalten. Dazu ist es nur nötig, zwei Indices, 3) und 4), in P'_{2345} umzustellen. Weiter werden wir im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art die Ebenen

102) $$P'_{1234},\quad P'_{2435},\quad P'_{3456},\quad P'_{1346}$$

betrachten und dabei im Auge behalten, dass alle Grössen 100) negativ sind.

36. Wenn die Stütznormalen solche Richtungen haben, dass nur drei echte Grenzebenen zweiter Art existieren, so wird das Gebiet möglicher Axenrichtungen auf der Parameterkugel durch ein sphärisches Dreieck bestimmt. Dieses Dreieck zieht sich in einen Punkt zusammen, wenn alle drei Ebenen

103) $$P'_{klmi},\quad P'_{klmr},\quad P'_{klms}$$

sich in einer Geraden schneiden. In § 31 wurde es bemerkt, dass, wenn die Richtung der Schraubenaxen zweien Grenzebenen zweiter Art, z. B. P_{klmi} und P_{klmr}, parallel ist, alle zehn den fünf Normalen, n_k, n_l, n_m, n_i und n_r, entsprechenden Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden σ_{klmir} schneiden, die den Gleichheiten

04) $\delta_k \operatorname{tg} \varphi_k = \delta_l \operatorname{tg} \varphi_l = \delta_m \operatorname{tg} \varphi_m = \delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = \delta_r \operatorname{tg} \varphi_r$

ügt und diejenige Schraubenaxe darstellt, welche dem festen Körper in möglich wäre, wenn er sich von den fünf Stützflächen nicht fernen könnte. Daraus folgt, dass bei einer solchen Axenrichtung, che allen drei Ebenen 103) parallel ist, alle 15 Grenzebenen erster sich in einer Geraden σ_{klmirs} schneiden, die den Bedingungen

05) $\delta_k \operatorname{tg} \varphi_k = \delta_l \operatorname{tg} \varphi_l = \delta_m \operatorname{tg} \varphi_m = \delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = \delta_r \operatorname{tg} \varphi_r = \delta_s \operatorname{tg} \varphi_s$

ügt und dem festen Körper allein möglich bliebe, wenn er sich den sechs Stützflächen nicht entfernen könnte. Anderseits ist aber bekannt, dass dem festen Körper, welcher sechs Flächen bert, nur dann eine Verschiebung möglich bleibt, wenn die Normalen den Berührungspunkten einem Komplex ersten Grades angehören. analytische Ausdruck dieser Forderung besteht bekanntlich darin, s die aus den Koordinaten der Normalen gebildete Determinante

$$06)\qquad D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \\ \xi_5 & \eta_5 & \zeta_5 & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ \xi_6 & \eta_6 & \zeta_6 & \lambda_6 & \mu_6 & \nu_6 \end{vmatrix}$$

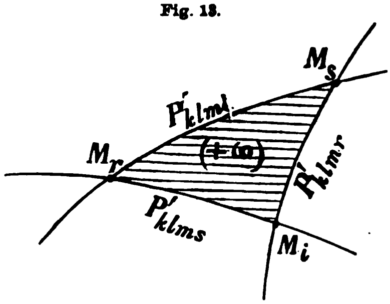
ch Null ist.. Die Gleichung

$$07)\qquad D = 0$$

n also als die Bedingung dafür, dass die drei Ebenen 103) sich in r Geraden σ_{123456} schneiden, betrachtet werden.

Wenn diese Determinante nicht gleich Null ist, was wir ter voraussetzen werden, so kann das Zeichen derselben dazu nen, um diese oder jene Drehungsrichtung um die mögichen Schraubenaxen zu bestimmen. Erinnern wir uns des rkmals, nach welchem auf der ameterkugel die Gebiete $(+\omega)$ l $(-\omega)$ unterschieden werden 21 und § 25), und wenden es solche Axenrichtungen, welche ch die Ecken des von den drei enen 103) auf der Parameterel gebildeten Dreiecks bestimmt rden, an. Im Falle des Gebietes $\omega)$ liegt jede Ecke dieses Dreis in Bezug auf die die gegenrliegende Seite desselben ent-

Fig. 13.



tende Grenzebene zweiter Art auch im Gebiete $(+\omega)$ (Fig. 13). . für die Koordinaten (ξ_i, η_i, ζ_i) des Punktes M_i haben wir die ichungen:

108) $$P'_{klmr} = 0, \quad P'_{klms} = 0;$$

und wenn diese Koordinaten in P'_{klmi} eingesetzt werden, so müssen dieselben, der Formel 82) gemäss, der Bedingung

$$V_{klm} P'_{klmi} < 0$$

genügen. Für die entgegengesetzte Richtung der Winkelgeschwindigkeit, welche auf der Parameterkugel zu dem Gebiete $(-\omega)$ gehört, bekommt man die entgegengesetzte Ungleichheit. Die Substitution der genannten Koordinaten in P'_{klmi} giebt einen Ausdruck, dessen Zähler die Determinante

109) $$D^{klm}_{irs} = \begin{vmatrix} L_{klmi} & M_{klmi} & N_{klmi} \\ L_{klmr} & M_{klmr} & N_{klmr} \\ L_{klms} & M_{klms} & N_{klms} \end{vmatrix}$$

und dessen Nenner die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der aus den Koeffizienten der Gleichungen 108) gebildeten Determinanten zweiten Grades ist. Die unten angegebene Ausrechnung der Determinante 109) wird uns zeigen 113), dass dieselbe sich nur durch einen Faktor von der Determinante D unterscheidet. Man bekommt dieselbe Determinante 109), wenn man statt M_i die Punkte M_r und M_s betrachtet. Wenn eine der Normalen n_i, n_r, n_s, z. B. n_i, sich selbst parallel weiterrückt, so dreht sich die Ebene P'_{klmi}, deren Lage nicht nur von den Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i, sondern auch von den Koordinaten λ_i, μ_i, ν_i abhängt, um den Mittelpunkt der Parameterkugel, während die zwei anderen Grenzebenen ihre Lage behalten; dabei kann das Gebiet $(+\omega)$ sich in das Gebiet $(-\omega)$ verwandeln. Die Determinante D wechselt dabei ihr Zeichen. Die folgende Rechnung, welche auch zu anderem Zwecke nötig ist, wird uns zeigen, dass in der That diese Verwandlung durch den Zeichenwechsel von D bedingt wird. Nach den Formeln 95) kann man schreiben:

110) $$\begin{cases} L_{klmi} = \lambda_k V_{lmi} + \lambda_l V_{mki} + \lambda_m V_{kli} + \lambda_i V_{mlk}, \\ M_{klmi} = \mu_k V_{lmi} + \mu_l V_{mki} + \mu_m V_{kli} + \mu_i V_{mlk}, \\ N_{klmi} = \nu_k V_{lmi} + \nu_l V_{mki} + \nu_m V_{kli} + \nu_i V_{mkl}, \end{cases}$$

und auf ähnliche Weise die sechs übrigen Elemente der Determinante 109) darstellen. Wenn man dann diese Determinante in 20 Determinanten von der Form

111) $$B_{klm} = \begin{vmatrix} \lambda_k & \lambda_l & \lambda_m \\ \mu_k & \mu_l & \mu_m \\ \nu_k & \nu_l & \nu_m \end{vmatrix}$$

zerlegt, wobei als Faktoren die Produkte der zu drei genommenen Grössen V_{lmi}, V_{mki}, ... oder Summen von solchen Produkten stehen werden, und wenn man die so erhaltenen Glieder mit Hilfe der Reduktionsformel

112) $$V_{ikl} V_{lmr} - V_{ilm} V_{klr} = V_{klm} V_{lir}$$
vereinfacht, findet man

113) $$D^{klm}_{irs} = V^2_{123} D.$$

37. Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung des Gebietes möglicher Axenrichtungen im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art. Es ist augenscheinlich, dass im Falle von drei echten Grenzebenen zweiter Art das vollkommene Verschwinden auf der Parameterkugel des Gebietes möglicher Axenrichtungen nicht erreichbar ist. Bei vier echten Grenzebenen kann dasselbe von Anfang an nicht behauptet werden; die Untersuchung wird aber zeigen, dass auch in diesem Falle das Gebiet möglicher Axenrichtungen nicht vollkommen verschwinden kann. Zu diesem Zwecke kann man eine Überlegung benutzen, welche der im § 18 angewandten und die zu den Stütznormalen senkrechten Ebenen betreffenden analog ist.

Vier Grenzebenen zweiter Art teilen die Oberfläche der Parameterkugel im allgemeinen in 14 Gebiete, so dass von den 16 überhaupt möglichen Zeichenverbindungen, von welchen die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Axenrichtungen abhängt, zwei Kombinationen fehlen.* Wir wollen der Kürze wegen mit

114) $$\begin{cases} P_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = 0, \\ P_k = a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta = 0, \\ P_l = a_l \xi + b_l \eta + c_l \zeta = 0, \\ P_m = a_m \xi + b_m \eta + c_m \zeta = 0, \end{cases}$$

die vier Grenzebenen zweiter Art bezeichnen, und es seien:

115) $$P_i > 0, \quad P_k > 0, \quad P_l > 0, \quad P_m > 0,$$

oder auch die ihnen entgegengesetzten Ungleichheiten die Bedingungen, welchen das Gebiet möglicher Axenrichtungen auf der Parameterkugel genügt. Damit ein solches Gebiet nicht vorhanden sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Normalen zu den Ebenen 114), wenn diese Normalen den Ungleichheiten 115) entsprechend gerichtet sind, sich in Opposition befinden. Das in § 18 angegebene Merkmal kann jetzt in folgender Weise ausgesprochen werden. Setzen wir

$$\begin{vmatrix} a_k & a_l & a_m \\ b_k & b_l & b_m \\ c_k & c_l & c_m \end{vmatrix} = U_{klm},$$

so müssen die vier Grössen

$$U_{klm}, \quad U_{lim}, \quad U_{ikm}, \quad U_{lki}$$

dasselbe Zeichen haben. Es bleibt jetzt nur übrig zu untersuchen, ob diese Forderung für die Koeffizienten der vier echten Grenzebenen

* Zum Vergleich: [§ 18] und § 18.

zweiter Art erfüllbar ist. Der Anschaulichkeit wegen können ohne die Giltigkeit der Resultate zu vermindern, die Bezeichnun 102) für die Grenzebenen annehmen, wie es schon in § 36 auseinar gesetzt wurde. Dann haben wir:

$$U_{klm} = \begin{vmatrix} L_{2435} & L_{3456} & L_{1346} \\ M_{2435} & M_{3456} & M_{1346} \\ N_{2435} & N_{3456} & N_{1346} \end{vmatrix},$$

$$U_{lim} = \begin{vmatrix} L_{3456} & L_{1234} & L_{1346} \\ M_{3456} & M_{1234} & M_{1346} \\ N_{3456} & N_{1234} & N_{1346} \end{vmatrix},$$

$$U_{ikm} = \begin{vmatrix} L_{1234} & L_{2435} & L_{1346} \\ M_{1234} & M_{2435} & M_{1346} \\ N_{1234} & N_{2435} & N_{1346} \end{vmatrix},$$

$$U_{lki} = \begin{vmatrix} L_{3456} & L_{2435} & L_{1234} \\ M_{3456} & M_{2435} & M_{1234} \\ N_{3456} & N_{2435} & N_{1234} \end{vmatrix}.$$

Wenn man die Elemente dieser Determinanten nach dem Sch 110) darstellt, jede Determinante in 20 Glieder, welche als Fakt die Ausdrücke 111) enthalten, zerlegt und endlich die Redukt formel 112) benutzt, so bekommt man:

116) $$U_{klm} = V_{435} V_{346} D,$$

117) $$U_{lim} = V_{346} V_{134} D,$$

118) $$U_{ikm} = V_{134} V_{243} D,$$

119) $$U_{lki} = V_{243} V_{436} D.$$

Wir haben aber nach dem Schema 100) folgende Ungleichh

$$V_{435} V_{346} > 0,$$
$$V_{346} V_{134} < 0,$$
$$V_{134} V_{243} > 0,$$
$$V_{243} V_{435} < 0,$$

welche der Voraussetzung, dass

$$U_{klm}, \quad U_{lim}, \quad U_{ikm}, \quad U_{lki}$$

alle positiv oder alle negativ sind, widersprechen. Daher ist das schwinden der Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ auf der Parameterkugel möglich.*

Einen ähnlichen Schluss kann man auch in den übrigen Fälle und 96) machen, wo an Stelle der Ebenen 102) die Ebenen

* Was die Reihenfolge der Indices betrifft, siehe § 35.

$$P'_{1234},\quad P'_{2435},\quad P'_{2456},\quad P'_{1246}$$

ler

$$P'_{1234},\quad P'_{2435},\quad P'_{2356},\quad P'_{1236}$$

ftreten.

38. In § 36 haben wir schon gesehen, dass wenn $D = 0$ ist, die
ei Ebenen 103), deren Existenz dort vorausgesetzt wurde, sich in
ner Geraden schneiden, und dass dann bei der dieser Geraden
rallelen Axenrichtung alle 15 Grenzebenen erster Art sich in einer
eraden σ_{123456} schneiden. Dasselbe finden wir auch für den in
37 betrachteten Fall von vier Ebenen 102). Die Gerade σ_{123456} hat
sser der in § 36 gezeigten Bedeutung noch die folgende. Da jetzt
e Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ auf der Parameterkugel sich in zwei
unkte zusammengezogen haben, so ist nur eine bestimmte Richtung
öglicher Schraubenaxen übrig geblieben. Für diese Richtung giebt
jetzt auch nur eine mögliche Schraubenaxe, weil einerseits wegen
r Opposition der Stütznormalen alle Axengebiete geschlossene Pris-
en bilden, anderseits aber die Grenzebenen erster Art sich in
ner Geraden σ_{123456} schneiden, so dass diese Gerade die einzige
ögliche Schraubenaxe darstellt. Der Eigenschaft der echten Grenz-
enen erster Art gemäss (§ 4) hat der Parameter der Schrauben-
schwindigkeit auf dieser Axe einen bestimmten Wert, und die Dreh-
g ist nach beiden Richtungen möglich. Damit also dem festen
örper eine bestimmte Schraubenverschiebung übrig bleibe,
t es notwendig und hinreichend, 1. dass die Zahl der
tützflächen gleich sechs sei, 2. dass die Stütznormalen
nem Komplexe ersten Grades angehören und 3. dass wenig-
ens vier von den Stütznormalen in Opposition seien.

39. Es bleibt jetzt übrig die Frage zu beantworten, ob für jede
ögliche Axenrichtung auch ein mögliches Axengebiet
istiert. Dazu muss man, wie es in § 28 und § 30 für den Fall von
nf Stützflächen gethan wurde, in den möglichen Axengebieten, welche
der der echten Grenzebenen zweiter Art einzeln entsprechen, den
meinsamen Teil aufsuchen. In ebener Darstellung wird derselbe,
nach der Zahl der genannten Ebenen, zu drei oder vier Figuren
hören. Diese Figuren sind Dreiecke oder Vierecke, je nach der
hl der Grenzebenen erster Art; die Zahl der letzteren hängt aber
on den Zeichen der vier Grössen q_i, q_k, q_l, q_m ab, da jede solche
bene nur dann erscheint, wenn das ihr entsprechende Paar dieser
rössen entgegengesetzte Zeichen hat.

Alle in dieser Beziehung möglichen Fälle sind in der unten
lgenden Tabelle (s. S. 292), in welcher, um Raum zu sparen, die Benennung
r Grenzebenen erster Art ausgelassen ist, zusammengestellt. Für
e echten Grenzebenen zweiter Art sind der Anschaulichkeit wegen
Falle von vier Ebenen die Bezeichnungen P'_{1234}, P'_{1235}, P'_{1236},
d im Falle von vier Ebenen die Bezeichnungen 102) genommen.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	P'_{1234}	P_{1235}	P'_{1236}	P'_{1234}	P'_{2345}	P'_{3456}	P'_{134}
1	−	+	+	+	+	+	III	III	III	III	0	0	III
2	+	−	+	+	+	+	III	III	III	III	III	0	0
3	+	+	−	+	+	+	III	III	III	III	III	III	III
4	+	+	+	−	+	+	III	0	0	III	III	III	III
5	+	+	+	+	−	+	0	III	0	0	III	III	0
6	+	+	+	+	+	−	0	0	III	0	0	III	III
7	−	−	+	+	+	+	IV	IV	IV	IV	III	0	III
8	−	+	−	+	+	+	IV	IV	IV	IV	III	III	IV
9	−	+	+	−	+	+	IV	III	III	IV	III	III	IV
10	−	+	+	+	−	+	III	IV	III	III	III	III	III
11	−	+	+	+	+	−	III	III	IV	III	0	III	IV
12	+	−	−	+	+	+	IV	IV	IV	IV	IV	III	III
13	+	−	+	−	+	+	IV	III	III	IV	IV	III	III
14	+	−	+	+	−	+	III	IV	III	III	IV	III	0
15	+	−	+	+	+	−	III	III	IV	III	III	III	III
16	+	+	−	−	+	+	IV	III	III	IV	IV	IV	IV
17	+	+	−	+	−	+	III	IV	III	III	IV	IV	III
18	+	+	−	+	+	−	III	III	IV	III	III	IV	IV
19	+	+	+	−	−	+	III	III	0	III	IV	IV	III
20	+	+	+	−	+	−	III	0	III	III	III	IV	IV
21	+	+	+	+	−	−	0	III	III	0	III	IV	IV
22	−	−	−	+	+	+	III	III	III	III	IV	III	IV
23	−	−	+	−	+	+	III	IV	IV	III	IV	III	IV
24	−	−	+	+	−	+	IV	III	IV	IV	IV	III	III
25	−	−	+	+	+	−	IV	IV	III	IV	III	III	IV
26	−	+	−	−	+	+	III	IV	IV	III	IV	IV	III
27	−	+	−	+	−	+	IV	III	IV	IV	IV	IV	IV
28	−	+	−	+	+	−	IV	IV	III	IV	III	IV	III
29	−	+	+	−	−	+	IV	IV	III	IV	IV	IV	IV
30	−	+	+	−	+	−	IV	III	IV	IV	III	IV	III
31	−	+	+	+	−	−	III	IV	IV	III	III	IV	IV

Durch römische Ziffern ist die Zahl der Seiten der diesen Ebenen entsprechenden Gebiete möglicher Schraubenaxen angegeben. Von den

64 möglichen Zeichenkombinationen der Grössen q ist nur die Hälfte genommen, da die andere den entgegengesetzten Zeichen von q entsprechende Hälfte die entgegengesetzte Richtung derselben Schraubenaxen betrifft. Ausserdem sind die beiden Fälle, in welchen alle Grössen q positiv oder negativ sind und also keine Opposition der Normalen möglich ist, von der Betrachtung ausgeschlossen.

In Wirklichkeit werden einige der hier stehenden Fälle fehlen, da bei sechs Stützflächen die Parameterkugel durch die zu den Stütznormalen senkrechten Ebenen in 32 Gebiete geteilt wird, so dass nicht alle 64 Zeichenkombinationen für die Grössen q wirklich auftreten.

40. Wir wollen jetzt die möglichen Gebiete der Schraubenaxen im Falle von drei echten Grenzebenen zweiter Art näher untersuchen.

a) Die in der Tabelle unter Nr. 4, 5, 6, 19, 20 und 21 stehenden Fälle sind unmöglich, da dort für einige der zu vier genommenen Stütznormalen, $(n_1 n_2 n_3 n_4)$, $(n_1 n_2 n_3 n_5)$, $(n_1 n_2 n_3 n_6)$, die Grössen q gleiche Zeichen haben (z.B. in Nr. 4 die Grössen q_1, q_2, q_3, q_5 und q_1, q_2, q_3, q_6); das widerspricht aber der Voraussetzung, dass die betrachteten zu vier genommenen Stütznormalen sich in Opposition befinden.

b) In den Fällen 1, 2, 3 und 22 wird das Gebiet möglicher Axen durch den gemeinsamen Teil von drei Dreiecken bestimmt. Er kann hier auf zweierlei Weise gebildet werden. In den Fällen 1, 2 und 3 haben alle drei Dreiecke zwei Seiten s'_{21}, s'_{31} gemein; z.B. in Nr. 1 sind sie durch die Geraden

$$(s'_{21} s'_{31} s'_{41}), \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{51}), \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{61})$$

begrenzt. Da aber alle Dreiecke auf einer und derselben Seite von den Geraden s'_{21} und s'_{31} liegen, — denn die gegebene Axenrichtung ist eine mögliche, das Zeichen von ω in allen Dreiecken also dasselbe — so haben die Dreiecke notwendig einen gemeinsamen Teil. Dieser Fall ist dem in § 28 betrachteten analog. In Nr. 22 haben die Dreiecke keine gemeinsamen Seiten; im Innern aller derselben giebt es aber einen Punkt, die Spur der Geraden σ_{456}, in welchem sich die unechten Grenzebenen $S''_{56}, S''_{64}, S''_{45}$ schneiden, woraus die Existenz möglicher Schraubenaxen auch in diesem Falle ersichtlich ist. Man vergleiche § 30 und Fig. 11.

c) Zwei Dreiecke und ein Viereck treten in den Fällen 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 und 18 auf. In allen diesen Fällen, welche den in den Figuren 9 und 10 von § 30 dargestellten analog sind, haben alle drei Gebiete zwei gemeinsame Seiten, woraus wieder die Existenz eines möglichen Axengebietes folgt. Z.B. für den Fall 9 sind die drei Gebiete durch folgende Seiten begrenzt:

$$(s'_{21} s'_{31} s'_{51}), \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{61}), \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{24} s'_{34}).$$

d) In den Fällen 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 und 31 gehört das mögliche Axengebiet zwei Vierecken und einem Dreieck an. Die Existenz dieses Gebietes folgt daraus, dass alle drei Figuren zwei gemeinsame Seiten haben; z. B. im Falle 31 finden wir:

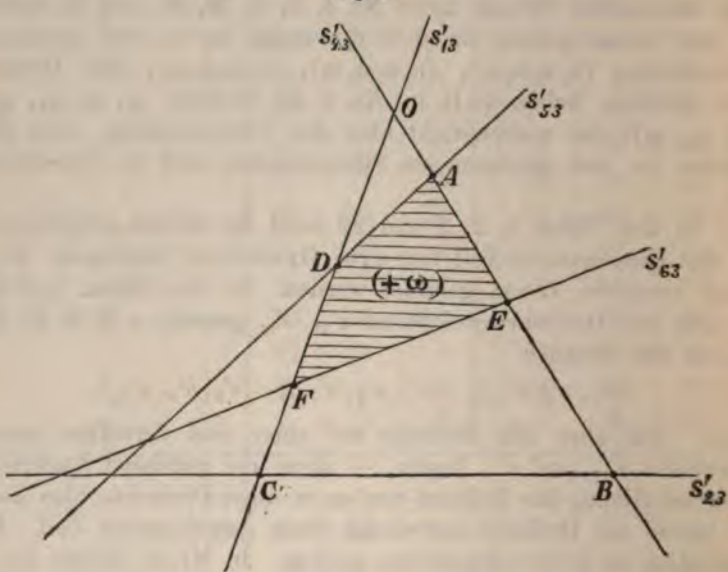
$$(s'_{21} s'_{31} s'_{41}), \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{25} s'_{35}), \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{26} s'_{36}).$$

e) Das Gebiet möglicher Axen wird in den Fällen 7, 8 und 12 durch drei Vierecke bestimmt, welche auch wirklich einen gemeinsamen Teil haben, da bei ihnen wieder zwei Seiten gemein sind, z. B. im Falle 12:

$$(s'_{21} s'_{13} s'_{32} s'_{43}), \quad (s'_{12} s'_{13} s'_{52} s'_{53}), \quad (s'_{12} s'_{13} s'_{62} s'_{63}).$$

41. Wenn von den Grenzebenen zweiter Art vier Ebenen echte sind, finden wir folgendes:

Fig. 14.



a) Die unter Nr. 1, 2, 5, 6, 7, 11, 14 und 21 angegebenen Fälle sind aus demselben Grunde unmöglich, wie die Fälle a) in § 40.

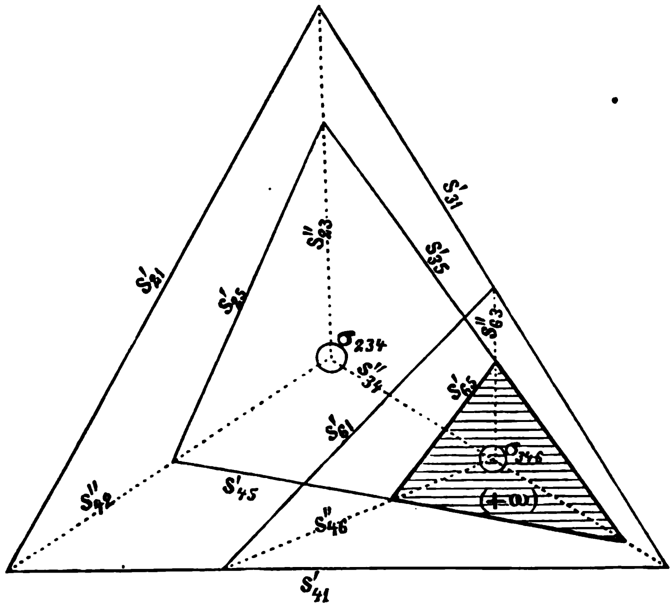
b) Wegen der in § 34 gezeigten Eigentümlichkeit, mit welcher die vier Kombinationen der die vier echten Grenzebenen bestimmenden Normalen auftreten, können keine solchen Fälle vorkommen, dass das mögliche Axengebiet durch drei Dreiecke und ein Viereck oder drei Vierecke und ein Dreieck bestimmt wird.

c) In den Fällen 3, 4, 10 und 15 gehört das mögliche Axengebiet vier Dreiecken an, wird aber in den zwei ersteren Fällen auf andere Weise gebildet als in den zwei übrigen: in den Fällen 3 und 4 existiert nämlich eine allen vier Dreiecken gemeinsame Seite s'_{43}, was in den Fällen 10 und 15 nicht der Fall ist. Wir wollen den Fall 3 näher betrachten; die Seiten der vier Dreiecke sind dort (Fig. 14):

$$(s'_{13}s'_{23}s'_{43}),\quad (s'_{23}s'_{43}s'_{53}),\quad (s'_{43}s'_{53}s'_{63}),\quad (s'_{13}s'_{63}s'_{43});$$

wobei wir zum voraus wissen, dass allen diesen Gebieten dasselbe Zeichen von ω, z. B. $(+\omega)$ entspricht, da wir ja nur mögliche Richtungen von Schraubenaxen betrachten. Nachdem wir das Dreieck OBC konstruiert haben, bemerken wir, dass die Gerade s'_{53} eine solche Lage haben muss, bei welcher sie mit den Seiten s'_{23} und s'_{43} ein geschlossenes Dreieck bilden kann. Dabei wird der Winkel ABC zu den beiden Dreiecken gehören; denn sonst würde das Zeichen von ω

Fig. 15.



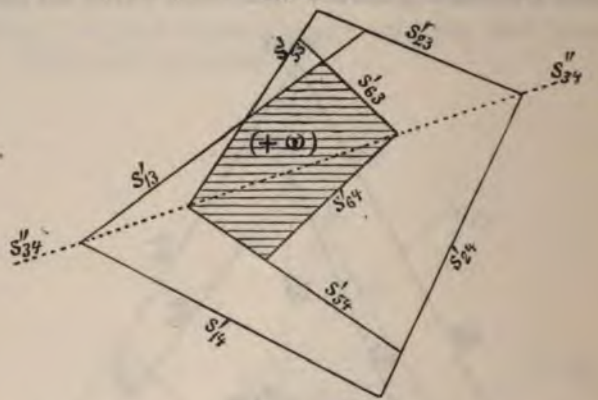
in diesen Dreiecken verschieden sein. Somit stellt das Gebiet $ABCD$ das den beiden Dreiecken gemeinsame Gebiet dar. Weiter bemerken wir, dass die Gerade s'_{63} sowohl mit den Seiten s'_{13} und s'_{43} als auch mit den Seiten s'_{53} und s'_{43} geschlossene Dreiecke bilden und wieder ein Gebiet $(+\omega)$ begrenzen muss. Dazu ist aber notwendig, dass die Ecken O und A sich auf derselben Seite von s'_{63} befinden; dann wird aber offenbar das ganze Gebiet $ABCD$ oder ein Teil davon ($AEFD$ in Fig. 14) zu allen vier Dreiecken gehören. Eine ähnliche Betrachtung ist auch im Falle 4 anwendbar.

In den Fällen 10 und 15 kann die vorige Überlegung nicht gebraucht werden; wir können aber die Eigenschaften der unechten Grenzebenen erster Art benutzen. Betrachten wir den Fall 10, in welchem die Seiten der vier Dreiecke die Geraden

$$120)\qquad (s'_{21}s'_{31}s'_{41}),\quad (s'_{25}s'_{35}s'_{45}),\quad (s'_{35}s'_{45}s'_{65}),\quad (s'_{31}s'_{41}s'_{61})$$

sind. Wir konstruieren (Fig. 15) die ersten zwei Dreiecke, wobei wir beachten, dass (§ 30) die Ecken derselben auf den Geraden $s''_{34}, s''_{42}, s''_{23}$, den Spuren der unechten Grenzebenen, liegen müssen, und dass innerhalb der beiden Dreiecke der Punkt σ_{234}, die Spur der Durchschnittsgeraden der drei genannten unechten Grenzebenen, enthalten ist. Weiter bemerken wir, dass die zwei anderen Dreiecke 120) den Punkt σ_{346}, welcher die Spur der Durchschnittsgeraden der drei Ebenen S''_{46}, S''_{63}, S''_{34} ist, einschliessen. Endlich sehen wir noch, dass

Fig. 16.



diese Dreiecke mit den zwei ersteren entsprechend die Geraden s'_{35}, s'_{45} und s'_{31}, s'_{41} gemein haben, und dass den zwischen ihnen eingeschlossenen Winkeln der Dreiecke, wegen der vorausgesetzten Möglichkeit der genommenen Axenrichtung, dasselbe Zeichen von ω entspricht. Daraus folgt, dass der Punkt σ_{346} innerhalb aller vier Dreiecke liegt, so dass dieselben notwendig einen gemeinsamen Teil besitzen.

Auf ähnliche Weise kann auch der Fall 15 untersucht werden.

d) Die Betrachtung der vorhergehenden Fälle zeigt in genügender Weise, wie die Existenz des möglichen Axengebietes auch in denjenigen Fällen bewiesen werden kann, wo zwei Dreiecke und zwei Vierecke auftreten. Es wird daher genügen darauf aufmerksam zu machen, dass diese Fälle auch in zwei Gruppen zerfallen. Zu der ersten Gruppe gehören die Fälle 8, 9, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 22, 28 und 30, in welchen alle vier Figuren eine gemeinsame Seite haben, was davon abhängt, dass jetzt den Normalen n_3 und n_4, welche in jeder der vier echten Grenzebenen zweiter Art auftreten, verschiedene Zeichen von q_3 und q_4 entsprechen. Diese Fälle können also auf dieselbe Weise wie die in der Abteilung c) dieses Paragraphen betrachteten und in Fig. 14 dargestellten untersucht werden. Zur zweiten

Gruppe gehören die Fälle 24, 25, 26 und 31, in welchen keine gemeinsame Seite der vier Figuren existiert. Jetzt haben diese Figuren, paarweise genommen, zwei zusammenfallende Seiten, was dem anderen, in Figur 15 dargestellten Falle der Abteilung c) dieses Paragraphen analog ist. Der Umstand, dass jetzt an Stelle zweier Dreiecke zwei Vierecke stehen, ist nicht wesentlich.

e) Die Fälle 16, 27 und 29, in welchen das mögliche Axengebiet vier Vierecken angehört, sind den oben betrachteten teilweise analog.

Im Falle 16, wo die Seiten der Vierecke durch die Geraden

$$121)\quad (s'_{13}s'_{23}s'_{14}s'_{24}),\ (s'_{23}s'_{53}s'_{24}s'_{54}),\ (s'_{53}s'_{63}s'_{54}s'_{64}),\ (s'_{13}s'_{63}s'_{14}s'_{64})$$

gebildet werden, giebt es keine allen Figuren gemeinsame Seite, aber dafür ist die Gerade s''_{34}, die Spur der unechten Grenzebene erster Art S''_{34}, ihrer Lage nach die gemeinsame Diagonale aller vier Vierecke; denn sie enthält die Ecken dieser Vierecke: σ_{134} und σ_{234}, σ_{234} und σ_{534}, σ_{534} und σ_{634}, σ_{634} und σ_{134} (§ 22). Dieses im Auge behaltend, wollen wir die Konstruktion der Vierecke der Reihe nach ausführen (Fig. 16) und dabei beachten, dass in allen diesen vier Gebieten ω dasselbe Zeichen hat, da die genommene Axenrichtung als eine mögliche vorausgesetzt wird. Die ersten zwei von den Vierecken 121) haben offenbar einen gemeinsamen Teil, da zwei Paare ihrer Seiten gemeinsam sind. Das dritte Viereck hat mit dem zweiten zwei andere Seiten gemein, ausserdem können aber seine zwei anderen Seiten nur eine solche Lage haben, bei welcher sie mit zwei Seiten, s'_{13} und s'_{14}, des ersten Vierecks das vierte Viereck bilden, welchem dabei dasselbe Zeichen von ω entsprechen muss. Dann werden alle Vierecke notwendig einen gemeinsamen Teil haben, welcher das mögliche Axengebiet bestimmt.

In den Fällen 27 und 29 liegt eine Seite eines jeden Vierecks auf einer und derselben Geraden s'_{34}. Im Falle 27, welchen wir näher betrachten wollen, haben die Seiten der Vierecke folgende Bezeichnung:

$$122)\quad \left\{\begin{array}{l} (s'_{21}s'_{41}s'_{23}s'_{43}),\ (s'_{23}s'_{25}s'_{43}s'_{45}),\ (s'_{43}s'_{45}s'_{63}s'_{65}),\\ \qquad\qquad (s'_{41}s'_{61}s'_{43}s'_{63}). \end{array}\right.$$

Die Diagonalen sind die Spuren

$$123)\quad (s''_{13}, s''_{24})\ (s''_{24}, s''_{35}),\ (s''_{35}, s''_{46}),\ (s''_{46}, s''_{13})$$

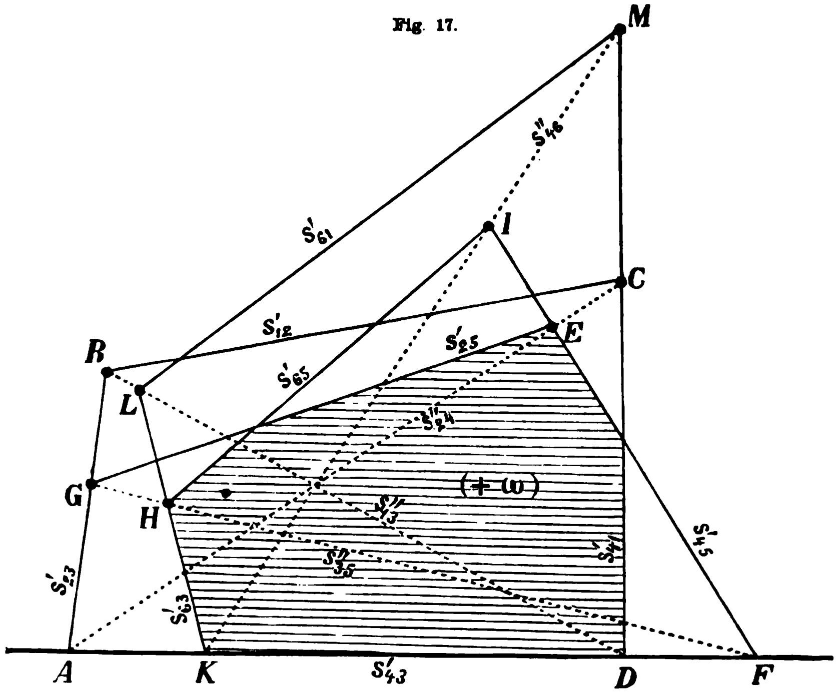
der unechten Grenzebenen erster Art. Da in allen vier Vierecken ω dasselbe Zeichen hat, so liegen sie alle auf einer und derselben Seite der Geraden s'_{34}; dasselbe gilt auch von den Durchschnittspunkten der Diagonalen 123). Dieses beachtend, ziehen wir jetzt die Geraden

$$s'_{43},\ s''_{13},\ s''_{24},\ s''_{35},\ s''_{46}$$

und bilden die Vierecke 122). Es sei $ABCD$ (Fig. 17) das erste derselben; das zweite Viereck, $AGEF$, hat mit ihm die Seiten s'_{23} und

s'_{43} und die Diagonale s''_{24} der Lage nach gemein; daher werden die beiden Figuren notwendig einen gemeinsamen Teil haben. Das dritte Viereck $KHJF$ hat wieder mit dem vorhergehenden zwei Seiten s'_{45} und s'_{43} und eine Diagonale s''_{35} gemein. Ausserdem muss der Punkt H dieser Diagonale mit dem Punkte G auf derselben Seite der Geraden s'_{41} liegen; denn die Geraden s'_{63} und s'_{41} müssen mit der Geraden s'_{43} und mit der neuen Geraden s'_{61} das vierte Viereck bilden, welchem wieder dasselbe Zeichen von ω entsprechen muss. Das Viereck $KHJF$ hat also notwendig einen gemeinsamen Teil mit den zwei ersten. Das vierte Viereck, $KLMF$, ist jetzt von selbst be-

Fig. 17.



stimmt, da wir von demselben die Lagen dreier Seiten und zweier Diagonalen kennen. Offenbar wird es ein gemeinsames Gebiet mit den übrigen Vierecken besitzen, weil seine Ecke L auf derselben Seite von s'_{41} wie H und G liegt. Würden die Punkte A, K, D und F der Geraden s'_{43} in anderer Reihenfolge stehen, z. B. K, A, F, D, so könnte man auf dieselbe Weise die Existenz des gemeinsamen Gebietes zeigen; dasselbe hat immer zu einer von seinen Seiten die Strecke zwischen den zwei mittleren dieser Punkte.

42. Die Hauptresultate dieses Kapitels sind folgende:

1. Wenn irgend welche vier von den sechs Stütznormalen in Opposition sind, so werden drei oder vier verschiedene Oppositionen der Stütznormalen sich vorfinden.

2. Dementsprechend wird das Gebiet möglicher Axenrichtungen auf der Parameterkugel durch ein sphärisches Dreieck oder ein Viereck bestimmt und kann nicht nur in dem ersten, sondern auch im zweiten Falle niemals vollkommen verschwinden. Somit kann die vollkommene Festlegung des starren Körpers durch sechs Stützflächen nicht erreicht werden.

3. Bei jeder möglichen Axenrichtung giebt es auch notwendig ein Gebiet möglicher Schraubenaxen; dasselbe ist in einem vielkantigen Prisma, dessen Kanten der gegebenen Axenrichtung parallel sind, eingeschlossen. Dabei ist die Drehung um diese Axen nur in einer Richtung möglich.

4. Mit Hilfe von sechs Stützflächen kann man den festen Körper zwingen, nur eine Schraubenverschiebung um eine bestimmte Axe mit einem bestimmten Parameterwerte zu haben; dazu müssen die Stütznormalen einem und demselben Komplexe ersten Grades angehören und ihre Richtungen müssen so genommen werden, dass wenigstens vier von denselben eine Opposition bilden. Die Drehung um diese Axe ist dann nach beiden Richtungen möglich.

VI. Die Festlegung des starren Körpers durch Stützflächen.

43. Wir werden jetzt sieben Stützflächen betrachten und solche Richtungen der Stütznormalen voraussetzen, dass wenigstens vier von denselben eine Opposition bilden. Dann ist die Zahl der echten Grenzebenen zweiter Art gleich vier oder sechs oder acht. Für das Folgende müssen wir uns klar machen, unter welchen Bedingungen diese Fälle eintreten können und auf welche Weise in diesen Fällen die Stütznormalen sich kombinieren.

Erster Fall. Die Zahl der echten Grenzebenen zweiter Art ist vier bei folgender Lage der Stütznormalen. Es seien n_1, n_2, n_3, n_4 vier sich in Opposition befindende Normalen und P'_{1234} die ihnen entsprechenden echten Grenzebenen zweiter Art; fügen wir die Normale n_5 hinzu und bestimmen nach bekannten Regeln (§ 26) diejenigen drei von den vier ersten Normalen, welche mit der fünften Normale eine Opposition bilden. Wenn n_1, n_2, n_3 diese Normalen sind, so bekommen wir die Grenzebene P'_{1235}. Die sechste Normale n_6 einführend, müssen wir sehen, mit welchen drei Normalen aus der ersten und ebenso aus der zweiten Kombination derselben sie eine Opposition bildet. Wenn wir voraussetzen, dass die Normale n_6 wieder mit n_1, n_2, n_3 in Opposition ist, so erscheint die dritte Grenzebene P'_{1236}. Es ist klar, dass in Bezug auf die zweite Kombination der Normalen (n_1, n_2, n_3, n_5) die Normale n_6 ebenfalls mit den drei ersteren eine Opposition bildet, so dass dadurch keine neue Grenzebene erhalten wird. Wenn endlich die siebente Normale n_7 dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die vier ersteren Normalen besitzt, so bekommen wir die Grenzebene P'_{1237}; die Verbindung von n_7 mit der zweiten und dritten Gruppe der

Stütznormalen, (n_1, n_2, n_3, n_5) und (n_1, n_2, n_3, n_6), giebt dann keine neue Grenzebene, so dass das ganze System derselben aus vier Ebenen

124) $$P'_{1234}, \quad P'_{1235}, \quad P'_{1236}, \quad P'_{1237}$$

besteht.

Zweiter Fall. Von den ersten sechs Stütznormalen wollen wir voraussetzen, dass sie früheren Bedingungen genügen, d. h. die Grenzebenen P'_{1234}, P'_{1235} und P'_{1236} bestimmen. Wenn aber die Normale n_7 mit der ersten Gruppe von vier Normalen auf eine andere Weise als früher die Opposition bildet, z. B. die Ebene P'_{2347} giebt, so wird sie auch mit den anderen zwei Gruppen von vier Normalen zwei neue Grenzebenen bestimmen. Dieselben müssen notwendig so bezeichnet werden: P'_{2357} und P'_{2367}; denn die sechs Normalen n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_7 entsprechen jetzt demjenigen Falle des vorhergehenden Kapitels, wo nicht drei Grenzebenen, wie es im ersten Falle war, sondern vier solche Ebenen auftreten. Von denselben haben wir aber schon drei Ebenen P'_{1234}, P'_{1235} und P'_{2347} gefunden; da die vierte Ebene nach unserer Voraussetzung nicht die Ebene P'_{1237} sein kann, so muss ihre Bestimmung notwendig von der Normale n_5 abhängen, anderseits muss sie aber (§ 34) von denjenigen zwei Normalen abhängen, welche in jeder der drei ersteren Grenzebenen auftreten, in unserem Falle also von den Normalen n_2 und n_3. Somit ist die gesuchte Ebene P'_{2357}. Eine ähnliche Überlegung zeigt uns, dass die dritte Gruppe der vier Normalen (n_1, n_2, n_3, n_6) mit der Normale n_7 die Ebene P'_{2367} bestimmt. Das gesuchte System echter Grenzebenen zweiter Art besteht also aus den Ebenen:

125) $$P'_{1234}, \quad P'_{1235}, \quad P'_{1236}, \quad P'_{2347}, \quad P'_{2357}, \quad P'_{2367}.$$

Dritter Fall. Er erscheint dann, wenn die ersten sechs Stütznormalen nicht drei, sondern vier echte Grenzebenen zweiter Art bestimmen. Wenn dieselben, wie im Beispiel des vorhergehenden Kapitels,

$$P'_{1234}, \quad P'_{2435}, \quad P'_{3456}, \quad P'_{1346}$$

sind, dann wird die Verbindung der Normale n_7 mit jeder Gruppe der diese Ebenen bestimmenden Normalen entweder zwei oder vier neue echte Grenzebenen geben. Wir erhalten zwei Ebenen, wenn n_7 in Verbindung mit den ersten vier Normalen die Ebenen P'_{2347} und P'_{1347} bestimmt; dieser Fall aber wurde schon oben betrachtet. Nehmen wir also an, dass n_7 mit n_1, n_2, n_3, n_4 eine andere Kombination bildet und z. B. die Ebene P'_{1237} bestimmt; dann wird n_7 mit der zweiten Gruppe der Normalen notwendig die Ebene P'_{2357} bestimmen, weil dazu ausser der Normalen n_5 und n_7 diejenigen zwei Normalen beitragen müssen, von welchen jede der drei Ebenen P'_{1234}, P'_{2345}, P'_{1237} abhängt. Aus demselben Grunde wird n_7 mit der dritten Gruppe der Normalen (n_3, n_4, n_5, n_6) die Grenzebene P'_{3567} und mit der vierten Gruppe die Ebene P'_{1367} geben. Das ganze System wird also aus acht Ebenen

$$126)\quad \begin{cases} P'_{1234}, & P'_{2435}, & P'_{3456}, & P'_{1346}, \\ P'_{1237}, & P'_{2357}, & P'_{3567}, & P'_{1367}, \end{cases}$$

bestehen.

Alle anderen Voraussetzungen über die sieben Stütznormalen werden unumgänglich zu einem der drei betrachteten Fälle führen, und die Grenzebenen werden sich nur durch eine andere Numeration der Indices unterscheiden. Daher werden wir weiter die Bezeichnungen 124), 125) und 126), welche als typische Bezeichnungen betrachtet werden können, behalten.

44. Im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art kann auf der Parameterkugel ein Gebiet möglicher Axenrichtungen existieren oder nicht. Beim Verschwinden desselben bleiben dem starren Körper keine Schraubenaxen möglich. Wir wollen die dazu nötigen Bedingungen aufsuchen. Wir können zu diesem Zwecke das in § 37 angegebene Verfahren benützen. Es sei $V_{321} < 0$; dann werden, dem Schema 98) und den Bezeichnungen 124) gemäss, auch die Grössen

$$\begin{matrix} V_{234}, & V_{314}, & V_{124} \\ V_{235}, & V_{315}, & V_{125} \\ V_{236}, & V_{316}, & V_{126} \\ V_{237}, & V_{317}, & V_{127} \end{matrix}$$

alle negativ sein. Nach der Regel, welche auf der Parameterkugel das Gebiet $(+\omega)$ oder $(-\omega)$ bestimmt und durch die Ungleichheiten 82) oder 83) ausgedrückt wird, haben wir also die Bedingungen:

$$P'_{1234} < 0, \quad P'_{1235} < 0, \quad P'_{1236} < 0, \quad P'_{1237} < 0$$

für $(+\omega)$ und die entgegengesetzten für $(-\omega)$. Sollen diese Gebiete verschwinden, so müssen (§ 37) U_{klm}, U_{lim}, U_{ikm}, U_{lki} dasselbe Zeichen haben. Es ist jetzt aber:

$$U_{klm} = U_{567} = \begin{vmatrix} L_{1235} & L_{1236} & L_{1237} \\ M_{1235} & M_{1236} & M_{1237} \\ N_{1235} & N_{1236} & N_{1237} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Die nach Art von § 36 ausgeführte Rechnung giebt, den Formeln 113) gemäss:

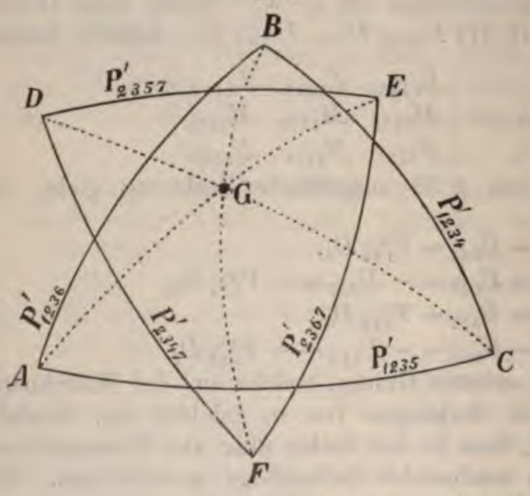
$$\begin{aligned} U_{klm} &= U_{567} = V_{123}^2 D_4, \\ U_{lim} &= U_{647} = -U_{467} = -V_{123}^2 D_5, \\ U_{ikm} &= U_{457} = V_{123}^2 D_6, \\ U_{lki} &= U_{654} = -U_{456} = -V_{123}^2 D_7, \end{aligned}$$

wo D_s eine Determinante sechsten Grades, welche aus den Koordinaten aller Stütznormalen ausser derjenigen von n_s gebildet ist, darstellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass in den Zeilen aller vier Determinanten die Indices 1, 2, 3, ... in wachsender Reihenfolge gestellt sind. Wir sehen jetzt, dass für das Verschwinden möglicher Axenrichtungen notwendig ist, dass zwei von den Determinanten D_4, D_5, D_6, D_7 positiv und die zwei anderen negativ seien. Man kann also sagen: Die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die Festlegung eines starren Körpers möglich ist, ist sieben. Diese Festlegung wird unter folgenden Bedingungen erreicht: 1. unter den Stütznormalen müssen sich vier solche vorfinden, dass sie eine Opposition bilden; 2. die drei übrigen Normalen müssen solche Richtungen haben, dass auf der Parameterkugel die negativen Endpunkte ihrer Richtungen im Gebiete eines sphärischen Dreiecks liegen, welches die positiven Endpunkte der Richtungen dreier von den vier ersten Normalen zu seinen Ecken hat; 3. wenn man vier Determinanten sechsten Grades aus den Koordinaten von Stütznormalen auf solche Weise bildet, dass dort jedesmal die Koordinaten derjenigen drei Normalen sich vorfinden, welche die Ecken des oben genannten Dreiecks bestimmen, so müssen zwei von diesen Determinanten das entgegengesetzte Zeichen von dem der zwei anderen haben.

Unten werden wir sehen, dass dieser Fall bei sieben Stützflächen der einzige ist, in welchem die vollkommene Tilgung möglicher Schraubenaxen erreichbar ist, so dass die oben angeführten Bedingungen nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige sind. Die Erfüllung dieser Bedingungen ist aber immer möglich, weil wir überzählige Elemente für die Bildung der geforderten Zeichen der vier Determinanten haben; nämlich die Momente der Stütznormalen.

45. Nehmen wir jetzt an, dass sechs Grenzebenen zweiter Art 125) echte sind. Die drei Ebenen P'_{1234}, P'_{1235} und P'_{1236} bestimmen auf der Parameterkugel ein sphärisches Dreieck ABC (Fig. 18), welches das Gebiet möglicher Axenrichtungen enthalten würde, wenn die siebente Stützfläche nicht vorhanden wäre; ebenso bestimmen die Ebenen P'_{2345}, P'_{2357} und P'_{2367} ein anderes sphärisches Dreieck DEF, welches bei Abwesenheit der Normale n_1 die möglichen Axenrichtungen enthalten würde. Zum Verschwinden aller möglichen Schraubenaxen ist es notwendig und hinreichend, dass diese zwei Dreiecke keinen gemeinsamen Teil besitzen. Man kann aber zeigen, dass diese Forderung in Wirklichkeit nicht erfüllt

Fig. 18.



werden kann. Dazu kann man die unechten Grenzebenen zweiter Art (§ 31) benutzen. Die fünf Normalen n_1, n_2, n_3, n_5, n_6 bestimmen ausser den zwei echten Grenzebenen, P'_{1235} und P'_{1236}, drei unechte:

127) $$P''_{2356}, \quad P''_{1356}, \quad P''_{1256};$$

ebenso entsprechen den fünf Normalen n_2, n_3, n_5, n_6, n_7 ausser den zwei echten Grenzebenen, P'_{2357} und P'_{2367}, drei unechte:

128) $$P''_{3567}, \quad P''_{2567}, \quad P''_{2356}.$$

Die eine Ebene, P''_{2356}, ist in den beiden Systemen 127) und 128) enthalten. Auf ähnliche Weise finden wir, dass den Ebenen P'_{1236}, P'_{1234} und P'_{2367}, P'_{2347} zwei Systeme von unechten Grenzebenen:

$$P''_{2346}, \quad P''_{1346}, \quad P''_{1246},$$
$$P''_{3467}, \quad P''_{2467}, \quad P''_{2346},$$

unter welchen eine, P''_{2246}, gemeinschaftlich ist, entsprechen. Endlich gehören zu den zwei Paaren echter Grenzebenen, P'_{1234}, P'_{1235} und P'_{2347}, P'_{2357}, zwei Systeme unechter:

$$P''_{2345}, \quad P''_{1345}, \quad P''_{1245},$$
$$P''_{3457}, \quad P''_{2457}, \quad P''_{2345},$$

in welchen beiden P''_{2345} vorkommt. Es wurde schon in § 31 gezeigt, dass im Falle von fünf Stützflächen die den zwei echten Grenzebenen entsprechenden unechten Grenzebenen zweiter Art die Schnittgerade der echten enthalten und in demjenigen Paare der von den letzteren gebildeten Scheitelwinkel liegen, welches auf der Parameterkugel das Gebiet der möglichen Axenrichtungen einschliesst. Daraus folgt, dass die Spuren der Ebenen

129) $$P''_{2456}, \quad P''_{2346}, \quad P''_{2345}$$

auf der Parameterkugel sich im Innern der beiden Dreiecke ABC und DEF schneiden müssen, und zudem in einem und demselben Punkte G, weil die Ebenen 129) wieder einem Systeme von fünf Stütznormalen n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 entsprechen (§ 31). Da dieser Punkt zu den beiden Gebieten ABC und DEF gehört, so haben dieselben notwendig einen gemeinsamen Teil. Man kann übrigens noch nicht unmittelbar behaupten, dass dieser gemeinsame Teil das Gebiet möglicher Axenrichtungen darstellt; denn es ist dazu noch notwendig, dass das Zeichen von ω in beiden Gebieten dasselbe sei. Folgende Überlegung wird aber zeigen, dass diesen Gebieten, wenn sie nur einmal einander decken, nicht verschiedene Zeichen von ω entsprechen können. Ziehen wir aus dem Systeme 125) die vier Ebenen P'_{1235}, P'_{1236}, P'_{2357}, P'_{2367} heraus; diese Ebenen bilden das volle System der echten Grenzebenen zweiter Art im Falle von sechs Stützflächen mit den Normalen n_1, n_2, n_3, n_5, n_6, n_7. Auf der Parameterkugel bilden sie ein sphärisches Viereck, welches (§ 37) das Gebiet der möglichen Axenrichtungen für diese sechs Stützflächen bestimmt. Einerseits muss ω in diesem Gebiete dasselbe Zeichen haben, wie im Gebiete ABC, da in ihnen der

Winkel zwischen P'_{1235} und P'_{1236} gemeinsam ist; anderseits muss aber das Zeichen von ω dasselbe wie in DEF sein, weil dieses Gebiet mit dem Vierecke den Winkel zwischen P'_{2357} und P'_{2367} gemein hat. Daraus folgt aber, dass den Gebieten ABC und DEF nur ein und dasselbe Zeichen von ω entsprechen kann. Der gemeinsame Teil beider Dreiecke bestimmt also in der That das Gebiet möglicher Axenrichtungen.

Man müsste noch zeigen, dass es für jede mögliche Axenrichtung auch ein Gebiet möglicher Schraubenaxen giebt; wir werden aber das nicht thun, da es auf ganz dieselbe Weise wie im vorigen Kapitel (§§ 40 und 41) geschehen kann.

46. In dem letzten Falle, wo acht echte Grenzebenen zweiter Art auftreten, kann das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxen auch nicht erreicht werden. Um das zu zeigen, werden wir davon ausgehen, dass durch sechs Stützflächen die Festlegung nicht möglich ist. Acht Grenzebenen kann man auf sechsfache Weise so kombinieren, dass jedesmal vier von denselben das volle System echter Grenzebenen zweiter Art für sechs von den sieben Stützflächen darstellen. Dabei muss man die Regel (§ 34), nach welcher die Indices der sechs Normalen in der Bezeichnung der vier Grenzebenen auftreten, festhalten. Demgemäss bekommen wir folgende sechs Gruppen:

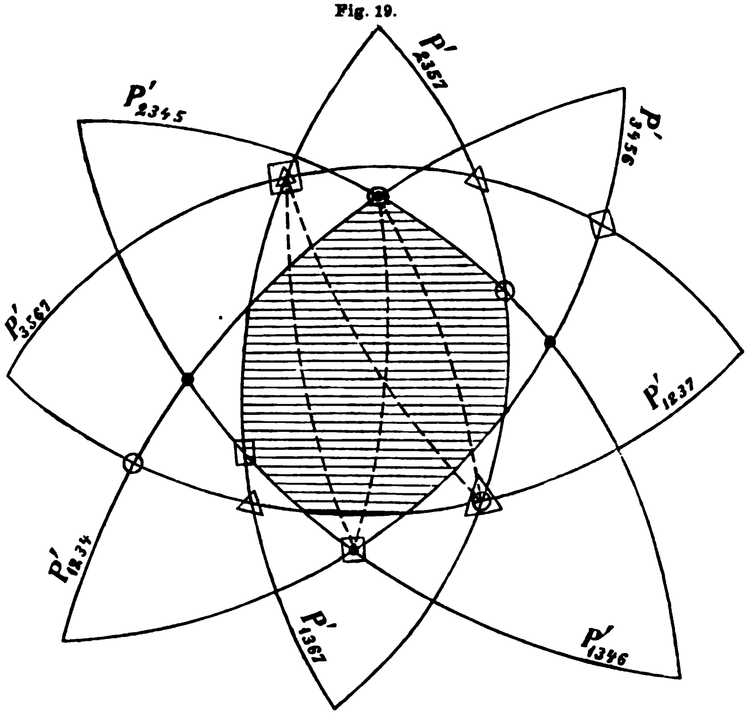
130) P'_{1234}, P'_{2345}, P'_{3456}, P'_{1346} (ohne n_7),
131) P'_{1237}, P'_{2357}, P'_{3567}, P'_{1367} (ohne n_4),
132) P'_{1234}, P'_{2345}, P'_{2357}, P'_{1237} (ohne n_6),
133) P'_{1346}, P'_{3456}, P'_{3567}, P'_{1367} (ohne n_2),
134) P'_{1234}, P'_{1346}, P'_{1367}, P'_{1237} (ohne n_5),
135) P'_{2345}, P'_{2357}, P'_{3567}, P'_{3456} (ohne n_1).

Die siebente Gruppe, welche n_3 nicht enthält, ist nicht möglich, da der Index 3 in der Bezeichnung aller acht Ebenen 126) steht. Ausserdem sind auch andere Kombinationen unmöglich, da sie der in § 34 gezeigten Eigenschaft, dass dieselben zwei Indices in der Bezeichnung aller vier Ebenen einer Gruppe stehen, nicht genügen. Wir werden zuerst die Gruppen 130), 131), 132) und 133) betrachten. Die Ebenen 130) bestimmen auf der Parameterkugel ein Gebiet der bei sechs Stützflächen (mit den Normalen n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) möglichen Axenrichtungen. Dieses Gebiet hat die Form eines sphärischen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte der Spuren von P'_{1234} und P'_{2345}, P'_{2345} und P'_{3456}, P'_{3456} und P'_{1346}, P'_{1346} und P'_{1234}, d. h. überhaupt diejenigen Paare von Grenzebenen sind, welche Gruppen von fünf Normalen entsprechen.* Die Lage der Ebenen 130) ist in Fig. 19 dargestellt. Betrachten wir jetzt die Gruppe 132); sie ent-

* So dass kein Schnittpunkt der Spuren von den Ebenen P'_{1234} und P'_{3456} oder P'_{2345} und P'_{1346} als Ecke dienen kann.

hält, ausser den zwei neuen Ebenen P'_{2357} und P'_{1237}, zwei frühere Ebenen P'_{1234} und P'_{2345}; wir brauchen also, um das der Gruppe 132) entsprechende Viereck zu zeichnen, nur die Spuren der ersteren zwei Ebenen zu ziehen. Mit der Gruppe 131) führen wir die zwei übrigen von den acht echten Grenzebenen ein. Diese Ebenen P'_{1367} und P'_{3567} müssen zudem solche Lage haben, dass sie sowohl mit den Ebenen P'_{1237} und P'_{2357} als auch mit den Ebenen P'_{1346} und P'_{3456}

Fig. 19.



133) Vierecke möglicher Axenrichtungen (bei sechs Stützflächen) bilden. Endlich muss man bei der Konstruktion beachten, dass auch die zwei übrigen Gruppen 134) und 135) Gebiete möglicher Axenrichtungen (bei sechs Stützflächen) geben müssen. In Fig. 19 sind der Anschaulichkeit wegen die Ecken eines jeden Vierecks durch besondere Zeichen angemerkt und ausserdem ist in jedem derselben eine Diagonale gezogen, welche die Spur einer der unechten Grenzebenen erster Art darstellt.

Wenn man allen genannten Forderungen genügt, so ist es nicht möglich, dass kein gemeinsamer Teil aller Vierecke existiert; im umgekehrten Falle würden nicht alle Vierecke die Gebiete möglicher den Gruppen von sechs Stützflächen entsprechenden Axenrichtungen geben, was der Voraussetzung, dass alle acht Ebenen 126) echte sind, widersprechen würde.

Dass allen Vierecken dasselbe Zeichen von ω entspricht, davon kann man sich auf dieselbe Weise überzeugen, wie es im analogen Falle in § 45 geschah; wir können nämlich den Umstand benutzen, dass zwei in bestimmter Ordnung genommene Vierecke zu zweien gemeinsame Seiten haben, und dass dem zwischen denselben in den beiden Vierecken eingeschlossenen Winkel dasselbe Zeichen von ω entspricht. Es ist also in der That das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxenrichtungen im Falle von acht echten Grenzebenen zweiter Art nicht erreichbar.

Man müsste noch zeigen, dass für jede der möglich gebliebenen Axenrichtungen auch ein Prisma existiert, welches mögliche Schraubenaxen enthält; wir werden aber das nicht thun, da es auf ganz dieselbe Weise wie für den Fall von sechs Stützflächen geschehen kann.

47. Alles Gesagte zusammenfassend, finden wir:

1. Wenn vier von den sieben Stützflächen den für die Opposition nötigen Bedingungen genügen, so werden vier oder sechs oder acht Gruppen von vier Stütznormalen in Opposition sein.

2. Im ersten dieser Fälle kann die Festlegung des starren Körpers durch sieben Stützflächen erreicht werden; dazu müssen die in § 44 gegebenen Bedingungen erfüllt werden.

3. Dieser Fall der Festlegung ist bei sieben Stützflächen der einzig mögliche; in den zwei anderen Fällen können die möglichen Schraubenaxen nicht vollkommen verschwinden.

Wenn wir alles in den vorhergehenden Kapiteln Gesagte in Betracht ziehen, so sehen wir, dass die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die Festlegung des starren Körpers erreicht werden kann, sieben ist.

Angesichts dieses Resultates brauchen wir unsere Untersuchung weiter nicht fortzusetzen. Im Falle von acht oder mehr Stützflächen kann natürlich die Festlegung bei weniger Begrenzungen für die Stütznormalen erreicht werden, und die Aufsuchung der dazu nötigen Bedingungen bietet keine Schwierigkeit. Die Untersuchung aber aller dabei auftretenden Fälle kann mit denselben Mitteln, welche in den zwei letzten Kapiteln gezeigt wurden, unternommen werden.

Beitrag zur Knick-Elastizität und -Festigkeit.

Von

Baurat J. KÜBLER
in Esslingen.

Hierzu lithographierte Tafel II.

A. Gewöhnlicher Fall der nicht stark federnden Stäbe.

Das Kapitel über die Knick-Elastizität und -Festigkeit ist merkwürdigerweise bis jetzt weit hinter dem hohen Grad einer befriedigenden Entwickelung zurückgeblieben, welchen die übrigen Kapitel der Festigkeitslehre bereits erfahren haben. Dies hat wohl seinen Grund in dem Umstand, dass in der Herleitung der Gleichung der elastischen Linie ein für diese besondere Belastungsart charakteristisches Glied bis jetzt nicht zum Ausdruck gekommen ist. Erwägt man nämlich, dass bei der Knickung im allgemeinen die eigentliche Biegung nur gering ist, so kommt man zu der Überzeugung, dass infolgedessen auch dieses — im allgemeinen also nur kleine — Biegungsmoment allein nicht den Ausschlag geben kann für die Formänderung des gedrückten Stabes, sondern dass dabei notwendigerweise auch der eigentliche Druck selbst — und zwar als der eigentlichen Biegung vollkommen ebenbürtig — zur Geltung kommen muss. In der Folge soll dies näher dargethan werden.

Genaue Gleichung der elastischen Linie.

Die genaue Gleichung der elastischen Linie findet sich für den zentrisch gedrückten und ursprünglich geraden Stab, von der freien Knicklänge l, wie folgt: bezeichnet $\varepsilon_0 = \frac{P}{EF}$ die spezifische Zusammendrückung vom Druck P in einem beliebigen Querschnitt F des Stabes, (siehe Fig. 1, Taf. II) und ist $d\varphi = \frac{ds}{r}$ der kleine Winkel, um welchen die beiden benachbarten und ursprünglich parallelen Querschnitte infolge der Biegung durch das Moment

$$M = P(f - y)$$

(siehe Fig. 2, Taf. II) gegen einander verdreht werden, so hat man, mit Rücksicht auf den gleichzeitigen Druck P, in dem beliebigen Abstand η von der Biegungsaxe, als spezifische Zusammendrückung der Faser daselbst, aus $d\varphi = \frac{ds(1-\varepsilon_0)}{r} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\,ds}{\eta}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r}$$

und als spezifische Druckspannung:

$$\sigma = E\varepsilon = E\left\{\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r}\right\}.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den inneren und äusseren Kräften ergiebt sich damit für den betrachteten Querschnitt F:

$$P = \int \sigma\, dF = \int E\left\{\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r}\right\} dF = EF\varepsilon_0$$

und

$$M = P(f - y) = \int E\left\{\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r}\right\} dF\eta = (1 - \varepsilon_0)\frac{EJ}{r}$$

und zwar mit Rücksicht darauf, dass die Biegungsaxe durch den Schwerpunkt S des Querschnitts F geht und deshalb

$$\int \eta\, dF = 0 \quad \text{und} \quad \int \eta^2 dF = J$$

gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf diese Biegungsaxe zu setzen ist. Als Biegungsaxe ist unter sonst gleichen Umständen diejenige Axe anzusehen, in Bezug auf welche das kleinste Trägheitsmoment auftritt.

Mit der üblichen Abkürzung für

$$\frac{P}{EJ} = n^2 \quad \text{und} \quad \frac{J}{F} = i^2$$

hat man also:

$$\varepsilon_0 = \frac{P}{EF} = \frac{P}{EJ}\,\frac{J}{F} = n^2 i^2$$

und damit:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ(1-\varepsilon_0)} = \frac{P}{EJ}\,\frac{f-y}{1-\varepsilon_0} = \frac{n^2}{1-n^2 i^2}(f - y)$$

$\varepsilon_0 = n^2 i^2$ ist, als die Zusammendrückung für die Längeneinheit, für alle hier in Betracht kommenden Baustoffe stets eine kleine Grösse, die ohne merklichen Fehler gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Beachtet man noch, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{ds}, \quad \text{mit} \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

also

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{dy}\sin\varphi,$$

so heisst die Differentialgleichung der elastischen Linie noch genau genug ganz allgemein:

1) $$\sin\varphi\, d\varphi = n^2(f-y)\,dy.$$

Durch erstmalige Integration findet sich, mit Rücksicht auf die hier einzuführende Integrationskonstante, aus:

$$\int_0^{\varphi}\sin\varphi\, d\varphi = \int_{y_0}^{y} n^2(f-y)\,dy:$$

2) $$1-\cos\varphi = \frac{n^2}{2}(2fy-y^2)+n^2i^2.$$

Von der Richtigkeit der hier ganz besonders wichtigen Integrationskonstanten überzeugt man sich sofort, wenn man beachtet, dass

$$1-\cos\varphi = \frac{ds}{ds}-\frac{dx}{ds} = \frac{d(s-x)}{ds} = \frac{d\Delta x}{ds}$$

gleichkommt dem verhältnismässigen Längenunterschied zwischen dem Längenelement ds des Stabes, in seiner ursprünglichen Länge, und dem dazu gehörigen Sehnenelement dx nach der Deformation. Dieser Längenunterschied ist aber auch gleich dem Wege $\frac{d\Delta x}{ds}$, oder auch für die ganze Stablänge $\frac{d\Delta a}{ds}$, den bei der Deformation die Druckkraft P zurücklegt, und welcher sich zusammensetzt aus der Zusammendrückung $\frac{n^2}{2}(2fy-y^2)$, welche der Stab durch die Biegung vom Moment $M=P(f-y)$ erfährt, und aus der Verkürzung n^2i^2 des Stabes vom Druck P selbst. Gleichung 2) ist also nichts anderes als die Gleichung der Formänderungsarbeit, in welcher ausser der Biegung auch die eigentliche Druckwirkung zur Geltung gekommen ist. Bei der geringen Biegung, um die es sich hier im allgemeinen überhaupt handelt, kommt die kleine Grösse $n^2i^2=\varepsilon_0$ gegen die andere, gewöhnlich ebenfalls nur kleine Grösse $\frac{n^2}{2}(2fy-y^2)$ sehr wohl in Betracht; sie ausser Acht lassen, würde also heissen, ein für die in Rede stehende Belastungsart geradezu charakteristisches Glied unterdrücken.

Mit Rücksicht auf diese eigentliche Druckwirkung n^2i^2 wird aber in der Stabmitte, d. i. für $\varphi=0$, aus Gleichung 2) nicht mehr auch $y=0$, — was der Fall sein würde, wenn nur die Biegungsspannung allein in Betracht käme — sondern

$$y=y_0=f-\sqrt{2i^2+f^2}.$$

Es fällt deshalb die elastische Linie nicht zusammen mit der deformierten Mittellinie des Stabes, auf welche die Kräfte und Momente bezogen sind, sondern erstere hat einen um y_0 grösseren Pfeil als letztere (siehe Fig. 2 Taf. II), was bei der Bestimmung der weiteren Integrationskonstanten wohl zu beachten ist.

Zur unzweideutigen Klarlegung der Sachlage möchte ich hier noch ganz besonders hervorheben, dass im vorliegendem Fall sehr wohl zu unterscheiden ist zwischen: Elastischer Linie und Gebogener Mittellinie des Stabes. Unter elastischer Linie verstehe ich die spannungslose, neutrale Mittellinie, d. i. die gebogene Mittellinie des Stabes, die frei ist von jeder Spannung, die im vorliegenden Fall also insbesondere frei ist von der eigentlichen Druckspannung $n^2 i^2$. Die Gleichung

$$\frac{d\Delta x}{ds} = \frac{ds - dx}{ds} = 1 - \cos\varphi = \frac{n^2}{2}(2i^2 + 2fy - y^2)$$

ist aber die Gleichung dieser spannungslos gedachten elastischen Mittellinie, von welcher ausgegangen werden muss, wenn der hochwichtige Einfluss der eigentlichen Druckspannung nicht verloren gehen soll. Die beiden genannten Linien sind also nur insofern voneinander verschieden, als die in Fig. 2 (ausgezogene) gedrückte Mittellinie des Stabes in die (gestrichelte) elastische Linie übergeht, wenn man erstere von ihrer Druckspannung befreit; dies geschieht dadurch, dass man sie mit ihrer x-Axe eine Linksbewegung um $y = y_0$ machen lässt, indem während dieser Prozedur die Stabenden festgehalten werden. Bei der Theorie der reinen Biegung ist dieser Unterschied nicht zu machen, weil dort beide Linien in eine einzige zusammenfallen. Übersieht man im vorliegenden Fall diesen für die in Rede stehende Belastungsart ganz besonders charakteristischen Unterschied, so heisst dies nichts anderes, als auf den Einfluss der eigentlichen Druckspannung $n^2 i^2$ verzichten. Damit kommt man aber dann auf die Euler'sche Gleichung, die also aus diesem angeführten Grund unmöglich richtig sein kann.

Nach dieser Betrachtung erhält man aus Gleichung 2), die auch geschrieben werden kann:

$$1 - \cos\varphi = \frac{n^2}{2}(2i^2 + 2fy - y^2);$$

mit

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = n\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2} \quad \text{mal}$$

$$\cdot\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)},$$

oder auch

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

also

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{n}{2}\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2},$$

als Integralgleichung für die deformierte Mittellinie des Stabes:

$$3)\quad \int\limits_{y_0}^{y_0+y} \frac{dy}{\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2}\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)}} = \int\limits_0^s n\,ds = ns,$$

worin, wie oben bemerkt,

$$y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$$

zu setzen ist. Die Integration dieser Gleichung 3) lässt sich in höchst einfacher und geschlossener Form ausführen für alle Fälle, die von praktischem Interesse sind. Denn weil innerhalb dieser Grenzen

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)$$

verhältnismässig klein bleibt gegen 1, so kommt der Nebenfaktor

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)} = \cos\frac{\varphi}{2}$$

gegenüber dem Hauptfaktor

$$\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2} = \frac{2}{n}\sin\frac{\varphi}{2}$$

im Nenner gar nicht praktisch zur Geltung. Nur für stark federnde Stäbe, wie dünne Drähte und dergl., oder auch für im Vergleich zu ihren Querdimensionen aussergewöhnlich lange Stäbe kann überhaupt dieser Nebenfaktor merklich von 1 verschieden werden; für alle übrigen Fälle, wie sie insbesondere in den praktischen Aufgaben der Knickfestigkeit auftreten, bleibt er aber immer von 1 nur so wenig verschieden, dass er — ohne wahrnehmbaren Fehler — geradezu gleich 1 gesetzt werden kann, was weiter unten gelegentlich noch thatsächlich bestätigt werden wird.

Obgleich dieser Nebenfaktor also für gewöhnlich geradezu = 1 zu setzen ist und er überhaupt nur für stark federnde Stäbe merklich von 1 abweichen kann und er somit für diese letzteren also recht eigentlich das charakteristische Merkmal bildet, so soll er nichtsdestoweniger, zur Erlangung ganz allgemein giltiger Resultate, bis auf weiteres mitgeführt werden, um so mehr, als dadurch keinerlei Schwierigkeit entsteht; denn selbst in den ungünstigsten Fällen kann für ihn noch ein sehr nahezu konstanter Mittelwert gesetzt werden, wie aus folgendem hervorgeht:

Dieser Nebenfaktor

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)}$$

erreicht nämlich seinen Höchstwert gleich 1 für $\varphi = 0$, d. i. in der Stabmitte, wo

$$y = y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$$

wird. Von da ab wird er kleiner gegen die Stabenden hin und zwar nur unmerklich kleiner, wenn es sich nicht um schon besonders grosse Durchbiegungen f, d. i. um stark federnde Stäbe handelt. Seinen kleinsten Wert erreicht er bei den Stabenden selbst, d. i. für $\varphi = \alpha$, oder $y = f$ und zwar mit

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)}.$$

Da nun

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

immer nur ein echter Bruch ist, der höchstens einmal bis $\sim 0{,}7$ anwachsen kann, wie gelegentlich weiter unten bestätigt werden wird, so kann als Mittelwert für den — wie schon gesagt — nur für stark federnde Stäbe charakteristischen Nebenfaktor:

$$\sqrt{1-\xi\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}$$

gesetzt werden, worin ξ einen Koeffizienten bedeutet, der im allgemeinen gleich $\frac{1}{2}$ ist und im äussersten Fall einmal bis höchstens auf 0,64 anwachsen kann, wie gelegentlich weiter unten bestätigt werden wird.

Der so näher präzisierte Mittelwert des Nebenfaktors:

$$\cos\frac{\varphi_m}{2}=\sqrt{1-\xi\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}$$

soll in der Folge einfach mit $\sqrt{}$ bezeichnet und mitgeführt werden, um — wie gesagt — ganz allgemein giltige Resultate zu erhalten; weiss man doch, dass er für gewöhnlich gleich 1 ist und überhaupt nur für besonders stark federnde Stäbe merklich von 1 abweichen kann.

Nach diesem kann also für Gleichung 3) gesetzt werden:

$$\int\limits_{y_0}^{y_0+y}\frac{dy}{\sqrt{2i^2+2fy-y^2}}=ns\sqrt{}$$

und integriert:

$$\left\{-\operatorname{arc}\sin\frac{f-y}{\sqrt{2i^2+f^2}}\right\}_{y_0}^{y_0+y}=\operatorname{arc}\cos\frac{\sqrt{2i^2+f^2}-y}{\sqrt{2i^2+f^2}}=ns\sqrt{},$$

oder

4) $$y=\sqrt{2i^2+f^2}(1-\cos ns\sqrt{}).$$

Die Durchbiegung f.

Die Gleichung 4) stellt, wie oben betont, die deformierte Mittellinie des Stabes dar und zwar bezogen auf die ursprünglich gerade Stabaxe. Für $s=0$ folgt daraus auch $y=0$ und für die zusammengehörigen Werte von

$$s=\frac{l}{2} \quad \text{und} \quad y=f$$

ergiebt sich die Bedingungsgleichung für den Pfeil f aus:

$$f=\sqrt{2i^2+f^2}\left(1-\cos\frac{nl}{2}\sqrt{}\right)=\sqrt{2i^2+f^2}\cdot 2\sin^2\frac{nl}{4}\sqrt{}$$

und daraus der allgemeine Ausdruck für die Durchbiegung f:

5) $$f=i\sqrt{2}\frac{2\sin^2\frac{nl}{4}\sqrt{}}{\sqrt{1-4\sin^4\frac{nl}{4}\sqrt{}}}$$

oder gleich: $f=i\sqrt{2}\operatorname{tg}\psi$ mit dem Hilfswinkel ψ aus:

$$\sin\psi = 2\sin^2\frac{nl}{4}\sqrt{\ } = 1 - \cos\frac{nl}{2}\sqrt{\ }$$

(siehe Fig. 2, Taf. II).

Aus dem Ausdruck $f = i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\psi$ geht hervor, dass zur Erklärung des Vorganges bei der Knickung nicht nötig ist, willkürlich eine kleine Exzentrizität für die Druckkraft P anzunehmen, wie dies seither mit richtigem Gefühl als Notbehelf geschehen ist, sondern dass diese Exzentrizität stets von vornherein schon vorhanden ist und selbst bei der sorgsamsten Fernhaltung aller Zufälligkeiten und Ungenauigkeiten den ganz bestimmten Wert von $i\sqrt{2}$ hat. Diese Exzentrizität tritt übrigens in der Stabmitte auf und nicht an den Stabenden.

Die in richtiger Würdigung der zusätzlichen Stabpressung vom Druck P erhaltene genaue Gleichung 4) der deformierten Stabmittellinie weicht naturgemäss ganz wesentlich ab von der bis dahin bekannten

$$y = f(1 - \cos nx).$$

Insbesondere erhält man nicht mehr, wie aus dieser letzteren, für

$$y = f \quad \text{und} \quad x = \frac{l}{2}$$

die sogenannte Euler'sche Gleichung, aus

$$\cos\frac{nl}{2} = 0,$$

nämlich:

$$\frac{nl}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{d. i. mit } n^2 = \frac{P}{EJ}:\ P = \frac{\pi^2}{l^2}EJ,$$

in welcher, wie gesagt, nur die Biegungsspannung, nicht aber auch die ihr vollkommen gleichberechtigte, eigentliche Druckspannung zum Ausdruck gekommen ist — sondern:

$$f = \sqrt{2i^2 + f^2}\left(1 - \cos\frac{nl}{2}\sqrt{\ }\right)$$

woraus folgt mit $y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$:

$$\frac{nl}{2}\sqrt{\ } = \arccos\frac{-y_0}{\sqrt{2i^2+f^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{-y_0}{\sqrt{2i^2+f^2}},$$

aus welcher Gleichung für den Pfeil f der Ausdruck von Gleichung 5):

$$f = i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\psi$$

sich ergiebt.

Die höchstens zulässige Druckspannung.

Mit der weiteren Bedingungsgleichung für die höchstens zulässige Gesamtdruckspannung k, welche für den Bruchquerschnitt in der Stabmitte statthaben muss, nämlich:

6)
$$k = \frac{P}{F} + \frac{Pf}{W}$$

oder
$$k = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{Ff}{W}\right)$$

ergiebt sich mit den bekannten Abkürzungen für

$$\frac{J}{F} = i^2 \quad \text{und} \quad W = \frac{J}{e}:$$

$$\frac{Ff}{W} = \frac{ef}{i^2}$$

und daraus für den zulässigen Druck P:

$$P = \frac{kF}{1 + \frac{ef}{i^2}},$$

oder für den sogenannten Abminderungskoeffizienten α:

$$\alpha = \frac{P}{kF} = \frac{1}{1 + \frac{ef}{i^2}},$$

oder auch für den Pfeil:

7)
$$f = \frac{i^2}{e}\,\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{i^2}{e}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

In besonderen Fällen, wo, wie z.B. beim Gusseisen, nicht d lässige Druckspannung k, sondern die viel kleinere zulässige spannung $-k_1$ den Ausschlag geben kann, tritt an die Stell Gleichung 6) die auf die höchstens zulässige Zugspannung — zügliche Gleichung 6a), nämlich:

$$-k_1 = \frac{P}{F} - \frac{Pf}{W},$$

oder

6a)
$$\alpha = \frac{P}{kF} = \frac{\frac{k_1}{k}}{\frac{ef}{i^2} - 1}$$

und damit
$$P = \frac{k_1 F}{\frac{ef}{i^2} - 1}$$

und

7a)
$$f = \frac{i^2}{e}\,\frac{\frac{k_1}{k} + \alpha}{\alpha}.$$

Mit den Gleichungen 4), 5) und 6) bezw. 6a) ist alles best was auf Knickfestigkeit Bezug hat, wenn nur noch die Ma Koeffizienten k und E des betrachteten Stabes und dessen Quersc form d.i. J, F und W oder i und e bestimmt sind.

Der Abminderungskoeffizient α.

Durch Gleichsetzung der beiden Werte für f in Gleichung 5) und bezw. 5) und 7a):

$$f = i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\psi = \frac{i^2}{e}\,\frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{bezw.} \quad \frac{i^2}{e}\,\frac{\frac{k_1}{k}+\alpha}{\alpha}$$

hält man für den Abminderungskoeffizienten α aus:

$$8) \qquad \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k}+\alpha}{\alpha} = \frac{e\sqrt{2}}{i}\,\mathrm{tg}\,\psi.$$

Daraus ersieht man, dass die Querschnittsform durch den Ausruck $\frac{e\sqrt{2}}{i}$ charakterisiert ist.

Der Koeffizient der Querschnittsform.

Für die in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen (siehe g. 4) variiert der Wert $\frac{e\sqrt{2}}{i}$ etwa zwischen 2 bis 3,5 und damit folgt s Gleichung 8):

$$\alpha = \frac{1}{\frac{e\sqrt{2}}{i}\,\mathrm{tg}\,\psi + 1} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k}}{\frac{e\sqrt{2}}{i}\,\mathrm{tg}\,\psi - 1},$$

er:

$$9) \qquad \alpha = \frac{1}{(2 \text{ bis } 3{,}5)\,\mathrm{tg}\,\psi + 1} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k}}{(2 \text{ bis } 3{,}5)\,\mathrm{tg}\,\psi - 1}.$$

In $\sin\psi = 2\sin^2\frac{nl}{4}\sqrt{}$ ist für die hier in Betracht kommenden lle für $\sqrt{} = 1$ zu setzen, also für $\frac{nl}{4}\sqrt{}$ einfach $= \frac{nl}{4}$, worin

$$n = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Da mit wachsendem Druck P der Pfeil

$$f = i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\psi$$

allgemeinen rascher anwächst als P, so entscheidet für das mass-›ende f der grösste Wert, den P annehmen kann, d. i. die Bruch-ıft P_0. Ist k die zulässige Pressung bei m-facher Sicherheit gegen ıch, also $mk = k_0$ der Bruchkoeffizient des betrachteten Materials, ist der Abminderungskoeffizient

$$\alpha = \frac{P}{kF} = \frac{mP}{mkF} = \frac{P_0}{k_0 F}$$

r auch gleich $\frac{P_0}{mkF}$ zu setzen.

Was die Grenze $\frac{\alpha l}{4}\gamma$ betrifft, so kann

$$\sin v = 2\sin^2\frac{\alpha l}{4}\gamma$$

gehen von 0 bis 1, oder $\frac{\alpha l}{4}\gamma$ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ entsprechend 0 bis 45°.

Beachtet man noch, dass mit $\gamma = 1$:

$$\frac{\alpha l}{4}\gamma = \frac{\alpha l}{4} = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

also gleich

$$\frac{l}{4}\sqrt{\frac{P}{mkF}\,\frac{mkF}{EJ}} = \frac{l}{i}\sqrt{\varepsilon\,\frac{mk}{16E}}$$

und daraus:

10) $$\frac{l}{i} = \left(\frac{\alpha l}{4}\gamma\right)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{16E}{mk}}$$

gesetzt werden kann, so kann für jeden Stab der zulässige Druck P oder umgekehrt der erforderliche Querschnitt F ermittelt werden, wenn nur noch die speziell für diese Belastungsart charakteristische Materialkonstante

$$\frac{16E}{mk} = \frac{16E}{k_0}$$

bestimmt ist.

Die Materialkonstante für verschiedene Baustoffe.

I. Für Fluß- und Schweißeisen kann gesetzt werden:

$$E = 2\,150\,000 \quad \text{bezw.} \quad 2\,000\,000$$

und

$$k_0 = mk = 3\,800 \quad \text{bezw.} \quad 3500.$$

Damit wird

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 95,$$

für $m = 4$ fache Sicherheit gegen Bruch würde dann sein $k = 950$ bezw. 875 kg p. qcm.

II. Für Flußstahl mit

$$E = 2\,200\,000,$$

und

$$mk = 5\,500$$

wird

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 80;$$

bei $m = 4$ bezw. 5, also $k = 1375$—1100.

III. Für Tiegelflußstahl mit

$$E = 2\,200\,000$$

und

$$mk = 7200$$

wird

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 70;$$

bei $m = 4$ bezw. 5, also $k = 1800$—1400.

IV. Für Gusseisen mit

$$E = 850\,000$$

und

$$mk = 7200 \quad \text{bezw.} \quad -m_1 k_1 = 1200$$

ist

$$\sqrt{\frac{16\,E}{mk}} = \sim 44;$$

bei

$$m = 10, \text{ also } k = 720$$
$$m_1 = 5, \quad -k_1 = 240.$$

Bei Gusseisen, wo der zulässige Druckkoeffizient k etwa 3 mal so gross ist als der zulässige Zugkoeffizient $-k_1$, entscheidet, wie schon bemerkt, für längere Stäbe dieser Zugkoeffizient $-k_1$. Mit $\frac{k_1}{k} = \frac{1}{3}$ erhält man aus Gleich. 9) also:

$$\alpha = \frac{1}{(2 \text{ bis } 3{,}5)\operatorname{tg}\psi + 1} \quad \text{bezw.} = \frac{\frac{1}{3}}{(2 \text{ bis } 3{,}5)\operatorname{tg}\psi - 1}.$$

Der kleinere der hieraus sich ergebenden Werte von α entscheidet und die Grenzscheide, wo die erste Formel durch die zweite ersetzt wird, ist bestimmt durch:

$$1 - \alpha = \frac{k_1}{k} + \alpha, \quad \text{d. i.} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_1}{k}\right)$$

mit $\frac{k_1}{k} = \frac{1}{3}$ also auch $\alpha = \frac{1}{3}$.

V. Für Eichenholz mit

$$E = 120\,000 \quad \text{und} \quad mk = 650,$$

und Kiefernholz mit

$$E = 100\,000 \quad \text{und} \quad mk = 500$$

ist

$$\sqrt{\frac{16\,E}{mk}} = \sim 55$$

bei $m = 10$, $k = 65$ bezw. 50.

Numerische Berechnung.

Nach Vorstehendem werden die folgenden Tabellenwerte ohne weiteres verständlich sein; man beachte dabei, dass in dieser Tabelle die oberen Wertreihen für

$$\frac{nl}{4}V, \quad \sin\frac{nl}{4}V, \quad \sin\psi, \quad \operatorname{tg}\psi, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{nl}{4}V\right)\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

ganz allgemein gelten und unabhängig vom Material sind, und dass erst von da ab der für die in Rede stehende Belastungsart charakteristische Materialkoeffizient $\sqrt{\frac{16\,E}{mk}}$ zur Bestimmung von $\frac{l}{i}$ zum Ausdruck kommt.

Aus diesen Tabellenwerten sind die Diagramme für die hier behandelten 5 verschiedenen Baustoffe gebildet und in richtigem Maß-stab aufgezeichnet — siehe Fig. 5 für Fluß- und Schweißeisen —, so dass jeder in der Praxis vorkommende Fall genau genug daraus abgegriffen oder auch aus der daraus für den Abminderungskoeffizienten α gebildeten Tabelle — Seite 320 — abgelesen werden kann, wie folgt:

Für einen konkreten Fall bestimme man zunächst den für die Querschnittsform charakteristischen Koeffizienten $\frac{e\sqrt{2}}{i}$, dessen Wert, wie schon bemerkt, etwa zwischen den Grenzen 2 bis 3,5 liegen wird, für welche Grenzen auch die Tabelle berechnet und die Diagramme aufgezeichnet sind. Hierauf bestimme man die Grösse $\frac{l}{i}$, worin l die freie Knicklänge des Stabes und

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

den Trägheitsradius in Bezug auf die Biegungsaxe des Bruchquerschnitts bedeutet. Die Biegung erfolgt selbstredend um diejenige Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment J — unter sonst gleichen Umständen — am kleinsten ist. Die freie Knicklänge ist nach der Art der Befestigung der Stabenden in bekannter Weise richtig zu bemessen. Mit den so erhaltenen Werten kann alsdann aus dem betreffenden Diagramm oder aus der Tabelle durch schätzungsweise Interpolation in Bezug auf $\frac{e\sqrt{2}}{i}$ der Wert des Abminderungskoeffizienten α genau genug abgestochen oder aus der betreffenden Tabelle abgelesen werden. Hat man aber α, dann folgt aus

$$\alpha = \frac{P}{kF}$$

entweder der zulässige Druck $P = \alpha k F$, oder auch der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{P}{\alpha k},$$

oder auch die grösste Anstrengung des Materials aus

$$k = \frac{P}{\alpha F}.$$

Selbstredend kann auch für jeden anderen Fall die Rechnung besonders durchgeführt werden; auch für beliebig andere Stoffe mit dem ihnen zukommenden Materialkoeffizienten

$$\sqrt{\frac{16\,E}{mk}},$$

wie dies in nachstehender Tabelle für eine geeignete Anzahl von Zwischenwerten thatsächlich ausgeführt worden ist.

ist $\sin \frac{nl}{4} V =$	0	0,0872	0,1736	0,2588	0,3420	0,4226	0,5	0,5736	0,6428	0,6756	0,6947	0,7071
und damit $\sin \psi = 2 \sin^2 \frac{nl}{4} V =$	0	0,0152	0,0603	0,1340	0,2340	0,3572	0,5	0,6580	0,8264	0,9128	0,9652	1
also $\operatorname{tg} \psi =$	0	0,0152	0,0604	0,1352	0,2406	0,3825	0,5774	0,8738	1,4677	2,2356	3,6891	∞
und daraus mit $\frac{e\sqrt{2}}{i} = (2 \text{ bis } 3,5)$: $\alpha = \frac{1}{1+(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi} =$	1	0,970 0,949	0,892 0,825	0,787 0,679	0,675 0,548	0,567 0,428	0,464 0,331	0,364 0,246	0,254 0,163	0,183 0,113	0,119 0,072	0
und event. für Gußeisen mit $\frac{k_1}{k}$: $\alpha = \frac{1}{1+(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi}$ bezw. $\frac{\frac{1}{3}}{(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi - 1} =$	1	0,970 0,949	0,892 0,825	0,787 0,679	0,675 0,548	0,567 0,428	0,464 0,326	0,364 0,162	0,172 0,081	0,096 0,049	0,052 0,028	0
Also ist: $\left(\frac{nl}{4} V\right) \sqrt{\frac{1}{\alpha}} =$	0	0,0886 0,0896	0,1848 0,1921	0,2951 0,3177	0,4247 0,4737	0,5794 0,6671	0,7689 0,9106	1,0131 1,2316	1,3851 1,7280	1,7330 2,2075	2,2200 2,8650	∞
und event. für Gußeisen mit $\frac{k_1}{k} = \frac{1}{3} =$	0	0,0886 0,0896	0,1848 0,1921	0,2951 0,3177	0,5794 0,6671	0,5794 0,6671	0,7689 0,9170	1,0131 1,5177	1,6822 2,4495	2,3926 3,3560	3,3680 4,5900	∞
Damit erhält man für $\frac{l}{i} =$ I. für Fluß- und Schweißeisen mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 95$:	0	8,4 8,5	17,6 18,2	28,0 30,2	40,3 45,0	55,0 63,4	73,0 86,5	96,2 117,0	131,6 164,2	164,6 209,7	211,0 272,0	∞
II. für Flußstahl mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 80$:	0	7,1 7,2	14,8 15,4	23,6 25,4	34,0 37,9	46,3 53,4	61,5 72,9	81,0 98,6	110,8 138,2	138,6 176,6	177,6 229,2	∞
III. für Tiegelstahl mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 70$:	0	6,2 6,3	12,9 13,4	20,6 22,3	29,7 33,2	40,5 46,7	53,8 63,8	70,9 86,2	97,0 121,0	121,3 154,5	155,4 200,5	∞
IV. für Gußeisen mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 44$:	0	3,9 3,9	8,1 8,5	13,0 14,0	18,7 20,8	25,5 29,3	33,8 40,4	44,6 66,8	74,0 107,8	105,3 147,6	146,2 202,0	∞
V. für Eichen- und Kiefernholz mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 55$:	0	4,9 4,9	10,2 10,6	16,2 17,5	23,4 26,0	31,9 36,7	42,3 50,1	55,7 67,7	76,2 95,0	95,3 121,4	122,0 157,6	∞

Tabelle für den Abminderungskoeffizienten $\alpha = \frac{P}{kF}$.

für	I.		II.		III.		IV.*		V.	
für $\sqrt{\frac{16\,E}{m\,k}} =$	Fluß- und Schweißeisen 95		Flußstahl 80		Tiegelstahl 70		Gußeisen 44		Holz 55	
für $\frac{e\sqrt{2}}{i} =$	2	3,5	2	3,5	2	3,5	2	3,5	2	3,5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
für $\frac{l}{i} =$ 5	0,99	0,98	0,98	0,96	0,98	0,96	0,95	0,93	0,97	0,95
10	0,96	0,94	0,94	0,91	0,93	0,89	0,86	0,79	0,89	0,8[illegible]
15	0,92	0,88	0,89	0,83	0,86	0,80	0,75	0,68	0,81	0,7[illegible]
20	0,87	0,81	0,83	0,76	0,80	0,72	0,65	0,58	0,73	0,6[illegible]
25	0,81	0,74	0,77	0,68	0,73	0,64	0,57	0,49	0,66	0,5[illegible]
30	0,76	0,68	0,71	0,63	0,67	0,58	0,51	0,43	0,59	0,5[illegible]
35	0,72	0,63	0,66	0,57	0,62	0,53	0,45	0,38	0,53	0,4[illegible]
40	0,68	0,59	0,61	0,53	0,57	0,49	0,41	0,33	0,48	0,4[illegible]
45	0,64	0,54	0,57	0,49	0,53	0,45	0,36	0,29	0,44	0,3[illegible]
50	0,61	0,51	0,54	0,45	0,49	0,42	0,31	0,25	0,41	0,3[illegible]
55	0,57	0,48	0,50	0,42	0,46	0,39	0,27	0,22	0,37	0,[illegible]
60	0,54	0,45	0,47	0,39	0,43	0,36	0,24	0,20	0,33	0,[illegible]
65	0,51	0,42	0,44	0,36	0,40	0,33	0,21	0,17	0,31	0,[illegible]
70	0,49	0,40	0,42	0,34	0,38	0,31	0,19	0,15	0,28	0,[illegible]
75	0,46	0,38	0,39	0,32	0,35	0,29	0,17	0,14	0,26	0,[illegible]
80	0,44	0,36	0,37	0,31	0,33	0,27	0,16	0,13	0,24	0,[illegible]
85	0,42	0,34	0,35	0,29	0,30	0,25	0,15	0,12	0,21	0,[illegible]
90	0,39	0,32	0,33	0,27	0,28	0,24	0,14	0,11	0,20	0,[illegible]
95	0,37	0,31	0,31	0,26	0,26	0,23	0,13	0,10	0,18	0,[illegible]
100	0,35	0,29	0,29	0,24	0,24	0,21	0,12	0,09	0,17	0,[illegible]
105	0,34	0,28	0,27	0,23	0,23	0,20	0,11	0,08	0,14	0,13
110	0,32	0,26	0,26	0,22	0,21	0,19	0,10	0,08	0,14	0,13
115	0,31	0,25	0,24	0,21	0,20	0,18	0,09	0,07	0,12	0,11
120	0,29	0,24	0,23	0,20	0,19	0,17	0,08	0,07	0,12	0,11
125	0,28	0,23	0,22	0,19	0,18	0,16	0,08	0,06	0,12	0,11
130	0,26	0,22	0,20	0,18	0,16	0,15	0,07	0,06	0,10	0,10
135	0,25	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,06	0,05	0,10	0,10
140	0,24	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14	0,06	0,05	0,09	0,09
145	0,23	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,05	0,05	0,09	0,09
150	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,12	0,05	0,05	0,08	0,08
155	0,20	0,18	0,14	0,13	0,13	0,12	0,04	0,04	0,08	0,08
160	0,19	0,17	0,14	0,13	0,12	0,11	0,04	0,04	0,07	0,07
165	0,18	0,16	0,13	0,12	0,12	0,11	0,04	0,04	0,07	0,07
170	0,17	0,16	0,13	0,12	0,10	0,10	0,04	0,04	0,07	0,07
175	0,16	0,15	0,12	0,11	0,10	0,10	0,04	0,04	0,07	0,07
180	0,16	0,15	0,12	0,11	0,09	0,09	0,03	0,03	0,06	0,06
185	0,15	0,14	0,10	0,10	0,09	0,09	0,03	0,03	0,06	0,06
190	0,14	0,13	0,10	0,10	0,08	0,08	0,03	0,03	0,06	0,06
195	0,14	0,13	0,09	0,09	0,08	0,08	0,03	0,03	0,06	0,06
200	0,13	0,12	0,09	0,09	0,08	0,08	0,03	0,03	0,05	0,05
210	0,12	0,11	0,08	0,08	0,07	0,07				
220	0,11	0,10	0,08	0,08	0,07	0,07				
230	0,10	0,10	0,07	0,07	0,06	0,06				
240	0,09	0,09	0,07	0,07	0,06	0,06				
250	0,08	0,08	0,06	0,06	0,05	0,05				
260	0,08	0,08	0,06	0,06	0,05	0,05				
270	0,07	0,07	0,05	0,05	0,04	0,04				
280	0,07	0,07	0,05	0,05	0,04	0,04				
290	*0,06*	0,06	0,05	0,05	0,04	0,04				
300	*0,06*	0,06	0,04	0,04	0,03	0,03				

B. Besonderer Fall der stark federnden Stäbe.

Das charakteristische Merkmal der stark federnden Stäbe, wie z. B. dünne Drähte, oder auch — im Vergleich zu ihren Querdimensionen — aussergewöhnlich lange Stäbe, besteht darin, wie bereits oben hervorgehoben wurde, dass der Nebenfaktor:

$$\sqrt{1-\frac{n^2}{4}(2i^2+2fy-y^2)}=\sqrt{1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}$$

merklich von 1 verschieden werden kann. Für die Praxis ist dies der Fall, wenn er z. B. mit seinem Mittelwert $\sqrt{}$ um mehr als etwa $\frac{1}{2}\%$ d. i. $= 0{,}005$ von 1 abweichen könnte. Um dies überhaupt möglich zu machen, müsste aber, wie weiter unten gezeigt wird, die Durchbiegung f schon mindestens gleich $\frac{1}{11}$ der freien Stablänge l werden können, was für die gewöhnlichen Fälle der Knickfestigkeit nicht mehr zulässig ist, oder doch im allgemeinen die Grenze bildet. Weicht aber dieser Nebenfaktor überhaupt merklich von 1 ab, so fragt es sich: in welchem mathematischen Zusammenhang steht diese Abweichung mit der Druckkraft P und den Stabdimensionen und insbesondere mit dem von diesen Grössen jedenfalls abhängigen Pfeil f selbst?

Dieser Zusammenhang findet sich durch folgende Betrachtung.

Aus der Integralgleichung der deformierten Mittellinie des Stabes:

$$\int_{y_0}^{y_0+y}\frac{dy}{\sqrt{2i^2+2fy-y^2}\sqrt{1-\frac{n^2}{4}(2i^2+2fy-y^2)}}=ns$$

erhält man durch Reihenentwickelung, und wenn die Integration auf die ganze Stablänge ausgedehnt wird, als genauen Wert dieses Integrals:

$$11)\quad \frac{nl}{2}=\int_{y_0}^{y_0+f}\frac{dy}{\sqrt{2i^2+2fy-y^2}}\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{4}(2i^2+2fy-y^2)\right]+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left[\;\right]^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left[\;\right]^3+\cdots\right\}$$

Führt man die Integration aus und beachtet, dass für grössere Werte von f, um die es sich hier nur handelt, der Wert von

$$y_0=f-\sqrt{2i^2+f^2}$$

stets klein genug ist, so dass er mit der kleinen Grösse $n^2=\frac{P}{EJ}$, oder gar mit deren höheren Potenzen multipliziert, gegenüber 1 nicht in Betracht kommt, so erhält man nach der Reduktionsformel:

$$\int (2i^2 + 2fy - y^2)^p dy = -\frac{f-y}{2p+1}\left(\ \right)^p + \frac{2p}{2p+1}(2i^2+f^2)\int\left(\ \right)^{p-1} dy,$$

oder:

$$\int_{y_0}^{y_0+f} (\ )^p dy = \frac{2p}{2p+1}(2i^2+f^2)\int_{y_0}^{y_0+f}(\ )^{p-1} dy$$

die Bedingungsgleichung:

$$12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{nl}{2} = \arccos\dfrac{\sqrt{2i^2+f^2}-f}{\sqrt{2i^2+f^2}} \text{ mal} \\ \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)\right]+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2[\ ]^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2[\ ]^3+\cdots\right\}. \end{array}\right.$$

Da nun aber auch aus der Gleichung

$$y = \sqrt{2i^2+f^2}(1-\cos ns\nu)$$

für die zusammengehörigen Endwerte von $y = f$ und $s = \frac{l}{2}$:

$$f = \sqrt{2i^2+f^2}\left(1-\cos\frac{nl}{2}\nu\right)$$

sich ergiebt, oder:

$$13)\quad \frac{nl}{2}\sqrt{1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)} = \arccos\frac{\sqrt{2i^2+f^2}-f}{\sqrt{2i^2+f^2}},$$

so folgt aus diesen beiden Gleichungen 12) und 13) als Wert für charakteristischen Nebenfaktor ν:

$$14)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)} = \\ = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)\right]+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2[\ ]^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2[\ ]^3+\cdots} \end{array}\right.$$

ferner folgt aus:

$$\frac{\sqrt{\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}}{\frac{nl}{2} = \{1\}\arccos\frac{\sqrt{2i^2-f^2}-f}{\sqrt{2i^2+f^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}{\frac{n^2}{4}l^2}}.$$

Weil es sich hier nur um grössere f handelt und gröss immer nur mit kleinen i verbunden sind, so ist sehr nahezu

$$\sqrt{\frac{\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}{\frac{n^2}{4}l^2}} = \frac{f}{l}$$

und also das Verhältnis der Durchbiegung f zur freien Knickläng

$$\frac{f}{l} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}}{\{I\}\arccos\frac{\sqrt{2i^2+f^2}-f}{\sqrt{2i^2+f^2}}}$$

ɔssere f mit denen, wie schon gesagt, auch immer nur kleine i den sind, weicht

$$\arccos\frac{\sqrt{}-f}{\sqrt{}} = \arccos\frac{-y_0}{\sqrt{}}$$

merklich ab von $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, so dass also für grössere f und ındere für den Bruch anstatt der Gleichung 15) auch gesetzt . kann:

$$\frac{f}{l} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}}{\frac{\pi}{2}\{I\}}.$$

ı nachfolgender Tabelle sind die nach den vorgenannten Gleich- thatsächlich berechneten Resultate für die verschiedenen in Be- kommenden Werte von

$$\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)$$

nengestellt:

er Fall der nicht dernden Stäbe			Stark federnde Stäbe							
$+f^2) =$	0	$\frac{1}{50} = 0{,}02$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$+ \cdots$	1	1,005	1,0265	1,0565	1,0911	1,1316	1,1808	1,2411	1,3212	1,4368
$\{I\}^2 =$	1	1,01	1,0537	1,1162	1,1905	1,2805	1,3931	1,5403	1,7456	2,0644
$) = \frac{1}{\{I\}^2}$	1	0,99	0,9490	0,8959	0,8400	0,7809	0,7178	0,6492	0,5729	0,4845
$\overline{}$ $i^2+f^2)$	=1	0,995	0,974	0,947	0,917	0,884	0,847	0,806	0,757	—
ıo $\zeta =$	0,5	0,5	0,5100	0,5205	0,5333	0,5477	0,5644	0,5847	0,6101	0,6444
$\frac{f}{l} =$	0	0,090	0,196	0,270	0,320	3,356	0,381	0,397	0,408 max.	
›s $\alpha =$	1	0,96	0,8	0,6	0,4	0,2	0	− 0,2	− 0,4	
= . .										
$+f^2)$	0	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	

Aus der vorstehenden Tabelle und ihrer graphischen Darstell (siehe Fig. 6, Taf. II) ist zu ersehen, dass der Maximalwert, den f be $\frac{f}{l}$ überhaupt erreichen kann, bei etwa

$$\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)=0,7$$

auftritt und zwar mit nahezu

$$\max.\frac{f}{l}=\sim 0,403.$$

Der Neigungswinkel α, welchen die Stabenden mit der ursprün lich geraden, vertikalen Stabaxe bilden, ist bestimmt aus:

$$1-\cos\varphi=\frac{n^2}{2}(2i^2+2fy-y^2);$$

für die zusammengehörigen Werte von $y=f$ und $\varphi=\alpha$ wird

$$\text{16)}\qquad 1-\cos\alpha=\frac{n^2}{2}(2i^2+f^2)$$

nach den obigen Tabellenwerten nacheinander:

$$\cos\alpha=1\quad 0,96\ |\ 0,8\quad 0,6\quad 0,4\quad 0,2\quad 0\quad -0,2\quad |\ -0,4\ |.$$

Die Höhendifferenz $\varDelta a$ zwischen der Sehne a des geboge Stabes und seiner ursprünglichen Länge $\frac{l}{2}$ im geraden Zustand fin sich aus der ersten Integralgleichung:

$$1-\cos\varphi=\frac{ds-dx}{ds}=\frac{d\varDelta x}{ds}=\frac{n^2}{2}(2i^2+2fy-y^2),$$

woraus:

$$\overline{\varDelta x}=\int_0^s\frac{n^2}{2}(2i^2+2fy-y^2)\,ds,$$

oder sehr nahezu, mit

$$y=\sqrt{2i^2+f^2}(1-\cos ns\sqrt{\ })$$

auch gleich $f(1-\cos ns\sqrt{\ })$ bei grösseren Werten von f:

$$\frac{l}{2}-a=\overline{\varDelta a}=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{n^2}{2}y(2f-y)\,ds$$

$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{n^2}{2}(2i^2+f^2)\sin^2 ns\sqrt{\ }\,ds$$

$$=\frac{n^2}{8}(2i^2+f^2)l\left[1-\frac{\sin nl\sqrt{\ }}{nl\sqrt{\ }}\right].$$

Für grössere f, um die es sich hier nur handelt, d. i. für stark fede Stäbe, ist immer beim Bruch, nach früherem sehr nahezu:

$$nl\sqrt{} = \pi, \quad \text{also} \quad \sin nl\sqrt{} = \backsim 0$$

und mithin einfach:

$$\overline{\varDelta a} = \frac{l}{2} - a = \frac{n^2}{8}(2i^2 + f^2)l$$

oder

$$\frac{\overline{\varDelta a}}{l} = \frac{1}{2}\,\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2).$$

Die damit berechneten Werte sind in vorstehender Tabelle eingetragen und in der zugehörigen Fig. 6 (siehe Taf. II) maßstäblich dargestellt.

Da indes für den Fall des Bruchs im allgemeinen die Elastizitätsgrenze (Proportionalitätsgrenze) in der Gegend der Stabmitte überschritten wird, so wird thatsächlich für E ein etwas kleinerer Mittelwert zu setzen sein, der alsdann entsprechend grössere Werte von f zur Folge hat.

Insbesondere ersieht man aus dieser Tabelle, dass die Durchbiegung f schon ziemlich gross ausfallen muss, bis der für stark federnde Stäbe charakteristische Nebenfaktor $\sqrt{}$ überhaupt bemerkbar, d. i. merklich von 1 verschieden wird. Nach der zweiten Kolonne dieser Tabelle erreicht nämlich erst mit $f = 0{,}09\,l$ d. i. bei etwa gleich $\frac{l}{11}$ der massgebende Ausdruck

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)$$

den immerhin noch kleinen Wert von

$$\frac{1}{50} = 0{,}02,$$

so dass also — selbst bei diesem verhältnismässig schon grossen Wert von f — der Mittelwert des Nebenfaktors um nicht mehr als $\frac{1}{2}\,\%_0$ d. i. 0,005 kleiner wird als 1.

Bei solch grossem f muss i aber schon so klein sein, dass $2i^2$ gegen f^2 nicht mehr in Betracht kommt und dies ist anderseits auch wieder nur möglich, wenn gleichzeitig α sehr klein bleibt, wie man sich leicht durch folgendes überzeugt.

Es ist nämlich aus $f = \frac{i^2}{e}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}$:

$$\frac{f}{i\sqrt{2}} = \frac{i}{e\sqrt{2}}\,\frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{auch gleich} \quad \frac{0{,}5}{0{,}3}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

und damit

$$\frac{f^2}{2i^2} = \left(\frac{i}{e\sqrt{2}}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \text{also} \quad \frac{2i^2+f^2}{2i^2} = 1 + \left(\frac{i}{e\sqrt{2}}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2$$

mithin

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = 2i^2\,\frac{n^2}{4}\left\{1 + \left(\frac{i}{e\sqrt{2}}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}$$

und mit

$$n^2 i^2 - \varepsilon_0 = \frac{P}{EF} \quad \text{auch gleich} \quad \frac{P}{kF}\,\frac{k}{E} - \frac{\alpha k}{E};$$

also

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = \alpha\,\frac{k}{2E}\left\{1 + \left(\frac{i}{e\sqrt{2}}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\right\} = \frac{k}{2E}\left\{\alpha + \frac{i^2}{2e^2}\,\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\right\}$$

$$= \frac{k}{2E}\left\{\alpha + \frac{0{,}25}{0{,}09}\,\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\right\}.$$

Die Klammergrösse $\left(\alpha + \frac{0{,}25}{0{,}09}\,\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\right)$ wird z. B:

für $\alpha = 1$ bezw.

0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0
$\left(\alpha + \frac{0{,}25}{0{,}09}\,\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\right) = 1$ bezw.										
0,90	0,81	0,73	0,67	0,63	0,63	0,71	1,00	2,12	4,56	∞
0,90	0,80	0,71	0,62	0,54	0,48	0,45	0,49	0,83	1,67	

Daraus geht hervor, dass für alle Werte von $\alpha = 1$ bis heral unter 0,1 die für den charakteristischen Nebenfaktor $\sqrt{}$ entscheidend Grösse

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)$$

nicht wesentlich sich über den im allgemeinen sehr kleinen und de halb gegen 1 zu vernachlässigenden Wert $\frac{k}{2E}$ erheben kann. Er von da ab, wie aus der Zahlenreihe für den Klammerausdruck herv geht, und zwar auch nur für schon wesentlich kleinere α als $\alpha = 0$ macht sich die für den Nebenfaktor entscheidende Grösse

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)$$

überhaupt bemerkbar. Stark federnde Stäbe haben also stets ei sehr kleinen Abminderungskoeffizienten α und derselbe wird — n der zweiten Kolonne der Tabelle — erst mit

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) \geqq \frac{1}{50}$$

und weil α sehr klein, für

$$\alpha + \frac{i^2}{2e^2}\,\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} = \frac{i^2}{2e^2}\,\frac{1}{\alpha} \text{ nahezu}$$

höchstens:

$$\alpha \leqq \frac{0{,}25}{0{,}09}\,50\,\frac{k}{2E} = \sim \frac{12{,}5}{4{,}5}\,\frac{k}{2E}$$

$\frac{k}{2E}$ ist selbst mit seinem Höchstwert $\frac{k_0}{2E}$ beim Bruch noch sehr kl und zwar für Fluß- und Schweißeisen:

$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1}{1140}$$

für Fluß- bez. Tiegelstahl:

$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1}{800} \text{ bezw. } \frac{1}{600}$$

für Gußeisen:

$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1200}{2 \cdot 850\,000} = \sim \frac{1}{1400};$$

Holz:

$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1}{400}.$$

Genau genommen kann $\alpha = \frac{P}{kF}$ niemals ganz auf 0 herabsinken, wenn nicht auch $P = 0$ wird. Ist P aber nicht $= 0$, so kann α niemals kleiner werden, als sich hierfür mit dem grössten möglichen Tabellenwert für

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = \sim 0{,}7$$

ergiebt, d. i.

$$\alpha \geqq \frac{1}{0{,}7} \frac{0{,}25}{0{,}09} \frac{k}{2E} = \sim \frac{0{,}36}{0{,}18} \frac{k}{2E},$$

für den praktischen Standpunkt allerdings so gut wie 0. Für stark federnde Stäbe ist also nach Vorstehendem der Abminderungskoeffizient

$$\alpha = \frac{P}{kF}$$

stets sehr klein, d. h. es kommt die eigentliche Druckspannung nicht zur Geltung im Vergleich zu der — wenigstens in der Nähe des Bruches herrschenden — Biegungsspannung. Weil gleichzeitig aber dann auch $2i^2$ gegen f^2 nicht aufkommen kann und deshalb auch

$$-y_0 = \sqrt{2i^2 + f^2} - f$$

nicht wesentlich von 0 abweicht, so wird die früher für den Pfeil f gefundene Bedingungsgleichung speziell für den Fall des Bruches:

$$\frac{n_0 l}{2} V = \arccos \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}} = \frac{\pi}{2},$$

oder sehr nahezu:

$$n_0^2 l^2 \left(1 - \zeta_0 \frac{n_0^2}{4}(2i^2 + f_0^2)\right) = \pi^2,$$

oder auch

$$\pi^2 = n_0^2 l^2 \left(1 - \frac{\zeta_0}{4} n_0^2 f_0^2\right).$$

Mit derselben Annäherung erfolgt aber dann auch der Bruch bei:

$$\max M = P_0 f_0 = k_0 W; \quad n_0^2 = \frac{P_0}{E_0 J} \text{ (siehe Fig. 7).}$$

Setzt man den Wert

$$P_0 f_0 = E_0 J n_0^2 f_0 = k_0 W$$

in der obigen Gleichung ein, so erhält man für die Kraft P_0, welche den Stab zerknickt:

17) $$P_0 = \frac{\pi^2}{l^2} E_0 J \left\{ 1 + \frac{\zeta_0}{4} \left(\frac{1}{\pi} \frac{l}{e} \frac{k_0}{E_0} \right)^2 \right\};$$

oder auch

$$n_0^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \{1 + \cdots\}$$

und für den Pfeil f_0, bei welchem der Bruch erfolgt:

18) $$f_0 = \frac{k_0 W}{P_0} = \frac{\frac{k_0}{E_0} \frac{l^2}{\pi^2 e}}{1 + \frac{\zeta_0}{4} \left(\frac{1}{\pi} \frac{l}{e} \frac{k_0}{E_0} \right)^2};$$

oder auch:

$$f_0 = \frac{k_0}{E_0 n_0^2 e}.$$

Wie früher schon hervorgehoben wurde und durch die Tabellenwerte thatsächlich bestätigt wird, geht der Koeffizient ζ von 0,5 bis höchstens gleich 0,61, während

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)$$

in diesem Fall nahezu $= \frac{n^2 f^2}{4}$ von 0 bis $\sim$ 0,7 geht und die Durchbiegung f gleichzeitig von 0 bis zu ihrem Höchstwert

$$\max f = \sim 0{,}404\, l$$

anwächst. Unter der Voraussetzung, dass der Elastizitätsmodul E den gleichen Wert bis zum Bruch beibehielte, der ihm innerhalb der Proportionalitätsgrenze zukommt, würde also der grösste Wert, den f überhaupt annehmen kann, d. i.

$$\max f_0 = \sim 0{,}404\, l$$

betragen; damit würde — für einen gegebenen Stab, mit

$$\max M = P_0 f_0 = k_0 W$$

die Kraft P_0, welche den Bruch herbeiführt, überhaupt höchstens werden können, aus:

$$n^2 l^2 \left(1 - \zeta \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)\right) = n^2 l^2 (1 - 0{,}61 \text{ mal } 0{,}7) = \pi^2:$$

19) $$\max P_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EJ}{0{,}573} = 1{,}7445 \frac{\pi^2}{l^2} EJ.$$

Da aber über die Prop.-Grenze hinaus der Elastizitätsmodul E kleiner wird, so ist für E beim Bruch im allgemeinen ein etwas kleinerer Mittelwert einzusetzen, wodurch in Wirklichkeit f_0 entsprechend grösser, dagegen P_0 entsprechend kleiner ausfällt.

Gegenseitige Abhängigkeit von Druck und Biegung.

Innerhalb der Proportionalitätsgrenze ist die gegenseitige Abhängigkeit vom Druck P und der Durchbiegung f bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{f}{\sqrt{2i^2+f^2}} = 1 - \cos\frac{nl}{2}\gamma = 2\sin^2\frac{nl}{4}\gamma,$$

oder

$$\sin\frac{nl}{4}\gamma = \sqrt[4]{\frac{1}{4}\,\frac{f^2}{2i^2+f^2}}$$

auch gleich

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{2i^2}{f^2}}} \quad \text{oder gleich} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{4}\,\frac{\frac{f^2}{2i^2}}{1+\frac{f^2}{2i^2}}}.$$

A. Für nicht stark federnde Stäbe, wie sie in den praktischen Aufgaben der Knickfestigkeit gewöhnlich vorkommen, ist nach früherem

$$\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)$$

immer sehr klein gegen 1, und also der charakteristische Nebenfaktor γ sehr nahezu $= 1$; für solche Stäbe ist daher f^2 im allgemeinen vergleichbar mit $2i^2$ oder doch nicht vielmal grösser und deshalb

$$\sin\frac{nl}{4}\gamma$$

gleich sehr nahezu

$$\sin\frac{nl}{4} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}\,\frac{f^2}{2i^2+f^2}} = \sqrt[4]{()},$$

oder

$$\frac{nl}{4} = \arcsin\sqrt[4]{()} = \sqrt[4]{()} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{()}^3 + \cdots = \sqrt[4]{()}\left\{1+\frac{1}{6}\sqrt{()}+\cdots\right\}$$

mithin

$$\frac{n^2l^2}{16} = \frac{Pl^2}{16EJ} = \operatorname{arc}^2\sin\sqrt[4]{()} = \sqrt{()}\left\{1+\frac{1}{6}\sqrt{()}+\cdots\right\}^2,$$

also:

$$P = \frac{16EJ}{l^2}\operatorname{arc}^2\sin\sqrt[4]{()} = \frac{8EJ}{l^2}\sqrt{\frac{f^2}{2i^2+f^2}}\left\{1+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{f^2}{2i^2+f^2}}+\cdots\right\}^2$$

oder auch

$$P = \frac{8EJ}{l^2}\sin\psi\left\{1+\frac{1}{12}\sin\psi+\cdots\right\}^2; \quad \text{mit } \operatorname{tg}\psi = \frac{f}{i\sqrt{2}}$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{f^2}{2i^2+f^2}} \quad \text{geht von 0 bis höchstens} = 1$$

während der Druck P von 0 bis zu seinem Höchstwert P_0 (beim Bruch) anwächst. Dabei ist zu beachten, dass die Grenze 1 überhaupt nur von sehr stark federnden Stäben und zwar nur beim Bruch erreicht werden kann. Bleibt dagegen der Druck P innerhalb der Proportionalitätsgrenze, oder gar innerhalb der zulässigen Inanspruchnahme, also bei m-facher Sicherheit gegen Bruch oder auch m_1-facher Sicherheit gegen die Proportionalitätsgrenze, so muss jedenfalls auch $\sin\psi$ ein kleiner Bruch bleiben, so dass innerhalb dieser Grenzen nahezu der obige Klammerwert

$\{1+\cdots\}^2-1$ und $\operatorname{tg}\psi=\frac{f}{i\sqrt{2}}$ anstatt $\sin\psi$ gesetzt werden kann. Damit wird nahezu

$$20)\quad P=\frac{8EJ}{l^2}\frac{f}{i\sqrt{2}} \quad \text{oder auch} \quad \frac{f}{i\sqrt{2}}=\frac{Pl^2}{8EJ} \quad \text{auch} =\frac{n^2l^2}{8}$$

d. h. für nicht stark federnde Stäbe ist innerhalb der üblichen Grenzen der Anwendung die Durchbiegung f nahezu proportional der Druckkraft P. Zum gleichen Resultat gelangt man mit dem allgemeinen Ausdruck für

$$f=i\sqrt{2}\,\frac{2\sin^4\frac{nl}{4}V}{\sqrt{1-4\sin^4\frac{nl}{4}V}},$$

wenn man beachtet, dass bei einem Druck P bei mindestens $m=4$-facher Sicherheit gegen die Bruchkraft P_0 für $\sin\frac{nl}{4}V$ nahezu der Bogen $\frac{nl}{4}V$ selbst gesetzt werden kann, also

$$\frac{f}{i\sqrt{2}}=\frac{n^2l^2}{8}=\frac{Pl^2}{8EJ}$$

ist. Ferner ergiebt sich aus $k=\frac{P}{F}+\frac{Pf}{W}$ und $\alpha=\frac{P}{kF}$ für

$$\frac{Pf}{W}=k-\frac{P}{F}=\frac{P}{J}fe; \quad \text{oder} \quad \frac{Pf}{J}=\frac{k-\frac{P}{F}}{e}=\frac{k}{e}(1-\alpha)$$

und also in Verbindung mit der vorigen Gleichung:

$$\frac{f^2}{l^2}=\frac{i\sqrt{2}}{8E}\frac{Pf}{J}=\frac{i\sqrt{2}}{8E}\frac{k}{e}(1-\alpha)$$

oder

$$21)\quad \frac{f}{l}=\sqrt{\frac{k}{4E}\frac{i}{e\sqrt{2}}(1-\alpha)}$$

wodurch bestätigt wird, dass die Federung $\frac{f}{l}$ unter diesen Umständen stets eine kleine Grösse bleibt, weil $\sqrt{\frac{k}{4E}\frac{i}{e\sqrt{2}}}$ für alle hier in Betracht kommenden Baustoffe ziemlich klein ist; für $\alpha=1$ wird unter allen Umständen $\frac{f}{l}=0$.

B. Für stark federnde Stäbe dagegen erhält man aus der von der Gleichung der elastischen Linie abgeleiteten Bedingungsgleichung:

$$\cos\frac{nl}{2}V=\frac{\sqrt{2i^2+f^2}-f}{\sqrt{2i^2+f^2}}=\frac{-y_0}{\sqrt{2i^2+f^2}}=\frac{i^2}{f^2}$$

nahezu, indem man beachtet, dass in diesem Fall immer $2i^2$ klein ist gegen f^2, und also die höheren Potenzen von $\frac{2i^2}{f}$ ausser acht gelassen werden können.

Damit hat man $\frac{nl}{2}V = \arccos\frac{-y_0}{V} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{-y_0}{V} = \frac{\pi}{2} - \frac{i^2}{f^2}$ oder auch $\frac{nl}{2}\sqrt{1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{-y_0}{\sqrt{2i^2+f^2}}$ oder im vorliegenden Falle nahezu auch

$$\frac{nl}{2}\sqrt{1-\zeta\frac{n^2f^2}{4}} = \frac{\pi}{2} - \frac{i^2}{f^2}. \tag{22}$$

Gleichung 22) gilt für jedes n bezw. P innerhalb der Proportionalitätsgrenze. Speziell für den Bruch hat man daraus

$$\frac{n_0 l}{2}\sqrt{1-\zeta_0\frac{n_0^2}{4}(2i^2+f^2)} = \frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

wo der Zeiger 0 sich auf den Bruch bezieht, also für

$$n_0 = \frac{P_0}{E_0 J}$$

zu setzen ist, und E_0 ein dem Bruch entsprechend kleinerer Mittelwert von E bedeutet. Durch Division und Quadrierung der beiden Gleichungen 22) und 23) findet sich

$$\frac{n^2}{n_0^2}\frac{1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}{1-\zeta_0\frac{n_0^2}{4}(2i^2+f^2)} = \left(1-\frac{-2y_0}{\pi\sqrt{2i^2+f^2}}\right)^2 = \frac{P}{P_0}\frac{E_0}{E}\frac{1-\zeta\frac{n^2}{4}()}{1-\zeta_0\frac{n_0^2}{4}()} = \left(1-\frac{4i^2}{\pi f^2}\right)^2$$

nahezu, oder:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{E}{E_0}\frac{1-\zeta_0\frac{n_0^2}{4}(2i^2+f_0^2)}{1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)}\left\{1-\frac{4i^2}{\pi f^2}\right\}^2. \tag{24}$$

$1-\zeta\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)$ variiert nur von 1, bei $\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2) = 0$, d. i. wenn nahezu $n^2 = 0$ bezw. $P = 0$ ist bis zu seinem kleinsten Wert beim Bruch $= 1-\zeta_0\frac{n_0^2}{4}(2i^2+f_0^2)$ in diesem Fall auch $= 1-\zeta_0\frac{n_0^2f_0^2}{4}$, der überhaupt nicht unter $\sim 0{,}573$ herabgehen kann. Aus diesem Grund variiert also der Quotient $\dfrac{1-\zeta_0\frac{n_0^2}{4}()}{1-\zeta\frac{n^2}{4}()}$ nur zwischen 1 und $\sim 0{,}573$ und diese Variation wird thatsächlich noch etwas geringer ausfallen durch das Hinzutreten des Faktors $\frac{E}{E_0}$, der von 1 ausgehend gleichzeitig um etwas anwächst. Da der andere Faktor $1-\frac{4i^2}{\pi f^2}$ nicht wesentlich von 1 abweichen kann, solange f in Betracht kommt, so kann innerhalb dieser Grenzen also P überhaupt nicht wesentlich kleiner werden als $P = \sim 0{,}573\ P_0$, wobei im allgemeinen aber die Elastizitätsgrenze schon überschritten ist. Aus diesem Umstand ist es erklärt, dass bei stark federnden Stäben die Bruchkraft P_0 nicht viel verschieden ist von derjenigen Kraft P, bei welcher überhaupt eine merkliche Durchbiegung aufzutreten beginnt, und dass also der Stab bei einer gewissen Belastung P fast plötzlich knickt, wie dies durch die Versuche von Baudirektor von Bach — siehe Bach: Elastizität und Festigkeit 1898, S. 220/21 — bestätigt wird.

Der zulässige Maximaldruck P bei m-facher Sicherheit gegen Bruch ist aus Gleichung 16)

$$P_0 = mP = \frac{\pi^2}{l^2} E_0 J \left\{1 + \frac{\zeta_0}{4}\left[\frac{1}{\pi}\frac{l}{e}\frac{k_0}{E_0}\right]^2\right\}$$

also

25) $$P = \frac{\pi^2}{l^2}\frac{E_0 J}{m}\left\{1 + \frac{\zeta_0}{4}\left[\frac{1}{\pi}\frac{l}{e}\frac{k_0}{E_0}\right]^2\right\},$$

worin, wie gesagt, für E_0 ein etwas kleinerer Mittelwert von E zu setzen ist, der dem Umstand Rechnung trägt, dass beim Bruch in der Nähe der Stabmitte die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Ist m wie üblich $= 4$ bis 5 oder gar noch grösser, dann kann die mit diesem Druck $P = \frac{P_0}{m}$ gleichzeitig auftretende Federung nicht gross sein, wie oben dargethan wurde. Es verhält sich also hiernach der eigentlich unter B fallende „stark federnde Stab" innerhalb der genannten Grenzen einer vier- bis fünffachen Sicherheit — genau noch ebenso, wie der unter A fallende „mässig federnde Stab". Denn so lange die Federung $\frac{f}{l}$ in mässigen Grenzen bleibt, ist der charakteristische Nebenfaktor — praktisch genommen — so gut wie $= 1$ und deshalb ist innerhalb dieser Grenzen auch die Durchbiegung $f = i\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\psi$ zu setzen, wobei $\sin\psi = 1 - \cos\frac{nl}{2} = 2\sin^2\frac{nl}{4}$, wenn man hierin für $n = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ und für P den vorhin gefundenen Wert einsetzt.

Note zum Artikel „Erweiterungen des Faktoriellensatzes".

Von

LOUIS SAALSCHÜTZ
in Königsberg i. Pr.

Mein Freund, Herr Professor W. Heymann, hat mir nach der Lektüre meiner jüngsten Veröffentlichung in dieser Zeitschrift* einige Bemerkungen über die von mir a. a. O. aufgestellten Reihen $\Phi(x, \mu)$ und $F(x, \mu)$ und über ihren Zusammenhang mit seiner Auflösung der trinomischen Gleichungen** mitgeteilt. Da dieselben auf die genannten Reihen ein neues Licht werfen und sich ausserdem durch Einfachheit auszeichnen, will ich ihren wesentlichen Inhalt dem mathematischen Publikum nicht vorenthalten, wobei ich mich jedoch meiner Bezeichnungen bediene.

I. Vor einer Reihe von Jahren hatte ich*** den in meiner oben genannten Veröffentlichung (C) als $A_{(n)}$ reproduzierten Satz bewiesen:

$$1)\qquad \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(\mu)\varphi_{n-k}(\nu) = \varphi_n(\mu+\nu),$$

worin $\varphi_k(\mu)$ die Bedeutung

$$2)\qquad \varphi_k(\mu) = \mu \cdot \prod_{r=1}^{k-1}(\mu + r + k\gamma) : k!; \quad \varphi_0(\mu) = 1; \quad \varphi_1(\mu) = \mu$$

besitzt. Setzen wir nun

---

* „Erweiterungen des Faktoriellensatzes" Bd. 44 (1899) S. 340, weiterhin als Arbeit (C) zitiert. (Bitte daselbst S. 342 in der Zeile vor Gleichung 3) $n!$ zu lesen, und S. 345 bei dem letzten Wurzelzeichen den Wurzelexponenten 3 zu ergänzen.)

** Insbesondere „Die trinomische und quadrinomische Gleichung in elementarer Behandlungsweise." Diese Zeitschrift Bd. 37 (1892) S. 90, weiterhin als Arbeit (B) zitiert.

*** In einem Artikel dieser Zeitschrift Bd. 32 (1887) S. 250, weiterhin als Arbeit (A) zitiert.

3) $$\Phi(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\mu) x^k,$$

so folgt aus 1) unmittelbar

4) $$\Phi(x, \mu)\,\Phi(x, \nu) = \Phi(x, \mu + \nu),$$

welcher Satz den in (A) gegebenen Beispielen zu Grunde liegt. F
lich ist, wenn wir $\Phi(x, 1)$ als y bezeichnen:

5) $$\Phi(x, \mu) = y^{\mu}.$$

Wir setzten ferner in (C):

6) $$f_k(\mu) = \prod_{r=0}^{k-1} (\mu + r + k\gamma) : k!, \quad f_0(\mu) = 1,$$

und

7) $$F(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu) x^k.$$

Dann ist, wie Herr Heymann bemerkt,

8) $$f_k(\mu) = \frac{(k+1)\,\varphi_{k+1}(\mu - \gamma - 1)}{\mu - \gamma - 1},$$

und daran knüpft er folgende Schlüsse:

Es ist:

9) $$F(x, \mu) = \frac{1}{\mu - \gamma - 1} \frac{d\,\Phi(x, \mu - \gamma - 1)}{dx},$$

d. i. nach 5):

9a) $$F(x, \mu) = \frac{1}{\mu - \gamma - 1} \frac{d y^{\mu - \gamma - 1}}{dx},$$

daher

$$F(x, \mu)\,\Phi(x, \nu) = y^{\mu + \nu - \gamma - 2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu + \nu - \gamma - 1} \frac{d y^{\mu + \nu - \gamma - 1}}{dx},$$

also nach 9a):

$$F(x, \mu)\,\Phi(x, \nu) = F(x, \mu + \nu).$$

Diese Gleichung ist identisch mit meiner (C) 6), welche sich
a posteriori in obiger sehr einfacher Art beweisen lässt.

II. Ferner ist

$$\varphi_k(1 + \gamma) = \frac{1+\gamma}{k!} \prod_{r=1}^{k-1} [1 + r + (k+1)\gamma]$$
$$= \frac{\prod_{r=1}^{k} [1 + r + (k+1)\gamma]}{(k+1)!} = \varphi_{k+1}(1).$$

Mittels dieser von Heymann aufgefundenen Beziehung gela
er mit Rücksicht auf 5) zu der Gleichung:

$$y^{\gamma+1} = \Phi(x, \gamma+1) = 1 + \varphi_2(1)x + \varphi_3(1)x^2 + \varphi_4(1)x^3 + \cdots,$$

rend y selbst durch die Gleichung

0) $$y = \Phi(x, 1) = 1 + x + \varphi_2(1)x^2 + \varphi_3(1)x^3 + \cdots$$

eben ist.

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich sämtliche Funktionen 1) eliminieren und man erhält die Gleichung:

1) $$y - xy^{1+\gamma} - 1 = 0,^*$$

eine Wurzel dieser Gleichung für y und zwar diejenige, welche Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{x=0} \frac{y-1}{x} = 1$$

wird durch die Reihenentwickelung 10) dargestellt, und beliebige nzen derselben vermöge der Gleichungen 3) und 5).

Aus 9a) folgt $F(x, 0)$, wenn $\mu = 0$ gesetzt wird und durch erentiation von 11) nach x ergiebt sich dann leicht die Gleichung

2) $$F(x, 0) = \frac{1}{\gamma + 1 - \gamma\Phi(x, 1)},$$

he mit derjenigen Gleichung in (C), die den Beispielen unmittelvorangeht, identisch ist. So oft sich 11) algebraisch auflösen , muss sich

$$y = \Phi(x, 1)$$

nach 12) auch $F(x, 0)$ in geschlossenem Ausdruck darstellen n; dies ist für die Werte

$$\gamma = 1,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -1,\ -2,$$

ie ich in (C) angegeben habe, und ausserdem für die Werte:

---

* Nimmt man n und s als gegebene positive ganze Zahlen an, setzt

$$y = \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^n, \quad x = \sigma\xi, \quad \gamma = -\frac{s}{n}$$

estimmt die Konstanten τ und σ durch die Gleichungen

$$\tau^n + 1 = 0, \quad \sigma = \tau^{n-s},$$

steht aus 11) die Gleichung

$$\eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0,$$

n Wurzeln nebst ihren m^{ten} Potenzen durch die n-deutigen Reihen

$$\eta = \tau\left\{1 + \varphi_1\left(\frac{1}{n}\right)\sigma\xi + \varphi_2\left(\frac{1}{n}\right)\sigma^2\xi^2 + \cdots\right\} = \tau\Phi\left(\sigma\xi, \frac{1}{n}\right)$$

$$\eta^m = \tau^m\Phi\left(\sigma\xi, \frac{m}{n}\right)$$

en sind. Diese Gleichung ist von Heymann im 31. Bd. dieser Zeitschrift) nach ganz anderer Methode (Mac Laurinsche Reihe mit Benutzung Schlömilchschen Formel) und in anderer Bezeichnung zuerst aufgestellt besonders daselbst S. 225 Gleichung 4)] und in Arbeit (B) reproduziert m.

$$\gamma = 2,\ 3,\ -4,\ -3$$

und

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{3}{4},\ -\tfrac{4}{3},\ -\tfrac{3}{2}$$

der Fall.

Schliesslich darf ich wohl die Hoffnung aussprechen, dass durch die hier mitgeteilten hübschen Entwickelungen meines Freundes Heymann das Interesse für meine eigene in Arbeit (C) dargelegte heuristische Methode zur Erlangung der Gleichung 6) und für die auf sie gegründeten weiteren Folgerungen, welche zu den Gleichungen 19) führen, nicht geschmälert werden wird, und möchte ich bei dieser Gelegenheit noch ergänzend bemerken, dass die Konvergenz der Reihen $\Phi(x, \mu)$ und $F(x, \mu)$ gemeinsam unter den folgenden Bedingungen stattfindet, wobei die drei Fälle

$$\gamma \overline{\gtrless} 0,\ \ \gamma \overline{\lessgtr} -1,\ \ 0 \overline{\gtrless} \gamma \overline{\gtrless} -1$$

zu unterscheiden sind:

1. für positives γ, wenn
$$\frac{(1+\gamma)^{1+\gamma}}{\gamma^\gamma} \cdot x \overline{\lessgtr} 1;$$

2. für negatives $\gamma = -\gamma',\ \gamma' \geqq 1$, wenn
$$\frac{(\gamma')^{\gamma'}}{(\gamma'-1)^{\gamma'-1}} x \overline{\lessgtr} 1;$$

3. für negatives $\gamma = -\gamma',\ 0 \leqq \gamma' \leqq 1$ (vergl. Heymann (B) § 5), wenn
$$(\gamma')^{\gamma'}(1-\gamma')^{1-\gamma'} x \leqq 1.$$

Setzt man in diesem letzten Falle

$$\gamma = -\gamma' = -\frac{s}{n} \text{ (} s \text{ und } n > s \text{ positive ganze Zahlen),}$$

so zerfällt die unendliche Summe (von einem hinreichend grossen Glied-Index an) in Gruppen von je n Gliedern, deren Zeichenfolge sich wiederholt, und zwar, wenn $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n + 1$ oder -1 bedeuten, in der Art:

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n),\ \ (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n), \text{ etc., wenn } s \text{ gerade,}$$

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n),\ \ -(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n),\ \pm \text{ etc., wenn } s \text{ ungerade.}$$

Die Konvergenzbedingungen lassen sich in das Zeichen

$$\frac{|1+\gamma|^{1+\gamma}}{|\gamma|^\gamma} \cdot x \overline{\lessgtr} 1$$

(so dass in der Basis der Absolutwert, im Exponenten der wirkliche Wert der betreffenden Grössen steht), zusammenfassen, und der Grenzwert 1 darf erreicht werden: für $\gamma > 0$, wenn x negativ, für $\gamma < -1$ wenn x positiv, für $0 > \gamma > -1$, wenn $(-1)^s x^n$ negativ ist.

Nachtrag zu meiner Herleitung der Interpolationsformeln.

Von

Prof. Dr. W. Veltmann

in Poppelsdorf.

Band 44 Seite 308 dieser Zeitschrift.

Will man die Auflösung der Gleichungen durch Determinanten anwenden, so kann man zu den Ausdrücken für die Differenzteile in etwas einfacherer Weise gelangen. Wenn man

$$(x_m - x_0)(x_m - x_1)\dots(x_m - x_g)$$

mit Pmg bezeichnet, so werden die Gleichungen 14) S. 307 die folgenden

$$\begin{array}{ll}
r_0 & = y_0 \\
r_0 + P_{10} r_1 & = y_1 \\
r_0 + P_{20} r_1 + P_{21} r_2 & = y_2 \\
r_0 + P_{30} r_1 + P_{31} r_2 + P_{32} r_3 & = y_3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
r_0 + P_{n-1,0} r_1 + P_{n-1,1} r_2 + P_{n-1,2} r_3 + \cdots + P_{n-1,n-2} r_{n-1} & = y_{n-1} \\
r_0 + P_{n0} r_1 + P_{n1} r_2 + P_{n2} r_3 + \cdots + P_{n,n-2} r_{n-1} + P_{n,n-1} r_n & = y_n.
\end{array}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$r_n = \frac{\delta_n y_n + \delta_{n-1} y_{n-1} + \cdots + \delta_1 y_1 + \delta_0 y_0}{1 \cdot P_{10} \cdot P_{21} \cdot P_{32} \cdots P_{n-1,n-2} \cdot P_{n,n-1}},$$

wo im Zähler die Koeffizienten der y mit δ bezeichnet sind und

$$\delta_n = 1 \cdot P_{10} \cdot P_{21} \dots P_{n-1}, \quad n-2$$

ist. Der Teil mit y_n wird also

$$= \frac{y_n}{P_{n,n-1}} = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}.$$

In dem Ausdruck für r_n ist also der Koeffizient von y_n der reciproke Wert eines Produktes, dessen Faktoren man erhält, indem man von dem zu y_n gehörigen x sämtliche übrige x subtrahiert. Nun kann man die Reihenfolge der Wertepaare ändern, so dass statt y_n irgend ein anderes y das letzte wird. Der Ausdruck für r_n ändert sich dabei nicht, weil in der Funktion (Gleichungen 13)

$$f_n = r_0 + (x - x_0) r_1 + (x - x_0)(x - x_1) r_2 + \cdots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) r_n$$

r_n wieder der Koeffizient der höchsten Potenz von x ist. Für dasjenige δ, dessen y jetzt das letzte geworden ist, gilt also dieselbe Regel wie für δ_n, somit gilt diese Regel allgemein.

Eine allgemeine Eigenschaft der algebraischen Funktionen.

Von **Rudolf Ziegel** in **Berlin**.

Die algebraische Funktion y der unabhängigen Variabeln x sei durch die irreduktible algebraische Gleichung

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots + A_m = 0 \tag{1}$$

mit in x rationalen Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_m$ definiert.

Die Differentiation von 1) ergiebt:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu \cdot (m-\mu) \cdot y^{m-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{dA_\nu}{dx} \cdot y^{m-\nu} = 0,$$

mit anderen Worten: es genügt y einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x),$$

unter f eine rationale Verbindung der beiden seiner Argumente verstanden.

Weit schwieriger als die Herleitung dieses bekannten Resultates scheint mir der direkte, d. h. aus der definierenden Gleichung 1) selbst folgende Beweis eines ähnlichen Satzes, der sich, soviel ich weiss, nirgends angegeben findet. Aus der Identität

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

folgt durch Integration:

$$x = \int \frac{dy}{y'}.$$

Da y von x algebraisch abhängt, so sind auch x und $\frac{1}{y'}$ algebraische Funktionen von y. Daher ist nach einem zuerst von Abel*, später nochmals von Liouville** bewiesenen Theorem der Integralwert

$$x = g\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

eine rationale Funktion der Argumente $y, \frac{dy}{dx}$; hieraus folgt:

Eine algebraische Funktion genügt stets einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in der die unabhängige Variable nur in der ersten Potenz auftritt,

oder auch:

Zu jeder algebraischen Funktion lässt sich eine rationale Verbindung aus der Funktion selbst und ihrer ersten Ableitung bilden, deren Wert gleich der unabhängigen Variabeln ist.

---

* N. H. Abel, Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Crelle's Journal Bd. 4 p. 264 (1829); Oeuvres complètes (Christiania 1881), Bd. 1 p. 550.

** J. Liouville, Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique, Journal de l'école royale polytechnique, Cah. 22, p. 147 (1833).

Die magnetische Energie eines Systems elektrischer Ströme.

Von Dr. Dörge in Giessen.

Ein System elektrischer Ströme repräsentiert einen gewissen Arbeits-'ert, der durch das Integral

$$\frac{1}{8\pi}\int H^2 d\tau,$$

rstreckt über den unendlichen Raum, gegeben ist. H bedeutet die magne-ische Feldstärke an der Stelle des Volumelements $d\tau$. Diese Energie ist achweisbar im Öffnungsstrom und muss entstanden sein, während die tröme auf ihren definitiven Wert ansteigen. Hierauf basiert die folgende bleitung.

Ist im einfachsten Falle ein Stromleiter mit der elektromotorischen raft E, der Selbstinduktion L und dem Widerstande w gegeben, so teigt der Strom nach dem Gesetze an:

$$E - L\frac{dj}{dt} = wj,$$

j die Stromstärke im Momente t ist.

Ist der Strom bis zu seinem Endwerte i angestiegen (theoretisch nach ndlich langer Zeit), so ist die von der elektromotorischen Kraft ge-ete Arbeit:

$$E\int_0^\infty j \cdot dt.$$

Die entwickelte Stromwärme aber ist nach dem Jouleschen Gesetz

$$\int_0^\infty \left(E - L\frac{dj}{dt}\right) j\, dt,$$

ich muss

$$L\int_0^\infty \frac{dj}{dt} j \cdot dt = \frac{1}{2} L i^2$$

Energie des entstehenden magnetischen Feldes sein.

Dies Verfahren lässt sich ebenso leicht auf ein System beliebig vieler ter anwenden. Sind in diesem Falle die elektromotorischen Kräfte

$$E_1 E_2 \ldots E_n,$$

Koeffizienten der Selbstinduktion

$$L_{11} L_{22} \ldots L_{nn},$$

der gegenseitigen Induktion

$$L_{21} L_{31} \ldots L_{n1}, \quad L_{1n} L_{2n} \ldots L_{n-1\,n},$$

$w_2 \ldots w_n$ die Widerstände der einzelnen Leiter, so ist:

$$E_1 - \sum_{p=1}^{p=n} L_{p1} \frac{dj_p}{dt} = j_1 w_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$E_n - \sum_{p=1}^{p=n} L_{pn} \frac{dj_p}{dt} = j_n w_n$$

$j_1, j_2 \ldots j_n$ sind die Stromstärken in den einzelnen Leitern zur Zeit t.

Die von den elektromotorischen Kräften geleistete Arbeit ist

$$\sum_{m=1}^{m=n} E_m \int_0^\infty j_m \, dt,$$

die entwickelte Stromwärme:

$$\sum_{m=1}^{m=n} E_m \int_0^\infty j_m \, dt$$

$$- \left\{ \sum_{p=1}^{p=n} L_{p1} \int_0^\infty \frac{dj_p}{dt} j_1 \, dt + \cdots + \sum_{p=1}^{p=n} L_{pn} \int_0^\infty \frac{dj_p}{dt} j_n \, dt \right\}.$$

Der in Klammer stehende Ausdruck muss demnach die magne[tische] Energie des entstehenden Feldes sein Nun ist:

$$L_{pp} \int_0^\infty \frac{dj_p}{dt} j_p \, dt = \frac{1}{2} L_{pp} i_p^2,$$

wenn i_p die definitive Stromstärke des Leiters p ist. Ferner ist

$$L_{pq} = L_{qp};$$

mithin lassen sich die Glieder, in denen $p \neq q$, paarweise zusamme[n] in Ausdrücke von der Form

$$L \left\{ \int_0^\infty \frac{dj_p}{dt} j_q \, dt + \int_0^\infty \frac{dj_q}{dt} j_p \, dt \right\} = L_{pq} i_q i_p.$$

So wird schliesslich aus der Energie des Systems:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{ L_{11} i_1^2 + L_{22} i_2^2 & + \cdots + L_{nn} i_n^2 \\ + 2 L_{12} i_1 i_2 & + \cdots + 2 L_{1n} i_1 i_n \\ & \cdots\cdots \\ & + 2 L_{n-1\,n} i_{n-1} i_n \}. \end{aligned}$$

Bemerkungen zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades.

Von Oberlehrer **Beuriger** in **Bonn**.

I.

In der Heilermannschen Zerlegung (diese Zeitschr. Bd. 44 S. 234) ist e zweite Wurzel in der zweiten Klammer der Gleichungen 7) mit dem ›ppelten Vorzeichen versehen. Eine elementare Überlegung liefert die Be-ngungen, wann das positive und wann das negative Zeichen zu setzen ist.

Setze ich in

$$1)\qquad f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(Ax + By + D)^2 - Af = (B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - AF,$$

› ist die rechte Seite ein vollständiges Quadrat, wenn

$$(BD - AE)^2 = (B^2 - AC)(D^2 - AF)$$

t. Das zweite Glied dieses Quadrates hat dasselbe Vorzeichen, wie $D - AE$. Also

$$Af = (Ax + By + D)^2 - (y\sqrt{B^2 - AC} + \sqrt{D^2 - AF})^2,$$

enn $BD - AE > 0$ ist,

$$Af = (Ax + By + D)^2 - (y\sqrt{B^2 - AC} - \sqrt{D^2 - AF})^2,$$

nn $BD - AE < 0$ ist.

Für $BD - AE = 0$ ist das Vorzeichen beliebig, da dann entweder $\overline{B^2 - AC}$ oder $\sqrt{D^2 - AF}$ verschwindet.

Setzt man nun nach Heilermann

$$A = a,\quad B = b,\quad C = c - \lambda,\quad D = c + 2\lambda,\quad E = d\quad F = e,$$

$$x = \zeta^2,\quad y = 2\zeta,$$

ergiebt sich für λ die kubische Resolvente

$$\begin{vmatrix} a & b & c + 2\lambda \\ b & c - \lambda & d \\ c + 2\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0$$

für die Vorzeichen von der letzten Wurzel die Bedingung

$$\begin{array}{lll} \text{Vorzeichen } +, & \text{wenn} & 2b\lambda > ad - bc, \\ \quad\text{„}\qquad -, & \quad\text{„} & 2b\lambda < ad - bc, \\ \quad\text{„}\qquad \pm, & \quad\text{„} & 2b\lambda = ad - bc. \end{array}$$

In letzterem Falle zerfällt die Resolvente in ein Produkt aus zwei erminanten:

$$\begin{vmatrix} a & b & c + 2\lambda \\ b & c - \lambda & d \\ c + 2\lambda & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 2b & c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b^2 \\ e & d^2 \end{vmatrix}.$$

In derselben Weise ergiebt sich für die zweite Zerfällung die Bedingung

$$\begin{array}{lll} \text{Vorzeichen } +, & \text{wenn} & bd-(c-\lambda)(c+2\lambda)>0, \\ \quad " \quad - & \quad " & bd-(c-\lambda)(c+2\lambda)<0, \\ \quad " \quad \pm & \quad " & bd-(c-\lambda)(c+2\lambda)=0 \end{array}$$

und es ist im letzten Falle:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 2b & c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & d & c \\ 0 & e & d \\ 2d & c & b \end{vmatrix}.$$

Ebenso ergiebt sich für die dritte Zerfällung

$$\begin{array}{lll} \text{Vorzeichen } +, & \text{wenn} & 2d\lambda > be-cd, \\ \quad " \quad - & \quad " & 2d\lambda < be-cd, \\ \quad " \quad \pm & \quad " & 2d\lambda = be-cd \end{array}$$

ist und es ist im letzten Falle:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & d & c \\ 0 & e & d \\ 2d & c & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b^2 \\ e & d^2 \end{vmatrix}.$$

Die drei Heilermannschen Zerfällungen können aber auch ohne Zweideutigkeit der Wurzeln in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} af &= (a\zeta^2+2b\zeta+c+2\lambda)^2 \\ &\quad - \left(2\zeta\sqrt{b^2-ac+a\lambda}+\frac{bc-ad+2b\lambda}{\sqrt{b^2-ac+a\lambda}}\right)^2 \\ &= (a\zeta^2+2b\zeta+c+2\lambda)^2 \\ &\quad - \left(\frac{2\zeta(bc-ad+2b\lambda)}{\sqrt{(c+2\lambda)^2-ae}}+\sqrt{(c+2\lambda)^2-ae}\right)^2 \\ (c-\lambda)f &= [b\zeta^2+2(c-\lambda)\zeta+d]^2 \\ &\quad - \left(\zeta^2\sqrt{b^2-ac+a\lambda}+\frac{bd-(c-\lambda)(c+2\lambda)}{\sqrt{b^2-ac+a\lambda}}\right)^2 \\ &= [b\zeta^2+2(c-\lambda)\zeta+d]^2 \\ &\quad - \left(\frac{\zeta^2[bd-(c-\lambda)(c+2\lambda)]}{\sqrt{d^2-ec+e\lambda}}+\sqrt{d^2-ec+e\lambda}\right)^2 \\ ef &= [(c+2\lambda)\zeta^2+2d\zeta+e]^2 \\ &\quad - \left(\zeta^2\sqrt{(c+2\lambda)^2-ae}+\frac{d(c+2\lambda)-be}{\sqrt{(c+2\lambda)^2-ae}}\right)^2 \\ &= [(c+2\lambda)\zeta^2+2d\zeta+e)^2 \\ &\quad - \left(\frac{\zeta^2[d(c+2\lambda)-be)}{\sqrt{d^2-e(c-\lambda)}}+2\zeta\sqrt{d^2-e(c-\lambda)}\right)^2. \end{aligned}$$

Jedoch wird eine solche Zerlegung für den Fall, dass der Nenner Null wird, unbrauchbar.

Die obigen Bemerkungen gelten auch für die Zerlegungen bei **Faà Bruno.*** Nimmt man dort S. 220 Formel 36) in den Ausdrücken $\varrho_2 \sigma_1 \sigma_2 \tau_1 \tau_2$ die **absoluten** Werte der Wurzeln, so sind folgende Ver-uschungen vorzunehmen:

Formel 33: ϱ_1 mit ϱ_2 oder σ_1 mit σ_2,
nn $a_1 \lambda < a_0 a_3 - a_1 a_3$ ist;

Formel 34: τ_1 mit τ_2 oder σ_1 mit σ_2,
nn $a_1 a_2 - \left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)(a_3 + \lambda) > 0$ ist;

Formel 35: τ_1 mit τ_2 oder ϱ_1 mit ϱ_2,
nn $a_3 \lambda < a_1 a_4 - a_2 a_3$ ist.

In den übrigen Fällen bleiben die Formeln 33, 34, 35 ungeändert.

II.

Beziehungen zwischen den Wurzeln der Gleichung vierten Grades und den Wurzeln ihrer kubischen Resolvente.

Aus der Dimension der Glieder der kubischen Resolvente

1) $$4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3 = 0$$

gt, dass λ eine Funktion zweiten Grades der Wurzeln $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$ der ichung

2) $$f = a\zeta^4 + 4b\zeta^3 + 6c\zeta^2 + 4d\zeta + e = 0,$$

Ändere ich nämlich das Vorzeichen von ζ_1, ζ_2, ζ_3 und ζ_4, so ändern r b und d in 2) ihre Vorzeichen. Die Resolvente bleibt unverändert. fehlen also in den Ausdrücken für $\lambda_1 \lambda_2$ und λ_3 die Glieder erster mension in $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ und ζ_4 und ebenso ein von diesen unabhängiges Glied, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ist.

Nun liefert jede Zerfällung der Gleichung vierten Grades in die ferenz zweier Quadrate bezw. in ein Produkt von vier linearen Faktoren λ_1, λ_2 und λ_3 dieselben Wurzeln, wenn auch in anderer Reihenfolge. se Reihenfolge sei

$$\text{für } \lambda_1 : \zeta_1 \zeta_2 \mid \zeta_3 \zeta_4, \quad \text{für } \lambda_2 : \zeta_1 \zeta_3 \mid \zeta_2 \zeta_4, \quad \text{für } \lambda_3 : \zeta_1 \zeta_4 \mid \zeta_2 \zeta_3,$$

lass also λ_2 und λ_3 aus λ_1 hervorgehen durch Vertauschung von ζ_2 mit ζ_3 w. ζ_4. Wir können also setzen:

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= m(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + n(\zeta_3^2 + \zeta_4^2) + p(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \zeta_4) \\ &\qquad + q(\zeta_1 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_4), \\ \lambda_2 &= m(\zeta_1^2 + \zeta_3^2) + n(\zeta_2^2 + \zeta_4^2) + p(\zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_4) \\ &\qquad + q(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_4), \\ \lambda_3 &= m(\zeta_1^2 + \zeta_4^2) + n(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) + p(\zeta_1 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_3) \\ &\qquad + q(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_4 + \zeta_3 \zeta_4). \end{aligned} \right.$$

* **Faà** di Bruno: Einleitung in die Theorie der binären Formen, übersetzt **Walther**. Leipzig 1881. S. 220.

Da nun $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, so folgt

$$m = n = 0, \quad p = -2q. \tag{4}$$

Setzt man diese Werte in

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{ae - 4bd + 3c^2}{4}$$

bezw. in

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3}{4}$$

ein und ersetzt die Koeffizienten durch ihre Ausdrücke in $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten

$$p = \frac{a}{6}, \quad q = -\frac{a}{12}. \tag{5}$$

[Da aber $p = -2q$, so genügt es, aus der grossen Anzahl von Gliedern zur Berechnung von p und q ein einziges hervorzuheben z. B. das Glied mit $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$.] Es ergeben sich somit folgende Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a}{12}[2(\zeta_1\zeta_2 + \zeta_3\zeta_4) - (\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_3 + \zeta_4)] \\ &= \frac{a}{12}[(\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3) - (\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_4 - \zeta_2)], \\ \lambda_2 &= \frac{a}{12}[2(\zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_4) - (\zeta_1 + \zeta_3)(\zeta_2 + \zeta_4)] \\ &= \frac{a}{12}[(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_3 - \zeta_4) - (\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3)], \\ \lambda_3 &= \frac{a}{12}[2(\zeta_1\zeta_4 + \zeta_2\zeta_3) - (\zeta_1 + \zeta_4)(\zeta_2 + \zeta_3)] \\ &= \frac{a}{12}[(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_4 - \zeta_2) - (\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_3 - \zeta_4)]. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Verzeichnis

von

bhandlungen aus der angewandten Mathematik

die im Jahre 1899 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Zusammengestellt von **R. Mehmke.**

lage zur Zeitschrift für Mathematik u. Physik 45. Band, 5. u. 6. Heft.

Abkürzungen für die Titel der ausgezogenen Zeitschriften:

3. = (Wiener) Allgemeine Bauzeitung, Jahrgang 64.
. B. = (Glasers) Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Bd. 44 und Bd. 45.
. M = American Machinist, vol. 22.
I. = Annales des Mines, 9^e série, t. 14 livraison 12, t. 15 et t. 16.
?. Ch. = Annales des Ponts et Chaussées, 7^e serie, 8^e année, 4^{me} trimestre, et 9^e année, 1^{er} — 4^{me} trimestre.
= The Builder, vol. 76 and vol. 77.
3. = Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 19.
;. = Central-Zeitung für Optik und Mechanik, Jahrgang 20.
3. = Deutsche Bauzeitung, Jahrgang 33.
I. = Deutsche Mechaniker-Zeitung (Beiblatt zur Zeitschrift für Instrumentenkunde), 1899.
= The Engineer, vol. 87 and vol. 88.
= Engineering, vol. 67 and vol. 68.
;. = Elektrotechnische Zeitschrift, Jahrgang 20.
[. = Gesundheits-Ingenieur, Jahrgang 22.
. W. = (Schillings) Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Jahrgang 42.
I. C. = Mémoires de la Société des Ingénieurs Civiles de France, 1899, vol. 1 et 2.
A. C = Nouvelles Annales de la Construction, 5^e série, t. 6 (45^e année).
F. E. = Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Jahrgang 54 (Neue Folge Bd. 36).
J. = (Dinglers) Polytechnisches Journal, Bde. 311, 312, 313 und 314.
w. B. = Schweizerische Bauzeitung, Bd. 33 und Bd. 34.
B. = Technische Blätter, Jahrgang 30, Heft 2—4, Jahrgang 31, Heft 1—3.
A. I. = Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Bd. 45 (Neue Folge Bd. 4), Heftausgabe und Wochenausgabe.
B. = (Erbkams) Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 49.
3. = Zeitschrift für Gewässerkunde, Bd. 2.
. = Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrgang 19.
K. = Zeitschrift für die gesamte Kälte-Industrie, Jahrgang 6.
). I. A. V. = Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, Jahrgang 51.
. = Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 28.
. D. I. = Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 43.
r. G. = Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss, Jahrgang 78.

Abbildungen.

3chreiber, Zur konformen Doppelprojektion der Königl. Preuss. Landesaufnahme. Z. V., S. 491—502, 593—613.

S. auch *Geodäsie, Zeichenwerkzeuge.*

Aërodynamik.

Hermann Hoernes, Über das Loessl'sche Luftwiderstandsgesetz und dessen Anwendung in der Flugtechnik. T. B., Jahrg. 31, S. 1—26.

Josef Popper, R. Knoller, A. Capilleri, Josef Altmann, Ludwig Boltzmann, Ernst Mach, Kritische Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Ober-Ingenieur F. R. v. Loessl: „Der aërodynamische Schwebezustand einer dünnen Platte und deren Sinkgeschwindigkeit nach der Formel $V=\sqrt{gG:\gamma(F+bv)}$". Z. Ö. I A. V., S. 51—57, 73—76, 84—86, 302—305. Erwiderungen von v. Loessl S. 264—267, 284—288, 506—509.

Russner, Über neue Luftwiderstandmessungen. P. J., Bd. 311, S. 147—148.

Weyrauch, Über den Ausfluss von Gasen und Dämpfen bei abnehmendem Druck und bei abnehmendem Volumen. Z. V. D. I., S. 1162—1165, 1194—1197.

S. auch *Graphische Verfahren, Tafeln (graphische)*.

Arithmetik, politische.

R. H. Smith, The laws of profit. E., vol. 88, p. 231—232, 259—260.

P. Schmidt, Ermittelung von Betriebsausgaben auf Grund der Statistik der Eisenbahnen Deutschlands. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 233—252, 393—402, 517—518.

A. Rühle v. Lilienstern, Ein Beitrag zur Tariflehre der Eisenbahnen. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 65—70, Berichtigung Sp. 96.

Ausgleichungs- und Fehler-Rechnung.

Jos. Adamczik, Graphische Polygonzug-Ausgleichungen. Z. V., S. 440—442.

L. Krüger, Über reducirte Fehlergleichungen. Z. V., S. 396—398.

S. auch *Geodäsie, Messwerkzeuge, Rechenwerkzeuge*.

Centralellipse.

Fr. Gräfe, Einfache Konstruktion der Centralellipse. Z. V. D. I., S. 210—211.

Hartman, Centralellipse zweier Flächen. Schw. B., Bd. 32, S. 101—102.

Dynamik.

„Curler", A problem in rotation. E., vol. 87, p. 169.

R. Frank, Studien über die Mechanik der Kugellager. P. J., Bd. 314, S. 26—30, 40—43.

J. Goebel, Über Schwungradexplosionen. Z. V. D. I., S. 237—239.

W. Hertlein, Kurtz'sche Aufhängungsweise für Glocken. D. B., S. 394—395.

H. Reissner, Zur Dynamik des Fachwerks. Z. B., Sp. 477—484.

Camerer, Versuche über die Regulierung der Rider-Steuerung. Z. V. D. I., S. 1449—1456, 1493—1499.

C. Koerner, Dynamik direkt und continuierlich wirkender Regulatoren. Z. Ö. I. A. V., S. 413—417, 428—432, 443—447.

J. Isaachsen, Das Regulieren von Kraftmaschinen. Z. V. D. I., S. 913—918.

A. Pfarr, Der Reguliervorgang bei Turbinen mit indirekt wirkendem Regulator. Z. V. D. I, S. 1553—1558, 1594—1599.

A. Stodola, Das Siemenssche Regulierprinzip und die amerikanischen „Inertie"-Regulatoren. Z. V. D. I., S. 506—516, 573—579.

F. J. Weiss, Die Verstellkraft von Regulatoren. Z. V. D. I., S. 65—68. Bemerkungen dazu von K. L. Schadwill, M. Tolle, Rud. Wagner, Erwiderung von E. J. Weiss, S. 468—472.

Dunkerley, On the connecting-rod problem. Eg., vol. 67, p. 695—697.

Mohr, Die geometrische Bestimmung der Resultanten der auf eine Schubstange wirkenden äusseren Kräfte. Z. V. D. I., S. 811—812.

F. Stark, Inanspruchnahme der Pleuelstangen durch den Trägheitswiderstand. T. B., Jahrg. 30, S. 104—120.

Berling, Schiffsschwingungen, ihre Ursachen und Kritik der Mittel zu ihrer Verminderung. Z. V. D. I, S. 981—988, 1017—1023, 1221—1225, 1260—1264. Bemerkungen dazu von Otto Schlick S. 1640—1642, Erwiderungen von Berling S. 1642—1644.

. Dalby, On the balancing of engines, with special reference to marine work. Eg., vol. 67, p. 530—532, 559, 561—563.
H Macalpine, Balancing engines. Eg., vol. 68, p. 54—55 (Remarks by W. E. Dalby, ib. p. 120).
les P. Paulding, A curious problem in balancing. Am. M., p. 382—383.
rries, Die Eigenbewegungen der Lokomotiven und ihre Einwirkung auf die Gleise. A. G. B., Bd. 44, S. 137—141.
Über die Eigenbewegungen und die zulässige Geschwindigkeit der Lokomotiven. O. F. E., S. 115—118, 135—137.
ifort, Stösse und Momente in Dampfmaschinen. Z. V. D. I., S. 813—816.
, Einfluss der Fahrgeschwindigkeit auf die Beanspruchung des Schienenstosses. C. B., S. 373—375.
Mašík, Zur Bestimmung der Überhöhungen und Erweiterungen in Eisenbahncurven . . . Z. Ö. I. A. V., S. 201—207, 211, 221—223.
g Meyer, „Adhäsion" oder „Reibung" beim Lokomotivbetriebe? C. B., S. 166—167.
issner, Über Fahrbahnüberhöhung. C. B., S. 156, 547—548. Bemerkungen dazu von Zimmermann S. 199—200.
hmidt, Steigungsverhältnisse für Bahnen mit gemischtem Reibungs- und Zahnradbetrieb. C. B., S. 617—619.
ank, Bemerkungen zur Berechnung der Widerstände der Lokomotiven und Bahnzüge. O. F. E., S. 146—149, 161—164. (Bemerkungen dazu von v. Borries, S. 283—284.)
lrich Lackner, Das Anfahren der Eisenbahnzüge. O. F. E., S. 209—213.
ihle v. Lilienstern, Zur Bestimmung der Zugstärken, der Fahrzeiten, sowie des Kohlen- und Wasserverbrauches im Eisenbahnbetriebe. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 507—512.
ı resistance, A new general formula for, (by John Lundie). E., vol. 87, p. 166, 171.
ttenberg, Bestimmung des Widerstandes der Züge mittels des Geschwindigkeitsmessers. O. F. E., S. 3—7, 27—30.
feld, Arbeitsleistung beim Anfahren der Züge im Stadt- und Vorortverkehr. C. B., S. 290—291.
rgin, Beobachtung von Turmschwingungen beim Läuten der Glocken. D. B., S. 326—327, 330—332. Bemerkungen dazu von W. Weitbrecht, S. 395—396.
bert, Étude des mouvements vibratoires dans les ponts à poutres droites à une travée et dans les ponts suspendus à tablier continu simplement appuyés aux culées. A. P. Ch., 9e année, 3e trimestre, p. 215—293.
hmitt, Die Übertragung der Bewegung durch elastische Mittel. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 177—183.
ıuch *Centralellipse, Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Graphische Verfahren, Kinematik, Messwerkzeuge, Tafeln (graphische).*

Elastizitäts- und Festigkeits-Lehre.

ibald Barr, Comparisons of similar structures and machines. Eg., vol. 68 p. 475—476, 511—512, 545—546.
iot, Résistance des sphères et cylindres en contact. A. P. Ch., 9e année, 3e trimestre, p. 294—298.
von Emperger, Die zulässigen Inanspruchnahmen des Eisens im Hochbau. Z. V. D. I., S. 1499—1503.
P. Turner, Thermal condition of iron and steel under stress, and measurement of stress by means of thermoelectricity. Eg., vol. 67, p. 564—566.
uenstein, Vergrösserung eines Widerstandsmomentes durch Verkleinerung des Querschnittes. D. B., S. 430.
rösserung des Widerstandsmomentes durch Verkleinerung des Querschnittes. Schw. B., Bd. 34, S. 93.
e, Le pont J.-F. Lépine, A. P. Ch, 9e année, 1er trimestre, p. 130—158.
audy, Note sur le calcul des poutres en fer et ciment. M. I. C., 2, p. 487 bis 496.
f Francke, Kontinuirliche Bogenträger. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 589—600.

R. Heyn, Das doppelte hölzerne Hängewerk im Dachbinder. Z. A. I., Heft-Ausg. Sp. 373—394.
Rob. Land, Die Gleichung der Bahn einer über einen elastischen Träger rollenden Last. C. B., S. 313—314.
G. Mantel, Beitrag zur Berechnung einiger besonderen Sprengwerksformen. Schw. B., Bd. 32, S. 152—153, 161—164, 177—179, 193.
Mesnager, Note sur les fatigues réelles et les fatigues calculées dans un pont à grandes mailles. A. P. Ch., 9e année, 2e trimestre, p. 223—251.
A. Meyerhof, Die Biegungsspannungen der Z-Eisen zu Schiffbauzwecken. Z. V. D. I., S. 607—614.
S. Nicolay, Ueber das Centrieren der Diagonalen in Parallel-Gitterträgern. Schw. B., Bd. 34, S. 161—162 (Bemerkungen dazu von G. Mantel, S. 189—191).
Harel de la Noë, Théorie et applications nouvelles du ciment armé. A. P. Ch., 9e année, 1er trimestre, p. 1—21.
Résal et Alby, Notes sur la construction du Pont Alexandre III. A. P. Ch., 8e année, 4e trimestre, p. 59—144; 9e année, 1er trimestre, p. 159—242.
Otto C. Reymann, Die Querschnittverzerrungen eiserner Brücken und ihr Einfluss auf die Vertikalen und Längsverbände derselben. A. G. B., Bd. 44, S. 40—44, 84—87, 189—192, 225—227 (Fortsetzung aus Bd. 43 und Schluss).
A. Schneider, Zusammengesetzte Träger. Z. Ö. I. A. V., S. 649—653, 672—676, 688—693.
Friedr. Steiner, Berechnung gewölbter Brücken. T. B., Jahrg. 31, S. 104—108.
G. Stockhammer, Einiges über die Stossfestigkeit von Zugstangen abgesetzten Querschnittes. Z. Ö. I. A. V., S. 57—59.
Max R. v. Thullie, Berechnung der gerippten Betoneisenträger, System Hennebique. Z. O. I. A. V., S. 539—543.
J. Bruhn, The stresses at the discontinuities in a ship's structure. Eg., vol. 67, p. 429—432.
Francis Elgar, The distribution of pressure over the bottom of a ship in dry docks and over the dock blocks. Eg., vol. 68, p. 125—126.
Hacker, Gasbehälterführungen. Z. V. D. I., S. 1465—1469.
H. Müller-Breslau, Die Berechnung achtseitiger Turmpyramiden. Z. V. D. I., S. 1126—1134.
Skibinski, Beitrag zur Berechnung des Querschwellenoberbaues. Z. Ö. I. A. V., S. 118—123, 135—139.
Bachmann, Einfluss der Temperatur auf die Spannungen in bogenförmigen Sperrmauern. C. B., S. 376.
Bachmann, Verteilung der Spannungen in bogenförmigen Sperrmauern. C. B., S. 10—11.
Barbet, Note sur les conditions des barrages de réservoirs en maçonnerie. A. P. Ch., 9e année, 1er trimestre, p. 22—56.
Charles J. Kriemler, De la ligne des pressions dans une pile en maçonnerie. Schw. B., Bd. 33, S. 5.
Lieckfeldt, Der Einfluss der Bogenform auf die Standfestigkeit der Staumauern. C. B., S. 301—304.
F. Probst, Einiges über Gelenke massiver Bogenbrücken. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 545—551.
A. Bantlin, Zur Frage der Berechnung gekrümmter stabförmiger Körper. Z. V. D. I., S. 261—263. Bemerkungen dazu von A. Föppl und Bruno Schulz, Erwiderungen von A. Bantlin S. 403—404, 501—502, H. Reissner S. 633.
Adolf Francke, Der krumme Balken. Z. B., Sp. 309—332.
Robert Edler, Beitrag zur Theorie und Berechnung der Gliederketten (Ringketten). Z. Ö. I. A. V., S. 501—506, 513—518, Berichtigungen S. 572.
Philipp Forchheimer, Berechnung des zulässigen Aussendruckes bei Ringen und Röhren. Z. Ö. I. A. V., S. 457—458.
B. W. Head, The problem of struts with lateral loads. E., vol. 88, p. 287—288.
René Koechlin, Besprechung eines auf excentrischen Druck beanspruchten Stabes. Schw. B., Bd. 33, S. 159—160, 171—173.
Weyrauch, Über excentrische Zugbeanspruchungen von Fachwerkstäben. Z. A. I. Wochen-Ausg., Sp. 249—254.
Fritz von Emperger, Eine neue Knickformel von A. Ostenfeld. Z. Ö. I. A. V., S. 524—526, 558.

Hacker, Einiges über Knickspannungen. Z.A.I., Heft-Ausg., Sp. 489—506.
rsch, Zur Berechnung der Knickfestigkeit gegliederter Steinpfeiler. D.B., S. 590—592.
ıno Schulz, Beitrag zur Torsionsfestigkeit. Z.A.I., Heft-Ausg., Sp. 201 bis 234, 569—586.
Schüle, Die elementare Ableitung der Knickformel. Z.V.D.I., S. 779—780.
rl Bernhard, Eisspeicher und Eisdruck. C.B., S. 81—83. Bemerkung dazu von Bruno Schulz, S. 140, Erwiderung von Bernhard, S. 264.
. auch *Centralellipse, Dynamik, Erddruck, Graphische Verfahren, Kinematik, Statik, Tafeln (graphische).*

Elektrizität und Magnetismus, Elektrotechnik.

3reisig, Über die Anwendung des Vektordiagramms auf den Verlauf von Wechselströmen in langen Leitungen und über die wirtschaftliche Grenze hoher Spannungen. E.Z., S. 383—386, 400—403, 417—420.
L. Goldschmidt, Über deformierte Kurven. E.Z., S. 840—842.
Ieinke, Über Wellenströme. E.Z., S. 510—513, 527—531.
Iiethammer, Zur Messung von Wechselstromeffekten nach der Drei-Voltmeter-Methode. E.Z., S. 701—703.
Westphal, Beitrag zur Theorie der Ankerwicklungen. E.Z., S. 118.
ırnold und G. Mie, Über den Kurzschluss der Spulen und die Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. E.Z., S. 97—101, 136—138, 150—152.
. Behrend, Über den Spannungsabfall bei Wechselstromgeneratoren. E.Z., S. 837—840. (Bemerkungen dazu von E. Arnold, S. 893—894, und Heyland, S. 894.)
3randt, Beitrag zur Berechnung von Bufferbatterien. E.Z., S. 730—732.
lolf Braun, Über die Leerlaufreibung von Induktionsmotoren. E.Z., S. 685—687.
3reisig, Messungen an Fernsprechverbindungsleitungen. E.Z., S. 192—196.
tz Erens, Eine analytische und graphische Methode zur Berechnung von Anfahr- und Bremswiderständen für elektrische Eisenbahnen. E.Z, S. 277—282.
rence P. Feldmann und Josef Herzog, Über Stromverteilung in Wechselstromnetzen. E.Z, S. 780—783.
Ieinke, Über Auffassung und Darstellung der Vorgänge im Wechselstromtransformator. E.Z., S. 175—178, 191—196, 205—207.
ius Heubach, Zur Theorie der Asynchronmotoren. E.Z., S. 301—305, 314—317.
bert Kapp, Die Funkengrenze bei Gleichstrommaschinen. E.Z., S. 32—33 (Bemerkung dazu S. 89—90).
ver Lodge, Improvement in magnetic space telegraphy. E., vol. 87, p. 120—121, 170—171, 197—198, 375—376 = Eg., vol. 67, p. 31—32, 94—99, 124—126.
Iiethammer, Über die Kraftlinienverteilung in Nuthenankern. E.Z., S. 766—771.
xander Rothert, Untersuchungen über die Kurzschlusskurve von Wechselstromgeneratoren. E.Z., S. 619—622, 637—638, 657—659, 893. (Bemerkungen dazu von Rud. Goldschmidt, S. 670, Emil Ziehl, S. 724—725.)
lwig Schröder, Berechnung des Kraftbedarfes von elektrischen Strassenbahnen. E.Z., S. 111—115.
lengel, Bestimmung der günstigsten Zahl von Speisepunkten eines Verteilungsnetzes. E.Z., S. 807—809, 826—829.
lolf Skutsch, Über Bemessung von Motoren, welche bei konstanter Umfangskraft Massen beschleunigen sollen, insbesondere von Nebenschlusselektromotoren für den Betrieb von Drehbrücken, Drehscheiben u. dergl. V.V.G., S. 307—312.
S. auch *Graphische Verfahren, Hydrodynamik, Kinematik, Vektorrechnung.*

Erddruck.

Cramer, Die Gleitflächen des Erddruckprismas und der Erddruck. Z.A.I. Heft-Ausg., Sp. 513—518.
olf Francke, Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Geheimen Baurat Cramer in Breslau über die Gleitflächen des Erddruckprismas und den Erddruck in Heft 5 des Jahrgangs 1898. Z.A.I., Heft-Ausg., Sp. 183—188 (Erwiderung von Cramer Sp. 188).

Hisely, Constructions diverses pour déterminer la poussée des terres sur un mur de soutènement. A. P. Ch., 9e année, 1e trimestre, p. 99—120.
P. R. Kirk, Graphic methods of determining the pressure of earth on retaining walls. B., vol. 77, p. 233—235.
S. Pichault, Calcul des murs de soutènement des terres en cas de surcharges quelconques. M. I. C., 2. p. 210—266, 844—846.

Geodäsie.

Eggert, Rückwärtseinschnitt mit Correlatenausgleichung. Z. V., S. 44—50.
E. Hammer, Bestimmung des Theodolit- (Tachymeter) Standpunktes nach Lage und Höhe durch Rückwärtseinschneiden über nur zwei gegebene Punkte. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 81—86.
J(ordan), Geographische Coordinaten und rechtwinklige Coordination. Z. V. S. 162—176.
—— Umwandlung Preussischer Coordinaten, zur Praxis der Preussischen Stadt-Triangulierungen. Z. V., S. 381—389.
S. auch *Abbildungen, Ausgleichungs- und Fehler-Rechnung, Geometrie, Geschichte, Messwerkzeuge, Rechenwerkzeuge, Tafeln (graphische), Zeichenwerkzeuge.*

Geographie, mathematische.

Leitzmann, Die Sonnenhöhe und Tageslänge. Z. A. I., Wochen-Ausg. Sp. 561—569.

Geometrie.

G. Mario Rossi, Mit Hilfe des Zirkels allein den Mittelpunkt eines Kreises zu finden. Z. Ö. I. A. V., S. 487.
C. K. Aird, Bestimmung des Kreisumfanges aus dem Halbmesser durch Zeichnung. C. B., S. 120. Bemerkungen dazu von F. Lang, F. Puller und der Schriftleitung S. 176.
Ed. Bing, Eine rein geometrische Annäherungskonstruktion der Grössen π und $\sqrt{\pi}$ von bisher unerreichter Genauigkeit. Z. V. D. I., S. 43. Bemerkungen dazu von F. Heerwagen S. 364.
Edward Crossley, Quadrature of the circle. E., vol. 87, p. 209 (s. a. Cecil P. Poole, ib., p. 435).
Quadrature of the circle, A new (by E. Bing). E., vol. 87, p. 136.
C. E. Wolff, Alleyne Reynolds, Area of the circle. E., vol. 88, p. 215.
E. Hammer, Über den aus zwei Kreisbogen bestehenden Korbbogen zur Verbindung zweier gegebener Tangentenpunkte. D. B., S. 10—12, 43, 64, 94—95.
H. Soudé, Problème de l'arche biaise. Tracé de la courbe de joint sur le plan de tête et sur le développement de l'intrados. N. A. C., col. 43—47.
Alfred Heubach, Theoretische und praktische Mitteilungen über neue Ellipsen-Konstruktionen. D. B., S. 307.
C. Runge, Über die Verwandtschaft des Rückwärts- und Vorwärts-Einschneidens. Z. V., S. 313—315.
Friedrich Steiner, Konstruktion der Winkeländerungen eines Dreiecks. T. B., Jahrg. 30, S. 180—183.
H. Schämann, Berechnung der Richtung gleichlaufender Diagonalen eines in der Ansicht trapezförmigen Pfeilers. C. B., S. 230—231. (Bemerkungen dazu S. 268.)
Leitzmann, Berechnung des Krümmungshalbmessers einer Kurve. J. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 625—626.
Leopold Ellerbeck, Über die Ermittelung des Linienzuges vorübergehender Eisenbahnverlegungen und ähnlicher Gleisführungen. Z. B., Sp. 125—144.
A. Francke, Gleisbögen mit unendlich grossen Krümmungshalbmessern in den Bogenanfängen. O. F. E., S. 265—268.
Ed. Lang, Anordnung einer „nach innen" abzweigenden Weiche in stark gekrümmtem Gleis. C. B., S. 425—428. (Bemerkungen dazu von E. Puller S. 559.)
—— Einschaltung einer einfachen Weiche mit geradem Hauptgleise in einen Kreisbogen. O. F. E., S. 270—278.
S. auch *Inhalt, Schwerpunkt, Zeichenwerkzeuge.*

Geschichte.

Dresdener Bezirksverein deutscher Ingenieure, Trajan Rittershaus † (mit Bild). Z.V.D.I., S. 539—540.
Helmert, Wilhelm Jordan (mit Bild). Z.V., S. 322—328.
C. Runge, Wilhelm Jordan †. Z.A.I., Wochen-Ausg., Sp. 265—266.
Steiff, Wilhelm Schickhart und seine Landesaufnahme Württembergs 1624—1635. Z.V., S. 401—415, 537—549.
Siegmund Wellisch, Der Plan von Wien zur Zeit der zweiten Türkenbelagerung. Z.Ö.I.A.V., S. 489—492.
—— Die Wiener Stadtpläne aus dem Anfange des XVIII. Jahrhunderts. Z.Ö.I.A.V., S. 563—568, 575—576.
—— Ältere geometrische Werke. Z.V., S. 336—339.
—— Die Erfindung der Triangulierung. Z.V., S. 349—357. Bemerkung dazu von J.(ordan) S. 357.
F.Z., Trajan Rittershaus †. Z.A.I., Wochen-Ausg., Sp. 321—323.

Graphische Verfahren.

Henry Goldmark, Solution of simultaneous equations. Eg., vol. 67, p. 254—255.
A. E. Wiener's graphische Verfahren bei Flächenberechnungen (Bericht). P. J., Bd. 311, S. 131—132.
H. Berg, Wirkungsweise und Berechnung einer stehenden Kondensator-Luftpumpe ohne Saugventile. Z.V.D.I., S. 92—97. (Bemerkungen dazu von K. Reinhardt, S. 280.)
Alexander Coulmas, Beitrag zur Bestimmung des Maximalmomentes einfacher, durch Einzellastensysteme beanspruchter Träger. Z.Ö.I.A.V., S. 239—241.
Desdouits, Méthode graphique pour la reconnaissance et la vérification du tracé des voies de chemin de fer. A.M., t. 15, p. 465—501. A.P.Ch., 9e année, 4me trimestre, p. 192—228.
H. Dix, Beitrag zur Berechnung der Querschnittsmaße von Holzbalken. Z.A.I., Wochen-Ausg., Sp. 530—532.
H. S. Hele-Shaw, Graphical method of finding the pressure on blocks under a ship due to overhang. Eg., vol. 68, p. 158.
J. Illeck, Die graphische Berechnung mehrcylindriger Dampfmaschinen. Z.V.D.I., S. 14—17 und R. F. Mayer S. 372.
C. F. Munday, On the advantages of using Tchebycheff's rule in association with the integrator to obtain cross-curves of stability. Eg., vol. 67, p. 499—500.
J. Neidt, Graphisches Verfahren zur Bestimmung von Fahrgeschwindigkeiten und Vorschaltwiderständen für elektrisch angetriebene Fahrzeuge. E.Z., S. 39—43, 57—59.
Gustav Reichelt, Berechnung der Betriebskraft für das Schöpfwerk einer eingedeichten Niederung bei wechselnder Höhe des Aussenwasserstandes. C.B., S. 458—460.
E. Speidel und W. Wagenbach, Über Francis-Turbinenschaufelung. Z.V.D.I., S. 581—583.
S. auch *Ausgleichungs- und Fehler-Rechnung, Elektrizität, Erddruck, Geometrie, Statik, Tafeln (graphische).*

Hydrodynamik, Hydraulik, Hydrologie.

H. S. Hele-Shaw, Further experiments on the character of fluid motion. E., vol. 87, p. 94—95 = Eg., vol. 67, p. 28—30.
—— The stream-line theory. Eg., vol. 68, p. 152—153.
—— The motion of a perfect liquid. E., vol. 87, p. 548—550.
Marston Niles, The Hele-Shaw experiments and the stream-line theory. Eg., vol. 68, p. 121—122.
G. Dariès, Sur une application de la formule du mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts. N.A.C., col. 14—15, 30—32, 47—48.
Holzmüller, Hydrodynamische Analogien zur Theorie des Potentials und der Elektrotechnik. Z.V.D.I., S. 659—662, 690—694.

Wieprecht, Berechnung von Rohrleitungen für Warmwasserheizungen. G. I., S. 360—362.
„Puzzled", W. Payton, W. A. S. B., John Batey, Thomas Alston, A hydraulic press problem. E., vol. 87, p. 145, 245.
F. Chaudy, De la résistance à l'avancement des bateaux et des ondes transversales. M. I. C., vol. 1, p. 165—179.
Slip, Negative apparent. E., vol. 87, p. 145.
Emil Herrmann, Neue Theorie der Turbinen. P. J., Bd. 312, S. 165—169, 177—182.
A. Hummel, Über die Formgebung der Schaufeln bei Francis-Turbinen. P. J., Bd. 311, S. 4—6, 24—25, 84.
M. Möller, Die Nutzleistung der Schraubenturbine. Z. V. D. I., S. 551—553.
Franz Prážil, Bericht über die Konstruktion und Wirkungsweise der Transformatorturbine. Schw. B., Bd. 34, S. 195—199, 207—209, 217—220.
D. Spataro, La nouvelle Hydraulique, théorique, pratique et expérimentale. Z. G., S. 127—160, 321—337.
Bourdelles, Étude du régime de la marée dans la manche. A. P. Ch., 9e année, 3e trimestre, p. 1—76.
Emerich Fischer, Die Berechnung von Stauweihern zur Hochwasserabwehr. C. B., S. 58—59.
Ph. Forchheimer, Grundwasserspiegel bei Brunnenanlagen. Z. V. D. I., S. 202—205.
H. Gravelius, Über Verdunstung. Z. G., S. 248—252.
H., Zur Ermittelung der grössten Hochwassermenge kleiner Wasserläufe. D. B., S. 298—299.
C. Hessle, Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in natürlichen Gewässern. Z. G., S. 20—36.
Albrecht Penck, Zur Bestimmung der Abflussmengen aus Flussgebieten. Z. G., S. 67—81.
M. Rother, Ein Beitrag zum Probleme der Spiegelabsenkung in Wasserläufen mit freiem Spiegel. Z. G., S. 274—309, 337—347.
P. Schreiber, Zur Frage der Bestimmung des Abflusses aus Stromgebieten. Z. G., S. 37—54.

S. auch *Graphische Verfahren, Näherungsrechnung, Rechnen (numerisches), Tafeln (graphische), Wärmelehre.*

Inhalt, Flächen- und Raum-.

A. Altenbach, Über die Berechnung von Dachflächen, Böschungen und dergl. D. B., S. 418—419. (Bemerkungen dazu von Spies und F. Pützer S. 467.)
Ramisch, Mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes einer ebenen Figur. C. B., S. 203—204.
—— Bestimmung des Rauminhaltes eines Kegels oder Kegelstumpfes. C. B., S. 119—120.

S. auch *Graphische Verfahren, Geometrie, Messwerkzeuge.*

Kinematik.

Henry T. Davis, C. A. Mathey, J. Macfarlane Gray, Davis's steering gear for autocars. Eg., vol. 68, p. 306, 338.
Michele Ferrero, Finding the position of the crank when the position of the piston or cross-head is given. Am. M., p. 762—763.
O. Lasche, Elektrischer Antrieb mittels Zahnradübertragung. Z. V. D. I., S. 1417 bis 1422, 1487—1493, 1528—1533, 1563—1569.
Heinrich Weiss, Zur Berechnung des Stufenscheiben-Antriebes bei Werkzeugmaschinen mit geradlinig hin- und hergehender Hauptbewegung. Z. Ö. I. A. V., S. 341—346. S. auch *Dynamik.*

Kombinatorik.

M. Boda, Über den Anschluss von Blocklinien an Stellwerksanlagen mit elektrischem Fahrstrassen-Verschlusse. O. F. E., S. 31—35, 57—61, 78—80, 101—104, 120—124, 139—143, 166—186.
—— Über den Anschluss von Stellwerksanlagen mit elektrischem Weichenstrassen-Verschlusse an Blocklinien. Z. Ö. I. A. V., S. 98—105.

Messwerkzeuge.

Henri Chevalier, Appareil dynamométrique de M. Téodorovitch. M. I. C., 1, p. 56—62.
A. G. Greenhill, The Lippincott planimeter. E., vol. 88, p. 614—615.
Joh. Hamann, Das Coordinatenplanimeter von Ch. Hamann. Z. V., S. 464—468.
Hamann, Untersuchungen über das Harfenplanimeter von Mönkenmöller. Z. V., S. 549—552.
J(ordan). Stangenplanimeter Prytz. Z. V., S. 315—317.
Robert Land, Einfache Theorie des Polarplanimeters. Z. V. D. I., S. 1064—1067.
William Ripper, A continous mean pressure indicator for steam engines. Eg., vol. 68, p. 771—772, 804—807.
A. Klingatsch, Die Bestimmung des Excentricitätsfehlers für Strahlenzieher. Z. V., S. 389—396.
—— Die mittlere Lage des Winkelscheitels beim Winkelspiegel. Z. V., S. 359—363.

Näherungsrechnung.

J.(ordan), Näherungsformel für $\sqrt{x^2+y^2}$. Z. V., S. 357—359. Bemerkungen dazu von Puller S. 529—530.
J. B. Goebel, Über ein neues Rechnungsverfahren bei Aufgaben der Hydraulik. G. I., S. 169—172, 189—193, 205—208.

Nautik.

Sound signalling at sea. Eg., vol 67, p. 2—3, 105—107.

Optik.

Karl Strehl, Akkomodation und Vergrösserung. C. Z., S. 21.
C. Viola, Ein neues Refraktometer und eine neue Methode zur Bestimmung der Hauptbrechungsindices eines optisch zweiachsigen Krystalles mit Hülfe des Prismas. Z. I., S. 276—282.
B. Wanach, Über die Bestimmung von Krümmungsradien durch Spiegelung. D. M., S. 50.
—— Theorie des Reversionsprismas. Z. I., S. 161—177.
H. Harting, Zur Berechnung astronomischer Fernrohrobjektive. Z. I., 104—110.
—— Über Astigmatismus und Bildfeldwölbung bei astronomischen Fernrohrobjektiven. Z. I., S. 138—143.
Emil von Höegh, Zur Theorie der zweiteiligen verkitteten Fernrohrobjektive. Z. I., S. 37—39.
A. Leman, Zur Berechnung von Fernrohr- und schwach vergrössernden Mikroskop-Objektiven. Z. I., S. 272—278. (Bemerkung dazu von H. Harting, S. 274—275.)
Karl Strehl, Theorie des Mikroskopes. Fortsetzung: Das Pleurosigmabild. Z. I., S. 325—335.
—— Beugungstheorie und geometrische Optik. Z. I., S. 364—371.
Emil Liebenthal, Lichtverteilung und Methoden der Photometrierung von elektrischen Glühlampen. Z. I., S. 193—205, 225—240.

S. auch *Messwerkzeuge.*

Perspektive.

J. Ernest G. Yalden, A method for the representation of the circle in isometric projection and in cavalier perspective. Am. M., p. 1057—1058.
F. W. Salmon, A „reminder“ on isometric projection. Am. M., p. 1068.

Rechenwerkzeuge.

Geo. F. Summers, An instrument for adding fractions. Am. M., p. 309.
J. H. Gill, The slide rule for computing gears for screw cutting Am. M., p. 1089—1090.

H. Koller, Proportionalrechenschieber von Ch. Hamann in Friedenau bei Berlin. Z.V., S. 660—663.

W. Semmler, Proportionalrechenscheibe von Ch. Hamann. Z.V., S. 304—308.

Röther, Rechenscheibe. Z.V., S. 697—698.

H. Sossna, Auflösung der Aufgabe des Einkettens mittels Maschine mit numerisch-trigonometrischer Tafel. Die neue Multiplikationsmaschine von Otto Steiger und Hans W. Egli in Zürich. Z.V., S. 665—696.

Fischer, Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungsgrössen auf mechanischem Wege und Anwendung auf Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Z.V., S. 553—557.

——, Fehlerausgleichung auf mechanischem Wege. Ebenda S. 655—660.

Rechnen, numerisches.

Karl Fischer, Vereinfachte Berechnung der Monatsmittel der nach Fußmaß beobachteten Wasserstände Z. B., Sp. 303—310.

S. auch *Rechenwerkzeuge*.

Schwerpunkt.

Rob. Land, Schwerpunktbestimmung von Trapezen und Vierecken. C. B., S. 324.

Puller, Schwerpunktbestimmung des Trapezes. C. B., S 212.

Statik.

G. A. Burls, A graphical treatment of the problem of the rough inclined plane Eg., vol. 67, p. 499.

Max Jüllig, Über die mechanische Beanspruchung elektrischer Luftleitungen, welche auf ungleich hohen Stützen ruhen. E. Z., S 886—889.

W. Dietz, Beitrag zum statisch bestimmten gegliederten Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem. Z. V. D. I., S. 230—234. Bemerkung dazu von Rob. Land, S. 404.

J. Jongebloed, Einfache Berechnung der Stützendrücke für durchlaufende Balken überall gleichen Querschnitts auf beliebig vielen Stützen. C. B., S. 267—268.

F. C. Kunz, Die neue Strassenbrücke über den Niagara-Fluss, Berechnung. Z. Ö. I. A. V, S. 473—474.

John Labes, Bestimmung grösster Momente und Querkräfte für Eisenbahn-Balkenbrücken. C. B., S. 173—175.

——, Puller, Zur Berechnung der Querträger von Eisenbahnbrücken C. B., S. 223, S. 446.

Mohr, Beitrag zur Theorie der Träger. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 585—590.

H. Müller-Breslau, Zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer. Z. V. D. I., S. 385—389. Erwiderungen von R. Kohlfahl und H. Müller-Breslau, S. 389—391.

Ramisch, Bestimmung der stärksten Spannungen bei der Biegung durch ei[n] Kräftepaar mittels Widerstandsmomente. D. B., S. 422.

—— Darstellung des Querschnittsmomentes eines Trägers. C. B., S. 388.

—— Eine neue graphostatische Methode. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 281—286.

Fritz Rosskothen, Beitrag zur synthetischen Untersuchung der Normalspannung in geraden Stäben. D. B., S. 191—192.

—— Die Berechnung von Querschnittsmomenten und Normalspannungen. D. [B.], S. 344—345, 368—371.

F. Steiner, Berichtigung zur Abhandlung „Die graphische Ermittelung [der] Stabspannungen im Halbparabelträger". T. B., Jahrg. 31, S. 43.

H. Hacker, Einiges über Standfestigkeit von Gebäuden und über Eisenfachwe[rk]. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 51—70.

H. Walthorp, Stability of low masonry dams. E., vol. 88, p. 576,

Maximilian Marcus, Beitrag zur statischen Untersuchung von Gewölbe[n]. Schw. B., Bd. 34, S. 156—157.

S. auch *Elastizitäts- u. Festigkeitslehre*.

Tafeln, graphische.

G. Eugene Barrett, Diagram for the design of shafts. Am. M., p. 28—29.

Robert A. Bruce, Diagram for finding the dimensions and performance of impulse water wheels. Am. M., p. 14—15.

——— Deflection of cylindrical helical springs (Diagram). Am. M., p. 406.

——— Safe loads for helical springs (Diagram). Am. M., p. 354—355.

Force fit diagram. Am. M., p. 660—661.

C. L. Griffin, Another diagram for the design of shafts. Am. M., p. 274—275.

J. E. Johnson, jr., The friction of compressed air in pipes (with diagrams). Am. M., p. 686—690.

Charles Lallemand, Le nivellement générale de la France. A. M., t. 16, p. 227—306.

L. Lefort, Calcul des poutres droites et planchers en béton de ciment armé. N. A. C., col. 8—14, 23—30.

P. Muller, Centrifugal force diagram. Am. M., p. 646—647.

A. S. Oesterreicher, Logarithmisch-zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Arbeit und des Gütegrades der Dampfmaschinen. Z. V. D. I., S. 1428 bis 1432.

Winterstein, Die Durchbiegung flusseiserner Träger D. B., S. 471—472.

Vektorrechnung.

Charles Proteus Steinmetz, Symbolische Darstellung doppelperiodischer Vektorprodukte und allgemeiner Wechselstromwellen. E. Z., S. 882—885. 900—903.

Wärmelehre.

Chr. Eberle, Zur Beurteilung des Diesel-Motors. P. J., Bd. 311, S. 1—3, 22—24, 40—42.

A. Fliegner, Theorie der Dampf-Turbinen. Schw. B., Bd. 33, S. 102—103, 110 bis 113, 129—133, 146—148, 160—164.

O. Herre, Die Anwendung des überhitzten Dampfes im Dampfmaschinenbetriebe. P. J., Bd. 312, S. 3—6, 17—22.

Jos. Hübers, Beitrag zur chemischen Thermodynamik. P. J., Bd. 313, S. 168—170; Bd. 314, S. 92—94, 184. (Bemerkung dazu von H. Voss S. 184.)

Leopold Kliment, Über den Einfluss des Barometerstandes auf das Diagramm und den Dampfverbrauch der Dampfmaschinen. P. J., Bd. 314, S. 129—131.

Leitzmann, Die Dampfeinströmung in die Cylinder der Lokomotiven. A. G. B., Bd. 44, S. 162—166.

F. Maison, Note sur la détermination des charges remorqées par les locomotives et sur celle des quantités de vapeur consommées aux différentes conditions de la marche. A. M., t. 16, p. 499—544.

Fr. Mall, Zur Theorie der Kompressions-Kühlmaschinen. Z. K., S. 231—232.

E. Meyer, Beitrag zu der Frage: In welcher Weise ändert sich mit der Belastung der Dampfverbrauch einer Dampfmaschine? Z. V. D. I., S. 391—394.

——— Die Beurteilung der Dampfmaschine. Z. V. D. I., S. 154—156.

——— Untersuchungen am Gasmotor, insbesondere über den Einfluss der Kompression. Z. V. D. I., S. 283—287, 326—331, 361—363.

Rudolf Mewes, Die Verbrennungs-Kraftmaschinen mit heisser und mit kalter Druckluft. J. G. W., S. 378—380.

F. J. Weiss, Beharrungsvermögen von Kondensatoren. Z. V. D. I., S. 1155—1162.

S. auch *Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Graphische Verfahren, Messwerkzeuge, Tafeln (graphische).*

Zeichenwerkzeuge.

J. I. Blount, Corresponding curves for draftsman and pattern maker. Am. M., p. 1112—1113.

Eugene Motchman, Marking the edges of draftsmen's curves. Am. M., p. 670—671.

Ship curve, Clark's adjustable. Eg., vol. 68, p. 124.

Riefler's Reissfeder mit Präzisionsstellschraube. P. J., Bd. 313, S. 14.

Ernst Fischer, Die neueste Präzisionsziehfeder (von F. Lutterberg, Mittweida). P. J., Bd. 311, S. 19—20.
Drawing instruments, A new line of. Am. M., p. 227.
C. B. Perley, A makeshift beam compass. Am. M., p. 1068.
U. Peters, Compass for drawing arcs of large radius. Am. M., p. 967.
Stangenzirkel, Neu konstruierter, mit Polgewicht. C. Z., S. 1.
Roedder, Quadratnetzstecher. Z. V., S. 559—560.
G. Jatho, Über drei neuere Auftrageapparate für Polarcoordinaten. Z. V., S. 647—654.
J(ordan), Strahlenzieher. Z. V., S. 135—138.
Puller, Transporteur zum Auftragen von Tachymeterpunkten. Z. V., S. 132—133.
H. Schulze, Der Vollkreis-Transporteur von Breithaupt. Z. V., S. 216—217.
Paul, Der Polysector (Winkelteiler, von Paul Stiassny). Z. Ö. I. A. V., S. 405.
Arthur Vital, Ein Instrument zur Lösung von Aufgaben für Mercator's Projektion. D. M., S. 25—26.

S. auch *Messwerkzeuge.*

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Historisch-litterarische Abteilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

Dr. R. Mehmke und Dr. M. Cantor.

45. Band.

Mit in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Druck von B. G. Teubner in Dresden

I. Abhandlungen.

II. Rezensionen.

Geschichte der Mathematik.

Philosophie, Didaktik.

Arithmetik, Analysis, Algebra.

Synthetische, analytische, deskriptive Geometrie.

Mechanik, Astronomie, Physik.

Historisch-litterarische Abteilung.

Die Funktion des Auges bei Leonardo da Vinci.

Von

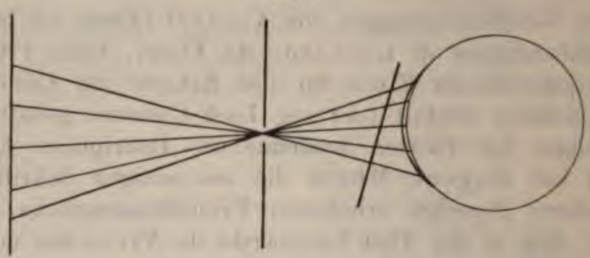
Dr. Wilhelm Elsässer

in Charlottenburg.

Seit den Veröffentlichungen von Venturi (Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonardo da Vinci, Paris 1797) ist fast allgemein Leonardo da Vinci für den Erfinder der Camera obscura in ihrer einfachsten Gestalt (der sog. Loch-Camera) gehalten worden. In einer jüngst der Pariser Académie des Inscriptions überreichten Abhandlung hat Eugène Müntz die von einigen Schriftstellern zu Gunsten anderer Forscher erhobenen Prioritätsansprüche abgewiesen und gezeigt, dass in der That Leonardo da Vinci das meiste Recht beanspruchen kann, als Erfinder jener Einrichtung zu gelten. Durch die Venturischen Berichte veranlasst, ist gleichzeitig die Meinung nebenher gegangen, dass Leonardo auch das menschliche Auge als eine solche Camera angesehen und gedeutet habe, derart, dass durch die Durchkreuzung der Lichtstrahlen in der engen Pupille des Auges ein Bild des Gegenstandes auf der gegenüberliegenden auffangenden Wand, d. h. der Netzhaut, entstehe. Die Venturische Stelle (dem Manuskript D der Bibliothek de l'Institut entnommen) lautet: „Die Erfahrung darüber, wie die Gegenstände ihre Bilder in das Auge und die wässerige Feuchtigkeit desselben senden, offenbart sich, wenn die Bilder der erleuchteten Gegenstände durch eine kleine Öffnung in eine dunkle Wohnung eintreten. Du wirst alsdann diese Bilder auf weissem Papier, welches nicht weit von der Öffnung in der gedachten Wohnung aufgestellt ist, auffangen und wirst alle erwähnten Gegenstände auf diesem Papier mit ihren eigentümlichen Gestalten und Farben erblicken, aber sie werden kleiner sein und das Oberste nach unten gekehrt, wegen der erwähnten Durchschneidung. Wenn diese Bilder von einem durch die Sonne erleuchteten Orte entstehen, werden sie wie auf dem Papier gemalt erscheinen. Letzteres muss sehr dünn sein und von der Rückseite betrachtet werden; das Loch muss in eine kleine, recht dünne Eisenplatte gemacht sein. Ebenso macht es der Strahl innerhalb der

Pupille.“ Die kurze Fassung dieser Stelle, soweit die Beziehungen zum Auge in Betracht kommen, und die Schlussbemerkung Leonardos lässt in der That vermuten, dass er nach dem vorher beschriebenen Prinzip an ein umgekehrtes Bild auf der Rückwand des Auges gedacht hat. Die einzelnen Schriftsteller, welche sich mit diesem Gegenstande — meist unter Übernahme des Venturischen Citats — beschäftigt haben, haben diese Vermutung mehr oder weniger deutlich zum Ausdruck gebracht, und auch Müntz scheint — nach einem mir vorliegenden Bericht über seine Abhandlung — die gleiche Auffassung zu vertreten. Demgegenüber erscheint es nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass Leonardo weder von einem umgekehrten Augenbilde etwas gewusst noch das Auge selbst in dem vorher beschriebenen Sinne als eine Camera aufgefasst hat. Dies lassen die im letzten Jahrzehnt in französischer Übersetzung veröffentlichten Manuskripte

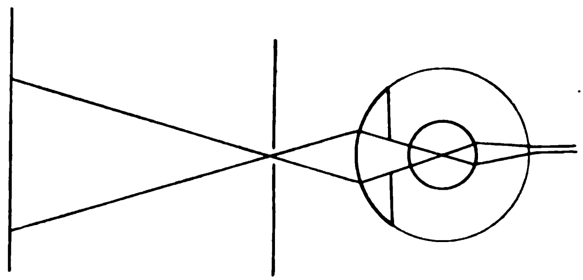
Fig. 1.



des Institut (Charles Ravaisson-Mollien) deutlich erkennen. In eingehender Darstellung beschreibt er hier die Funktion des Auges und seine Ansicht über das Entstehen des Augenbildes. Offenbar ist seine Auffassung beeinflusst durch seine häufigen Beobachtungen in der Camera und des für ihn jedenfalls zuerst überraschenden Auftretens von objektiven, auffangbaren Bildern beim Durchkreuzen der Lichtstrahlen in einem Punkte. Ein solches Bild schwebt ihm vor, wenn er es unternimmt, den Gang der Lichtstrahlen im Auge zu verfolgen, und indem er von der als selbstverständlich angenommenen Voraussetzung ausgeht, dass das Augenbild, da wir die Gegenstände in ihrer richtigen Lage sehen, aufrecht sein müsse, kommt er zu dem Schluss, dass dies nur möglich sei durch eine doppelte Durchkreuzung der Lichtstrahlen. Es ist hierbei aber wenig von Belang für ihn, ob der Durchschnittspunkt durch eine enge Öffnung gegeben ist oder ob er durch Brechung hervorgerufen wird. Ist z. B. die Pupille sehr eng, so bietet sie einen solchen Schnittpunkt dar (hierauf bezieht sich die von Venturi angegebene Stelle), bei Erweiterung derselben senkt sich aber der Durchkreuzungspunkt immer mehr in das Innere des Auges hinein, liegt indessen stets noch vor dem Krystallkörper, den er noch kugelförmig und in der Mitte des Augapfels befindlich zeichnet.

Überhaupt decken sich seine anatomischen Angaben und Zeichnungen des Auges noch ganz mit der Beschreibung, die Al-Hazen in seiner Optik davon giebt, und es scheint daher nicht, dass sich seine sonst sehr eingehenden und selbständigen anatomischen Untersuchungen auch auf dieses Organ erstreckt haben. An mehreren anderen Stellen zeichnet er den Gang der Strahlen so, dass die auf das Auge fallenden Lichtstrahlen durch die Brechung an der Oberfläche (der Hornhaut), also nicht erst durch die Pupille, gezwungen werden, durch einen Punkt (dem Centrum der Wölbung) zu gehen. Für die Durchkreuzung der Lichtstrahlen in einer feinen Öffnung giebt er einen ebenso hübschen wie historisch interessanten Beweis, der ihn zugleich zu der eigentlichen Deutung des Augenbildes führt. (Fig. 1.) „Das Auge, welches durch eine sehr kleine runde Öffnung die Strahlen der Gegenstände empfängt, die jenseits der Öffnung sich befinden, empfängt sie immer

Fig. 2

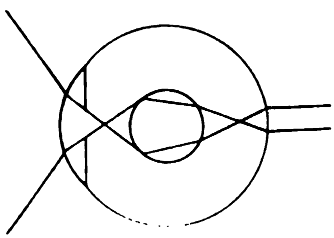


in umgekehrtem Sinne, und trotzdem sieht die Sehkraft sie an der Stelle, wo sie wirklich sind. Dies kommt daher, dass die genannten Strahlen durch den Mittelpunkt des Krystallkörpers, der mitten im Auge liegt, hindurchgehen und dann nach der Rückwand dieses Körpers divergieren. Auf dieser Rückwand richten sich die Strahlen nach dem Gegenstand, der sie hervorgerufen hat und werden von dort durch das empfindende Organ (Sehnerv) dem sensus communis übertragen, der sie beurteilt. Dass dies so ist, beweist man auf folgende Weise: Man mache mit der Nadelspitze eine feine Öffnung in ein Papier und betrachte durch dieselbe die jenseitigen Gegenstände. Bewegt man nun zwischen Auge und Papier die Nadel quer von oben nach unten, so wird jenseits der Öffnung die Bewegung der Nadel ihrer wirklichen Bewegung entgegengesetzt erscheinen. Der Grund davon liegt darin, dass wenn die Nadel zwischen Papier und Auge die höchsten Strahlenlinien berührt, sie zugleich jenseits des Papiers die tiefsten bedeckt; und wenn die Nadel heruntergeht, so kommt sie schliesslich zur tiefsten Linie diesseits des Papiers, d. h. zugleich der höchsten Linie jenseits des Papiers.“ Es ist bemerkenswert, dass dieses Experiment, welches Leonardo ausdrücklich als neue Erfindung seinerseits für sich in Anspruch nimmt und charakterisiert, sich, in derselben Weise be-

1*

schrieben, später bei Scheiner (Oculus, hoc est fundamentum opticum, pars II, Experientia 2) findet, ohne dass man annehmen darf, dieser habe von den früheren Versuchen Leonardos etwas gewusst. Für den letzteren bildet dieses Experiment (bei dessen Beschreibung übrigens, wie aus Zeichnung und Darstellung hervorgeht, die Pupille nicht als Kreuzungsstelle der Strahlen auftritt) die Grundlage für seine weitere Erklärung des Augenbildes. Er argumentiert in der folgenden Weise: Da auf alle Fälle das Bild im Auge aufrecht ist, so muss, wenn — wie bei dem Experiment — ein Kreuzungspunkt vor dem Auge liegt, ein zweiter innerhalb des Auges (Mittelpunkt des Krystallkörpers) liegen. (Fig. 2.) Fällt aber der vor dem Auge liegende Kreuzungspunkt fort, dann müssen beide Kreuzungspunkte innerhalb des Auges liegen. Beim gewöhnlichen Sehen unter Fortfall der Papieröffnung müssen sich daher die von den Gegenständen herkommenden Strahlen in zwei Punkten innerhalb des Auges durchschneiden. Von diesen liegt der eine in der Pupille oder mehr nach dem Innern des Auges zu; in Bezug auf die Lage des anderen Schnittpunktes kommt er zu keiner abschliessenden und sicheren Meinung, jedenfalls entsteht er durch Brechung im Krystallkörper, dessen Zweck es ist, ein nochmaliges Durchschneiden zu veranlassen und dadurch ein aufrechtes Bild des Gegenstandes herzustellen. Dieses Bild entsteht entweder auf der Rückseite des Krystallkörpers oder auf der innersten Haut des Augapfels an der Eintrittsstelle des Sehnerven, der es dem Intellekt übermittelt. (Fig. 3.) Die häutige Ausbreitung des Sehnerven und die Funktion der Netzhaut ist ihm indessen noch nicht bekannt, auch die Eintrittsstelle des Sehnerven zeichnet er in der Augenaxe. Zur experimentellen Erforschung des Augenbildes empfiehlt er die Konstruktion eines künstlichen Auges in der Weise, dass man eine gläserne Hohlkugel, die an einer Stelle durch eine die Höhlung ausfüllende und mit einem Loch versehene Wandung in zwei Kammern geteilt sei, mit einer durchsichtigen Flüssigkeit füllen solle. Mitten in diese Hohlkugel werde dann eine kleine massive Glaskugel eingesetzt, dann müsse auf der gegenüberliegenden Wandung nach Abschluss des Seitenlichtes ein Bild des Gegenstandes sichtbar werden. Ob Leonardo selbst eine derartige Einrichtung konstruiert und Beobachtungen damit angestellt hat, und welches Resultat diese Beobachtungen gehabt haben, lässt sich aus den Manuskripten nicht erkennen; jede weitere Angabe darüber fehlt, ebenso muss es fraglich bleiben, ob er die Durchkreuzung der Lichtstrahlen bezw. die Umkehrung eines Bildes durch Brechung in einem kugelförmigen Körper experimentell untersucht hat. Den Gang der Strahlen, die durch eine Kugel ge-

Fig 3.



brochen werden, zeichnet er an einigen Stellen ähnlich wie später Maurolycus (in seinen Theoremata de lumine et umbra), der die Umkehr durch eine Kugel beschreibt und mit Beziehung auf das Auge hervorhebt, dass die Natur bei dem humor chrystallinus die Kugelform vermieden habe (er zeichnet sie linsenförmig mit verschieden starker Wölbung auf beiden Seiten), weil sonst ein umgekehrtes Bild im Auge entstehen würde. In Bezug auf die Form des Augenbildes steht er also noch auf demselben Standpunkt wie Leonardo da Vinci, erst Kepler zeigt in mustergiltig klarer Weise die Entstehung des umgekehrten Bildes auf der Netzhaut.

Dass auch die Grösse der Pupille für das Sehen von Bedeutung ist, zeigt Leonardo an mehreren Beispielen. Die Zusammenziehung und Ausdehnung der Pupille bei verschiedenen Helligkeitsgraden zeigt folgendes von ihm beschriebene Experiment: „Wenn du ein Experiment beim Menschen anstellen willst, fixiere scharf die Pupille seines Auges, halte eine angezündete Kerze ein wenig entfernt von ihm und lass ihn das Licht ansehen, indem du allmählich es seinem Auge näherst.“ (Das gleiche Experiment führt Scheiner in dem oben zitierten Werke an [Pupillae varietatis Exper. I].) Auch das von Scheiner (Exper. II) angegebene Experiment, nach welchem ein durch die feine Öffnung eines Kartenblatts beobachteter Gegenstand kleiner aber scharf erscheint, giebt er an und zeigt wie jener, dass der Glanz und die überschüssigen Strahlen der Sterne verschwinden, wenn sie durch eine solche feine Öffnung betrachtet werden. „Wenn du eine Öffnung in ein Papier machst, so klein wie möglich und wenn du es dem Auge soweit als möglich näherst, und durch das Loch einen Stern ansiehst, so kann er nur in einen kleinen Teil der Pupille Licht senden. Diese sieht dann den Stern so klein, dass fast nichts kleiner sein kann. Wenn du die Öffnung in der Nähe des Papierrandes machst, so kannst du zugleich mit dem einen Auge den Stern gross und mit dem andern sehr klein sehen. Ebenso wirst du den ganzen Sonnenkörper mit sehr geringem Glanz sehen, denn in demselben Maße wie die Grösse, vermindert sich auch der Glanz.“ In diesem Sinne ist auch die auf das vorher angegebene Experiment gegründete anderweitig gegebene Bemerkung aufzunehmen, dass eine kleine Pupille den Gegenstand kleiner sieht als eine grosse Pupille. Von Interesse ist ferner eine Bemerkung, die sich auf die Nachbilder im Auge bezieht: „Der Krystallkörper, welcher mitten im Auge sich befindet, verdichtet sich beim Auftreffen der hellen Gegenstände und verdünnt sich beim Auftreffen der dunkeln Gegenstände. Dass dies sich so verhält, offenbart sich, wenn das Auge sich schliesst, weil die im Auge bewahrten Bilder, welche von den hellen Gegenständen herrühren, dunkel gesehen werden und die dunkeln sich hell darstellen. Dies findet sich mehr bei den schwachen Augen als bei den starken.“ Ziemlich richtig zu deuten weiss er die von einem leuchtenden Körper ausschiessenden Lichtstrahlen, die sich besonders bei teilweisem Schliessen des Auges zeigen. Er schreibt sie der Reflexion der Strahlen an der Feuchtigkeit der Augenlider zu. Zum Beweis für seine Ansicht führt er das folgende Experiment an: „Man beobachte die leuchtenden Körper durch eine feine Öffnung, dann verschwinden die Strahlen. Fixiert man den leuchtenden Körper und senkt das Auge, dann verschwinden die oberen Strahlen des Körpers, hebt man das Auge, dann verschwinden die unteren Strahlen." An einer anderen Stelle zeigt er, dass auch die Reflexion an den Augenwimpern hierbei beteiligt ist und dass die oberen Strahlen von der Reflexion an den unteren Augenwimpern herrühren und umgekehrt. Dies beweist er dadurch, dass er einen Stift von oben nach unten vor dem Auge vorbeiführt, dann werden durch denselben zuerst die unteren Strahlen fortgenommen. Schliesslich sei erwähnt, dass eine grosse Zahl von Irradiationserscheinungen an verschiedenen Stellen der Manuskripte beschrieben wird, ohne dass es indessen Leonardo gelingt, eine brauchbare Erklärung für diese Erscheinung zu geben.

Die von den meisten übrigen Aufzeichnungen abweichende Form, in welcher Leonardo einen grossen Teil der hier in Betracht kommenden Erscheinungen und Fragen behandelt, lässt erkennen, welche Bedeutung er der Untersuchung der Funktion des Auges beimisst. Während nämlich sonst die Manuskripte nur kurze und oft zusammenhanglose Mitteilungen enthalten, ist ein Band — der Band D der Bibliothèque de l'Institut — lediglich der Untersuchung des Auges gewidmet. Im ganzen genommen bedeuten seine Darstellungen zwar keinen erheblichen wissenschaftlichen Gewinn für die Theorie des Sehens, aber sie enthalten doch eine Reihe interessanter und gelungener Versuche, die überall den aufmerksamen und fleissigen Beobachter erkennen lassen, der den Ursachen der Erscheinungen und den ihnen zu grunde liegenden Gesetzen nachspürt. Auch insofern sind sie bemerkenswert, als hier — gegenüber den früheren vagen Ansichten über die Funktion des Auges — zum erstenmal die Idee eines reellen, objektiven, geometrisch nach den Gesetzen der geradlinigen Fortpflanzung und Brechung konstruierbaren Bildes auftaucht.

Zur Geschichte der Mathematik.

Von

Dr. E. WAPPLER

in Zwickau.

Der Codex Lipsiensis 1470, auf den Herr Prof. Curtze in Thorn ich aufmerksam zu machen die Güte hatte, enthält auf Blatt 479 bis 13' eine lateinische Algebra, welche ein Auszug aus der „Dresdner lgebra“ ist. Dieser Auszug „kennzeichnet sich sofort als ein ollegienheft“, denn am Schlusse heisst es: Hec Liptziensi in studio formata sunt a Magistro Johanne de Egra anno salutis millesimo 36 in estate in habitacione sua burse Drawpitz pro fl duobus, qui ciunt 42 gl argenteos. Hierdurch ist aber bewiesen, dass die „Dresdner lgebra“ wirklich die Grundlage zu einer algebraischen Vorlesung des ohann Widmann von Eger gebildet hat.

Das Stück, welches im Codex Lipsiensis Blatt 504—504' umsst, hat den Titel: Compendium vtile de censu et re incipit fauste. s ist ein Bestandteil der „Dresdner Algebra“ und steht hier unittelbar vor den Casus aporismatum.

Der Algorithmus de datis (Blatt 498'—499), der Algorithmus de p(p)licatis (Blatt 497—497'), die Regula de tali tela (Blatt 502'), as Exemplum regule falsi per re (Blatt 502'), der Algorithmus de dditis et diminutis (Blatt 463'—464'), die (A) Rs radicum surdarum Blatt 465'—466) der Leipziger Handschrift finden sich auch in der resdner Handschrift; die genannten Stücke stehen hier auf Blatt 90'—291, Blatt 293—293', Blatt 287', Blatt 354', Blatt 288—289 nd Blatt 289'.

Aus dieser grossen Übereinstimmung glaube ich schliessen zu rfen, dass der Codex Dresdensis C 80 mittelbar eine der Quellen : den Codex Lipsiensis 1470 gewesen ist.

Virgilius Wellendorffer aus Salzburg, der die meisten Stücke : Leipziger Handschrift eigenhändig geschrieben, hat auf Blatt 432 gendes eingetragen:

Concordia facta auditorum in 24 regulis algabre, et ea, que preponuntur, puta, algorithmum in minucijs, in proporcionibus alrithmum, in additis et diminutis algorithmum, in surdis algorithmum.

in applicatis (algorithmum), ceteros denique illis finitis algorithmos, vt in datis, de duplici differencia, in probis, non oc(c)ultabit Magister Johannes de Egra, cras circa horam sextam et cetera post domici (!) secunda feria.

Daraus geht hervor, dass Widmannn ausser über die 24 Regeln der Algebra noch über den Algorithmus in minucijs, in proporcionibus, in additis et diminutis, in surdis, in applicatis, in datis, de duplici differencia und in probis gelesen hat. Ich sage, Widmann hat gelesen, weil der Codex Lipsiensis sämtliche in der Vorlesungsanzeige genannte Stücke enthält.

Mit der Bruchrechnung und der Proportionslehre sind jedenfalls der Algorithmus minuciarum des Johannes de Lineriis und der Algorithmus proportionum des Nicole Oresme gemeint. Interessant ist, dass nicht nur diese beiden Schriften, sondern auch der Algorithmus de duplici differencia und der Algorithmus de probis im Codex Dresdensis enthalten sind.* Es scheint also auch in nicht algebraischen Schriften die Dresdner Handschrift mittelbar eine der Quellen für die Leipziger Handschrift gebildet zu haben.

Zum Schluss gestatte ich mir einige von Widmann herrührende Notizen aus dem Codex Dresdensis und die gleichlautenden Stellen aus dem Codex Lipsiensis mitzuteilen. Es ist zu lesen im

Codex Dresdensis:	Codex Lipsiensis:
Item in duplacione dupletur vnaqueque quantitas signo nullo mutato (Blatt 288).	In duplacione dupletur vnaqueque quantitas signo nullo mutato (Blatt 463′).
Sed in mediatione si numerus fuerit par alicuius quantitatis medietur simpliciter velutj in integris, si autem impar subscribatur binarius virgula interiecta ut patet in algorithmo de minucijs vulgaribus. Aliter potest fierj mediatio subscribendo dualitatem in medio virgula interiecta extensa per omnes quantitates id est subtus omnes quantitates. Summopere aduertendum est, quod in diuisione ista per uirgulam interiectam numquam habetur tercius numerus scilicet	(I)N mediacione si numerus fuerit par alicuius quantitatis medietur simpliciter velutj in integris si autem impar subscribatur binarius virgula interiecta vt patet in algorithmo de minucijs vulgaribus. Item aliter potest fieri mediacio subscribendo dualitatem in medio virgula interiecta extensa per omnes quantitates, vbi summopere aduertendum est, quod in diuisione ista per virgulam interiectam numquam habetur tercius numerus scilicet quocientis sicut in diuisione inte-

* In der Leipziger Handschrift steht der Algorithmus minuciarum des Johannes de Lineriis auf Blatt 451—458, der Algorithmus proportionum des Nicole Oresme auf Blatt 466′—468 und Blatt 469—473′, der Algorithmus de duplici differencia auf Blatt 500—501 und der Algorithmus de probis auf Blatt 533′. Die Dresdner Handschrift enthält der Reihe nach die genannten Stücke auf Blatt 280—285′, Blatt 201—206, Blatt 291′—292 und Blatt 305′.

quocientis sicut in diuisione integrorum, sed ille numerus sic diuisus estmet quociens illius diuisionis (Blatt 228).

Notandum eciam, quod ex multiplicacione numeri in quodlibet aliud signum producitur illud signum, in quod ø multiplicatur. Vnde ex multiplicacione φ^e in φ^am fit ȝ^9, ex φ in ȝ fit ce, ex φ in ce fit ȝȝ, ex ȝ in ȝ fit ȝȝ et cetera (Blatt 288).

In diuisione ponatur diuidendus in superiori ordine et diuisor in inferiori uirgula interiecta et factum est (Blatt 288').

Extractio radicum fit, quemadmodum dictum est, per preposicionem punctorum vt habetur de surdis, nisi numeri essent racionales, quia tunc posset fierj ad modum integrorum uel minuciarum (Blatt 288').

grorum, sed ille numerus sic diuisus estmet quociens illius diuisionis (Blatt 464).

Notandum eciam, quod ex multiplicacione ø in aliud signum quotlibet producitur illud signum, in quod multiplicatur ø. Vnde ex multiplicacione φ in φ fit ȝ, ex φ in ȝ fit ce, ex φ in ce fit ȝȝ, ex ȝ in ȝ fit ȝȝ (Blatt 464).

(I)N diuisione ponatur diuidendus in superiori ordine et diuisor in inferiori ordine virgula interiecta et factum est (Blatt 464).

(E)Xtractio radicum fit per punctorum preposicionem vt infra dicetur (in) surdis, nisi numerj essent racionales, quia tunc posset fierj ad modum integrorum vel minuciarum (Blatt 464).

Rezensionen.

Aristoteles und die Mathematik von Dr. ALBERT GÖRLAND. Marburg 1899, N. G. Elwertsche Verlagsbuchhandlung. VII, 211 S.

Der Verfasser dieses aus einer 1897 mit dem Preise belohnten Bearbeitung einer Marburger Preisfrage entstandenen Buches verwahrt sich (S. 93) dagegen, als ob er der geschichtlichen Registrierung aller bei Aristoteles vorkommenden mathematischen Definitionen, Axiome und Lehrsätze ein spezifisches Interesse abzugewinnen verpflichtet sei. In der That schildert er uns keineswegs Aristoteles als Mathematiker, sondern Aristoteles als Dialektiker, als Philosophen, welcher, wie mit anderen Begriffsbildungen, so auch mit denen des Raumes und der geometrischen Gebilde, der Zahl, der Zeit und der Bewegung, der Stetigkeit, des Unendlichgrossen und des Unendlichkleinen sich abzufinden hatte. Herr Görland bedient sich dabei einer Sprache, welche dem philosophisch gebildeten Leser wahrscheinlich sehr verständlich ist. Der mathematische Leser muss dagegen nicht selten einige Mühe aufwenden, das Ausgesprochene „in sein geliebtes Deutsch zu übersetzen", und wird dabei nicht geringere Schwierigkeit finden als Faust, dem wir unsere Worte entlehnten. Mit dem Satze (S. 113), die Null (τὸ μηδέν) könne kein Verhältnis zur Zahl haben, dürfte vielleicht folgende Meinung zu verbinden sein. Aristoteles geht mit den Pythagoräern von der 2 als erster Zahl aus. Die 1 ist keine Zahl, οὐκ ἔστι τὸ ἓν ἀριθμός; das Nicht-einmal-eins, das ist τὸ μηδέν, kann folglich zur Zahl in keinem Verhältnisse stehen. Wichtig erscheint die Bemerkung (S. 95), dass Aristoteles den Satz kannte, dass die Aussenwinkel eines nach aussen konvexen geradlinigen ebenen Vielecks, welche entstehen, indem jede Vielecksseite nur einseitig, und zwar an jedem Eckpunkte nur eine Vielecksseite verlängert wird, zusammen vier Rechte betragen. Dieser Satz, welchen auch Blancanus (Aristotelis loca mathematica pag. 61—62) schon hervorgehoben hat, den wir aber vergassen in unseren Vorles. Gesch. Math. zu erwähnen, beweist, dass man schon vor Euklid von der Kenntnis der Winkelsumme des Dreiecks zu dem von der Winkelsumme des n-ecks übergegangen war, wenn auch dieser letztere Satz ebensowenig wie die von Aristoteles ausgesprochene Folgerung sich bei Euklid erhalten hat. Wie nahe des Aristoteles Auffassung des Unendlichgrossen unserer heutigen verwandt war, ist vielleicht am deutlichsten aus dem (S. 170, Note 3) mitgeteilten Ausspruche zu erkennen: οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρία ἀλλὰ γίγνεται, das Unendlichgrosse ist kein Bleibendes, sondern ein Werdendes.

Cantor.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia Volumen I et Supplementum. **Herons von Alexandria Druckwerke und Automatentheater** griechisch und deutsch, herausgegeben von Wilhelm Schmidt. Mit 124 Figuren. LXX, 514 S. Supplementheft: **Die Geschichte der Textüberlieferung. Griechisches Wortregister.** Mit 6 Figuren. 182 S. W. Schmidt. **Heron von Alexandria** (Sonderabdruck aus den neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum, Geschichte und deutsche Litteratur). Mit 39 Abbildungen auf 3 Tafeln. 15 S. Leipzig 1899 bei B. G. Teubner.

Nachdem in den 35 Jahren, welche bereits dahingegangen sind, seit Herr Hultsch die mathematischen Schriften Herons herausgab, die historisch-mathematische Forschung sich diesem Manne und seinen Werken mit grösserer Lebhaftigkeit als früher zugewandt hat, nachdem es geglückt ist eine arabische Bearbeitung der verlorenen Mechanik und eine griechische Handschrift der Metrica aufzufinden, wurde das Bedürfnis immer dringender, eine neue vollständige Ausgabe der Heronischen Werke zu besitzen, welche neben dem neu Aufgefundenen auch das früher schon Herausgegebene, und zwar ausser den mathematischen Schriften durchaus ungenügend Herausgegebene enthalte. Die Teubnersche Verlagshandlung nahm es auf sich, diesem Bedürfnis Befriedigung zu verschaffen und gewann eine Anzahl von besonders dazu berufenen Gelehrten, die Ausgabe zu besorgen. In dem ersten jetzt erschienenen Bande hat Herr Wilhelm Schmidt die Druckwerke und das Automatenwerk griechisch und in deutscher Übersetzung erausgegeben; er hat im Anhange Herons Fragment über Wasseruhren, hilons Druckwerke, Vitruvs Kapitel zur Pneumatik beigegeben. Ein applementheft enthält die Geschichte der Textüberlieferung der im ersten ande gedruckten Schriften. Endlich hat Herr Schmidt eine Art von albstanzeige des Bandes gebracht, welche aus der Zeitschrift, für die er e verfasste, in Sonderabzügen erschienen ist. Druckwerke, bei denen er Luftdruck die bewegende Kraft bildet, Automatenwerke, welche durch ewichte in Bewegung gesetzt sind, waren jedenfalls lange vor Heron in bung. Automaten sind im 5. vorchristlichen Jahrhundert in der Litteratur wähnt, über Pneumatik hat Philo von Byzanz im 3. Jahrhundert gehrieben, und Heron ist sicherlich erheblich jünger. Eine erste Frage geht nun ahin, ob Heron nur Kompilator war, ob er nur vereinigte, was Vorgänger on grösserer Erfindungskraft als ihr Eigentum in Anspruch zu nehmen erechtigt sind. Diese Frage dürfte kaum mit Sicherheit beantwortet erden können, solange die Vorgänger nicht alle bekannt sind, solange ach nicht alle Schriften Herons neu bearbeitet vorliegen, denn jede einzelne chrift trägt dazu bei, erkennen zu lassen, wessen Geistes Kind ihr Verasser war. Wir haben aus dem vorliegenden Bande nicht die Überzeugung chöpfen können, Heron sei so viel unbedeutender, als wofür wir ihn früher ielten, und darum hat die zweite erneut auftauchende Frage, wann wohl Ieron gelebt habe, für uns noch immer eine hervorragende Wichtigkeit. Ian suchte früher aus der Überschrift eines Heronischen Buches, in welcher r mit Ktesibios in Verbindung gebracht ist, eine Zeitbestimmung herzuleiten, nd wir haben dieses Mittels uns selbst bedient, um daraus in Verbindung nit anderen Gründen die Zeit um 100 v. Chr. als Wirkungszeit Herons zu rhalten. Einwände, denen wir die Triftigkeit zuerkennen, zwingen dazu, ine Benutzung des Stoikers Posidonios durch Heron anzunehmen. Er muss lso später als 90 v. Chr. gesetzt werden. Herr Mommsen glaubt Heron i einem von Cassiodor genannten Iron zu erkennen, der bei der Reichsrmessung unter Augustus mitwirkte, und diese fand 37—20 v. Chr. statt. ndlich ist in der Mechanik eine von Plinius als neu erwähnte Olivenesse beschrieben, und ist diese Stelle echt, so muss die Mechanik etwa n. Chr. verfasst sein. Augenscheinlich sind die beiden letzten Angaben cht mit einander zu vereinigen, da eine mehr als 76 Jahre anhaltende istungsfähigkeit unglaublich wäre. Entweder war also Heron einer der Reichsrmesser, dann ist der Schluss der Mechanik unecht, oder die Stelle der echanik ist echt, dann muss Heron von Iron unterschieden werden. Herr hmidt ist letzterer Ansicht und setzt Heron in die zweite Hälfte des sten nachchristlichen Jahrhunderts. Metrologische von Herrn Hultsch sgesprochene Bedenken sucht er zu entkräften. Für die mathematischen hriften Herons hat die eine wie die andere Annahme zur Folge, dass von Columella und um so mehr von den Agrimensoren Trajans haben nutzt werden können. Eine Beeinflussung des Vitruvius durch Heron gnet Herr Schmidt ebenso wie eine solche Herons durch Vitruvius auf hlicher Grundlage, da beide zwar von ähnlichen, aber in wesentlichen

Punkten doch von einander abweichenden Dingen reden, so dass man nu zu behaupten berechtigt sei, sowohl Vitruvius als Heron setzten gewiss frühere Vorarbeiten voraus. Uns persönlich erscheint nur die Beeinflussung der Agrimensoren durch Heron geschichtlich so gut wie unentbehrlich, so dass wir, sofern diese gerettet ist, auf die etwas frühere oder spätere Lebenszeit Herons kein allzugrosses Gewicht legen.

Cantor.

Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata edidit Maximilianus Curtze (Euclidis Opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge Supplementum). Leipzig 1899, B. G. Teubner. XXIX, 390 pag.

Schon 1887 machte Paul Tannery auf einen arabischen Codex in Leiden aufmerksam, welcher die Erläuterungen des An-Nairîzî zu den zehn ersten Büchern der Euklidischen Elemente enthaltend, als zweite Quelle für einen von Heron von Alexandria dem gleichen Werke gewidmeten Commentar zu gelten habe. Besthorn und Heiberg gaben 1893 und 1897 in arabischer Sprache und lateinischer Übersetzung den Leidner Codex bis zum Schlusse des I. Buches der Elemente heraus. Inzwischen hatte Max Curtze auf seiner an Funden überreichen Studienreise von 1896 in Krakau die vollständige durch Gerhard von Cremona in der zweiten Hälfte des XII. Jahrhunderts angefertigte lateinische Übersetzung des Commentars des An-Nairîzî entdeckt, und ihren Abdruck begrüssen wir heute aufs Freudigste. Der Leidner Codex enthält als Hauptbestandteil die sogenannte Hadschâdsch-Übersetzung der sechs ersten Bücher der Euklidischen Elemente, und der Commentar An-Nairîzîs ist nur Beigabe. Der Übersetzung Gerhards aber lag nur der Commentar zum Grunde und zwar in seiner ganzen Ausdehnung. Durch den Krakauer Codex sind wir also vollständiger und besser als durch den Leidner mit An-Nairîzîs Erläuterungen und mit dessen Quellen bekannt geworden. An-Nairîzî stand zum Kalifen Almuʿtadid (892—902) in naher Beziehung, lehrte also vor Abû'l Wafâ (940—998); dieser letztere kann also nicht zu den Quellen An-Nairîzîs gehört haben, sondern nur das umgekehrte Verhältnis ist denkbar, wo eine Übereinstimmung beider Schriftsteller sich zeigt, und An-Nairîzî muss alsdann, wenn er nicht selbst Erfinder war, aus einem älteren Araber oder, was wahrscheinlicher ist, aus einem Griechen geschöpft haben. Unter diesen aber benutzte er für die mehr philosophischen Bestandteile der Elemente, für die Erklärungen, Forderungen, Grundsätze, hauptsächlich Geminus und Simplicius, für die eigentlich mathematischen Bestandteile, für die Lehrsätze und Aufgaben, fast ausschliesslich Heron, und da noch im achten Buche ausdrücklich auf Heron abgehoben wird, so folgt, dass dieser einen mindestens bis zum achten Buche der Elemente reichenden Kommentar verfasst hat, von welchem uns nunmehr höchst wertvolle Bruchstücke bekannt gegeben sind, aus denen wir Herons eigene mathematische ıutung schätzen lernen könnten, wenn uns je ein Zweifel an derselben ımmen wäre. Von Heron rührt eine Konstruktion der Senkrechten in Endpunkte einer Strecke mit unveränderter Zirkelweite (pag. 55), von vielleicht eine ähnlich zu vollziehende Teilung einer Strecke in beliebig : gleiche Teile (pag. 74—75), welche später bei Abû'l Wafâ wiedert, so dass es nun doch scheint, als hätten die Griechen bereits solche struktionen geübt. Heron lehrte den Satz (pag. 78), dass, wenn man einem rechtwinkligen Dreiecke die Quadrate über den drei Seiten nach en zeichnet und die spitzen Dreiecksecken mit dem gegenüberliegenden punkte des anderen Kathetenquadrates verbindet, diese beiden Geraden auf der Senkrechten von der rechtwinkligen Dreiecksecke auf die otenuse schneiden. Heron bewies den Satz (pag. 130), dass es von m Punkte ausserhalb eines Kreises zwei gleiche Berührungslinien an Kreis gebe u. s. w. Nahezu alle diese Bemerkungen finden sich bereits ;urtzes Ausgabe hervorgehoben. Einen kleinen Zusatz möchten wir uns atten, mit welchem übrigens brieflicher Rücksprache zufolge Curtze chfalls einverstanden ist. Auf pag. 3 lin. 23—25 heisst es: *Aposeius autem dixit, quod punctum est extremitas non habens dimensionem, extremitas linee.* Die Lautverwandtschaft mit Posidonius von Rhodos die Vermutung nahe, dieser könne unter dem Namen Aposedanius tanden werden müssen, eine Vermutung, welche durch folgende Erung nahezu Gewissheit wird. Herr Wilhelm Schmidt hat in seiner eitung zu Herons Druckwerken (Leipzig 1899 pag. XV—XVI) an reren Beispielen nachgewiesen, dass Heron von Alexandria Definitionen Posidonius benutzt hat. Nun findet sich aber gerade die von Gerhard Cremona übersetzte Definition des Punktes bei Heron (ed. Hultsch 1864, 6 lin. 10—11). Sie kann daher sehr gut von Posidonius herrühren bestätigt alsdann als neues Beispiel die von Schmidt ausgesprochene ıuptung.

CANTOR.

ıerti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972—1003). Accedunt aliorum opera ad Gerberti libellos aestimandos intelligendosque necessaria per septem appendices distributa. Collegit, ad fidem codicum manuscriptorum partim iterum, partim primum edidit, apparatu critico instruxit, commentario auxit, figuris illustravit Dr. NICOLAUS BUBNOV, professor Kijoviensis. Berlin 1899, R. Friedländer & Sohn. CXIX, 620.

Wenn wir nicht länger anstehen wollen, unsere Leser mit dem Ernen eines Buches bekannt zu machen, dessen Umfang wie dessen Inein langes und eingehendes Studium erfordert, bevor man zu einem herten Urteile zu kommen vermag, so sprechen wir damit zugleich aus, wir selbst uns ein solches Urteil noch nicht bilden konnten. Darüber ch sind wir uns klar, und jeder Freund geschichtlich-mathematischer :hung wird uns wohl beistimmen, dass Herr Bubnov sich gerechtesten ruch auf Dank erworben hat, indem er zusammenfasste und in einem

Bande drucken liess, was vorher mit grosser Mühe zusammengesucht werden musste, teilweise (wie z. B. die Commentare zu Gerberts Rechnen auf dem Abakus) überhaupt noch nicht gedruckt war. Worüber wir uns dagegen noch im Zweifel befinden, das sind die Folgerungen, welche Herr Bubnov aus seinem Materiale zog, und welche die Anordnung derselben beeinflusste. Er hält nämlich, ähnlich wie Olleris es that, nur den Anfang der Gerbertschen Geometrie (die 13 ersten Kapitel der Pezschen Ausgabe) für echt; alles übrige (Kapitel 14—94 der Pezschen Ausgabe) sei eine Geometrie eines unbekannten Verfassers. Der Beweis dafür wird darin gefunden, dass im Salzburger Codex zwischen beiden Abteilungen eine halbe Seite frei geblieben ist. Von einigen neu aufgefundenen Commentaren zu Gerberts Rechenregeln ist einer besonders merkwürdig, in welchem die *Rotula*, das Ringelchen, nicht bloss als verschiebbares Zeichen benutzt wird, um erkennen zu lassen, bei welcher Zahlenordnung die Rechnung angelangt ist, sondern auch zur Ausfüllung leerer Kolumnen, also gleich der Null der Algorithmiker. Die Handschrift, aus welcher der Commentar abgedruckt ist, gehört freilich frühestens dem 16. Jahrhunderte an, wir sehen daher keinen Grund, warum der Commentar schon im 11. oder 12. Jahrhundert entstanden sein soll (Bubnov pag. 276 lin. 4 v. u.), und nicht von einem Algorithmiker herrühren könnte. Die Texte des Vitruvius Rufus und des Epaphroditus glaubt Herr Bubnov von einander trennen zu können. Der Auszug aus jedem der beiden beginne nämlich mit der Benutzung der ausgeschriebenen Worte *Sic quaero*, und dann komme erst die Abkürzung S. Q. Die Abakusstelle in der sog. Geometrie des Boethius soll das Werk eines Fälschers aus dem 11. Jahrhundert sein. Insbesondere sei Architas in bewusster Fälschung statt Gerbert geschrieben u. s. w. Unsere Leser erkennen, dass man allen solchen Behauptungen gegenüber mit dem endgiltigen Zustimmen oder Ablehnen nicht vorsichtig genug sein kann.

CANTOR.

Nicolaus Coppernicus. Eine biographische Skizze von M. CURTZE. Mit dem Bildnisse des Coppernicus. (Sammlung populärer Schriften, herausgegeben von der Gesellschaft Urania zu Berlin.) Berlin 1899, Hermann Paetel. 84 S.

Dass eine von Max Curtze verfasste Biographie des Coppernicus auf dem zuverlässigsten Quellenmaterial beruht und alles berücksichtigt, was an solchem von den verschiedensten Forschern, unter welchen Curtze selbst ein Löwenanteil zufällt, aufgefunden worden ist, braucht nicht erst besonders hervorgehoben zu werden. Die Schreibweise ist angenehm und insbesondere ohne jede Schwerfälligkeit, trotzdem zwar nicht die Beweisstellen für die aufgestellten Behauptungen, aber doch deren Fundorte in zahlreichen Fussnoten angegeben sind. So ist alles vereinigt, was der kleinen Druckschrift einen grossen Freundeskreis erwerben kann und wird.

CANTOR.

nelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten von Troels-Lund. Autorisierte, vom Verfasser durchgesehene Übersetzung von Leo Bloch. Leipzig 1899, B. G. Teubner. V, 286 S.

Welcherlei Weltanschauung hat im 16. Jahrhundert in Nordeuropa eingebürgert, und woher stammte sie? So einfach diese Fragen sich ›rechen, so schwierig ist es beide und insbesondere die zweite genau eantworten. Sind doch die Kulturelemente, welche in der angegebenen an dem genannten Orte zusammen das bildeten, was die Weltanschauausmacht, ein buntes Gemisch verschiedenster Herkunft. Der Verfasser den kühnen Versuch gemacht, diese Elemente von Babylonien, von ›ten, von Persien her, wo sie seiner Meinung nach ihre Wiege hatten, auf in Jahrtausenden vollzogenen Wanderung zu begleiten und so das zu fen, was man die Entwickelungsgeschichte der Religion und mit ihr Naturwissenschaft nennen möchte. Ist es wirklich Geschichte, ist es ung? Der wunderbare Glanz der Sprache weist auf das Letztere hin, wenn wir auch weit entfernt davon sind, alles, was in dem Buche ıptet ist, für unbeweisbar zu erklären, unbewiesen ist manches.* Eine denswert glückliche Phantasie hat aus mehr oder weniger sicher gen geschichtlichen Thatsachen ein Gemälde hergestellt von einheitlichster ing. Wir haben selten ein Buch gelesen, welches uns vom ersten ım letzten Worte stärker in Fesseln gehalten hätte. Die Übersetzung sich, als wäre das Buch von Anfang an in deutscher Sprache geben, gewiss das beste Lob, welches man einer Übersetzung erteilen

Cantor.

Napiers Werken door N. L. W. A. Gravelaar. (Verhandelingen der Koninklijke Akademie von Westenschappen te Amsterdam. Eerste Sectie. Deel VI. Nr. 6.) Met Portret en 3 Platen. Amsterdam 1899, Johannes Müller. 160 pag.

Der Verfasser, welcher sich den Freunden geschichtlich-mathematischer hung schon durch eine Abhandlung über Pitiscus vorteilhaft bekannt :ht hat, und welcher dem Referenten insbesondere durch liebensge Briefe näher getreten ist, mittels deren er ihn auf Irrtümer in Vorles. Gesch. Math. hinwies, ist nun mit einer Einzelschrift über den en schottischen Logarithmenerfinder hervorgetreten, die unseren Fachsen auf das wärmste empfohlen zu werden verdient. Es ist ja llos wenig vorteilhaft für die Arbeit, dass sie in holländischer Sprache ıst ist, aber ihrer Verbreitung in Deutschland, wo seit Fritz Reuters ingen in die breitesten Schichten die Kenntnis des Plattdeutschen sich hr verallgemeinert hat, wird jener Umstand kaum hinderlich sein.

* An eine fünftägige Woche der alten Chaldäer glaubt niemand mehr. Die ache, dass die Ägypter das Schaltjahr besassen, ist durch das Edikt von us festgestellt.

Herr Gravelaar hat ausführliche Auszüge aus sämtlichen Schriften Napiers gegeben: aus seiner Schrift über die Offenbarung Johannes, aus der Descriptio, aus der Rabdologie, aus der Constructio, endlich aus den 1839 erst aufgefundenen und dem Drucke übergebenen Ars logistica und Algebra. Referent ist besonders für die letzterwähnten Auszüge dankbar, da ihm die Ausgabe von 1839 nie zu Gesicht gekommen ist, und ebenso dürfte es manchem Fachgenossen in Deutschland gegangen sein. Herr Gravelaar hat überdies nicht versäumt, bei jeder Gelegenheit auf gleichzeitige und auf ältere Schriften hinzuweisen, ein Hinweis, der dazu dient, Napiers Stellung innerhalb der Geschichte der Mathematik deutlicher zu kennzeichnen.

Cantor.

Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie, herausgegeben von Friedrich Engel und Paul Stäckel. I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefsky. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedrich Engel. Erster Teil: Die Übersetzung mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Texte. Zweiter Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Texte. Leipzig 1899, B. G. Teubner. XVI, 476 S.

Im Jahre 1895 gaben P. Stäckel und Fr. Engel gemeinschaftlich „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss" heraus, ein vortreffliches Buch, welches wir im 41. Bande dieser Zeitschrift Histor.-litterar. Abtlg. S. 105—106 warm empfehlen durften. Beide Verfasser haben das leicht begreifliche Bedürfnis empfunden, die Lehren, deren Geschichte durch ihre Bemühungen zum erstenmale leicht übersehbar geworden war, noch weiter zu verfolgen, und die Teubnersche Verlagshandlung hat, wie schon so oft, ihre reichen buchhändlerischen Mittel dem wissenschaftlich hochinteressanten, wenn auch ausserhalb des gewöhnlichen Geleises liegenden Gegenstande zur Verfügung gestellt. Ohne die in der ersten Veröffentlichung von 1895 bewährte Gemeinschaft der Arbeit ganz bei Seite zu schieben, haben beide Verfasser nunmehr doch eine etwas schärfer ausgesprochene Arbeitsteilung eintreten lassen. Herr Engel hat die Schriften Lobatschefskijs, Herr Stäckel diejenigen Bolyais zur Herausgabe übernommen, und Herrn Engels Abteilung liegt heute in einem stattlichen Bande vollendet vor uns. Herr Engel war durch seine Kenntnis der russischen Sprache, über welche er wohl allein unter den gegenwärtig ausserhalb Russlands lebenden Mathematikern vollständig gebietet, zur Bekanntmachung der Lobatschefskijschen Schriften in erster Linie befähigt, und wer der nichteuklidischen Geometrie sein Interesse zuwendet, wird daher Herrn Engels Bemühungen doppelt dankbar anerkennen. Zeigt doch die heute zum ersten Male gebotene Übersetzung des grossen Originalwerkes „Neue Anfangsgründe der Geometrie", wie wenig gerecht man Lobatschefskij werden konnte, so lange man auf dessen Veröffentlichungen in französischer und in deutscher Sprache allein sein Urteil gründete. Für die Lebensgeschichte Lobatschefskijs hat Herr Engel die vortrefflichen Vorarbeiten Wassiljews benutzen können, ebenso aber auch briefliche Mitteilungen dieses liebenswürdigen Gelehrten, welche vorher der Öffentlichkeit noch nicht übergeben waren. Es ist weit mehr als eine einfache Lebensbeschreibung, womit man hier bekannt wird, es ist ein fesselndes, wenn auch nicht immer erfreuliches Stück Kulturgeschichte aus dem 19. Jahrhundert. Wenn wir Herrn Engels Anmerkungen erst zuletzt nennen, so geschieht es, weil in ihnen mehr als in dem ganzen übrigen Bande von Eigenarbeit des Verfassers zu erkennen ist. Man muss selbst mit ähnlichen Arbeiten sich beschäftigt haben, um würdigen zu können, wie sehr Herr Engel es verstanden hat, die mitunter verwischten Spuren der Geistesthätigkeit Lobatschefskijs wieder aufzufrischen, wie verhältnismässig leicht er jetzt das Lesen eines Werkes gemacht hat, das ihm selbst unsägliche Mühe bereitet haben muss.

Cantor.

Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863. Nach seinen Personalakten dargestellt von Professor Dr. Julius Lange. Sonderdruck der Festschrift zur Erinnerung an das 75jährige Bestehen der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule (ehem. Gewerbeschule). Nebst einem Bildnis von J. Steiner, mit gütiger Erlaubnis der Verlagshandlung Georg Reimer in Berlin den gesammelten Werken entnommen. Berlin 1899, R. Gaertners Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 70 S.

Je genauer man mit Jacob Steiners geometrischen Leistungen bekannt geworden ist, um so höher ist die Anerkennung derselben gestiegen. Man kann leider nicht behaupten, dass Jacob Steiners menschliche Eigenschaften bei näherer Betrachtung gleichfalls immer neue Lichtseiten hätten erkennen lassen. Das haben schon die Veröffentlichungen J. H. Grafs dargethan, das zeigt sich noch deutlicher aus den uns vorliegenden Personalakten, welche allzugenau den gleichen Eindruck hervorbringen, den man aus der Geschichte des Verkehrs Steiners mit Schläfli gewinnen musste, als dass man die Gerechtigkeit der in ihnen enthaltenen Charakterschilderung anzweifeln könnte. Steiner schilt in seinen Briefen nach der Heimat auf die preussische Regierung wie auf die Berliner Mathematiker. In seinen Eingaben an die preussische Regierung rühmt er Berlin als seine freiwillig erkorene Heimat, und will den Verkehr mit den dortigen Fachgenossen sowie die dort sich bietenden litterarischen Hilfsmittel und Anregungen nicht entbehren können. Die preussische Regierung kommt Steiner entgegen, so viel sie es thun kann, und zieht wiederholt aus seinem unbotmässigen und streitsüchtigen Benehmen nicht die Folgerungen, welche einem weniger genialen Geometer gegenüber ganz gewiss gezogen worden wären. Jacobi und insbesondere Crelle erweisen sich als unermüdlich in der Vertretung von Steiners Interessen. Kurzum die unmittelbaren und mittelbaren Vorwürfe Steiners sind entkräftet und widerlegt. Cantor.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. Ludwig Schlesinger. Zweiten Bandes zweiter (Schluss-) Teil. Leipzig 1898, B. G. Teubner. XIII u. 446 S.

Von dem grossen, 1895 begonnenen, 1897 mit dem ersten Teil des zweiten Bandes fortgesetzten Werk (vergl. die Referate der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1895 S. 166 flg. u. 1898 S. 56 flg.) liegt nunmehr unter der Jahreszahl 1898 bereits der abschliessende Band vor. Berücksichtigt man dabei die Fülle des Inhalts und die eindringende Beherrschung des Gegenstandes durch den Verfasser, so steht man vor einer wahrhaft bewundernswerten Leistung.

Um den vorliegenden Band mit wenigen Worten zu charakterisieren, so ist er in der Hauptsache ausschliesslich der Theorie der elliptischen Modulfunktion und der in Verallgemeinerung jener von Poincaré entwickelten Theorie der Fuchsschen Funktionen gewidmet. Schon durch diese Homogenität des Inhaltes wirkt das Studium besonders anziehend. Aber auch noch aus einem anderen Grunde. Der Verfasser hat seit langen Jahren die Poincaréschen Theorieen und alles, was damit zusammenhängt, eindringend durchforscht und davon in einer Reihe wichtiger Originalabhandlungen Zeugnis abgelegt. So kommt es, dass wir in der hier gegebenen Darstellung der grossen Theorie neben vielen eigenen Resultaten des Verfassers ein ganz besonders reifes Erzeugnis seiner Arbeit vor uns haben. Schliesslich krönt der Band das ganze Werk auch in dem Sinne, dass viele der früheren Ansätze jetzt eigentlich erst zur Geltung kommen, viele der früher aufgestellten Probleme jetzt ihre Beantwortung finden.

Bei der Fülle der eigenartigen Begriffe, mit denen operiert wird, können wir nur eine ganz summarische Wiedergabe des Inhaltes der einzelnen Abschnitte versuchen.

XIII. Theorie der elliptischen Modulfunktion.

Auf dem von Gauss zum Eingang in die Theorie der elliptischen Funktionen benutzten Wege des arithmetisch-geometrischen Mittels, als dessen historische Quelle die Landensche Transformation erscheint, wird gezeigt, dass bei der Legendreschen Differentialgleichung, der die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung mit dem Modul $z = x^2$ genügen, die unabhängige Variable z eine eindeutige Funktion des Integralquotienten in der oberen Halbebene ist: die sogenannte elliptische Modulfunktion. Die Ausdehnung dieser Frage (Eindeutigkeit der unabhängigen Variabeln als Funktion des Integralquotienten) auf die Gausssche Differentialgleichung überhaupt, die in der „kanonischen" Form von drei Parametern $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ abhängt, geschieht im Anschluss an Schwarz, indem die z-Ebene durch den Integralquotienten η in einem Netz von Kreisbogendreiecken abgebildet wird. Eine Funktion $\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3; z)$, die eine z-Halbebene konform in einem Dreieck der η-Ebene mit den konkaven Winkeln $\pi\delta_1$, $\pi\delta_2$, $\pi\delta_3$ abbildet, heisst Dreiecksfunktion. Sind $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ reziproke ganze Zahlen oder Null, so ist die Dreiecksfunktion eindeutig umkehrbar;

bei der Legendreschen Gleichung ist $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$; die Modulfunktion ist also die eindeutige Umkehrung einer Dreiecksfunktion $\eta = s(0, 0, 0; z)$. Auf solchem Wege gelangt Schlesinger zu den wichtigsten Eigenschaften der Modulfunktion. Neben ihr werden noch zwei andere eindeutig umkehrbare Dreiecksfunktionen aufgestellt; die projektiven Gruppen, die diese Funktionen vertragen, lassen sich in einfacher Weise arithmetisch charakterisieren.

XIV. Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen.

Von der Modulfunktion wendet sich die Untersuchung nun zu dem allgemeineren Problem, wo nicht alle drei $\delta = 0$ sind. Drei Arten von Dreiecksfunktionen werden unterschieden, je nachdem $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 1$, $= 1$, > 1. Je nach dem Eintreten des einen oder anderen dieser Fälle ist das Quadrat des Radius C des sogenannten Orthogonalkreises für das Ausgangsdreieck > 0, $= 0$, < 0. Eine interessante geometrische Betrachtung führt Schlesinger zu Sätzen über die projektiven Substitutionen, welche jenen Kreis in der η-Ebene ungeändert lassen. Eine dabei auftretende Differentialinvariante wird als Linienelement auf einer Fläche vom konstanten Krümmungsmaß $-C$ gedeutet, und dadurch finden die Substitutionen einer zu einer Dreiecksfunktion gehörigen projektiven Monodromiegruppe ϑ eine anschauliche geometrische Auslegung. Für die Dreiecksfunktionen aller drei Arten ist die Gruppe ϑ diskontinuierlich, die Umkehrungsfunktion eindeutig. Bei der dritten Art ist η sogar eine algebraische Funktion von z, deren einzelne Fälle in bekannter Weise den regulären Polyedern zugeordnet werden.

Die analytische Darstellung der Dreiecksfunktionen dritter Art führt auf die Theorie der Fuchsschen Primformen. Hieran schliessen sich Sätze über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen nach Fuchs, Klein und Schwarz. Namentlich findet hier die Fuchssche Methode, die durch rein rationale Prozesse darüber Auskunft giebt, wie sich eine vorgelegte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in Bezug auf jene Fragen verhält, ihren Platz.

Den Abschluss des inhaltreichen, vielfach originellen und in der Darstellung höchst eleganten Abschnittes bildet die Einführung des Poincaréschen Prinzips. Dieses besteht in dem Gedanken, bei einer Funktion y von x mit den singulären Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ y und x als eindeutige Funktionen eines Parameters η darzustellen, indem die Funktion x von η die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ „auslässt", gerade wie die Exponentialfunktion e^η die Werte 0 und ∞.

XV. Theorie der Fuchsschen Funktionen.

Der Übergang von den eindeutigen Umkehrungen von Dreiecksfunktionen zu den Fuchsschen Funktionen kann durch den Übergang von der Gaussschen Differentialgleichung zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beliebig vielen singulären Stellen bezeichnet werden.

Eine diskontinuierliche projektive Gruppe ϑ, deren Substitutionen einen reellen Kreis mit nicht verschwindendem Radius ungeändert lassen, heisst Fuchssche Gruppe, die zugehörige Funktion — wie also z. B. die Umkehrung einer Dreiecksfunktion erster Art — ist eine Fuchssche Funktion*, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der die unabhängige Variable eine Fuchssche Funktion des Integralquotienten ist, eine Fuchssche Differentialgleichung (nicht identisch mit „Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse"!)

Die Existenz solcher zu einer Gruppe der angegebenen Art gehörigen Fuchsschen Funktionen folgt unmittelbar aus früherem. Sie zeigen mannigfache Analogien mit den elliptischen Funktionen. Das Periodenparallelogramm ist ersetzt durch ein Kreisbogenpolygon, den Fundamentalbereich, der zu einer geschlossenen Fläche zusammengebogen das Geschlecht der Fuchsschen Funktion bestimmt. Auch die elliptischen ϑ-Reihen finden ihr Seitenstück in den Fuchsschen Θ-Reihen, deren Verhalten bei Anwendung der Substitutionen von ϑ unmittelbar erkennbar ist. Ihre Konvergenz, die Entwickelung in der Umgebung der Doppelpunkte der Substitutionen, die Art und Anzahl ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen im Fundamentalbereich finden eingehende Untersuchung. Besonders wichtig sind die sog. ganzen Thetafunktionen, die für keinen Wert innerhalb des Fundamentalbereichs unendlich werden. Jede Fuchssche Funktion kann als Quotient von ganzen rationalen Funktionen ganzer Fuchsscher Thetafunktionen dargestellt werden.

Eine andere Darstellung Fuchsscher Funktionen gründet sich auf den Begriff der Primformen, der auf beliebige Fuchssche Gruppen übertragen wird. Für solche Primformen gelten ähnliche Sätze wie bei endlichen Gruppen.

Die symmetrischen Fuchsschen Gruppen und Funktionen, bei denen das in bestimmter Weise gebildete Fundamentalpolygon durch eine „Diagonale" in symmetrische Hälften zerfällt, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf jene Diagonale sind, bilden die direkte Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen. Man kann dabei stets erreichen, dass sämtliche singuläre Stellen der zugehörigen Fuchsschen Differentialgleichung reell sind.

Das allgemeine Schottkysche Abbildungsproblem, das an ein mehrfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon anknüpft, führt endlich auf Fuchssche Funktionen höheren Geschlechtes, auf Kleinsche Gruppen und Funktionen und die zugehörigen Kleinschen Thetareihen.

---

* Der Name „Fuchssche Funktion" und die daran anschliessenden Bezeichnungen sind von Poincaré eingeführt worden. F. Klein und seine Schüler nennen Funktionen, die bei gewissen linearen Substitutionen ungeändert bleiben, „automorph". Bei der grossen Verbreitung, die auch diese Bezeichnung gefunden hat, wäre ein Hinweis darauf in dem Handbuch entschieden am Platze gewesen.

XVI. Das Poincarésche Prinzip und seine Anwendungen.

Wenn es gelingt, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der die singulären Punkte beliebig und gewisse andere Parameter ganzzahlig festgelegt sind, eine sog. normale Differentialgleichung, durch geeignete Wahl der noch übrigen Parameter zu einer Fuchsschen Differentialgleichung zu machen, so ist das Poincarésche Prinzip in allgemeinster Form zur Anwendung gebracht. Der Nachweis, dass dies und zwar nur auf eine Art möglich ist, wird durch eine Methode geführt, die sich auf die Theorie der Untergruppen der Fuchsschen Gruppen oder die Transformation der Fuchsschen Funktionen stützt. Durch Transformation einer Fuchsschen Funktion, wiederholte Anwendung der Transformation auf die transformierte u. s. f. ohne Ende, gelangt man zu einer Grenzfunktion η von z, deren Umkehrung gewisse z-Werte auslässt und dadurch das gedachte Problem löst.

Der Inhalt dieses Abschnittes, die Transformationstheorie der Fuchsschen Funktionen und was daraus folgt, ist zum allergrössten Teil Eigentum des Verfassers.

XVII. Theorie der Fuchsschen Zetafunktionen.

Wenn die Integrale einer linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit rationalen Koeffizienten vermittelst einer hierzu geeigneten Fuchsschen Funktion z von η als eindeutige Funktionen von η dargestellt werden, so stehen sie zu dieser Funktion in einer analogen Beziehung, wie die bei Jacobi in dem Ausdruck des Integrals zweiter Gattung auftretende Funktion $Z(u)$ zu sinam u. Deshalb heissen jene Funktionen von η in der Theorie der linearen Differentialgleichungen nach Poincaré Fuchssche Zetafunktionen. Der gegenwärtige letzte Abschnitt behandelt kurz gesagt die Integration von linearen Differentialgleichungen mit Hilfe von Zetafunktionen.

Der Existenzbeweis für die zu einer gegebenen Gruppe Θ gehörigen allgemeinen Fuchsschen Zetafunktionen wird geliefert, falls die Gruppe Θ gewisse „Konvergenzbedingungen" erfüllt. Die aus den Z-Funktionen entstehenden Z-Formen zweier homogener Variabeln u_1, u_2 führen dann zu einer Gestalt der Differentialgleichung, bei der die Koeffizienten invariante, eindeutige Formen von u_1, u_2 und damit Fuchssche Funktionen sind, während die Integrale eben jene Z-Formen sind.

Aus der Theorie der Z-Funktionen und dem Poincaréschen Prinzip folgt — wenigstens unter gewissen einschränkenden Bedingungen — die Existenz eines Systems von Funktionen und die Herstellbarkeit des allgemeinsten solchen, welches den von Riemann in seinem Nachlass aufgestellten Bedingungen genügt und worauf er die Theorie der linearen Differentialgleichungen zu gründen unternahm.

Nicht mit den Z-Funktionen in direktem Zusammenhang steht die jetzt folgende kurze Vorführung der neuesten Fuchsschen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe eine aus einem Fundamentalsystem und den konjugierten Werten seiner Elemente gebildete bilineare Form ungeändert lässt. Wohl aber erscheinen hier diese Untersuchungen als direkte Verallgemeinerung des Satzes, dass bei einer Fuchsschen Differentialgleichung der Orthogonalkreis durch die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt. — Eine kurze Betrachtung wird noch Differentialgleichungen mit algebraischen und mit doppeltperiodischen Koeffizienten gewidmet und zuletzt für die Laméschen Gleichungen spezialisiert.

Unsere gedrängte Übersicht giebt nur ein schwaches Bild von dem thatsächlichen Reichtum des Inhaltes.

Als „Nachwort" publiziert der Verfasser den seiner Zeit mit Günther zusammen aufgestellten Arbeitsplan, um „den Einfluss, den Günther auf Plan und Ausführung des Handbuches ausgeübt hat, im Zusammenhang hervortreten zu lassen", und giebt die Punkte an, in denen er den Güntherschen Nachlass verwenden konnte.

Ein sorgfältig aufgestelltes Register der angewandten Bezeichnungen wird bei einer Benutzung des Werkes zur Orientierung über nur einzelne Fragen treffliche Dienste leisten.

Die Nachträge zum Litteraturnachweis der ersten Bände bestätigen in interessanter Weise — wenn es dessen bedürfte — die lebhafte Thätigkeit, die fortgesetzt auf dem Gebiete der linearen Differentialgleichungen herrscht. Besonders sei dabei der an Poincaré anschliessenden Arbeiten von Horn gedacht, in denen die divergenten, formal genügenden Reihen zur asymptotischen Darstellung der Integrale benutzt werden. Inzwischen scheint die von der Pariser Akademie preisgekrönte Abhandlung von Borel neues, wohl auch für die linearen Differentialgleichungen in der eben bezeichneten Richtung wertvolles Material geliefert zu haben.

Beim Abschluss unseres Referates stehen wir nicht an zu erklären, dass Schlesinger nach unserer Meinung das zu Anfang seines grossen Unternehmens aufgestellte hohe Ziel in geradezu glänzender Weise erreicht hat. Es dürfte kaum eine nennenswerte Untersuchung auf dem bearbeiteten Gebiete geben, die nicht entweder in die Darstellung Schlesingers organisch verwoben worden wäre oder doch in kurzer Erwähnung ihren Platz darin angewiesen erhalten hätte. Die fundamentalen Arbeiten insbesondere von Fuchs und Poincaré erscheinen hier in einem Zusammenhang, der ihre Bedeutung sogleich ins rechte Licht stellt. In welcher Richtung auch immer eine Untersuchung über lineare Differentialgleichungen heute angestellt werden möge, man wird ohne eigenen Nachteil nicht wohl einer Benutzung von Schlesingers „Handbuch" dabei entraten können!

Lothar Heffter.

H. POINCARÉ. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.** T. III: Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques. 414 S. gr. °. Paris 1899, Gauthier-Villars.*

Der das Werk abschliessende dritte Band eröffnet (Kap. XXII—XXVI) mit einer Theorie und den Anwendungen der sog. „Integralvarianten", einer rein mathematischen Theorie, welche schon in der dem Werke zu grunde liegenden Preisarbeit eines der ersten Kapitel gebildet hatte, und deren Ziel Stabilitätsbetrachtungen sind.

Um solche Ausdrücke für ein gegebenes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, \ldots n)$$

zu bilden, werden hauptsächlich p-fache Integrale ($p = 1, 2, \ldots n$) der Form

$$\int^{(p)} \Sigma A_{i_1, \ldots i_p} dx_{i_1} \ldots dx_{i_p}$$

betrachtet, wo die A Funktionen von $x_1, \ldots x_n$ sind, die Summe über die Kombinationen, ohne Wiederholung, $i_1, \ldots i_p$ zu p aus den Zahlen $1, 2, \ldots n$ auszudehnen und die Integration über irgend ein p-fach ausgedehntes Gebiet zu erstrecken ist, das mit t den Differentialgleichungen gemäss sich ändert. Wird der Ausdruck hierbei von t unabhängig, so heisst er „Integralinvariante". Die einfachsten solcher sind bei den dynamischen Systemen:

$$\int^{(n)} M dx_1 \ldots dx_n,$$

wenn M der Multiplikatorgleichung

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0$$

genügt. Das mathematisch Interessanteste — und auch in der Preisschrift nur erst teilweise erwähnt — ist der enge Zusammenhang zwischen diesen Integralinvarianten und den Integralen, sowohl der obigen Differentialgleichungen selbst, als ihrer „ersten Variationsgleichungen", welche aus ihnen durch Variation einer Lösung x_i, unter Beibehaltung nur der ersten Potenzen der Variationen ξ_i, für die ξ_i hervorgehen, und ferner ihre Beziehung zu den „charakteristischen Exponenten α_k" der letzten Gleichungen, wenn die x_i eine periodische Lösung bildeten (vergl. die Besprechung des I. Bandes). Leider ist der hier vorhandene Zusammenhang mit den Lieschen Betrachtungsweisen nicht berührt.

Herr Poincaré legt das Hauptgewicht auf die Anwendungen. Nach Betrachtungen über die Existenzbedingungen von Integralinvarianten im Fall periodischer Lösungen u. s. w. behandelt Kapitel 26 die Poissonsche Stabilität: ob nämlich das Körpersystem nach Ablauf von endlichen Zeitintervallen immer wieder seiner ursprünglichen Lage beliebig nahe komme?

* Vergl. die Besprechungen der beiden ersten Bände dieser Zeitschrift, Band 38, S. 58 und Band 41, S. 148.

Bei dieser Fragestellung sind also z. B. in den Reihenentwickelungen für die grossen Axen auch Glieder der Form $t \sin(\alpha t + \beta)$ zugelassen. An der Betrachtung von endlichen positiven Integralinvarianten bestätigt der Verfasser, dass diese Art der Stabilität für den früher betrachteten speziellen Fall des Dreikörperproblems (nicht aber für den allgemeinen Fall) im Allgemeinen, d. h. bei einem Umfang von Anfangswerten der Variabeln, gegen den die ausgeschlossenen Werte sich verhalten wie die rationalen Zahlen zu den reellen, wirklich vorhanden ist.

Mit Kapitel XXVII tritt der Band wieder in eine vollständigere Diskussion des Verlaufs derjenigen Trajektorien ein, welche früher als „asymptotische Lösungen" bezeichnet worden waren. Besonders wichtig ist die Existenz (Kapitel XXVIII) einer zweiten Art von periodischen Lösungen, welche sich um die zu grunde gelegte periodische Lösung von Periode T herumgruppieren (siehe ihre Bildung in Kapitel XXX): ihre Periode wird erst ein ganzes Vielfaches von T, und wenn der kleine Parameter μ des Problems, nach dem die Entwickelungen gehen, abnimmt, verschwinden diese Lösungen nach und nach; in jedem noch so kleinen Stück eines gewissen Gebietes der Variabeln existieren sie unendlich dicht. Das letzte Kapitel XXXIII behandelt, an XXVII anschliessend, den Nachweis gewisser „doppelt-asymptotischer" Lösungen, die sich nämlich sowohl für $t = +\infty$ als für $t = -\infty$ an die periodische Ausgangslösung anschmiegen; Kapitel XXXII aber bespricht einige Schwierigkeiten, die bei der Ausdehnung auf das allgemeine Problem der drei Körper dadurch entstehen, dass auch periodische Lösungen mit zu betrachten wären, bei denen die beiden Planeten periodisch einander sehr nahe kämen.

Noch sind Kapitel XXIX und XXXI hervorzuheben mit ihren Betrachtungen über den Stabilitätscharakter der periodischen Lösungen beider Arten gegenüber der Frage nach Maximum oder Minimum des Integrals der kleinsten Wirkung, interessante mathematische Untersuchungen über Variation, bei denen man nur wieder die Beziehung zur Litteratur vermisst. Von ganz besonderem Interesse ist hierbei die Betrachtung der von G. H. Darwin im 21. Bande der Acta Mathem. als Resultate von numerischen Studien gegebenen merkwürdigen periodischen Bahnen, indem sie Herr Poincaré seiner Theorie der periodischen Lösungen der beiden Arten unter Ausblicken auf die analytischen Übergänge einzuordnen versteht. Hier wird man am besten beim Studium des im allgemeinen wenig übersichtlich geschriebenen Bandes anknüpfen.

Zweifellos konnten viele der vom Verfasser aufgeworfenen Fragen nicht vollständig erledigt werden. Aber in einem so dunkeln Gebiete, wo es sich um den ganzen Charakter der, wie man heute weiss, unendlich komplizierten Bahnverhältnisse in dem Problem der drei Körper handelt, ist jeder theoretische Einblick, ja jede neue Fragestellung und jeder neue Ansatz zur Beantwortung, an denen das Werk reich ist, vom höchsten Interesse. Und so muss dieses grosse Werk die ernste Forschung theoretisch und praktisch vielseitig beeinflussen.

M. Noether.

Darboux, Gaston. **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Tome I. 383 S. gr. 8°. Paris 1898, Gauthier-Villars et Fils.

Die Verallgemeinerung der Cartesiusschen Raumkoordinaten in rechtwinklige krummlinige Koordinaten, bei welchen das Koordinatensystem von drei Flächenscharen gebildet wird, die sich überall rechtwinklig schneiden, führt zur Aufsuchung der dreifach orthogonalen Systeme von Flächen, deren einzelne Familien von Herrn Darboux schon früher als Laméschee Familien bezeichnet sind. Der Bestimmung dieser Systeme, die somit ein grosses Interesse darbieten, ist, seit Bouquet im Jahre 1846 (Liouvilles Journal Bd. 11, pag. 446) den Beweis führte, dass nicht jede beliebig gestaltete Fläche einem solchen Systeme angehören kann, eine grosse Zahl von Arbeiten gewidmet und zwar schuf Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications" (Paris 1859) die Grundlage für alle weiteren Arbeiten. Am eingehendsten hat sich wohl Herr Darboux mit der Frage beschäftigt und keinen besseren Verfasser einer zusammenhängenden Behandlung konnte man sich für dieselbe wünschen, als den Verfasser der klassischen „Leçons sur la théorie générale des surfaces".

Aus dem reichen Inhalte des Werkes, das der Natur der Sache nach vieles einzelne eingehend behandelt, sei nur einiges Hauptsächliche herausgenommen. Der erste uns jetzt vorliegende Band geht von den drei Gleichungen

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} = 0; \quad i, k = 1, 2, 3; \quad i \neq k$$

aus, denen die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der drei Familien genügen müssen, die sich gegenseitig unter rechtem Winkel schneiden und zwar nach dem Dupinschen Satze längs ihrer Krümmungslinien. Ist die allgemeine Lösung dieser Gleichungen auch bis jetzt nicht gefunden, so ist doch bei der grossen Zahl von besonderen Ergebnissen eine zusammenfassende Behandlung mit Freude zu begrüssen. Die drei Gleichungen lassen sich zunächst auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung zurückführen, die zuerst von Cayley aufgestellt wurde und die man in der Form einer sehr einfachen Determinante sechster Ordnung schreiben kann.

Die einfachsten Arten der dreifach orthogonalen Systeme sind diejenigen, welche als eine Schar eine solche von Ebenen enthalten. Um alle orthogonalen Systeme zu erhalten, deren eine Familie aus Ebenen besteht, lässt man eine bewegliche Ebene auf einer abwickelbaren Fläche rollen. Zeichnet man in der Anfangslage der Ebene zwei beliebige orthogonale Scharen von Linien, so erzeugt jede bei der Bewegung der Ebene eine Flächenschar des orthogonalen Systems. Die orthogonalen Systeme mit einer Schar von Kugeln ergeben sich aus den vorigen durch Inversion, da eine Schar von Kugeln, die einen Punkt gemeinsam haben, durch Inversion von diesem Punkte aus in eine Schar von Ebenen übergeführt wird, aus einer solchen Schar von Kugeln aber alle gleichartigen Scharen (nach der Benennung von V. Rouquet diejenigen, für welche die Lösung von denselben Differentialgleichungen in X, Y, Z abhängt) ohne Integration ergeben.

Eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung der Laméschen Familien ist die Gleichung erster Ordnung

$$H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} = \varphi_0(u)(x^2+y^2+z^2) + \varphi_1(u)x + \varphi_2(u)y + \varphi_3(u)z + \varphi_4(u),$$

von welcher die Schar paralleler Ebenen und der daraus durch Inversion hervorgehenden spezielle Fälle sind. Von dieser Gleichung wird die allgemeine Lösung gegeben, zuvor aber der besondere Fall behandelt, daß die fünf Funktionen φ_i sich nur durch konstante Faktoren unterscheiden. In diesem Falle lassen sich die entsprechenden Laméschen Familien besonders leicht konstruieren. Alle Kreise, die auf einer beliebigen Fläche und einer festen Kugel senkrecht stehen, sind normal zu den Flächen, die die gesuchte Familie bilden.

Es werden sodann verschiedene Formen der partiellen Differentialgleichung aufgestellt, unter denen besonders diejenige weitere Anwendung findet, bei welcher die Gleichung der Flächenschar von der Form $\varphi(x, y, z, u)$ ist. Unter Zugrundelegung derselben werden alle Laméschen Familien gesucht, die aus Flächen zweiten Grades bestehen.

Die in den vorhergehenden Kapiteln durchgeführten Methoden werden auf orthogonale Systeme mit n-Variabeln ausgedehnt, aus denen sich auch die Krümmungslinien einer grossen Zahl von Flächen dritter Ordnung finden lassen.

Auch das zweite Buch „die krummlinigen Koordinaten“ beginnt mit dem Studium der orthogonalen Systeme in mehrdimensionalen Räumen. Die Formeln, welche Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes“ gegeben hat, werden auf n Variabeln ausgedehnt und der Herr Verfasser gelangt zu Ergebnissen, die er teilweise bereits in den Jahren 1866 und 1878 in den Annales de l'Ecole Normale gegeben hat. Im Falle des gewöhnlichen Raumes wird eine andere Methode angewendet, die sich auf die Bewegung eines beweglichen rechtwinkligen Trieders gründet, der ja auch in seiner allgemeinen Flächentheorie ein breiter Raum gewidmet ist. Die erhaltenen Formeln werden auf die Aufsuchung derjenigen Laméschen Familien angewendet, die sich in unendlich kleine Quadrate teilen lassen. Die entstehenden Bedingungsgleichungen geben zur Aufstellung dreier typischen Fälle Anlass, von denen der zweite ausgeschieden werden muss, weil er keine Lösung des Problems liefert. Der erste Fall giebt uns nur bekannte Scharen aus Ebenen, Kugeln, Kegeln und Rotationsflächen zusammengesetzt, und vom dritten werden einige Spezialisierungen eingehend behandelt und darauf die isothermen Laméschen Systeme sowie einige andere, die in der Theorie der Wärme vorkommen, bestimmt.

H. Willgrod.

Chappuis, James et Alphonse Berget, **Cours de Physique à l'usage des candidats aux écoles spéciales.** Paris 1898, Gauthier-Villars et Fils. gr. 8°. 697 S.

Das Werk, welches nach der Ankündigung denen zum Studium dienen soll, die sich dem Aufnahmeexamen für die Ecoles Normale und Polytechnique unterziehen wollen, ist klar geschrieben, das Papier und der Druck sind, wie bei allen Büchern des angesehenen französischen Verlags, recht gut und Abbildungen unterstützen in grosser Zahl und guter Ausführung das Verständnis. Der Inhalt beschränkt sich nicht rein auf Experimentalphysik, doch tritt die mathematische Behandlung ausser in der Optik in wünschenswerter Weise zurück. Allerdings würde man in einem solchen Buche bei uns wohl die Anwendung der Differential- und Integralrechnung vermieden haben. In dem Abschnitte über Mechanik (225 S.) vermissen wir die Behandlung des Parallelogramms der Kräfte und der einfachen Maschinen, deren Gesetze als bekannt vorausgesetzt werden. An die Mechanik schliesst sich unmittelbar die Lehre von der Wärme (239 S.), was für eine eingehende Behandlung wohl nicht zu empfehlen sein dürfte, wenn auch im Schulunterrichte vielfach diese Reihenfolge gewählt wird. Diesen beiden ersten Teilen gegenüber treten die übrigen an Umfang bedeutend zurück. In der Optik (163 S.), bei welcher die Rechnung naturgemäss mehr im Vordergrunde steht, sind Interferenz und Polarisation nicht mit behandelt. Von der Elektrizitätslehre (39 S.) ist nur die Elektrostatik in Umrissen durchgeführt und die Lehre vom Magnetismus (19 S.) auf das Wesentlichste beschränkt. Das Kapitel der Akustik fehlt ganz, so dass von einer gleichmässigen Behandlung der einzelnen Teile der Physik nicht die Rede sein kann.

H. Willgrod.

Witz, M. Aimé. **Cours supérieur de manipulations de physique.** Deuxième édition revue et augmentée. Paris 1897, Gauthier-Villars et Fils. 8°. XVIII u. 472 S.

Das Werk verfolgt denselben Zweck wie bei uns der bekannte „Kohlrausch“, doch unterscheidet es sich von ihm in mannigfacher Weise. Der mathematische Apparat ist ein geringerer und so ist besonders in Magnetismus und Elektrizität die Zahl der Versuchsreihen eine viel kleinere, daneben ist der Beschreibung der Apparate ein breiter Raum gewährt. Jede Versuchsreihe gliedert sich übersichtlich auch äusserlich getrennt in Theorie derselben, Beschreibung der zur Anwendung kommenden Apparate, des Versuchsverfahrens und Zahlenangabe der Resultate, die vielfach klassischen Beispielen entnommen sind. Den „cours de manipulations de physique“ der ersten Auflage hat der Herr Verfasser in der zweiten in einen cours élémentaire und einen cours supérieur zerlegt, von denen der erste 37 einfache Bestimmungen des Gewichtes, der Dichtigkeit, von Widerständen u. s. w. enthält, während der zweite uns vorliegende in 74 Nummern diejenigen

Versuche umfasst, die eine grössere Geschicklichkeit erfordern oder bei denen die Theorie schwieriger ist. Da die Darstellungsweise eine leicht verständliche und ausführliche ist, kann das Buch mit grossem Nutzen im physikalischen Praktikum gebraucht werden.

H. Willgrod.

Fleming, J. A. **Le laboratoire d'électricité.** Traduit de l'anglais sur la 2^e^ édition et augmenté d'un appendice par J. L. Routin. Paris 1898, Gauthier-Villars et Fils. 8°. 152 S. u. 3 Taf.

Bei der hervorragenden Bedeutung der Elektrotechnik in neuerer Zeit macht sich das Bedürfnis nach einer besonderen Anleitung zum praktischen Arbeiten in diesem Gebiete geltend. Für die grundlegenden Bestimmungen dient die Schrift Flemings, die uns hier in einer französischen Übersetzung vorliegt. Die Kenntnis des theoretischen Teiles der Elektrizitätslehre wird beim Gebrauche des Buches vorausgesetzt. In ihm werden unter anderem Bestimmungen der Intensität eines magnetischen Feldes, von Widerständen, Prüfung von Ampèremetern, Voltmetern, Bogenlampen und Kraftleistungen behandelt. In einem Anhange sind vom Übersetzer noch einige Methoden hinzugefügt und zwei graphische Korrektionstafeln gezeichnet. Den einzelnen Versuchsreihen ist ein Verzeichnis der anzuwendenden Apparate vorausgeschickt und ein Schema zur Eintragung der beobachteten bez. berechneten Grössen beigegeben.

H. Willgrod.

Andrade, Jules. **Leçons de mécanique physique.** Paris 1898, Société d'éditions scientifiques. gr. 8°. IX u. 413 S.

Um die Mechanik „dem unnützen Trägheitsvermögen der Körper zu entziehen", benutzt der Verfasser nach dem Vorgange von Reech (Mécanique fondée sur la nature flexible et élastique des corps) die Erfahrungsthatsache, dass ein vollkommen biegsamer und ausdehnbarer Faden um so länger wird, je grösser die darauf wirkende Kraft ist, und misst die Grösse der Kraft nach der Grösse der Verlängerung. Zur Definition der Masse dient der Satz: Stossen zwei Körper mit den Geschwindigkeiten v und v' (kurz vor dem Stosse) zusammen und sind $v + \Delta v$, $v' + \Delta v'$ ihre Geschwindigkeiten kurz nach dem Stosse, so giebt es zwei positive Zahlen m und m', welche die Gleichung $mv + m'v' = 0$ erfüllen. m und m' sind die Massen der Körper. Nachdem im ersten Teile die „klassische Schule" der Mechanik (Kepler, Galiläi, Newton, Gauss u. a.) und der Gegensatz zu den Anschauungen des Verfassers dargestellt ist, werden im zweiten Deformationen bez. Dilatation, Elastizität, Vibration, Wirbelfäden und im letzten die Theorie gerader Balken auf Stützpunkten behandelt. Einige Noten, unter anderem auch über Statik im nicht-euklidischen Raum machen den Schluss.

Das letzte Kapitel ist denjenigen Systemen gewidmet, für welche eine der Familien aus Flächen konstanten Krümmungsmasses besteht.

H. Willgrod.

ye. **Die Geometrie der Lage** (Vorträge). Erste Abteilung mit 90 Abbildungen im Text. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig 1899, Baumgärtners Buchhandlung.

Reyes Vorlesungen über die Geometrie der Lage schliessen sich in rdiger Weise den älteren klassischen Schriften über synthetische Geometrie und wir sehen daher mit Vergnügen dieses Buch wie einen alten, lieben kannten in vierter Auflage wiederkehren. Wer von Staudts Werk rchgearbeitet hat, weiss das Verdienst zu schätzen, welches sich vor em Menschenalter Reye erwarb als er in gefälliger und eleganter Form l mit weiser Beschränkung das vortrug, was bei von Staudt oft schwer l dunkel erscheint. Seitdem ist das Wissensgebiet gewachsen und das vissen für eine strenge Beweisführung ist geschärft worden. Dem entícht es, dass die vierte Auflage des Buches den doppelten Umfang haben d wie die erste. Auch die wissenschaftliche Begründung hat sich vertieft.

Da das Buch in den älteren Auflagen bekannt und in jedermanns ıd ist, begnügen wir uns auf das hinzuweisen, was in der ersten Abung dieser vierten Auflage im Vergleiche mit der dritten Auflage neu zugekommen ist.

Vermehrt sind die Litteraturangaben, so dass der Leser aus denselben grossen ganzen den Anschluss an die älteren Hauptwerke dieser Disin finden kann. Auch sind bei den Erklärungen öfter als früher die drücke, welche andere Autoren gebrauchen, nebenbei erwähnt.

Die ersten elf Vorträge sind — bis auf einige kleinere Einschaltungen denen der dritten Auflage gleich. Im zwölften Vortrage werden die olutionen und ihre metrischen Beziehungen zusammengestellt. Letztere in etwas anderer Weise behandelt wie früher und dabei ist die Rechtkelinvolution an die Spitze gestellt.

Ganz neu ist der 14., 15. und 16. Vortrag. Der 14. behandelt konle Kegelschnitte. In diesem Kapitel werden die von Chasles (1843) ffentlichten Sätze über ähnliche oder — wie Reye sehr treffend sagt über „vergleichbare" Kegelschnittbogen bewiesen. Im 15. Abschnitte den die Normalen und Krümmungskreise der Kegelschnitte in synischer Weise besprochen. Im 16. Vortrage wird das Büschel von Kegelitten untersucht, welches dieselbe Durchmesserinvolution hat (konzenche homothetische Kegelschnitte). Parabeln werden als homothetisch niert, wenn sie koaxial sind und wenn jeder Durchmesser in Bezug alle Parabeln denselben Pol hat. Für solche Parabeln wird gezeigt, s sie kongruent sind. Die letzten drei Vorträge des Buches sind denen dritten Auflage gleich.

Die Zahl der Konstruktionsaufgaben und Lehrsätze ist von 223 auf ' gestiegen. In Nr. 88 sind eine Reihe von Kurven dritter und vierter nung zusammengestellt, welche schon den Alten bekannt waren und che durch Inversion aus einem Kegelschnitte abgeleitet werden können. Sätze 133 und 134 weisen auf Begriffe hin, welche erst in der zweiten eilung des Buches behandelt werden. Neu sind die letzten Nummern

242—247. Werden die linearen Systeme und Gewebe von Kegeln zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte des Raumes projiziert, so entstehen lineare Systeme und Gewebe von konzentrischen Kegeln zweiter Ordnung. Über diese werden in den erwähnten Schlussnummern einige besonders bemerkenswerte Sätze hervorgehoben.

Die Zahl der Figuren ist ebenfalls vermehrt worden. Immerhin sind deren noch nicht so viele, dass dem Leser das Zeichnen erspart wird. Und das ist gut so. Selbst zeichnen macht wissend in diesen Dingen — und es freut uns, dass der Autor an verschiedenen Stellen auf die Notwendigkeit des Konstruierens hinweist. Wir wünschen schliesslich, dass auch die neue Auflage der Reyeschen Vorträge in gleicher Weise wie die alten den geometrischen Sinn wecken und fördern und der zeichnenden Geometrie viele neue Freunde werben möge.

Chr. Beyel.

Fr. Bussler. **Die Elemente der mathematischen und der astronomischen Geographie.** Für die Prima höherer Lehranstalten. Dresden-Berlin 1897, L. Ehlermann. 71 S. M. 1.50.

„Die Anordnung des Stoffes ist so getroffen, dass zunächst die Verhältnisse der Erde und die durch ihre Axendrehung bewirkte scheinbare Bewegung der Himmelskugel behandelt werden; hieran schliesst sich die Darstellung der astronomischen Koordinatensysteme und Zeitmaße. Ein Rückblick auf die historische Entwickelung der Astronomie führt auf den Gegensatz des Kopernikanischen zum Ptolemäischen System; in dem ersteren, durch Keplers Gesetze vervollständigt und durch Newtons Gravitationsgesetz erklärt, wird die richtige Darstellung der Bewegungen der Himmelskörper erkannt und damit das Fundament für die moderne Astronomie gefunden. Es folgt die Beschreibung unseres Sonnensystems, also des Zentralkörpers selbst, seiner Planeten mit ihren Monden, der Kometen und Meteorite; den Schluss bildet die Erörterung des Wenigen, was wir einigermaßen sicher über die Fixsternwelt wissen.“

„Eine Anzahl von Aufgaben mit kurz angedeuteter Lösung ist an geeigneter Stelle in den Text eingeflochten, um ein vollständig klares Verständnis zu gewinnen, und historische Notizen, die bis zur Gegenwart reichen, sind vielfach beigefügt.“

Den Fachgenossen, welche ihren Schülern die astronomischen Grundbegriffe und eine gedrängte Übersicht über das Wissenswerte aus der Astronomie mitgeben wollen, kann das Buch empfohlen werden.

E. Jahnke.

A. Richter. **Arithmetische Aufgaben** für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig 1898, B. G. Teubner. 149 S.

Die Ausarbeitung der Sammlung ist, wie der Verfasser im Vorwort mitteilt, auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung unternommen worden, welche

„die Anwendungen der Mathematik auf die Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlichen Naturvorgänge“ in den jetzt bestehenden Büchern nicht genügend berücksichtigt glaubt. Diese Anwendungen sind, wie üblich, der Geometrie, Physik, Chemie und mathematischen Geographie entnommen. Insofern die Sammlung auf diesen Gebieten neues Übungsmaterial heranschafft, ist ihr Wert durchaus anzuerkennen, und kann sie den Fachgenossen nur warm empfohlen werden. Wenn aber der Verfasser im Vorwort der Meinung Ausdruck geben will, als ob seine Sammlung die Anwendungen stärker berücksichtige als längst bestehende und wohl bewährte Sammlungen, so vermag Referent einer solchen Behauptung nicht völlig zuzustimmen. Andererseits ist darauf hinzuweisen, dass die rein algebraischen Aufgaben, an denen doch die Operationen und Methoden einzuüben sind, nicht überall (vergl. z. B. quadratische Gleichungen) in hinreichender Menge vorhanden sind, und ferner dass die Massenverteilung, wenn dieser Ausdruck erlaubt ist, eine recht ungleiche ist. Während sich in den Kapiteln über Gleichungen ersten und zweiten Grades ausreichendes Übungsmaterial vorfindet, sind u. a. die Kapitel über Zinseszinsrechnung und Gleichungen dritten Grades recht spärlich bedacht. Es darf wohl dem Wunsch Ausdruck gegeben werden, dass diesen Übelständen bei einer zweiten Auflage der, wie schon hervorgehoben, in vieler Hinsicht wertvollen Sammlung abgeholfen werde.

Die Resultate sind in einem besonderen Heft erschienen, das bei den Anwendungen zum Teil ausführliche Erläuterungen, auch Zeichnungen enthält; dasselbe ist nicht für Schüler bestimmt und wird nur an Lehrer gesandt.

E. Jahnke.

B. Féaux. **Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie.** Siebente den Lehrplänen von 1892 entsprechend verbesserte Auflage, besorgt von F. Busch. Paderborn 1898, F. Schöningh. S. 1—98, 99—187. M. 1.50.

Die neue Auflage des vorliegenden Buches ist durch eine eingehendere Behandlung der Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks und einen vorbereitenden Lehrgang in der Körperlehre erweitert worden. Ausserdem ist nach dem Vorgange von Martus und Holzmüller eine Anleitung zum Zeichnen in der Parallelprojektion eingeschaltet worden.

Der erste Teil, welcher die ebene Trigonometrie behandelt, zeichnet sich durch grosse Übersichtlichkeit aus, die u. a. durch eine Reihe von Formeltabellen erzielt wird. Weiter verdient hervorgehoben zu werden, dass die einzelnen Fundamentalaufgaben je an einem Beispiel erläutert und die numerische Rechnung vollständig mitgeteilt wird. Besonders wertvoll ist die aus dem Lehrbuch von Lieber-Lühmann übernommene Tabelle von 36 vollständig berechneten schiefwinkligen Dreiecken zu Zahlenbeispielen für die Dreiecksaufgaben.

Nicht einverstanden ist Referent mit der Erörterung des allgemeinen Funktionsbegriffs, wie sie im ersten Paragraphen gegeben wird. Das Verständnis der Schüler für die trigonometrischen Funktionen dürfte wohl kaum Schaden leiden, wenn die daselbst aufgestellte Definition einer Funktion unterdrückt wird. Der erste Paragraph giebt noch Anlass zu dem zweiten Wunsche, dass die Ausdrucksweise an verschiedenen Stellen knapper gefasst werden möchte.

Gegenstand des zweiten Teiles ist die elementare Stereometrie. Hier verdienen volles Lob die Figuren, welche ausserordentlich anschaulich gezeichnet sind.

Das Buch kann den Fachgenossen warm empfohlen werden.

E. Jahnke.

O. Bürklen. **Lehrbuch der ebenen Trigonometrie** mit Beispielen und 280 Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Heilbronn a. N. 1897, Schröder. 122 S. M. 1.50.

„Der Bestimmung des Buches entsprechend hat der Verfasser sein Hauptziel in stufenmässiger Entwickelung, klarer Darlegung, planmäßiger Übung und übersichtlicher Anordnung gesucht" und, wie sogleich hinzugefügt werden mag, auch gefunden. Es ist ein Büchlein entstanden, das in seiner Art ausgezeichnet genannt zu werden verdient.

Die goniometrischen Funktionen werden zuerst am rechtwinkligen Dreieck für spitze Winkel erklärt und durch Berechnung dieses und des gleichschenkligen Dreicks, des regelmässigen Vielecks eingeübt; dann erst wird zu der allgemeinen Auffassung der Funktionen geschritten. Bei der Ableitung der ersten Beziehung am schiefwinkligen Dreieck geht der Verfasser von der Figur aus; um die übrigen zu gewinnen, wird entweder der geometrische oder der analytische Weg eingeschlagen, je nachdem der abzuleitende Satz mehr jenen oder diesen Charakter trägt.

Bemerkenswert ist ferner, dass die trigonometrische Analysis, sowie die graphische Lösung goniometrischer Gleichungen genügende Berücksichtigung gefunden hat.

An Übungsstoff hat der Verfasser soviel gegeben, als zur Einübung des Lehrstoffes notwendig ist, ohne etwa die Benutzung grösserer Aufgabensammlungen seitens des Lehrers überflüssig machen zu wollen. Hierbei mag noch die zweckmässige Anordnung der Rechnung und die Angabe von Rechenvorteilen hervorgehoben werden.

Endlich möchte Referent noch die Knappheit im Ausdruck lobend erwähnen, welche das Büchlein allenthalben aufweist. Gleich die ersten Kapitel legen hiervon Zeugnis ab. Referent kann dem Verfasser darin nur zustimmen, dass er sich entschlossen hat, Neubildungen, wie sie schon vielfach im Gebrauch sind, wie Inkreis, Ankreis, Gegenkathete, Ankathete u. s. w., aufzunehmen, da sie die für den Unterricht so wünschenswerte Knappheit im Ausdruck wesentlich zu steigern gestatten.

Das Büchlein dürfte sich ganz besonders für Gymnasien und Realschulen sowie auch zum Selbstunterricht eignen.

E. Jahnke.

F. v. Lühmann, Übungsbuch für den Unterricht in der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie. Berlin, Simion. 81 S. M. 1.60.

Der als Herausgeber der wertvollen Sammlung trigonometrischer Aufgaben bekannte Verfasser bietet, was die trigonometrischen Aufgaben des vorliegenden Buches anbetrifft, einen kleinen Auszug aus den betreffenden Abschnitten der genannten grösseren Sammlung. Dieselben sind indessen nicht, wie dort, sachlich, sondern methodisch geordnet, sodass die Aufgaben derselben Gruppe an die Leistungsfähigkeit der Schüler ungefähr gleiche Anforderungen stellen.

In Betreff der Goniometrie enthält das Buch für jede Definition, jede Regel, jede Formel genügenden Übungsstoff. Doch ist zu beachten, wie der Verfasser im Vorwort richtig ausführt, dass die Goniometrie im Schulunterricht nur Mittel zum Zweck sein darf, dass daher für sie eine ausreichende Anzahl recht leichter Übungsaufgaben genügt.

Hervorgehoben zu werden verdient das Kapitel der Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen. Hier schlägt der Verfasser zur Lösung eine goniometrische Behandlung vor, welche durch Einführung eines Hilfswinkels die Gleichung in eine reciproke verwandelt. Dieses Verfahren bietet in der That häufig den Vorteil, dass der Schüler weniger Logarithmen aufzuschlagen braucht, als wenn er die algebraische Lösung logarithmisch berechnen will.

Am bemerkenswertesten scheint dem Referenten der letzte Abschnitt des Buches zu sein. Er enthält eine Anleitung für die Determination trigonometrischer Aufgaben. Es ist dies ein Gegenstand, für den bisher nur wenig Übungsmaterial vorliegt, wohl aus dem Grunde, weil die Determination meistens auf bedeutende Schwierigkeiten führt. Und doch ist dieselbe ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, um die Schüler zum logischen Denken anzulernen, bezw. ihre Denkfähigkeit zu erproben.

E. Jahnke.

H. Fenkner, **Arithmetische Aufgaben.** Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Ausgabe A. Vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. Teil I: Pensum der Unter-Tertia, Ober-Tertia und Untersekunda. Dritte, mit besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Abschlussprüfung umgearbeitete Auflage. Berlin 1898, O. Salle. M. 2.20.

Die erste Auflage dieser Sammlung ist bereits an dieser Stelle besprochen worden unter Anerkennung der Besonderheiten, welche sie vor den meisten der damals vorliegenden Sammlungen auszeichneten. Sie erschien nämlich zu einer Zeit, wo die für die Tertia und Sekunda berechneten Sammlungen nur wenige Anwendungen auf Geometrie und Physik brachten. Seitdem und seit dem Erscheinen der wertvollen Wrobelschen Sammlung ist eine Sturmflut von Aufgabensammlungen hereingebrochen, die sich in der Verwertung neuer Anwendungsgebiete zu überbieten suchen.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass infolge der neuen Lehrpläne die Abschnitte über die arithmetischen und geometrischen Reihen sowie Zinseszins- und Rentenrechnung fortgefallen sind. Dafür sind jedoch fast alle übrigen Kapitel um eine grössere Anzahl von Aufgaben bereichert worden. Im besonderen haben die Abschnitte über die quadratischen Gleichungen einen weiteren Zuwachs an solchen Aufgaben erfahren, die für die Abschlussprüfung geeignet sein dürften.

E. Jahnke.

Bibliographie.

Periodische Schriften.

American Journal of Mathematics. Vol. XXI. Nr. 4. Baltimore, John Hopkins University. Vol. XXI complete M. 22.

Annalen der kaiserl. Universitäts-Sternwarte in Strassburg. 2. Bd. Karlsruhe, Braun. M. 20.

Annals of Mathematics. Vol XII. Nr. 6. Charlottesville Va., University of Virginia. Vol. XII complete M. 10.

Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. Mathem. Tl. 1899. III. und IV. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3.20.

Ephemeriden, astronomisch-nautische, für das Jahr 1901. Über Veranlassung der Marinesektion des kaiserl. und königl. Reichs-Kriegsministeriums herausgegeben von dem kaiserl. königl. astronomisch-meteorolog. Observatorium in Triest. 14. Jahrg. Triest, Schimpff. kart. M. 2.70.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1898. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 54. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 26.

Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1902 zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Herausgegeben vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1.50.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 28. Bd. Jahrg. 1897. 2. Heft. Berlin, Reimer. M. 6.

Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogtum Baden, mit den Ergebnissen d. meteorologischen Beobachtungen und der Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein und an seinen grösseren Nebenflüssen für das Jahr 1898. Karlsruhe, Braun. M. 6.

Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. 7. Bd. 2. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times. Ed. by D. Biddle. Vol. 71. London, Hodgson. Sh. 6. 6.

Opgaven, wiskundige, met de oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel VII stuk 7 en VIII stuk 1. Amsterdam.

Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse I. Abt. 107. Bd. 8—10. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 9.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 34. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. M. 2.

—— Dasselbe. I. Abt. 108. Bd. 1.—4. Heft. Ebenda. M. 3. 40.

—— Dasselbe. Abt. IIa. 108. Bd. 1. und 2. Heft. Ebenda. M. 3. 10.

—— Dasselbe. Abt. IIb. 108. Bd. 1.—3. Heft. Ebenda. M. 1. 90.

Zeitschrift, physikalische. Herausgegeben von E. Riecke und H. Th. Simon. 1. Jahrg. Oktober 1899 bis September 1900. 52 Nummern. Leipzig, Hirzel. Vierteljährlich M. 5.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Unterricht.

Bertelli, Timoteo, Ricerche storiche sulla pila di Volta. Monza, Artigianelli. (Estratto.)

Bouché-Leclerq, A., L'astrologie grecque. Paris. Fr. 20.

Braunmühl, A. v., Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 1. Teil. Von den ältesten Zeiten bis z. Erfindung d. Logarithmen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 9.

Contini, D. Attilio, Da Volta a Marconi. Conferenza. Messina, Trimarchi.

Galilei Galileo, Delle meccaniche lette in Padova l'anno 1594, per la prima volta pubblicate ed illustrate da Antonio Favaro. Venezia, Ferrari. (Estr.)

Gauss, Carl Friedr., und Bolyai, Wolfg., Briefwechsel. Herausgegeben von Frz. Schmidt und Paul Stäckel. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 16.

Gundermann, Ghold, Die Zahlzeichen. Programm. Giessen, Ricker. M. 2.

Kohlrausch, F., Gustav Wiedemann. Nachruf. (Aus: Verhandlungen d. deutschen physikal. Gesellsch.) Leipzig, Barth. M. —. 60.

Lacour, P., Historisk Mathematik. 2te, gennemsete udgave. (In 10 hefter). Kjöbenhavn. Heft 6—8. M. 2. 40.

Lalande, P. A., Quid de mathematica vel rationali vel naturali senserit Baconus Verulamius. Parisiis. Fr. 7. 50.

Lampe, E., Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899. Nebst Aktenstücken zum Leben von Siegfried Aronhold, weil. Professor d. Mathematik (1860 bis 1883) an d. königl. technischen Hochschule zu Berlin. Mit seinem Bildnisse. Ein Gedenkblatt z. 100jähr. Jubelfeier der königl. technischen Hochschule zu Berlin. Berlin, Ernst & Sohn. M. 1. 60.

Martini, Tito, Intorno alle scoperte di Allessandro Volta. Discorso. (Estr.) Venezia, Ferrari.

Morgan, A. de, On the Study and Difficulties of Mathematics. New edition. Chicago, The Open Court Publishing Co. $ 1. 25.

Papperitz, Erwin, Die Mathematik an d. deutschen techn. Hochschulen. Beitrag zur Beurteilung einer schwebenden Frage des höheren Unterrichtswesens. Leipzig, Veit & Co. M. 1. 50.

Righi, Aug., Volta e la pila. Lettura (Estr.). Como, Ostinelli di Bertolini Nani e Co.

Reine Mathematik.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Übersetzt von Max Lukat. 3. (Schluss-)Lieferg. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. (kompl. M. 22. 60.)

Briggs, W., Second Stage Mathematics. 2nd ed. London, Clive. Sh. 3. 6.

Burnside, W. S., and Panton, A. W., Theory of Equations. Vol. 1. 4. edit. London, Longmans. Sh 2. 6.

Deter, Johs., Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten. Neu herausgegeben von Arndt, Erdm. 4. Aufl. Berlin, Rockenstein. M. — 90, geb. M. 1. 25.

—— Repetitorium der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. Ebenda. M. 1. 60, geb. M. 2.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen 1. Teil. Reine Mathematik. Herausgegeben von H. Burkhardt und W. Fr. Meyer. 2. Bd. Analysis. Redigiert von H. Burkhardt. 1. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. 80.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. I. Bd. 1. Teil 3. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3. 80.

Eichhorn, A., Sammlung von mathematischen Formeln u. Regeln zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Lüneburg, Herold & Wahlstab. M. —. 50.

Fattor, L., Sulla serie di Fibonacci: Nota. Venezia, Visentini.

Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. (D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. — E. Wiechert: Grundlagen der Elektrodynamik.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 6.

Fransén, A. E., Om Dirichlets problem for eqvationen $\Delta u = 0$ och liknande upgifter for allmännare eqvationer. Upsala. M. 2.

Gauss, F. G., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel. Ster.-Dr. 3. Aufl. Halle, Strien. M. —. 60.

—— Dasselbe für Dezimalteilung des Quadranten. 2. Aufl. Ebenda. M. —. 80.

Gerlach, Rud., Die Metrik in projektivischen Koordinaten. Dissertation. Zürich, Rascher. M. 2. 60.

Goering, Wilh., Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises und die Teilung jedes beliebigen Winkels und Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Dresden, Gewerbebuchhandlung. M. 1.

Goettler, Joh., Untersuchungen über den allgemeinen Raumconnex. Programm. München, Kellerer. M. 1.

Haas, Aug., Lehrbuch der Integralrechnung. 2. Tl. Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie Aufgaben aus der Mechanik und Technik. Mit 246 vollstäadig gelösten Aufgaben nebst ausführl. Formelverzeichnis. (Kleyers Encyklopädie.) Stuttgart, Maier. M. 9.

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Siehe unter „Festschrift“.

Hochheim, Frz., Über eine Art der Erzeugung der Kurven dritter Klasse mit einer Doppeltangente. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 60.

Holzmüller, Gust., Elemente der Stereometrie. 1. Teil. Die Lehrsätze und Konstruktionen (Sammlung Schubert, IV). Leipzig, Göschen. geb. M. 5. 40.

Johnston, W. J., An elementary treatise on Analytical Geometry. With numerous examples. London, Clarendon Press. Sh. 6.

Kleyer, A., Aufgabensammlung. 1395—1398. Heft. Stuttgart, Maier. à M. —. 25.

Krahe, A., Apuntes de álgebra superior, adaptados à los programas de las escuelas especiales de ingenieros por J. Salmeron y Garcia. Madrid. Fr. 12. 50.

Kryloff, A. N., Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie für Navigationsschulen (russisch). St. Petersburg. M. 2.

Mansion, P., Einleitung in die Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen. Aus der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1.

Minin, A. P., Aufgabensammlung aus der Differential- und Integralrechnung (russisch). St. Petersburg. M. 2.

Morale, Mich., La rigata razionale d'ordine n dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale, con particolare considerazione al caso di $n = 5$. Palermo, tip. Matematica.

Morale, Mich., Tre metodi per la costruzione di superficie rigate nello spazio a 4 dimensioni. Palermo, tip. Matematica.

Müller, Hub., Die Elemente der ebenen Trigonometrie, mit einer Sammlung von Aufgaben und deren Lösungen. 3. Aufl. Metz, Scriba. M. —.80, geb. M. 1.20.

Pascal, Ern., Repertorio di matematiche superiori: definizioni-formole, teoremi, cenni bibliografici. II (Geometria). Milano, Ulrico Hoepli.

Pund, Otto, Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie. (Sammlung Schubert, VI.) Leipzig, Göschen. geb. M. 4.40.

Riemann, Bernh., Elliptische Funktionen. Vorlesungen. Mit Zusätzen herausgegeben von Herm. Stahl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.60.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst einigen physikal. und astronom. Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. 2. Aufl. Gotha, Thienemann. kart. M. —.60.

Saint-Loup, Note sur les carrés magiques. Besançon, Jacquin.

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Deutsch von Axel Harnack. 2. Aufl. Von Geo. Bohlmann. 2. Bd. Integralrechnung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8. (kompl. M. 18.)

Servant, M., Essai sur les séries divergentes (thèse). Paris, Gauthier-Villars.

Sickenberger, Adf., Leitfaden der elementaren Mathematik. 2. und 3. Teil. München, Ackermann.
2. Planimetrie. 4. Aufl. M. 1.50, kart. M. 1.65.
3. Stereometrie. Trigonometrie. 3. Aufl. M. 1.20, kart. M. 1.35.

Schaposchnikoff, N. A., Lehrgang der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung trigonometrischer Aufgaben (russisch). 7. Aufl. Moskau. M. 2.70.

Schubert, Herm., Elementare Arithmetik und Algebra. (Sammlung Schubert, I.) Leipzig, Göschen. geb. M. 2.80.

Schultz, E., Leitfaden der Planimetrie für gewerbliche Lehranstalten. 1. Teil. 2. Aufl. Essen, Bädeker. geb. M. —.75.

Schuster, M., Geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen Ausgabe A. Für Vollanstalten. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 2.

Sonnet, H., et Frontera, G., Elements de géometrie analytique. 9. éd. Paris, Hachette et Co. Fr. 8.

Spitz, Carl, Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst einer Samml. von 800 Übungsaufgaben zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. (Hierzu eine Beigabe: Erläuternde Tafel mit erklärend. Text von K. Traub.) 10. Aufl. Leipzig, Winter. M. 4.50.

Stolz, Otto, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3. Teil. Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum ersten Teile des Werkes. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

Strömfeld, Gust., Universal-Multiplikationstafel für Multiplikationen mit mehrstelligen Faktoren, zugleich benützbar für Division mit zweistelligem Divisor und vielstelligem Dividendus. Ravensburg, Maier. M. 1.50.

Wilson, F. N., Some mathematical curves and their graphical construction. (3. part of Theoretical and practical graphics.) New York, Macmillan. $ 1.50.

Angewandte Mathematik.

Appell, P., Les mouvements de roulement en dynamique. Avec deux notes de M. Hadamard. Paris, Carré et Naud. Fr. 2.

Boussinesq, J., Aperçu sur la théorie de la bicyclette. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.

— Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.

Coffin, J. H. C., Navigation and nautical astronomy. 7th ed. New York, Van Nostrand & Co. Cloth $3.50

Czuber, Eman., Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Bericht. (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. 7. Bd 2. Heft.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 8

Domogaroff, A., Elemente der Mechanik. 2. Teil. Kinematik (russisch). St. Petersburg.

Fixpunkte, die, des Schweizerischen Präzisionsnivellements. Les repères du nivellement de précision de la Suisse. Herausgegeben durch das eidgenöss. topograph. Bureau. 9. Lieferung. Bern, Schmidt & Francke. M. 3.20

Gerland, Ernst, Kurzer Abriss der darstellenden Geometrie zum Gebrauche in Vorlesungen, beim Unterricht und zum Selbststudium. Leipzig, Engelmann. kart. M. 4

Handwörterbuch der Astronomie. 18. Lieferung. Breslau, Trewendt. M. 3.60

Harrison, Joseph, and Baxandall, G. A., Practical Plane and Solid Geometry for advanced Students, including Graphic Statics. London, Macmillan. Sh. 4.6

Jensen, J. A. D., Grundrids af laeren om ebbe og flod. Kjöbenhavn. M. 1.80

Jordan, W., Hilfstafeln für Tachymetrie. 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. 8

Klinkerfues, W., Theoretische Astronomie. 2. Aufl. Von H. Buchholz. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 34, geb. M. 36

Laussedat, A., Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. (En 2 volumes.) Vol. I: Aperçu historique sur les instruments et les méthodes; la topographie dans tous les temps. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15

Middleton, Reginald E., and Chadwick, Osbert. A treatise on Surveying. In 2 parts. Part 1. London, Spon. Sh. 10.6

Müller, Carl Heinr., Der logarithmische Rechenstab. Stabrechnen für die Oberklassen höherer Schulen. Programm. Frankfurt a. M., Auffahrt. M. 1

Müller, Reinhold, Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 2.50

Perry, J., The steam engine and gas and oil engines; a book for the use of students who have time to make experiments and calculations. London, Macmillan. Sh. 7.6

Pignataro, Giacinto, Piani ed ellissi centrali nei sistemi di forma invariabile. Napoli, Gennaro M. Priore.

Poincaré, H., Cinématique et mécanismes; potentiel et mécanique des fluides. Cours professé à la Sorbonne, rédigé par A. Guillet. Paris, Carré et Naud.

Poretzky, P., Sept lois fondamentales de la logique mathématique. Kazan. M. 3.50

Poterin du Motel, H., Théorie des assurances sur la vie. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 25

Prochaska, Carl, Praktische Anleitung z. Durchführung von Gebietsvermessungen und Terrainaufnahmen bei Anwendung eines tachymetrischen Aufnahmeverfahrens. Wien, Spielhagen & Schurig. kart. M. 4.40

Renz, F., Positionen der Jupitertrabanten. Nach photographischen Aufnahmen berechnet. 1. Teil. Oppositionen 1891—1895. (Aus: Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg.) Leipzig, Voss. M. 9

Robinson, J. L., First book in dynamics. London, Longmans. Sh. 2

—— First book in statics. London, Longmans. Sh. 2

—— First book in statics, with examples. London, Longmans. Sh. 3

Schilling, Fr., Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Halle, Schilling. M. 1.20

Schmehl, Chr., Die Elemente der darstellenden Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Zwei Teile. Giessen, Roth. à M. 2, geb. à M. 2.50, in einem Band M. 4, geb. M. 4.60.

Schubert, Frz., Die darstellende Geometrie an maschinentechnischen Lehranstalten, Gewerbe- und Fachschulen. 2. Teil. Die darstellende Geometrie, einschliesslich der Elemente der Projektionslehre, Schattenlehre, Axonometrie und Perspektive. (Stereometrisches Linearzeichnen.) Mittweida, Polyt. Buchhandlung. geb. M. 5.50.

Schürmann, F., Kleine praktische Geometrie. 16. Aufl. Moers, Spaarmann. M. 1.58.

Stechert, Carl, Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwertung zur Längenbestimmung. (Aus: Archiv der deutschen Seewarte.) Hamburg, Friederichsen & Co. M 3.50.

Struve, Herm., Beobachtungen der Marstrabanten in Washington, Pulkowa und Lick-Observatory. (Aus: Mémoires de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg.) Leipzig, Voss. M. 4.

Tisley, G. W., The mechanics of a cyclone. Columbus, Ind. $ —.25.

Veltmann, W., und Koll, Otto, Formeln der niederen und höheren Mathematik sowie für die Teilung der Grundstücke und für Tracierungsarbeiten. Zum Gebrauch beim geodätischen Studium und in der geodätischen Praxis. 3. Aufl. Bonn, Strauss. geb. M. 4.

Vodušek, M., Neue Theorie der Mondbewegung. Programm. Laibach, Fischer. M. 1.50.

Vogler, Ch. Aug., Geodätische Übungen für Landmesser und Ingenieure. 2. Aufl. 1. Teil. Feldübungen. Berlin, Parey. geb. M. 9.

Warth, O., Graphische Tabellen zur Bestimmung der Querschnitte bei Holz- und Eisenkonstruktionen des Hochbaues. Leipzig, Gebhardt. geb. M. 4.

Wenzely, J., Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. 4. Aufl. II. Teil. Leipzig, Renger. M. 2, geb. M. 2.30.

Zeuner, G., Vorlesungen über Theorie der Turbinen, Ventilatoren und Centrifugalpumpen, mit vorbereitenden Untersuchungen aus der technischen Hydraulik. Leipzig, Felix. M. 10.

Physik und Meteorologie.

Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. 5. Teil. Stündliche Variations-Beobachtungen d. Horizontal-Intensität während der Jahre 1889—1895. Nebst den Bestimmungen der Inklination während derselben Zeit. Berlin, Mittler & Sohn. M. 5.

Bryk, Ernst, Kurzes Repetitorium der Physik (Experimentalphysik). (Breitenstein's Repetitorien Nr. 35.) 3. Aufl. Leipzig, Barth. M. 1.80.

Bünger, E., Was muss man von der Elektrizität wissen? Berlin, Steinitz. M. 1.

Burbury, S. H., A treatise on the kinetic theory of gases. London, Clay. Cloth Sh. 8.

Cederbom, J. E., Problemer till mekaniske värmeläran jämte deres uträkning. Stockholm. M. 6.

Chappuis, J., et Berget, A., Leçons de physique générale. (En 3 volumes.) Vol. II: Électricité et magnétisme. 2e édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 13.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Bd. 3. Wärme. (Russisch). St. Petersburg. M. 15.

Gérard, E., Leçons sur l'électricité. Tome 1. 6. édit. Paris, Gauthier-Villars Fr. 12.

Graetz, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. 8. Aufl. (Doppelaufl.) Stuttgart, Engelhorn. M. 7, geb. M. 8.

Haughton, S., Manual of optics. New edition, enlarged by J. Warren. London Cloth Sh. 2.6

Holman, S. W., Matter, energy, force and work. A plain presentation of fundamental physical concepts and of the vortex-atom and other theories. New York, Macmillan Co. Cloth $ 2.50

Jamin, J., Cours de physique de l'École polytechnique. Deuxième supplément par M. Bouty: Progrès de l'électricité: oscillations hertziennes, rayons cathodiques et rayons X. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3.50

Less, Emil, Die wissenschaftlichen Grundlagen von Wetterprognosen für kurze und solche für etwas längere Zeiträume. Antrittsvorlesung. (Aus: Das Wetter.) Berlin, Salle. M. 1.

Möller, M., Witterungskalender. Teil II/III. Erläuterungen. Braunschweig, Limbach. M. 2.

Paulsen, A., Nautisk Meteorologi til brug for Navigationsskoler. 2. forandrede udgave. Kjöbenhavn. M. 1.80.

Schoentjes, H., Cours de physique expérimentales de l'Université de Gand. 2e édition. Partie II: Chaleur, magnétisme, électricité, lumière et chaleur rayonnante. Paris. Fr. 10.

Steinmetz, Charles Proteus, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Deutsche Ausgabe. 1. Hälfte. Berlin, Reuther & Reichard. M. 4.

Suter, W. N., Handbook of Optics. London, Macmillan. Sh. 5.

Turpain, A., Recherches expérimentales sur les oscillations électriques. Paris, Hermann. Fr. 6.

Weinhold, F., Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentieren im Unterricht an Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und Gewerbeschulen. 3. Aufl. Leipzig, Quandt & Händel. M. 9.

Wiechert, E., Grundlagen der Elektrodynamik. Siehe unter „Reine Mathematik, Festschrift."

Wiesengrund, Bernh., Die Elektrizität. Ihre Erzeugung, prakt. Verwendung und Messung. 4. Aufl. Teilweise bearbeitet von Russner. Frankfurt a. M., Bechhold. M. 1.

Witz, A., Thermodynamique, à l'usage des ingénieurs. 2e éd. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2.50

Wüllner, Adph., Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl. 4. Bd. Die Lehre von der Strahlung. 2. Halbbd. Leipzig, B. G. Teubner. M. 7.

Historisch-litterarische Abteilung.

Ein Nachtrag zu meinem Aufsatze in der Festschrift zu Moritz Cantors 70. Geburtstage.

(Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft. S. 41—63.)

Von

MAXIMILIAN CURTZE
in Thorn.

In meiner Abhandlung: „Der Tractatus quadrantis des Robertus Anglicus in deutscher Übersetzung aus dem Jahre 1477“ habe ich darauf hingewiesen, dass der Arbeit des **Robertus** noch ein Anhang cosmographischen Inhaltes angefügt ist, von welchem es mir damals unmöglich war das lateinische Original nachzuweisen. Dieses aufzufinden ist mir im Codex August. 76, 1 der Herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel gelungen. Dort findet sich der lateinische Text des fraglichen Anhanges auf Blatt 42ʳ, col. 2, Zeile 17 bis Blatt 45ʳ, col. 2 unter dem Titel: „Tractatus de quantitatibus terre et stellarum.“ Da dieser lateinische Text ebenfalls von Interesse sein dürfte, er liefert mehrfach Berichtigungen und Ergänzungen des deutschen Textes, lasse ich ihn hier nachfolgen mit einigen als Fussnoten gesetzten Bemerkungen. Er lautet also folgendermaßen:

Tractatus de quantitatibus terre et stellarum et primo de terra.* 42.

39. **Ptholomeus** et alii sapientes posuerunt corpus terre communem mensuram, qua metiebantur stellarum corpora, et posuerunt medietatem dyametri terre communem mensuram, qua stellarum ipsarum a centro terre longitudines mensurabant.

* Die Paragraphenzahlen sind die der deutschen Übersetzung.

|42'1. 40. Fuit possibile mensurare dyametrum, cum **declaratum** sit, quod centrum spere terre est centrum celi. Ideo enim necesse est, ut sit rotunditas terre equedistans rotunditati celi. Cum ergo perreximus in superficie terre sub eodem meridiano, eunti quidem versus septemtrionem addetur in elevatione poli ab orizonte; et eunti versus meridiem minuetur ab ea. Per hoc itaque invenimus quantitatem ambulationis nostre in terra, que fit proportionalis portioni unius gradus de rotunditate celi, si mensuraverimus spacium inter duo loca, quorum elevationes devient uno gradu. Cum enim multiplicaverimus illam quantitatem per 360, qui est numerus graduum celi, exibit circulus dividens in duo media speram terre, et cum illum diviserimus per 3 et septimam, quod est proportio circumferentie ad dyametrum, quod exibit, erit dyameter spere terre.

|2. 41. Expertum est | in diebus **Maymonis**,* quod portio unius gradus de rotunditate terre continet quatuor milia cubitos geometricos, quorum quisque continet pedem unum et semis. Cum igitur multiplicaverimus portionem unius gradus in 360, quod est summa rotunditatis orbis, aggregabitur, quod rotunditas terre continet 20400; et cum hec rotunditas divisa fuerit per 3 et septimam, exibit quantitas dyametri terre, que est 6500 miliaria fere.

De quantitate corporis Lune et Solis in aspectu secundum corpora eorum ad quantitatem ipsius terre.

42. **Ptholomeus** ostendit de Luna, quod dyameter corporis eius, cum est in longitudine longiore suorum orbium, est equalis dyametro corporis Solis in aspectu; ostendit eciam, quod dyameter corporis Solis
|43,1. occupat de circulo 31 | minuta et terciam partem unius minuti, id est viginti secunda fere. Deinde dicit, quod longitudo Solis a centro terre est 1210 per quantitatem, qua medietas terre est unum; et quod longitudo extremitatis pyramidis umbre a centro terre est 368 per illam quantitatem; et quod longitudo centri circuli brevis Lune a centro terre, cum fuerit idem centrum in auge sui circuli egresse cuspidis, est 59 illius quantitatis.

43. Dixit ergo **Geber**: ostensa est per hoc proportio cuiusque dyametrorum duorum luminarum ad dyametrum terre. Proportio igitur dyametri Lune ad dyametrum terre est proportio (unius) ad tria et duas quintas: proportio dyametri Solis ad dyametrum terre est proportio quinque et medii ad unum. Proportio vero dyametri Solis ad dyametrum Lune est proportio 18 et duorum quintarum et dimidii ad unum.**

* Hier ist also die richtige Form des Namens **Mâmun** überliefert.

** Die im deutschen Texte verdorbene Stelle ist hier richtig überliefert. Es ist also, wenn wir die Länge der drei Durchmesser bezüglich durch L, E, S bezeichnen:

$$L : E = 1 : 3\tfrac{2}{5} = 5 : 17,$$

44. Dixit etiam **Geber**, quod ex hiis ar|guitur, quod proportio corporis Lune ad corpus terre est sicut proportio unius ad 39 et quartam fere; et proportio corporis Solis ad corpus terre est proportio 166 ad unum fere. Et proportio corporis Solis ad corpus Lune est proportio 6644 et medii ad unum.* 2 |

45. **Ptholomeus** monstravit mensuram duorum corporum, scilicet Solis et Lune, sed non dixit mensuram reliquarum stellarum. Illius vero scientia facilis est secundum illius similitudinem, qua operatus est in Sole et Luna. Secundum enim illius similitudinem, qua operatus est **Ptholomeus** in Sole et Luna, facilis est scientia mensurare corpora stellarum reliquarum.

46. Dyameter enim corporis Mercurii in aspectu, secundum quod probatur, est 15a pars dyametri Solis; et dyameter Veneris est 10a pars dyametri Solis; et dyameter Martis est 20a pars dyametri Solis; et | dyameter Iovis 12a pars est dyametri Solis; et dyameter Saturni est 18a pars dyametri Solis; et uniuscuiusque stellarum fixarum VIa dyametri est 20a pars dyametri in aspectu Solis.** 43',1

De quantitate dyametrorum aliarum planetarum.

47. Quantitates vero dyametrorum earum secundum dyametrum terre sunt ille. Dyameter corporis Mercurii est 18a pars dyametri terre; et dyameter Veneris est tertia pars tercie partis; et dyameter Martis est similis dyametro terre semel et sexta et forte verius*** septima; dyameter Jovis equalis dyametro terre quater et semis et 14a unius vicis;† et dyameter Saturni est equalis dyametro terre quater et semis et unius modica.†† Et dyameter cuiusque stellarum

---

also
$$E : S = 1 : 5\frac{1}{2} = 2 : 11,$$
$$L : S = 10 : 187 = 1 : 18\frac{7}{10} = 1 : 18\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}.$$

* Es ist $L^3 : E^3 = 125 : 4913 = 39\frac{38}{125}$, also näher $\frac{1}{3}$ als $\frac{1}{4}$; weiter ist
$$E^3 : S^3 : 1332 = 1 : 166\frac{3}{8},$$
also nahezu $1 : 166$; endlich ist
$$L^3 : S^3 = 1000 : 6539203 = 1 : 6539,203,$$
hier ist also die Rechnung der Handschrift unrichtig.

** Diese Stelle ist wohl so aufzufassen: Nach Nr. 49b, welche im deutschen Texte ausgelassen ist, wird die Grösse der Sterne erster Klasse in 6 Teile geteilt, diese Teile sind jedenfalls unter dem VIa dyametri gemeint. In dem Exemplare, welches der deutschen Übersetzung zu Grunde lag, war wohl statt VIa diametri, IVa diametri geschrieben und dieses als 15 gelesen worden.

*** Das Wort verius hat der Übersetzer nicht berücksichtigt.

† Die Worte quater et semis et 14a unius vicis sind, wohl durch den Abschreiber, im deutschen Texte fortgeblieben.

†† modica ist natürlich falsch übersetzt.

fixarum maximarum est equalis dyametro terre quater et semis et sexta unius vicis.*

48. Est ergo mensura corporum harum stellarum ita. Corpus Mercurii est pars una 22000 corporis terre; Veneris est 37 pars
| 2. terre; | et Martis est simile terre semel et semis et medietati octava unius vicis; et Jovis est equale terre 95es; et Saturni est simile terre nonagesies et semel. Stellarum vero fixarum maximarum unaqueque equalis est terre centies octies. Omninum quidem stellarum fixarum longitudo a centro terre est una, sed earum magnitudines sunt diverse.

49. Dicta antem est magnitudo 15 magnarum, que sunt in magnitudine prima.

Earum ergo, que sunt in magnitudine secunda, unaqueque est 90es** equalis terre; et omnis earum, que sunt in magnitudine tertia, est equalis terre 70es bis; et omnis earum, que sunt in magnitudine quarta, est equalis terre quinquagesies quater; omnis earum, que sunt in magnitudine quinta, est equalis terre 36es; et omnis earum, que sunt in magnitudine sexta, est equalis terre 18es. Et si que minores sunt, non videntur.

49b. Quantitates stellarum, que sunt post primam magnitudinem
| 44,1. iam determinate sunt secundum aspectum, nec non secundum comparationem ad dyametrum terre. Sed quia divisa est | magnitudo stellarum prime magnitudinis in sex partes, quarum una ablata fit magnitudo secunda, duabus autem ablatis fit ⟨tertia, tribus ablatis⟩ fit quarta, quatuor fit quinta, quinque fit sexta, quare non fit visibile, quod fit ultra.***

50. Potest ergo ex hoc haberi mensura dyametrorum earum ad dyametrum terre. Erit ergo dyameter stellarum secunde magnitudinis ad dyametrum terre, sicut sunt quater† et semis, et hoc est re modica minus dyametro Saturni. Stellarum vero tertie magnitudinis, quater et sexta fere; quarte ter et quatuor quinte fere;†† quinte ter et quarta et 18a unius vicis fere; sexte bis et quarta et octava unius vicis.

51. Medietas dyametri terre, qua stellarum ratiocinatur longitudo, est 3250 miliaria. Cum ergo propinquior longitudo Lune a terra sit 33 vicibus et semis equalis medietati terre diametri, hoc est 109037 miliaria et medietas unius miliarii, et longitudo longior Lune, que
| 2. est equalis propinquiori longitudini Mercurii est 66 et sexta vicis unius equalis medietati dyametri terre, quod est 218540 miliaria. Et

---

* Hier ist quater mit quarta verwechselt, et sexta unius vicis aber ist ausgefallen.

** Auch diese Zahl ist nicht im deutschen Texte.

*** Der ganze Abdruck 49b findet sich nicht im deutschen Texte, war also wohl auch in der Vorlage weggelassen worden.

† Im deutschen Texte weggelassen, jedenfalls durch Schuld des Abschreibers bei Anfang einer neuen Columne.

†† Der Übersetzer hat quatuor quinte fere nicht verstanden.

ongitudo longior Mercurii, que est propinquior Veneris est 167es 2 |
equalis medietati dyametri terre,* quod est 542750 miliaria. Longitudo autem eius longior, scilicet Veneris, que est propinquior longitudo longiori Solis, est 604es equalis medietati dyametri terre et semis fere, quod est 1963000 miliaria. Et longitudo longior Solis, que est longitudo propinquior Jovis, est 1220es equalis medietati dyametri terre, quod est 3965000 miliaria. Et longitudo Martis longior, que propinquior est Jovis, 8876es equalis est dyametri medietati terre, quod est 28847000 miliaria. Longitudo vero longior Jovis, que est propinquior Saturni, est quatuor decies et quadragesies quinquies equalis medietati dyametri terre, quod est 46816250 miliaria. Et longitudo longior Saturni, que est equalis longitudini stellarum fixarum, est vigesies milies et centies decies equalis medietati dyametri
terre, quod est 65375500 miliaria.** Gradus autem dicitur, quantum 44',1 |
ad miliaria vel | stadia extrahitur ab **Alfragano** 9^0 capitulo. Dixit enim, ibi quod 56 miliaria et due tercie unius miliaris respondent in terra cuilibet gradui celi.

52. Videatur ergo, quot sunt gradus in latitudine prime climatis, sic.*** Polus elevatur, veluti dicitur in principio primi, per 12 gradus et dimidium et quartam partem unius, in fine vero per 20 gradus et dimidium. Subtrahas minus de maiori, et erunt in differentia 7 gradus et dimidium et quarta, que sunt latitudo primi climatis, quantum ad gradus celi. Postea unicuiusque istorum 56 miliaria multiplicando per 7, et provenient 392. Deinde da† cuilibet gradui duas tercias, et erunt 14, et medietas gradus habebit 28 miliaria et unam terciam, que addantur prioribus miliaribus miliaria, et tercia terciis, et erunt 420 et 15 tercie. Restabitque quarta unius gradus, cui competunt†† 14
miliaria et dimidia tercia, de qua non curetur. Sed miliaria miliaribus 2 |
addantur prioribus, et erunt 434 miliaria. Et quia 15 tercie ibi valent 5 integra, pro his sumantur 5 et addantur prioribus, et erunt 439 miliaria in primo climate in rei veritate, et quia deficit nisi 1 de 440, qui est numerus famosus, complete supponitur.

53. De aliis climatibus sic operare dando semper gradui 56 et duas tercias, medietati 28 et unam terciam, quarte parti 14 et dimidiam terciam, et tercie parti gradus 19, visa tamen latitudinem

---

* Nachdem zunächst in der Zahl 109037 die zweite Null im deutschen Texte weggelassen war, ist der Übersetzer dann von longior lune (Z. 35 a. v. S.) gleich auf quod est 542750 miliaria übergesprungen, so dass die zwischenliegenden Worte ausgefallen sind. Die beiden ersten Zahlen sind falsch angegeben.

** Auch hier ist, wohl durch Schuld des Abschreibers, der deutsche Text verunstaltet.

*** Der Übersetzer hat das sic fälschlich zum folgenden Satze gezogen.

† Der Übersetzer hat de statt da gelesen.

†† Die Worte quarta bis competunt sind vom Abschreiber im deutschen Texte ausgelassen.

climatis prius.* Latitudo vero secundi climatis est 7 graduum tantum in celo, cui per predicta correspondent 397 miliaria recta operando, sed quia non deficiunt nisi tria a 400, qui est numerus famosus, complete supponitur. Latitudo vero tercii climatis in celo <est> 6 graduum et dimidie tercie unius, que valent in terra 350 miliaria. Latitudo vero quarti climatis in celo est 5 graduum et tercie unius, que valent in terra 302. Sed quia iste numerus
15, 1. | non est numerus famosus, et est prope 300, ille supponitur.** Latitudo vero quinti climatis est 4 graduum et dimidii in celo, que valent in terra 252. Latitudo sexti climatis est trium graduum et dimidii et plus quam quarta, que valent 212; sed quia iste numerus non est famosus ponitur pro eo miliaria 210.*** Latitudo septimi climatis est 3 graduum et quarte unius in ceo, que valent in terra 184. Sed iste non est in libro, sed proximus ei maior, scilicet 185, quia quoddam modicum remansit.

55. Nota, quod orientales sunt antipodes occidentalium; ibi semper oritur sol, hic semper occidit.

55. Mirabile est de centro mundi, ad quod cadunt omnia ponderosa. Ibi vero estimo infernum esse in maiori distantia, quam possibile sit, et hoc, ne fetor ad superos possit redundare. Ad illum locum cadunt omnia ponderosa, sed ad firmamentum ascendunt levis|sima, quia ad infernum facilis est lapsus, ad celos difficilis ascensus. Facilis et plana est via ducens ad inferos, difficilis et stricta ducens ad celos. Multa descendunt, pauca ascendunt.

56. Homo posset circuire ab oriente ab eodem loco ad eundem vel per terram vel per navigium, per terram eiusdem temperantie eundo ad occasus ab oriente iterum redeunt ab oriente vel e converso, sed non versus septemtrionem, quia inveniret perpetua frigora, nec versus meridiem, quia inveniret torridam zonam.

57. Poli zodyaci secundum **Thebit**† non sunt firmi aut fixi, immo titubant et inclinantur, titubant et elevantur sicut barcha in mari, sicut potest videri in spera.

Explicit liber.

* Hier war der Text des Übersetzers ein anderer als der unserer Handschrift.

** Auch hier ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Lesarten der lateinischen Originals und der Übersetzung.

*** Ebenso ist hier ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Lesarten.

† Die Worte secundum Thebit fehlen in der Übersetzung. Es ist die bekannte Trepidationstheorie gemeint.

Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert.

Von

Dr. E. Wappler
in Zwickau.

Die Handschrift C 80 der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu den enthält auf Blatt 301′—303 eine mathematische Vorlesung der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts. Diese Vorlesung hat der ster Gottfried Wolack aus Bercka 1467 und 1468 in Erfurt lten. Über Wolack berichten die Akten der Erfurter Universität, er 1457 inscribiert und 1462 zum Rektor gewählt wurde. Da der Wolackschen Vorlesung, die sich auch in München und zig findet, zu ersehen ist, was um die Mitte des 15. Jahrhunderts ır Mathematik gelehrt wurde, so dürfte ein vollständiger Abdruck lben vielleicht mit Dank aufgenommen werden.

| Incipit regula proporcionum cum suis. Bl. 301′.

Prima regula dicitur de tri apud Italos per apocopam, id est i de tribus, quia tres in se continet numeros; aurea, quia ad s questiones familiarissima; vtilis, quia cetere fere regule ad n tamquam ad primum principium ducuntur; dicitur eciam proionalium, quia in ipsa debet fieri proporcio et determinata erorum adequacio. Fit enim hec regula, cum ponuntur numeri noti, et per tercium, eciam notum, fit questio de quarto ignoto. s tota vis sive difficultas in modo scribendi consistit. Nam um sub precio et res sub re semper scribatur, et fiat multipliper contradictoriam et diuisio per contrariam uel subcontrariam. npli gracia 11 oua sunt empta 9 denarijs, quanti constat(!) 5 Disponantur hij numeri taliter:

$$\begin{array}{cc} 11 & 9 \\ 5 & 0 \end{array}$$

ant 9, quot 5? Duc 5 in 9, proueniunt 45, que per primum, t 11, diuide, et sunt empta 5 oua 4 denarijs cum $\frac{1}{11}$ denarii, qui uartus ignotus sic se habens ad 5 sicut 9 ad 11.

Si autem queritur: 11 oua sunt empta 9 denarijs, quot oua valent 5 denarios(!)? Disponantur numeri sic:

11	9
(0)	5

11 oua dant 9 denarios(!), quid 5 denarii? Ducatur primus in quartum, scilicet 11 in 5, et proueniunt 55, que diuide per secundum, scilicet per 9, et proueniunt 6 cum $\frac{1}{9}$, tercius numerus ignotus, et totidem oua valent 5 denarii. In hac regula si numerus primus secundo fuerit maior, tercius erit maior quarto. Si vero primus minor fuerit secundo, eciam tercius minor erit quarto, et si equalis, equalis. Secunda regula dicitur de tri transmutata, in qua eciam semper scribatur res sub re et precium sub precio, et fiet multiplicatio contrarie siue subcontrarie et diuisio contradictorie. In hac enim si primus fuerit maior tercio, secundus necessario erit minor quarto et econuerso. Si primus fuerit minor tercio, secundas erit maior quarto. Exempli gracia emi 8 vlnas panni pro tunica in latitudine trium vlnarum, venalis est alius pannus duarum vlnarum latus; queritur, quot vlnas de illo pro subductura recipiam, qui equalis sit priori panno. Disponantur figure sic:

3	8
2	(0)

Dicendo latitudo trium vlnarum dat mihi octo in longitudine, quantum dat mihi latitudo duarum vlnarum? Duc ergo primum in secundum, scilicet 3 in 8, et proueniunt 24, que per tercium, scilcet per 2, diuide, et proueniunt 12. Tantum ergo de secundo recipiam. Et sicut se habet primus ad tercium, ita quartus ad secundum.

Item quando maldrum tritici valet 5 ℔, panis 1 ₰ 10 ponderabit vncias; queritur, quantum ponderabit panis idem maldro $8\frac{1}{2}$ ℔ soluente? Age secundum regulam, et patet, quod $5\frac{15}{17}$.

Tercia regula dicta de tri dupla quasi regulam de tri duplans tali elucescit exemplo. Viginti lucei sunt empti pro 100 ₰ et 8 alleca pro 20 ₰; queritur, 3 lucei quot valent alleca? Vide ergo primo, quot ₰ valeant 3 lucei per primam regulam, et patet, quod 15. Demum vide, quot alleca valent 15 ₰, et patet, quod 6. De primo ergo ad vltimum, 6 alleca valent 3 luceos.

lucei	₰	alleca	₰
20	100	8	20
3	15	6	15

Verbi gracia similiter exemplum conuertendo sic querendo 20 lucei valent 100 ₰, 8 alleca valent 20 ₰; 6 alleca quot valent luceos?

Item emi 10 quartas vini pro 50 ₰, 6 quartas cereuisie pro 20 ₰; queritur, quot quartas cereuisie habemus pro tribus quartis vini? Vide per primam, tres quartas(!) vini quot valent ₰, et habes, quod 15. Vide secundo, pro 15 ₰ quot quartas cereuisie, et patet, quod quatuor cum $\frac{1}{2}$ cereuisie. Et stabunt figure sic:

quarte vini	₰	(quarte cereuisie)	(₰)
10	50	6	20
3	15	$4\frac{1}{2}$	15

Quarta regula dicta mercatorum uel sodalitatis, quia pluribus mercatoribus eorum bona commiscentibus est vtilissima, tali claret exemplo. Sint 3 uel multi, | quorum primus imponat 20 fl, secundus Bl. 30'
24 fl, tercius 30 fl, et cum his lucrantur 100; queritur, quantum cuilibet secundum sui quotum cedere debeat. Si hoc vis scire, collige summam omnium, et fiunt 74, que serua pro diuisore; deinde multiplica primi pecuniam, scilicet 20, per 100, et proueniunt 2000, que per diuisorem, scilicet 74, diuide, et proueniunt 27 et $\frac{1}{37}$, et tantum habebit primus de lucro. Deinde multiplica pecuniam secundi, scilicet 24, per lucrum, et proueniunt 2400, que diuide per 74, et proueniunt 32 et $\frac{16}{37}$. Deinde multiplica pecuniam tercij per lucrum, et proueniunt 3000, quibus per 74 diuisis proueniunt 40 et $\frac{20}{37}$, et tantum habebit tercius.

Ad idem. Fusa est campana ex quatuor libris auri, 10 argenti, 20 cupri. Fracta campana vna pars de 10 libris venalis est; queritur, quantum in eadem porcione de auro, argento et cupro sit. Operare secundum regulam vt prius. Jungantur omnia pondera, et proueniunt 34, que serua pro diuisore, deinde multiplica quodlibet pondus seorsum per pondus, quod habet porcio venalis, scilicet 10, productum diuidendo per diuisorem, scilicet 34, et patebit propositum.

Quinta regula dicta de tempore, quia, in ea tempus quoddam ducitur, tali claret exemplo. Sint tres uel plures socij, quorum primus imponat 9 florenos, scundus 12, tercius 15, primus ad duos annos, secundus ad tres annos, tercius ad quatuor annos, et superluc(ra)ti sunt 20 florenos; queritur, quantum cuilibet secundum sui imposicionem et secundum temporis quotam cedat. Multiplica tempus cuiuslibet per suam imposicionem et producta separatim scribe, dehinc per omnia operare vt in predicta regula. Exempli gracia multiplica impositionem primi, scilicet 9, per suum tempus, scilicet 2, et sunt 18, que scribe primo loco. Deinde multiplica impositionem secundi, scilicet 12, per suum tempus, scilicet 3, et proueniunt 36, que scribe secundo loco. Deinde multiplica impositionem tercij scilicet 15, per suum tempus, scilicet quatuor, proueniunt 60, que tercio loco scribe. Hec tria producta simul aggregata, et proueniunt 114, que pro diuisore serua. Deinde primum productum, scilicet 18, per lucrum communem, scilicet 20, multiplica, per diuisorem seruatum diuidendo et proueniunt (3 cum $\frac{3}{19}$. Deinde secundum productum, scilicet 36, per lucrum communem scilicet 20, multiplica, per diuisorem seruatum diuidendo et proueniunt) 6 cum $\frac{6}{19}$ vnius floreni, et tantum secundo cedit. Postremo productum tercium, scilicet 60, per lucrum multiplicando, scilicet 20, et per communem diuisorem diuidendo et proueniunt 10 cum $\frac{10}{19}$.

Sexta regula dicta equalitatis, qui emibilium pondus inuenire docet, isto patet exemplo. Dominus dat famulo suo 20 nouos grossos, vt pro hijs emat muscatum, zinciber et piper, ita quod non minus aut plus quam 20 nouos expendat et tamen portet tantum pondus de vna specie sicut de alia. Queritur, quomodo sit agendum. Consideretur precium cuiuslibet speciei, ex quibus fac vnam summam, per quam diuide pecuniam a domino datam, scilicet 20 nouos, resoluendo tamen prius nouos in denarios, quia denarij sunt in diuisore, et patet quesitum. Verbi gracia ponam, quod vnus loto de(!) muscati valeat 16 ₰ et zinciberis 8, piperis vero 6 ₰. Hec precia coniungam, et proueniunt 30, per que diuide pecuniam a domino datam, scilicet 180 ₰, et proueniunt 6 lotones de qualibet specie.

Item quidam vadit ad campsorem volens cambi(a)re florenos(!), petit ab eo nouos grossos, antiquos grossos et ₰ in numero equali de quolibet genere, supposito, quod florenis(!) valeat 39 nouos. Queritur, quot de quolibet genere obtinebit. Hoc facio sic resoluendo primo florenum in ₰, et proueniunt 351, que diuidendo per 13 aggregatum ex valore horum trium, scilicet noui, antiqui et ₰ et proueniunt in quociente 27 de quolibet genere. Et sic semper debent resolui in minimam monetam.

Septima regula vsure dicta uel de quinque, quia quinque in se continet numeros; vsure, quia ad vsuram uel lucrum applicanda est, tali claret exemplo. 20 fl 8 annis dant 5 fl, quot dant 30 fl in 10 annis? Scribantur hij quinque numeri per ordinem sic:

20	8	5
30	10	0

Quo facto videas in regula de tri disponas ducendo primum in secundum et productum erit primus numerus regule de tri, tercius sic
Bl. 302'. invariatus | erit secundus numerus regule de tri, quartus in quintum productus erit tercius, scribaturque diligenter capitale sub capitali, tempus sub tempore, lucrum sub lucro, quodlibet sub sua denominacione. Verbi gracia duco 20, scilicet capitale, in 8, suum tempus, et proueniunt 160, qui erit primus numerus regule de tri, 5 erit se-

undus; deinde duco 30 in 10, secundum capitale in tempus suum, et proueniunt 300, que sunt tercius terminus. Modo iuxta regulam de tri operando 9 et $\frac{3}{8}$ fl proueniunt, et tantum lucrantur 30 fl in 10 annis.

Item sunt 100 homines, vna pars viri, alia mulieres, tercia virgines, et habebunt dare 100(!) florenos inequaliter, quia vir vnus duos dabit florenos, mulieres vero 1 florenum, virgines vero quelibet $\frac{1}{2}$ florenum. Queritur, quot erunt viri et quot mulieres et quot virgines. Fac sic. Primo diuide florenum in albos 30, et tunc vir dat 60 albos, mulier 30, virgo 15. Quibus simul collectis fiat diuisor, primus numerus de tri, 100 secundus numerus et cetera ut in regula mercatorum, et stabit sic totum:

	Primus numerus	homines
	(105)	100
vir	60	$57\frac{1}{7}$ vires(!)
mulier	30	$28\frac{4}{7}$ mulieres
virgo	15	$14\frac{2}{7}$ virgines

Si vero florenum(!) valet albos 24, tunc staret sic

	84	100
v	48	$57\frac{1}{7}$
m	24	$28\frac{4}{7}$
u	12	$14\frac{1}{7}$(!)

Octana regula dicta denominacionis, quia docet inuenire numerum in diuersas denominaciones diuisibilem, vt tres socij debent diuidere 12 florenos, quorum primus capiet $\frac{1}{2}$, secundus $\frac{1}{3}$, quartus(!) $\frac{1}{4}$. Queritur, quantum cuilibet cedat. Si hoc vis scire, quere numerum tales partes habentem ducendo primam denominacionem in secundam et productum in terciam et sic de alijs. Quo facto vide via diuisionis, que sit secunda pars tocius producti et illam ascribe primo, deinde que sit tercia pars, quam ascribe secundo, vlterius que sit quarta pars, et hanc ascribe tercio et sic de alijs. Quos omnes in vnam summam collige, que sit diuisor, et pecunia diuidenda multiplicatur, et tunc fiat totum more regule mercatorum. Exempli gracia primus habebit $\frac{1}{2}$, secundus $\frac{1}{3}$, tercius $\frac{1}{4}$, dico(!) has denominaciones in se inuicem, et fiant 24, cuius media pars est 12, quam ascribe primo, eius tercia pars est 8, quam da secundo, eius quartam partem, scilicet 6, ascribe tercio. Coniunge hos numeros, scilicet 12, 8, 6, et fiunt 26, diuisor. Deinde multiplica 12, primum numerum, per pecuniam diuidendam, scilicet 12, et proueniunt 144, que diuidam per 26, et proueniunt 5 cum $\frac{7}{13}$ vnius floreni, et tantum habebit primus de 12 florenis. Deinde multiplica 8 per 12 et diuide per 26, et proueniunt 3 (cum) $\frac{9}{13}$ vnius floreni, et tantum habebit secundus de 12. Vltimo multiplica 6 per 12, et procedunt 72, que diuidam per 26, et procedunt 2 cum $\frac{10}{13}$ vnius floreni, et tantum habebit tercius et sic de alijs.

	diuisor	
	26	12
$\frac{1}{2}$	12	$5\frac{7}{13}$
$\frac{1}{3}$	8	$3\frac{9}{13}$
$\frac{1}{4}$	6	$2\frac{10}{13}$

Nona regula dicta regula extremi, quia communiter in extremis fieri solet, tali patet exemplo. Quidam agonizans, ne intestatus decederet, sic suum ordinauit testamentum, quod vxor sua, quam reliquit grauidam, si pareret masculum, ipsa reciperet terciam partem bonarum, et $\frac{2}{3}$ reciperet filius. Si vero pareret femellam, filia recip(er)et $\frac{1}{3}$ de bonis et mater $\frac{2}{3}$. Adueniente tempore partus enixa est filium et filiam. Posito, quod defunctus reliquisset 100 florenos. Queritur, quartum cuilibet personarum cedat. In hoc casu maxime attendenda est voluntas defuncti, qui voluit, quod mater in duplo plus recipisset quam filia et filius in duplo plus quam mater. Quia ergo vbique est proporcio dupla, quere igitur talem proporcionem in tribus tercijs. Ponatur 1 pro primo, binarius pro secundo et quaternarius pro tercio, que aggregentur, et habebitur diuisor, et per omnia operandum est vt in regula mercatorum.

	7	100
filius	4	$57\frac{1}{7}$
mater	3(!)	$28\frac{4}{7}$
filia	1	$14\frac{2}{7}$

Decima regula dicta equalitatis parcium tali claret exemplo. Quidam legauit filijs suis summam, quam habent apud campsorem, hoc modo, ut primus capiat 1 florenum et 10 partem remanencium florenorum, secundus duos et 10 partem remanencium, tercius tres florenos et cetera, vltimus autem capiat totum residuum. Modo re-ınt filij equale pondus portantes pecuniarum. Queritur, quot fuerint j et quot floreni. Considera partem, quam portant equaliter, licet 10, a qua subtrahe vnitatem, et habebis numerum filiorum, em vlterius in se multiplica, et habebis numerum florenorum. Dico go, quod habet 9 filios et 81 florenos, quilibet autem porta(v)it 9 renos.

Vndecima regula dicta regula spacij, quia in ea fit intencio de acio, tali claret exemplo. Pater et filius ibant Romam. Patre amulante 6 miliaria, sed filio 9, quia iuuenis, pater tamen prius xiuit et precessit filium in 100 miliaribus. Queritur, quot miliaribus(!) iebus et quot miliaria filius ambulet ante (quam) patrem apprehendat. iuide spacium, quod pater precesserit, per excessum | velocioris, Bl. 303 cilicet 3, et habebis quesitum. Nam quociens ostendit, in quot iebus conueniunt. Si autem scire volueris, in quoto miliari, multilica numerum dierum per numerum velocioris, et patet, quod post 33 ies et $\frac{1}{3}$ vnius diei transitis 300 miliaribus conuenerunt.

Duodecima regula dicta conuentus, quia de conuentu tractat. Exempli gracia duo sunt fratres, quorum vnus est Lubeck, alter Erfordie. Exiens Lubeck transit omni die 6 miliaria tendens versus Erfordiam. Sed alter Erfordie exiens transit omni die 5 miliaria ersus Lubeck. Illo tamen supposito, quod ambo incipiunt iter vna lie, et quod distancia sit inter eos 60 miliarium. Queritur, in quota lie conueniunt. Adde motum vnius diei ad motum alterius diei, cilicet 5 ad 6, et sunt 11, et per illud productum diuide distaniam, et invenies, quot(!) conueniunt post 5 dies et $\frac{5}{11}$ vnius diei. Si velis scire, quot miliaria quilibet transit antequam alteri obueniat, nultiplica numerum dierum per iter diei cuiuslibet, et venit petitum, et atet, quod ambulans de Lubeck versus Erfordj (am) transiuit 32 (et) $\frac{8}{11}$ nius miliaris, alter vero Erfor(d)j(e) exiens transiuit 27(et) $\frac{3}{11}$ vnius niliaris.

Hiis finiunt 12 regule de tri, que posteris concor(d)es sunt. Possunt autem in infinitas applicari per ingenium habentem.

Sequuntur nonnulle regule difficultatem regule de trie addentes.

Regula gradacionis dicetur autem gradacionis, quia gradatim pertransitus in ea fit secundum progressionem naturalem. Duo tendunt Romam, scilicet A et B. A vadit omni die 7 miliaria, B vero prima lie ambulat vnum miliare, secunda duo, tercia tria et sic consequenter secundum progressionem naturalem. Queritur, in quo die B consequitur A. Dupla iter sine motum vniformiter ambulantis, et a duplato ubtrate vnitatem, et patet dies in qua conueniunt. Dico ergo, quod B consequitur A 13 diebus transactis et 91 miliaribus, hoc patet nultiplicando 13 per 7.

Regula composicionis. Sartor quidam 3 habet famulos. Sit sartor A, primus famulus B, secundus C, tercius D. A potest tunicam integram in die perficere, B in duobus diebus, C in tribus diebus D in quatuor. Queritur, in quanto tempore omnes vnam et eandem tunicam possent perficere. Considera tempus maximum, quod est quatuor dies, in quo D perficit tunicam. Illud diuide per tempus cuiuslibet, et quocientes omnes aggrega. Aggregatum pone pro secundo termino regule de tri, tempus maximum prius consideratum pro primo termino. Dicas ergo sic: in quatuor diebus fiunt 8 tunice et $\frac{1}{3}$ vnius tunice, in quanto tempore fit vna tunica? Ducam primum in tercium, scilicet 4 in 1, et proueniunt 4, et diuidam per secundum, scilicet 8 et $\frac{1}{3}$ siue $\frac{25}{3}$, et proueniunt $\frac{12}{25}$ vnius diei, et in tanto tempore possunt omnes simul perficere vnam tunicam. Simile est de tonna trium ducillarum.

dies		tunice
4		$8\frac{1}{3}$
0		1
A	1	4
B	2	2
C	3	$1\frac{1}{3}$
D	4	1

Turris edificata est tali ingenio, quod eius $\frac{1}{4}$ est in terra, eius $\frac{1}{5}$ est in aqua, et habet turris 100 pedes vltra superficiem aque in ere. Queritur, quot pedum sit turris in toto. Quere numerum, in quo sunt quinte et quarte precise, et ille numerus in presenti 20 censetur. Dic igitur: turri diuisa in 20 partes de illis erunt 5 in terra et quatuor in aqua. Sequitur, quod erunt 11 in ere super aquam. Age igitur per regulam. 11 partes faciunt 100 pedes, quot dant 20 partes? Et invenies 181 pedes et $\frac{9}{11}$ vnius pedis.

Hec Erfordie a Magistro Gotfrido Wolack de Bercka informata anno 1468 currente in estate pro $\frac{3}{4}$ vnius floreni renensis, qui tunc fuerunt 30 noui grossi, et anno immediate precedenti informata fuerunt pro floreno renensi.

Die Abhandlung, welche wir haben abdrucken lassen, hat Johann Widmann von Eger zum Teil durchkorrigiert. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass Widmann nach dieser Abhandlung unterrichtet hat. Eine Stütze hierfür finden wir noch darin, dass Codex Lipsiensis 1470 neben mehreren Vorlesungen von Widmann auch die Regula proporcionum cum suis enthält.

Verschiedene Notizen, die sich auf die Regeldetri beziehen, hat Widmann in die Dresdner Handschrift eingetragen. Die längste von diesen Notizen steht auf Bl. 301 und hat folgenden Wortlaut:

Item res omnis venalis, et omnia, que ipsis attinent, duobus modis et quatuor numeris disponuntur. Horum vero numerorum primus iuxta Arabes Almuzaar, id est primus propositus, nuncupatur. Alter vero Alzazar, id est secundus, per primum dinotus appellatur. Tercius Almute, id est ignotus, quartus Altemon, id est per primum et secundum dinotus. Sed et hij quatuor numeri sic disponuntur, ut eorum primus, qui est Almuzaar, ultimo, qui est Altemon, opponatur. Horum eciam quatuor numerorum tres semper noti ac certi ponuntur, quartus vero ignotus ponitur et incertus, et ipse est ille, cum quo quantum inquiritur. Talis quoque ad hanc artem regula datur, ut in omni hac inquisitione tres numeri, qui noti ac certi positi sunt, considerentur, quoque eorum duo semper ad inuicem oppositi invenientur. Horum ergo duorum vnus est in altero multiplicandus et eorum multiplicacionis summa per tertium notum ac certe positum, qui ignoto opponitur, erit diuidendus. Nam quod ex diuisione exierit, erit numerus, de quo dubitabatur, et ipse ei numero opponitur, per quem facta est diuisio. Sed ne per hanc artem aliquis errorem incurrere arbitretur, tale damus exemplum. Secundum ergo primum modum sic dicas: 10 pro 6, quot pro 4? Vide nunc, quomodo secundum quod diximus, prefati numeri disponuntur. Nam quoniam 10 dixisti, numerum Almuzaar pronunciasti, et quando pro 6 dixisti, numerum Alzazar protulisti, et quando quot dixisti, Almuthemon siue magulū, id est ignotum, nunciasti, et quando pro quatuor dixisti, Althemon edidisti. Vide ergo qualiter eorum tres, id est 10 et 6 et 4, noti ac certi ponuntur, et quomodo de quarto, adhuc incognito, dubitatur. Si ergo ad regulam prius datam respexeris, primum in ultimo, id est 10 in 4, multiplicabis, sunt omnino oppositi noti ac certi, et quod ex multiplicatione excreuerit, id est 40, per alium notum ac certum, Alzazar, id est per 6, oportet diuidere, et erunt 7 siue $6\frac{2}{3}$ vnius maghulis, id est incognitum designantes et huiusmodi numerus numero senario est oppositus, qui arabice Alzazar nominatur. Secundus modus huius astis est, ut dicas: 10 pro 8, quot pro 4? 10 ergo Almuzaar, qui numero Almuthemon ignoto, cum quantum acquiritur, est oppositus, et 8 designat numerum Alzazar, qui numero Althemon opponitur, qui sunt(!) quatuor. Primum ergo numerorum cognitorum atque oppositorum in alium multiplica, id est 4 in 8, et fient 32, hunc ergo numerum per alium cognitum diuide, qui est Almuzaar, id est 32 per 10 diuide, et exeund tres et quinta, Althemon designantes, qui videlicet eo numero, per quem diuiditur, oppositus. His ergo duobus modis omnia, que venalia dicuntur, absque errore possunt tractari, si deus voluerit.

... homo in vinea 30 diebus pro 10 conducitur, ex quibus operatus est 6 diebus, quantum ergo precium tocius debet accipere? Expositum huius est, quod iam manifestum est, quod 6 dies quintam mensem(!) adimplent, et hoc, quod ei ex precio contigerit, sit secundum quod ipse ex mense sit operatus. Quod autem diximus, sic exponitur. Quoniam quando mensem dixisti, id est 30 dies, Almusaar protulisti, et quando dixisti 10, dixisti Alzazaar, et quando dixisti 6 dies, Almuthemon pronunciasti, et quando dixisti quantum precij ei contigerit, Althemon nunciasti. Multiplica ergo Alzazaar, 10, per Almuthemon, qui ei opponitur, id est 6, et fient 60, et quod ex multiplicatione excreuerit, super(!) 30, id est super(!) Almuzaar, diuide, et erunt 2 dragmata, et ipsa Althemon, id est pars, que homini contingit. Huiusmodi ergo modo quicquid nisi(!) positum fuerit ex rebus venalibus ac alijs siue ponderibus siue ex omnibus, que hijs attinent, agendum est.

Die Notiz, welche wir soeben mitgeteilt haben, findet sich auch in der Leipziger Handschrift 1470 und in der Wiener Handschrift 4770. Letztere Handschrift ist vielleicht die Quelle, aus der die fragliche Notiz stammt.

Codex Vindobonnensis 4770 enthält auf Bl. 1—12′ die Algebra des Mohammed ben Musa, welche weder mit der Ausgabe durch Libri noch mit der durch Boncompagni übereinstimmt. Ein Abschnitt davon ist nun die Notiz, welche wir oben reproduziert haben.

† Hermann Heilermann.

Am 28. September 1899 starb zu Godesberg a. Rh. Dr. Hermann ilermann, Realgymnasialdirektor a. D. und Geheimer Regierungs- wohl der älteste Mitarbeiter dieser Zeitschrift. Geboren am Januar 1820 als Sohn eines Bauerngutbesitzers im Kreise Reckling- sen in Westfalen, hat er das hohe Alter von nahezu 80 Jahren icht. Er studierte in Münster unter Gudermann, in Berlin unter ›bi, Dirichlet u. a. Mathematik und Naturwissenschaften. Nach mehr- iger Thätigkeit an den Gymnasien zu Koblenz und Trier übernahm nfangs der fünfziger Jahre die Leitung der Provinzial-Gewerbeschule Trier. In dieser Stellung schrieb er die leider zuerst wenig be- nt gewordene Programmarbeit (Ostern 1855): „Zerlegung der ıogenen quadratischen, kubischen und biquadratischen Funktionen ier Veränderlichen in Faktoren.“ In dieser Arbeit findet sich zum en Male die kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung in erminantenform, welche später unter dem Namen der Cayley- nhold'schen Determinante bekannt geworden ist.

Oktober 1864 wurde er nach Essen zur Errichtung und Leitung r (lateinlosen) Realschule II. Ordnung berufen, aus der sich später Realgymnasium verbunden mit höherer Bürgerschule entwickelte. Januar 1895 feierte er sein 50jähriges Dienstjubiläum, wobei er reiche Ehrungen seitens der Staats- und städtischen Behörden, ie seitens seiner Schüler, Freunde und Mitbürger empfing. Eine angelegte Strasse in Essen wurde nach ihm Heilermannstrasse nnt.

Ausser mehreren in weiten Kreisen hochgeschätzten Handbüchern, he hauptsächlich Unterrichtszwecken dienten, veröffentlichte er Reihe wissenschaftlicher Arbeiten, namentlich aus dem Gebiete der ktionentheorie, aus der Lehre von den Kegelschnitten und den chungen dritten und vierten Grades, sämtlich in dieser Zeitschrift. h kurz vor seinem Tode brachte sie (Jahrg. 44, Heft 4) eine kleine eilung: „zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades“, über he er dem Unterzeichneten schrieb, dass es wahrscheinlich die letzte er Hand sein würde.

Als Mensch ein ausgezeichneter Charakter, ein vortrefflicher rer und Leiter, ein treuer Freund, der Wissenschaft ein begeisterter änger, ist er heimgegangen; „integer vitae scelerisque purus“, das Jubiläumslied ihn feierte.

Prof. Dr. Jos. Diekmann.

Die wissenschaftlichen Kongresse in Paris im Sommer 1900.

Wir haben (Bd. 44, Historisch-litterarische Abteilung Seite 111) unsere Leser auf die vom 6. bis zum 12. August stattfindende Mathematikerversammlung hingewiesen. Ergänzend können wir hinzufügen, dass am ersten und am vorletzten Tage der Versammlung allgemeine Sitzungen stattfinden, für welche jetzt schon Vorträge angesetzt sind, am 6. August Vorträge der Herren M. Cantor und Volterra, am 11. August solche der Herren Mittag, Leffler und Poincaré.

Noch zwei andere Kongresse dürfen wir heute anzeigen. Vom 23. zum 28. Juli findet der Congrès d'Histoire des sciences statt, welcher für die Freunde geschichtlicher Forschung in der Mathematik eine besondere Anziehungskraft besitzen dürfte. An der Spitze des Organisationsausschusses steht Herr Paul Tannery.

Zwischen die beiden genannten Versammlungen schiebt sich dann vom 2. zum 7. August der Philosophenkongress, welcher eine Gliederung in vier Abteilungen vorgesehen hat, deren dritte als Logique et Histoire des science bezeichnet ist. Auch dort kommen, wie das versandte ausführliche Programm erkennen lässt, zahlreiche den Mathematiker fesselnde Fragen zur Verhandlung, für welche bereits Berichterstatter gewonnen sind, deren Namen wir allerdings noch nicht anzugeben in der Lage sind, so wenig wie die Namen derjenigen Gelehrten aus allen Ländern, welche eingewilligt haben, sich an einem sogenannten Comité de Patronage zu beteiligen.

M. Cantor.

Rezensionen.

Sammlung der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der ersten 25 Bände der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht unter Mitwirkung von Prof. Dr. Stoll, systematisch geordnet von Dr. E. Emmerich und C. Müsebeck und herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, Begründer des Aufgaben-Repertoriums und der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig 1898, B. G. Teubner. XII, 399 S.

In einem Vorworte erzählt Herr Hoffmann, wie er 1874 in dem V. Bande seiner Zeitschrift angefangen habe, ein Aufgaben-Repertorium zu eröffnen, wie dieses allmählich zu immer grösserer Bedeutung sich entwickelte und eine besondere Leitung beanspruchte, welche teils nach, teils neben einander den Herren Binder, v. Lühmann, Lieber, Müsebeck anvertraut war, und in ihnen Persönlichkeiten, deren Namen besonders in Schulmännerkreisen von bestem Klange war und ist. Als Aufgabensteller wirkten zahlreiche Mitarbeiter, unter welchen die Herren Schlömilch mit 167, Emmerich mit 122, Stoll mit 95 Aufgaben die fleissigsten waren. Die jetzt veröffentlichte nach dem Inhalte der Aufgaben geordnete Zusammenstellung giebt den Wortlaut sämtlicher Aufgaben und dazu die Angabe von Band und Seite der Zeitschrift, wo man die Auflösung, beziehungsweise die Auflösungen zu suchen hat. Von besonderem Nutzen wird dadurch der Band für solche Besitzer, welche in der Lage sind, über sämtliche Jahrgänge der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht zu verfügen.

Cantor.

Cours d'Analyse par F. de Hensch, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur d'analyse à l'École militaire de Bruxelles. **Calcul différentiel.** Bruxelles 1898. Alfred Castaigne éditeur. 274 p.

Aus dem Vorworte erfahren wir, dass der Verfasser, der in Frankreich zur Übung gewordenen, auch anderwärts da und dort sich einbürgernden Sitte folgend, seinen Schülern an der Kriegsschule in Brüssel autographierte Vorlesungshefte in die Hand zu geben pflegte, welche er nunmehr habe drucken lassen. Als Quellen habe der Verfasser die besten vorhandenen Lehrbücher benutzt. Wir begreifen es vollständig, dass Herr de Hensch nicht an ein fremdes Werk sich vollständig anschloss, dass er bald mehr den einen, bald mehr den anderen Entwickelungsgang vorzog und dementsprechend seine Vorlagen wechselte. Die meisten Lehrer der Differentialrechnung dürften ähnlich verfahren. Ob man alsdann das aus sechs guten Büchern zusammengestellte siebente gute Buch einem Verleger zum Drucke übergeben, ob dieser es übernehmen soll, das ist Sache des Verlegers, und dieser wieder wird seine Entschliessungen vermutlich mit Rücksicht auf die Schülerzahl der Anstalt, an welcher der Verfasser des Buches wirkt, treffen. Ob das Buch auch ausserhalb der betreffenden Anstalt Käufer findet, ist Glückssache. Die Kritik thut solchen Werken gegenüber ihre Schuldigkeit, wenn sie auf das Erscheinen aufmerksam macht und bezeugt, dass wirklich eine gute Zusammenstellung vorliegt, da leider aus sechs guten Büchern auch ein nicht gutes siebentes Buch entstehen kann. Diese Angst braucht den Kauf des uns heute vorliegenden Bandes nicht zu beeinträchtigen. Von feineren Untersuchungen, welche in einer Elementarvorlesung selten berührt werden, erwähnen wir das Verweilen bei der Frage, ob eine Funktion in einem bestimmten Punkte eine Ableitung besitze oder nicht. Mit dem Fehlen der Jacobischen Bezeichnung partieller Differentiation durch geschwungene ∂ können wir uns nicht befreunden und vermuten, es werde vielen Lesern ebenso ergehen.

Cantor.

An elementary course of analytic geometry by J. H. Tanner, assistant professor of mathematics in Cornell University and Joseph Allen formerly instructor in the college of the city of New York. New York, Cincinnati, Chicago. American Book Company. XI, 390 p.

Das ungewöhnlich fasslich geschriebene, dabei aber keineswegs auf Strenge der Darstellung Verzicht leistende kleine Lehrbuch der analytischen Geometrie ist in erster Linie für beginnende Ingenieure und Architekten bestimmt. Es enthält nicht die auf harmonische Teilung bezüglichen Sätze, mit ihrer Ausnahme aber das Wichtigste über die Gerade und die Kurve zweiten Grades in der Ebene und Weniges über analytische Geometrie des Raumes. Als ein wesentlicher Vorzug darf die Sorgfalt gelten, mit welcher der Leser fortwährend auf bestimmte Beispiele hingewiesen wird, so dass das Können nicht hinter dem Wissen zurückbleibt. Zu rühmen ist auch, dass den Sätzen wiederholt mehrere in verschiedener Lage gezeichnete Figuren beigegeben sind, deren Buchstaben so gewählt wurden, dass der gedruckte Satz auf alle diese Figuren zugleich bezogen werden kann. Die Pascalsche Schnecke (S. 318) rührt, beiläufig bemerkt, nicht von Blaise Pascal, sondern von dessen Vater Etienne Pascal her.

Cantor.

Elements of the differential calculus by JAMES MC. MAHON, A. M. (Dublin) assistant professor of mathematics in Cornell University and VIRGIL SNYDER, Ph. D. (Göttingen), instructor in mathematics in Cornell University. · New York, Cincinnati, Chicago. American Book Company. XIV, 337 p.

Für die Schüler der Cornell University geschrieben, teilt diese Differentialrechnung die Vorzüge, welche der analytischen Geometrie von Tanner und Allen nachzurühmen waren. Die Darstellung ist bei aller Knappheit von einer beneidenswerten Klarheit, sie geht auch an wirklichen Schwierigkeiten nicht achtlos vorüber, sie ist vielmehr bestrebt, dieselben zu erörtern, soweit dieses mit Schülern am Beginne des mathematischen Studiums möglich ist. Von geometrischen Hilfsmitteln ist in umfassender Weise Gebrauch gemacht, wenn auch analytische Entwickelungen keineswegs vermieden sind. In ersterer Beziehung möchten wir auf das XIV. Kapitel über Asymptoten und auf das XVIII. Kapitel über die Zeichnung von durch ihre Gleichung gegebenen Kurven besonders rühmend aufmerksam machen. Von sinnentstellenden Druckfehlern ist uns S. 92 das Fehlen des Anfangsgliedes 1 in der Reihenentwickelung für $e^{\sin x}$ aufgefallen.

CANTOR.

An elementary course in the integral calculus by DANIEL ALEXANDER MURRAY Ph. D., instructor in mathematics in Cornell University, formerly scholar and fellow of Johns Hopkins University, author of „Introductory course in differential equations". New York, Cincinnati, Chicago. American Book Company XIV, 288 p.

Das der Gebrauchsfolge nach dritte mathematische Lehrbuch der Cornell University, die Integralrechnung von Murray, sollte ursprünglich in Herrn Hutchinson einen Mitverfasser erhalten, und wie der analytischen Geometrie, wie der Differentialrechnung aus dem Zusammenwirken je zweier Schriftsteller kein Schaden erwuchs, so wäre gewiss auch die in Gemeinschaft herausgegebene Integralrechnung ein einheitliches Buch geworden. Um so mehr musste dieses der Fall sein, nachdem aus Gründen, welche wir nicht kennen, Herr Murray sich allein der gestellten Aufgabe unterzog. Die Aufgabe der Integration ist doppelter Auffassung fähig, entweder als Summenbildung oder als inverse Operation des Differenzierens. Anders ausgesprochen: man kann vom bestimmten Integrale zum unbestimmten gelangen oder vom unbestimmten Integrale zum bestimmten. Im ersten Kapitel lehrt Herr Murray die erste, im zweiten die zweite Auffassung kennen. Dann erst kommen die eigentlichen Integrationen und deren geometrische Anwendungen, welche letztere zwischen die ersteren in scheinbar etwas unsystematischer Weise eingeschaltet sind, sowohl zwischen die Auswertung einfacher Integrale, als zwischen die mehrfacher Integrale. Zwei Kapitel sind der näherungsweisen Integration und den Integralkurven gewidmet. Den Schluss des Buches bildet das Unentbehrlichste aus der hre von der Integration der Differentialgleichungen. Wie eng der Verfasser die Grenzen des hier zu Behandelnden gesteckt hat, mag man daraus entnehmen, dass von singulärer Integration nur in einem ganz kurzen Zwischensatze die Rede ist.

CANTOR.

---

auwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung (2. Hälfte S. 181—384) von Dr. ARWED FUHRMANN, Geheimer Hofrat, ordentlicher Professor an der Königl. Technischen Hochschule Dresden. Berlin 1899, Wilhelm Ernst & Sohn.

Das Erscheinen der ersten Hälfte dieses dritten Teils der auf im anzen sechs Teile berechneten Anwendungen der Infinitesimalrechnung in en Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik haben wir d. 44, Hist. litt. Abtlg. S. 120 angezeigt. In der zweiten Hälfte werden die nwendungen der Differentialrechnung auf den Hochbau zu Ende geführt. ie meisten Aufgaben dieses zweiten Halbteils sind solche, in welchen rösste oder kleinste Werte gesucht werden, und auch ohne Techniker zu ein wird man leicht die Wichtigkeit dieser Aufgaben für die Praxis, aber uch das Interesse erkennen, welches sie dem Anfänger bieten müssen, in Interesse, an welchem auch der angehende Universitätsmathematiker eilnehmen wird.

CANTOR.

---

ntroduzione alla economia matematica dei professori F. VIRGILII e C. GARIBALDI. Con 19 incisioni. Milano 1899. (Manuali Hoepli) XII, 210 p.

Als Referent den Titel des neuen Bändchens aus der Sammlung Hoepli as, freute er sich in die Lage versetzt zu sein, sich in Kürze mit den nwendungen bekannt machen zu können, welche neuere Nationalökonomen on den Lehren der Mathematik zu machen lieben, aber diese Freude ollte nicht lange anhalten, da das Buch keineswegs das leistet, was wir on ihm erwarteten. Das soll keineswegs einen Tadel des Buches einschliessen. Wir hätten unsere Erwartungen anders einrichten sollen, dann wären wir nicht enttäuscht worden. Unseren Lesern möchten wir das leiche Gefühl ersparen, indem wir den Inhalt des Bändchens deutlicher ennzeichnen. Es ist nicht ein Überblick über nationalökonomische Lehren ür den Mathematiker, sondern ein Überblick über mathematische Lehren ür den Nationalökonomen. Ein amerikanischer Schriftsteller Irving Fischer at 1897 ein Sedezbändchen von 84 Seiten *A brief introduction to the infinitesimal Calculus designed especially to aid in reading mathematical economics nd statistics* herausgegeben, und dieses hat den Herren Virgilii und Garibaldi gewissermassen als Muster gedient, nur dass sie weiter zurückgriffen und auch aus den niedrigeren Teilen der Mathematik das Unentbehrlichste in ihren Leitfaden aufnahmen. Ausserdem enthält dieser eine geschichtlich bibliographische Einleitung über diejenigen nationalökonomischen Schriften, welche sich mathematischer Hilfsmittel bedient haben.

CANTOR.

Die Methode der Variationsstatistik von GEORG DUNCKER in Hamburg-Uhlenhorst. (Sonderdruck aus dem Archiv für Entwickelungsmechanik Bd. VIII, Heft 1.) Mit acht Figuren im Text. Leipzig 1899, Engelmann. 75 S.

Bei organischen wie bei anorganischen Naturgebilden giebt es individuelle Erscheinungen, welche, die Formeinheit nicht beeinträchtigend, so oder so auftreten können und ein Individuum von dem anderen unterscheiden lassen. Man nennt die Möglichkeit solcher individuell verschiedenen Eigenschaften die Variabilität der betreffenden Formeinheit, wenn man nicht vorzieht, eben dieses Wort Variabilität für die Wahrscheinlichkeit unter einer gegebenen Anzahl von Individuen oder Varianten das in Frage stehende Merkmal anzutreffen aufzusparen. Das Merkmal kann ein meristisches, d. h. der Zählung unterworfenes sein. Eine Blume hat so und so viele Blumenblätter, bald mehr bald weniger u. s. w. Alsdann liegt es sehr nahe, Beobachtungen über eine grosse Anzahl von Varianten, etwa über n Varianten, anzustellen und zu notieren, dass n_1 mit dem meristischen Merkmal m_1, n_2 mit dem meristischen Merkmale $m_2, \ldots . n_\nu$ mit dem meristischen Merkmale m_ν versehen sind, und darin besteht die Variationsstatistik. Die Summe $n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu$ muss n betragen und

$$\frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \cdots + n_\nu m_\nu}{n} = M$$

ist das arithmetische Mittel,

$$\sqrt[n]{(m_1^{n_1} \cdot m_2^{n_2} \ldots m_\nu^{n_\nu})} = G$$

das geometrische Mittel der einer Varianten zukommenden Variationen. Trägt man die m in gleichen Abständen auf einer Abscissenaxe auf und errichtet in jedem so bezeichneten Punkte das entsprechende n als Ordinate, verbindet dann die Ordinatenendpunkte geradlinig, so erhält man das Variationspolygon. Die vorher von uns definierte Länge M, die im allgemeinen nicht ganzzahlig ist, lässt sich auch auf der Abscissenaxe vom Nullpunkte aus auftragen und führt zu einem eindeutig bestimmten Punkte M der Abscissenaxe, welchen Herr Duncker den Schwerpunkt des Variationspolygons nennt. In ihm wird die Schwerpunktsordinate errichtet, deren Länge sich aus der Gleichung der Variationskurve bestimmt, welche den Grenzfall des Variationspolygons bildet, und deren Form je nach der allgemeinsten Gestalt des Variationspolygons eine verschiedene ist. Jedesmal aber kommen Exponentialgrössen in ihr vor. Unter den gezogenen Folgerungen dürften zwei am wichtigsten sein, welche der Verfasser auf S. 56 durch gesperrten Druck hervortreten liess: 1. Individuelle oder spontane Variation findet nach dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit von Kombinationen statt.

2. Die individuelle Variation eines Merkmales ist in den meisten Fällen abhängig von derjenigen anderer; es besteht ausgedehnte Korrelation zwischen den verschiedenen Merkmalen der Individuen.

Cantor.

Peschka. **Darstellende und projektive Geometrie** nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Erster Band. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Atlas von 43 lithographierten Tafeln. Leipzig und Wien 1899, Franz Deuticke.

Das vorliegende, gross angelegte Werk erschien in den Jahren 1883 bis 1885 zum ersten male bei C. Gerolds Sohn in Wien. Bald darauf zeigte es die Verlagsbuchhandlung zu sehr herabgesetzten Preisen an und nun liegt die zweite Autlage vor, welche bei Fr. Deuticke verlegt ist. Die Beurteilung, welche das Buch damals fand, war nicht durchweg zustimmend. Darauf mag sich die Stelle in der neuen Vorrede beziehen, in welcher der Verfasser „jenen wahren Freunden der Wissenschaft dankt, welche das Werk eingehend und objektiv beurteilten“.

Die neue Auflage wird als umgearbeitete und erweiterte angekündigt. Der letztere Ausdruck hat uns etwas erschreckt. Die erste Auflage umfasste schon vier starke Bände und wir fürchten, dass bei solchen Werken von einer gewissen Grenze an die Zunahme der Seitenzahl mindestens direkt proportional zur Abnahme der Leserzahl ist. Wir wollen aber dem Leser nicht Angst machen und bemerken daher ausdrücklich, dass die Sprache des Buches leicht und klar ist. Infolge davon liest es sich schnell. Der Techniker, für den die darstellende Geometrie nur Mittel zum Zweck ist, wird sich bald in demselben orientieren und finden, was er brauchen kann und was nicht. Wer aber mehr verlangt, mag sich Autoren zuwenden, welche knapper im Ausdrucke und anregender sind — aber vielleicht zuweilen an Dunkelheiten leiden.

Was die Umarbeitung des Buches betrifft, so ist diese für einige Teile des ersten Bandes eine sehr wesentliche und wir finden, dass das Werk dadurch gewonnen hat.

Die allgemeine Anordnung ist dieselbe geblieben, so dass im ersten Bande wieder die Methodenlehre behandelt wird und die Centralprojektion an den Anfang gestellt ist. Sie bildet den ersten Abschnitt.

Wir erwähnen zunächst, dass in II* die litterale Bezeichnung und manche Benennung geändert ist. p ist jetzt die Projektion eines Punktes (P_c in I). BE ist Bildebene (B in I), DK Distanzkreis (D_k). Die Worte: Bildflächtrace, Fluchttrace sind meistens verschwunden und durch Bildflächspur, Bildflächdurchstosspunkt, Fluchtspur ersetzt. Der Spurpunkt

---

* Mit I sei die erste, mit II die zweite Auflage bezeichnet.

von I heisst nun Gegenpunkt.* Sonderbarer Weise wird aber der Kreis, welcher die analoge Rolle wie der Gegenpunkt spielt, bald Spurkreis, bald Gegenkreis genannt. Winkel, die früher — wie allgemein üblich — griechische Buchstaben trugen, werden jetzt auch mit N_b, n_b bezeichnet. Es scheint nach dem Gesagten, dass der Autor mit seiner früheren Bezeichnung nicht immer zufrieden war und da bedauern wir, dass er sich nicht in dieser Beziehung dem bekannten Werke von Fiedler angeschlossen hat; denn in diesem ist die einheitliche, systematische und praktische Bezeichnung eine mustergiltige. Punkt, Gerade, Ebene; Winkel, parallele Gebilde, Original, Umlegung und Bild treten da duich ihre Bezeichnung auf den ersten Blick hervor. Dieses ist für das gezeichnete Bild sehr wertvoll.

Im zweiten Kapitel des ersten Abschnittes ist die Gleichsetzung von projektiv und deskriptiv (S. 54 v. I) unterdrückt. Doch werden auch jetzt noch alle Beziehungen, welche nicht metrisch sind, einfach projektiv genannt. Da späterhin mit dem Worte projektiv ganz genau definierte Begriffe verbunden werden, so finden wir es nicht ganz korrekt, jetzt schon das Wort in einem so unbestimmten Sinne vorweg zu nehmen. Zudem genügt es ja vollständig den metrischen Problemen diejenigen gegenüber zu stellen, welche sich auf die Lagenverhältnisse beziehen.

Die in I eingeführte Einteilung von Punkt, Gerade und Ebene als Gebilde 1., 2. und 3. Stufe (S. 30) ist in II aufgegeben worden. Damit ist ein Gegensatz mit der bekannten v. Staudtschen Klassifikation der Gebilde vermieden.

Im dritten Kapitel des 1. Abschnittes war in I zu lesen, dass bei der Darstellung in Centralprojektion eine Strecke nur dann in wahrer Grösse erscheint, wenn sie in der Bildebene liegt. Der Satz ist jetzt teilweise ergänzt (S. 51). Immerhin bleibt zu bemerken, dass es noch weitere Lagen giebt, in denen Bild und Original gleich sind (Involution).

Vollständig umgearbeitet ist das vierte Kapitel des I. Abschnittes, welches die „projektive" Geometrie** behandelt. Sehr zu begrüssen ist es, dass jetzt die projektiven Beziehungen ohne beständige Vermengung mit der Centralprojektion besprochen werden. Von Reihen und Büscheln ausgehend, schreitet der Verfasser zu den involutorischen Lagen und zur Kollineation ebener Systeme fort. Dann macht er Anwendungen auf den Kreis, die Kegelschnitte, die polare Reziprocität und schliesst mit Aufgaben aus der Centralprojektion.

Neben die alten Bezeichnungen werden manche neue gesetzt.

Reihen auf derselben Geraden heissen koaxial, konjektivisch oder konlokal. Büschel, die einen Kreis erzeugen, heissen projektivisch gleich.*** Paare einer Involution heissen konjugiert, polar konjugiert. Für Potenz

* S. 23 blieb die alte Benennung stehen.

** Weiterhin heisst es wieder projektivisch.

*** Eine Bemerkung über den Sinn wäre dabei nicht überflüssig.

wird auch das Wort Modul gebraucht. Die symmetrische Punktinvolution wird Spiegelinvolution genannt etc. Wir haben den Eindruck, dass in dieser Häufung von teilweise selbst gemachten Benennungen zuweilen des Guten zuviel geschieht.

Wir bemerken zu dem Kap. 4 noch, dass jetzt in korrekter Weise (S. 162) vom vollständigen Viereck und Vierseit (in I oder) gehandelt wird. Auf S. 132 von I hiess es, dass kollineare Ebenen durch ein Paar entsprechender Punkte und 1 Paar entsprechender Geraden oder durch 2 Paare entsprechender Geraden bestimmt seien. Dieser Satz ist nun durch Hinzufügung des Kollineationscentrums berichtigt. Leider blieb die Begründung* stehen, welche zu dem falschen Satze in I führte. Bei einigen mehrdeutigen Kegelschnittaufgaben ist die Stellung des Problems irreführend. So heisst es S. 206: Ein Kegelschnitt ist durch drei seiner Punkte und zwei seiner Tangenten gegeben. Nach der in der Geometrie gebräuchlichen Sprechweise ist aber ein Kegelschnitt durch diese Stücke nicht gegeben. (Ebenso S. 203 und 207.)

Der zweite Abschnitt des Buches war in I überschrieben: Klinographische oder schiefe Projektion. Jetzt trägt er die Hauptüberschrift: Freie Parallelprojektion, und den Untertitel: Klinographische oder schiefe und orthogonale Projektion. Im übrigen wird in dieser Studie fast genau wie in I eine schiefe Parallelprojektion mit einer Gegenebene (Distanzebene) behandelt. Nachdem die Centralprojektion ausführlich besprochen ist, lassen sich ja nach demselben Rezepte viele solcher Projektionsarten „machen". Ihre Durchführung ist eine interessante Übung. Ob sie dagegen in einem Lehrbuche einen so breiten Raum verdient wie hier, dürfte fraglich sein. Im Vergleiche zu I ist dieser Abschnitt dadurch etwas abgekürzt, dass ein Kapitel über affine Figuren gestrichen und in die projektive Geometrie verarbeitet wurde.

Der dritte Abschnitt über „kotierte Projektion und kotierte Ebenen" ist ganz neu. Nachdem der Autor seine Arbeiten über diesen Gegenstand (1876 und 1882) zitiert hat, führt er auch De la Gournerie an. Es wäre wohl nicht unpassend, dem letzteren Namen auch eine Jahreszahl (1860) hinzuzufügen und ältere französische Autoren anzuführen. Diese behandeln den Gegenstand gewöhnlich weniger schematisch, aber mit mehr Betonung der praktischen Anwendungen auf die Topographie, als es hier geschieht.

Der vierte Abschnitt von II enthält die „Darstellungsmethoden mittels zweier Projektionen" und beginnt mit der Orthogonalprojektion. Im Vergleiche mit I sind viele Bezeichnungen geändert und an Neubildung von Wörtern ist kein Mangel. BE, AE oder VE heisst nun die vertikale (erste) Projektionsebene, GE, HE die horizontale (zweite) und KE oder PE die dritte. Aus den „Halbierebenen" des 2. und 4. Quadranten sind in II Medianebenen, Koincidenz und Symmetrieebenen geworden. Mit ihnen hängen Median

* Da drei Punkte immer durch einen Punkt und eine Gerade ersetzt werden können.

spuren (auch Hauptspuren) und Medianaxen zusammen. In besonderen Absätzen wird von den „Incidenzen" von Punkten, Geraden und Ebenen gesprochen. Wir können uns mit diesen fremden Benennungen für Dinge, welche ja verhältnismässig wenig vorkommen, nicht sehr befreunden. Wir glauben überdies, dass eine deutsche, wenn auch längere Bezeichnung, welche das räumliche Bild hervorruft, in der darstellenden Geometrie allen diesen scheinbaren Abkürzungen vorzuziehen ist. Halbierungsebene des II. Quadranten, Schnitt mit dieser Ebene — das ist allgemein verständlich und giebt eine bessere Vorstellung wie Medianebene, Medianspur etc.

Nicht gerade notwendig halten wir die Unterscheidung von Geraden erster und zweiter Art oder Lage. Es handelt sich dabei um Linien, welche die x-Axe rechtwinklig kreuzen. Je nachdem eine solche Linie von vorn nach hinten steigt oder fällt, soll sie von der ersten oder zweiten Art sein. Ebenen sind erster oder zweiter Art, je nachdem ihre Seitenrissspur erster oder zweiter Art ist.

Neu und sehr nützlich sind im ersten Kapitel des vierten Abschnittes einige Überlegungen über das Sichtbare und Unsichtbare im Grundriss, Aufriss und bei Schattenkonstruktionen. Dabei wird eine besondere Definition für die Punkte von zwei windschiefen Geraden eingeführt, welche auf einer projizierenden Linie liegen. Die Bilder von zwei solchen Punkten fallen in einen Punkt zusammen und dieser heisst „Deckpunkt". Das Wort kollidiert mit der von Reuschle eingeführten Bezeichnung der Deckelemente, unter denen Punkte mit zwei zusammenfallenden Projektionen verstanden sind. Wir würden daher das Wort „scheinbarer Schnittpunkt" (nach Fiedler) vorziehen.

Im zweiten Kapitel des vierten Abschnittes wird — wie in I — aus Grund- und Aufriss eine schiefe Projektion auf die Aufrissebene abgeleitet. In einem dritten, neuen Kapitel wird gezeigt, wie man aus Grundriss und Aufriss ein centralprojektivisches Bild auf die Aufrissebene herstellt. In beiden Kapiteln handelt es sich im wesentlichen darum, einen Punkt und seinen Grundriss in gegebener Richtung oder aus einem Centrum auf die Aufrissebene zu projicieren. Die Bilder sind die Vertikalspuren der Projektionsstrahlen. Wir glauben, dass sich einzig von diesem Gesichtspunkte aus die Darstellung viel einfacher gestalten würde, als wenn man besondere sogenannte Projektionsdreiecke benutzt, wie es hier geschieht. Gerne würden wir es auch sehen, wenn nun der Verfasser einen umfassenden Gebrauch von den vorausgegangenen theoretischen Erörterungen über projektive Geometrie machen würde. Die neuen Grundrisse sind natürlich affin resp. kollinear mit den alten Grundrissen u.s.f. Benutzt man diese Beziehungen, welche nur nebenbei erwähnt werden, so lässt sich nicht nur die Darstellung übersichtlicher entwickeln, sondern es wird auch die praktische Konstruktion vereinfacht und durch viele Proben bereichert.

In einem weiteren und zwar neuen Kapitel des vierten Abschnittes wird einiges über perspektivische Maßstäbe gesagt und als perspektivische Axonometrie betitelt. Dasselbe beschränkt sich auf kurze Andeutungen.

Das letzte Kapitel behandelt — wie in I — eine sogenannte orthographische Parallel-Perspektive. An Stelle der Grundrissebene wird eine unter φ gegen die vertikale Projektionsebene geneigte Ebene GE eingeführt. Das Objekt wird zuerst orthogonal auf diese projiziert. Von diesem Bilde wird eine Orthogonalprojektion auf die Aufrissebene gezeichnet.

Der fünfte Abschnitt über Axonometrie wird — wie in I — mit dem Beweise des Pohlkeschen Satzes begonnen. Dann aber ist die klinographische (warum nicht schiefe?) und die orthographische Axonometrie eingehender wie früher besprochen und es werden auch einige technische Objekte im axonometrischen Bilde dargestellt. Je nach der Anzahl der Maßstäbe wird die Axonometrie als trimetrische, dimetrische und isometrische bezeichnet. Die Bilder von Grundriss, Aufriss, Seitenriss heissen „Nebenbilder". Wir würden axonometrischer Grundriss, Aufriss, Seitenriss — im Gegensatze zum axonometrischen Bilde — bezeichnender finden. Zum Schlusse des Abschnittes sind noch einige Aufgaben über die Bestimmung der wahren Grössen aus den axonometrischen Bildern besprochen.

Der sechste Abschnitt behandelt die „Lagenänderungen von räumlichen Gebilden" (Transformationen). Bei den grundlegenden Erklärungen sind einige Berichtigungen vorgenommen worden. Zwar wird noch an der Unterscheidung zwischen einfacher und doppelter Drehung (um Axe oder Punkt) festgehalten. Aber es wird jetzt bewiesen, dass die letztere sich auf eine Drehung um eine Axe (nicht um zwei wie in I) zurückführen lässt. Auch ist jetzt die allgemeine Lagenveränderung auf eine Parallelverschiebung und auf eine Drehung um eine Axe reduziert.

Dem Abschnitte über Transformation ist in II ein Schlusskapitel über die Projektionsart angehängt, welche der Verfasser Parallelogrammprojektion oder π Projektion nennt. Zwei Ebenen sind unter ω geneigt und schneiden sich in x. Eine dritte Ebene steht zu x senkrecht und schneidet die zwei Ebenen resp. in y und z. Nun wird eine neue Projektionsmethode in der Weise gemacht, dass die Punkte in der Richtung von y auf xz und in der Richtung von z auf xy projiziert werden. In I war die Besprechung dieser Methode einem Abschnitte eingereiht, der besondere Darstellungsarten behandelte. Dieser Abschnitt ist nun weggefallen.

Der siebente Abschnitt über Polyeder führt auch jetzt den Titel: „Gebilde, welche aus einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke zusammengesetzt sind" und beginnt mit einer ausführlichen Auflösung aller Fälle eines Dreikantes. Bei der Besprechung des Polyeders ist die Frage nach der Sichtbarkeit der einzelnen Teile neu bearbeitet und berichtigt. Der Satz: „Sind die Eckpunkte einer Kante sichtbar, so ist es auch die Kante" findet sich nicht mehr. Gerne hätten wir auch das Wort „Developpierung" verschwinden sehen. An der Darstellung der regulären Körper, der Schnitte von Pyramiden, Prismen und der Durchdringung dieser Körper ist nichts geändert. Einige allgemeine Betrachtungen über

Schatten von ebenen Figuren und „von durch Ebenen begrenzten pern“ sind neu hinzugefügt.

Der achte Abschnitt über centrische Kollineation und Reliefspektive war in I unter dem Abschnitte über besondere Darstellungshoden behandelt worden. Jetzt ist er an den Schluss des ersten Bandes tellt, etwas durchsichtiger entwickelt und an einigen Stellen berichtigt. Reliefperspektive, welche früher eigentlich nur im Titel „Reliefjektion“ angedeutet war, sind nur einige allgemeine Erörterungen gemet. Der Abschnitt wird mit dem Satze über drei Raumsysteme Σ_2, Σ_3 geschlossen, von denen je zwei centrisch collinear liegen und en Centra Punkte einer Geraden sind. Bei diesem Satze wäre es noch ig zu bemerken, dass die Kollineation zwischen Σ_1 und Σ_3 diejenige sein ss, welche durch die Kollineationen von $\Sigma_1\Sigma_2$ und $\Sigma_2\Sigma_3$ vermittelt d. Ohne diese Voraussetzung gilt der Satz nicht.

Was im Anhange über die Anwendung der verschiedenen Projektionsen gesagt ist, findet sich ebenso in I.

Zum Schluss erwähnen wir noch einige Worte und Redewendungen, che uns aufgefallen sind. Sehr oft findet sich das Wort „weiters“. ufig nimmt der Verfasser eine Sache „anstandslos“ oder „ohne Anstand“ Zuweilen ist von „prinzipiellen“ Aufgaben die Rede. Die Wörter hufs“, „insolange als“ muten uns etwas altmodisch an. Merkwürdig auch die Art, wie der Verfasser das Wort „zu etwas übergehen“ geucht. Er sagt: „Wir übergehen auf den konstruktiven Teil“ oder „Übert ein Paar von Punkten in ein anderes“ und dergleichen mehr.

Wir wünschen nun, dass der grosse Fleiss des Verfassers, der sich h in der Ausführung der schönen Tafeln bekundet, durch eine dritte flage belohnt werde. Dann hoffen wir, dass in derselben die Systematik ht erweitert, sondern konzentriert werden möge. Dadurch würde Raum vonnen, um durch Aufgaben und praktische Beispiele die Theorie zu been und zu zeigen, wie durch die projektive Geometrie die Genauigkeit Durchsichtigkeit der Konstruktionen erhöht werden kann.

Dr. Chr. Beyel.

Ripert, commandant du génie en retraite. **La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre.** Paris 1898, Gauthier-Villars.

Der Verfasser hatte im Intermédiaire des mathematiciens zwei Fragen tellt (Bd. IV, Nr. 1114, 1142), welche sich auf das Dreieck und Tetraeder iehen. Am Schlusse dieses Bandes teilt der Redakteur E. Lemoine mit, s diese Fragen und einige andere (Nr. 1141, 1143) in der obigen schüre von Ripert eine Beantwortung finden. Die Brochüre erschien n als Supplementheft zum fünften Bande des „Intermédiaire“. Der fasser will in derselben zeigen, dass das Gesetz der Dualität auch für metrischen Verhältnisse in viel weiterem Umfange giltig sei als bis t angenommen wurde. Zunächst soll dies für einige Beispiele aus der

„Geometrie des Dreiecks“ nachgewiesen werden. Dieser wird dann eine „Geometrie des Tetraeders“ gegenüber gestellt und es werden duale Beziehungen hervorgehoben.

Wir möchten die kleine Schrift ein geistreiches Feuilleton nennen, voll von anregenden Fragen und originellen Gedanken. Der Verfasser will nach keiner Richtung etwas abgeschlossenes bieten, sondern nur Definitionen aufstellen, Wege zeigen und diesen besondere Namen geben. Gegen den Vorwurf, als ob in letzterer Hinsicht zu viel geschehe, wird ein treffendes Wort von L. Lemoine zitiert: „Will man sich im Labyrinthe einer Stadt zurechtfinden, so muss man den Strassen Namen geben. Ähnlich verhält es sich in der Geometrie.“ Wir sagen nichts gegen diesen Ausspruch, empfehlen aber Vorsicht in der Bildung von neuen Worten und fügen hinzu, dass wir eine Stadt mit grossen, breiten Strassenzügen und klarer Anlage einer solchen mit vielen kleinen Gassen vorziehen. Und so freuen wir uns auch, wenn wir in der Geometrie einen guten Plan erkennen. Wir glauben nun, dass für die „Geometrie des Tetraeders“ in der vorliegenden Schrift die Grundlinien eines solchen Planes zu sehen sind, der unsere volle Beachtung verdient.

Chr. Beyel.

Prof. W. Binder. **Die kotierte Darstellung auf einer Bildebene** (mit zwei Figurentafeln) nebst einem Vorschlage: Zur einheitlichen Bezeichnung in der darstellenden Geometrie. Wiener-Neustadt 1897 und 1898.

Diese kleine Schrift erschien als Beilage zu den Jahresberichten der Real- und Gewerbeschule in Wiener-Neustadt. Die österreichischen „Instruktionen“ für den Unterricht in der darstellenden Geometrie verlangen „die Durchführung der Elementaraufgaben zuerst auf einer Bildebene.“ Im Sinne dieser Weisung giebt der Verfasser die Konstruktionen in kotierter Darstellung auf einer Bildebene. Die Methode, nach welcher er dabei verfährt, ist sehr ansprechend und zeigt den geschickten Schulmann; Stereometrische Sätze und Definitionen sind an passender Stelle eingeschoben, von der Affinität wird vielfach Gebrauch gemacht und wir glauben daher gern, dass der Verfasser in seiner langjährigen Thätigkeit mit diesem Lehrgange gute Erfahrungen machte.

Im einzelnen sei folgendes bemerkt: Die in Nr. 32 angeführte Bedingung für zwei sich schneidende Gerade dürfte wohl schon früher hervorgehoben werden. Der Verfasser schreibt stets das „Intervalle“. Wir denken „Intervall“ genügt. Unter Strahlenbüschel versteht man jetzt allgemein die Geraden durch einen Punkt. Der Zusatz: „centrales“, welcher den Gegensatz zu „Parallelstrahlenbüschel“ ausdrücken soll, scheint uns überflüssig. Das Wort Strahlensystem wird in der Litteratur in anderem Sinne gebraucht als es beim Verfasser geschieht. Da es sich um eine Definition handelt, liesse sich schon auf dieser Stufe das Wort Involution einführen. Was den Vorschlag für einheitliche Bezeichnung betrifft, so sind wir sehr damit einverstanden, dass Punkte, Gerade und Ebenen durch verschiedene Schriftgattungen unterschieden werden. Im einzelnen würden wir aber die Fiedlersche Bezeichnung vorziehen. Für die Ebenen kleine griechische Buchstaben einzuführen, scheint uns unthunlich, da diese allgemein für Winkel verwendet werden. Die mancherlei Striche, welche der Verfasser vorschlägt, verlieren sich bei Zeichnungen, welche aus Strichen aller Art bestehen. Immerhin freut uns jeder Vorschlag, welcher uns einer definitven Lösung dieser Fragen näher bringt.

Dr. Chr. Beyel.

Wenzelaus Pözl. **Elemente der darstellenden Geometrie** zum Schulgebrauche zusammengestellt. Erster Teil. Geradlinige ebene Gebilde. Neue Ausgabe. München 1897, Th. Ackermann.

Das vorliegende Büchlein soll ein Leitaden für den ersten Unterricht in der darstellenden Geometrie sein. Die Einteilung ist eine übersichtliche und klare. An die Definitionen und Sätze schliessen sich in guter Auswahl die bekannten Elementaraufgaben an. Kreise und Ellipsen sind dabei ausgeschlossen.

Wir glauben, dass der Verfasser bei seinem Lehrgange etwas zu viel mit allgemeinen Begriffen arbeitet und zu wenig die Raumanschauung in den Vordergrund stellt. Einige Beispiele mögen dies beweisen. Von Anfang an wird das Wort „Deckgeraden“ für Linien eingeführt, welche in derselben projizierenden Ebene liegen. Bei der Konstruktion einer Geraden mit einer Ebene wird dann gesagt: „Man konstruiere zu der Geraden eine in der gegebenen Ebene liegende Deckgerade.“ Wir gestehen, dass dadurch die Konstruktion für alle Fälle auf die eleganteste „Formel“ gebracht ist, aber diese ruft keine räumliche Vorstellung und verfehlt daher auf dieser elementaren Stufe ihren Zweck. Bei der Bestimmung von wahren Grössen wird mit der „Methode des Projizierens auf die eigene Ebene“ begonnen und es wird zuerst die Transformation einer Projektionsebene besprochen und spezialisiert. Wir denken, dass der Schüler ein viel anschaulicheres Bild vom Raumvorgange erhält, wenn man ihm sofort von der „Umklappung“ redet. Diese wird erst im Schlusskapitel behandelt (im Zusammenhange mit der Affinität), nachdem die Hauptaufgaben über wahre Grössen gelöst sind.

Wir bemerken noch einige Einzelheiten.

Abweichend von dem gewöhnlichen Gebrauche dreht der Verfasser die Aufrissebene und die Seitenrissebene in die Grundrissebene. Ein besonderes der sieben Kapitel widmet er der „gelehnten“ Geraden. Darunter wird eine Gerade verstanden, welche die x-Axe rechtwinklig kreuzt. „Gelehnte Ebene“ ist eine Normalebene zur x-Axe.

In der Bezeichnung schliesst sich der Autor keinem grösserem Werke ganz an; doch ist er konsequent. Punkte werden mit kleinen, Gerade mit grossen Buchstaben bezeichnet. Die Projektionen tragen die Indices 1, 2, 3. Die Axen, für welche die Buchstaben x, y, z allgemein angenommen sind, werden als $1\mathfrak{A}_2$, $1\mathfrak{A}_3$ und $2\mathfrak{A}_3$ unterschieden. Spuren heissen S_1, T_2; M_1, N_2 u. s. f. Wir finden diese Bezeichnungsweise etwas schwerfällig.

Die beigefügten Holzschnitte geben nur die Hauptmomente der Konstruktionen und entsprechen so dem Zwecke eines „Leitfadens" vollkommen.

Dr. Chr. Beyel.

S. Bachmann. **Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen.** Vierter Teil. Die Arithmetik der quadratischen Formen. Erste Abteilung. Leipzig 1898, B. G. Teubner. VIII und 668 S.

Über die beiden ersten Teile des Bachmannschen Unternehmens, die „Elemente der Zahlentheorie" und die „Analytische Zahlentheorie" ist vom Referenten in dieser Zeitschrift Bd. 40 berichtet worden. Als dritten Teil des Ganzen sieht der Verfasser seine bekannte, 1872 erschienene „Kreisteilung" an, deren Neubearbeitung er sich vorbehält.

Der vierte Teil, dessen erster Band vorliegt, ist dem eigentlichen Kerne der höheren Zahlentheorie gewidmet, der Theorie der quadratischen Formen F_2 mit einer beliebigen Zahl von Unbestimmten. Getreu seinem pädagogischen Prinzipe stellt der Verfasser eine ausführliche Diskussion der ternären F_2 (kürzer „C_2") voran, (S. 7—271) ehe er die F_2 von n Variabeln in Angriff nimmt.

Ein zweiter Band soll von der Reduktion der F_2 handeln, in enger Verbindung mit rein analytischen und geometrischen Gesichtspunkten (Einführung des Stetigen, Gittertheorie).

Das erste Kapitel enthält als zweckmässige Einleitung die algebraischen Grundlagen und Grundformeln für die Äquivalenz zweier C_2 resp. einer C_2 mit sich selbst. Hierbei wird direkt an art. 266—285 der disquisitiones Arithmeticae von Gauss angeknüpft. Der Urform

$$\begin{cases} f(x, x', x'') = f(x) = f_{x^2} = f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx' \end{cases}$$

wird konsequent die „adjungierte" Form F gegenübergestellt, was ungezwungen zu der Unterscheidung zwischen „bestimmten" („definierten") und „unbestimmten" („indefinierten") f führt. So ergiebt sich weiter mit den einfachsten Hilfsmitteln die „Grundformel" (S. 10):

$$1) \qquad f_{x^2} f_{y^2} - f_{xy}^2 = DF_{u^2} - f_{xy}$$

(nebst ihrer adjungierten), wo f_{xy} die bekannte Polarenbildung von f ist, D die Determinante von f, und die u die aus den x und y gebildeten zweireihigen Determinanten („Linienkoordinaten") bedeuten.

Sodann wird f einer linearen unimodularen Substitution S unterworfen, wodurch f in f_1 übergehen möge. Umgekehrt giebt es (S. 18) bei beliebig gegebenen f, f_1 noch eine ∞^3-Schar von S, die die Überführung leisten;

un erhält aber nach Hermite (1853/54) schon dadurch alle, dass man ie von ihnen mit den $\infty^3 S$, die f in sich („automorph") transformieren, sammensetzt. Zur Aufstellung eben dieser ∞^3 automorphen S wird einal eine bisher wenig beachtete Herleitung von G. Cantor (Habilitationsschrift, Halle 1869) mitgeteilt, die, was erlaubt ist, als intermediäre Form „Normalform" $x_1, x_3 - x_2^2$ zu Grunde legt, dann aber auch eine rzere und direkte Herleitung, ohne Benutzung einer Zwischenform, aus a Transformationsrelationen gegeben. Historisch ist dabei zu bemerken, ss Hermite die fragliche Aufgabe zwar „im allgemeinen" erledigt hat, essen für einen gewissen Ausnahmefall eine Lücke offen liess, die erst chmann 1873 ausfüllte; andererseits ist die Cantorsche Methode eine für e Fälle giltige. Hierzu hätte der Verfasser noch erwähnen können, ss die Originalabhandlung Hermites im Cambr. and Dublin Math. Journal . 9 (1854) steht, wo die Methode auch auf n Variable ausgedehnt wird; sserdem hätten die sich anschliessenden Arbeiten Cayleys berücksichtigt rden können, die die Hermitesche Methode sehr viel mehr ins einzelne folgen (vergl. jedoch einige Nachträge auf S. 398).

Das zweite Kapitel bringt die grundlegenden arithmetischen Sätze und griffe. Der Verfasser beschränkt sich der leichteren Darstellung halber r C_2 mit ungerader Determinante D, und daher auch unter den primitiven rmen auf die „eigentlichen", für die die Koeffizienten a, a', a'', $2b$, $2b'$, " von f den grössten gemeinsamen Teiler $\sigma = 1$ haben.

Haben dann die Koeffizienten A, A', A'', B, B', B'' von F den grössten neinsamen Teiler Ω, so wird D durch Ω^2 teilbar,

$$D = \Omega^2 \Delta. \tag{2}$$

Nach Eisenstein (1847) werden nunmehr die C_2 der Determinante D „Ordnungen" zusammengefasst, für die jeweils Ω, Δ dieselben Werte ben (S. 42). Dabei ist die stillschweigende Voraussetzung, dass alle auftenden Buchstaben (also die Koeffizienten von f, die Elemente von S u. s. f.) nze Zahlen sind. Umgekehrt entspricht jedem quadratischen Teiler Ω n D thatsächlich auch eine Ordnung. Formen derselben Klasse, die also tereinander äquivalent sind, gehören auch zu derselben Ordnung; umkehrt ist die Anzahl der verschiedenen Formenklassen der Ordnung (Ω, Δ) e endliche, wie vermöge einer besonderen „Reduktion" von f nach Gauss wiesen wird. Es wird mit Recht der wichtige Umstand betont, dass im ne der früheren „algebraischen" Äquivalenz eine C_2 nur die eine Inriante D besitzt, dagegen im Sinne der jetzigen „arithmetischen" Äquilenz die beiden Invarianten Ω, Δ, während D erst als eine aus ihnen geleitete Invariante erscheint (S. 44).

Der Verfasser wendet sich zu der Einführung des ebenfalls Eisenstein verdankenden fundamentalen Geschlechtsbegriffes, die in einfachster Weise s der Grundformel 1) hergeleitet wird. Giebt man nämlich den Veränderhen (x), (y) Werte, für die f nicht teilbar wird durch ω, wo ω irgend n Primfaktor von Ω ist, so folgt aus 1) sofort:

$$3\text{a)} \qquad \left(\frac{f(x)}{\omega}\right) = \left(\frac{f(y)}{\omega}\right),$$

unter der Klammer $\left(\frac{f}{\omega}\right)$ das Legendresche Symbol verstanden. Also hat f bez. ω einen durch den Wert von $\left(\frac{f}{\omega}\right)$ bestimmten (quadratischen) „Charakter". Wendet man analog 1) auf die adjungierte primitive („reziproke" Form $\mathfrak{F} = \frac{F}{\Omega}$ an bez. eines Primfaktors δ von Δ, so hat man ebenso:

$$3\text{b)} \qquad \left(\frac{\mathfrak{F}(x)}{\delta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{F}(y)}{\delta}\right),$$

d. h. auch bez. δ kommt der Form f ein durch den Wert von $\left(\frac{\mathfrak{F}}{\delta}\right)$ bestimmter Charakter zu. Alle so resultierenden Einzelcharaktere von f definieren zusammengenommen den „Charakter" von f, und alle f derselben Ordnung, welche gleichen Charakter haben, bilden ein „Geschlecht" von Formen (S. 53). Ist μ resp. ν die Anzahl der ω resp. δ, die nicht in Δ resp. Ω aufgehen, während ϱ die Anzahl der Ω, Δ gemeinsamen Primfaktoren ist, so ist die Anzahl aller überhaupt denkbaren Geschlechter der Ordnung (Ω, Δ), wie leicht abzuzählen gleich $2^{\mu+\nu+2\varrho}$, während die Frage nach der wirklichen Existenz aller dieser Geschlechter auf später verschoben wird.

Um den Leser möglichst allseitig zu orientieren, begründet der Verfasser die Theorie der Geschlechter noch auf einem gänzlich anderen Wege, im Anschluss an die Preisarbeit von Minkowski (1887), auf Grund eines auch sonst sehr nützlichen Satzes von St. Smith (1867). Danach giebt es, falls N eine beliebig gegebene ganze Zahl ist, in der Klasse von f stets eine Form φ mit der Reziproken Φ, so dass für sämtliche gleichstellige Koeffizienten die Kongruenzen herrschen (S. 54):

$$4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi \equiv \alpha x^2 + \alpha' \Omega x'^2 + \alpha'' \Omega\Delta x''^2 \\ \Phi \equiv \alpha'\alpha'' \Omega\Delta x^2 + \alpha''\alpha\Delta x'^2 + \alpha\alpha' x''^2 \\ 1 \equiv \alpha\alpha'\alpha'' \end{array}\right\} \text{mod. } N.$$

Nimmt man dann $N = \Omega\Delta$, so ergeben sich die obigen Charaktereigenschaften von f ganz von selbst (S. 59).

Das dritte Kapitel tritt an das Problem heran, die sämtlichen „Darstellungen" einer gegebenen Zahl resp. einer gegebenen binären (quadratischen) Form durch eine C_2 zu liefern, und schliesst sich direkt an Gauss an (Disq. art. 278—285). Die erste Aufgabe ist in der zweiten enthalten; letztere wiederum kommt (S. 88) auf folgende zwei Fundamentalaufgaben zurück; erstens: über die Äquivalenz oder Nichtäquivalenz zweier Formen derselben Ordnung zu entscheiden; zweitens im Falle der Äquivalenz alle ganzzahligen Transformationen der einen in die andere anzugeben. Da die erste Aufgabe des allgemeinen Hilfsmittels der Reduktion bedarf, bleibt sie dem zweiten Bande vorbehalten; die zweite dagegen, die man noch so vereinfachen kann, dass man nach allen ganzzahligen automorphen S einer C_2 frägt, wird sofort (Kap. IV) in Angriff genommen und auf Grund der üher entwickelten algebraischen Hilfssätze durchgeführt. Die Lösung wird ıdurch erheblich erleichtert (S. 91), dass es gestattet ist, die vorgelegte ı durch eine andere, passend ausgewählte Form C'_2 der nämlichen Klasse ı ersetzen; diese Auswahl geschieht dann so, dass C'_2 den Smithschen ongruenzen in gewisser Weise zu genügen hat. Die bestimmten C_2 ıterscheiden sich dabei insofern wesentlich von den unbestimmten, dass e ersteren nur eine endliche Zahl (ϑ), die letzteren dagegen eine unendıhe Menge automorpher S zulassen (S. 93); bei den letzteren werden aus ıer ersten gefundenen Lösung nach einer einfachen Regel (S. 96) alle ırigen bestimmt. Die Pellsche Gleichung aus der Theorie der binären ıadratischen Formen hat hier ihr Analogon in:

$$t^2 + F_{u^2} = 1 \text{ resp. } 4. \tag{5}$$

Im nächsten Kapitel wird im wesentlichen eine Rekapitulation (siehe ı Analytische Zahlentheorie des Verfassers, 9. Abschn.) der Theorie der ıschlechter der binären Formen gegeben, soweit sie hier erforderlich ist r Behandlung der Darstellbarkeit der binären Formen durch ternäre. r Verfasser unterlässt aber hierbei nicht (S. 127), auch einer gänzıh anderen und prinzipiell wichtigen Definition des Geschlechtes einer zu gedenken, die von Eisenstein (1852) angebahnt und von Smith ausführt ist, einer Definition, die auf dem neuen Hilfsmittel einer (uniıdularen) Substitution mit r a t i o n a l e n Koeffizienten r_{ik} beruht. Wird eine lche Substitution, wenn auch noch der Generalnenner der r prim ist zu 2Δ, mit Σ bezeichnet, so besteht das Kriterium des gleichen Geschlechtes r zwei C_2 der Ordnung (Ω, Δ) darin, dass sie durch eine Σ ineinander erführbar sind.

Das sechste Kapitel ist den positiven Formen C_2 der Ordnung (Ω, Δ) widmet, für die also Ω positiv ausfällt. Und zwar wird für diesen Fall fort zur Aufstellung des dritten und wichtigsten der Eisensteinschen griffe, des „Maßes" geschritten. Man unterwerfe eine C_2 allen uniıdularen S, so resultieren alle mit C_2 äquivalenten Formen, und zwar, e man leicht sieht, jede gleich oft, nämlich ϑ-mal, wenn ϑ, wie oben, ı (endliche) Anzahl der automorphen S von C_2 bezeichnet. Ganz abichend von dem Verhalten der binären Formen, wo die entsprechende ızahl τ nur von der Determinante D abhängt und für positive primitive ırmen im allgemeinen gleich $\frac{1}{2}$ ist, ist hier ϑ mit C_2 selbst veränderlich; ı Klasse von C_2 wird also um so „dichter" an Formen sein, je kleiner oder je grösser $\frac{1}{\vartheta}$ ist, d. h. die Anzahl der Formen einer Klasse ist ıo p o r t i o n a l mit dem Bruche $\frac{1}{\vartheta}$, der somit Maß (D i c h t i g k e i t, weight) r Klasse oder jeder C_2 der Klasse genannt wird (S. 134). Die Summe $\sum \frac{1}{\vartheta_i}$ der Maße mehrerer Klassen C, z. B. der eines Geschlechtes oder ıer Ordnung, heisst das Maß des Geschlechtes resp. der Ordnung. ıß der Darstellung einer Zahl ist das Maß der darstellenden Form, Maß der Darstellung einer binären Form durch eine ternäre das Produkt beider Maße, endlich Maß eines Systems von Darstellungen die Summe der bez. Maße. Über diesen Begriff des Maßes werden einige Sätze abgeleitet, die dann sofort auf die C_2 der Ordnung (1, 1) angewendet werden; letztere bilden nur eine Klasse, repräsentiert durch

$$f = x^2 + x'^2 + x''^2,$$

wo zugleich $\mathfrak{F} = f$.

Hieran schliessen sich die Legendreschen und Gaussschen Sätze über die Darstellung einer Zahl, die nicht von der Form $4n$ oder $8n+7$ ist, als Summe dreier Quadrate, mit Hinzuziehung der von Dirichlet gegebenen Vereinfachungen, sowie der Beweis des berühmten Fermatschen Satzes, dass sich jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellen lässt (S. 150), und seiner Verallgemeinerung, dass jede ganze Zahl als Summe von n (oder weniger) Polygonalzahlen n^{ter} Ordnung darstellbar ist (S. 154).

Kap. 7 geht zur Betrachtung der positiven C_2 überhaupt wieder zurück, um allgemein das Maß eines Geschlechts und sodann einer Ordnung solcher Formen zu ermitteln. Es ist historisch von Interesse, dass Eisenstein, der die Aufgabe zuerst löste (1852), selbst angiebt, er sei zu seinen Resultaten gelangt bei dem vergeblichen Bemühen, die scheinbar weit näher liegende Aufgabe der Bestimmung der Klassenanzahl zu erledigen. Von prinzipieller Wichtigkeit ist dabei der Eisensteinsche Hilfsbegriff der reduzierten Substitutionen. Indem wir uns hier auf $n = 3$ beschränken, sei S eine Substitution von positivem Modul M. Alle aus S durch Zusammensetzung mit allen unimodularen Substitutionen T entstehenden Substitutionen $U = ST$ bilden die „Klasse der mit S äquivalenten" Substitutionen. Wenn S gegeben, so giebt es immer nur eine „reduzierte" T von der Art, dass U die Form hat:

$$6)\qquad U = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \delta' & 0 \\ \eta'' & \vartheta'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

wo δ', δ', δ'' positive ganze Zahlen sind, deren Produkt $= M$ ist, während ε', η'', ϑ'' den Bedingungen genügen:

$$7)\qquad 0 \gtreqless \varepsilon' < \delta', \quad 0 \gtreqless \begin{Bmatrix} \vartheta'' \\ \eta'' \end{Bmatrix} < \delta'',$$

oder kürzer: „In jeder Klasse äquivalenter Substitutionen giebt es stets eine einzige reduzierte Substitution" (S. 164). Nun ist leicht zu sehen, dass aus einer C_2 von der Determinante 1 vermöge einer geeigneten ganzzahligen S das D-fache einer C'_2 mit beliebig vorgeschriebener Determinante D hergeleitet werden kann. Es ist aber von Bedeutung, die sämtlichen S der gemeinten Art zu ermitteln; hierbei darf man sich dann auf die reduzierten beschränken (S. 168); deren Anzahl ergiebt sich einfach als $\Pi(d+1)$, wo δ alle $\varkappa$ Primfaktoren von D durchläuft, d. h.

die Summe aller Teiler von D (S. 171). Soll auch C'_2 eine gegebene Form sein, so erhält man das Kriterium für die Lösbarkeit der Aufgabe, dass C'_2 einem bestimmten Geschlecht G anzugehören hat (S. 174). Somit ergiebt sich $\frac{24 \cdot 2^\varkappa}{\vartheta}$ als Anzahl der reduzierten Substitutionen vom Modul D^2, die C_2 in das D-fache einer Form der Klasse von C'_2 verwandeln; kombiniert man dies Resultat mit dem der S. 171, so erhält man die Eisensteinsche Formel (S. 175) für das Maß M des Geschlechtes G:

$$M = \frac{1}{24 \cdot 2^\varkappa} \Pi(d+1). \tag{8}$$

Mit Benutzung der analytischen Methoden Dirichlets lässt sich das Ergebnis nach Smith und Minkowski noch wesentlich verallgemeinern. Es liegt dabei das fruchtbare Prinzip zu Grunde,, das Maß eines Systemes von Darstellungen gewisser, von Ω und Δ abhängiger Zahlen durch Formen $\mathfrak{F}$ nach zwei Summationsmethoden abzuzählen: durch Vergleichung ergiebt sich dann unmittelbar das Maß des Geschlechtes (S. 191), und daraus auch ohne Schwierigkeit das Maß M der Ordnung (Ω, Δ) selbst (S. 196).

War bisher nur von bestimmten C_2 die Rede, so berichten die beiden folgenden Kapitel, die den Schluss des ersten Abschnitts bilden, über einzelne Untersuchungen aus der schwierigeren und noch weniger entwickelten Theorie der unbestimmten C_2. Hier drängt sich als erste Aufgabe auf die ganzzahlige Auflösung der Gleichung $C_2 = 0$, die wiederum auf die der einfacheren:

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0 \tag{9}$$

zurückkommt (S. 198). Man darf annehmen, dass a, a', a'' zu je zweien relativ prim und ohne quadratische Teiler sind, und überdies

$$D = aa'a'' > 0$$

ist. Dann stellte schon Legendre (1784) mittels eines Reduktionsverfahrens von Lagrange (1767) als Kriterium der ganzzahligen Auflösbarkeit von 9) auf, dass $-a'a''$, $-a''a$, $-aa'$ resp. von a, a', a'' quadratische Reste sind (S. 202). Der Verfasser zieht es aber vor, das Verfahren von Gauss (Disq. Art. 294) anzugeben, das direkt aus der Theorie der C_2 geschöpft ist, sowie bez. der Ableitung aller Lösungen aus einer einzigen einige nicht unwesentliche Ergänzungen von Cantor und Dedekind.

Das obige Kriterium ist übrigens um so interessanter, als es die Grundlage bildete für den ersten (noch unvollständigen) Beweis, der für das quadratische Reziprozitätsgesetz von Legendre (1785) gegeben ist; andererseits enthält jenes Kriterium nach Arndt (1859) einen so durchsichtigen Beweis für den Gaussschen Satz von der Duplikation der (binären) Klassen (siehe die „Elemente der Zahlentheorie"), dass man beide Thatsachen geradezu als äquivalent betrachten kann (S. 221).

Die ganzzahlige Auflösung von 9) zieht auch die rationale Auflösung der Gleichung

10) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

nach sich; das letztere Problem war auf elementarem Wege schon von Euler und vollständig von Lagrange (1767) behandelt worden.

Das Schlusskapitel des ersten Abschnitts beschäftigt sich mit der Klassenanzahl eines Geschlechtes von unbestimmten C_2. Die Eisensteinsche Vermutung (1851), dass jedes Geschlecht unbestimmter C_2 nur aus einer einzigen Klasse bestehe, haben die Untersuchungen des leider kürzlich verstorbenen Arnold Meyer (1871, 1888) in gewissem Umfange bestätigt. Der Verfasser hat sich bemüht, aus den nicht einfachen Darlegungen A. Meyers das herauszugreifen, was auch für einen weniger vorgebildeten Leser verständlich ist. Das Hauptresultat lautet, dass zwei unbestimmte C_2 einer Ordnung (Ω, Δ) für die Ω, Δ relativ prim sind, derselben Klasse angehören, sobald sie desselben Geschlechtes sind, d. i. jedes Geschlecht solcher C_2 besteht in der That nur aus einer einzigen Klasse (S. 251), (ein Satz, den A. Meyer auch auf n Variable ausgedehnt hat). Dadurch erfährt zugleich die Theorie der automorphen S einer unbestimmten C_2 eine wesentliche Ergänzung, insofern eine gewisse dort auftretende Hilfsgleichung immer ganzzahlige Lösungen besitzt (S. 256).

Bei der Besprechung des zweiten Abschnitts, der von den

$$F_2(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

handelt, müssen wir uns kürzer fassen, da allein eine Erklärung einer grossen Reihe von verwickelten Fundamentalbegriffen einen zu grossen Raum beanspruchen würde. Minkowski hat die Theorie der F_2 in voller Allgemeinheit behandelt; der Verfasser zieht es aber vor, wie bei den C_2, die Beschränkung auf F_2 mit ungeraden Determinanten eintreten zu lassen, und schickt zudem behufs leichteren Verständnisses die Theorie der linearen Formen F_1 als Grundlage voraus, wie sie von Smith (1861) und besonders eingehend von Frobenius (1879, 1880) entwickelt worden ist.

Nach einleitenden algebraischen Hilfssätzen über Determinanten und Zusammensetzungen bilinearer Formen werden im Kapitel 2 die „Elementarteiler von Zahlensystemen“ auseinandergesetzt. Man geht am zweckmässigsten aus von der Frage nach allen ganzzahligen Lösungen der m ganzzahligen Gleichungen:

11) $$a_{\alpha_1} x_1 + a_{\alpha_2} x_2 + \cdots + a_{\alpha_n} x_n = a_\alpha \; (\alpha = 1, 2, \ldots m).$$

Das Schema der Koeffizienten a_{ik} heisst ein „rechteckiges“ Zahlensystem a vom „Typus mn“. Verschwinden alle Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems a, nicht aber alle Determinanten r^{ten} Grades, so heisst r nach Frobenius der „Rang“ des Systems. Ist $d_\varkappa$ der grösste (positive) gem. Teiler aller Determinanten $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades des Systems a und setzt man $e_\varkappa = \dfrac{d_\varkappa}{e_{\varkappa-1}}$, so sind die positiven ganzen Zahlen

$$e_1 e_2 \ldots e_r \; (e_{r+1} = e_{r+2} = \cdots = 0)$$

nach Sylvester und Weierstrass die „Elementarteiler“ des Systems a.

Mit Hilfe dieser und anschliessender Begriffe wird im Kap. 3 ein beliebiges System linearer Gleichungen auf den Fall unabhängiger Gleichungen zurückgeführt; aus einer ersten „Fundamentallössung" werden alle übrigen hergeleitet. Der Verfasser unterlässt es nicht, für das letztere Theorem einen weiteren Beweis von Stieltjes (1890/91) vorzuführen, der der Elementarteiler nicht bedarf; er beruht darauf, dass die aus einem Zahlensystem $m(m+\mu)$ zu bildenden Determinanten durch gewisse Identitäten mit einander verknüpft sind (S. 327).

Weiterhin erweist es sich als vorteilhaft, einem ersten Gleichungssysteme $A_\alpha = 0$ ein zweites $B_\beta = 0$ zu „adjungieren", von der Art, dass die Determinanten des einen Koeffizientensystems proportional sind den „komplementären" Determinanten des zweiten Koeffizientensystems (S. 335). Der Verfasser hätte hier erwähnen dürfen, dass diese Methode der Adjunktion den Invariantentheoretikern durch Brill und Clebsch seit 1872 (in der Theorie der Kombinanten) geläufig ist.

Daran knüpft sich die Behandlung der auf Hermite zurückgehenden umgekehrten Aufgabe, alle Systeme eines gegebenen Typus aufzustellen, deren Determinanten gegebene Werte haben (S. 338).

Den Schluss des Kapitels bildet die Entscheidung über die Äquivalenz zweier Systeme von m Linearformen d. i. die gegenseitige Überführbarkeit vermöge einer unimodularen S; sie müssen alsdann ein- und dasselbe „reduzierte" Formensystem besitzen.

Eine in vielfacher Hinsicht analoge Untersuchung gestatten die linearen Kongruenzen (Kap. 4). Nunmehr erst gelangt der Verfasser zur Theorie der F_2 selbst, der wiederum eine algebraische Einleitung (Kap. 5) vorausgeht. Hier findet der bekannte Satz von Weierstrass über die Äquivalenz bilinearer Scharen (S. 378) seine Stelle, ferner die Sätze über die „Fundamentalgleichung" einer Substitution (S. 383), die Herstellung der automorphen S einer F_2 nach Hermite und Frobenius (S. 402), die Kanonisierung der F_2 (S. 409) im Zusammenhange mit dem Trägheitsgesetze (S. 417). Für das ganze Kapitel vergl. die historische, vom Verfasser nicht erwähnte Darstellung des Referenten in seinem „Invariantenberichte", Deutsche Math. Vereinigg. I 1892, S. 106 flg.

Nach diesen ausführlichen Vorbereitungen werden die F_2 selbst in Angriff genommen. Das sechste Kapitel enthält die einfacheren Sätze über die Klassen, Ordnungen und Geschlechter der F_2. Ist

$$F_2 = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

so sei d_0 der grösste gem. Teiler der a; die Zahlen

$$\frac{a_{\alpha\alpha}}{d_0} \quad \text{und} \quad 2\frac{a_{\alpha\beta}}{d_0}\,(\alpha \gtrless \beta)$$

haben dann den gem. Teiler 1 oder 2: je nachdem setzt man $\sigma_1 = 1$ oder 2. Jeder F_2 sind eine Anzahl von quadratischen „Begleitformen" zugeordnet, deren Koeffizienten gewisse Unterdeterminanten der Determinante der a

sind (bez. der Begleitform hätten neuere Untersuchungen von Rados erwähnt werden können). Bildet man für diese Begleitformen die entsprechenden Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$, so bilden alle d und σ nebst dem Trägheitsindex τ die „arithmetischen Invarianten“ von F_2, die für alle Formen einer Klasse dieselben sind.

Alle (primitiven, für die $d_0 = 1$) F_2 mit denselben Invarianten bilden eine „Ordnung“ O; solcher giebt es eine endliche Anzahl, deren jede eine endliche Anzahl von Klassen enthält (S. 427). Die d werden zweckmässig durch gewisse andere Invarianten O ersetzt.

Wendet man die „Grundformel“, die ganz analog zu 1) ist, auf die (primitiven) Begleitformen von F_2 an, so kommen diesen und damit F_2 selbst nach Smith bestimmte quadratische „Geschlechts-Charaktere“ zu (S. 455), die den Primfaktoren der Invarianten O entsprechen. Eine umfassendere Definition des Geschlechts von Minkowski, die auf der Darstellung gewisser Zahlen durch die Begleitformen beruht (S. 456), kann hier nur angedeutet werden. Nachdem das Kap. 7 einige Hilfssätze über quadratische Kongruenzen entwickelt hat, wird im Kap. 8 eine abermalige neue und noch zweckmässigere Definition des Geschlechts gegeben: zwei Klassen heissen gleichen Geschlechts, wenn sie nach jedem Modul kongruent sind (S. 516). Kap. 9 ist der schwierigen Theorie der Darstellungen einer F_2 von $\nu < n$ Variabeln durch eine F_2 von n Variabeln gewidmet. Die hierdurch gewonnenen Gesichtspunkte werden zum Beweise des Hauptsatzes verwendet, dass die als denkbar bezeichneten Geschlechter auch wirklich existieren (S. 591), in der Beschränkung auf den einfacheren Fall, wo die Determinante von F_2 ungerade und die erste σ-Invariante gleich 1 ist.

Das Schlusskapitel handelt vom Maße der positiven ($\tau = 0$) F_2, mit Anwendungen auf Darstellungen einer Zahl als Summe von 4 und einer ungeraden als Summe von 5, 6, 7, 8 Quadraten. Ist, wie früher bei den C_2, $t(F)$ die (endliche) Anzahl der automorphen S einer F_2, so wird der Wert $\frac{1}{t(F)}$ als Maß von F_2 oder der Klasse von F_2 eingeführt (S. 597); das Maß einer Ordnung oder eines Geschlechtes ist wiederum die Summe aller Maße der in der Ordnung resp. dem Geschlechte enthaltenen Klassen. Den eigentlichen Kern des Kapitels bildet die Ableitung des allgemeinen Ausdrucks, den Minkowski für das Maß eines beliebigen Geschlechts geliefert hat, bei dem die Bedeutung der einzelnenen Teile, aus denen sich der Ausdruck des Maßes zusammensetzt, klar hervortritt (S. 623 u. flg.). Indem wir uns mit diesen kurzen genetischen Hinweisen begnügen, fassen wir unsere Gesamtmeinung dahin zusammen, dass der Verfasser seiner Aufgabe, die im wesentlichen eine pädagogische war, bis auf die etwas mangelhaften Litteraturangaben vollkommen gerecht geworden ist. Selbst ein Student in jüngeren Semestern dürfte im stande sein, den klaren Darlegungen des Buches zu folgen. Wir freuen uns im voraus auf die in Aussicht stehenden Fortsetzungen und möchten den

Verfasser bitten, in der Fortführung seines überaus nützlichen Unternehmens trotz vieler Schwierigkeiten nicht zu erlahmen.

W. Fr. Meyer.

Die **physikalischen Erscheinungen und Kräfte, ihre Erkenntnis und Verwertung im praktischen Leben.** Von L. Grunmach. Sonderabdruck aus dem „Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrie". Leipzig 1898, Verlag von Otto Spamer. 427 S.

Wer immer sich für die Fortschritte der Physik interessiert, der findet in dem vorliegenden Sonderabdruck aus dem Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien nicht nur reichliche Nahrung, sondern auch neue Anregungen, wozu namentlich die Behandlung des Stoffes und die zahlreichen Abbildungen sehr viel beitragen. Die bedeutendsten Physiker sind im Bild wiedergegeben, und die wichtigsten Vorgänge aus ihrem Leben werden mitgeteilt. Zwischen den älteren Bildern von Wilh. Weber und Werner Siemens ist ein Jugendbildnis von Michael Faraday eingeschaltet. Wir halten dies nicht für richtig, zumal dieses Bild Faradays Wesen nicht erkennen lässt. Da aber ein gutes Bild von Faraday aus seiner späteren Zeit existiert, so hätte dieses hier aufgenommen werden sollen. — Die Errungenschaften der Physik sind in den letzten Jahrzehnten für das öffentliche Leben von einer solch einschneidenden Wirkung geworden, dass die Beschäftigung mit Physik als ein notwendiges Bildungsmittel anzusehen ist. Zur Verbreitung physikalischer Bildung ist das vorliegende Buch sehr zu empfehlen.

B. Nebel.

F. Klein und A. Sommerfeld. **Über die Theorie des Kreisels.** Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. Leipzig 1897, Verlag von B. G. Teubner. 196 S.

—— Heft II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Leipzig 1898, Verlag von B. G. Teubner. 316 S.

Von dem in drei Heften erscheinenden Werke liegen die beiden ersten vor; davon enthält das erste Heft die grundlegenden Betrachtungen über die Prinzipien der Mechanik, soweit sie bei dem Kreiselprobleme in Betracht kommen. Das zweite Heft umfasst eingehend die mathematische Seite der Theorie, und zwar die explizite Darstellung der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels durch elliptische Funktionen. Das dritte Heft soll zeigen, inwiefern sich die im zweiten Hefte entwickelte reine Theorie der Kreiselbewegung mit der Erfahrung deckt, beziehungsweise welche Änderungen vorgenommen werden müssen, um die Theorie weiter auf die Physik und Astronomie anwenden zu können. Sodann sollen die an dem speziellen Beispiele gewonnenen Gesichtspunkte für die Auffassung der allgemeinen

Mechanik nutzbringend verwertet werden. Den Schluss werden einige Streifzüge in das Gebiet der modernen theoretischen Physik bilden. — Verfasser hebt auch den längst bekannten aber keineswegs abgestellten Fehler hervor, dass wegen der abstrakten Vortragsweise an unseren Schulen sich die Schüler bei der Behandlung eines speziellen Problemes häufig sehr ungeschickt anstellen. Während man bisher diesem Mißstand durch Übungsstunden zu begegnen bestrebt war, so bricht der Verfasser mit der bestehenden Methode, indem er die einschlägigen Gebiete der Mechanik an der Hand eines speziellen Beispiels behandelt, wodurch der Vortrag viel nachhaltiger auf den Schüler wirkt. Um aber die an sich sehr interessante Theorie der Kreiselbewegung nicht von vornherein unübersichtlich zu machen, muss die Definition des Kreisels enger gefasst werden, als dies im gewöhnlichen Leben der Fall ist, namentlich ist es die Festlegung eines Punktes der Symmetrieaxe im Raume. — Nicht unerwähnt sei, dass der Verfasser auch die ausländische, insbesondere die englische Litteratur über den vorliegenden Gegenstand berücksichtigt. — Hoffentlich erscheint auch in Kürze das dritte Heft, wodurch ein Werk zum Abschluss gelangt, das in seiner Eigenart in Deutschland bahnbrechend zu wirken vermag.

B. Nebel.

The mathematical theory of the top, lectures delivered on the occation of the sesquicentennial celebration of Princetown University, by Felix Klein. With illustrations. New-York 1897, Charles Scribners Son. 74 S.

Die vier nunmehr im Druck erschienenen Vorlesungen wurden am 12.—15. Oktober 1896 anlässlich des Jubiläums der Princetown Universität gehalten und beziehen sich auf eine neue Behandlungsweise der Theorie des Kreisels, welche der Verfasser in Verbindung mit A. Sommerfeld in einem grösseren Werke zur Zeit in Deutschland erscheinen lässt. Das Problem wird derart behandelt, dass sich die Resultate nicht allein auf eine besondere Klasse von Fällen in der Dynamik anwenden lassen, sondern dass auch die Astronomie und Physik Nutzen daraus ziehen kann. Die Definition des Kreisels weicht von der landläufigen hinsichtlich spezieller Annahmen ab, wozu insbesondere die Festlegung eines Punktes der Symmetrieaxe im Raume gehört.

B. Nebel.

Leçons élémentaires d'acoustique et d'optique, à l'usage des candidats au certificat d'études physiques, chimiques et naturelles. Par Ch. Fabry. Paris 1898, Gauthier-Villars et fils. 356 S. 7 Fr. 50 c.

Verfasser stellte sich in dem vorliegenden Werke die Aufgabe, diejenigen Teile der Physik, die sich mittels schwingender Bewegungszustände erklären lassen, nämlich die Akustik und Optik, in zusammenfassender Form zur Darstellung zu bringen, und zwar in einer Weise, dass sie von am, der die Elementarmathematik beherrscht, leicht verstanden werden an. Der Schwerpunkt bei dieser Behandlungsweise wurde mehr auf Nachweis des logischen Zusammenhanges der Thatsachen und Gesetze egt, als auf eine erschöpfende Beschreibung der einzelnen Probleme l der zu ihrer Darstellung nötigen Apparate. Um aber stets Fühlung : der Wirklichkeit zu haben, fügte der Verfasser eine Reihe von Zahlenspielen an geeigneten Stellen ein. — Das erste Kapitel behandelt ganz allgemeinen die Vibrationsbewegungen, deren einfachste Anwendung das zweite Kapitel umfassende Akustik darbietet. In dem dritten pitel werden die grössere Schwierigkeiten darbietenden Probleme der Optik n eingehenden Studium unterzogen. Besondere Rücksicht ist auf die dierenden genommen, welche sich auf das Examen für Physik, Chemie l Naturwissenschaften vorbereiten.

B. Nebel.

---

e Lehre vom Schuss und die Schusstafeln. Auf dienstliche Veranlassung bearbeitet von Heydenreich. Berlin 1898, Verlag von Ernst Siegfried Mittler & Sohn. I. 67 S., II. 109 S. und 79 S., ballistische Tafeln und Rechenmuster.

Das vorliegende Werk ist aus rein praktischen Bedürfnissen entnden, da für den zweijährigen Unterricht in der Ballistik an der verigten Artillerie- und Ingenieurschule zur Zeit ein militärisches Handah fehlte, in welchem die Grundzüge der Ballistik und die Schusstafeln d deren Einrichtungen sachgemäss behandelt werden. Die Theorie rd nur insoweit berücksichtigt, als sie durch die praktischen Schiessversuche stützt wird. Die höhere Mathematik wurde absichtlich ausgeschlossen, ı jedem Offizier das Studium zu erleichtern. Er soll in den Stand gest werden, die Leistungen irgend einer Geschützart zu beurteilen und undsätze für neue Geschütze bezw. Geschosse aufstellen zu können. Insondere soll er sich ein klares Bild von den Leistungen der neuesten serer Geschützarten machen können, die natürlich der Öffentlichkeit nicht isgegeben werden können. In erster Linie wird das Buch ein vadeecum für den Offizier sein.

B. Nebel.

---

ysikalische Aufgaben für die oberen Klassen höherer Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Von W. Müller-Erzbach. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin 1898, Verlag von Julius Springer. 167 S. Preis Mk 2.40.

Verfasser war bestrebt, dem an sich kurz bemessenen Physikunterricht lurch aufzuhelfen, dass er den Übungsstoff in der Mathematik aus der rsik wählt und dadurch gleichzeitig den mathematischen Unterricht anender gestaltet. Durch eine derartige sachgemässe Behandlung kann Lehrer wahre Wunder bei seinen Schülern erzielen, sodass die Mathematik an Gymnasien nicht, wie es früher der Fall war, von den meisten Schülern gehasst würde. Um dem Lehrer die Auswahl zu erleichtern, hat der Verfasser grosse Sorgfalt auf die Einteilung verwendet, so dass in jedem Zweig der Physik die schwierigeren Aufgaben von den einfacheren leicht gefunden werden können. Durch die in den Lösungen vielfach enthaltenen Fingerzeige ist der strebsame Schüler befähigt, das Buch ohne die Hilfe des Lehrers verwenden zu können. Das Buch sei bestens empfohlen.

B. Nebel.

Oeuvres scientifiques de L. Lorenz. Revues et annotées par H. Valentiner. Publiées aus frais de la fondation Carlsberg. Tome premier. Deuxième fascicule. Copenhague 1898, Librairie Lehmann & Stage. 318 S.

Der zweite Teil des ersten Bandes umfasst vier Arbeiten, von denen die beiden ersten sich auf experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Brechungskoeffizienten beziehen. In der dritten Arbeit teilt der Verfasser seine Theorie der Dispersion mit und leitet die allgemeinen Gesetze auf eine neue Weise ab, ohne sich auf seine früheren Arbeiten zu stützen. Auch in der letzten Arbeit über das reflektierte und gebrochene Licht in einer transparenten Sphäre werden die Formeln auf eine neue und zugleich einfachere Methode abgeleitet, dass eine Bezugnahme auf die vorhergehende Arbeit nicht erforderlich ist. — Die von dem Herausgeber hinzugefügten Bemerkungen sind hinter jeder einzelnen Arbeit eingeschaltet.

Mögen auch die weiteren Teile dieser wissenschaftlichen Werke in Bälde einem grösseren Leserkreis zugänglich gemacht werden!

B. Nebel.

Theoretical mechanics, an introductory treatise on the principles of dynamics with applications and numerous examples by A. E. H. Love. Cambridge 1897: At the university press. 379 S. Preis 12 sh.

Das Buch ist in erster Linie für Studierende bestimmt, die, im Besitz der ersten Kenntnisse der höheren Mathematik, in die Mechanik eingeführt werden sollen. Der erste Teil enthält die wichtigsten Definitionen und behandelt die verschiedenen Arten der Bewegung. Der zweite Teil umfasst die Prinzipe der Mechanik. Der dritte und letzte Teil zieht einzelne spezielle Probleme in Betracht, wobei die Methoden der Behandlungsweise und die Anwendung der Prinzipe besonders berücksichtigt werden. Zahlreiche, an passenden Stellen eingestreute Übungsbeispiele haben den Zweck, den Studierenden mit den neuen, ihm noch ungewohnten, abstrakten Lehren vertraut zu machen. Das Buch sei jedem Studierenden bestens empfohlen.

B. Nebel.

Die Dynamik der Systeme starrer Körper in zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen von Edward John Routh. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. Felix Klein in Göttingen. Leipzig 1898, Verlag von B. G. Teubner.

Erster Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. 472 S.
Zweiter Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. 544 S.

Die deutsche Ausgabe erfolgte im wesentlichen nach der 6. Auflage s englischen Originals und wird durch ein Vorwort von Prof. Felix Klein Deutschland eingeführt, in welchem die eigenartigen Verhältnisse er-hnt werden, vermöge deren ein in England weit verbreitetes und in hem Ansehen stehendes Buch in Deutschland nahezu unbekannt sein nn. Im wesentlichen liegt der Unterschied in der Unterrichtsmethode. ährend in England der Nachdruck auf die Durcharbeitung der einzelnen awendungen gelegt wird, so bevorzugt der Deutsche in seinem Unterricht n systematischen Aufbau, um einen allgemeinen Überblick zu gewinnen, bei zur eigenen selbständigen Ideenbildung angeregt wird. Bei der utschen Behandlungsweise der Mechanik wird dem Studierenden die sung spezieller Probleme zunächst schwierig; er stellt sich gleichsam mit m ihm in die Hände gegebenen Handwerkszeug etwas ungeschickt an. In eser Beziehung ist das englische Werk eine vorzügliche Ergänzung für n deutschen Unterricht, indem der Schüler durch die zahlreichen Bei-iele mit der Materie aufs Innigste vertraut gemacht wird. Durch das erk von Routh erhält aber der Deutsche eine Fülle wertvoller Anreg-ngen, die ihm vor Augen führen, wie unumgänglich notwendig es ist, ich die ausländische Litteratur zu verfolgen. — Durch die Bemerkungen d Notizen von H. Liebmann und Felix Klein wird auch die nicht eng-che Litteratur berücksichtigt, und das Buch für den Leser in angenehmster eise ergänzt. — Namentlich den Studierenden an unseren technischen chschulen sei das Routhsche Werk aufs Wärmste empfohlen.

B. Nebel.

---

orlesungen über Technische Mechanik. Von August Föppl. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner.

Dritter Band: Festigkeitslehre. Mit 78 Figuren im Text. 1897. 472 S.
Erster Band: Einführung in die Mechanik. Mit 78 Figuren im Text. 1898. 412 S.

Das vorliegende Werk schliesst sich eng an die Vorlesungen des Ver-ssers an, wobei sich namentlich die Ansprüche genau nach den allmäh-ch zunehmenden mathematischen Kenntnissen richten. Da die Vorlesungen vier Teile zerfallen, so wird auch das Werk in vier Bänden erscheinen, n denen der erste eine Einführung in die Mechanik enthält, während e drei übrigen die graphische Statik, die Festigkeitslehre und die Dyna-ik zum Gegenstand haben. In erster Linie werden die Bedürfnisse der axis berücksichtigt; darüber wesentlich hinauszugehen, hält der Verfasser für bedenklich bei den grossen, an den Techniker gestellten Anforderungen. Wer sich eingehender mit einzelnen Problemen zu beschäftigen wünscht, der wird auf die ausführlichen Handbücher verwiesen. Diese enthalten für die meisten Studierenden viel zu viel, so dass sie sich mehr abgestossen als angezogen fühlen und dem Gegensatz zwischen Theorie und Praxis huldigen. Was der Verfasser bietet, soll den Anspruch auf Gründlichkeit machen dürfen, damit der Studierende auf einem guten Fundament weiter bauen kann. Deshalb sind die angezogenen Beispiele durchgerechnet. Sehr zu wünschen wäre es, dass auch der zweite und vierte Band in Bälde erscheint, damit die, welche die Vorlesungen nicht hören können, in der Benutzung des Werkes nicht zu sehr hintangehalten sind.

B. Nebel.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Von Hans Januschke. Mit 95 Figuren im Text. Leipzig 1897, Verlag von B. G. Teubner. 455 S.

In dem vorliegenden Buch zeigt der Verfasser, dass das Energieprinzip in der gesamten Physik gilt, und bringt es daher in allen Gebieten derselben zur Anwendung. Derartige Versuche sind nicht neu, auch wirkt eine derartige Studie an sich recht fruchtbringend. Wird aber ein solches Buch dem Schulunterricht zu Grunde gelegt, wie es nach dem Vorwort der Fall ist, so können wir uns damit solange nicht einverstanden erklären, solange die überwiegende Mehrzahl der heutigen Physiker dieser Auffassung noch nicht beigetreten ist. Der Schüler soll nicht auf der Hochschule zur Erkenntnis kommen, dass er bis jetzt einen Privatweg geführt worden ist, über dessen Gangbarkeit sich die Öffentlichkeit noch nicht entschieden hat. Die Einheit der Kraft heisst Dyne. Der deutsche Sprachgebrauch kennt keine Volumseinheiten. Die zahlreichen, in den Text aufgenommenen Aufgaben, die in der Mehrzahl aus anderen Aufgabensammlungen stammen, tragen wesentlich zur gründlichen Beherrschung des Stoffes bei.

B. Nebel.

Oreste Murani. **Luce e raggi Röntgen**, con prefazione del R. Ferrini, con 15 Tavole e 157 incisioni intercalate. Milano 1898, Ulrico Hoepli.

Das in zehn Kapitel zerfallende Buch beginnt mit dem Wesen des Lichtes, seinen verschiedenen Eigenschaften und Gesetzen, wobei auch die Hertzschen Versuche eingehend behandelt werden. Mit der Fluoreszenz schliesst das erste Kapitel. Das zweite Kapitel umfasst die zahlreichen Erscheinungen, die bei der elektrischen Entladung in verdünnten Gasen auftreten. Das dritte Kapitel ist der Entstehung der Röntgenstrahlen gewidmet und enthält einige Abbildungen, aus denen sich der Unterschied gegenüber den bisherigen Lichtstrahlen zu erkennen giebt. In dem vierten

Kapitel werden die verschiedenen optischen Eigenschaften der Röntgenstrahlen durch Versuche erläutert und eine Reihe typischer Röntgenröhren mitgeteilt. Die photographische Fixierung der mittels Röntgenstrahlen erhaltenen Abbildungen und deren praktische Verwendbarkeit bilden den Gegenstand des fünften Kapitels. Die folgenden Kapitel sind gerichtet auf die besonderen Untersuchungen einzelner Forscher und die zu der Erzeugung der Röntgenstrahlen nötigen Apparate. Rühmend anzuerkennen ist die Litteraturangabe nach jedem einzelnen Kapitel. Wer sich mit dem Gebiet der Röntgenstrahlen bekannt zu machen wünscht, dem sei das vorliegende Buch bestens empfohlen.

B. Nebel.

Die Optik der elektrischen Schwingungen. Experimental-Untersuchungen über elektromagnetische Analoga zu den wichtigsten Erscheinungen der Optik. Von A. Righi. Nebst Zusätzen des Verfassers ins Deutsche übertragen von B. Dessau. Mit 40 Abbildungen. Leipzig 1898, O. R. Reisland. 267 S. Preis M. 6.

In dem vorliegenden Buch sind im wesentlichen die in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichten Untersuchungen des Verfassers vereinigt, denen in der deutschen Ausgabe noch einige neue hinzugefügt sind. Nach vielfachen Versuchen gelang es, solche Apparate zu konstruieren, die wesentlich kürzere Wellen lieferten als die Hertzschen Apparate, wodurch es ermöglicht war, die den wichtigsten Erscheinungen der Optik analogen bei den elektromagnetischen Wellen zu studieren. Zunächst macht uns der Verfasser mit der Konstruktion und der Herstellungsweise der von ihm verwendeten Apparate vertraut und untersucht in den folgenden Kapiteln an den elektromagnetischen Wellen die Interferenzerscheinungen, insbesondere auch die, welche den optischen Interferenzversuchen mit dünnen Platten analog sind. Sehr interessant sind die Versuche, welche die Beugungserscheinungen in der Optik nachahmen, an die sich die Erscheinungen anschliessen, die von dielektrischen Massen mit Hilfe der Beugung erzeugt werden. Die Absorption der elektromagnetischen Wellen durch verschiedene nicht metallische Körper, wie Holz und Spiegelglas, lehrt, dass sich diese Stoffe jenen Wellen gegenüber als nicht vollkommen transparent verhalten. Die Analogie mit der Optik dehnt sich auch auf isotrope und anisotrope Körper aus, was sich aus der Reflexion der Wellen zu erkennen giebt. Hierher gehören auch die Versuche, durch welche mittels Reflexion an Metallplatten circular oder elliptisch polarisierte elektromagnetische Wellen erzielt worden sind. Daran reihen sich die Versuche, welche die Brechung und Totalreflexion zum Gegenstand haben, sowie die den optischen Erscheinungen an Prismen, Linsen, totalreflektierenden Prismen, der durch Totalreflexion erzeugten circularen und elliptischen Polarisation durchaus gleichen Vorgänge. Auch die Doppelbrechung der elektromagnetischen Wellen liess sich an Tannenholz, an Krystallen, insbesondere an dem Selenit nachweisen. Bei diesen Versuchen wurden aber die häufig not-

[illegible] mathematischen Erörterungen nicht ausser acht gelassen; sechs [illegible] Beilagen sind dem Buche beigeschlossen. Dem Verfasser gebührt das grosse Verdienst, den experimentellen Nachweis erbracht zu haben, dass, abgesehen von der grossen Verschiedenheit der Wellenlängen, das Verhalten der elektromagnetischen Wellen identisch ist mit dem der Lichtwellen, wodurch die Hypothese von der elektromagnetischen Natur der Lichterscheinungen ungemein gekräftigt wird. Die der deutschen Übersetzung beigefügten beiden inzwischen erschienenen Abhandlungen betreffen die Bestimmung des Brechungskoeffizienten des Selenits für elektromagnetische Wellen und seine Orientierung in einem homogenen elektrischen Felde. — Von welch grossem Wert das Buch sowohl für die Physik im allgemeinen, als auch für den Experimentator ist, der die Versuche nachmachen will, darüber ein Wort zu verlieren, erscheint gänzlich überflüssig.

B. Nebel.

Grundzüge der kinetischen Naturlehre. Von Baron N. Dellingshausen. Heidelberg 1898, Carl Winters Universitätsbuchhandlung. Preis M. 10. [illegible] S.

In dem vorliegenden Buche machte der Verfasser den Versuch, seine in früheren Werken ausgesprochenen Theorien in eine mathematische Form zu bringen, wodurch sie nach Kant erst zur eigentlichen Wissenschaft [illegible]. Ermutigt durch die Erfolge der Physik, nach welchen sich der Schall, das Licht, die Wärme, die Elektrizität als Bewegungszustände dar[illegible] lassen, unternimmt es der Verfasser, die ganze Naturlehre auf Be[illegible] aufzubauen, und zwar begnügt er sich nicht damit, die sämt[illegible] Naturerscheinungen durch Bewegungen zu erklären, sondern er ist [illegible] auch die Verschiedenheit und Veränderlichkeit der Körper auf die [illegible] zurückzuführen. Eine atomistische Theorie mit ihrem Drum und [illegible] demnach nicht mehr. Die Grundlage der kinetischen Natur[illegible] die auf Erfahrung beruhende Thatsache der Bewegung, wozu [illegible] Mechanik die allgemeinen Bewegungsgesetze benützt werden. [illegible] die „Kraft" nur als ein Rechnungswert auf und die „Masse" [illegible] konstanter Koeffizient. Vollständig aufgenommen wird die [illegible] Wärmetheorie. Am interessantesten ist natürlich, die Ver[illegible] und Veränderlichkeit der Körper durch Bewegungen zu er[illegible] welche in den Körpern ein bestimmter Arbeitsvorrat be[illegible] Der innere Arbeitsvorrat der Körper wird unter der Form [illegible] dargestellt, weil dadurch der Begriff der Kraft ganz aus[illegible] und weil dazu nur eine als gegeben vorauszusetzende [illegible] und ein konstanter Koeffizient als Masse erforderlich ist. [illegible] derartigen Aufgabe ist aber zunächst die Verständigung [illegible] inneren Bewegungen erforderlich, weshalb diese den [illegible] bilden. — Leider hat der unerbittliche Tod dem Ver[illegible] Feder aus der Hand genommen, so dass das Werk nicht allen Teilen vollendet ist; gleichwohl hat aber der Sohn als Heraus-ber auch die unvollendeten Abschnitte mit aufgenommen, um dem erke die Originalität zu wahren, und damit andere leichter darauf auf-uen können. Das Buch wirkt sehr anregend und ist daher fruktifizierend ch für denjenigen, welcher sich den darin niedergelegten Anschauungen sht anzuschliessen vermag.

B. Nebel.

undriss der Festigkeitslehre. Zum Gebrauch an Handwerkerschulen insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen, sowie zum Selbstunterricht. Bearbeitet von Dr. E. Glinzer. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 98 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln sowie mit zahlreichen Übungsbeispielen und Aufgaben. Dresden 1898, Verlag von Gerhard Kühtmann. 148 S.

Die zweite Auflage des Buches ist nicht nur überarbeitet, sondern ch nach einigen Richtungen, die durch das praktische Bedürfnis hervortreten sind, erweitert worden. Durch die zahlreichen Übungsbeispiele ist dem Schüler leicht, sich eine gewisse Sicherheit bei den Belastungsrechnungen anzueignen, ohne unter den Formeln zu leiden. Das Buch daher in den betreffenden Schulen mit grossem Nutzen zu verwenden.

B. Nebel.

er die Bestimmung der Koeffizienten der Gaussschen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus für das Jahr 1885 und über den Zusammenhang der drei erdmagnetischen Elemente untereinander. Von H. Fritsche. St. Petersburg 1897. 85 S.

Verfasser führt den Nachweis, dass man nicht bei der Berechnung r von Gauss seiner Zeit mit Recht nur auf die Zahl 24 beschränkten effizienten stehen bleiben dürfe, wie dies bei Erman und Petersen, Petersen d Neumayer, sowie Quintus Icilius der Fall war, sondern dass man in r Berechnung der Koeffizienten solange weiter gehen müsse, bis durch nziehung von neuen Koeffizienten der Unterschied zwischen Rechnung d Beobachtung nicht mehr vermindert wird und die Reste einen mög-hst zufälligen Verlauf zeigen. Dies trifft ein beim Übergange von P^{VI} P^{VII}. Der Verfasser hat im ganzen 63 Koeffizienten berechnet, wobei nicht die Methode der kleinsten Quadrate, sondern die der kleinsten d grössten Koeffizienten benützt hat. Das Lesen des Buches ist er-hwert durch die etwas mangelhafte Lithographie der Handschrift des rfassers.

B. Nebel.

e elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz. Von Franz Kerntler. Budapest 1897, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft. 68 S.

Die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen. Nachtrag zu der Abhandlung: „Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz.“ Von Franz Kerntler. Budapest 1898, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft. 18 S.

Der Verfasser sucht das von ihm gefundene, aus dem Stefanschen Gesetz abgeleitete Elementargesetz dahin zu prüfen, dass das Experiment die Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen liefern soll. Der Nachweis soll geführt werden an zwei verschieden grossen Quadraten, von denen das grosse feste in der Ebene des magnetischen Meridians liegt, während das kleine bewegliche Quadrat mit seinem Mittelpunkt in dem des grossen liegt. Unter Voraussetzung bestimmter Stromstärken soll nun das Drehungsmoment, welches das kleine Quadrat bei seiner durch den Erdmagnetismus bestimmten Lage von dem Quadrate erhält, nach den verschiedenen Gesetzen berechnet und dann mit dem Experiment verglichen werden. Schliesslich wird noch angedeutet, in welcher Weise sich das Experiment etwa anstellen liesse.

B. Nebel.

Essai sur les éléments de la mécanique des particules. Par H. Majlert. Ire Partie Statique particulaire avec 14 planches. Neuchatel 1897, Attinger frères et Paris, Gauthier-Villars et fils. 242 S. Preis 10 Fr.

In dem ersten Kapitel stellt der Verfasser die Definitionen derjenigen Grössen zusammen, mit denen in den folgenden Kapiteln operiert wird. Es ist dies um so nötiger, da die Begriffe vielfach verschieden aufgefasst werden. Die Definition der Masse in der Physik und Chemie weicht von der der Mechanik wesentlich ab, auch die Astronomie hat ihre besondere Definition für die Masse. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den Anordnungen der Elementarkugeln, mit den Atomen und ihrer Systematik und mit der inneren Struktur der Körper. Die einfachen Moleküle und die Aggregatzustände der einfachen Körper bilden den Gegenstand des dritten Kapitels. Das vierte Kapitel ist den chemischen Verbindungen gewidmet, während das fünfte Kapitel die Untersuchungen über die starren Körper und die Einwirkung mechanischer Kräfte auf die festen Körper enthält. In dem letzten Kapitel finden wir die Elementarbegriffe der Physik und Mechanik. Die Betrachtungen sind im wesentlichen geometrischer Natur, die durch zahlreiche, sauber durchgeführte Zeichnungen unterstützt werden.

B. Nebel.

Festrede im Namen der Georg-Augustus-Universität zur akademischen Preisverteilung am 2. Juni 1897, gehalten von Eduard Riecke. Die Prinzipien der Physik und der Kreis ihrer Anwendung. Göttingen 1897, Vandenhoek & Ruprecht. 40 S. Preis 30 Pfg.

Den Ausgang bildet Galilei, dem wir durch die Entdeckung der Beschleunigung bei der Fallbewegung das Prinzip der Masse verdanken.

araus folgen die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft, denen ne wichtige Rolle in dem Satz von der Erhaltung der Energie zukommt, r durch Mayer verallgemeinert worden ist. Von dem Prinzip der kleinsten 'irkung wird an der Hand eines Beispieles nur eine annähernde Vorellung von seinem Inhalt gegeben, während von der strengen Herleitung tzt abgesehen wird. Die Rede ist in etwas erweiterter Form gedruckt ıd zwar sind die hinzugefügten Teile durch kleinere Schrift kenntlich ɜmacht worden. Der zweite Teil der Broschüre enthält Universitätsıgelegenheiten, Preisverteilungen u. s. w.

B. Nebel.

Fragmente zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) und zur Mechanik des Himmels von A. Sinram. Hamburg 1897, Lucas Gräfe & Sillem. 31 S. Preis M. 1.

Fragmente II zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) und zur Mechanik des Himmels von A. Sinram. (Berichtigungen und Ergänzungen der Fragmente vom 1. Mai 1897.) Hamburg 1897, Lucas Gräfe & Sillem. 14 S.

Verfasser will die Newtonsche Gravitationstheorie durch seine Wärme- und Kältetheorie ersetzen und zwar geht er von der Annahme aus, dass es nur eine einzige Kraft gebe, nämlich die das Universum durchziehenden Wärmeschwingungen, wodurch eine die Kälte belebende und Bewegung erzeugende Ursache in die Erscheinung tritt. Es sei also die Wärme in Verbindung mit der Kälte als das perpetuum mobile und als die autokratische Herrscherin im Raume anzusehen. „Incitations-Theorie“ wird diese neue Theorie genannt, weil nach ihr durch die Wirkung der Wärmeausstrahlung in den kalten Weltraum eine Erweckung, Wachrufung, Erregung, Belebung der ruhenden Thätigkeit der kalten Weltäthermoleküle und mit dieser Erweckung und Lebendigmachung der schlummernden Kältemoleküle die Erzeugung der Kältekraft stattfindet. Die Berechnung zur Aufstellung einer solchen Theorie wird gestützt auf das Dovesche Bild von der ruhig brennenden Lichtflamme, zu der von allen Seiten ein Zuströmen der kälteren Teile stattfindet. Dieses Bild wird auf unser Sonnensystem übertragen. Die vom Verfasser auf rotem Zettel erbetene Meinungsäusserung lautet kurz: „Mir fehlt der Glaube.“

B. Nebel.

Eine Theorie des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprinzipes von Dr. Ch. Ernst. München 1897, Verlag von Dr. H. Lüneburg. 64 S. Preis M. 2.

Da ein elektrischer Strom in jeder Strombahn Energie produziert, konsumiert und transportiert, so ist er als Energiestrom anzusehen. Als Einheit der Energie wird diejenige gewählt, welche in dem in der Praxis eingeführten elektrischen Maßsystem üblich ist, nämlich ein Joule. Daraus folgt unmittelbar die Einheit des Effektes. Ausgehend von der produzierten Wärmeenergie, werden die verschiedenen Gesetze aufgesucht, nach denen die verschiedenen Energien in einer Strombahn erzeugt und verbraucht werden und zwar werden die wichtigsten Sätze des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik sämtlich aus dem Faradayschen Induktionsgesetze deduktiv abgeleitet. Absichtlich wurde der Begriff der Elektrizitätsmenge vermieden, um nicht die Bedeutung einer materiellen Quantität damit zu verknüpfen. Daher wurde auch die Stromstärke nicht mit Hilfe der Elektrizitätsmenge definiert. Für den Techniker hat eine solche Darstellung des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprinzipes etwas Bestrickendes, da für ihn die Energie der nervus rerum ist.

B. Nebel.

Dott. Giovanni Vailati. **Il metodo deduttivo come strumento di ricerca.** Lettura d'introduzione al corso di Lezioni sulla Storia della Meccanica tenuto all'Università die Torino, l'anno 1897/98. Torino, Roux Frassati e Co. 44 S. Prezzo L. 1.50.

Im wesentlichen handelt es sich um eine geschichtliche Studie, die bis auf Aristoteles zurückgreift.

B. Nebel.

Soleil, terre et électricité. (Un chapitre de la théorie nouvelle de l'univers.) Par le Prof. Jv. Skwortzow. Kharkow 1898. 8 S.

Nach des Verfassers Ansicht giebt es auf der Erde, sowie auf den übrigen Körpern des Weltalls nur eine Fundamentalform der Energie, die sich mit dem Begriff der Elektrizität deckt. Alle anderen Energieformen, die Wärme nicht ausgeschlossen, seien daraus abgeleitete Formen und hätten somit sekundären Charakter. Die Sonne kann demnach die Erde nicht unmittelbar erwärmen und beleuchten, sondern sie ist nur im stande, durch elektromagnetische Induktionswirkungen Störungen in dem Gleichgewicht der Energie hervorzurufen, d. h. Potentialunterschiede zu ergänzen, auf die dann die Erwärmung der Luft zurückzuführen sei. So schön auch eine solche, auf eine einzige Energie beschränkte Theorie ist, so wirkt sie nicht überzeugend. Warum soll die Sonne nur die eine Ur-Energieform besitzen, während bei den übrigen Weltkörpern, insbesondere bei der Erde verschiedene, allerdings sekundäre Energieformen vorhanden sind, die hinsichtlich der Quantität nicht zu unterschätzen sind?

B. Nebel.

Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde von der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin. Genehmigt und nebst den beigefügten

Thesen öffentlich zu vertheidigen am 3. Juli 1897 von E. J. Wilczynski. Berlin 1897, Mayer und Müller. 36 S.

Die vorliegende Untersuchung schliesst sich an eine frühere an, welche ich mit der Gestalt eines flüssigen Körpers beschäftigt, dessen Teilchen ich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, und welche mit icht überall notwendig gleichmässiger Winkelgeschwindigkeit um eine im Raume feste Axe rotieren. Die Fundamentalgleichungen wurden früher für eibungslose Flüssigkeiten aufgestellt. Nun wird auch die Reibung be-ücksichtigt, dabei ergiebt sich, dass die wichtigsten, für reibungslose lüssigkeiten geltenden Sätze ihre Giltigkeit behalten. Im dritten Kapitel erden die ausgeführten Untersuchungen in Zusammenhang mit der Sonnen-otation gebracht und dabei drei Arbeiten über diese von anderen Autoren iner Kritik unterzogen. Die beiden letzten Kapitel behandeln Numerisches ber den Einfluss der Reibung, die Periodizität der Sonnenflecken, sowie ie Niveauunterschiede der umkehrenden Schicht, der Flecken- und Fackel-gionen. Die mathematischen Resultate dieser Arbeit lassen sich noch erschiedenartig anwenden und bilden die Grundlage für interessante rein eoretische Untersuchungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden ann.

B. Nebel.

---

variauten und elliptische Modulfunktionen auf thermochemischem Gebiete. Ein Beitrag zur Lehre von der chemischen Energie von Prof. Dr. Arwed Walter. Beilage zum Jahresbericht des königl. Realgymnasiums zu Tarnowitz, Ostern 1897. Programm Nr. 228. Leipzig 1897, Metzger und Wittig. 40 S.

Wieder ist es einmal die Mathematik, die im stande ist, ein Hindernis beseitigen, das selbst die bedeutendsten Chemiker mit ihrem bisherigen üstzeug nicht zu überwinden vermochten. Ist es doch neuerdings Ostwald, r trotz der gesunden Anschauungen eines Lothar Meyers die bestimmte nsicht ausspricht, dass keine Aussicht darauf besteht, den gesamten nergievorrat eines Körpers kennen zu lernen. Durch das in der theoreti-hen Chemie bisher unbekannte mathematische Prinzip der Klasseninvarianten lingt es, dem bisherigen grossen Mangel an Bestimmtheit in der theoretischen hermochemie abzuhelfen. Des beschränkten Raumes wegen vermag der erfasser nur in kurzen Zügen die wichtigsten Momente seiner Unter-chungen mitzuteilen. Mit der Einführung des Begriffes von dem „ergo-lexotischen Zustand" soll das Vorhandensein der Anreicherung mit grösseren uantitäten von Arbeitsvermögen, einer Aufspeicherung der Energie aus-edrückt werden. Die vom Verfasser berechneten Zahlengrössen sind von berraschender Genauigkeit, die gesteigert werden, wenn die dazu erforder-ichen Fundamentalgrössen noch sicherer auf experimentellem Wege er-ittelt worden sind. Die vorliegenden Untersuchungen beanspruchen das chste Interesse der theoretischen Chemiker.

B. Nebel.

Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. Von Dr. Arthur Korn. Zweite Auflage. Berlin **1898**, Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung. 277 S. Preis M. 6.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nicht nur durch die infolge der Weiterentwickelung der Theorie bedingten Veränderungen und Vereinfachungen, sondern auch durch eine systematischere Behandlungsweise des Ganzen. Der erste Teil: Grundlagen der Hydrodynamik und Theorie der Gravitation hat eine eingehendere Behandlung erfahren. Der zweite Teil: Theorie der elektrischen Erscheinungen zerfällt in die beiden Abschnitte ponderomotorische und elektromotorische Wirkungen. Die Theorie stützt sich auf die Wechselwirkung pulsierender Kugeln unter der Annahme, dass auf unserem Sonnensystem ein periodischer Druck lastet, welcher, bei der nahen Inkompressibilität des Zwischenmediums, die Pulsationen der mit viel grösserer Kompressibilität begabten Massenteilchen mit gleicher Schwingungsdauer und Phase verstehen lässt. Bei der Anwendung dieser mechanischen Theorie auf die elektrischen Erscheinungen ist unter anderen Arbeiten namentlich die von Reiff von grosser Wichtigkeit, da hier die Reibung in Flüssigkeiten zu einer Theorie der Induktion benützt worden ist. In dem Anhang, welcher die Theorie Maxwells und ihre Einwirkung auf neuere Theorienbildungen zum Gegenstand hat, wird von einer Gegenüberstellung der Vorzüge der hydrodynamischen Theorie gegenüber der Maxwellschen Theorie abgesehen, vielmehr weist der Verfasser darauf hin, dass man mit Hilfe mechanischer Vorstellungen in den Geist der Maxwellschen Theorie einzudringen habe, und macht auf die Gefahren aufmerksam, welche bei der Bildung von Theorien ohne mechanische Vorstellungen auftreten können. So lange man mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie arbeitet, vermeidet man die Klippen, die mit dem allgemeineren Hamiltonschen Prinzip verbunden sind. Aus der heutigen Betrachtung der Naturerscheinungen muss die Mystik unter allen Umständen wegbleiben bezw. entfernt werden.

B. Nebel.

Die Mechanik des Weltalls in ihren Grundzügen. Dargestellt von L. Zehnder-Freiburg i. B., Leipzig und Tübingen 1897, Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). 176 S. Preis M. 3.

Verfasser geht bei seiner Mechanik des Weltalls von sehr einfachen Annahmen aus, indem er einen dreimensionalen, unbegrenzten Raum zu Grunde legt und die darin vorhandene Materie sowohl in ihren kleinsten Teilen, als auch in ihrer Gesamtmasse sich räumlich begrenzt denkt. Dabei soll sich die Materie gegenseitig anziehen, d. h. kurz gesagt, sie gravitiere. Der Äther wird angesehen als eine Masse, die eine, wenn auch sehr geringe Dichte besitzen soll. Die Ätheratome sollen aus Kugeln bestehen, die zusammen Wellenbewegungen ausführen, die sich uns äusserlich al-zu erkennen geben. Wesentlich verschieden von diesen Wellen- ungen seien die zitternden Bewegungen des Äthers, auf die das ı der Elektrizität zurückgeführt wird. Licht und Elektrizität lassen lemnach nicht in einander überführen, selbst wenn wir sehr grosse nlängen für das Licht und sehr kleine Wellenlängen für die Elektrizität zeugen im stande wären. Die Annahmen haben nichts Gezwungenes ı einfachster Weise werden die Gründe der Physik und Chemie in ativer Hinsicht erklärt. Die Untersuchungen der quantitativen Er- se dieses Systems behält sich der Verfasser noch vor. Die zweite des Buches ist der Betrachtung unseres Sonnensystems gewidmet, ıit unserer Erde beginnt und mit der Zukunft der Erde wieder ıst. Nach den Betrachtungen des Verfassers ergiebt sich, dass die sich bis jetzt noch scheinbar gegenüber stehenden Theorien: die ıenssche Undulationstheorie des Lichtes und die Maxwellsche Theorie lektrizität und des Magnetismus mit einander verträglich sind, was a wesentlicher Fortschritt zu betrachten ist.

B. Nebel.

ıdlungen und Berichte. Aus Anlass der Feier des zwanzigjährigen Bestehens des württembergischen Bezirksvereins deutscher Ingenieure zusammengestellt und diesem gewidmet von C. Bach. Mit zahlreichen Textabbildungen und 14 Tafeln. Stuttgart 1897, Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung. 297 S.

Die Entstehung der mit der Technischen Hochschule in Stuttgart ver- nen Materialprüfungsanstalt, die dem Verfasser unterstellt ist, ist in auptsache dem thatkräftigen Eingreifen des württembergischen Bezirks- s deutscher Ingenieure zu verdanken Anlässlich der Jubelfeier dieses ıs bringt der Verfasser eine Reihe seiner Untersuchungen, die in jener lt ausgeführt, und bisher zerstreut veröffentlicht worden sind, in stattlichen Bande als Zeichen der Dankbarkeit dar. Aus diesen suchungen ergiebt sich deutlich zu erkennen, von welchem hohen n die Materialprüfungsanstalt für die Technik ist, nicht nur für die : allein, sondern auch für die Theorie, die auf zielbewusst angestellten chen basiert. Der Verfasser liefert den Beweis, dass sich auch mit :änkten Mitteln bei Aufwendung der nötigen Energie tüchtiges er- n lässt, und dass es nicht nötig ist, von vornherein glänzend aus- tete Institute zu besitzen, um überhaupt etwas leisten zu können.

B. Nebel.

Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen, welche in den Schulschriften sämtlicher an dem Programmtausche teilnehmenden Lehranstalten erschienen sind. Bearbeitet von Dr. RUDOLF KLUSSMANN. Nebst zwei Registern. 3. Bd. 1891—1895. Leipzig 1899, B. G. Teubner. VII, 342 S.

Die Nützlichkeit des Klussmannschen Programmverzeichnisses ist allzu anerkannt, als dass darüber noch ein Wort gesagt werden müsste. Die Bemerkung mag genügen, dass in dem neuen Bande die Titel von 223 mathematischen Programmen auf S. 38—43 und S. 238—247 angegeben sind, und dass die systematische Anordnung es gestattet, sich mit leichter Mühe zurechtzufinden.

CANTOR.

Deduction und Induction, eine Begriffsbestimmung von KARL GNEISSE. Strassburg 1899, J. H. Ed. Heitz (Heitz & Mündel). 39 S.

Jeder Mathematiker weiss ganz gut, was unter Deduktion und was unter Induktion zu verstehen ist. Zwischen dem Wissen und dem unzweideutig Aussprechen liegt aber nicht selten eine ziemlich weite Gedankenkluft. Manchmal besteht die Schwierigkeit darin, dass zwei Begriffe so eng mit einander verknüpft auftreten, dass man den einen auf den andern zurückzuführen und jenen dann als erfahrungsgemäss gegeben vorauszusetzen in der Lage ist und man darüber in Zweifel geräth, welchem der beiden das Erstlingsrecht zustehe. Richtung und gerade Linie sind Beispiele solcher Begriffe. Herr Gneisse bestimmt die Gerade aus der Richtung; Andere, wozu wir uns selbst rechnen, halten den Begriff der Geraden für den einfacheren und nennen Richtung die Art wie eine Gerade im Raume sich ausdehnt u. s. w. Auch Deduktion und Induktion sind schwer zu definierende Begriffe. Herr Gneisse gelangt am Schlusse seiner Entwickelung zu folgenden Sätzen: Induktion und Deduktion setzen beide einen Begriff voraus und wollen ihn wie seine Erscheinungen durch ein mit ihm notwendig verknüpftes Merkmal näher bestimmen. Die Induktion findet es in dem neuen stätigen Merkmal, das sie an diesen seinen Erscheinungen feststellt. Die Deduktion findet es in dem Merkmal, das mit einem höheren Begriffe notwendig verknüpft ist, unter den sie jenen subsummiert. Das von Herrn Gneiss benutzte Wort *stätig* bedeutet regelmässig wiederkehrend und hat mit Stetigkeit nichts zu thun.

CANTOR.

Kalender und Uhren am Ende des Jahrhunderts von Prof. Dr. WILHELM FOERSTER, Geh. Regierungsrat und Direktor der Königl. Sternwarte in Berlin. Braunschweig 1899, George Westermann. 79 S.

Der Verfasser dieser im besten Sinne des Wortes volkstümlichen Schrift ist in zwei Eigenschaften ziemlich allgemein bekannt: als hervorragender Astronom und als Meister in der Handhabung der deutschen Sprache. Wo die dem Einen geläufigen Kenntnisse dem Anderen zur Verarbeitung rlässt, muss ein Kunstwerk entstehen, und als solches dürfen wir die len vor uns liegenden Abhandlungen bezeichnen. Die erste behandelt Kalender, die Reformen desselben durch Caesar, durch Papst Gregor XIII, hoffentlich in Bälde bevorstehende Annahme des Gregorianischen Kalen- durch die Anhänger der griechisch-katholischen Kirche, Vorschläge Osterrechnung der Zukunft. Die zweite Abhandlung schildert die unter wirkung der Elektrizität erzielte oder zu erzielende Übereinstimmung reicher Uhren mit einer nach dem Lauf der Gestirne geregelten Central- Wenn wir die kleine Schrift als volkstümlich bezeichneten, so wollten freilich damit nicht sagen, sie sei so leicht geschrieben, dass jeder er sie sofort verstehen müsse. Dazu ist der Gegenstand denn doch ein feiner. Aber so leichtverständlich, als er gemacht werden kann, dürfte durch Herrn Foersters Bearbeitung geworden sein.

Cantor.

Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen. Beitrag zur Beurteilung einer schwebenden Frage des höheren Unterrichtswesens von Dr. Erwin Papperitz, Professor der Mathematik und darstellenden Geometrie an der königl. sächs. Bergakademie zu Freiberg. Mit einer Tafel. Leipzig 1899, Veit & Comp. IV, 68 S.

Unsere Zeit ist nicht arm an Widersprüchen! Mit dem Bestreben, für technischen Hochschulen das Recht zur Doktorernennung zu erlangen, Bestreben, welches im Oktober 1899 seine Befriedigung fand, ging lich Hand in Hand der Wunsch, den technischen Lehrgegenständen an n Hochschulen auf Kosten der Mathematik einen breiteren Spielraum geräumt, den mathematischen Unterricht beschränkt zu sehen. Herr peritz hat diesen Wunsch so unparteiisch, als es einem Mathematiker rhaupt möglich ist, geprüft und zu diesem Zwecke die Frage gespaltet: die Mathematik an den technischen Hochschulen grundlegendes Fach r Hilfswissenschaft? Wird ihr eine verhältnismässig zu lange Unter- tszeit gewidmet? In ersterer Beziehung entscheidet sich der Verfasser in, die Mathematik in dem Umfange, in welchem sie zur Zeit an jenen stalten getrieben wird, sei geradezu unentbehrlich. In zweiter Beziehung egt er durch statistische Angaben die Behauptung, die durch den thematikunterricht beanspruchte Zeit sei keineswegs eine übermässige. rr Papperitz kleidet schliesslich seine Ansichten in 10 Thesen, welche r in unserer kürzeren Einkleidung der Hauptsache nach enthalten sind.

Cantor.

---

e reine Mathematik in den Jahren 1884—1899 nebst Aktenstücken zum Leben von Siegfried Aronhold weiland Professor der Mathematik (1860—1883) an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin, mit seinem Bildnisse. Ein Gedenkblatt zur hundertjährigen

Jubelfeier der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin, gewidmet von Dr. E. Lampe, Geh. Regierungsrat, Professor der Mathematik an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Berlin 1899, Wilhelm Ernst und Sohn. 48 S.

Die mathematische Entwickelung eines eben erst abgelaufenen Zeitraumes zu schildern und die Schilderung auf einen sehr knapp bemessenen Umfang zusammen zu drängen, ist ein doppelt schwieriges Unternehmen. Aus einer solchen Darstellung selbst wieder das Wichtigste auszuziehen, wollen wir nicht einmal versuchen. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass Herr Lampe sich der Aufgabe, welche er sich stellte, gewachsen erwiesen hat, und dass wir mit grossem Vergnügen an der Hand seiner Aufzeichnungen jene 15 Jahre mathematischen Lebens rasch neuerdings durchlebten und zum kräftigen Früchte tragenden Baume sich auswachsen sahen, wovon vor anderthalb Jahrzehnten kaum erste Keime sich aus dem Boden hervorwagten. In dem mit der ersten Abhandlung in losester Weise verbundenen Aktenstücken zum Leben Aronholds begrüssen wir wertvolle Ergänzungen unseres Wissens von den Erlebnissen des deutschen Begründers der Invariantenlehre.

Cantor.

Histoire des mathématiques par Jacques Boyer. Paris 1900, Carré & Naud. XI, 260 pag.

Wenn Herr Boyer das Wagnis unternommen hat, eine Geschichte der Mathematik, die sich bis auf die allerneuste Gegenwart erstreckt, auf so kleinen Raum zusammenzudrängen, so musste er von Anfang an sich grundsätzliche Beschränkungen auferlegen. Die wesentlichste derselben besteht in dem Festhalten einer durchaus elementaren Darstellungsweise, in dem Verbannen jeder irgend höheren Formel. Dass er darin sich treu geblieben ist, muss man zugestehen. Die Schreibweise ist leicht, ist unterhaltend und wird die Leser, welche Herr Boyer sich vorzugsweise wünscht, Leser, die noch nicht wissen, sondern erst lernen wollen, gewiss zu fesseln vermögen. Auch werden ihnen und nicht weniger solchen Lesern, die schon wissen, die zahlreichen Porträts von Mathematikern willkommen sein, deren Quellen stets gewissenhaft angegeben sind. Nun bleibt noch eine Frage zu beantworten: ob die Leser, welche erst lernen wollen, aus Herrn Boyer's Buche überall Richtiges lernen? Leider können wir diese Frage nicht unbedingt bejahen. Eine Menge von Irrtümern ist uns begegnet, vermutlich meistens Flüchtigkeitsfehler, aber immerhin Fehler, und wir hoffen, Herr Boyer werde sich nur freuen, aufmerksam gemacht zu werden, wo er unter anderen bei einer neuen Ausgabe die bessernde Hand anlegen muss. Es scheint uns z. B. unerlässlich, dass Oresme, dass Albert Girard, dass Torricelli aufgenommen werden, dass von Bürgi's Miterfindung der Logarithmen, von Stifels Erfindung der Binomialkoeffizienten die Rede sei, und dieselben nicht bald Tartaglia (p. 97), bald Vieta (p. 133) zugeschrieben werden. Es scheint uns notwendig, bei gemeinsamer Nennung zweier Schriftsteller

Zeitfolge inne zu halten, also nicht von Newton und Descartes, von [Pa]scal und Desargues u. s. w. zu reden, wie es an vielen Stellen geschieht, [wo]durch der Leser um so leichter irre geleitet wird, mit je weniger [Vo]rkenntnissen er an das Buch heranging. Es muss von Pascals Methode [der] vollständigen Induktion (Schluss von n auf $n+1$) die Rede sein. [Un]ter den zahlreichen kleineren Irrtümern und Lücken seien einige wenige [ge]nannt. p. 3: Die Tafeln von Senkereh enthalten neben den Quadrat[za]hlen auch die Kubikzahlen. p. 4: Ahmes war nicht auf 1000, sondern [au]f 1700 v. C. zu setzen. p. 6: Die Ägypter rechneten mit $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$. [p.] 14: Nicht Euklid I sondern V wird auf Eudoxus zurückgeführt. p. 23: [Wo]her weiss der Verfasser, dass Euklid in Athen studiert hat? p. 30: [Ni]cht erst Boethius, sondern schon Valerius Maximus (unter Kaiser Tiberius) [ha]t Euklid von Megara für den Verfasser der Elemente gehalten. p. 53: [Se]renus war aus Antinoeia, wie Heiberg gezeigt hat, nicht aus Antissa. [p.]80: Statt Berlinus muss hier und im Register der Name Bernelinus [he]issen. p. 111: Harriot hat weder a^2 und a^3 geschrieben, noch hat er [di]e Gleichungen auf 0 gebracht. p. 122: Cavalieri gehörte nicht dem Orden [de]r Jesuiten, sondern dem der Jesuaten an, der von jenem sehr verschieden [ist]. p. 154: Wer war Kuhmius, bei welchem Leibniz Mathematik gehört [ha]ben soll? p. 240 ist von Steiner's Synthetischer Geometrie von 1867 [di]e Rede, während Steiner 1863 starb und seine bahnbrechenden Schriften [be]reits 1832 und 1833, einzelne Abhandlungen seit 1826 veröffentlichte.

Cantor.

[Di]e Zahlzeichen. Von Dr. Gotthold Gundermann, Professor der klassischen Philologie an der Landesuniversität. Programm, Sr. Königl. Hoheit dem Grossherzoge von Hessen und bei Rhein Ernst Ludwig zum 25. August 1899 gewidmet vom Rektor und Senat der Landesuniversität. Giessen 1899, v. Münchow'sche Hof- und Universitäts-Druckerei (Otto Kindt). 49 S.

Die ungemein inhaltreiche Abhandlung besteht aus zwei räumlich aller[di]ngs nicht scharf getrennten Teilen. Erstens sind Zahlzeichen der ver[sc]hiedensten Völker und aus den verschiedensten Zeiten abgedruckt, wobei [im]mer die letzterschienenen Einzeluntersuchungen als Quelle dienten. [Z]weitens hat Herr Gundermann aus diesem Materiale seine Folgerungen [g]ezogen. Der erste Teil, die Materialiensammlung, wird mit allgemeinem [D]anke begrüsst werden, dem sich auch anschliessen wird, wer dem zweiten [T]eile nicht unbedingt zuzustimmen vermag. Wir bekennen zu diesen [Z]weiflern zu gehören, wollen aber trotzdem die Schlußsätze zum Abdruck [b]ringen, in welchen Herrn Gundermann's Lehre gipfelt: Ein älteres ein[fa]ches System, die Zahlen durch Striche zu bezeichnen, ist allmählich, aber [d]ie ganz zurückgedrängt worden durch ein neues System, das von allen [K]ulturvölkern der antiken Welt angenommen wurde: die Buchstaben eines [A]lphabets bezeichneten in ihrer Reihenfolge 1—9 die Einer, 10—18 die

Zehner, 19—27 die Hunderter, 28 ein Tausend, 29 zehn Tausend. Aus diesem System entwickelt sich schrittweise ein neues, das nur einzelne Grundzeichen festhält, die übrigen abstösst. Das vollständige System lebt verborgen weiter und kommt nochmals zu grosser Blüte. Durch das Ziffersystem, den Abkömmling eines vollständigen Systems, werden alle früheren Systeme verdrängt. Wir möchten unsere Zweifel in eine Frage zusammendrängen. Wenn Herrn Gundermann's Lehre richtig ist, so muss in uralter Zeit eine völkergemeinsame Anordnung der Buchstaben bestanden haben. Auf welcher Grundlage baute diese sich auf?

CANTOR.

Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften im klassischen Altertume. Von Dr. H. STAIGMÜLLER, Professor am Königl. Realgymnasium in Stuttgart. Stuttgart 1899, Hofbuchdruckerei Carl Liebich. 40 S.

Dem hochmütigen Absprechen aller richtigen naturwissenschaftlichen Ansichten bei den Griechen, der Behauptung, dieses Volk habe nur an leeren Spekulationen sich erfreut und Beobachtungen abgelehnt, tritt Herr Staigmüller in diesem Programme entgegen. Er zeigt, dass Beobachtungen des Sternenhimmels, wie sie Hipparch bereits anstellte, keineswegs zu verachten sind. Er zeigt aber auch, dass Spekulationen von jeher die grössten Entdeckungen einzuleiten im stande waren und oftmals zu denselben führten, indem sie bestimmte Beobachtungen veranlassten. Herr Staigmüller hat, um diesen Satz durch ein Beispiel zu belegen, die Frage nach den antiken Vorläufern des Coppernicus in erneuerte Erwägung gezogen. Pythagoras, Plato, Herakleides sind die Männer, deren kosmische Anschauungen ganz besonders geprüft werden. Die Widersprüche, welche sich in den Berichten über Plato und in seinen eigenen Schriften oder in Schriften naher Schüler finden, werden aus der Furcht erklärt, dem Schicksale eines Sokates zu verfallen. Plato war aus Vorsicht dunkel, aber der Wissende konnte und sollte in seinen zweideutigen Äusserungen die Wahrheit erkennen.

CANTOR.

Bibliographie.*

Periodische Schriften.

andlungen der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. 21. Bd. München, Franz. M. 14.

alen der Physik. 4. Folge. 1.—3. Bd. oder Jahrg. 1900. 12 Nummern. Leipzig, Barth. M. 38.

alen der schweizerischen meteorologischen Centralanstalt 1897. Der schweizer. meteorolog. Beobachtungen 34. Jahrg. Zürich, Fäsi & Beer. M. 18.

nario astro-meteorologico, con effemeridi nautiche per l'anno 1900 (anno XVIII). Venezia, tip. Società M. S. fra compositori tipografi, 1899. L. 1. 50.

iten, astronomisch-geodätische. Veröffentlichung der königl. bayer. Kommission für die internationale Erdmessung. 4. Heft. München, Franz. M. 10.

iten, die astronomischen-geodätischen, des kaiserl. und königl. militärgeographischen Institutes in Wien. Publikationen für die internationale Erdmessung. XIII—XVI. Bd. Wien, Lechner. à M. 10.

chte der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-phys. Klasse. II. Mathem. Teil. 1899. V. u. VI. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 80.

chte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. 16. Bd. 1898. Budapest, Kilián's Nachf. M. 7.

den-Monatsberichte (vorläufige Mitteilung) des königl. sächs. meteorolog. Institutes. 1898. 1. Jahrg. Chemnitz, Bülz. M. 2.

bnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien und der Hercegovina im Jahre 1897. Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. M. 20.

schritte, die, der Physik im Jahre 1898. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 54. Jahrg. 2. Abt. Physik d. Äthers. Braunschweig 1899, Vieweg & Sohn. M. 34.

schritte, die, der Physik im Jahre 1899. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 54. Jahrg. 3. Abt. Kosmische Physik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 22.

itentafeln für das Jahr 1901. Herausgegeben vom Reichsmarineamt. Mit 14 Blättern in Steindruck, enthalten. Darstellungen der Gezeitenströmungen in der Nordsee, im Englischen Kanal und der Irischen See. Berlin, Mittler & Sohn. M. 1. 50.

uch, Berliner astronomisches, für 1892 mit Angaben für die Opposition der Planeten (1)—(440) für 1900. (Der Sammlung Berliner astronomischer Jahrbücher 127. Bd.) Berlin, Dümmler. M. 12.

uch der Astronomie und Geophysik. Enthaltend die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie und physikal. Erdkunde. 10. Jahrg. 1899. Leipzig, Mayer. kart. M. 7.

uch des königl. sächs. meteorolog. Institutes. XV. Jahrg. 1897. 3. Abt. Chemnitz, Bülz. M. 10.

---

* Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1900.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1898. Beobachtungs-System der deutschen Seewarte. XXI. Jahrg. (23. Jahrg. der meteorolog. Beobachtungen in Deutschland.) Hamburg, Friedrichsen & Co. M. 1

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1898. Meteorolog. Station I. Ordnung in Magdeburg. Jahrbuch der meteorolog. Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburger Zeitung im Jahre 1898. XVII. Bd. XVIII. Jahrg. Magdeburg, Fabersche Buchdruckerei. kart. M.

Jahresbericht über die Fortschritte der Mathematik. 28. Bd. Jahrg. 1897. 3. (Schluss) Heft. Berlin, Reimer. M. 12

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 10. H. Leipzig, B. G. Teubner. M. –

Mitteilungen, mathematisch-naturwissenschaftliche, im Auftrag des mathem. naturwissenschaftl. Vereins in Württemberg herausgegeben von O. Bö und E. Wölffing. 2. Serie. 2. Bd. 3 Hefte. Stuttgart, Metzler. M

Publikationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien. V. Bd. Wien, Fr M.

Publikationen der Sternwarte des eidgenöss. Polytechnikums in Zürich. 2. Zürich, Schulthess & Co. M

Rundschau, astronomische. Herausgeg. von d. Manora-Sternwarte in Lussinpiccolo (Österreich). 2. Bd. 10 Hefte. Lussinpiccolo, Manora-Sternwarte. frei M. 12; einzelne Hefte M. 1

Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. I. Abt. 108. Bd. 6. u. 7. H. Wien, Gerolds Sohn. M.

—— Dasselbe. Abt. IIa. 108. Bd. 8. Heft. Ebenda. M.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. 2. Jahrg. 1900. Lei Barth.

Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes. Neue F. Nr. 1. Die Polhöhe von Potsdam. 2. Heft. Berlin, Stankiewicz.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Instituts. 1895. 3. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung im Jahre Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Sta Berlin, Asher & Co.

—— Dasselbe. Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen in den Ja 1890 und 1896. Ebenda.

Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorolog. Instituts. 1899. 1. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnun Jahre 1899, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1899. Beobacht system des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. B Asher & Co. M.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 34. Jahrgang. 3. Heft. Leipzig Engelmann.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 34. Jahrgang. 4. Heft. Lei Engelmann.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Al-Battānī sive Albatenius, Opus astronomium ad fidem codicis escurial arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a Carolo Alph Nallino. Pars III textum arabicum continens. Mediolani Insubrum apud Ulrichum Hoeplium.

Boyer, Jaques, Histoires des Mathématiques. Paris, Carré & Naud.

Cantor, Mor., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Bd. 2. Halbbd. 1550—1668. 2. Aufl. Leipzig 1899, B. G. Teubner.

Heydweiller, A., Die Entwickelung der Physik im 19. Jahrh. Vortrag. B Parey.

König, Walt., Goethes optische Studien. Festrede zur Feier von Goethes 150. Geburtstag. Frankfurt a. M., Koenitzer. M. 1.

Kugler, Frz. Xav., Die babylonische Mondrechnung. Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne. Auf Grund mehrerer von J. N. Strassmaier S. J. kopierten Keilinschriften des brit. Museums. Mit einem Anhang über chaldäische Planetentafeln. Freiburg i. B., Herder. M. 24.

Laar, J. J. van, J. D. van der Wals. Ein Lebensabriss. Leipzig, Barth. M. 1. 60.

Leibniz, G. W. v., Briefe an den Astronomen der „Societät der Wissenschaften" Gottfried Kirch aus den Jahren 1702—1707. Der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin zu ihrem 200jähr. Jubiläum gewidmet vom königl. Joachimsthalschen Gymnasium. Berlin, Reimer. M. —. 60.

Raccolta voltiana edita per cura della società storica comense e del comitato per le onoranze a Volta. Como, Bertolini, Nani e C. L. 7.

Olbers, Wilh., sein Leben und seine Werke. Im Auftrage der Nachkommen herausgegeben von C. Schilling. 2. Bd. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. 1. Abt. Berlin, Springer. M. 16.

Thompson, Silvanus P., Michael Faradays Leben und Wirken. Übersetzt von Agathe Schütte. und Heinrich Danneel. Halle, Knapp. M. 8.

Wassilief, A., und Delaunay, N., P. L. Tschebyschef. — P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen, von A. Wassilief. — Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen, von N. Delaunay. Mit einem Bildnis Tschebyschefs in Heliograv. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.

Wie studiert man Mathematik und Physik? Von einem Lehrer der Mathematik. 2. Auflage. Leipzig 1899, Rossberg. M. —. 60.

Reine Mathematik.

Alasia. Cristoforo, Geometria e trigonometria della sfera. Milano, Hoepli.

Baffiotti, G. B., Il planimetro a scure di H. Prytz: teoria e pratica. Torino, Paravia e C., 1899. L. 1. 60.

Böger, Rud., Ebene Geometrie der Lage. (Sammlung Schubert VII.) Leipzig, Göschen. geb. M. 5.

Bohnert, F., Ebene und sphärische Trigonometrie. (Sammlung Schubert III.) Leipzig, Göschen. geb. M. 2.

Borel, E., Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. Leçons sur les fonctions entières. Paris. M. 3.

Bosse, L., v. Müller, H., Algebra. Mit Aufgaben und 5stelliger Logarithmentafel. Berlin, Parey. M. 1. 80.

Brandenburger, C., Anwendung der elliptischen Funktionen auf durch algebraische Funktionen vermittelte konforme Abbildungen. Dissert. Zürich 1899.

Braun, J., Das Fortschreitungsgesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung exakt dargestellt. Programm. Trier 1899.

Bullart, W. G., On the general classification of plane quartic curves. Dissert. Worcester 1899.

Burali-Forti, C., Les propriétés formales des opérations algébriques, Turin. M. 1.

Cahen, E., Eléments de la Théorie des nombres. Congruences. Formes quadratiques, nombres incommensurables. Questions diverses. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 12.

Cayley, A , An elementary treatise on elliptic functions. 2d ed. Cambridge, Deighton, Bell & Co. 7 s. 6 d.

Cox, Homersham, A rudimentary treatise on the integral calculus. London, Crosby Lockwood and Son. 1 s. 6 d.

Dehn, Max, Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Diss. Leipzig, B G. Teubner. M. 1. 20.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. 8. Aufl. Von Eug. Netto. Giessen, Ricker. geb. M. [illegible]

Dölp, H., Die Determinanten, nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. Elementar behandelt. 5. Aufl. Darmstadt 1899, Roether. M. [illegible]

Dudensing, Wilh., Über die durch eine allgemeine dreigliedrige algebraische Gleichung definierte Funktion und ihre Bedeutung für die Auflösung der algebraischen Gleichungen von höherem als vierten Grade. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.40

Ehrhardt, H., Neues System der Flächenberechnung und Flächenteilung mit Hilfe einer planimetrischen Tafel, welche zugleich als Produkten- und Quadrattafel dient, nebst einer Sinustafel. Stuttgart, Wittwer. M. 3, kart. M. 3.[illegible]

Encyklopädie der math. Wissensch. I. Tl. 1. Bd. 4. Heft. Leipzig 1899, B. G. Teubner. M. 4.[illegible]

Examen-vragen, Wiskundige, van de examens B der polytechnische school te Delft. Delft, Waltman Jr. F. 1.[illegible]

Feldblum, M., Über elementar-geometrische Konstruktionen. Diss. Göttingen 1899.

Fonctions elliptiques, Principales formules de la théorie des, Tableau résumé, publié par les Nouvelles Annales des Mathématiques. Paris. M. -.[illegible]

Forsyth, Andrew Russel, Theory of differential equations. Part. 2. Vols. 2 and [illegible] Cambridge, Univ. Press. [illegible]

Franck, P., Über die Flächeninhalte und Bogenlängen von Fusspunktkurven und Rollkurven. Diss. Leipzig 1899.

Frege, G., Über die Zahlen des Herrn H. Schubert. Jena, Pohle. M. 1.[illegible]

Ganter, H., und Rudio, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. 1. Tl. Die analyt. Geometrie der Ebene. 4. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. [illegible]

Geck, Erwin, Über die singulären Punkte algebraischer Flächen. Dissertation. Tübingen, Pietzcker. M. [illegible]

Geer, P. van, Leerboek der analytische meetkunde. Tweede deel. Oppervlakken en ruimtekrommen. Leyden, Sythoff. F. 2.90

Grace, J. H., and Rosenberg, F., The elements of co-ordinate geometry. Part [illegible] The conic. London 1899, Clive. 4 s. 6 d.

Graf, J. H., und Gubler, Ed., Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen. 2. Heft. Die Bessel'sche Funktion zweiter Art. Bern, Wyss. M. 3.[illegible]

Grassmann, Rob., Die Differential- und Integralrechnung bei Vermeidung der Trugschlüsse, eine höchst leichte Wissenschaft. Stettin, Grassmann. kart. M. -.40

—— Die Funktionenlehre namentlich die Differential- und Integralrechnung in strenger Formelentwickelung. (Neue Titelausgabe von „Die Folgelehre". 1895.) Ebenda. M. 1.75.

Grassmann, H., Schraubenrechnung und Nullsystem. Festschrift. Halle 1899. M. 1.50

Heidke, P., Über Kreisteilungsgleichungen vom Primzahlgrad

$$p = p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \cdot p_3^{\pi_3} \cdots p_\mu^{\pi_\mu} + 1 \quad (\mu > 1).$$

Dissertation. Greifswald 1899.

Heineck, C., Invariante Kurvenintegrale bei infinitesimalen Transformationen in drei Veränderlichen x, y, z und deren Verwertung. Dissert. Leipzig 1899.

Hentschel, O., Ausführung einiger konformen Abbildungen. I. Programm. Salzwedel 1899.

Herff, E., Die Maxima und Minima einer verwandelbaren Funktion. Programm. Sigmaringen 1899.

Hessenberg, G., Über die Invarianten linearer und quadratischer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen. Dissert. Berlin 1899.

Hinn, G. A., Die Anwendung unendlicher Produkte in der Funktionentheorie. Programm. Sächsisch-Regen 1899.

E. Jensema, Een krommenbundel van den derden en krommennet van den vierden graad. Dissert. Groningen, Hoitsema.

Jung, H., Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. Dissert. Marburg 1899.

Kiepert, Ludw., Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Tl. Integralrechnung. 7. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von weil. Max Stegemann. Hannover 1899, Helwing. M. 11. 50, geb. M. 13.

Kirstein, O., Konstruktion eines räumlichen Polarsystems aus einem Polartetraeder und drei Paar konjugierten Punkten. Programm. Meseritz 1899.

Klas, Adf., Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels auf dem Wege der elementaren Geometrie, allein mit Zirkel und Lineal gelöst und dargelegt. Wiesbaden 1899, Ferger. M. 1. 20.

Klug, Leop., Die kubische Involution. (Aus: Medicin.-naturw. Mitteilungen.) Kobzsvár. Wien, Eisenstein & Co. M. 1. 50.

Kneser, Adf., Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8.

Koch, K., Zerlegbare Modelle für Krystallographie und Sphärik und andere Gebiete. Programm. Cannstatt 1899.

Kölmel, F., Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projektiver Maßbestimmung. Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie. Lahr, Schauenburg & Co. M. 2. 50.

Kowalewski, G., Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen. Habilitations-Schr. Leipzig 1899.

Laurent, H., Cours de mathématique, professé à l'institut agronomique. Paris, Carré & Naud. cart. Fr. 7.

Liebmann, H., Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Habilitations-Schr. Leipzig 1899.

Ludwig, B. v., Über die Notwendigkeit der Beschränkung des Jacobi'schen Umkehrproblems auf Abel'sche Integrale erster Gattung. Dissert. Halle.

Mansion, P., Elemente der Theorie der Determinanten. Mit vielen Übungsaufgaben. 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 60.

Manchester, J. E., Über Singularitäten ebener Kurven. Dissert. Tübingen 1899.

Matriculation model answers, mathematical from June, 1893, to June, 1899. London 1899. Clive. 2 s.

Mehling, A., Über diejenigen Flächen, die äquidistante infinitesimale Biegungen gestatten. Dissert. Würzburg 1899.

Meyer, W. F., Rapporto sui progressi della teoria proiettiva degli invarianti nell' ultimo quarto di secolo. Traduzione dal Tedesco da G. Vivanti con aggiunte dell'autore. Napoli 1899. M. 6. 80.

De Morgan, A., Elementary illustrations of the differential and integral calculus. London 1899. Paul Trübner & Co. 5 s.

Müller, Otto, Tavole di logaritmi con cinque decimali. 6. ed., aumentato delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione, per cura di Michele Rajna. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli.

Murray, D. A., Plane trigonometry for college and secondary schools. London, Longmans. 5 s.

Netto, Eug., Vorlesungen über Algebra. 2. Bd. 2. (Schluss-) Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 10, 2. Bd. kompl. M. 16.

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des sciences. T. VIII. Correspondance 1676—1684. (Avec un portrait.) La Haye, Nyhoff, 1899. F. 15.

Oss, S. L. van, Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen (Verhand. koninkl. Akad. van wetensch.) Amsterdam, Müller. F. 1.

Otti, H., Eigenschaften der Besselschen Funktionen zweiter Art. Dissertation. Bern 1899.

Peirce, B. O., A short table of integrals. Revised ed. Boston, Ginn & Co. 1899. $ 1.

Röllner, F., a) Beweis eines Gesetzes der gleichzeitig gleichschnellen Rotationen, b) Über Ähnlichkeit und Symmetrie als grundlegende Prinzipien der Geometrie. Programm. Römerstadt 1899.

Rothrock, D. A., Invariants of the finite continuous groups of the plane. Dissert. Leipzig 1899.

Rouché, E., et Comberousse, C. de, Traité de géométrie. 7. éd., revue et augmentée par E. Rouché. (2 volumes.) Vol. I.: Géometrie plane. Paris. M. 6.80.

Rydberg, C. F., Geometriska uppgifter, gifna i de skriftliga afgångsexamina på reallinien h. t. 1879 — v. t. 1898. Med svar och anvisningar. Stockholm. 80 öre.

Sassenfeld, J., Die Hauptsätze der Elementarmathematik für das Gymnasium. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. (Enth. Planimetrie, Trigonometrie, Logarithmen, Stereometrie, Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene.) Trier, Löwenberg. M. 3.70.

—— Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für das Gymnasium. Trier, Löwenberg. M. 1.80, geb. M. 2.30.

Scheibner, W., Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{m}{n}\right)$. (Abhandl. königl. sächs. Ges. d. Wissensch. math.-phys. Klasse, 25. Bd. Nr. VI.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 1.80.

Шиффъ, Вѣра, Сборникъ упражненій и задачъ по диффренціальному и интегральному исчисленіямъ. Часть II. Приложенія анализа безконечно-малыхъ къ геометріи и интегрированіе диффеpенціальныхъ уравненій. St. Petersburg.

Schiff, Wera von, Sammlung von Übungen u. Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Tl. II. Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie und Integration der Differentialgleichungen. 3 Rubel.

Schouten, C., Analytische meetkunde in de ruimte. (Lijnen, vlakken en oppervlakken van den 2den graad.) Delft, Waltman Jr. F. 2.

Schubert, Herm., Arithmetik und Algebra. (Sammlung Göschen Nr. 47.) Zweiter Abdruck. Leipzig, Göschen. geb. M —.80.

Schwering, Karl, Trigonometrie für höhere Lehranstalten. 2. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. —.80.

Serret, J. A., Cours de calcul différentiel et intégral 5. éd. 2 volumes. Paris. M. 21.

Simon, Max, Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Schubert VIII.) Leipzig, Göschen. M. 6.

Соломонъ, Г, Аналитическая геометрія двухъ измѣреній.

Solomon, G., Analytische Geometrie der Ebene. 2. Aufl. Moskau. 3 Rubel.

—— Аналитическая геометрія трехъ измѣреній.

Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Moskau. 2 Rubel.

Porer, B., Zur Ableitung allgemeiner Eigenschaften algebraischer Kurven. Programm. Ehingen 1899.

Tender, H., Invariante Flächen und Kurven bei konformen Gruppen des Raumes. Dissertation. Leipzig 1899.

tereoscopic views of solid geometry figures. 93 cards in a pasteboard box. Boston 1899, Heath. $ 0.60.

Chébycheff, P. L., Oeuvres. Publiées par les soins de A. Markoff et N. Sonin. (2 volumes.) Vol. I. Avec portrait. St. Pétersbourg 1899. (Gleichzeitig in russischer Sprache erschienen.) M. 17.50.

Jth, K., Planimetrie. Leitfaden mit Konstruktionsaufgaben und Übungssätzen. 6. Aufl. Von R. Franz. Kassel, Hühn. geb. M. 2.

Weiner, F., Eine Anwendung der Hermite'schen U-Funktionen. Programm. Wien 1899.

Weisbach, Jul., Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus sowie der vielfachen Sinus versus von kleinen Winkeln, nebst Tafel der einfachen Tangenten. 6. Ausgabe. Berlin, Weidmann. M. 1.

Well, G. J., van de, Oplossingen der wiskundige opgaven van de examens B der polytechnische school te Delft. Met nieuwe opgaven. Dl. II. Examen B 2. Deventer, Kluwer. F. 5.25.

Wells, W., New higher algebra. Boston 1899, Heath. Halfleather. $ 1.25.

Westfal, J. E. v., On a category of transformation groups in three and four dimensions. Dissertation. Leipzig 1899.

Weth, R., Über eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Differentialgleichung. Programm. Basel 1899.

Witting, A., Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Programm. Dresden 1899.

Wolff, H., Über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in Summanden. Dissert. Halle 1899.

Angewandte Mathematik.

Alasia, Cristoforo, Calcolo grafico ed applicazioni della statica grafica. Città di Castello 1899. Lapi. L. 4.

Albrecht, Th., Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899. Herausgegeben vom Centralbureau der internationalen Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.

Aretin, Thdr. Frh. v., Handbuch zum Abstecken von Kurven sowie zur Bestimmung der Winkel (ohne Mess-Instrumente). 3. Aufl. München, Ackermann. M. 1.60.

Baker, Wm., Elementary dynamics. London 1899, Bell. 3 s. 6 d.

Barbera, Lu., Critica del newtonianismo ovvero delle cause dei moti planetarî. Bologna, Cenerelli. L. 8.

Barr, J. H., Kinematics of machinery; a brief treatise on constrained motions of machine elements. New York 1899, Wiley. Cloth $ 2.50.

Bjerknes, V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. I. Bd. Leipzig, Barth. M. 10, geb. M. 11.50.

Boda, Mart., Die Schaltungstheorie der Blockwerke. (Aus: Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.) Wiesbaden, Kreidel. M. 8.

Bruno, K., Der Stoss elastischer Kugeln. Programm. Klagenfurt 1899.

Chotra, Joh., Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den kaiserl. und königl. Militärakademien. Parallel- und Centralperspektive. Kotierte Projektionen. Wien, Seidel & Sohn. M. 4.80.

Eggers, Wilh., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil. Die Elemente. Leipzig, Seemann & Co. kart. M. 1.50.

Ergebnisse, die, des Präzisionsnivellements in der österr.-ungar. Monarchie. Süd-östlicher Teil. Herausgegeb. vom kaiserl. und königl. militär-geograph. Institute. Wien, Lechner. M. 1

Faller, Otto, Eine neue Anschauung über die Reibung. Vorläufige Mitteilung. Vortrag. München 1899, Ackermann. M. –.60

Fixpunkte, die, des schweizerischen Präzisionsnivellements. Les repères du nivellement de précision de la Suisse. Herausgegeben durch das eidgenöss. topograph. Bureau. 10. Lieferung. Bern, Schmid & Francke. M. 4

Fliegner, Alb., Die Umsteuerungen mit dem einfachen Schieber in rein zeichnerischer Behandlungsweise. 2. Aufl. der „Umsteuerungen der Lokomotiven“. Zürich, Schulthess. M. 4

Foerster, W., und Blenck, E., Populäre Mitteilungen zum astronomischen und chronologischen Teile des preussischen Normalkalenders für 1901. Berlin, königl. statist. Bureau. M. 1

Foerster, W., und Lehmann, P., Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Teils des preussischen Normalkalenders für 1901. Nebst einer allgemeinen statist. Beilage von E. Blenck u. A. Petersilie. Berlin, königl. statist. Bureau. M. 4

Goudin, J.-B., Études comparatives sur la poussée des terres et sur les murs de soutènement. Paris, Dunod. Fr. 2

Grages, F., Zahlenbeispiele zur statischen Berechnung von Brücken und Dächern. Durchgesehen von G. Barkhausen. Wiesbaden 1899, Kreidel. M. 4

Greaves, John, Solutions to the examples in a Treatise on elementary hydrostatics. Cambridge 1899, Univ. Press. 5 s.

Grossmann, Ludw., Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie. 11. Lieferung. Wien, Selbstverlag. M. 5

Gubats, Lüdcke, Weigel, 301 Aufgaben aus der darstellenden Geometrie für Maschinenbauer, Kesselschmiede und verwandte Gewerbe. Mit kurzen praktischen Lösungen. Leipzig, Seemann & Co. kart. M. 2.25

Hagen, I. G., S. J., Atlas stellarum variabilium. Series II, complectens stellas variabiles intra limites declinationis 0° et + 25°, etc. Berlin, Dames. Subskriptionspr. M. 46, Einzelpr. M. 55.20

Handwörterbuch der Astronomie. 19. Lieferung. Breslau 1899, Trewendt. M. 3.60

—— Dasselbe. 20. Lieferung. Ebenda. M. 3.60

Hecht, Karl, Lehrbuch der reinen und angewandten Mechanik für Maschinen- und Bautechniker. 2. Bd. Die Festigkeitslehre. Dresden, Kühtmann. M. 9, geb. M. 10

Hertz, Heinrich, The principes of mechanics. Presented in a new form. With an introduction by H. von Helmholtz. Authorised english translation by D. E. Jones and J. T. Wally, London, Macmillan. 10 s.

[illegible], L., Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Progr. Würzburg 1899.

[illegible], H., Grösse und Masse der Weltkörper. Programm. Kalksburg 1899.

Möbius, A. F., Astronomie. Grösse, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. 9. Aufl. Bearb. von Walt. Wislicenus. (Sammlung Göschen Nr. 11.) 2. Abdruck. Leipzig, Göschen. geb. M. –.80

Orff, Karl v., Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Festrede. München, Franz. M. 2

[illegible], Traité des ponts métalliques. Calcul des poutres et des ponts par la méthode ordinaire et par la statique graphique. Nouvelle édition entièrement refondue. Paris, Béranger. Fr. 15

[illegible], Andrea. Materia e forza. Sacie 1899, tip. Fadiga.

Ritter, Aug., Lehrbuch der technischen Mechanik. 8. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. M. 20, geb. M. 22

…ker, Engelb., Die Aufgaben aus der darstellenden Geometrie, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den königl. bayer. humanist. und technischen Unterrichtsanstalten in den Jahren 1873—1898 gestellt wurden. München 1899, Ackermann. M. 2.

…chlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2. Teil. Schatten- und Beleuchtungslehre. 2. Aufl. Dresden 1899, Kühtmann. M. 2.

…chmidt, J., Anleitung zur Konstruktion von Sonnenuhren. Progr. Plan 1899.

…chorr, R., Bemerkungen und Berichtigungen zu Carl Rümker's Hamburger Sternkatalogen 1836·0 und 1850·0. 2. Serie. (Mitt. Hamb. Sternw. Nr. 5 = 4. Beiheft. z. Jahrb. der Hamburg-wissensch. Anstalten XVI, 1898.) Hamburg, Gräfe & Sillen. M. 2.

Schubert, Herm., Mathematische Musestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathem. Natur. 2. Aufl. 3 Bände (1. Zahl-Probleme. — 2. Anordnungs- und Wahrscheinlichkeitsprobleme. — 3. Reiseprobleme und geometrische Probleme.) Leipzig, Göschen. à M. 4.

Schultz, E., Mathematische und technische Tabellen für Baugewerkschulen und für den Gebrauch in der Praxis. 4. Aufl. Unter Mitwirkung von E. Dieckmann. Ausg. mit Logarithmen. Essen 1899, Baedeker. kart. M. 1.50; mit Anleitung M. 1.75.

Silber, O. H. P., Praktische Schattenkonstruktionen und Perspektiven, Isometrie, Dachdurchdringungen und Dachausmittelungen. 21 Tafeln in farb. Lithographiedruck nebst einem Vorwort. 2. Aufl. Berlin, Frantz. M. 6. in Mappe M. 7.50.

Sparre, Magnus de, Etude du mouvement des projectiles dans les cas ou la résistance de l'air est supposée proportionelle au cube de vitesse. Paris, Berger-Levrault. Fr. 2.

Sturm, Chr., Lehrbuch der Mechanik. (Cours de mécanique.) Übersetzt von Thdr. Gross. 2. Bd. Berlin, Calvary & Co. M. 8, geb. M. 9.

Tallqvist, H., Grunderna af potential teorin med användning pa elektrostatiken och magnetismen. Helsingfors 1899. M. 5.

Verhandlungen der vom 3. bis 12./X. 1898 in Stuttgart abgehaltenen Konferenz der internationalen Erdmessung. Zugleich mit den Spezialberichten über die Fortschritte der Erdmessung und den Berichten der Vertreter der einzelnen Staaten über die Arbeiten in ihren Ländern. — Comptes-rendus des séances de la 12. conférence générale de l'association géodésique internationale. (Deutsch und französisch.) 2 Bde. Berlin 1899, Reimer. M. 12.

Vodušek, M., Neue Theorie der Mondbewegung. Programm. Laibach 1899.

Whittaker, E. T., Report on the progress of the solution of the problem of three bodies. (Rep. Brit. Ass.) London. M. 2.

Wüst, Alb., Anleitung zum Gebrauch des Taschen-Rechenschiebers für Techniker. 4. Aufl. Mit einem Rechenschieber. Halle, Hofstetter. kart. M. 1. 25.

Physik und Meteorologie.

Almy, John E., Über die Entladungspotentiale in festen und tropfbarflüssigen Dielektricis. Dissert. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.20.

Assmann, Rich., Beiträge zur Erforschung der Atmosphäre mittels Luftballon. Unter Mitwirkung von A. Berson, H. Gross, V. Kremser und R. Süring herausgegeben. Berlin, Mayer & Müller. M. 4.

Bäcklund, A. V., Elektrodynamik. Efter Författarens universitets-Foreläsningar. Lund 1899. Kr. 6.

Bamler, K., Strassburger Temperaturmittel nach 100 jährigen Beobachtungen. Dissert. Strassburg 1899.

Beckmann, Ernst, Neue Vorrichtungen zum Färben nichtleuchtender Flammen (Spektrallampen). (Abhandl. k. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, 26. Bd. Nr. I.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

Börner, H., Physikalisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik in 2 Stufen. 1. Stufe. I. Vorschule der Experimental-Physik. 3. Aufl. Berlin, Weidmann. geb. M. 1.80.

Bünger, G., Was muss man von der Elektrizität wissen? Berlin 1899, Steinitz. M. 1.

Bütschli, O., Untersuchungen über Mikrostrukturen des erstarrten Schwefels, nebst Bemerkungen über Sublimation, Überschmelzg. und Übersättigg. des Schwefels und einiger anderer Körper. Leipzig, Engelmann. M. 11.

Cotton, A., Le phénomène de Zeeman. Paris, Carré & Naud. Fr. 2.

Drude, Paul, Lehrbuch der Optik. Leipzig, Hirzel. M. 10, geb. M. 11.20.

Eder, J. M., und Valenta, E., Normal-Spectren einiger Elemente zur Wellenlängenbestimmung im äussersten Ultraviolett. (Aus: Denkschriften d. königl. Akad. d. Wiss.) Wien, Gerold's Sohn. M. 3.90.

—— Das Spectrum des Brom. (Aus: Denkschriften d. königl. Akad. d. Wissensch.) Ebenda. M. 2.20.

Ewers, P., Zur Mechanik der Kanal- und Kathodenstrahlen. Diss. München 1899.

Falb's, Rud., Neuer Wetterkalender und Verzeichnis der kritischen Tage für 1900, Januar bis Juni. Berlin 1899, Steinitz. M. 1.

Felici, Riccardo, Über die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induktion. Übers. von B. Dessau. Herausgegeb. von E. Wiedemann. (Ostwald's Klassiker Nr. 109.) Leipzig, Engelmann. M. 1.80.

Francke, Karl, Einige neue Eigentümlichkeiten von festen Körpern, besonders von Metallen. (Naturwiss. Vorträge Nr. VIII.) München, Seitz & Schauer. M. 1.

Garten, Siegfr., Beiträge zur Physiologie des elektrischen Organs der Zitterrochen. (Abhandl. königl. sächs. Gesellsch. d. Wiss., mathem.-phys. Klasse, 25. Bd. Nr. V.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

Heinke, C., Energetische Streifzüge. Eine Studie über physikal. Probleme. Leipzig, Hirzel. M. 1.40.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1898. Beobachtungssystem d. meteorologischen Station I. Ordnung. Aachen. IV. Jahrgang. Karlsruhe, Braun. M. 5.

Junge, Kurt, Über die magnetischen Kraftlinien Faradays. Programm. Leipzig, Hinrichs. M. 1.20.

Kerntler, Frz., Die Unität des absoluten Maßsystems in Bezug auf magnetische und elektrische Grössen. Budapest. (Leipzig 1899, B. G. Teubner.) M. 1.50.

Kohlrausch, Frdr., Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Leipzig 1899, B. G. Teubner. geb. M. 4.

Lechatelier, H., et Boudouard, O., Mesures des températures élévées. Paris, Carré & Naud. cart. Fr. 5.

Ledochowski, Jos. Graf, Wetterprognose, giltig für Niederösterreich, Teile von Oberösterreich, Südmähren und Westungarn, bezw. für ganz Österreich-Ungarn. IV. Jahrg. 1900. 12 Nrn. Wien, Braumüller. à M. —.20.

Liesegang, R. Ed., Photographische Physik. (Mit Ausnahme der Optik.) Düsseldorf 1899, Liesegang. M. 2.

Lommel, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 6. Aufl. Herausgegeb. von Walt. König. Leipzig, Barth. M. 6.40, geb. M. 7.20.

Mach, E., Die Prinzipien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt. 2. Aufl. Leipzig, Barth. M. 10, geb. M. 11.

ttHIESSEN, LUDW., Theorie der atmosphärischen Refraktion und Totalreflexion der Schallwellen und ihre Bedeutung für die Nautik (Nova Acta Bd. 74 Nr. 4). Leipzig 1899, Engelmann. M. 1. 50.

JRER, HANS, Erdmagnetische Beobachtungen in Deutsch-Ostafrika. (Aus dem Archiv der deutschen Seewarte.) Hamburg, Friederichsen & Co. M. 2. 50.

RMAYER, ALB. v., Leitfaden für den Unterricht in der Physik an der techn. Militär-Akademie mit besonderer Berücksichtigung ausgewählter Kapitel, insbesondere der Mechanik. Wien, Braumüller. M. 13. 40, geb. M. 14.

WALD, W., Dampfdrucke ternärer Gemische. (Abhandlungen königl. sächs. Ges. d. Wissensch, math.-phys. Klasse, 25. Bd. Nr. VII.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

NTER, J. M., Ein Versuch, der richtigen Theorie des Regenbogens Eingang in die Mittelschulen zu verschaffen. 2. Aufl. mit einem Zusatz. (Aus: Zeitschr. für die österr. Gymnasien.) Wien, Gerold's Sohn. M. —. 80.

IS, P., Niederschlagskarte der mittleren Rheinprovinz und der Nachbargebiete. 9 Karten. Mit Text auf dem Umschlage. Stuttgart 1899, Engelhorn. M. 9.

CHL, K., Über Strahlung, Temperatur und spezifische Wärme. Programm. Seitenstetten 1899.

IGANUM, M., Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung. Dissert. Göttingen 1899.

STA di fisica, matematica e scienze naturali. Anno I, 1900. Direttore PIETRO MAFFI. Pavia, tip. fratelli Fusi. L. 12 l'anno.

ET, Berechnung der Leitungen für Mehrphasenströme. Übersetzt von M. LACHMANN. Leipzig, Leiner. M. 2. 75.

JBERT, J., Der jährliche Gang der Luft- und Bodentemperatur im Freien und in Waldungen und der Wärmeaustausch im Erdboden. Berlin 1899, Springer. M. 2. 40.

WARZSCHILD, K., Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne. Habilitationsschrift. München 1899.

EKING, HERM., Über Ausstrahlung statischer Elektrizität aus Spitzen. Dissert. Freiburg i. Br. 1899, Speyer & Kaerner. M. 1. 50.

ER, M., Beobachtungen über das Lichtklima von Prag und seiner Umgebung. Programm. Prag 1899.

IUS, H., Witterungs-Prognosen für das Jahr 1900. Berlin, Staude. M. —. 50.

WART, R. WALLACE, Text-book of magnetism and electricity. (Vol. 4 of Tutorial physics.) 4 th ed. London, Clive. 3 s. 6 d.

MAS, PAUL A., Der longitudinale Elastizitätskoeffizient eines Flusseisens bei Zimmertemperatur und bei höheren Temperaturen. Dissert. Jena 1899, Costenoble. M. 2.

MPSON, SILVANUS P., Polyphase electric currents and alternate current motors. 2nd. and enlarged ed. London, Spon. 21 s.

NEBON, EUG., et LETHEULE, P., Mesures électriques. Essais de laboratoire. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2. 50.

KMANN, P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik insbesondere in das der analytischen Mechanik, mit einer Einleitung in die Theorie der physikal. Erkenntnis. Vorlesungen. Leipzig, B G. Teubner. M. 14.

LER, A., Das Grundwasser in Hamburg. Mit Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit, der Niederschlagsmengen u. s. w. 7. Heft, enth. Beobachtungen aus dem Jahre 1898. (1. Beiheft zum Jahrb. der Hamburg. wissensch. Anstalten, XVI, 1898.) Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 3. 50.

LON, E., Leçons d'optique géométrique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1. 75.

... über die Wärmeeinheit, erstattet in der gemeinschaftl. ... für Physik und angewandte Mathematik und Physik ... der Naturforscherversammlung in München. Leipzig. M. —.60.

... sur l'électricité. Recueil gradué contenant toutes ... science électrique. 3e édition, revue et considérablement ... Béranger. Fr. 6.

... bok i fysik för de allmänna och tekniska läroverken ... magnetismen och elektriciteten. 3. uppl. Lund. Gleerup. Kr 2.50

... Klimatologie des Grossen Belchen. Auf Grund des von ... dienst gelieferten Beobachtungsmaterials bearbeitet ... 1899.

... Метеорологія. Для средн. учебн. заведеній и для ... St. Petersburg.

... Meteorologie. Für Mittelschulen und für das praktische ... 1 Rubel.

... Wiederkehr der Hochfluten, Nässen und Dürren ... Programm. Budweis 1899.

... onderzoekingen over deelen kleiner dan atomen, ... Scheltema en Holkema. F. 0.90

I.

Li

Lo

Mac

Historisch-litterarische Abteilung.

Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst biographischen Notizen.

Von

ADOLF KNESER.

In den vierzehn Jahren, die seit dem Tode Minding's verflossen , ist weder in einer mathematischen Zeitschrift noch in den likationen der Akademie, der er angehörte, eine zusammenfassende stellung seines Lebenswerks erschienen. Eine solche dürfte, abhen von ihrem Interesse für die Kreise der alten Universität Dorpat, r deren Forschern und Lehrern Minding eine der ersten Stellen immt, auch für ein grösseres mathematisches Publikum erwünscht ; handelt es sich doch um einen Mathematiker, der, obwohl in letzten Jahren seines Lebens den wissenschaftlichen Tagesfragen stehend, doch einen nachhaltigen Einfluss auf die Entwickelung chiedener Disciplinen ausgeübt hat, und dessen Arbeiten die unennbaren Zeichen einer eigentümlichen und starken wissenschaftn Persönlichkeit tragen.

Die Zusammenstellung der folgenden Übersicht ist wesentlich dah erleichtert worden, dass dem Verfasser von Fräulein Agnes ding ein sorgfältig gearbeitetes Verzeichnis der Arbeiten ihres rs sowie biographisches Material gütigst zur Verfügung gestellt de. Auf das Verzeichnis, welches am Schluss mit einigen Ergänzungen druckt ist, beziehen sich im folgenden Text die eingeklammerten len.

I. Differentialgeometrie.

Die neuere Entwickelung der allgemeinen Theorie der krummen hen beginnt bekanntlich mit Gauss' Disquisitiones circa superficies as; Minding darf als der erste Nachfolger bezeichnet werden, der, n auch auf des Meisters Bahnen wandelnd, in wesentlichen Punkten über Gauss hinausgegangen ist. Er erkennt die Bedeutung der geodätischen Krümmung zunächst an dem Problem der Kurven kürzesten Umrings, d. h. an der auf beliebige krumme Flächen übertragenen isoperimetrischen Aufgabe (Nr. 2). Er zeigt sodann (Nr. 5), dass die geodätische Krümmung wie das Gauss'sche Krümmungsmaß eine Biegungsinvariante ist, d. h. bei einer Biegung der Fläche ohne Dehnung ungeändert bleibt. In einer späteren Arbeit (Nr. 23) geht er näher auf das Problem der Biegung ein, giebt die ersten konkreten Beispiele für Scharen von Biegungen nicht abwickelbarer Flächen, insbesondere der Regelflächen, der Schraubenflächen (Nr. 24), welche keine geraden Linien enthalten, und der Rotationsflächen, wobei auch die durch Verbiegung der Kugel entstehenden Rotationsflächen erwähnt werden.

Tragen diese auf wenigen Blättern gegebenen Resultate dazu bei, die abstrakte Gauss'sche Theorie zu beleben und eröffnen sie eine noch heute nicht erschöpfte Quelle lohnender Spezialuntersuchungen, so ist eine weitere Arbeit (Nr. 25) von prinzipieller Bedeutung, wie schon die Überschrift zeigt: „Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene Flächen auf einander abwickelbar sind.“ Es gelingt Minding, diese Frage vollständig zu beantworten. Über die Möglichkeit der Abwickelung kann durch blosse Differentiation und Elimination, ohne dass Integrationen nötig wären, entschieden werden; die Argumentation ist im wesentlichen dieselbe, wie sie neuerdings mittels der Beltrami'schen Differentialparameter geführt wird. Minding bemerkt dabei, dass sich zwei wesentlich verschiedene Fälle darbieten können: in dem einen sind unendlich viele Abwickelungen möglich, deren wirkliche Ausführung die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung erfordert; in dem andern Falle ist nur eine diskrete Menge von Abwickelungen möglich, welche ohne Integration realisiert werden können. An diese allgemeine Theorie schliessen sich spezielle Resultate des oben beschriebenen Charakters, so der schöne Satz (Nr. 27), dass, wenn zwei Flächen auf unendlich viele Arten aufeinander abgewickelt werden können, unter ihren Deformationen auch Rotationsflächen vorkommen. Besondere Aufmerksamkeit wird den Flächen konstanten Krümmungsmaßes zugewandt; ihr Linienelement wird bestimmt, die Rotationsflächen unter ihnen beschrieben und der Satz bewiesen, dass sie bei gleichem Krümmungsmaß auf unendlich viele Arten aufeinander abgewickelt werden können. Später (Nr. 28) folgt die wichtige, wenn auch nahezu evidente Bemerkung, dass die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie durch eine einfache Substitution in die entsprechenden Formeln für die geodätischen Dreiecke auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes übergehen.

Gehören die bisher erwähnten Arbeiten nahe zusammen, so sind aus späterer Zeit zwei vereinzelte Beiträge zur Differentialgeometrie zu erwähnen. In einem kurzen Aufsatz (Nr. 38) wird eine für die

Geodäsie wichtige Annäherungsformel Bessel's auf beliebige Flächen ausgedehnt; allgemein werden die Kurven betrachtet, welche bei der Gauss'schen Abbildung durch parallele Normalen den Meridianen und Breitenkreisen der Kugel entsprechen; dabei zeigt sich, dass diese Kurven nur auf den Minimalflächen und den Monge'schen surfaces moulures sich senkrecht schneiden. Das auf die Minimalflächen bezügliche Resultat steht in enger Beziehung zu den für die moderne Theorie dieser Flächen fundamentalen Untersuchungen von Bonnet. Die Gratulationsschrift der Universität Dorpat zu Wilhelm Struve's 50jährigem Doktorjubiläum (Nr. 48) enthält elegante Entwickelungen formaler Natur, durch welche unter anderem der jetzt sehr bekannte Ausdruck der mittleren Krümmung

$$\frac{GD + ED'' - 2FD'}{(\sqrt{EG - F^2})^3},$$

wie es scheint zum ersten Mal, erhalten wird. Minding wiederholt später (Nr. 55) den Beweis dieser Formel, giebt sodann im Fall eines isometrischen Koordinatensystems p, q, d. h. wenn $E = G$, $F = 0$, für das Quadrat der mittleren Krümmung den Ausdruck:

$$\frac{1}{E^2}\left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)^2\right],$$

der, gleich Null gesetzt, die Beziehung der Minimalflächen zur Theorie der Funktionen komplexen Arguments unmittelbar ersichtlich macht. Minding leitet mit wenigen Strichen die Formeln von Monge ab, und giebt einen allgemeinen Ansatz zur Behandlung der Aufgabe, alle durch eine gegebene Kurve gehenden Minimalflächen zu finden; die Kurve erhält auf der Fläche die Eigenschaft, eine der beiden isometrischen Koordinaten konstant zu machen.

II. Variationsrechnung.

Das Problem der Kurven kürzesten Umrings, d. h. der kürzesten Kurven, welche auf einer gegebenen Oberfläche einen vorgeschriebenen Flächeninhalt umspannen, hat Minding in den Anfängen seiner Thätigkeit wie in seinem hohen Alter beschäftigt, wie die Bände 6 und 86 des Crelle'schen Journals bezeugen (Nr. 3, 56, 57, 58, 60). Er findet zunächst (Nr. 3), dass diese Kurven konstante geodätische Krümmung besitzen; er bestimmt (Nr. 56) ihre Gleichung auf Rotationsflächen; besonders interessant ist es aber, dass er bei dieser Aufgabe die sogenannten diskontinuierlichen Lösungen betrachtet, d. h. Kurven, die das gesuchte Minimum liefern, dabei aber aus Teilen von verschiedenen analytischen Kurven bestehen. Minding hat zwei Thatsachen an Beispielen erläutert, die von Steiner ohne Beweis als allgemein giltig ausgesprochen waren; erstens das neuerdings sogenannte Gesetz von der Erhaltung der isoperimetrischen Konstante, welches bei der

Kurve kürzesten Umrings besagt, dass in verschiedenen, analytisch nicht zusammenhängenden Teilen die geodätische Krümmung dieselbe sein muss; zweitens den Satz, dass die verschiedenen Teile einer diskontinuierlichen Lösung im allgemeinen sich berührend zusammenstossen. Interessante Einzelaufgaben behandelt eine auf den Fall der Kugel beschränkte Notiz (Nr. 57).

Auch an dem seinerzeit vielerörterten Problem der Transformation der zweiten Variation der einfachen Integrale arbeitet Minding in einer Abhandlung (Nr. 44) mit, welche einen formal rechnerischen Charakter trägt.

III. Differentialgleichungen erster Ordnung.

In mehreren Abhandlungen über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung (Nr. 35, 45, 47, 50) bewegt sich Minding auf den Bahnen, welche Euler in seiner Integralrechnung eingeschlagen hat, und sucht Klassen integrierbarer Differentialgleichungen erster Ordnung dadurch zu finden, dass eine bestimmte Form des integrierenden Faktors vorausgesetzt wird. Es gelingt ihm, einige der schwierigsten von Euler durchgeführten Integrationen ihres rätselhaften Charakters zu entkleiden und zu verallgemeinern, indem er aus bekannten Partikularlösungen Vorteil zu ziehen und aus ihnen den Multiplikator zusammenzusetzen sucht. Ein solches Verfahren hat besonders da Erfolg, wo es leicht ist, Partikularlösungen von der Form

$$y = \alpha x + \beta$$

zu finden; z. B. hat die Gleichung

$$M dx + N dy = 0,$$

wenn M und N Polynome zweiten Grades in x und y, und y_1, y_2, y_3 lineare Partikularlösungen sind, einen Multiplikator von der Form

$$(y - y_1)^{\alpha_1} (y - y_2)^{\alpha_2} (y - y_3)^{\alpha_3}.$$

Dieser Satz enthält als besonderen Fall die von Jacobi* gegebene Integration der Gleichung

$$A dx + B dy + C(x dy - y dx) = 0,$$

in welcher A, B, C lineare Funktionen von x und y sind; hier kann, wie Minding bemerkt, das allgemeine Integral aus drei partikulären von der oben angegebenen Form zusammengesetzt werden. Als ein weiteres Resultat sei noch angeführt, dass obige Differentialgleichung integriert wird, wenn A, B, C homogene Funktionen von x und y und die Dimensionen der beiden ersten gleich sind.

Diese Untersuchungen haben lange Zeit hindurch keine Beachtung gefunden. Kurz vor der umfangreichen Arbeit Nr. 47 erschien Riemann's Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, und durch sie wurde

* Werke Bd. 4 S. 257.

e Aufmerksamkeit der Mathematiker von den Eulerschen Methoden d Gesichtspunkten völlig abgelenkt. Später haben von Minding abhängig Darboux[*] und Elliot[**], ausdrücklich an Minding anüpfend Heymann,[***] Sonin[†] und Korkin[††] verwandte Untersuchungen röffentlicht.

IV. Algebraische Funktionen und Abelsche Integrale.

Unter den auf die algebraischen Funktionen bezüglichen Arbeiten r. 10, 11, 13, 30) ist die letzte besonders hervorzuheben, welche ernien, ehe Abel's grosse Abhandlung in dem Archiv der Pariser ademie wieder aufgefunden war. Minding beschäftigt sich hier mit r genauen Formulierung des Abelschen Theorems, insbesondere mit r Gestalt der in ihm auftretenden algebraisch-logarithmischen Auscke, dann aber auch mit der fundamentalen Frage nach der gegsten Anzahl Abelscher Integrale, auf welche eine Summe von bebig vielen mittelst des Abelschen Theorems reduziert werden kann. ill und Noether charakterisieren in ihrem Bericht über die Entckelung der Theorie der algebraischen Funktionen[†††] die erwähnte handlung, „die nach Form und Inhalt sogar viel Ähnlichkeit mit r Pariser Abhandlung von Abel besitzt", in folgender Weise. teht somit Minding's Arbeit, die ihre Probleme durchaus den blizierten Abhandlungen Abel's entnimmt, auch hinsichtlich der lgemeinheit der Resultate hinter Abel's Pariser Arbeit zurück, so ist ch erstaunlich, wie tief der geistvolle Forscher in Abel's Gedankenng und in den Kreis seiner Hilfsmittel eingedrungen ist, und wie le wesentliche Ergebnisse Abel's er in gewissem Sinne anticipiert hat. ich ist zuzugeben, dass in Bezug auf Durchsichtigkeit, Kürze und eckmässige Anordnung der Beweisführung die Arbeit hinter der el's nicht zurücksteht. Wie Abel besitzt Minding im wesentlichen n Geschlechtsbegriff." Erinnern wir uns, dass es sich hier um diejenige beit Abel's handelt, in welcher das Abel'sche Theorem, nach Jacobi's sspruch die grösste mathematische Entdeckung seiner Zeit, entckelt ist, so wird man die ganze Bedeutung einer solchen Kritik itens der sachverständigsten Beurteiler ermessen. Erwähnt sei noch, s Brill und Noether für Minding die Priorität Puiseux gegenüber nsichtlich der Trennung der verschiedenen Entwickelungen einer gebraischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle in nspruch nehmen.

---

[*] Bulletin des sciences math. 1878.

[**] Annales de l'école normale 1890.

[***] Bd. 27 dieser Zeitschrift.

[†] Bulletin de l'académie de St. Pétersbourg 1895.

[††] Math. Annalen Bd. 48.

[†††] Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung Bd. III, 1892/93.

So ehrenvoll hiernach die Stelle ist, welche Minding in der Geschichte der Theorie der algebraischen Funktionen einnimmt, so ist doch seiner Arbeit auf diesem Gebiete der verdiente Erfolg lange Zeit vorenthalten geblieben, da die neu aufkommende funktionentheoretische Methode das Interesse der auf diesem Gebiet arbeitenden Mathematiker absorbierte.

Beiläufig sei noch auf einige kleinere Beiträge zur Theorie der Elimination hingewiesen (Nr. 26, 29, 32).

V. Allgemeine Dynamik.

Die Gratulationsschrift der Universität Dorpat zum fünfundzwanzigjährigen Jubiläum der Sternwarte Pulkowa (Nr. 49) scheint infolge der Art ihrer Veröffentlichung in Westeuropa unbeachtet geblieben zu sein, muss aber ihrem Werte nach sehr hoch gestellt werden; ihr Inhalt steht nämlich in engster Beziehung zu den später erschienenen Arbeiten von Lipschitz* und Beltrami** über quadratische Differentialformen, welche den wichtigsten Fortschritt der allgemeinen Dynamik seit Jacobi bedeuten. Minding beginnt damit, dass er eine Identität von der Form

$$\sum_{i,k}^{1,n} a_{ik}\, dp_i\, dp_k = dV^2 + L_1^2 + \cdots + L_{n-1}^2$$

ansetzt, in welcher p_i die Parameter eines dynamischen Systems, V eine unbekannte, a_{ik} gegebene Funktionen derselben bedeuten, und L lineare, im allgemeinen nicht integrable Differentialformen sind:

$$L_m = C_{mm}\, dp_m + C_{m,m+1}\, dp_{m+1} + \cdots + C_{mn}\, dp_n.$$

Durch Elimination der Grössen C ergiebt sich für V eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche mit der Jacobi-Hamiltonschen zusammenfällt, wenn in der gewöhnlichen Bezeichnung der Dynamik die Gleichung

$$\sum a_{ik}\, dp_i\, dp_k = (U + h)\, T dt^2$$

besteht. Für die Grössen C ergeben sich, und hierin weicht Minding von seinen Nachfolgern wesentlich ab, rationale Ausdrücke durch die Ableitungen der Funktion V, und es wird gezeigt, dass die Differentialgleichungen

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_{n-1} = 0$$

bei Voraussetzung der Gleichung der lebendigen Kraft

$$T = U + h$$

die gewöhnlichen Lagrange'schen Grundgleichungen der Dynamik zur Folge haben. Speziell sind jene Gleichungen und damit die Lagrange-

---

* Crelles Journal Bd. 74, 1871.

** Memorie di Bologna ser. 2 t. 8, 1869.

schen erfüllt, wenn in V eine hinreichende Anzahl von Konstanten α vorkommen, und die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \text{const.}$$

angesetzt werden. Endlich ergiebt sich noch

$$V = 2\int T\,dt,$$

und die Gleichungen $L = 0$ machen die Minimumseigenschaft des Integrals

$$\int\sqrt{\sum a_{ik}\,dp_i\,dp_k} = \int\sqrt{dV^2 + L_1^2 + \cdots + L_{n-1}^2},$$

d. h. das Prinzip der kleinsten Aktion in der Euler-Jacobischen Form evident. Hiermit erscheint, wie Minding selbst hervorhebt, die Jacobi-Hamiltonsche Methode im engsten Zusammenhang mit derjenigen Transformation des Linienelements einer beliebigen Fläche, auf welcher die Gauss'sche Theorie der geodätischen Linien beruht:

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = dr^2 + m^2\,d\varphi^2.$$

Gewisse von Gauss an diese Transformation geknüpfte Differentialbeziehungen erscheinen geradezu als die einfachsten Fälle der Jacobi-Hamiltonschen Theorie. In der Erkenntnis dieses Zusammenhangs nähert sich Minding der für die moderne Dynamik fundamentalen Anschauung, in welcher die Bahnkurven eines dynamischen Systems als die geodätischen Linien einer gewissen Mannigfaltigkeit erscheinen, deren Linienelement durch eine quadratische Differentialform definiert ist.

Übrigens sei ausdrücklich erwähnt, dass sich von dem wichtigen modernen Begriff der orthogonalen Lage bezüglich einer Differentialform bei Minding keine Andeutung findet.

An speziellen Aufgaben der Dynamik behandelt Minding einige auf schwingende Fäden bezügliche Fragen (Nr. 40, 41); er veröffentlichte ferner ein Referat über die Entwickelung der Mechanik (Nr. 33).

VI. Statik.

Der mit elementaren Mitteln operierenden Statik starrer Körper gehört ein schöner Satz an, der neuerdings vorzugsweise als das Mindingsche Theorem bezeichnet wird. Minding beginnt mit der Frage (Nr. 15, 17), worin bei Kräften beliebiger Richtung das Analogon des Centrums eines Systems paralleler Kräfte besteht. Dreht man letztere um ihre Angriffspunkte, ohne die Intensitäten zu ändern, so geht ihre Resultante durch einen festen Punkt. Um dies Resultat zu verallgemeinern, bringt Minding ein beliebiges Kraftsystem auf eine gewisse Normalform, wobei der Begriff der Centralebene auftritt, und erhält dann folgendes Resultat.

Dreht man die Kräfte, ohne ihre Angriffspunkte, gegenseitigen Neigungen und Intensitäten zu ändern, so giebt es unendlich viele Lagen, in welchen das Kraftsystem durch eine einzige Resultante ersetzt werden kann; alle diese Resultanten schneiden zwei feste Kegelschnitte, die sich in fokaler Lage befinden, bilden also nach der neueren Bezeichnung eine Strahlenkongruenz von einfachem algebraischem Charakter. Natürlich kann man auch den Körper drehen, und die Richtung jeder einzelnen Kraft festlassen; die beiden Kegelschnitte sind dann im Körper fest. Dieses Theorem, dessen Beweis später (Nr. 51) zu höchster Einfachheit gebracht wurde, bildet die Grundlage der Lehre vom astatischen Gleichgewicht; die Anwendungen auf die Magnetnadel, bei welcher die Kegelschnitte in einen Kreis und seine Axe ausarten, hat Minding selbst behandelt (Nr. 20). Die eigentliche Bedeutung der ganzen Untersuchung wird man darin finden können, dass sie den allgemeinen Begriff des Kraftsystems in reichhaltiger Weise spezifizieren lehrt, d. h. neue Merkmale nachweist, nach welchen die Kraftsysteme in wohldefinierte Gruppen auseinander treten. Die Unterscheidungen, um die es sich hier handelt, machen sich zwar in den Formeln der analytischen Mechanik nicht merklich, sind darum aber nicht minder wichtig, besonders für die praktischen Anwendungen.

Während eines Zeitraumes von 30 Jahren nach der Publikation seines Theorems sah sich Minding einmal zu einer Prioritätsreklamation (Nr. 42) veranlasst, hatte aber im übrigen, wie er selbst sagt (Nr. 51), den Eindruck, dass seine Untersuchung unbekannt geblieben sei. Bei ihrem Erscheinen an der Pariser Akademie freundlich aufgenommen (Nr. 16), fand sie vollen Erfolg, d. h. eine über sie selbst hinausführende Fortentwickelung erst von den siebziger Jahren an. Hier sind an erster Stelle die Untersuchungen von Darboux* über das astatische Gleichgewicht zu nennen, bei welchen besonders die oben bezeichnete Strahlenkongruenz als spezieller Fall einer allgemeineren erkannt wurde. Dann haben auch in England Routh,** Tait u. a. Minding's Theorem nach verschiedenen Richtungen bearbeitet. In Deutschland hatte Möbius bald nach Minding's ersten statischen Untersuchungen verwandte, übrigens nicht ganz einwurfsfreie Entwickelungen specielleren Charakters gegeben, die ihn zum Begriff der Gleichgewichtsaxen führten; dieselben fanden aber Jahrzehnte hindurch ebensowenig Beachtung wie das Mindingsche Theorem, da das Interesse der Mathematiker vorwiegend abstrakteren Gegenständen zugewandt war.

Als ein schönes Einzelresultat sei die Ableitung der Gleichung der sphärischen Kettenlinie erwähnt (Nr. 14).

---

* Sur l'équilibre astatique. Paris 1871.

** Analytical Statics II S. 165.

VII. Lehrbücher.

Das Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (Nr. 19) enthält für den modernen Leser als interessantesten Abschnitt einen ausführlichen Beweis für die Existenz des bestimmten Integrals, der, wenn man den Integranden von vornherein als gleichmässig stetig voraussetzt, auch nach den heutigen Begriffen als streng zu bezeichnen ist. Minding bildet die den Integralwert annähernd darstellenden Summen für eine Teilung des Integrationsgebiets, bei welcher die Teilintervalle nicht gleich zu sein brauchen; sodann betrachtet er die analoge Summe, welche bei weiterer Zerlegung der Teilintervalle erhalten wird; endlich hebt er hervor, dass zu zwei ganz beliebigen Teilungen stets eine dritte gefunden werden kann, unter deren Teilpunkten diejenigen der beiden ersten Teilungen enthalten sind. Die Differenzen der zugehörigen Annäherungssummen zeigen, dass, wenn alle Teilintervalle unendlich abnehmen, die Summen selbst sich einer festen Grenze annähern.

Wenngleich für die Grundgedanken dieses Beweises die Priorität Cauchy zu gebühren scheint,* so muss es doch Minding als Verdienst angerechnet werden, dass er zuerst in einem Lehrbuch, sogar in einem zunächst für eine technische Anstalt bestimmten, bei der Begründung der Integralrechnung klare Begriffe an Stelle verwaschener Vorstellungsbilder zu setzen suchte.

Weniger gelungen, wenn auch als ernster Versuch interessant erscheint der Beweis der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

der etwa auf gleicher Höhe mit dem von Serret gegebenen steht. Im übrigen sieht man an der sorgfältigen Untersuchung der Konvergenz und der häufig durchgeführten Bestimmung des Restgliedes den Einfluss Dirichlet's, dessen Ratschläge in der Vorrede ausdrücklich erwähnt werden. Hervorzuheben sind noch der Abschnitt über mechanische Quadratur und eine eingehende Darstellung der Fourierschen Methode zur angenäherten Auflösung der Gleichungen.

Das Lehrbuch der Mechanik (Nr. 22) wird am besten dadurch charakterisiert, dass es die zweite Form der Lagrange'schen Grundgleichungen nicht benutzt, in der Statik alles auf eine Anzahl axiomatisch hingestellter Sätze gegründet wird, in der Dynamik aber alle Aufgaben durch direkte Anwendung des D'Alembert'schen Prinzips und der daraus abgeleiteten Flächen- und Schwerpunktssätze gelöst werden. Die Statik enthält eine Darstellung der oben erwähnten eigenen Untersuchungen des Verfassers; der Begriff des Mittelpunktes nicht paralleler Kräfte wird schon benutzt, um die Zusammensetzung

* Pringsheim, Encyclopädie der Math. Wiss. I A 3 S. 65.

paralleler Kräfte mittels eines Grenzübergangs abzuleiten. Die bei periodischen Bewegungen und Figuren häufig auftretenden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = f(x)$$

werden besonders sorgfältig diskutiert, was z. B. zu einer wesentlich verbesserten Theorie der elastischen Feder führt. In der Dynamik ist als eigentümlich hervorzuheben, dass mehrere Aufgaben mit Berücksichtigung der Reibung eingehend behandelt werden; diese Entwickelungen verdienen, bei den langsamen Fortschritten der Theorie der Reibung, noch heute volle Beachtung. Unübertroffen ist z. B. die über Euler und Coriolis hinausgehende Darstellung der Bewegung einer schweren Kugel auf einer reibenden schiefen Ebene, in welcher Minding besonders den Übergang aus der Bewegung, in welcher Gleiten und Rollen vereint ist, zur rein rollenden diskutiert.

In den Integraltafeln (Nr. 39), die Minding, obwohl nicht mehr im preussischen Staatsdienst stehend, auf Veranlassung des preussischen Handelsministeriums bearbeitete, zeigt sich naturgemäss weniger Originalität als zuverlässige Arbeit und geschickte Auswahl des Stoffes. Nachfrage nach diesem Werk ist noch heute im Buchhandel vorhanden.

Das Lehrbuch der Arithmetik (Nr. 8) ist wohl der erste in Deutschland unternommene Versuch, die Ergebnisse der Disquisitiones arithmeticae und der späteren Abhandlungen von Gauss weiteren Kreisen zugänglich zu machen; die Grundlagen der Theorie der quadratischen Reste und Formen werden gegeben, und das Reziprozitätsgesetz nach der fünften Methode von Gauss abgeleitet.

VIII. Allgemeine Bemerkungen.

Schon die vorliegende Übersicht der wichtigsten Arbeiten Minding's zeigt die grosse Vielseitigkeit seines wissenschaftlichen Schaffens; dieser Eindruck verstärkt sich noch, wenn man die zahlreichen kleineren Beiträge zur Arithmetik und Algebra, zur Kombinationslehre, zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Dioptrik und Integralrechnung mit ins Auge fasst. So verschieden aber auch die Gegenstände sein mögen, alle diese Arbeiten haben gewisse Vorzüge gemein. Überall findet man eine sorgfältige und geschmackvolle Darstellung, in welcher der Einfluss der hohen Allgemeinbildung des Verfassers unverkennbar ist; nur an wenigen Stellen bleibt die Argumentation an Strenge hinter den modernen Anforderungen zurück. Sodann ist der sichere Takt bemerkenswert, mit welchem Minding stets nur solche Probleme auswählt, denen eine wirkliche, dauernde Bedeutung zukommt. Nirgends finden sich Verirrungen in das Gebiet der leeren Formalitäten, nirgends konstruierte Aufgaben, durch welche etwa einer toten Theorie ein täuschender ıimmer von Leben verliehen werden sollte. Andererseits muss ein ıstand erwähnt werden, der für den äusseren Erfolg vieler Arbeiten lange Zeit hinderlich war: die moderne Theorie der Funktionen komcen Arguments kommt nirgends vor; wo mit komplexen Variablen rhaupt operiert wird, geschieht es etwa in der Weise, wie in Abhandlung von Gauss über konforme Abbildung. Ihren Meden und Hilfsmitteln nach sind daher die Arbeiten von Minding nächsten den analytischen Arbeiten von Dirichlet und Kummer wandt. Auch die speziellen analytischen Gebilde, welche etwa den dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts in der Entwickelung reinen Analysis eine bevorzugte Rolle spielten, die elliptischen d Abelschen Funktionen sowie die hypergeometrischen Reihen rden von Minding nirgends eingehend behandelt. Bedenkt man n, dass seine wissenschaftliche Thätigkeit in die Zeit fiel, in lcher sich die Funktionentheorie unter dem Einfluss von Cauchy, emann und Weierstrass glänzend entfaltete, so wird die ungünstige ellung mancher Arbeiten von Minding zu der vorwaltenden Interessenhtung seiner Zeit offenbar. Um so erfreulicher und bezeichnend r den echten Wert dieser Arbeiten ist es, dass einige von ihnen, e oben bemerkt, gerade in neuester Zeit wirksam in die Entwickeıg verschiedener Disziplinen, besonders der Differentialgeometrie d der Statik, eingegriffen haben, während für die auf die allgemeine namik und die Differentialgleichungen bezüglichen Aussicht ist, ıftig noch einen grösseren Einfluss zu gewinnen.

IX. Biographische Notizen.

Ernst Ferdinand Adolph Minding wurde am 11. Januar 1806 in r damals zu Preussen gehörigen Stadt Kalisch als Sohn des preussischen ıdtgerichtsassessors Gottlieb Minding geboren. Er besuchte von nem siebenten Lebensjahr an das Gymnasium zu Hirschberg in hlesien, wo sein Vater sich niedergelassen hatte und im Jahre 1816 ırb. Im April 1824 erhielt Minding ein in allen Fächern vorzüghes Reifezeugnis; sein Direktor ermahnt ihn besonders, seine erfolgichen Studien im Hebräischen fortzusetzen. Er bezog für zwei mester die Universität Halle, um „Schulwissenschaften" zu studieren, ıd hörte Vorlesungen philologischen und philosophischen Inhalts soe eine über Physik. Im Frühling 1825 siedelte er an die Universit Berlin über, in deren philosophischer Fakultät die Geisteswissenhaften und einige Zweige der experimentellen Naturwissenschaft ühten, die Glanzzeit der Mathematik aber noch nicht angebrochen ır. So kam es, dass Minding aus dem Bereich der Wissenschaft, ren Zierde er werden sollte, während seiner ganzen Studienzeit nur ı einziges Kolleg, die Statik bei Dirksen hörte; er ist also, wie cobi, in der Mathematik durchaus Autodidakt gewesen. Weit mehr beschäftigten ihn auch in Berlin philosophische und philologische Studien; er hörte vier grosse Vorlesungen bei Hegel, Geschichte der germanischen und romanischen Völker bei Ranke, Griechische Altertümer bei Böckh, lateinischen Stil und Properz bei Lachmann; dazu kamen einzelne naturwissenschaftliche Vorlesungen bei Erman, Mitscherlich, Encke.

Im August 1827 wurde Minding exmatrikuliert; im nächsten Jahr finden wir ihn als wissenschaftlichen Hilfslehrer am Gymnasium zu Elberfeld, wo er bis zum Juli 1829 in Mathematik, Geschichte und Deutsch unterrichtet. Er promoviert sodann in Halle auf eine mathematische Dissertation hin. Nach Berlin zurückgekehrt, begann er im Sommersemester 1831 seine akademische Lehrthätigkeit mit einer Vorlesung über den barycentrischen Kalkul nach dem Werke von Möbius. Als Kollegen fand er Dirichlet vor, mit dem er in lebhaften wissenschaftlichen Verkehr trat. Die beiden jungen Privatdozenten waren die Pioniere der modernen Mathematik an der Universität, welche Jahrzehnte hindurch in dieser Wissenschaft eine beherrschende Stellung einnehmen sollte. Auch zu Alexander von Humboldt knüpften sich persönliche Beziehungen, die dazu führten, dass Minding's grundlegende Untersuchungen über Statik an der Pariser Akademie Beachtung fanden. In einem für die Eigenart des grossen Polyhistors bezeichnenden Briefe vom 31. Oktober 1835 schreibt Humboldt an Minding, „dass es mir eine angenehme Pflicht gewesen ist, Ihren gewiss sehr interessanten Aufsatz der Akademie der Wissenschaften zu übergeben. Ich habe mit eigener Hand das Endresultat abgeschrieben, und gegen meine Gewohnheit sogar leserlich. Sie werden den Satz in mehreren hiesigen Journalen abgedruckt gefunden baben. Poncelet, Poisson, Libri sind zu Kommissaren ernannt. Ich habe auf den ersteren besonders gedrungen, weil ich Einfluss auf ihn ausübe und ich glaubte, er müsse Ihnen angenehm sein. Meine Gesundheit hält sich trotz vieler Arbeit und gesellschaftlicher Zerstreuungen, welche meine hiesige Lage notwendig macht, sehr gut.“ Im Jahre 1834 wurde Minding, ohne von der Universität zu scheiden, Dozent für Kurvenlehre, analytische Dynamik und Analysis an der königl. allgemeinen Bauschule. Seine Lehrthätigkeit an diesem Institut veranlasste ihn zur Abfassung seiner Lehrbücher der Differentialrechnung und Mechanik. Seine Erfolge fanden bei den Leitern der Anstalt, insbesondere bei Beuth lebhafte Anerkennung, was bei seinem Scheiden ausgesprochen wurde.

Im Herbst 1843 wurde Minding von der russischen Regierung an die Universität Dorpat berufen. Hier verbrachte er die letzten vier Jahrzehnte seines Lebens in angenehmen äusseren Verhältnissen, umgeben von einem geistig angeregten Kreise von Freunden und Kollegen. Nach 25jähriger Amtsthätigkeit wurde er, den damals geltenden Ordnungen gemäss, von seinen Kollegen auf weitere fünf Jahre wiedergewählt, und derselbe Vorgang wiederholte sich noch zweimal. Nach 40jähriger Thätigkeit legte er sein Amt freiwillig nieder. In dieser langen Zeit hat Minding eine fruchtbare Lehrthätigkeit geübt, in welcher nacheinander Senff und Helmling seine nächsten Kollegen waren. Je länger je mehr machte sich Minding's Einfluss auf einer grossen Anzahl wissenschaftlicher Institute geltend; gegen das Ende seiner Laufbahn fanden sich an der Sternwarte Pulkowa, am Riga'schen Polytechnikum, an den Gymnasien und Realschulen der baltischen Provinzen und verstreut über ganz Russland bis nach Tiflis hin Männer in leitenden Stellungen, welche sich mit dankbarer Anerkennung als seine Schüler bekannten. Von Vertretern der reinen Mathematik, welche in weiteren Kreisen bekannt geworden sind, erwähnen wir unter Minding's Schülern Karl Peterson und Axel Harnack. Ersterer, aus Riga stammend, hörte in den fünfziger Jahren bei Minding und Senff; seine Arbeiten über Differentialgeometrie, welche sich auf denselben Bahnen wie diejenigen Minding's bewegen, haben nach langer Vergessenheit neuerdings lebhafte Anerkennung* gefunden. Peterson war später einer der Begründer der Moskauer mathematischen Gesellschaft. Die Laufbahn Harnack's, der von 1869 bis 1873 in Dorpat studierte, ist bekannt.

Bald nachdem Minding nach Russland übergesiedelt war, kam er in freundschaftliche Beziehungen zu den Gelehrten der Petersburger Akademie; besonders mit Bunjakowskij verband ihn eine durch mehrfache gegenseitige Besuche genährte Freundschaft, die bis in das höchste Alter beider Männer andauerte. Nachdem Minding für seine Untersuchungen über Differentialgleichungen (Nr. 47) auf einen Bericht von Ostrogradskij hin** von der Akademie einen der Demidow'schen Preise erhalten hatte, ernannte sie ihn im Jahre 1864 zum korrespondierenden, im Jahre 1879 bei seinem 50jährigen Doktorjubiläum zum Ehrenmitgliede. Bei dieser Gelegenheit wurden Minding die üblichen Ehrenbezeigungen und Beweise der Dankbarkeit seiner Schüler in reichem Maße zu Teil, die glücklichste Fügung für sein hohes Alter aber war, was die Petersburger Akademie in ihrem Gratulationsschreiben hervorhob: „quod singulari quodam divini numinis favore tibi contigit, ut labentibus annis haud diminueretur tuorum laborum ubertas neque ingenii tui acumen hebesceret aut debilitaretur: novissimae tuae quaestiones eandem referunt sagacitatem, eundum mentis vigorem, idemque acumen quo florentissimae aetatis opera tua commendantur."

Die volle Kraft seines Geistes und die Vielseitigkeit seiner Interessen behielt Minding bis zuletzt; er starb am 1./13. Mai 1885. Er gehörte zwar nicht zu den Persönlichkeiten, die im öffentlichen Leben

* Stäckel, Math. Annalen Bd. 49 S. 255.

** Dreissigste Verteilung der Demidow'schen Prämien, St. Petersburg 1861, (russ.) Seite 49.

der kleinen Universitätsstadt die erste Rolle spielen; aber die Lauterkeit seines Charakters, die Selbständigkeit seines eindringenden Urteils in wissenschaftlichen wie politischen Dingen, endlich eine auf humanistischer Grundlage ruhende hohe Bildung, der nichts Menschliches fremd war, haben ihm stets einen gewählten Freundeskreis geschaffen und ein ehrenvolles Andenken auch ausserhalb der Wissenschaft gesichert.

Chronologisches Verzeichnis der Arbeiten von Ferdinand Minding.

Abkürzungen: Cr. J. für Journal für die reine und angewandte Mathematik herausgegeben von A. L. Crelle, später von C. W. Borchardt. Bull. (a) für Bulletin de la classe physico-mathématique de l'académie des sciences de St. Pétersbourg; Bull. (b) für Bulletin de l'académie des sciences de St. Pétersbourg. Mél. für Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'académie des sciences de St. Pétersbourg. Die Jahreszahlen bezeichnen die Zeit des Erscheinens.

1. De valore integralium duplicium quam proxime inveniendo. (Dissertation.) Halle 1829.
2. Über die Kurven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. Cr. J. Bd. 5 S. 297—304. 1830.
3. Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie vermittelst des baryzentrischen Kalkuls. Cr. J. Bd. 5 S. 397—401. 1830.
4. Über die Berechnung des Näherungswertes doppelter Integrale. Cr. J. Bd. 6 S. 91—95. 1830.
5. Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen. Cr. J. Bd. 6 S. 159—161. 1830.
6. Observatio pertinens ad solutionem aequationum inderminatarum secundi gradus. Cr. J. Bd. 7 S. 140—142. 1831.
7. Selbstankündigung der „Anfangsgründe der reinen Zahlenlehre.“ Cr. J. Bd. 7 S. 414—416. 1831.
8. Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Berlin, Verlag G. Reimer, 1832.
9. Théorème relatif à une certaine fonction transcendante, Cr. J. Bd. 9 S. 295 bis 296. 1832.
10. Sur les intégrales de la forme $\int \frac{dx P \sqrt[3]{p}}{c-x}$ p et P étant deux polynômes entiers. Cr. J. Bd. 10 S. 195—199. 1833.
11. Addition à l'article 12, cahier précédent. Cr. J. Bd. 10 S. 292. 1833.
12. Sur la somme des carrés de toutes les droites, qui, à partir d'un point donné, coupent sous un angle déterminé une courbe algébrique. Cr. J. Bd. 11 S. 20 bis 25. 1834.
13. Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième degré. Cr. J. Bd. 11 S. 373—383. 1834.
14. Beantwortung der im 11. Bande dieses Journals S. 200 vorgelegten Frage Nr. 4. Cr. J. Bd. 12 S. 179—180. 1834.
15. Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte. Cr. J. Bd. 14 S. 289—315. 1835.
16. Recherches sur ce qu'il y a d'analogue au centre des forces parallèles, dans un système de forces non parallèles. Der Pariser Akademie vorgelegt. Bericht von Poisson, Libri, Poncelet. Comptes rendus 1835, S. 282.

er den Ort sämtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes
n Kräften. Als Fortsetzung der Untersuchung über den Mittelpunkt nicht
ralleler Kräfte; Bd. 14, Heft 4. Cr. J. Bd. 15 S. 27—38. 1836.
nige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch
ehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon. Cr. J.
. 15 S. 313—316. 1836.
ındbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen
f Geometrie und Mechanik. Erster Teil, enthaltend die Differential- und
egralrechnung nebst Anwendung auf die Geometrie. Berlin, Verlag von
Dümmler, 1836.
merkung über astatische Magnetnadeln. Poggendorffs Annalen der Physik.
. 40 S. 151—153. 1837.
weis eines geometrischen Satzes. Cr. J. Bd. 16 S. 351. 1837.
ındbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen auf
ometrie und Mechanik. Zweiter Teil, enthaltend die Mechanik. Hand-
ch der theoretischen Mechanik. Berlin, Verlag von F. Dümmler, 1838.
er die Biegung gewisser Flächen. Cr. J. Bd. 18 S. 297—302. Bemerkung
er eine Erweiterung S. 302. 1838.
er die Biegung krummer Flächen. Cr. J. Bd. 18 S. 365—368. 1838.
ie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander
wickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von un-
änderlichem Krümmungsmaße. Cr. J. Bd. 19 S. 370—387. 1839.
merkungen über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. Cr. J. Bd. 20
168—170. 1840.
er einen besonderen Fall bei der Abwickelung krummer Flächen. Cr. J.
. 20 S. 171—172. 1840.
iträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. Cr. J. Bd. 20
323—327. 1840.
er die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden
eichung. Cr. J. Bd. 22. S. 178—183. Sur le degré de l'équation finale qui
ulte de l'élimination. Liouville Journal de mathématiques sér. 1 Bd. 6
412—418. 1841.
opositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius
riabilis, e principiis Abelianis derivatae. Cr. J. Bd. 23 S. 255—274. 1842.
e Einrichtung der Klassenlotterie mit Freilosen in Hinsicht auf ihren
rchschnittlichen Erfolg für Unternehmer und Spieler arithmetisch beleuchtet.
n Beitrag zur politischen Arithmetik. Berlin 1842, Verlag Veit & Co.
éveloppement d'une expression symmétrique du degré d'une équation résul-
nt de l'élimination. Bull. (a) 275—288. 1843. Entwickelung eines sym-
etrischen Ausdruckes für den Grad der durch Elimination hervorgehenden
leichung. Cr. J. Bd. 31 S. 1—11. 1846.
echanik. Dove's Repertorium der Physik Bd. 5 S. 1—87. 1844.
rwiderung auf den Artikel 23 im 26. Bande dieses Journals. Cr. J. Bd. 27
. 379—380. 1844.
emerkungen zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung
wischen zwei veränderlichen Grössen. Bull. (a) Bd. 4 S. 378—382. 1845.
r. J. Bd. 40 S. 361—365. 1850.
in neuer Ausdruck des Hauptsatzes der Dioptrik. Bull. (a) Bd. 5 S. 113 bis
15. 1845. Poggendorff's Annalen der Physik Bd. 70 S. 268—272. 1847.
ber den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (sogenannten Rössel-
prung). Bull. (a) Bd. 6 S. 209—220. 1847. Cr. J. Bd. 44 S. 73—82. 1852.
ber einige Grundformeln der Geodäsie. Bull. (a) Bd. 8 S. 88—92. 1849.
r. J. Bd. 44 S. 66—72. 1852.
ammlung von Integraltafeln zum Gebrauch für den Unterricht an der Königl.
llgemeinen Bauschule und dem Königl. Gewerbeinstitut. Berlin 1849, in
ommission bei Carl Reimarus (Gropius).

40. Auflösung einer Aufgabe aus der Mécanique analytique von Lagrange. Bull. (a) Bd. 12 S. 75—84. 1854. Mel. Bd. 1 S. 580—592. 1853.
41. Über die Schwingungen eines freihangenden, biegsamen Fadens. Cr. J. Bd. 50 S. 243—262. 1855.
42. Über einige Lehrsätze der Statik. Grunert's Archiv für Mathematik Bd. 27 S. 214—223. 1856.
43. Über den Wert des Integrals $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n}\,dx$, wenn m und n positive ganze Zahlen sind und $m > n$ oder $m = n$ ist. Grunert's Archiv für Mathematik Bd. 30 S. 171—184. 1858.
44. Über die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werte dienen. Cr. J. Bd. 55 S. 300—309. 1858.
45. Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville. Liouville, Journal de mathématiques sér. 2 Bd. 4 S. 273—281. 1859.
46. Über eine angebliche Berichtigung der Formel für barometrische Höhenmessung. Kämtz Repertorium der Meteorologie Bd. 2 S. 32—35. 1862.
47. Beiträge zur Integration der Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Mémoires de l'académie des sciences de St. Pétersbourg Bd. 5 Nr. 1 S. 1—95. 1862. Jzslědowanija ob integrirowanii differencialnych urawnenij perwago porjadka s dwumja peremennymi. Druckerei der Akademie der Wissenschaften. St. Petersburg 1862.
48. De curvatura superficierum quaestiones (Gratulationsschrift). Dorpat 1863.
49. Disquisitio de formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina (Gratulationsschrift). Dorpat 1864.
50. Quelques remarques analytiques à l'occasion de l'ouvrage de Mr. le Prince S. S. Ouroussof. Bull. (b) Bd. 9 S. 39—55. 1866. Mel. Bd. 3 S. 655—666. 1866.
51. Démonstration d'un théorème de statique. Bull. (b) Bd. 12 S. 233—239. 1868. Mel. Bd. 4 S. 245—252. 1872.
52. Über eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bull. (b) Bd. 13 S. 203—208. 1869. Mel. Bd. 4 S. 325—333. 1872.
53. Über das Bildungsgesetz der Zähler und Nenner bei Verwandlung der Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche. Bull. (b) Bd. 13 S. 524—528. 1869. Mel. Bd. 4 S. 343—349. 1872.
54. Zur Methode der kleinsten Quadrate. Bull. (b) Bd. 16 S. 305—308. 1871. Mel. Bd. 4 S. 711—715. 1872.
55. Über die mittlere Krümmung der Flächen. Bull. (b) Bd. 20 S. 531—537. 1875. Mel. Bd. 5 S. 248—256. 1881.
56. Über die Kurven kürzesten Umrings auf Umdrehungsflächen. Bull. (b) Bd. 21 S. 252—261. 1876. Mel. Bd. 5 S. 297—308. 1881.
57. Einige isoperimetrische Aufgaben. Bull. (b) Bd. 24 S. 398—409 187. Mel. Bd. 5 S. 443—458. 1881.
58. Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings auf krummen Flächen. Bull. (b) Bd. 25 S. 190—193. 1878. Mel. Bd. 5 S. 575—579. 1881.
59. Eine Anwendung der Differenzenrechnung. Bull. (b) Bd. 25 S. 225—229. 1878. Mel. Bd. 5 S. 581—588. 1881.
60. Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächeninhalt, auf krummen Flächen. Cr. J. Bd. 86 S. 279—289. 1879.

Rezensionen.

orlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Von Dr. A. v. BRAUNMÜHL, ordentl. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu München. Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Mit 62 Figuren im Text. Leipzig 1900, B. G. Teubner. VII, 260 S.

Wenn Herr v. Braunmühl es für nötig hält, sich in dem Vorworte ewissermaßen zu entschuldigen, dass er eine Sondergeschichte der Trionometrie veröffentliche, nachdem eine Geschichte der Mathematik im llgemeinen kaum erst erschienen sei, so muss der Verfasser jener Gechichte der Mathematik von seiner Seite die neue Ergänzung zu seinen gnen Arbeiten aufs Freudigste willkommen heissen. Bietet sie doch ein sammenhängendes Bild, von dem nur einzelne Teile in der Geschichte er Mathematik zerstreut herumliegen, und bietet sie doch zugleich so viel eues, dass der Referent gern gesteht, manches aus ihr gelernt zu haben, as verdient hätte auch in der Geschichte der Mathematik einen Platz zu nden und in einer Neubearbeitung insbesondere des ersten Bandes, wenn ne solche möglich werden sollte, gewiss berücksichtigt werden wird. Wir einen vorzugsweise die graphisch-trigonometrischen Methoden der Griechen nd die trigonometrischen Eigenleistungen der Araber. Aber auch für den weiten Band hat Herr v. Braunmühl Ergänzendes aufgefunden, und wir bedauern lebhaft das, was S. 183—185 über Maurice Bressieu als Vorlnger von Torporley gesagt ist, nicht rechtzeitig kennen gelernt zu haben, m es noch dem Vorworte zur zweiten Auflage des zweiten Bandes einverleiben ı können. Auch dem fleissigsten Forscher entgehen mitunter ganz wichtige inge, und ein neidloses Zusammenwirken wird geradezu zur Notwendigeit. Von diesem Gesichtspunkte aus sei es uns gestattet, Herrn v. Braunmühl uf wenige Punkte aufmerksam zu machen. Auf S. 19 ist *τρήματα* in *μήματα*, auf S. 49 und 50 Raska in Ruska zu verbessern; letzterer Druckehler ist um so peinlicher, als er auch in das Register sich fortgesetzt hat. ie S. 64 zur Veröffentlichung empfohlene Kreisquadratur des Ibn. Al-Haitam st durch Herrn Suter in der Ztschr. Math. Phys. 44, Hist. litter. Abt. S. 33 is 47 dem Drucke übergeben. Zu S. 200 ist nachzutragen, dass in der rager Universitätsbibliothek eine von Tycho Brahe herrührende Sinusafel gefunden worden ist, über welche Herr Studnička in einem am 3. Oktober 1899 der Königl. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch. vorgelegten ufsatze berichtet hat.

CANTOR.

Delle Meccaniche lette in Padova l'anno 1594 da Galileo Galilei per la prima volta pubblicate ed illustrate du Antonio Favaro. Venezia 1899, Tipografia Carlo Ferrari. 26 pag.

In der 1899 dem Unterzeichneten von 32 wissenschaftlichen Freunden gewidmeten Sammlung histor.-mathematischer Abhandlungen hat Herr Favaro auf eine Handschrift im Besitze des Fürsten Thurn und Taxis in Regensburg hingewiesen, wahrscheinlich ein Vorlesungsheft der Mechanik, welches Galilei 1594 seinen Vorlesungen in Padua zu Grunde legte und seinen Schülern zur Abschrift mitteilte. Herr Favaro hat jetzt dieses Heft in den Abhandlungen der gelehrten Gesellschaft von Venedig und daraus als Sonderabdruck veröffentlicht. Galilei behandelt in italienischer Sprache die fünf einfachen Maschinen: Hebel (*lieva*), Haspel (*argano*), Rolle (*taglia*), Schraube (*vite*), Keil (*conio*), dann deutet er zum Schlusse die Möglichkeit der Vereinigung mehrerer unter ihnen an. Die Behandlung ist so einfach als möglich. Rührt das Heft wirklich von Galilei her, so besitzt es dadurch Interesse. Wäre Herr Favaro's Annahme irrig, zu welcher Anzweiflung freilich kaum ein Grund vorliegt, so wäre damit Galilei um keinen besonderen Ruhmestitel ärmer.

Cantor.

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Franz Schmidt und Paul Stäckel. Leipzig 1899, B. G. Teubner. XIII, 208 S.

Im 43. Bande dieser Zeitschrift Histor.-litterar. Abtlg. S. 209—210 wurde der erste Band von Wolfgang Bolyai's Werken angezeigt, von welchen die Ungarische Akademie eine glänzende Ausgabe veranstaltet. Noch bevor der zweite Band die Presse verliess, ist ein nicht minder glänzend ausgestatteter Ergänzungsband in unsere Hände gelangt, der den in der Überschrift abgedruckten Titel führt. Es sind im ganzen 42 Briefe, 18 von Gauss an Bolyai, 24 von Bolyai an Gauss, und erstrecken sich von Ende September 1797 bis Anfang Februar 1853. Dazu kommen dann noch Briefe anderer Persönlichkeiten, die sich auf die beiden Jugendfreunde beziehen, und Anmerkungen des Herausgebers. Der eigentlich wissenschaftliche Inhalt der Briefe, der für die Geschichte der Lehre von den Parallellinien besondere Wichtigkeit besitzt, ist schon wiederholt ausgebeutet. Dagegen ist für die persönlichen Verhältnisse beider Briefschreiber eine neue reiche Quelle eröffnet, wenn deren Ergebnis auch, soweit es Bolyai betrifft, nur den traurigen Eindruck verstärken kann, welchen das verpfuschte Leben eines Menschen, dessen Anfänge zu den höchsten Hoffnungen berechtigt hatte, hervorruft. Zu den Persönlichkeiten, über welche nicht unwichtige neue Thatsachen durch den Briefwechsel bekannt werden, gehört Friedrich Wilhelm August Murhard. Gauss warnt Bolyai vor ihm als einem durchaus unzuverlässigen Menschen, der sich Unredlichkeiten niedriger Art zu Schulden kommen liess. Es scheint, als ob Murhard 1798 in der offnung auf Erlangung einer Professur nach Österreich reiste, und erst als ese Hoffnung zu nichte wurde, die Reise in das ferne Morgenland fort-tzte, von wo er bekanntlich 1799 nach Kassel zurückkehrte. CANTOR.

---

rithmetic theoretical and practical by JOHN STURGEON MACKAY, M. A., L. L. D. Fellow of the Royal Society of Edinburgh; head mathematical master in the Edinburgh Academy. London and Edinburgh 1899, W. & R. Chambers, limited. XI, 472 pag.

Wenn ein Mathematiker wie Herr Mackay ein Lehrbuch aller-ementarsten Inhaltes herausgiebt, so kann man sich, selbst wenn es ch um Dinge handelt, die seinem gewohnten Gedankenkreise fern liegen, nmerhin auf eine interessante Behandlung gefasst machen, und diese offnung hat uns nicht getäuscht. Wir haben das Lehrbuch der Rechen-unst mit Vergnügen gelesen und mancherlei daraus gelernt, was englischen hriften vielleicht gemeinsames Eigentum ist, uns aber nicht als solches kannt war. Um unseren Lesern ein Beispiel davon zu geben, wählen r die Zinsberechnung (pag. 297) für den Fall, dass das Kapital K ährend t Tage zu p % zinstragend angelegt ist und den Zins Z liefert. Deutschland nimmt man in solchen Fällen das Jahr zu 360 Tagen an. icht so in England, wo das Jahr auch bei der Zinsabrechnung mit 55 Tagen auftritt, die Rechnung aber gleichwohl sich durch einen Kunst-iff ziemlich einfach gestaltet. Zunächst ist $Z = \frac{tpK}{36500} = \frac{2tpK}{73000}$. Nun t aber ziemlich genau $\frac{1}{73} = 0{,}0137$ und demzufolge $Z = \frac{2tpK}{100000} \cdot 1{,}37$. ber $1{,}37 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}$ und daraus folgt die Regel: man bilde s doppelte Produkt von Kapital, Tagen und Zinsfuss, addiere dazu in Drittel, dessen Zehntel und das Zehntel dieses Zehntels und schneide nf Dezimalstellen ab, so erhält man den Zins. Von Dingen, die uns icht neu waren, denen zu begegnen wir uns aber freuten, erwähnen wir, ss die Subtraktion durchweg additiv erfolgt, also mittels der öster-ichischen Subtraktion, wie man dieses Verfahren in Deutschland zu nnen pflegt; dass irrationale Quadratwurzeln als gemeinsame Grenze veier Zahlreihen auftreten, deren eine aus zunehmenden, die andere s abnehmenden Zahlen besteht; dass die Lehre von den periodischen ezimalbrüchen in einiger Vollständigkeit behandelt ist. CANTOR.

---

weierlei Zinsfuss und Zinsfusswechsel im Kontokorrent von EDUARD GROHMANN, Professor an der Gremial-Handelsfachschule der Wiener Kaufmannschaft. (Aus der Sammlung handelswissenschaftlicher Ab-handlungen herausgegeben von der Handels-Akademie Leipzig, Dr. jur. Ludwig Huberti.) Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Verlag der Handelsakademie Leipzig. 48 S.

Bei der Zinsabrechnung in den Kontokorrenten werden regelmässig zweierlei Zinsfusse zu Grunde gelegt, ein niedriger Zinsfuss, so oft das Bankgeschäft Einlagen des Kunden zu verzinsen hat, ein höherer, so oft es ihm Kredit auf kürzere oder längere Zeit gewährt. Ferner kommt es nicht selten vor, dass infolge von Veränderungen im allgemeinen Geldstande innerhalb des halben Jahres, über welches das Kontokorrent sich erstreckt, der Zinsfuss herüber wie hinüber sich erhöht oder ermässigt. Beides will berücksichtigt sein und kann dem ungeübten Rechner gewisse Schwierigkeiten bereiten. Herr Grohmann zeigt nun, wie man jene Rechnung zu vollziehen hat.

Cantor.

Exercises d'arithmétique. Énoncés et solutions par J. Fitz-Patrick, ancien professeur de mathématiques, et Georges Chevrel, directeur de l'institution Charlemagne à Tours. Avec une préface de M. Jules Tannery, sous-directeur des études scientifiques à l'école normale supérieure. Deuxième édition considérablement augmentée et suivie d'exercises proposés, de notions et exercises d'arithmétique commerciale. Paris 1900, A. Hermann. XIV, 680 pag.

Wir haben im 40. Band Histor. litterar. Abtlg. S. 65—66 die erste Auflage von 1893 besprochen und deren Vorzüge hervorgehoben, denen allerdings der Absatz des Buches nicht entsprochen zu haben scheint. Wir sind zu dieser bedauernden Äusserung berechtigt, weil bei näherem Zuschauen die gegenwärtige zweite Auflage sich bis S. 483 einschliesslich als unverändert erweist mit neugedrucktem Titelblatte. Die Behauptung bedeutender Vermehrung ist dennoch wahr, denn S. 485—680, also mehr als 12 Druckbogen, sind neu hinzugekommen. Ihr Inhalt besteht teils aus weiteren Aufgaben ohne hinzugefügte Auflösungen, teils aus gelösten kaufmännischen Aufgaben mit vorausgeschickten Erläuterungen. Dieser Anhang besitzt die gleichen Vorzüge, welche wir an dem ihm vorhergehenden Teile lobten. Fesselnde Aufgaben sind gestellt, und an ihre Auflösung knüpfen sich Bemerkungen von praktischem Werte. Wir wünschen dem Buche, es möge in seiner neuen Gestalt besser als seither französischen Lesern gefallen, da der Absatz eines derartigen Werkes doch der Hauptsache nach in seinem Vaterlande erzielt werden muss.

Cantor.

Paul Mansion, Introduction à la théorie des déterminants avec de nombreux exercises à l'usage des établissements d'instruction moyenne. 3. Édition. Gand 1899, Hoste. 38 S.

Paul Mansion, Einleitung in die Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen. Aus der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 40 S.

Paul Mansion, Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercises. 6. Édition revue et augmentée. Paris 1900, Gauthier-Villars. 91 S.

PAUL MANSION, Elemente der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben. Dritte vermehrte Auflage. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 101 S.

Der grössere und der kleinere Mansion. Unter den diesen Namen entsprechenden Bezeichnungen sind in Frankreich wie in Deutschland die beiden Schriften rühmlich bekannt, welche wir in neuen Auflagen heute anzeigen. Die Häufigkeit dieser Auflagen zeugt für die Beliebtheit der ungemein handlichen Schriften, deren grössere noch von sehr geringem Umfange bei reichem Inhalte ist. Wir können diese Beliebtheit nur eine in hohem Grade verdiente nennen.

CANTOR.

J. A. SERRET, **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung** mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von AXEL HARNACK, zweite durchgesehene Auflage mit Unterstützung der Herren H. LIEBMANN und E. ZERMELO herausgegeben von GEORG BOHLMANN. Zweiter Band: **Integralrechnung.** Mit 55 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1899, B. G. Teubner. XII, 428 S.

Der erste Band ist im 43. Bande dieser Zeitschrift Histor. litterar. Abtlg. S. 54—55 angezeigt. Im zweiten Bande wird man nicht weniger als in seinem Vorgänger das Bestreben wahrnehmen, dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft gerecht zu werden, ohne den Serret'schen Untergrund ganz zu verlassen. Herrn Bohlmann's eigenem Standpunkte, wie er ihn an anderem Orte in einer kritischen Übersicht über die Lehrbücherlitteratur gezeichnet hat, entspricht es, dass vornehmlich und im Gegensatze zur sogenannten Arithmetisierung der Mathematik mit geometrischen Begriffsbildungen gearbeitet ist. War in dem 11. Kapitel des I. Bandes der Zugang zur Lehre von den Funktionen komplexer Veränderlichen eröffnet, so führt das 8. Kapitel des II. Bandes tiefer in diese Lehre ein, ohne dass ein besonderes Lehrbuch der Funktionentheorie dadurch entbehrlich gemacht würde. Das 4. Kapitel von den Eulerschen Integralen hat manche Erweiterung erfahren; wir erwähnen die sehr lehrreiche graphische Darstellung der Gammafunktion (S. 184). Vermisst haben wir eine Berücksichtigung der Prym'schen Arbeit über die Gammafunktion, die doch mindestens in den Bemerkungen auf S. 420 hätte genannt werden sollen.

CANTOR.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. II. Teil: **Integral-Rechnung.** Von Dr. LUDWIG KIEPERT, Geheimer Regierungsrat, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. MAX STEGEMANN, mit 139 Figuren im Texte. Hannover 1900, Helwing. XX, 617 S.

Der wesentlichste Unterschied gegen die vorhergehende Auflage von 1896 besteht in der Aufnahme der Gaußschen angenäherten Quadratur, welche S. 346—355 im Anschlusse an die Simpsonsche Regel gelehrt ist.

Die Verlagshandlung hat sich zu einer Neuerung entschlossen, welche der gegenwärtig schon weiten Verbreitung des Werkes nur förderlich sein kann. Sie stellt den Lehrern, welche den Kiepert ihren Vorlesungen zu Grunde legen, beliebig viele Gratisexemplare der am Schlusse abgedruckten Formelsammlung zur Verteilung an ihre Zuhörer zur Verfügung.

CANTOR.

Höhere Analysis, zweiter Teil. **Integralrechnung** von Dr. FRIEDRICH JUNKER, Professor am Realgymnasium und der Realanstalt in Ulm. Mit 87 Figuren. Leipzig 1899, G. J. Göschensche Verlagshandlung. (Sammlung Göschen.) 205 S.

Was im 44. Bande dieser Zeitschrift Histor.-litter. Abtlg. S. 156 über Herrn Junker's in der Sammlung Göschen erschienene Differentialrechnung gesagt wurde, gilt mit geringen Wortänderungen auch für dessen Integralrechnung. Sie giebt die Anleitung zum Integrieren, zur Anwendung von Integrationen auf die Quadraturen, Komplanationen, Kubaturen, Rektifikationen, Auffindung von Schwerpunkten. Sie zeigt auch, wie Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen integriert werden können. Kurzum das kleine Büchelchen beschäftigt sich mit dem, was für den gewöhnlichen Gebrauch unumgänglich notwendig ist. Falsches ist uns, abgesehen von Druckfehlern, an denen kein Mangel ist, nichts aufgefallen, dagegen ist das Eingehen auf Schwierigkeiten streng vermieden. Der Leser muss oft auf Treu und Glauben annehmen, wovon ihm nicht einmal gesagt wird, dass ein Beweis erforderlich und möglich ist, wie z. B. den Fundamentalsatz der Algebra (S. 24). Etwa in gleicher Linie steht (S. 180) die Behauptung, der integrierende Faktor μ der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ lasse sich stets so bestimmen, dass die Bedingung erfüllt ist $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. Freilich hinkt (S. 182) die Bemerkung nach, die Bestimmung von μ aus der partiellen Differentialgleichung $\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}$ [so heisst die Gleichung 7 nach Entfernung der Druckfehler!] sei gewöhnlich schwieriger als die Integration der gegebenen Gleichung selbst. Dabei bleibt der Leser immer noch in dem Wahne, μ könne unter allen Umständen bestimmt werden.

CANTOR.

Analytische Geometrie des Raumes. Zweiter Teil der Elemente der analytischen Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium, mit zahlreichen Übungsbeispielen von Dr. FRANZ RUDIO, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit zwölf Figuren im Texte. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1899, B. G. Teubner. X, 184 S.

Wenn wir bei Besprechung der ersten Auflage (Bd. 37, Hist. litter. Abtlg. S. 67—68) voraussagten, das Buch werde sich so viele Freunde als Leser gewinnen, so bestätigt die eingetretene Notwendigkeit einer

Neudruckes unser damaliges Urteil. Die in der zweiten Auflage eingetretenen Verbesserungen sind vielleicht richtiger als Vermehrungen zu bezeichnen. So hat die Anzahl der Aufgaben sich von 458 auf 482 erhöht. Im 6. Kapitel ist die Behandlung der Oberflächen zweiten Grades eine ausführlichere geworden, so dass das Buch in seiner jetzigen Gestalt mehr noch als früher dem Bedürfnisse von Polytechnikern zu genügen im stande ist. Das Hinzutreten eines alphabetischen Sachregisters erfüllt sicherlich weitverbreitete Wünsche.

Cantor.

Kurzer Abriss der darstellenden Geometrie zum Gebrauche in Vorlesungen, beim Unterricht und zum Selbststudium von Dr. Ernst Gerland, Professor an der Königl. Bergakademie zu Clausthal. Mit einem Block von 26 lithographierten Tafeln. Leipzig 1899, Wilh. Engelmann. Text 8⁰, 49 S.

Den Hauptwert des vorliegenden Werkchens sieht der Verfasser, nach dem Vorworte zu urteilen, in den 26 lithographierten Tafeln, auf denen, ausser einigen Erklärungsfiguren, Angaben für Aufgaben sich befinden, die der Lernende auf den Tafeln selbst durchzeichnen, eventuell auch tuschen soll. Frühere Versuche dieser Art haben meines Wissens keinen Anklang gefunden; denn den einzigen mit Recht anzuführenden Nutzen dieser Methode, dass die Schüler geeignete Aufgaben im richtigen Maßstabe zeichnen, erzielt der Lehrer besser, indem er ihnen durch Maße bestimmte Aufgabenskizzen in die Hand giebt. Wenn der Verfasser meint, dass durch solche Tafeln „der Lernende gezwungen ist, alle Zeichnungen selbst auszuführen", dann täuscht er sich. Ich glaube vielmehr, dass dadurch zum Kopieren erst recht Gelegenheit geboten wird, denn jeder folgende Jahrgang kann alle 26 Tafeln von dem vorhergehenden mechanisch abzeichnen, sogar abpausen, weil die Aufgaben so genau als möglich übereinstimmen. Wenn aber der Verfasser den angeführten Satz fortsetzt: „statt sie nach bisher herrschendem Gebrauche bereits ausgeführt vorzufinden", so spricht er in dieser Allgemeinheit eine schwere ungerechtfertigte Beschuldigung aus. Die Blockform der Tafeln macht ferner den im technischen Zeichnen üblichen Gebrauch der Reißschiene unmöglich und zwingt den Zeichner beim Ausführen eines Blattes, das nachfolgende mit dem Zirkel zu zerstechen.

Die zeichnerische Ausführung der Tafeln lässt viel zu wünschen übrig. Vor allem fällt die inkorrekte Zeichnung aller vorkommenden Ellipsen auf (Fig. 141, 211 (!), 212 (!), 213), deren sich ein darstellender Geometer nicht schuldig machen dürfte; in den Figuren 76, 126, 215 stimmen Aufriss und Grundriss ziemlich schlecht überein.

Ebenso wenig Gutes kann von dem Text gesagt werden. Wie dieses Büchlein zum Selbststudium brauchbar sein soll, ist gänzlich unverständlich. Die Andeutungen zur Lösung sind meist so spärlich und oft so unzutreffend oder unklar, dass selbst ein Fachmann nicht immer sogleich verstehen wird, wie sich der Verfasser die Lösung dachte. Dazu kommt noch eine beträchtliche Zahl von Ungenauigkeiten und Fehlern, wie z. B. in

§ 27 „Ist eine Gerade keiner der Projektionsebenen parallel, so konvergieren (?) ihre Projektionen gegen die Axe."

§ 63 und anderen „affin liegende Figuren" statt perspektivisch liegende affine Figuren.

§ 131, wo der in Fig. 117 dargestellte Körper als eine Kombination des Würfels mit dem Oktaëder bezeichnet wird, während es, nach dem Grundrisse zu urteilen, eine Kombination dieser beiden Körper mit dem Rhombendodekaëder ist,

§ 166, wo von der orthogonalen Axonometrie im Gegensatze zur Orthogonalprojektion gesprochen und behauptet wird, dass sie „den Körper in einer Weise darstellt, wie wir ihn aus endlicher Entfernung zu sehen gewohnt sind,"

§ 167, wo „die isometrische Projektionsmethode, auch Vogelperspektive oder Cavalierperspektive genannt" wird.

Ein wahres Unikum einer „Erklärung" bringt

§ 199: „die Fluchtpunkte von parallelen Linien, welche die Falllinien der Ebene unter einem anderen Winkel wie 45° schneiden, heissen Teilungspunkte".

Falsch ist in der Erklärung § 223 die Behauptung, dass die Linien gleicher Helligkeit (einer beliebigen Fläche!) „von der Linie oder dem Punkte grösster Helligkeit, der Glanzkante, gleichen Abstand haben," ferner in § 225 die Angabe, dass die „Linie kleinster Helligkeit", d. h. die Eigenschattengrenze, für einen Rotationskegel ebenso gefunden werde wie für einen Rotationscylinder, unerfüllbar die Forderung im § 224, dass das Licht längs einer Linie einfallen soll, „die mit den drei Koordinatenebenen Winkel von 45° macht."

Ich will die Geduld des Lesers nicht missbrauchen und nur noch hinzufügen, dass ich die Anschaffung dieses Werkes meinen Schülern nicht empfehlen würde.

E. Müller.

Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig von Prof. Dr. Reinhold Müller. Als Manuskript gedruckt. Braunschweig 1899. Fr. Vieweg & Sohn. 8°. 88 S.

Vorliegendes Büchlein hat nach den Worten des Verfassers ausschliesslich den Zweck, von seinen Hörern im Zusammenhange mit den Vorlesungen zur Wiederholung des Gelehrten benutzt zu werden. Es soll das Nachschreiben der Vorträge, nicht aber das wichtige Nachzeichnen der Figuren ersparen; sie sind deshalb möglichst vermieden. Durch eine musterhaft kurze und klare Schreibweise, verbunden mit einer konsequent angewendeten Bezeichnung hat es der Verfasser zustande gebracht, das für den Techniker unbedingt Wissensnötige aus der darstellenden Geometrie samt den erforderlichen Begründungen auf diesen engen Raum zusammen zu drängen und dabei doch so verständlich zu bleiben, dass nach Hinzufügung einiger weiterer Figuren, meiner Meinung nach, das Büchlein nicht nur von seinen Hörern, sondern auch von anderen Studierenden mit Erfolg benuzt werden könnte.

Das Büchlein verdient aber meiner Ansicht nach noch ein allgemeineres Interesse deshalb, weil es eine der wenigen Veröffentlichungen ist, aus denen man ersehen kann, in welchem Umfange und nach welcher Methode die darstellende Geometrie an einer technischen Hochschule wirklich gelehrt wird. Als unterscheidende Merkmale von den an anderen Hochulen eingehaltenen Lehrgängen fällt vor allem die Nichtverwendung der projektiven Geometrie und die Bevorzugung der rechtwinkeligen Projektion auf. Der Vortragende stellt sich dadurch auf einen weniger hohen wissenschaftlichen Standpunkt, wird aber die Techniker nicht durch zu viele, mit der darstellenden Geometrie oft nur in losem Zusammenhang stehende Theorie abschrecken. Aus der projektiven Geometrie verwendet der Verfasser nur die Begriffe Affinität und Kollineation, beruft sich an anderen Stellen auf die Ergebnisse der analytischen Geometrie oder stellt eine kleine Rechnung an. Um z. B. in Nr. 106 zu beweisen, dass durch Rotation einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Axe ein Umdrehungshyperboloid entsteht, leitet er die Gleichung der Meridiankurve ab. Die die Ellipse betreffenden Konstruktionen werden erklärt, indem er die Ellipse als affine Kurve des Kreises betrachtet. Die „Papierstreifenkonstruktion" der Ellipse, sowie die Konstruktion ihrer Axen aus zwei konjugierten Durchmessern folgen daraus (Nr. 67, 68) auf elementar-geometrischem Wege. Auf die Behandlung der allgemeinen Fläche zweiten Grades muss natürlich der Verfasser verzichten, ebenso z. B. auf die genauere Untersuchung der Regelflächen und die Verwendung derjenigen darauf bezüglichen Konstruktionen, welche Kenntnisse aus der projektiven Geometrie erfordern. Dadurch wird jedoch viel Zeit für die Durcharbeitung praktisch wichtigerer Dinge gewonnen.

Von den zwei Abschnitten des Büchleins „die Parallelprojektionen" und „die Centralprojektion" nimmt der erste mit 76 S. den überwiegend grössten Raum ein, und das meiste davon bezieht sich auf die „senkrechte Projektion". Die schiefe Projektion tritt eigentlich nur am Anfang und Ende des Abschnittes auf. Am Anfang wird sie soweit erläutert, dass der Studierende imstande ist, anschauliche Skizzen (Erläuterungsfiguren) methodisch herzustellen; am Ende wird der Pohlkesche Satz bewiesen; zwischendurch wird hie und da auch die Darstellung von Gebilden in schiefer Projektion kurz erwähnt oder die Lösung von Aufgaben bei Darstellung in schiefer Projektion angedeutet. In der Vorrede bemerkt der Verfasser, dass er die schiefe Projektion in Vortrag und Übungen in umfangreicherem Maße anwende, als es in dem Leitfaden zum Ausdruck gelange. Was die senkrechte Projektion anbelangt, so kommen nach der Besprechung der Darstellung von Punkten, geraden Linien und Ebenen auf zwei (nicht gleich drei!) zu einander senkrechte Ebenen, wie üblich, ebenflächige Gebilde, Kreis und Kugel, Kegel-, Cylinder-, Umdrehungs-, Schrauben- und windschiefe Flächen zur Besprechung. In einem Kapitel über Beleuchtungslehre werden die Bestimmungen der Isophoten krummer und der Helligkeit ebener Flächen mittels der Normalkugel erklärt, ferner kurz die Grundbegriffe der kotierten Projektion angeführt und endlich die senkrechte Axonometrie erläutert, die meines Erachtens vollkommen durch die schiefe Projektion zu ersetzen wäre. Lobend hervorzuheben ist die durchgehende Anwendung von Seitenrissen als Konstruktionsprinzip zur Zurückführung komplizierter Aufgaben auf einfache, ferner manche treffende Bemerkung über Konstruktionsvereinfachungen. Die bei jeder Flächenklasse besprochenen Schattenbestimmungen könnten vielleicht, aus manchen pädagogischen Gründen, in ein Kapitel vereinigt werden. In Nr. 109 vermisse ich die Ermittelung der Rückkehrpunkte des scheinbaren Umrisses einer beliebigen Rotationsfläche und in Nr. 111 eine Bemerkung über den Verlauf ihrer Eigenschattengrenze, wenn der Meridan aus mehreren sich berührenden Teilkurven z. B. Kreisbögen besteht. In Nr. 81 sollte des schnelleren Verständnisses halber die Bedeutung des Buchstaben A aus Nr. 79 nochmals angegeben sein.

Im zweiten Abschnitt wird (etwas zu kurz!) erläutert, wie man aus den gegebenen senkrechten Projektionen eines Gegenstandes sein perspektivisches Bild ermittelt, dann das wichtigste aus der freien Perspektive. Der Anhang über Reliefperspektive (2 S.) soll den Studierenden auf einen allgemeineren Standpunkt stellen, insbesondere zeigen, wie die Nichtregelflächen zweiten Grades als Relief der Kugel hervorgehen.

Diese Vorträge, verbunden mit gut geleiteten Übungen, in denen mehr praktische Beispiele bearbeitet werden, bilden, meiner Meinung nach, einen Lehrgang, der den von hervorragenden Vertretern der Technik erhobenen Forderungen vollkommen entspricht.

E. Müller.

Die Elemente der darstellenden Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Bearbeitet von Prof. Dr. Chr. Schmehl, Lehrer an der Grossherzogl. Oberrealschule zu Darmstadt. Giessen 1899, E. Roth. 2 Teile 8°. I. Teil 95 S., II. Teil 94 S.

Dass von den gebräuchlichen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie ein Teil sich in dem eigentlichen Stoffe zu sehr beschränkt und dafür in den rein technischen Anwendungen zu weit geht, der andere Teil in zu wissenschaftlicher Weise abgefasst ist, um zur Einführung in diese Disziplin dienen zu können, war für den Verfasser der Beweggrund zur Abfassung dieses Buches. Als Vorbilder hätten ihm die in den österreichischen Realschulen eingeführten guten Lehrbücher dienen können, welche den Gegenstand fast in demselben Umfang behandeln und aus einer Jahrzehnte langen Lehrerfahrung hervorgegangen sind.

Was den Inhalt anbelangt, so behandelt der I. Teil die Darstellung von Punkten, geraden Linien, Ebenen und Körpern in orthogonaler Projektion, die Lösung der Grundaufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen, die Konstruktion ebener Schnitte von Prismen, Pyramiden, Kegeln, Cylindern und Kugeln sowie die zugehörigen Abwickelungen. Der II. Teil behandelt die Durchdringungen der angeführten Körper und die Schattenkonstruktionen an ihnen, die Elemente der Perspektive und der Axonometrie. Die Weglassung der so wichtigen Rotationskörper scheint mir ungerechtfertigt, da ihre konstruktive Behandlung keine besonderen Schwierigkeiten bietet, den geometrischen Gesichtskreis der Schüler aber sehr erweitert.

In Bezug auf die Darstellung hätte sich der Verfasser vielleicht etwas kürzer fassen können; insbesondere brauchten viele aus dem stereometrischen Unterrichte bekannte Begriffe keiner nochmaligen Erklärung, wenn das Buch nicht wieder den Nebenzweck erfüllen sollte, zum „Selbststudium“ zu dienen. Beiden Anforderungen wird nie ein Buch vollkommen gerecht werden. Ferner hätte der Verfasser die Grundgedanken der Konstruktionen mehr hervorheben sollen, deren Erfassen doch erst die Herrschaft über den Stoff giebt; das Buch würde dadurch das Ansehen einer blossen Aneinanderreihung von Aufgaben nicht erhalten haben, das es jetzt in einzelnen Teilen besitzt. Beim Unterrichtsgebrauche wird das Wort des Lehrers diesem Mangel leicht abhelfen können. Ziemlich ausführlich ist die Perspektive behandelt. Die in § 3, VI, C (S. 70 flg.) gelehrte Methode zur freien perspektivischen Darstellung von Gegenständen, an denen drei aufeinander senkrecht stehende Kanteneinrichtungen auftreten, war mir neu und verdient allgemeinere Beachtung.

Über kleine Versehen, die mir aufgestossen sind, gehe ich hinweg und will von pädagogischen Einwänden nur den einen erwähnen, dass für unterrichtliche Zwecke auf die Unterscheidung des Eigen- und Schlagschattens (vergl. II. T. Fig. 53—56) Wert gelegt werden sollte, wenn auch manche Architekten (keineswegs alle!) bei ihren Schattenkonstruktionen in dieser Hinsicht keinen Unterschied machen.

Trotz der angeführten Mängel kann das Buch für den Gebrauch an nicht technischen höheren Lehranstalten empfohlen werden. Leider ist die darstellende Geometrie noch nicht einmal an allen Realschulen Deutschlands Unterrichtsgegenstand.

E. Müller.

Geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauche beim Unterricht an höheren Schulen, bearbeitet von Prof. Dr. M. Schuster, Oberlehrer an d. Oberrealschule zu Oldenburg. Verlag von B. G. Teubner. Ausgabe A für Vollanstalten, geb. 2 M. Ausgabe B, geb. 1,60 M.

Herbart, auf den sich auch der Verfasser mehrfach beruft, hat einmal gesagt: „Langeweile ist die Todsünde des Lehrers“ und es unterliegt keinem Zweifel, dass der dogmatische Anfangsunterricht vielen Tausenden den Weg zur Mathematik für die ganze Zeit ihres Lebens verlegt hat, wenn der Lehrer es nicht verstand, das Interesse über alle Klippen und Fährlichkeiten der Definitionen, Zergliederungen und Euklidischen Beweise hinaus wachzuhalten. Schuster will durch die Hand, durch Zirkel und Lineal sich den Zugang zum Verständnis beim Schüler frei halten; er will durch planvoll angeordnete und geschickt gruppierte Aufgaben dem Schüler das Gefühl des Könnens geben und dann in der so erzielten frohen Siegesstimmung, im Elan, das Gebäude der Lehrsätze aufrichten. Dabei wird auch, da der Schüler fortwährend mit Maßeinheiten operiert, das arithmetische Denken geübt und eine befruchtende Wechselwirkung der beiden Teilgebiete erzielt. Man könnte der vorliegenden Sammlung, die mit grossem Fleiss und pädagogischem Geschick zusammengestellt ist, den Vorwurf des „Zu viel“ an Aufgaben machen. Der systematische Aufbau des Gebäudes, der doch auch das ästhetische Bedürfnis befriedigen soll, tritt hinter dem mächtigen Gerüst mit seinen Arbeitsetagen, seinen Längs- und Quergängen reichlich zurück und es fragt sich, ob, wenn der Schüler selbst nur dieses Buch in der Hand hat, bei ihm der Eindruck eines ganzen zusammenhängenden Lehrgebäudes dauernd wacherhalten werden und jenes unbedingt sichere Vertrauen auf die Zuverlässigkeit geometrischer Ergebnisse befestigt werden kann. Das wird ja wesentlich mit von der Individualität des unterrichtenden Lehrers abhängen, könnte aber vielleicht auch besser gesichert werden, wenn sich der Verfasser entschlösse, bei einer Neuauflage noch mehr Aufgabenballast zu entfernen, um ganz sicher dem Ziele zusteuern zu können.

So sind z. B. die Aufgaben Seite 13 für den Quartanar meines Erachtens zu schwer und müssten mit anderen aus späteren Abschnitten, für die das gleiche zutrifft, etwa am Schlusse des Buches zur etwaigen Benutzung bei Wiederholungen bereit gestellt werden. Sehr richtig wird der Begriff der Parallelität und Kongruenz nicht gleich im Anfang gebracht. Die letztere wird auf dem Begriffe der ein- und zweideutigen Konstruktionen durch „Ortslinien“ (nicht „geometrischen Ort“) aufgebaut. Die Sätze über unvollständige Kongruenz (S. 36) halte ich an dieser Stelle für nicht angebracht. Die früher (siehe Schraders Lehrbuch) so hochgeschätzte, später oft verworfene Symmetrie (man lese Machs populäre Vorträge) kommt zu ihrem Recht. Auf Seite 52 finden sich achtzehn nette Dreiecksaufgaben aus gegebenen Punkten; bei der Anwendung des Pythagoras, für den besonders ein sehr anschaulicher Beweis gegeben wird, ist (Seite 57) bereits das Ausziehen der Quadratwurzel vorausgesetzt, was für Untertertia etwas reichlich früh erscheint. Beim Begriff der inneren und äusseren Teilung werden zur Verdeutlichung Bewegungsgleichungen gestellt; bewegen sich die Körper in entgegengesetzter Richtung, so entspricht ihr Treffpunkt dem inneren Teilpunkt und umgekehrt. Bei gleicher Geschwindigkeit bleibt das Teilverhältnis dasselbe und man hat die vier harmonischen Punkte, deren Begriff auffallender Weise erst im Primapensum (S. 122) gegeben wird. Dort (S. 137) findet sich auch erst der Begriff der Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsstrahlen, den meines Erachtens jeder Untersekundaner verstehen kann, dem man die ersten Gesetze der Spiegel- und Linsenbilder doch auch giebt. Hier kann man sogar experimentell die vier harmonischen Punkte darstellen, ebenso beim ein- und zweiarmigen Hebel: wirken die Kräfte nach gleicher Richtung, so liegt der Unterstützungspunkt innen, wirken sie entgegengesetzt, so liegt er aussen und man hat den einarmigen Hebel. Kein Schüler, der dies verstanden hat, wird je weder das Hebelgesetz noch die entsprechende Figur der inneren und äusseren Teilung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis vergessen.

Dr. Grosse-Bremen.

Zwölf Geduldspiele etc. Von Prof. Dr. H. Schubert. Leipzig 1899, Göschen.

Die vorliegende neue Ausgabe ist ein Wiederabdruck des 1895 (Berlin, Dümmler) unter gleichem Titel erschienenen Buches. Der Autor wendet sich in erster Linie an Nicht-Mathematiker, und das Buch erscheint für die Aufgabe, auch Laien in die Theorie einer Anzahl der wichtigsten und interessantesten Geduldspiele einzuführen, besonders geeignet, ist aber auch für den Fachmann wegen mehrerer eigener Untersuchungen des Autors von grossem Interesse. Immerhin muss man bedauern, dass die neue Ausgabe ohne vorherige Revision erfolgt ist und daher aus der ersten eine Reihe von Unrichtigkeiten übernommen hat, welche zwar an sich den Wert des Ganzen nicht erheblich beeinträchtigen, immerhin, zumal bei dem in Aussicht genommenen weiteren Leserkreis, nicht belanglos sein dürften. Unterzeichneter fühlt sich daher veranlasst, diese Fehler hier einmal richtig zu stellen. S. 23 wird „der Fall $n = 4$“, d. h. die folgende Aufgabe: „16 Personen spielen zu je 4 Whist, also an 4 Tischen; wie sind an 5 Abenden hintereinander die Kombinationen der Spieler zu treffen, wenn am Ende jede Person gerade je einen Abend mit jeder der 15 anderen an einem Tisch gespielt haben soll?“ für unlösbar erklärt. Dies ist nicht richtig, vielmehr versagt hier nur die von Herrn Schubert angegebene und für andere Fälle brauchbare Methode; man findet sogar sehr leicht Lösungen, wie z. B. die folgende:

I.	II.	III.	IV.	V.
1, 2, 3, 4	1, 5, 9, 13	1, 6, 10, 14	1, 7, 11, 15	1, 8, 12, 16.
5, 6, 7, 8	2, 6, 11, 16	2, 5, 12, 15	2, 8, 9, 14	2, 7, 10, 13.
9, 10, 11, 12	3, 7, 12, 14	3, 8, 11, 13	3, 5, 10, 16	3, 6, 9, 15.
13, 14, 15, 16	4, 8, 10, 15	4, 7, 9, 16	4, 6, 12, 13	4, 5, 11, 14.

Die S. 110 über das Solitärspiel auf einem Spielbrett von 41 Löchern gemachten Angaben entsprachen schon beim Erscheinen der ersten Ausgabe nicht mehr dem damaligen Stande der Theorie dieses Spiels (s. Lucas, Récréations mathématiques, 1891, t. I, Note V, pag. 232).

In dem Kapitel der „Umfüllungsaufgaben“ (S. 119) giebt Herr Schubert an, dass für die beiden angegebenen Methoden „die erreichbaren sowohl wie die unerreichbaren Zahlen übereinstimmen“. Dies ist unrichtig, vielmehr liefert z. B. für den von Herrn Schubert als Beispiel behandelten Fall $a = 20$, $b = 13$, $c = 9$ die zweite Methode die für die erste unerreichbare Zahl 16, wie folgendes Schema zeigt:

A	B	C
(20)	(13)	(9)
20	0	0
7	13	0
7	4	9
16	4	0

Rezensent verzichtet jedoch darauf, hier ausführlicher auf diese Verhältnisse einzugehen, und muss sich dies für eine passendere Gelegenheit vorbehalten.

Dazu kommen noch einige kleinere Ungenauigkeiten und Druckfehler; so muss die

S. 79 Z. 20 v. o. angegebene Zahl in 1307674368000 verbessert werden.

S. 98 muss in der ersten Figur das Mittelfeld leer sein.

S. 140, Z. 11 v. u. muss es heissen: „0, 1, 2 oder 4 Lösungen".

S. 141, Z. 9 u. 13 v. u. lies RQ statt QR.

W. Ahrens.

Bibliographie.

Periodische Schriften.

der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. 20. Bd. In der Reihe der Denkschriften der 71. Bd. 2. Abteilung. ., Franz. M. 12.

, astronomische, auf der königl. Universitäts-Sternwarte zu Königs- . u. 39. Abt. Königsberg, Koch. Je M. 12. 50.

ichs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-phys. Klasse. 51. Bd. 1899. I. B. G. Teubner. M. 1. 50.

. 52. Bd. 1900. I. Ebenda. M. —. 80.

thematica. Zeitschrift für Geschichte der mathem. Wissenschaften. egeben von Gust. Eneström. 3. Folge. 1. Bd. 4 Hefte. Leipzig, ibner. M. 20.

der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturw. 68. Bd. Wien, Gerold's Sohn. geb. M. 86.

die Fortschritte der Mathematik. 29. Bd. Jahrg. 1898. (In drei 1. Heft. Berlin, Reimer. M. 13.

astronomischer. Mit Unterstützung der astronomischen Gesellschaft geben von Walt. F. Wislicenus. 1. Bd. enthält die Litteratur des 899. Berlin, Reimer. M. 17.

er Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 8. Bd. 1. Hft. I. Die Chronik inigung für das Jahr 1899. II. Die auf der Versammlung zu München en Vorträge. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

8., des Sonnblick-Vereines für das Jahr 1899. Wien, Gerold & Co. M. 3.

les astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 40. (12. Bds.) Wilsing, J., Untersuchungen über das Spektrum der Nova Aurigae. Engelmann. M. 2.

e der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.- Klasse. Jahrg. 1899. Prag, Řivnáč. M. 18.

e, Münchner, Mathem.-phys. Klasse. 1899. III. Heft. München, M. 1. 20.

. 1900. I. Heft. Ebenda. M. 1. 20.

e, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. Abt. IIb. 108. Bd. 8—10. Heft. erold's Sohn. M. 3. 80.

derlandsch, voor meteorologie. Red.: A. J. Monné en Chr. A. C. Nell. roningen, Noordhoff. Per jrg. (12 nrs.) F. 3. 60.

der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 71. Ver- g zu München. 17—23. IX. 1899. II. 1. Naturwissenschaftl. Abtei- Leipzig, Vogel. M. 6.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Instituts. 1899. 2. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1899, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1899. Beobachtungssystem des Königr. Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3. —

—— Dasselbe. Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen im Jahre 1897. Ebenda. M. 3.

—— des königl. astronomischen Rechen-Institute zu Berlin. Nr. 11 und 12. Berlin, Dümmler. Je M. 1.

Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Institutes. Neue Folge. Nr. 2 und 3. Berlin, Stankiewicz. Nr. 2 M. Nr. 3 M.

Veröffentlichungen der königl. Sternwarte zu Bonn. Nr. 4. Küstner, F., Beobachtungen von 4070 Sternen zwischen 0° und 18° nördlicher Deklination am Repsoldschen Meridiankreise der Bonner Sternwarte, unter Mitwirkung von C. Mönnichmeyer ausgeführt und bearbeitet. Bonn, Cohen. M.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Allgemeines.

Boutroux, P., L'imagination et les mathématiques, selon Descartes. (Bibliothèque de la Faculté des lettres de l'Université de Paris, Nr. 10.) Paris, Alcan. Fr.

Knauff, Frz., Die Physik des Heron von Alexandria. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

Möbius, P. J., Über die Anlage zur Mathematik. Leipzig, Barth. M. geb. M. 8.

Prota, Pietro, Della calamita e dell' inventore della bussola nautica: studio. Napoli, tip. Sorrentino.

Rohn, Karl, Die Entwickelung der Raumanschauung im Unterricht. Festrede. Programm. Dresden, Dressel. M. —.

Thirion, J., L'évolution de l'astronomie chez les Grecs. Bruxelles, Lagaert. Fr. 3.

Volta, Aless., juniore, Alessandro Volta e il suo tempo: conferenza, col'aggiunta della lettera inedita del Volta al p. Barletti (1777) sulla pistola elettrica. Milano, Carrara. L. 2

Reine Mathematik.

Abel, N. H., Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen (1829). Herausgegeben von Alfred Loewy (Ostwalds Klassiker Nr. 111). Leipzig, Engelmann. kart. M. —.

Andoyer, H., Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure, à l'usage des étudiants des facultés des sciences. Tome I. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.

Auflösungen von Aufgaben aus Dr. Wöckels Geometrie der Alten. Nürnberg, Korn. M. —.

Beinhorn, J., Zur Theorie der quadratischen Formen. Dissertation. Marburg.

Böger, Rud., Elemente der Geometrie der Lage, für den Schulunterricht bearbeitet. Leipzig, Göschen. kart. M. —.

Brückner, Max, Vielecke und Vielfache. Theorie und Geschichte. Leipzig, B. G. Teubner. kart. M. 16.

Calinon, A., Etude de géometrie numérique. Paris, Berger-Levrault. Fr. 2.

Cauchy, Augustin Louis, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825). Herausgegeben von P. Stäckel (Ostwalds Klassiker, Nr. 112). Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.

Compléments d'algèbre élémentaire. Variations des fonctions du 1er degré, du 2e degré et bicarrées. Paris, Belin. Fr. 2.

Complete solutions to papers in mathematics (2nd stage), 1887 to 1899. Science and Art Examinations. London, Moffatt and Paige. 2 s. 6 d.

Desclaux, G., Cours primaire de trigonométrie pratique. Paris, Hachette. cart. Fr. 1.

Eggert, Osw., Was muss man von der elementaren Geometrie wissen? Allgemeinverständliche Einführung. Berlin, Steinitz. M. 1.

Encyklopädie der mathem. Wissenschaften. I. Teil. 1. Bd. 5. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6. 40.

—— Dasselbe. 2. Bd. 2. und 3. Heft. Ebenda. M. 7. 50.

Ермаковъ, В. П., Аналитическая геометрія. Курсъ лекцій, чит. въ Универс. св. Владиміра и въ политехн. Институтъ въ 1900 г. Уасть 2-я. Геометрія трехъ измѣреній.

Jermakoff, W. P., Analytische Geometrie. Vorlesungen, gehalten an der Universität und am polytechn. Institut zu Kiew im Jahr 1900. 2. Teil. Geometrie des Raumes. Kiew. 2 Rubel.

—— **Интегральное исчисленіе. Курсъ лекцій. Уасти I-я. и 2-я.**

Integralrechnung. Vorlesungen. Tl. 1 u. 2. Kiew. 3 Rubel.

Ernst, A., Deux années d'algèbre dans l'enseignement primaire supérieur. Paris, Collin. Fr. 2.

Fabbri, Ermanno, Il teorema dell' integrale di Cauchy: contributo alla storia critica dell' analisi. Bologna, stab. tip. Zamorani e Albertazzi.

Faerber, Carl, Irrationale Zahlen und Verhältnisse inkommensurabler Grössen. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

Feldblum, Mich., Über elementar-geometrische Konstruktionen. Dissertation. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1. 30.

Fesch, F., Kegelschnittaufgaben in geometrischer Behandlung. Programm. Deutsch-Krone.

Fricke, R., Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 14.

Gauss, F. G., Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe. Halle, Strien. geb. M. 1. 60.

Haentzschel, Emil, Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

Hagen, Joh. G., S. J., Synopsis der höheren Mathematik. 3. Bd. Differential- und Integralrechnung. (In 6 Lieferungen.) 1. Lieferung. Berlin, Dames. M. 5.

Hamilton, J. G., A first geometry book. A simple course of exercises based on experiment and discovery. London, Arnold. 1 s.

Hauck, Guido, Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert. 8. Aufl. (7. der Neubearbeitung). Tübingen, Laupp. geb. M. 2. 90.

Hočevar, Frz., Geometrische Übungsaufgaben für das Obergymnasium. 2. Heft. Trigonometrie und analytische Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, Freytag. geb. M. —. 80.

Hölder, Otto, Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 40.

Intermediate Science mixed mathematics. Papers, being the questions set at the University of London from 1879 to 1899. (University tutorial series.) London, Clive. 2 s. 6 d.

JAHNKE, EUGEN, Über dreifach perspektivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

KAMBLY und ROEDER, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Vollständig nach den preuss. Lehrplänen von 1892 umgearbeitete Ausgabe der Stereometrie und der sphärischen Trigonometry von KAMBLY. Lehraufgabe der Prima. Mit Übungsaufgaben und einem Anhang: Der Koordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. 2. Aufl. (27. der Kambly'schen Stereometrie.) Breslau, Hirt. geb. M 2.

KILLING, WILH., Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. 1. Tl. Die ebene Geometrie. Paderborn, Schöningh. M. 4.

LAGRANGE und CAUCHY, Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (1772 und 1819). Herausgegeben von GERH. KOWALEWSKI. (Ostwald's Klassiker Nr. 113.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.

LANGE, J., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. 2. Aufl. Berlin, Müller. geb. M. 1. 50.

LAURENT, H., L'élimination. („Scientia", partie physico-mathématique Nr. 7.) Paris, Carré et Naud. Fr. 2.

LAVAGGI, Calcolo infinitesimale: lezioni dettate nell' anno 1899—1900 nella r. università di Parma, compilate per cura di Savino Buroni. Disp. 1—54, 55—79. Parma, lit. Zafferri.

LIÉBEAUX, G., Questions d'examen et réponses. Baccalauréat classique (1ère partie). Mathématiques. Paris, Hachette. Fr. 2. 50.

LORENTZ, H. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Studierenden der Naturwissenschaften. Unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von G. C. SCHMIDT. Leipzig, Barth. M. 10, geb. M. 11.

MC. GINNIS, M. A., The universal solution numerical and literal equations. By which the roots of equations of all degrees can be expressed in terms of their co-efficients. London, Sonnenschein. 5 s.

MEIGEN, FRITZ, Lehrbuch der Geometrie. („Technische Lehrhefte", Abt. C, Mathematik. 4. Heft.) 2. Aufl. Hildburghausen, Pezoldt. M. 2; geb. M. 2. 40.

MOREL, A., et BECOURT, L., Choix d'épures de géométrie. Paris, Hachette. Fr. 6.

OPITZ, R. G., Die Kramp-Laplacesche Transcendente und ihre Umkehrung. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

OSTER, B., Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit n unabhängigen Variabeln. Dissertation. Berlin.

PICARD, EMILE, Sur le développement, depuis un siècle, de quelques théories fondamentales dans l'Analyse mathématique (conférences faites à Clark-University, Etats-Unis). Paris, Colin. Fr. 1. 50.

PRANG, C., Einführung in die Theorie und den Gebrauch der Determinanten. Berlin, Mayer & Müller. kart. M. 1. 40.

SCHERRER, O., Über Kegelschnitte im Raum. Programm. Frauenfeld.

SCHRÖDER, THDR., Auflösungen von Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Programm. Nürnberg, Schrag. M. —. 60.

SCHÜLKE, A., Vierstellige Logarithmen-Tafeln, nebst. mathemat., physikal. und astronom. Tabellen. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. —. 60.

SCHWERING, KARL, und KRIMPHOFF, WILH., Ebene Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 3. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1. 60.

SCHWERING, KARL, Stereometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 2. Aufl. Freiburg i. Br., Herder. M. —. 80.

Симашко, Ф., Тригонометрія. Изд. 5-е

SSIMASCHKO, F., Trigonometrie. 5. Aufl. St. Petersburg. 1 Rubel.

Teege, H., Über die $(p-1)/2$-gliedrigen Gauss'schen Perioden in der Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zu anderen Teilen der höheren Arithmetik. Dissertation. Kiel.

Thieme, H., Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie. Programm. Posen.

Trotha, Thilo v., Die kubische Gleichung und ihre Auflösung für reelle, imaginäre und komplexe Wurzeln. Ein Versuch. Berlin, Ernst & Sohn. M. 2. 50.

Vintéjoux, F., Eléments d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre. Corrigé des exercices par G. Manuel. Paris, Hachette. Fr. 2.

Weber, Ed. v., Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. 2. Bd.). Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 24.

Weber, Heinr., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10.

Wiese, B., und Lichtblau, W., Sammlung geometrischer Konstruktionsaufgaben zum Gebrauch an Seminarien sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Hannover, Meyer. M. 2, kart. M. 2. 25.

Angewandte Mathematik.

André, Ch., Traité d'astronomie stellaire. Tome II: Etoiles doubles et multiples, amas stellaires. Paris. Gauthier-Villars. Fr. 14.

Astronomical and physical researches made at Mr. Wilson's Observatory, Daramona, Westmeath. London, Wesley. 15 s.

Ball, Sir Robert Stawell, A treatise on the Theory of Screws. Cambridge, University Press. 18 s.

Bardelli, A., Istruzione per l'uso del regolo a calcolo. Torino, Bardelli e Co.

Bartl, J., Die Berechnung der Zentrifugalregulatoren. Leipzig, Felix. M. 3. 50.

Determinazione della differenza di longitudine tra Napoli e Milano mediante osservazioni fatte nel 1888 dal prof. Emanuele Fergola e dal dott. Michele Rajna, calcolate e discusse dal prof. Filippo Angelitti e dal dott. Michele Rajna. Firenze, Istituto geografico militare edit.

Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. 1. Bd. Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

—— Dasselbe. 3. Bd. Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Foschini, A., Equerre à calcul graphique (nouvelle invention) à l'usage des ingénieurs etc. Rome, impr. Forzani et Co.

Geigenmüller, R., Leitfaden und Aufgabensammlung zur Mechanik. Für technische Fachschulen und den Selbstunterricht bearbeitet. 1. Teil. Elementarmechanik. 4. Aufl. Mittweida, Polytechnische Buchhandlung. geb. M. 5. 50.

Haack, R., Schiffswiderstand und Schiffsbetrieb. Nach Versuchen auf dem Dortmund-Ems-Kanal ... bearbeitet. Berlin, Asher & Co.
geb., Tafeln in zwei Mappen, M. 120.

Handwörterbuch der Astronomie. 21. Lieferung. Breslau, Trewendt. M. 3. 60.

Herrmann, Gust., Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen. 2. Aufl. Berlin, S. Simion. geb. M. 8.

Hertzer, H., Die geometrischen Grundprinzipien der Parallelprojektion. 3. Aufl. Berlin, Spaeth. geb. M. 2. 50.

Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. I. Teil. Mechanik starrer Körper. 2. Aufl. Hannover, Helwing.
M. 10, geb. M. 11. 50.

Kleiber, Max, Katechismus der angewandten Perspektive. Nebst Erläuterungen über Schattenkonstruktion und Spiegelbilder. (Weber's illustrierte Katechismen Nr. 137.) 3. Aufl. Leipzig, Weber. geb. M. 3.

Koester, F., Die Gesetze des Drachenflugs in Darstellung und Berechnung. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.80.

Lauenstein, R., Die Mechanik. Elementares Lehrbuch für techn. Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 4. Aufl. Stuttgart, Bergsträsser. geb. M. 5.

—— Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 6. Aufl. Ebenda. geb. M. 6.

Masoni, Udalrigo, Corso di idraulica teoretica e pratica. Seconda ediz. notevolmente ampliata. Napoli, Pellerano. L. 14.

Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Abteilung der königl. preuss. Landesaufnahme. 13. (Schluss-) Heft. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 1.

Pietsch, C., Katechismus der Nivellierkunst. (Webers illustrierte Katechismen Nr. 59.) 5. Aufl. Leipzig, Weber. geb. M. 2.

Reuleaux, F., Lehrbuch der Kinematik. 2. Bd. Die praktischen Beziehungen der Kinematik zur Geometrie und Mechanik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 25.

Saint-Paul, B., Cubatures des terrasses et mouvement des terres. Paris, Vve. Dunod. Fr. 4.50.

Sanders, L. A., Normal I-Träger von Nr. 8 bis Nr. 55. Graphische Tabelle zur Bestimmung der Normalprofile bei 8 verschiedenen Belastungs- und Auflagerungsarten etc. Amsterdam, de Bussy. F. 3.

Schmidt, R., Beiträge zum Gesetze der kleinen Zahlen. Dissertation. Göttingen.

Schröder, Max, Schlagschattenlehre (Unterichts-Werke Methode Hittenkofer Nr. 9). 4. Aufl. Strelitz, Hittenkofer. M. 1.
Übungsblätter dazu M. 2.40.

Smolik's, F., Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Neu bearbeitet von Jos. F. Heller. 2. Aufl. Leipzig, Freitag. geb. M. 4.

Sturm, Rud., Elemente der darstellenden Geometrie. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 5.60.

Сусловъ, Г. К., Основы аналитической механики. Т. I.
Ssusloff, G. K., Grundzüge der analytischen Mechanik. Bd. I. Kiew. 3 Rubel 75 K.

Todd, Mabel Loomis, Total eclipses of the sun. New and revised edition by David P. Todd. London, Low. 3 s. 6 d.

Torka, Joh., Grundlage der Getriebelehre. Eine Geometrie der Bewegung. 1. Heft. Berlin, Mewes. M. 2.

Vecchi, V., Geometria descrittiva: lezioni dettate nella r. università di Parma nell' anno 1899—1900, compilate per cura di Ezio Beggi. Disp. 1—34, 35—46. Parma, lit. Zafferri.

Wagner, Rob., Graphische Ermittelung der Grunderwerbsflächen, Erdmassen und Böschungsflächen von Eisenbahnen und Strassen. Ein neues Verfahren für allgemeine und besonders für ausführliche Vorarbeiten. Stuttgart, Wittwer. kart. M. 4.

Waldeck, Ernst, Was muss man von der Mechanik und Wärmelehre wissen? Gemeinverständlich dargestellt. Der Physik I. Teil. Berlin, Steinitz. M. 1.50.

Wernicke's Lehrbuch der Mechnik in elementarer Darstellung, mit Anwendungen und Übungen aus den Gebieten der Physik und Technik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1. Mechanik fester Körper. Von Alex. Wernicke. 4. Aufl. 1. Abt. Einleitung. Phoronomie. Lehre vom materiellen Punkte. M. 4.
2. Flüssigkeiten und Gase. Von Rich. Vater. 3. Aufl. M. 5.

Wien, W., Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig, Hirzel. M. 8, geb. M. 9.

Physik und Meteorologie.

Abhandlungen, wissenschaftliche, der kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission. (Fortsetzung der „Metronomischen Beiträge.") 2. Heft. PLATO, F., Die Dichte, Ausdehnung und Kapillarität von Lösungen reinen Rohrzuckers in Wasser. Unter Mitwirkung von J. DOMKE und H. HARTING untersucht und bearbeitet. Berlin, Springer. M. 7.

BATELLI, A., e STEFANINI, A., Esposizione critica della teoria della dissociazione elettrica. Lucca, tip. Baroni. L. 6.

BRUCKE, KARL, Über die optischen Täuschungen. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.

BLASEL, C. M. J., Über die elektrischen Fundamentalgrössen und das Ohm'sche Gesetz. Programm. Leobschütz.

CADY, W. G., Über die Energie der Kathodenstrahlen. Dissertation. Berlin.

CARDANI, PIETRO, Fisica generale, meteorologia, elettricità: lezioni dettate nella r. università di Parma nell' anno 1899—1900, compilate per cura del dott. P. MORETTO. Disp. 1—19. Parma, lit. Zafferri.

—— Fisica matematica: lezioni dettate nell' anno scolastico 1899—1900 nella r. università die Parma e compilate per cura di Savino Buroni. Disp. 1—16, 17—30. Parma, lit. Zafferri.

CATCHPOOL, EDMUND, The tutorial physics. Vol. I. A textbook of sound. 3rd ed. (University tutorial series.) London, Clive. 3 s. 6 d.

COHN, EMIL, Das elektromagnetische Feld. Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie. Leipzig, Hirzel. M. 14, geb. 15. 60.

COLSON, R., Traité élémentaire d'électricité, avec les principales applications. 3e éd. entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3. 75.

DAHLANDER, G. R., Elektriciteten. Nyaste uppfinningar och forskningar. Stockholm, Bonnier. 75 öre.

DISA, E., Le previsioni del tempo da Virgilio ai dì nostri. La sismologia moderna. (Piccolo biblioteca di scienze moderne Nr. 25.) Torino, fratelli Bocca. L 3.

ESTEL, V., Zur Geschichte der Farbenlehre. Programm. Chemnitz.

FALB's RUD., Neuer Wetterkalender und Verzeichnis der kritischen Tage für 1900, Juli-Dezember. Berlin, Steinitz. M. 1.

FOVEAU DE COURMELLES, L'électricité et ses applications. („Livres d'or de la science" Nr. 19.) Paris, Schleicher frères. Fr. 1.

GAHL, R., Studien zur Theorie der Dampfdrucke. Dissertation. Göttingen.

GLADBACH, PHPP., Witterungsprognose des August 1900 f. die nördliche Schweiz und für Mitteleuropa. Nebst einer Beilage: Der Wolkengürtel Europas. Eine neue graphische Darstellung der „Regenmengen" im Juli und August 1900, sowie im Dezember 1899 und 23. V. bis 23. VI. 1900 darstellend. Basel, Schwabe. M. —. 65.

GRAETZ, L., Kurzer Abriss der Elektrizität. 2. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. geb. M. 3.

GRAVELIUS, Pflichten der Meteorologie in Bezug auf die Landwirtschaft. Vortrag. Dresden, Schönfeld. M. —. 40.

GRÜNEISEN, E., Über die Bestimmung des Wärmeleitvermögens der Metalle und über das Verhältnis desselben zur elektrischen Leitfähigkeit bei Kupfer, Eisen und einer Nickel-Kupferlegierung. Dissertation. Berlin.

HAAS, Einführung in die Elektrizitätslehre. 12 gemeinverständliche Vorträge. Leipzig, Leiner. M. 1. 50.

HARDIN, WILLETT L., Die Verflüssigung der Gase, geschichtlich entwickelt. Übersetzt von J. TRAUBE. Stuttgart, Enke. M. 6.

HERBERTSON, A. J., The monthly rainfall over the land surface of the globe. Dissertation. Freiburg.

HERTZ, HEINR., Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität. Vortrag. 10. und 11. Aufl. Bonn, Strauss. M. 1.

Holitscher, Paul, Experimentelle Untersuchungen über den remanenten Magnetismus des Eisens. Dissertation. Zürich, Zürcher & Furrer. M. 2.

Hurst, George H., Colour: A handbook of the theory of colour. London, Scott Greenwood. 7 s. 6 d.

Kämmerer, Die Dielektrizitätskonstanten in ihrer Bedeutung für die Theorie der Elektrizität u. in ihrer experimentellen Bestimmung. Progr. Sondershausen.

Kellner, H., Über einige Methoden und Apparate zur Bestimmung der optischen Konstanten des Fernrohrs. Dissertation. Jena.

Kleiber, Joh., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch an realist. Mittelschulen bearb. Mit zahlreichen Fig. u. Übungsaufgab. München, Oldenbourg. geb. M. 4.

Körner's Lehrbuch der Physik. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von A. Richter. Wien, Deuticke. geb. M. 6.

Krüger, R., Die Kondensation der permanenten Gase. Programm. Stralsund.

Larmor, Joseph, Aether and matter. A development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter. Including a discussion of the influence of the earth's motion on optical phenomena. Cambridge, University Press. 10 s.

Mascart, Traité de magnétisme terrestre. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.

Mayrhofer, G., Über die Änderungen der Stromform eines normalen Wechselstromes durch Grätzsche Aluminiumzellen. Programm. Rosenheim.

Masini, Alb., Influenza della compressione sulla forza elettromotrice delle coppie a selenio: studio sperimentale. Bologna, tip. lit. Pongetti.

Middel, T., Deformation durch Erwärmung als Ursache für die thermische Veränderung der Empfindlichkeit von Wagen. Dissertation. Greifswald.

Miller, Andr., Theoretisches über einen Influenzversuch. Progr. München, Kellerer. M. 1.

Möller, M., Witterungskalender. Eine nach Monaten geordnete Zusammenstellung der Witterung für die Beurteilung der Wetterlage der Monate Mai bis September 1900. Braunschweig, Limbach. M. –.50.

Mülfarth, P., Über Absorption von Gasen an Glaspulver. Dissertation. Bonn.

Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of physics. Sound. 2nd edition. London, Griffin. 8 s. 6 d.

Raoult, F. M., La tonométrie. („Scientia", partie physico-mathématique Nr. 8.) Paris, Carré et Naud. Fr. 2.

Reich, M., Über elektrische Leitung reiner Substanzen. Dissertation. Berlin.

Reinhardt, W., Ausgewählte Kapitel aus der Elektrotechnik. Die elektrischen Maschinen und die elektrischen Strassenbahnen, mit einer Einleitung: Über die Grundbegriffe der Elektrizität. Programm. Frankfurt.

Robel, Ernst, Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik. IV. Teil. Die Analyse der Sirenenklänge. Progr. Berlin, Gaertner. M. 1.

Rohrbeck, E., Die Berechnung elektrischer Leitungen, insbesondere der Gleichstrom-Verteilungs-Netze. Leipzig, Leiner. M. 2.50.

Russner, Johs., Elementare Experimentalphysik für höhere Lehranstalten 1. Teil. Mechanik fester Körper. Hannover, Jänecke. geb. M. 3.60.

Strehl, Karl, Theorie d. allgem. mikrosk. Abbildung. Erlangen, Blaesing. M. –.60.

Thomson, J. J., Die Entladung der Elektrizität durch Gase. Aus dem Englischen von Paul Ewers. Ergänzt und mit einem Vorwort versehen von H. Ebert. Leipzig, Barth. M. 4.50, geb. M. 5.50.

Villari, Em., Lezioni di fisica sperimentale. Parte I (Magnetismo ed elettricità). Napoli, soc. coop. Tipografica.

Waldeck, Ernst, Was muss man von der Akustik und Optik wissen? Allgemeinverständlich dargestellt. Der Physik. II. Teil. Berlin, Steinitz. M. 1.50.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1899.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

Sur quelques droites dépendant les unes des autres. Buysens, Degueldre, Droz-Farny, Merlin, Rose. Mathesis, Sér. 2, IX, 166.

Théorème relatif à un carré. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 70.

Lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle variable, mais de périmètre constant ou de surface constante. Déprez, Emmerich, E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, IX, 167.

Lieu des centres de similitude de deux cercles circonscrits à des triangles variables. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 27.

Propriét éde la lemniscate. G. Gérard, Déprez, Emmerich, Rose. Mathesis, Sér. 2, IX, 209.

Über Pseudotrochoiden. E. Wölffing. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 139.

Sur la spirale logarithmique. G. Pirondini. Mathesis, Sér. 2, IX, 153.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte.

Analytische Geometrie des Raumes.

Kürzeste und geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem. H. Liebmann. Mathem. Annal. LII, 120.

Über kürzeste Integralkurven einer Pfaff'schen Gleichung. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. LII, 417.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiten Grades.

Ausdehnungslehre.

Beweis einiger Determinantensätze mittels der Grassmannschen Ausdehnungslehre. Emil Müller. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 28.

B.

Bestimmte Integrale.

Über das Dirichlet'sche Integral. T. Brodén. Mathem. Annal. LII, 177.

Über bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung. Arth. Hirsch. Mathem. Annal. LII, 130.

Sur la détermination de certaines intégrales. E. N. Barisien. Sér. 2, IX, 161.

Vergl. Quadratur.

C.

Combinatorik.

Relation entre des nombres de combinaisons. Emmerich. Mathesis, Sér. 2, IX, 173.

Encore une relation entre des nombres de combinaisons. Emmerich. Mathesis, Sér. 2, IX, 237.

Complanation.

16. Sur les figures cylindriques. C. E. Wasteels. Mathesis, Sér. 2, IX, 9.
Vergl. Maxima und Minima 136. Oberflächen 145.

Cylinderfunktionen.

17. Sur le produit de deux fonctions cylindriques. N. Nielsen. Mathem. Annal. LII, 228.
18. Sur le développement du zéro en séries de fonctions cylindriques. N. Nielsen. Mathem. Annal. LII, 582.

D.

Determinanten.

19. Eine Determinantenformel. E. Schulze. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 167.
Vergl. Ausdehnungslehre.

Differentialgleichungen.

20. Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. J. Horn. Mathem. Annal. LII, 271.
21. Über lineare Differentialgleichungen mit einem veränderlichen Parameter. J. Horn. Mathem. Annal. LII, 340.
22. Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. E. Czuber. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 41.
Vergl. Funktionalgleichung. Mechanik 137.

Differentialquotient.

23. Stetigkeit und Differentialquotient. E. Steinitz. Mathem. Annal. LII, 58.

Dreiecksgeometrie.

24. Formules relatives au triangle. Delahaye. Mathesis, Sér. 2, IX, 66.
25. Sur deux transversales rectangulaires menées par l'orthocentre d'un triangle. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 162.
26. Sur la droite d'Euler. A. Droz-Farny, R. Buysens, Déprez, G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 75.
27. Sur les droites de Simson des sommets d'un carré inscrit dans une circonférence par rapport à un triangle inscrit dans la même circonférence. Colart. Mathesis, Sér. 2, IX, 204.
28. Sur le triangle formé par les droites passant par les côtés d'un triangle donné dans des points fixés des trois sommets au moyen d'arcs de cercle de même rayon. Mathesis, Sér. 2, IX, 42. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 36.]
29. Longueurs des côtés d'un triangle calculées à l'aide des longueurs des tangentes au cercle inscrit parallèles au côtés. Degueldre, Sintzoff, Van Dorsten, Soons, Emmerich, Barisien, Delahaye. Mathesis, Sér. 2, IX, 150.
30. Propriété d'un triangle et du cercle circonscrit. R. Buysens, Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 28.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 2.

E.

Elastizität.

31. The elastic curve under uniform normal pressure. A. G. Greenhill. Mathem. Annal. LII, 465.

Ellipse.

32. Triangles inscrits dans une ellipse et circonscrits à un cercle concentrique. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, IX, 224, 248, 269.
33. Paradoxe concernant l'enveloppe des ellipses homofocales. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, IX, 91.
34. Lieu du points d'intersection de deux tangentes d'une ellipse. J. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 18.

35. Ellipse lieu du centré des symédianes d'un triangle variable. G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 99.
36. Soient M, N les points de contact des tangentes d'un point P à une ellipse donnée. Trouver le lieu du point P tel que la droite d'Euler du triangle PMN soit parallèle à un axe de symétrie de l'ellipse. V. Cristesco, Barisien. Mathesis, Sér. 2, IX, 145.
37. Sur une courbe du septième degré dérivant de l'ellipse. Buysens, Barisien, Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 146.
38. Propriétés du triangle dont un côté est une corde d'une ellipse et le sommet opposé le point de l'ellipse d'où une perpendiculaire au grand axe rencontre l'intersection de cet axe avec la corde nommée. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 233.
39. Propriété du triangle dont les sommets sont les deux foyers et un point d'une ellipse. J. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 235.
40. Relations entre deux ellipses. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 255.
41. Propriété de la corde d'une ellipse menée d'un point de la courbe perpendiculairement à son rayon vecteurs partant du centre. Cristesco, Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 258.

F.

Formen.

42. Über die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. A. Loewy. Mathem. Annal. LII, 588. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 296.]
    Vergl. Invariantentheorie 111.

Funktionalgleichung.

43. On a functional equation treated by Abel. P. Hayashi. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 346.

Funktionen.

44. Continuité au sens analytique et continuité au sens vulgaire. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, IX, 129.
45. Über eine Veranschaulichung von Funktionen einer komplexen Variablen. Loth. Heffter. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 235.
46. Zur Transformation der Querschnitte Riemannscher Flächen. J. Wellstein. Mathem. Annal. LII, 433.
47. Zur Theorie der Funktionenklasse $s^3 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_6)$. J. Wellstein. Mathem. Annal. 440.
48. A proof of Noether's fundamental theorem. Charl. A. Scott. Mathem. Annal. LII, 593.
49. Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen. K. Schwering. Mathem. Annal. LII, 171.
50. Erweiterung des Faktoriellensatzes. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 340.
51. Formeln zur Transformation der Kugelfunktionen bei linearer Änderung des Koordinatensystems. Ad. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 327.
52. Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Osgood. Mathem. Annal. LII, 462.
    Vergl. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Cylinderfunktionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Gleichungen. Interpolation. Invariantentheorie. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen.

G.

Geodäsie.

53. Zum Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen. E. Hammer. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 228.

Geometrie (höhere).

54. Sur une transformation géométrique. H. Brocard. Mathesis, Sér. 2, IX, Supplément. — Petit Bois ebenda.

55. Sur la transformation pseudonewtonienne. V. Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 241.
56. Sur les transformations quadratiques involutives. L. Ripert. Mathesis, Sér. 2, IX, 185, 217.
57. Sur une corrélation plane. V. Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 78.
58. Über perspektive Affinität zweier Räume. A. Beck. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 85.
59. Über die kubischen Raumkurven, welche die Tangentenfläche einer gegebenen kubischen Raumkurve in 4, 5 oder 6 Punkten berühren. Gust. Kohn. Mathem. Annal. LII, 293.
60. Sur une cubique circulaire. V. Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 87.
61. Propriété d'une cubique. V. Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 148.
62. Construire une courbe rationnelle du troisième degré, étant donnés trois points collinéaires avec leurs tangentes et le point double. V. Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 168.
63. Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali. G. Scorza. Mathem. Annal. LII, 457.
64. Sur une quartique. V. Jerabek. Mathesis, Sér. 2, IX, 15. — J. Neuberg ebenda 17.
65. Über doppelt zentrische Vierecke. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 237.
66. Sur la trisectrice de Maclaurin. V. Jerabek. Mathesis, Sér. 2, IX, 61.
67. Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et hypocycloïdes. V. Jerabek. Mathesis, Sér. 2, IX, 112.
68. Applications de l'inversion. L. Orlando. Mathesis, Sér. 2, IX, 112.
69. Sur deux courbes dont une est engendrée au moyen de l'autre. Merlin, J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 275.
70. Problèmes de construction. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 33.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 1. Dreiecksgeometrie. Funktionen 48. Geschichte der Mathematik 87. Kegelschnitte. Winkelteilung.

Geschichte der Mathematik.

71. La marche successive dans la fusion des notions de la fraction et du quotient. V. V. Bobynin. Biblioth. math. 1899, 81.
72. Heron's Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln. G. Wertheim. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, hist. litt. Abtlg. 1.
73. Sur l'histoire de l'arithmétique arabe. Carra de Vaux. Biblioth. math. 1899, 33.
74. Notizen über arabische Mathematiker und Astronomen. H. Suter. Biblioth. math. 1899, 86, 118.
75. Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam. H. Suter. Zeitschr. Mathem. Phys. XLIV, Hist. litt. Abtlg. 33.
76. Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphärischer Dreiecke durch stereographische Projektion. S. Haller. Biblioth. math. 1899, 71.
77. Über Ysak Sohn des Salomo. G. Eneström. Biblioth. math. 1899, 94. — M. Steinschneider ebenda 119.
78. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math 1899, 1, 37, 97. [Vergl. Bd. XLIV, Nr. 69.]
79. Remarque sur l'époque où le mot *plus* a été introduit comme terme d'addition. G. Eneström. Biblioth. math. 1899, 105.
80. Über den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben x. G. Wertheim. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist. litt. Abtlg. 48.
81. Ein wiedergefundener Diophantuskodex. E. Gollob. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist. litt. Abtlg. 137.
82. Ein von Fermat herrührender Beweis. G. Wertheim. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist. litt. Abtlg. 4.
83. Über das Wort *hodie* in Leibnizens Brief vom 21. Juni 1677. G. Eneström. Biblioth. math. 1899, 63. — M. Cantor. Ebenda 95.
84. Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques. G. Eneström. Biblioth. math. 1899, 19.
85. Berkeley's Analyst and its critics. G. A. Gibson. Biblioth. math. 1899, 65.

86. Remarque sur l'origine de la formule $i \log i = -\frac{\pi}{2}$. G. Eneström. Biblioth. math. 1899, 46.
87. Un trattato sulle curve piane algebriche pubblicato senza nome d'autore. G. Loria. Biblioth. math. 1899, 10.
88. Bemerkungen zu Lambert's Theorie der Parallellinie. P. Stäckel. Biblioth. math. 1899, 107.
89. Zur Bibliographie der Parallelentheorie. P. Stäckel. Biblioth. math. 1899, 47.
90. Die Entdeckung der einseitigen Flächen. P. Stäckel. Mathem. Annal. LII, 598.
91. Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives. S. Pincherle. Biblioth. math. 1899, 13.
92. Die Tschebyscheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. N. Delaunay. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist. litt. Abtlg. 101.
93. Nécrologue de Félix Dauge (24 V. 1829 — 23. VII 1899). P. Mansion et J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 177.
94. Die Mathematikerversammlung im Jahre 1900. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist.-litt. Abtlg. 111.

Gleichungen.

95. Symmetrische Funktionen. P. Gordan. Mathem. Annal. LII, 501.
96. Divisibilité d'un polynôme par un autre. Van Dorsten, Emmerich. Mathesis, Sér. 2, IX, 169.
97. Über die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung und deren Ordnungen. L. Baur. Mathem. Annal. LII, 113.
98. Beitrag zur Auflösung der Gleichung vierten Grades. H. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 234.
99. Racines d'une équation du quatrième degré. Seligmann. Mathesis, Sér. 2, IX, 97.
100. Discussion d'un système de trois équations quadratiques. Sintsof. Mathesis, Sér. 2, IX, 120.
101. Elimination de deux inconnues entre trois équations quadratiques. Rose. Mathesis, Sér. 2, IX, 212.
102. Elimination de trois inconnues entre trois équations quadratiques. Goldenberg, Déprez. Mathesis, Sér. 2. IX, 261.
103. Résoudre un système de trois équations biquadratiques à trois inconnues. Emmerich. Mathesis, Sér. 2, IX, 230.

Graphisches Rechnen.

104. Beispiele graphischer Tafeln mit Bemerkungen über die Methode der fluchtrechten Punkte. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 56.
Vergl. Differentialgleichungen 22.

H.

Hyperbel.

105. Sur l'hyperbole équilatère. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, IX, 163.
106. Théorème sur l'hyperbole. G. Gérard. Mathesis, Sér. IX, 64.
107. Quand deux paraboles sont inscrits dans un triangle, par les six points de contact on peut faire passer une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des deux paraboles. V. Retali, Gob, Déprez, Mandart, Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 118.
108. Enveloppe de certaines hyperboles. G. Gérard, Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 210.

I.

Interpolation.

109. Die Interpolation. W. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 303.

Invariantentheorie.

110. Zur Funktionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde. J. Wellstein. Mathem. Annal. LII, 70.

111. Über eine Invariante der trilinearen ternären Form. M. Pasch. Mathem. Annal. LII, 127.

Kegelschnitte.

112. Sur les coniques homothétiques passant par deux points fixes. J. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 113.
113. Sur le point de Frégier. G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 136.
114. Théorèmes relatifs au point de Frégier. G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 143.
115. Sur deux faisceaux de coniques. Degueldre. Mathesis, Sér. 2, IX, 191.
116. Remarques sur le triangle. L. Ripert. Mathesis, Sér. 2, IX, 63.
117. Conique enveloppée par le cecle des neuf points d'un triangle variable à sommet fixe. Déprez, Ripert. Mathesis, Sér. 2, IX, 205.
118. Enveloppe de certaines coniques. G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 277.
119. Lieu des centres des coniques passant par trois points donnés et ayant leurs axes parallèles à deux directions rectangulaires données. Boutin, Barisien, Déprez, Colart, Mandart, Droz. Mathesis, Sér. 2, IX, 46.
120. Relations entre deux coniques. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 259.
121. Trois coniques et un cercle circonscrits à un même triangle. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 142.
122. Sur une conique engendrée au moyen d'une autre. E. N. Barisien, Déprez, Retali. Mathesis, Sér. 2, IX, 207.
123. Propriétés d'une ellipse et de deux circonférences dont une passe par un foyer de l'ellipse ayant son centre sur l'ellipse même. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 253.
124. Lieu du pied de la normale menée du point O à une conique qui touche les côtés de l'angle MON aux points données M et N. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, IX, 172.
125. Tangente commune à une ellipse et à une circonférence tangente à cette ellipse. J. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 250.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kinematik.

126. Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Friedrich Schilling. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 214.
127. Einfaches Beispiel eines Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nicht holonomen Bedingung unterworfen ist. H. Liebmann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 355.
128. Sur les tangentes des trajectoires de deux points mobiles. Meurice. Mathesis, Sér. 2, IX, 201.
129. Enveloppe d'une droite. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 205.
130. Zur Bestimmung der Axe der Schraubung, durch die ein starrer Körper aus einer gegebenen Lage in eine zweite gebracht werden kann. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 176.

Vergl. Geschichte der Mathematik 92.

Kreis.

131. Circonférence décrite par le centre isogone d'un triangle variable. Emmerich. Mathesis, Sér. 2, IX, 232.
132. Centre de similitude des cercles circonscrits à deux triangles. Soons, Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 50. — Ripert ibid. 51.
133. Sur le cercle tangent à trois cercles donnés. L. Orlando. Mathesis, Sér. 2, IX, 160.

Vergl. Dreiecksgeometrie.

M.

Maxima und Minima.

134. Généralisation d'un problème de minimum classique. G. Loria. Mathesis, Sér. 2, IX, 131.

135. Sur le maximum de certaines expressions formées par les projections d'une longueur donnée sur les côtés d'un triangle. E. Cesàro. Mathesis, Sér. 2, IX, 238.
136. Rechercher le maximum de la surface totale d'un cône inscrit dans une sphère de rayon R. Ploumen. Mathesis, Sér. 2, IX, 227.
Vergl. Oberfläche 145.

Mechanik.

137. Über einige bei Schwingungsproblemen auftretende Differentialgleichungen. M. Abraham. Mathem. Annal. LII, 81.
138. Dynamik der Kurbelgetriebe. Hans Lorenz. Zeitschr. Math. XLIV, 1, 65, 177.
139. Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie. K. Heun. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 18.
Vergl. Elastizität. Geschichte der Mathematik 92. Kinematik. Maxima und Minima 135. Optik. Pendel. Schwerpunkt.

O.

Oberflächen.

140. Elementares über die Dupin'sche Cykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie. G. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 194.
141. Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali. Fed. Enriques. Mathem. Annal. LII, 449.
142. On a class of surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integrations. P. Hayashi. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 349.
143. Démonstration géométrique d'une propriété des lignes asymptotiques d'une surface réglée. A. Demoulin. Mathesis, Sér. 2, IX, 159.
144. Über die Wellenfläche. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 289.
145. Über die Konstantenbestimmung bei einer cyklischen Minimalfläche. G. Juga. Mathem. Annal. LII, 167.
Vergl. Complanation. Geschichte der Mathematik 84, 90.

Oberflächen zweiten Grades.

146. Die Deformation einer gradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden. Friedr. Schur. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 62.
147. Über eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades. D. Sintzow. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 351.
148. Sur la sphère de douze points. Ripert. Mathesis, Sér. 2, IX, 90. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 138.]
149. Sur un tétraèdre conjugué à une quadrique donnée. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 121.

Optik.

150. Einführung in die geometrische Optik. F. Meisel. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 298.

P.

Parabel.

151. Lieux des projections du foyer d'une parabole sur ses normales et sur les normales à la développée. Déprez. Mathesis, Sér. 2, IX, 25. — Mandart, Stuyvaert, Droz-Farny ebenda 26.
152. Le foyer et une normale d'une parabole étant donnés le sommet décrit une cissoïde, le sommet et une normale étant donnés le foyer décrit une cissoïdale d'ellipse. Neuberg, G. Gérard, Droz-Farny, Barisien, Audibert. Mathesis, Sér. 2, IX, 71.
153. Sur un lieu se rapportant à une parabole. Ripert. Mathesis, Sér. 2, IX, 53.
154. Lieux géométriques se rapportant à des paraboles. Droz-Farny, Buysens, Stuyvaert, Déprez, Hacken. Mathesis, Sér. 2, IX, 44.

Pendel.

155. Über die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Bestimmung der Mitschwingung. R. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 102.

Planimetrie.

156. Démonstration nouvelle du théorème que l'angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés. Volkol. Mathesis, Sér. 2, IX, 162.
157. Démonstration générale de second théorème de Legendre. De Tilly. Mathesis, Sér. 2, IX, 5.
158. Sur la somme des angles dans un triangle. De Tilly. Mathesis, Sér. 2, IX, 265.
159. Inscription du pentagone régulier. M. Stuyvaert. Mathesis, Ser. 2, IX, 200.
160. Construction du polygone de dix-sept côtés. G. Fontené. Mathesis, Ser. 2, IX, 179.
161. Théorème sur deux sécantes rectangulaires menées par un point d'intersection de deux cercles donnés. G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 29.
162. Calculer en fonction des côtés le rapport des segments déterminés sur un côté d'un pseudocarré par la perpendiculaire abaissée du milieu du côté opposé. Francq, Tiete. Mathesis, Sér. 2, IX, 27.
Vergl. Geschichte der Mathematik 88, 89.

Q.

Quadratur.

163. Aire de quelques figures à perimètre curviligne. C. Vandevelde. Mathesis, Sér. 2, XI, 100.
164. Aire de la podaire de la Kreuzcurve. V. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, IX, 47. — Krahé. ibid. 48. — Colart ibid. 49.
165. Aire de la courbe enveloppée par la polaire du centre d'une ellipse par rapport à un cercle variable. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 77.
166. Rapport des aires des courbes enveloppes de deux droites variables dans une ellipse. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 101.

R.

Reihen.

167. Sur la théorie des séries. J. Franel. Mathem. Annal. LII, 529.
168. Sur le produit des *n* premiers nombres. H. Mandart. Mathesis, Sér. 2, IX, 221.
169. Über hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziell ist. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 280.
170. Sur la formule du binôme. Godefroid. Mathesis, Sér. 2, IX, 39.
171. Application du binôme de Newton. M. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 199.

S.

Schwerpunkt.

172. Neue Konstruktion für den Umfangs-Schwerpunkt eines Dreiecks. L. Geusen. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 339.
173. Centre de gravité d'un certain triangle. Retali, Orlando, Emmerich, Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 211.

Sphärik.

174. Constructions sphériques à la règle et au compas. E. Barbarin. Mathesis, Sér. 2, IX, 57, 81.
175. Sur les triangles sphériques. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 163.
176. Propriété d'un triangle sphérique dont les côtés sont inferieurs à un quadrant. Emmerich, P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, IX, 273.

177. Longueur de la bisectrise d'un angle d'un triangle sphérique. Emmerich. Mathesis, Sér. 2, IX, 52. — Déprez ibid. 113.

Vergl. Geschichte der Mathematik 76. Oberflächen zweiten Grades 148.

Stereometrie.

178. Sur le parallélepipède. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 64. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 165.]

179. Théorème sur des volumes dérivant d'un tétraèdre quelconque donné. Emmerich, Buysens, Déprez, Merlin, Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 165.

Substitutionen.

180. Die algebraische Lösung des Problems der Substitutionsgruppen. P. Hoyer. Mathem. Annal. LII, 550.

181. Über die Darstellung der symmetrischen und alternierenden Vertauschungsgruppen als Kollineationsgruppen von möglichst geringer Dimensionenzahl. A. Wiman. Mathem. Annal. LII, 243.

182. Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Koeffizienten auftreten, intransitiv sind. H. Maschke. Mathem. Annal. LII, 363.

183. The structure of the linear homogeneous groups defined by the invariant $\lambda_1 \xi_1^r + \lambda_2 \xi_2^r + \cdots + \lambda_m \xi_m^r$. Dickson. Mathem. Annal. LII, 561.

184. Note on the simple group of order 504. W. Burnside. Mathem. Annal. LII, 174.

185. Über eine einfache Gruppe von 504 Operationen. Rob. Fricke. Mathem. Annal. LII, 321.

Thetafunktionen.

186. Über allgemeine Thetaformeln. A. Krazer. Mathem. Annal. LII, 369.

T.

Trigonometrie.

187. Sur certaines identités. M. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 198.

188. Transformation d'une expression trigonométrique. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 260.

189. Propriété des angles qu'une médiane d'un triangle fait avec les côtés adjacents. Plakhowo, Déprez, Barisien, G. Gérard, Emmerich, Soons. Mathesis, Sér. 2, IX, 125.

190. Discussion d'un système de trois équations trigonométriques. J. Neuberg. Mathesis, Sér, 2, IX, 95.

191. Si $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\beta$, $\operatorname{tang}\gamma$ sont les racines de l'équation

$$A_0 x^3 + 3 A_1 x^2 + 3 A_2 x + A_3 = 0,$$

chercher l'équation ayant pour racines

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta), \quad \operatorname{tang}(\beta+\gamma), \quad \operatorname{tang}(\gamma+\alpha).$$

A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, IX, 23. — Fairon etc. ebenda 24.

Vergl. Sphärik. Winkelteilung.

W.

Winkelteilung.

192. Über Winkelteilung mittels Araneïden. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 263.

Z.

Zahlenrechnen.

193. Une règle à calcul. Lambert. Mathesis, Sér. 2, IX, 91.

194. Sur les tables des chiffres constants de Mr. Calza, destinées à faciliter les multiplications et les divisions. G. C. Baravelli. Zeitschr. Math. Phys. XLIV. 50.

195. Calcul approché d'une racine carrée. G. Frattini. Mathesis, Sér. 2, IX, 8.
Vergl. Geschichte der Mathematik 72. Graphisches Rechnen.

Zahlentheorie.

196. Zur Theorie der Moduln. E. Steinitz. Mathem. Annal. LII, 1.
197. Méthode pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers. E. Barbette. Mathesis, Sér. 2, IX, 241.
198. Fractions décimales periodiques obtenues sans division. Moreau. Mathesis, Sér. 2, IX, 266.
199. Répartition de $4p^2+1$ un 3 carrés, lorsque $p > 3$ est nombre premier, de p^2+1 en 3 et 4 carrés, lorsque $p > 5$ est nombre premier. G. de Rocquigny. Mathesis, Sér. 2, IX, 164.
200. Questions d'arithmologie. G. de Rocquigny. Mathesis, Sér. 2, IX, 26.

Historisch-litterarische Abteilung.

Die Lehren des Claudius Ptolemaeus von den Bewegungen der Planeten.

Von

ALWIN HAEBLER. †

Die gesamte Überlieferung des klassischen Altertums, die sich auf ie Erscheinungen am Himmel bezieht, zerfällt in drei Gruppen, je achdem sie **mathematischer**, **physischer** oder **mythographischer** 'atur ist. Von diesen drei Gruppen bedürfen die beiden ersten zu rem Verständnis keiner weiteren Auseinandersetzung; es handelt sich ier einerseits um die Grösse und die Gestalt der Gestirne, ihre Beegungen, ihre Umlaufszeiten, ihre gegenseitigen Entfernungen und as sonst noch zum weiten Gebiete der rechnenden Astronomie geört, andrerseits um den Stoff, woraus die Gestirne bestehen, und um ie physikalische Erklärung aller am Himmel selbst oder in der tmosphäre beobachteten Erscheinungen — die Meteorologie bildet ier eine Unterabteilung der physischen Astronomie —, während die esondere Bedeutung des mythographischen Teiles der astronomischen itteratur allerdings nicht sofort schon aus dem Namen klar zu erennen ist.

Ein Himmelsatlas, wo die einzelnen Sterne zu anschaulichen, dem 'amen des Sternbildes entsprechenden Figuren verbunden sind, stellt ozusagen ein Bilderbuch zu einem beträchtlichen Teil der antiken age dar; viele der bekanntesten Erscheinungen der griechischen lythologie treten uns da in figürlicher Darstellung entgegen, und an bedenkt dabei nicht immer, welch bedeutsames Stück uralter Übereferung hier selbst der modernsten Bearbeitung zu Grunde liegt. Daei ist beachtenswert, dass die Helden des trojanischen Krieges unter en Sternbildern gar nicht vertreten sind, während der Argonautenug nicht unberücksichtigt geblieben ist, und da andrerseits auch hon bei Homer einige von den bekanntesten Sternbildern erwähnt erden (*Πληϊάδες*, *Ὑάδες*, *Ὠρίων*, *Βοώτης*, *Ἄρκτος*), so hat man vielicht nicht mit Unrecht geschlossen, dass die Griechen die Mehrzahl rer Sternbilder schon im 13. Jahrh. v. Chr. besessen haben, jedenfalls ass um die Zeit vom Astronomen Eudoxus (c. 409—356) der ganze Griechenland sichtbare Sternenhimmel mit mythologischen Bildern deckt gewesen sein (Wolf, Handbuch der Astronomie I, S. 408).

Wir können nicht mit einiger Sicherheit mutmassen, welche besonderen Umstände das Griechenvolk veranlasst haben mögen, die Sterngruppen am Himmel in Beziehung zu setzen zu seiner nationalen Sage*, ja es mehren sich sogar neuerdings die Anzeichen dafür, dass die griechischen Sternbilder wenigstens des Tierkreises auf orientalischen Einfluss zurückgehen könnten.** Doch dem sei wie ihm wolle, jedenfalls ist jenes Verfahren von weitreichender Bedeutung gewesen, denn das Interesse für die Erscheinungen am Himmel wurde durch eine solche Verbindung der Sage mit den Sternbildern in weite Volkskreise getragen und der Dichter, der Dolmetscher der nationalen Empfindung, hatte nicht zu fürchten, er werde von seinem Volke nicht verstanden werden, wenn er einmal in sein Lied irgend welche Beziehung auf den Sternenhimmel einflocht. So ist es denn auch nicht zu verwundern, dass sich das allgemeinere Interesse für den sagenumwobenen Sternenhimmel schon seit der frühesten Zeit bis in das späte Altertum bei den griechischen und römischen Dichtern in mannigfaltiger Bezugnahme auf die Sternbilder offenbart; dabei wird man allerdings wohl auch festzuhalten haben, dass in der späteren Zeit wenigstens dieses gelehrte astronomische Beiwerk lediglich durch die Rücksicht auf die konventionelle Übung in der Dichtkunst veranlasst war, aber nicht durch ein besonders hohes Maß astronomischen Verständnisses, das etwa der Dichter bei seinem Publikum vorausgesetzt hat. Dass wir mit vollem Recht in solchem gelehrten Flitterwerk besonders der späteren Römerzeit nur ein unentbehrliches Requisit aus der eben nicht besonders reich ausgestatteten Vorratskammer der römischen Dichtung erblicken, die unter dem Einfluss des Alexandrinismus ebenfalls im Flittergold eines gelehrten Aufputzes der harmlos-unbefangenen Laienwelt gern imponieren wollte, das beweisen zur Genüge die zahlreichen, ganz unglaublichen Versehen, die z. B. für die Sternauf- und -untergänge bei Ovid von berufenster Seite nachgewiesen worden sind.***

Aber auch noch in einer andern Hinsicht ist die bei den antiken Dichtern beliebte Bezugnahme auf die Sternbilder des Himmels von Bedeutung gewesen. In einer Zeit, wo man vor allem darauf bedacht war, das Verständnis der nationalen Dichter durch gelehrte Kommentare zu fördern, musste ganz von selbst das Bedürfnis entstehen, auch die mythologischen Beziehungen der Sternbilder weiteren Kreisen darzulegen, und dies führte zur Ausbildung einer besonderen mythographischen Litteratur, der Katasterismen. Kein Geringerer als Eratosthenes ist es gewesen, der hier mit seinem vorbildlichen Beispiel voranging, und wir haben heute noch einen wertvollen Auszug

* Nichts anzufangen ist mit der Notiz bei Plin. Hist. nat. II, 31.

** Epping, Astronomisches aus Babylon, 1889; Jensen, Die Kosmol. der Babyl., 1890.

*** Ideler „Über den astronomischen Teil der Fasti des Ovid" (Abhandlungen der Berl. Akad. 1822/23 [1825], S. 137—169).

seinem *Καταστερισμοί* betitelten Werke. Eine mustergiltige, alles chlägige Material behandelnde Ausgabe verdanken wir Carl Robert atosthenis Catasterismorum reliquiae, Berlin 1878).*

Wenn wir oben die astronomische Litteratur des Altertums in i Hauptgruppen schieden, so ist es andrerseits nur naturgemäss, s nicht immer eine scharfe Scheidung der Grenzen eingehalten rden konnte, sondern gelegentlich auch eine Verschmelzung der schiedenen Arbeitsgebiete eintrat. Wir beobachten das bereits an n bedeutendsten astronomischen Gedichte des Altertums, an den ινόμενα des Arat, die im wesentlichen auf den Arbeiten des loxus von Knidos beruhen müssen. Wenn auch hier das meiste ı auf die Sternbilder bezieht, so berührt sich das Gedicht in seinen nigfaltigen Bemerkungen über die verschiedenen Himmelskreise h auch ganz eng mit dem, was oben als mathematische Astronomie ichnet worden ist. Zum Glück besitzen wir auch hier eine abiessende Ausgabe von Ernst Maass (Berlin 1893), die vorbereitet den ist durch sein grundlegendes Werk Aratea (Berlin 1892).

Einen hervorragenden Anteil an der weiteren Ausgestaltung der onomischen Lehren hat im Altertume auch die Philosophie get, von der ja die Physik einen der wichtigsten Teile auch dann ı immer bildete, als durch Sokrates und seine Schule erkenntnisretische und ethische Fragen mehr in den Vordergrund gerückt den waren. Insbesondere können Plato und Aristoteles bei einer hichtlichen Betrachtung der Astronomie nicht unberücksichtigt ben, zumal da die wichtigen Fortschritte, die sich an den Namen Eudoxus von Knidos knüpfen, auf eine unmittelbare Anregung es Lehrers Plato zurückgeführt werden.** Nicht minder bedeutsam en die Pythagoreer auf die Entwickelung der Astronomie eingewirkt ch die Ausbildung des σφαιρικὸς λόγος und durch die Lehre von Kugelgestalt der Erde. Leider ist uns nur von ihrer jedenfalls hwichtigen Litteratur herzlich wenig erhalten, und so sind wir für Beurteilung der Förderung, die die Astronomie der griechischen losophie verdankte, immer wieder auf die erhaltenen Schriften Plato und Aristoteles angewiesen. Gewiss verdient jener einen vorragenden Platz auch in der Geschichte der Mathematik, nur l seine Lehren von den Bewegungen der Gestirne gerade an den scheidenden Stellen vielfach in die dunkle Mystik seiner dichterischen stellung gehüllt, so dass man zu keiner ganz klaren, unbestrittenen rstellung von seinen Ideen gelangen kann. Aristoteles hingegen, der nüchternen Klarheit seines alles durchdringenden Geistes, hat

* Vergl. dazu neuerdings Mythogr. Graeci vol. III fasc. I Ps. Eratosth. isterismi rec. Alex. Olivieri. Leipzig, Teubner, 1897; Heinrich Küentzle, Über Sternsagen der Griechen. I. Heidelberger Dissertation. Karlsruhe 1897.

** Kommentar von Simplicius zur Aristotelischen Schrift περὶ κόσμου; Ausg. Heiberg S. 488.

sich mit den mathematischen Lehren weniger befasst, dafür aber die Physik des Weltalls zu einem vorläufigen Abschluss gebracht; damit begnügte sich im wesentlichen das spätere Altertum, nur in Nebendingen hat es gelegentlich aus eigner Kraft Neues hinzuzufügen vermocht.

An die Werke von Plato und besonders Aristoteles schliesst sich im späteren Altertum die weitverzweigte Thätigkeit der gelehrten Kommentatoren wie Alexander von Aphrodisias, Johannes Philoponus, Simplicius, Olympiodor, Proklus, die uns bei aller redseligen Breite ihrer Paraphrasen doch oft recht wertvolle Bemerkungen hinterlassen haben. Mit Unterstützung der Berliner Akademie sind bisher in mustergiltiger Ausgabe erschienen die besonders gehaltvollen Kommentare des Simplicius zur Aristotelischen Physik (besorgt von Diels, Berlin 1882) und zur Schrift *περὶ κόσμου* (besorgt von Heiberg 1894); aus älterer Zeit ist daneben zu nennen die von Julius Ludwig Ideler bearbeitete Ausgabe der Aristotelischen Meteorologie nebst den erhaltenen Kommentaren (Leipzig 1834/36).

Besondere Aufmerksamkeit hat auch die Stoische Schule der Physik des Himmels und der Meteorologie geschenkt, und wir besitzen noch ein wertvolles Denkmal ihrer Forschung und Lehre in den zwei Büchern der *Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων* von Kleomedes (Ausg. von H. Ziegler 1891). Dagegen haben die Epikureer auf demselben Gebiete sich weniger hervorgethan, sondern vielfach recht wunderliche Anschauungen zu Tage gefördert, denen daher auch keine nachhaltige Wirkung in der späteren Zeit beschieden gewesen ist. Das Material ist heute leicht zugänglich gemacht worden durch die erschöpfende Sammlung von Usener (Epicurea, Lips. 1887, Teubner).

Naturgemäss findet sich auch schon in den Werken der griechischen Philosophen gar vieles, was bereits auf das Gebiet der mathematischen Astronomie hinüberführt, da ja überhaupt in der freien Forschung feste, unverrückbare Grenzen der wissenschaftlichen Arbeitsteilung schwer einzuhalten sind. Aber es bildet doch immer einen bedeutsamen Unterschied, ob solche Fragen der rechnenden Astronomie nur gelegentlich im Laufe einer philosophischen Auseinandersetzung gestreift werden, oder ob von vornherein die Absicht vorliegt, ein abgeschlossenes System auf exakter mathematischer Grundlage aufzubauen, wie es z. B. in der *Μεγάλη σύνταξις* des Claudius Ptolemaeus der Fall ist. Solche Erwägungen haben uns veranlasst, eine Reihe von Astronomen zu einer besonderen Gruppe zusammenzufassen, die das gemeinschaftliche Streben verbindet, mit Hilfe von mathematischen Lehrsätzen die Rätsel des Himmels einer befriedigenden Lösung zuzuführen, oder, wie es gewöhnlich heisst, mit Zugrundelegung von bestimmten mathematischen Voraussetzungen, *διασῶσαι τὰ φαινόμενα.* Nach einem bereits oben S. 163 berührten Fragmente, das nach Simplicius auf den Peripatetiker Sosigenes zurückgeht, hätte Plato in seiner

Schule zuerst die astronomische Forschung in solche Bahnen gelenkt, was bei seiner Hochachtung vor der Mathematik im Grunde ja auch ganz natürlich erscheint.

Nun giebt es aber freilich auch in dieser dritten Gruppe mancherlei Spielarten, je nachdem die Mathematik entweder ausschliesslich oder überwiegend oder nur einigermassen die Darstellung beeinflusst. Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie auf dem Gebiete der geographischen Litteratur Griechenlands. Die Werke von Eratosthenes und Hipparch beruhten sicher auf einer unerschütterlichen Grundlage der exakten Mathematik, Strabo dagegen verlangt in der Geographie von der Mathematik gerade nur so viel, als zum Verständnis der allgemeinen mathematisch-physikalischen Grundlagen unentbehrlich ist; alles, was darüber hinausgeht, erscheint ihm in einem für das grössere Publikum berechneten Werke ganz entschieden von Übel.

Im späteren Altertume fasste man unter dem Namen *ὁ μικρὸς ἀστρονόμος* eine Reihe von mathematischen und astronomischen Monographien zusammen, durch deren gründliches Studium man das schwere Rüstzeug zur Bewältigung der Ptolemäischen *Μεγάλη σύνταξις* gewinnen sollte. Dazu gehörten nach der Zusammenstellung von Manitius: von Euklid (ca. 300 v. Chr.) die *Δεδομένα*, die *'Οπτικά*, die *Κατοπτρικά*, die *Φαινόμενα*; von Theodosius aus Tripolis (130 n. Chr.) die drei Bücher *Σφαιρικά*, die Schrift *περὶ οἰκήσεων*, die zwei Bücher *περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν*; von Antolycus aus Pitana (ca. 330 v. Chr.) die Schrift *περὶ κινουμένης σφαίρας*, die zwei Bücher *περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων*; von Aristarch aus Samos (ca. 280 v. Chr.) die Schrift *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης* und von Hypsikles aus Alexandrien (ca. 180 v. Chr.) der *'Αναφορικός*. Die genannten Schriften galten etwa vom dritten Jahrhundert an als der wie es scheint allgemein angenommene Kanon für die mathematischen Vorstudien, die die schwierigere *Μεγάλη σύνταξις* zur unerlässlichen Vorbedingung machte. Von den meisten der genannten Schriften haben wir jetzt bequeme Texte erhalten durch Hultsch, Heiberg und Manitius; ein andres, inhaltlich ebenfalls hierhergehöriges Werk, die drei Bücher der Sphärik von Menelaus aus Alexandrien (ca. 100 n. Chr.), die eine sphärische Trigonometrie enthalten, ist nur in hebräischen und arabischen Übersetzungen auf uns gekommen.

Das Natürlichste wäre, hier gleich Hipparch und Ptolemaeus nebst seinen Kommentatoren anzureihen, die in der Art ihrer Forschung und Darstellung mit den Genannten eng verwandt sind. Da aber jene aus äusseren Zweckmässigkeitsgründen bei unserem flüchtigen geschichtlichen Überblick den Schluss bilden sollen, so schieben wir hier eine andere Unterabteilung ein, diejenigen Schriftsteller, die im sogenannten Uranologium des Jesuiten Petavius vereinigt sind (erschienen zum ersten Male 1630); es sind das vor allem Geminos mit seiner *Εἰςαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα* und Achilleus mit seiner Schrift *εἰςαγωγὴ εἰς τὰ*

Ἀράτου φαινόμενα. Wie in dem Titel der letzten Schrift ausdrücklich gesagt ist, knüpft man hier vielfach wieder an das astronomische Lehrgedicht von Arat an, daneben werden aber auch insbesondere bei Geminos sehr viele Fragen der mathematischen Astronomie behandelt, nur dass hier nicht so viele mathematische Vorkenntnisse zum vollen Verständnis notwendig sind, als wie z. B. bei Ptolemaeus.

Wenn wir von den Pythagoreern der älteren Zeit absehen, so hat die Reihe der ausgesprochenen Mathematiker unter den Astronomen wohl mit Eudoxus begonnen, von dem zwar nur noch einzelne Bruchstücke erhalten sind, aber doch in so beträchtlicher Zahl und von so erheblichem Umfang, dass zuletzt Künssberg sein Sphärensystem zu voller Anschauung hat bringen können (Dinkelsbühl, Programm 1888). Nach Eudoxus ist vor allem Hipparch zu nennen, vielleicht der bedeutendste Astronom des Altertums überhaupt, aus dem Ptolemaeus sicher viel entnommen hat. Seine Hauptwerke sind uns verloren gegangen, und so können wir die ungewöhnliche Förderung, die die Astronomie und die Geographie ihm zu verdanken hatten, nur aus späteren Werken ersehen, die aus ihm geschöpft haben. Auch er hat, trotz seiner sonstigen Vorliebe für mathematische Berechnungen und Konstruktion, in drei erhaltenen Büchern, die Manitius in der Bibliotheca scriptorum Gr. et Rom. Teubneriana Leipz. 1894 herausgegeben hat, die Phaenomena des Arat und Eudoxus eingehend behandelt und vielfach berichtigt. Nachdem zuletzt auch von Geminos eine eigene Ausgabe ebenfalls von Manitius 1898 an demselben Orte erschienen ist, steht uns nun hier alles einschlägige Material in handlicher Form zur Verfügung, und wir sind nicht mehr angewiesen auf die schwerfälligen Folianten des Jesuiten Petau.

Das Gleiche gilt freilich durchaus nicht von den recht zahlreich erhaltenen Werken des Claudius Ptolemaeus, den wir nun an dieser Stelle einreihen müssen. Weil sich in den Angaben der Handbücher über die Ausgaben der Ptolemaeischen Schriften und ihrer Kommentatoren mancherlei Irrtümer eingeschlichen haben, die dann leicht vertrauensselig von dem Nachfolger übernommen werden, so empfiehlt es sich hier, die einschlagenden Fragen mit mehr Ausführlichkeit zu behandeln.

Im Lexikon von Suidas lesen wir: *Πτολεμαῖος, ὁ Κλαύδιος χρηματίσας, Ἀλεξανδρεύς, φιλόσοφος γεγονὼς ἐπὶ τῶν χρόνων Μάρκου τοῦ βασιλέως. οὗτος ἔγραψε Μηχανικά βιβλία γ'. Περὶ φάσεων καὶ ἐπισημασιῶν ἀστέρων ἀπλανῶν βιβλία β'. Ἅπλωσιν ἐπιφανείας σφαίρας. Κανόνα πρόχειρον. Τὸν μέγαν Ἀστρονόμον ἤτοι Σύνταξιν καὶ ἄλλα.* Nicht ausdrücklich sind also hier genannt von den zweifellos echten Schriften des Ptolemaeus die Geographie, die Harmonik, die Optik, die Schriften, welche betitelt sind *περὶ κριτηρίου καὶ ἡγεμονικοῦ, περὶ ἀναλήμματος, ὑποθέσεις καὶ πλανωμένων ἀρχαί*; endlich dürfen wir zu den echten Werken wohl auch die *Τετράβιβλος* rechnen, denn der Grundstock muss hier von Ptolemaeus herrühren, selbst wenn daneben noch spätere fremde Zusätze und Erweiterungen angenommen werden müssten.

Im allgemeinen ist nun Ptolemaeus von den bedeutenderen Schriftstellern des Altertums sicherlich derjenige, dem sich die kritische Thätigkeit der berufsmässigen Philologen, Mathematiker und Astronomen am wenigsten zugewandt hat. Die Gründe hierfür liegen nahe genug, das Studium des Ptolemaeus, besonders seiner astronomischen Schriften, erfordert eben eine nicht gerade sehr häufige Vereinigung von Kenntnissen verschiedener Art, so dass der Almagest vielen für immer ein verschlossenes Buch mit sieben Siegeln bleibt. Das ist aber für jeden wahren Freund der Wissenschaft insofern lebhaft zu bedauern, weil die *Μεγάλη σύνταξις* als das eigentliche Meisterstück der wissenschaftlich-methodischen Forschung des Altertums bezeichnet werden kann, mögen die Voraussetzungen, von denen sie ausgeht, noch so verkehrt sein und demgemäss auch die Ergebnisse, zu denen dann die strenge Methode notwendig gelangen musste.

Gleichwie von dem astrologischen Werke Tetrabiblos giebt es auch von der *Μεγάλη σύνταξις* bis jetzt nur zwei vollständige Ausgaben,* eine aus dem Jahre 1538, in Basel bei Johannes Walderus erschienen, und eine zweite, die in Paris von dem französischen Abbé Halma besorgt worden ist (die beiden Bände tragen die Jahreszahlen 1813 und 1816). Während jener jetzt ziemlich selten gewordene Foliant zugleich auch den Kommentar von Theon aus Alexandrien enthält, soweit wir ihn überhaupt noch besitzen, bietet die Pariser Ausgabe zugleich eine französische Übersetzung und wertvolle Noten zu Ptolemaeus von Delambre. Diese zweite Ausgabe, die heutzutage ebenfalls nur noch schwer zu beschaffen ist, hat viel Anerkennung bei den eigentlichen Astronomen gefunden, ist aber dafür bei den Philologen auf um so mehr Widerspruch und Ablehnung gestossen. Wer besonders die folgenden Bände aus eigener Anschauung kennt, die sich an die beiden ersten, die *Μεγάλη σύνταξις* enthaltenden Bände anschliessen, wird sich über das absprechende Urteil der damaligen Hellenisten, wie es bei Brunet konstatiert wird, nicht im geringsten wundern. Abbé Halma hat nämlich mit staatlicher Unterstützung im Anfange dieses Jahrhunderts eine zusammenfassende Ausgabe der wichtigsten astronomischen Schriften des Altertums veranstalten wollen und die Sammlung eröffnet mit dem Almagest. Über die Fortsetzung hat sich in die meist gebrauchten Handbücher der modernen Zeit ein bedauerlicher Irrtum eingeschlichen, der hoffentlich nach unserer Berichtigung in Zukunft verschwinden wird. Wie gesagt, füllen die 13 Bücher der *Μεγάλη σύνταξις* die beiden ersten Bände. Der dritte Band erschien 1819 und führt den Haupttitel Chronologie de Ptolémée, daneben den speziellen Titel

* Eine neue griechische Textausgabe in der Bibliotheca Teubneriana wird durch Heiberg herausgegeben. Ihr erster Band (1898) umfasst die ersten sechs Bücher.

Κλαυδίου Πτολεμαίου, Θέωνος κ. τ. λ. κανὼν βασιλειῶν καὶ φάσεις ἀπλανῶν καὶ Γεμίνου εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα. Der vierte, weniger starke Band erschien 1820 unter dem Haupttitel „Hypothèses de Ptolémée etc.", der spezielle Titel lautet *Κλ. Πτολεμαίου ὑποθέσεις καὶ πλανωμένων ἀρχαὶ καὶ Πρόκλου Διαδόχου ὑποτυπώσεις.* Es folgten dann vier weitere Bände, die es vorzugsweise mit dem Kommentator des Almagest, Theon aus Alexandrien, zu thun haben. Der fünfte Band der Sammlung, erschienen 1821, führt den Haupttitel Commentaire de Théon und den speziellen Titel *Θέωνος Ἀλεξανδρέως ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῆς Πτολεμαίου μαθηματικῆς συντάξεως* für den ersten Teil des Bandes, während der zweite Teil den Sondertitel führt *Θέωνος Ἀλ. ὑπόμνημα εἰς τὸ δεύτερον κτλ.* und der dritte Teil den Spezialtitel *Ἀράτου Σολέως φαινόμενα, Θέωνος σχόλια, Ἐρατοσθένους καταστερισμοί, Λεοντίου σφαῖρα* et Germanici Caesaris Phaenomena. Man ersieht schon aus diesem Beispiele, wie wenig der Haupttitel dem wirklichen Inhalt des Bandes mit seinen drei Teilen entspricht. Viel grösser und schlimmer wird aber nun der Wirrwarr in den drei folgenden Bänden, die man also als Band 6, 7 und 8 der ganzen Sammlung bezeichnen muss; davon trägt der 6. Band die Jahreszahl 1822, der 7. die Jahreszahl 1823, der 8. die Jahreszahl 1825. Nun tritt auch hier wieder in dem mir vorliegenden Exemplare scheinbar als Haupttitel für alle drei Bände auf „Commentaire de Théon", daneben aber trägt der 6. Band aus dem Jahre 1822 noch zwei Sondertitel, die vollständig so lauten: „*Θέωνος Ἀλεξανδρέως ὑπόμνημα.* Commentaire de Théon d'Alexandrie, sur le livre III de l'Almageste de Ptolémée; Tables manuelles des mouvements des astres" und (auf einem neuen Titelblatt) „*Θέωνος Ἀλεξανδρέως ὑπόμνημα εἰς τοὺς Πτολεμαίου προχείρους κανόνας*". Hier ist jener erste Spezialtitel ganz falsch in seiner ersten Hälfte, denn von dem eigentlichen Kommentar Theons zum Almagest findet sich in dem 6. Bande kein einziges Wort, vielmehr ist festzuhalten, dass von diesem Hauptkommentar bloss die beiden ersten, allerdings weitaus wichtigsten Bücher von Halma herausgegeben worden sind (im 5. Bande, wie oben bemerkt wurde). Auch der angeführte Haupttitel ist so unpassend wie möglich für die Bände 6—8 gewählt worden, denn bei einer Bezeichnung wie *Θέωνος ὑπόμνημα* kann niemand an etwas anderes als wie an Theons Kommentar zum Almagest denken, wovon aber in allen drei Bänden gar nichts zu lesen ist. Wenn also Wolf in seinem Handbuch der Astronomie (I, 533) schreibt: „leider sind drei andere, den Kommentar von Theon und verschiedene Tafeln enthaltende Bände, welche Halma von 1822 bis 25 folgen liess, um dann 1828 mit der „Géographie mathématique" abzuschliessen, fast nicht mehr zu beschaffen", so hat er sich offenbar ebenfalls durch die falschen Titel irreführen lassen. Halma hat anfangs jedenfalls alles herausgeben wollen, was uns vom Kommentar des Theon aus Alexandrien zum Almagest erhalten ist, vermutlich ist aber später durch eine Erklärung Letronnes (Journal des Savants 18, 266) bestimmt worden, von diesem Vorhaben abzustehen. für hat er aber einige wichtige Manuskripte der Pariser National- oliothek zum Abdruck gebracht, die hauptsächlich astronomische d chronologische Tabellen der verschiedensten Art enthalten, da- ben aber sozusagen eine Gebrauchsanweisung für die Benutzung rselben, wenn es sich um die Lösung bestimmter astronomischer ufgaben handelt. Halma hat wohl nicht unrecht, wenn er ver- utet, dieses Tabellenmaterial gehe in seinem letzten Ursprunge noch f Ptolemaeus selbst zurück und sei dann von den Astronomen der genden Zeit, insbesondere aber von Theon aus Alexandrien er- tert, berichtigt und bis auf die eigene Gegenwart fortgeführt rden. — Wie schon oben aus dem Wolfschen Citate zu ersehen ist, dann im Jahre 1828 das grosse litterarische Unternehmen Halmas en Abschluss gefunden mit der Herausgabe der Geographie von lemaeus.

Es muss der unbestrittene Ruhm der Franzosen bleiben, dass am Anfange unsres Jahrhunderts der antiken Astronomie ihre be- dere Aufmerksamkeit geschenkt und zur Aufhellung so manches klen Punktes wesentlich mit beigetragen haben. Allen voran htet hier als glänzendes Vorbild Delambre, ein Mann, der in ganz gewöhnlicher Weise philologische Sprachkenntnis und die gründlichste thematische Bildung zum schönsten und segensreichsten Bunde einigte; wer die beiden ersten Bände seiner Histoire de l'astronomie chgearbeitet hat, wird ihm gern jenes ehrenvolle Zeugnis aus- len, mag er auch noch so oft an überflüssigen Betrachtungen, die egentlich mit unterlaufen, einigen Anstoss genommen haben. Die lnahme Delambres an den Arbeiten von Halma hat diese in frucht- ster Weise gefördert; dafür darf aber andrerseits die Bemerkung ht unterdrückt werden, dass einzelne Bände des grossen Pariser ternehmens in typographischer Korrektheit geradezu das Unglaub- ste leisten; sie sind zum Teil wahre Monstra philologischer Un- igkeit und typographischer Liederlichkeit, was um so mehr Ver- nderung verdient, weil die einzelnen Teile, mit staatlicher Unter- tzung gedruckt, vielfach höchstgestellten Personen, z. B. Mitgliedern königlichen Familie, gewidmet sind. Dass die französische Über- zung sich oft sehr grosse Freiheiten gestattet und geradezu zur raphrase wird, soll bei einem so schwierigen Texte, wie ihn lemaeus meistens bietet, nicht weiter getadelt werden (freilich mmen gelegentlich auch geradezu falsche Übersetzungen vor); in Augen eines Philologen wiegen viel schwerer die zahllosen falschen cente der griechischen Worte und dann andrerseits die oft ganz sche Abteilung der einzelnen Satzglieder durch eine verkehrte erpunktion, was man beides besonders im 4. Bande in auffälligster eise bemerken kann. Wolf hat recht, wenn er darüber klagt, dass die einzelnen Bände, und zwar besonders die späteren, nur so schwer zu beschaffen seien. Ich habe, dank dem freundlichen Entgegenkommen der Direktion der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Dresden-Neustadt, auch die Bände selbst einsehen und benutzen können, die auf der Leipziger Universitätsbibliothek fehlen, und dabei hat sich in mir besonders angesichts der typographischen Jämmerlichkeit des 4. Bandes immer wieder der Verdacht geregt, am Ende liege mir gar nicht der letzte, endgültige Abdruck vor. Im Ernste kann man aber bei einem Buche einer öffentlichen Bibliothek an eine solche Erklärung doch wohl kaum denken. Hier kommt es thatsächlich vor, dass z. B. am Schlusse einer längeren Periode die Konstruktion eines absoluten Genitivs mit den dazu gehörigen Satzgliedern von dem vorhergehenden Teile der Periode durch einen Punkt getrennt und dann mit grossem Anfangsbuchstaben als selbständiger Satz angefügt wird.

Derartige Ungeheuerlichkeiten sind aber nicht bloss auf den 4. Band beschränkt, sondern kehren auch anderwärts wieder. So findet sich ein sehr bezeichnendes Beispiel für die Akribie der recensio im Anfange vom zweiten Teil des 5. Bandes, der den Theonschen Kommentar zum zweiten Buche des Almagest enthält. Der Text beginnt hier mit den Worten *Διεξελθὼν ο Πτολεμαῖος ἐν τῷ πρώτῳ τῆς συντάξεως τὰ περὶ τῶν ἐν τῷ παντὶ καθόλου ὀφείλοντα προληφθῆναι, τουτέστιν ὅτι* — es folgt dann eine Angabe des Inhaltes der ersten Hälfte vom ersten Buche und am Ende der zwölften Zeile ein Punkt, noch ehe ein Verbum finitum zum einleitenden Partizip *διεξελθών* vorgekommen ist. Die 13. Zeile lautet dann mit grossem Anfangsbuchstaben *Ἔτι δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ μέρος διαλαβών*, und es folgt darauf eine Aufzählung des Inhaltes vom zweiten Teile des ersten Buches ohne einen regierenden Hauptsatz bis zur achten Zeile der folgenden Seite, wo dann endlich mit den Worten *ἑξῆς ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ δευτέρῳ τυγχάνοντι* der Hauptsatz zum ganzen Abschnitt vorbereitet wird. Noch ehe derselbe aber beginnt, setzt der Herausgeber hinter *τυγχάνοντι* einen Punkt und beginnt dann mit Einrückung eine neue Zeile *Βούλεται περὶ τῶν καθ' ἑκάστην ὡρισμένην τινὰ κτλ.* Vergleicht man damit die Ausgabe von 1538, so bemerkt man, dass sie ganz richtig das Hauptverbum des Ganzen *βούλεται* in unmittelbaren Zusammenhang mit dem Vorhergehenden bringt, was natürlich das allein richtige Verfahren ist. Man begreift hier einfach den französischen Herausgeber nicht. Wollte er hier die Übersicht über die lange Periode der zwei ersten Sätze erleichtern, so durfte er doch auf keinen Fall die Worte des eigentlichen Hauptsatzes *ἑξῆς ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ δευτέρῳ τυγχάνοντι* durch einen Punkt und Abbrechung der Zeile von dem dazu gehörigen Verbum *βούλεται* trennen, sondern musste schon mit jenem Passus die neue Zeile beginnen.

Besonders die griechische Accentuation ist eine arge Crux für den französischen Herausgeber, und es wirkt schliesslich nur noch erheiternd, wenn man z. B. Formen begegnet wie ἀποδεικνῦντες (zwei Accente, nur nicht der richtige) in der dritten Zeile der ersten griechischen Textseite vom 4. Bande. In der richtigen Erkenntnis seiner Unsicherheit hat der Herausgeber sodann in der folgenden Schrift des nämlichen Bandes die Accente überhaupt weggelassen, was freilich nicht ausschliesst, dass gelegentlich aus alter Gewohnheit doch noch hier und da ein vereinzelter Accent gesetzt wird, der wiederum nicht immer richtig ist.

Ich habe die typographische Unzulänglichkeit der Pariser Ausgabe an einigen drastischen Beispielen darlegen wollen, womit natürlich das materielle Verdienst des Unternehmens nicht im mindesten geschmälert werden soll. Aber man kann sich denken, welch unerfreulichen Eindruck solcherlei Texte auf einen philologisch geschulten Leser machen müssen, bei dem schliesslich alles in allem doch noch die aufrichtige Dankbarkeit über das Gebotene mit all seiner formalen Unvollkommenheit überwiegen muss. Denn von dem, was die ganze Sammlung enthält, ist eigentlich nur was sich auf Arat und Geminus bezieht in anderweitiger Bearbeitung leicht zu beschaffen, sowie von den Schriften des Ptolemaeus die *Φάσεις ἀπλανῶν ἀστέρων*, die in der Wachsmuthschen Ausgabe des Joh. Laurentius Lydus „De Ostentis“ (Leipzig 1863) Aufnahme gefunden haben; alles übrige liegt (von der Geographie abgesehen) entweder zum ersten Male im Druck vor oder findet sich nur in alten Ausgaben des 16. Jahrhunderts, die ungemein selten geworden sind.

Eine editio princeps stellen dar die Bände 6—8, die *Μεγάλη σύνταξις* (1. und 2. Bd.) und die zwei Bücher vom Kommentar Theons (5. Bd.) waren das erste und letzte Mal vorher gedruckt worden zu Basel 1538.

Eine eigne Bewandtnis hat es mit dem Inhalte des 4. Bandes. Die erste, hier aufgenommene Schrift, die *Ὑποθέσεις καὶ πλανωμένων ἀρχαί* von Ptolemaeus, die P. Tannery in seinen Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne (1893) bei der Behandlung der Ptolemaeischen Lehre von den Planeten in erster Linie berücksichtigt hat und die in einem wichtigen später zu behandelnden Punkte von der Darstellung im Almagest erheblich abweicht, soll bereits 1620 einmal vom Engländer Bainbridge zusammen mit der Sphaera des Proclus herausgegeben worden sein. Die zweite, im gleichen Bande enthaltene Schrift von Proclus, deren Titel richtiger wohl lautet *Ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων*, bietet eine recht geschickte Zusammenfassung von alle dem, was in der Astronomie der Alten zur Behandlung kam, und zwar ohne das Verständnis durch die Aufnahme von schwierigeren Auseinandersetzungen der Mathematik zu beeinträchtigen; sie führt so leicht und bequem in das Studium der alten Astronomie ein wie kaum eine zweite Schrift und verdiente schon um deswillen eine neue Bearbeitung, zumal da der fehlerreiche Pariser

Druck nicht einmal Accente aufweist und die andere Ausgabe des Jahres 1540, wie es scheint, ein ganz seltenes Buch geworden ist. — Von der nämlichen Schrift des Proclus ist bald nach der editio princeps eine lateinische Übersetzung des Georgius Valla aus Plazentia erschienen, die freilich den griechischen Text mit erstaunlicher Willkür behandelt und von Halma richtig charakterisiert worden ist mit den Worten „La version, ou pour mieux dire, la paraphrase latine des Hypotyposes, par Valla, n'est rien moins qu'exacte et fidèle. Il a retranché, changé, ajouté et expliqué à son gré, sans presqu'aucun égard pour le texte grec, qui n'étant pas mis à côté de cette interprétation beaucoup trop libre, n'a pu jusqu'à présent en faire reconnaître les licences et les fautes. Il y introduit Pline dont Proclus ne parle nullement et l'arabe Alfergan qui vécut plus de deux siècles après cet auteur“ (Bd. IV, S. 10). Unter solchen Verhältnissen kann natürlich die lateinische Übersetzung absolut keinen Ersatz leisten für das griechische Original. Sie ist übrigens zusammen mit der lateinischen Übersetzung des Almagest von Georgius Trapezuntius zu Basel 1551 bei Heinrich Peter erschienen.

Zum Abschluss nur noch wenige Bemerkungen über die anderen kleineren Schriften von Ptolemaeus.

Der von Suidas erwähnte *Κανὼν πρόχειρος* liegt offenbar mit zu Grunde den mannigfachen Tabellen, die Halma in Bd. VI—VIII herausgegeben hat und mit denen teilweise der Name von Ptolemaeus auch direkt in Verbindung gebracht wird (Halma VI, S. I flg. und IX).

Die Schrift *Ἅπλωσις ἐπιφανείας σφαίρας*, die eine stereographische Projektion lehrt, liegt uns im Originaltext nicht mehr vor, sondern nur in einer Rückübersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische, die Rudolf von Brügge 1144 (nicht 1544, wie oft fälschlich zu lesen ist) verfasst und die der Baseler Drucker Johannes Valderus (Walderus) zum ersten Male 1536 in einem Sammelbande herausgegeben hat, der den Titel führt Sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus: ad totius mundi fabricationis cognitionem fundamenta (S. 232 bis 274). Nach Wolfs Annahme ist diese Schrift vielleicht gar nicht dem Ptolemaeus, sondern dem Hipparch zuzuweisen (Handbuch etc. II, S. 71).

Von den bei Suidas nicht genannten Schriften des Ptolemaeus ist noch die ebenfalls nur in lateinischer Rückübersetzung aus dem Arabischen erhaltene Optik zu nennen, die zu Turin 1885 erschienen ist unter dem Titel L'Ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia — Scrittore del Secolo XII ridotta in Latino sovra la traduzione Araba di un testo Greco imperfetto etc. pubblicata da Gilberto Govi.

Was endlich von der Schrift über die Sonnenuhren (*περὶ ἀναλήμματος*) erhalten ist, hat neuerdings (1895) **Heiberg** zusammengestellt im 12. Supplement zum 40. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Über das astrologische Werk Τετράβιβλος (1535 und 1553 in rnberg und Basel erschienen) vergl. meine Abhandlung „Astrologie Altertum" (Zwickau 1879, S. 29 flg.) und Franz Boll „Studien er Claudius Ptolemaeus" (21. Supplementband der Jahrbücher für ıss. Philol., S. 111 flg.)

An Ptolemaeus schliessen sich an die beiden Kommentatoren heon aus Alexandrien (nicht zu verwechseln mit dem viel älteren heon aus Smyrna, von dem Th. H. Martin 1849, E. Hiller 1898 ıd J. Dupuis 1892 Ausgaben besorgt haben) und Proklus, jener das deutendste Schulhaupt im vierten Jahrhundert zu Alexandrien, der ıter der hochgebildeten, aber unglücklichen Hypatia, dieser der viel-tige und schriftstellerisch ungemein thätige Lehrer an der Hoch-ıule zu Athen. Was von astronomischen Schriften dieser beiden lehrten für unsere besonderen Zwecke in Betracht kommt, ist bereits rähnt worden. Am meisten verdient Hervorhebung, dass auch bis n heutigen Tage der Kommentar von Theon zum Almagest, wenn von der Pariser Ausgabe der beiden ersten Bücher absehen (Bd. V), zig und allein in dem fehlerreichen Drucke der Baseler Ausgabe ı 1538 vorliegt.

Nach der Hypotyposis des Proklus sind es im wesentlichen gende zehn Hauptpunkte gewesen, mit denen sich die Astronomie Altertums beschäftigt hat (Halma IV, S. 66 flg.):

. Man bemerkte, dass Sonne, Mond und die fünf anderen Planeten, wie wir im Sinne des Altertums sagen müssen, sich bald schneller, bald langsamer in der Ekliptik bewegen und dass die vier Viertel des Tierkreises nicht in gleicher Zeit von ihnen zurückgelegt werden (die sogenannte erste Anomalie).

. Der Mond und die fünf anderen Planeten bewegen sich bald nördlich, bald südlich von der Ekliptik, während die Sonne diese so gut wie niemals verlässt.

. Die fünf Planeten Venus, Merkur, Mars, Jupiter, Saturn beschleunigen gelegentlich ihre Bewegung, dann vermindern sie dieselbe und stehen dazwischen scheinbar auch ganz still; so sieht man, wie sie sich in der Richtung nach Osten bewegen, dann zu scheinbarem Stillstand gelangen und schliesslich eine rückläufige Bewegung nach Westen einschlagen (die sogenannte zweite Anomalie, an der Sonne und Mond keinen Anteil haben).

. Während Mars, Jupiter und Saturn in jedem beliebigen Abstande von der Sonne und selbst in Opposition zu ihr erscheinen, entfernen sich Venus und Merkur von ihr niemals mehr als 60° (Merkur ist noch näher an die Sonne gebannt als Venus) und erscheinen als Morgen- und Abendstern.

. Die Planeten erscheinen unserem Auge bald grösser, bald kleiner, sie müssen also in der unendlichen Tiefe des Weltalls der Erde bald näher, bald ferner sein; dafür spricht auch die Thatsache, dass bei Sonnenfinsternissen gelegentlich der Mond die Sonnenscheibe ganz verdeckt und ein anderes Mal in dem Momente, wo das menschliche Auge, sowie die Mittelpunkte der Sonnen- und Mondscheibe eine gerade Linie bilden, einen Ring der Sonnenscheibe unbedeckt lässt.

VI. Bald sind die Planeten der Sonne ganz nahe (d. h. haben gleiche Länge wie die Sonne) und werden trotzdem gesehen, bald werden sie unsichtbar, obwohl sie sich von der Sonne weit entfernt haben (die Erklärung hierfür wird gefunden in der grösseren oder geringeren Neigung der Planetenbahn gegen die Ebene der Ekliptik).

VII. Was die Aufeinanderfolge der Planeten betrifft, so kann es keinem Zweifel unterliegen, dass der Mond der Erde am nächsten ist und dass jenseits der Sonne Mars, Jupiter, Saturn in dieser Reihenfolge in immer weiterem Abstande um den Mittelpunkt des Weltalls kreisen; das beweist schon unter anderem die Dauer ihres Umlaufes. Merkur und Venus haben die nämliche Geschwindigkeit wie die Sonne und erscheinen bald im Osten, bald im Westen von ihr, daher ist es ungemein schwierig, festzustellen, welches das Verhältnis ihres Abstandes von der Erde und dem Weltcentrum ist.

VIII. Behandelt wird die Excentricität der Planeten- und insbesondere der Sonnenbahn.

IX. Die Sphäre der Fixsterne ist in einer sehr langsamen Rotation um eine von der Weltaxe verschiedene Axe in der Richtung nach Osten begriffen (die sogenannte Präcession der Tag- und Nachtgleichen).

X. Das Verhältnis von Sonne und Mond zu einander bei den Verfinsterungen und bei den einzelnen Phasen.

Das sind nach der zusammenfassenden Übersicht des letzten Vertreters der griechischen Astronomie die Hauptpunkte, die die antike Forschung beschäftigt haben. Es ist nun bekannt, dass es auch in Griechenland schon früh Vertreter einer heliocentrischen Weltanschauung gegeben hat, die aber doch keine allgemeinere Zustimmung gefunden haben können. Somit drängt sich uns ganz von selbst die Frage auf: wie hat man es zu erklären, dass die richtigere Erkenntnis, die einzelne gefunden hatten, bald so vollständig wieder in den Hintergrund gedrängt wurde und man es nicht der Mühe für wert erachtete, die angeregten Fragen einer gründlichen mathematischen Prüfung zu unterwerfen?

Dass man von dem Grundirrtum einer im Weltcentrum befindlichen Erdkugel nicht loskam und sich aller besseren Einsicht zum grössten Teile hartnäckig verschloss, hängt zusammen mit dem massgebenden Einfluss, den die Aristotelische Physik sehr schnell gewonnen haben muss. Es war ja für jeden zunächst ganz einleuchtend, wenn Aristoteles lehrte, bei der Entstehung der Welt hätten sich die vier Elemente h dem Verhältnis ihrer Schwere so gesondert und geordnet, dass das werste Element der Erde sich im Mittelpunkte der Welt zu einer ssiven Erdkugel zusammenballte, um die sich dann wieder in gelgestalt das nächst schwere Element des Wassers lagerte u. s. f. r bei der Kugelgestalt befinden sich alle einzelnen Teile im gegentigen Gleichgewichte, und nach dem als selbstverständlich annommenen Zug der Schwere nach dem Weltmittelpunkte, dem alles terworfen war, konnte die Sonne mit ihrem leichtesten Elemente des uers natürlich in diesem Teile des Kosmos keinen Platz angewiesen halten.

Ganz anderes lehrten bekanntlich die Pythagoreer, die ein Centraler annahmen und die Erde um diesen Mittelpunkt wie die anderen aneten kreisen liessen. Allein die Aristotelische Physik entsprach m allgemeinen Menschenverstande mehr, und so wurde sie denn ch in diesem Hauptteile von den Stoikern angenommen und durch se im wesentlichen auf die folgenden Zeiten fortgepflanzt. Sie berrscht auch Ptolemaeus in seinem astronomischen Hauptwerke.

Andrerseits reichten sich, wie es scheint, religiöse Mystik und losophisch-mathematische Spekulation die Hand, um einen zweiten uptirrtum des Altertums zu begründen, von dem man sich ebenenig in jenen Zeiten hat losreissen können. Die Pythagoreer, eit wir jetzt nachprüfen können die frühesten Vertreter der gelgestalt der Erde und des Weltalls in Griechenland, müssen den tirnen, d. h. den Planeten, eine göttliche Natur verliehen haben, l da nun dem Göttlichen nur das Vollkommenste eigen sein kann l von den Flächenfiguren sowie von den Körpern nach der Anauung der antiken Spekulation der Kreis und die Kugel das Vollnmenste darstellen, und da endlich auch der *κυκλικὴ κίνησις* die sste Vollkommenheit innewohnt, so ergab sich ganz von selbst die hre: die Planeten müssen die Gestalt einer Kugel besitzen, gerade e die Erde und der Kosmos, und ihre Bahnen um einen Mittelpunkt nnen nur kreisförmige Linien darstellen. Solche Anschauungen ssen in Griechenland wie ein mathematisches Axiom und eine Art igiöses Dogma gegolten haben, nur so erklärt es sich, dass man f ellipsenförmige Planetenbahnen nicht gekommen ist, d. h. mit klarem wusstsein und sicherer wissenschaftlicher Erkenntnis, denn unbewusst t das Altertum eigentlich die Ellipse als Planetenbahn in der icyklentheorie bereits besessen. Man beachte die wichtige Stelle bei minus Kap. 1, 18 f.: *Ἐπιζητεῖται οὖν ἐν τούτοις, πῶς ἴσων ὄντων τῶν σσάρων μορίων τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου ὁ ἥλιος ἰσοταχῶς κινούμενος ἐ παντὸς ἐν ἀνίσοις χρόνοις διαπορεύεται τὰς ἴσας περιφερείας. κόκειται γὰρ πρὸς ὅλην τὴν ἀστρονομίαν ἥλιόντε καὶ σελήνην καὶ ὺς πέντε πλανήτας ἰσοταχῶς καὶ ἐγκυκλίως καὶ ὑπεναντίως τῷ κόσμῳ νεῖσθαι. Οἱ γὰρ Πυθαγόρειοι πρῶτοι προσελθόντες ταῖς τοιαύταις ιζητήσεσιν ὑπέθεντο ἐγκυκλίους καὶ ὁμαλὰς ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν* *ε' πλανητῶν ἀστέρων τὰς κινήσεις. τὴν γὰρ τοιαύτην ἀταξίαν οὐπροσεδέξαντο πρὸς τὰ θεῖα καὶ αἰώνια, ὡς ποτὲ μὲν τάχιον κινεῖσθαι, ποτὲ δὲ βράδιον, ποτὲ δὲ ἑστηκέναι, οὓς δὴ καλοῦσι στηριγμοὺς ἐπὶ τῶν ε' πλανητῶν ἀστέρων. Οὐδὲ γὰρ περὶ ἄνθρωπον κόσμιον καὶ τεταγμένον ἐν ταῖς πορείαις τὴν τοιαύτην ἀνωμαλίαν τῆς κινήσεως προσδέξαιτο ἄν τις· αἱ γὰρ τοῦ βίου χρεῖαι τοῖς ἀνθρώποις πολλάκις αἴτιαι γίνονται βραδυτῆτος καὶ ταχυτῆτος· περὶ δὲ τὴν ἄφθαρτον φύσιν τῶν ἀστέρων οὐδεμίαν δυνατὸν αἰτίαν προσαχθῆναι ταχυτῆτος καὶ βραδυτῆτος. Δι' ἥντινα αἰτίαν προέτειναν οὕτω, πῶς ἂν δὶ ἐγκυκλίων καὶ ὁμαλῶν κινήσεων ἀποδοθείη τὰ φαινόμενα.*

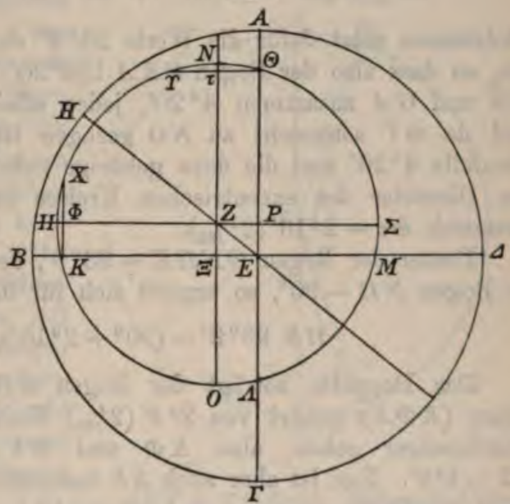
Nach dem oben S. 163 angeführten Citate aus Simplicius, wonach Plato seinen Schülern die Aufgabe stellte, welche Annahmen nötig seien, um die Erscheinungen am Himmel zu erklären, darf man vielleicht vermuten, dass schon damals gewisse Anomalien der Planetenbewegungen festgestellt waren, die man mit den bisher angenommenen Bewegungen nicht zu erklären vermochte. Jedenfalls bringt Simplicius das System von Eudoxus in direkte Verbindung mit jener Anregung Platos, und man sieht jenem sofort an, dass es die Absicht verfolgte, mit seinen vielen Sphären, deren Zahl in der Weiterbildung durch Kallippos schliesslich noch um 7 vermehrt wurde — wozu noch 22 (Wolf, Geschichte der Astron. S. 41) „rückwirkende“ Sphären kamen —, jene beobachteten Unregelmässigkeiten und Störungen zu erklären. Nun bemerkt aber der nämliche Simplicius in seinem Kommentar zur Schrift *Περὶ κόσμου* ganz richtig (Heiberg, S. 32): *Οἱ γὰρ περὶ Εὔδοξον καὶ Κάλλιππον καὶ μέχρι τοῦ Ἀριστοτέλους τὰς ἀνελιττούσας σφαίρας ὑποθέμενοι ὁμοκέντρους τῷ παντὶ δι' ἐκείνων ἐπειρῶντο σώζειν τὰ φαινόμενα περὶ μὲν τὸ τοῦ παντὸς κέντρον πάσας λέγοντες κινεῖσθαι τὰς σφαίρας, τῶν δὲ ἀπογείων καὶ περιγείων καὶ τῶν δοκούντων προποδισμῶν καὶ ὑποποδισμῶν καὶ τῶν ἐν ταῖς κινήσεσι φαινομένων ἀνωμαλιῶν τὰς αἰτίας οὐκ ἰσχύοντες κατ' ἐκείνας τὰς ὑποθέσεις ἀποδιδόναι.* Man sieht daraus, die Sphärentheorie von Eudoxus und seinen Nachfolgern musste schliesslich aufgegeben werden, weil sie die wechselnde scheinbare Bewegung der Planeten (bald in der Richtung nach Osten, bald in der Richtung nach Westen) sowie den wechselnden Abstand der Planeten von der Erde im Perigeum und Apogeum nicht erklären konnte. Auch ohne besondere Instrumente hat man im Altertum feststellen können, dass die Planeten dem menschlichen Auge bald grösser, bald kleiner erscheinen.

Da war es nun eine wichtige Entdeckung von Hipparch, die der astronomischen Spekulation einen neuen kräftigen Anstoss gab. „Er fand nämlich etwa 150 v. Chr., dass die Jahreszeiten ungleiche Länge haben, indem statt den $91\frac{1}{4}$ Tagen, welche bei gleicher Länge auf jede derselben kommen würden, dem Frühlinge $94\frac{1}{2}$, dem Sommer $92\frac{1}{2}$, dem Herbste 88 und dem Winter 90 Tage zufallen“ (Wolf, Gesch. S. 46). Man hätte demnach annehmen müssen, dass die Sonne die vier nz gleichen Viertel ihrer Jahresbahn mit wechselnder Schnelligkeit, rchlaufe, wenn die Sonnenbahn und die Fixsternsphäre mit den Tier- eiszeichen denselben Mittelpunkt (die Erde) haben. Das verstiess aber llständig gegen jenes Grundgesetz, dass die göttliche Weltordnung nz entschieden eine *ἐγκύκλιος* und *ὁμαλὴ κίνησις* der Planeten verlange nd so verfiel denn Hipparch auf die Excentricität der Sonnenbahn, ei der dann auch Ptolemaeus Beruhigung fasste, weil bei der Sonne loss die sogenannte erste Anomalie beobachtet wird und diese that- ichlich durch die Excentricität der Sonnenbahn ihre volle Erklärung ndet. Ptolemaeus bekennt sich ebenfalls zu jenem Axiom der antiken ekulation mit den Worten: *πρόθεσιν μὲν καὶ σκοπὸν ἡγούμεθα ἶν ὑπάρχειν τῷ μαθηματικῷ δεῖξαι τὰ φαινόμενα ἐν τῷ οὐρανῷ ντα δι' ὁμαλῶν καὶ ἐγκυκλίων κινήσεων ἀποτελούμενα* (Almag. III, c. 2; alma vol. I 165).

Die Darlegung lautet nun bei Ptolemaeus (Halma, 185 flg.) gendermassen:

Es stelle $ABΓΔ$ die Ekliptik dar mit dem Centrum E, und man he rechtwinklig zu einander die beiden Durchmesser $AΓ$ und $BΔ$, dass A und $Γ$ die Punkte r Äquinoktien sind und nebst $Δ$ die Punkte s Sommer- und Winter- lstitiums (A Frühlings-, Sommers-, $Γ$ Herbst-, Winterspunkt). Der centrische Kreis mit dem ittelpunkte Z stelle hin- gen die Sonnenbahn dar, ann ergiebt sich, dass e Sonne für den Be- bachter auf der Erde im entrum E mehr Zeit raucht, um den Bogen $BΓ$ zurückzulegen, als en Bogen $ΓΔA$, des- leichen mehr Zeit, um en Bogen AB zurückzulegen, als den Bogen $BΓ$. Das erklärt ich auf folgende Weise. Allerdings sind die Bogen AB, $BΓ$, $Δ$, $ΔA$ an sich ganz gleich; wenn nun aber das menschliche uge in E die Sonne sich auf dem excentrischen Kreise mit em Mittelpunkte Z bewegen sieht, so entsteht notwendig für das enschliche Auge eine unregelmässige Scheinbewegung, denn dem eobachter auf der Erde scheint die Sonne in den Punkten A, B, $Γ$, $Δ$ er Ekliptik dann zu stehen, wenn sie in ihrer eignen excentrischen ahn in den Punkten $ΘKΛM$ angelangt ist. Da sich aber die Sonne

Fig. 1.



auf ihrem excentrischen Kreis ganz regelmässig bewegt, so braucht sie natürlich verschiedene Zeit, um die verschiedenen Bogen ΘK, $K\Lambda$, ΛM, $M\Theta$ zurückzulegen, während sie nämlich in der ungleichen Zeit auf der Ekliptik die unter sich gleichen Bogen AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA zurückzulegen scheint. Die Beobachtung hatte nun hierfür die Zahlenwerte 94½, 92½, 88 und 90 Tage ergeben, woraus sich die Länge der Bogen in Graden berechnen lässt. Die ὁμαλὴ κίνησις der Sonne beträgt nach den Tabellen von Ptolemaeus in Sexagesimalbrüchen für 94½ Tage:

$90^d =$	88^0	$42'$	$25''$	$49'''$	$48''''$	$46'''''$	$30''''''$
$4^d =$	3^0	$56'$	$33''$	$8'''$	$52''''$	$50'''''$	$4''''''$
$\frac{1}{2}^d =$	0^0	$29'$	$34''$	$8'''$	$36''''$	$36'''''$	$15''''''$
$94\frac{1}{2}$ Tag $=$	93^0	$8'$	$33''$	$7'''$	$18''''$	$12'''''$	$49''''''$.

Für 92½ Tage Sommerszeit:

$90^d =$	88^0	$42'$	$25''$	$49'''$	$48''''$	$46'''''$	$30''''''$
$2^d =$	1^0	$58'$	$16''$	$34'''$	$26''''$	$25'''''$	$2''''''$
$\frac{1}{2}^d =$	0^0	$29'$	$34''$	$8'''$	$36''''$	$36'''''$	$15''''''$
$92\frac{1}{2}$ Tage $=$	91^0	$10'$	$16''$	$32'''$	$51''''$	$47'''''$	$47''''''$.

Ptolemaeus setzt dafür die Werte $93^0 9'$ und $91^0 11'$ in die Rechnung ein, so dass also der Bogen $\Theta K\Lambda$ $184^0 20'$ lang ist; folglich betragen ΘN und $O\Lambda$ zusammen $4^0 20'$, jedes allein die Hälfte, also $2^0 10'$, und da $\Theta\Upsilon$ senkrecht zu NO gezogen ist, beträgt der Bogen $\Theta\Upsilon$ ebenfalls $4^0 20'$ und die dazu gehörige Sehne $\Theta\Upsilon$ $4^p 32'$ $(4^{32}/_{60})$, wenn der Diameter des excentrischen Kreises zu 120 angenommen wird. Demnach $\Theta\tau = 2^p 16' (2^{16}/_{60})$.

Ferner der Bogen $\Theta N\Pi K = 93^0 9'$, der Bogen $\Theta N = 2^0 10'$ und da Bogen $N\Pi = 90^0$, so ergiebt sich für den Bogen

$$\Pi K \; 93^0 9' - (90^0 + 2^0 10'), \text{ d. i. } 59'.$$

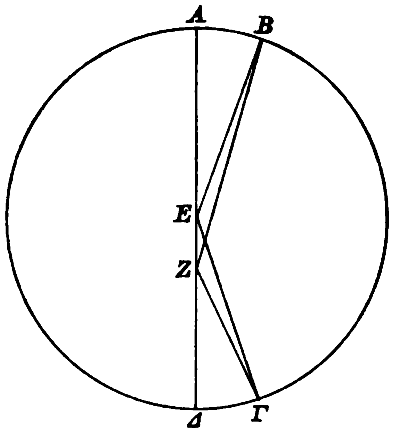
Das Doppelte beträgt der Bogen $K\Pi X$, also $1^0 58'$, wozu eine Sehne $(K\Phi X)$ gehört von $2^p 4' (2^4/_{60})$ Einheiten, deren 120 auf den Durchmesser gehen, also $K\Phi$ und ΦX jedes $1^p 2'$; somit auch $Z\Xi = 1^p 2'$. Nun ist aber auch ΞE bekanntlich $= \Theta\tau$ oder $2^p 16'$; mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes ist nun in dem rechtwinkligen Dreiecke $E\Xi Z$ auch die Hypotenuse ZE, d. h. die Excentricität der Sonnenbahn leicht zu berechnen. Sie beträgt $2^p 29\frac{1}{2}'$, somit vom Radius des excentrischen Kreises (zu 60 Einheiten gerechnet) annähernd $^1/_{24}$.

Somit ist durch die Annahme der Excentricität die wichtige Unterscheidung von wahren und scheinbaren Bewegungen in die Astronomie eingeführt, bei der wir noch etwas länger verweilen müssen. Mit ihrer Hilfe wurde alles, was den Charakter des Unregelmässigen trug, für eine Täuschung der Sinne, für blossen Schein erklärt, und so rettete man das unentbehrliche Dogma von der absoluten Regelmässigkeit der Weltordnung. Der Gedanke ist wahrhaft genial und gereicht seinem Begründer, den wir doch wohl in Hipparch suchen müssen, zu hohem Ruhme.

Nun bedurfte aber die rechnende Astronomie eines sicheren Mittels, um bei einer gegebenen Excentricität einer Planetenbahn das Verhältnis der ὁμαλὴ (ἀκριβὴς) κίνησις zur ἀνώμαλος (φαινομένη) κίνησις festzustellen; sie fand dasselbe in einem rechnerischen Verfahren, das προσθαφαίρεσις genannt wird. Der Ausdruck ist gebildet wie ein anderes bei Ptolemaeus vorkommendes Wort αὐξειομείωσις aus zwei entgegengesetzten Begriffen πρόσθεσις (Addition) und ἀφαίρεσις (Subtraktion), während es im Passowschen Lexikon ganz thörichterweise mit πρόσθε in Verbindung gebracht und mit „das Zuvorwegnehmen" übersetzt wird — wieder ein recht schlagender Beweis von der Unzuverlässigkeit unserer Lexika, wenn es sich um technische Begriffe handelt.

In Figur 2 bezeichnet E den Mittelpunkt des excentrischen Kreises, auf dem sich ein Planet mit stets gleicher Geschwindigkeit bewegt, und Z den Mittelpunkt der Welt, also die Erde, den Standort des Beschauers, so dass also in A das Apogeum, in Δ das Perigeum sich befindet. Nun durchlaufe der Stern auf dem excentrischen Kreise die gleichen Bogen AB und $\Gamma\Delta$ in der gleichen Zeit. Diesen gleichen Bogen entsprechen natürlich auch die gleichen Centriwinkel AEB und $\Gamma E\Delta$. Für den Beobachter in Z wird aber der Bogen AB dem Winkel AZB und der Bogen $\Gamma\Delta$ dem Winkel $\Gamma Z\Delta$ entsprechen, die natürlich ungleich sind, und zwar ist $\Gamma Z\Delta$ um $E\Gamma Z$ grösser als AEB, da die beiden Centriwinkel bei E gleich sind und $\Gamma Z\Delta = \Delta E\Gamma + E\Gamma Z$ ist (Halma S. 171).

Fig. 2.

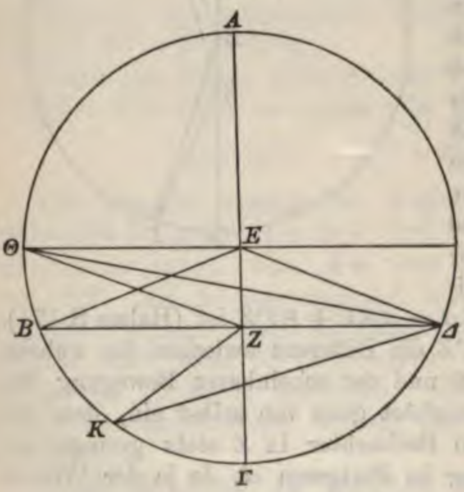


Somit bezeichnet der Winkel $E\Gamma Z$ die Differenz zwischen der wahren Bewegung um den Mittelpunkt E und der scheinbaren Bewegung für den Beobachter in Z. Ebenso leuchtet ganz von selbst ein, dass die Bewegung im Apogeum für den Beobachter in Z stets geringer erscheint als die gleiche Bewegung im Perigeum Δ, da ja der Winkel $\Delta Z\Gamma$ stets grösser ist als der Winkel AZB (Halma S. 172 ἀεὶ συμβέβηκε τὴν ἐλαχίστην κίνησιν κατὰ τὸ ἀπογειότατον παρακολουθεῖν, τὴν δὲ μεγίστην κατὰ τὸ περιγειότατον, ἐπεὶ καὶ πάντοτε ἡ ὑπὸ AZB γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\Delta Z\Gamma$.

Es wird nun die Frage aufzuwerfen sein, wenn der Winkel $E\Gamma Z$ am grössten sein wird, d. h. die Differenz zwischen der *ὁμαλὴ* (*ἀκριβὴς*) und der *φαινομένη* (*ἀνώμαλος*) *κίνησις*. Darauf giebt Ptolemaeus (Halma 174) die Antwort: *Λέγω δὴ πρῶτον, ὅτι καθ' ἑκατέραν αὐτῶν* — nämlich bei der Annahme einer excentrischen Bahn oder eines Epicykels, dessen Mittelpunkt sich um das Weltcentrum bewegt — *ἡ μεγίστη διαφορὰ γίνεται τῆς ὁμαλῆς κινήσεως παρὰ τὴν φαινομένην ἀνώμαλον, καθ' ἣν καὶ ἡ μέση πάροδος τῶν ἀστέρων νοεῖται, ὅταν ἡ φαινομένη διάστασις ἀπὸ τοῦ ἀπογείου τεταρτημόριον ἀπολαμβάνῃ καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀπογειοτάτου μέχρι τῆς εἰρημένης μέσης παρόδου χρόνος μείζων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὸ περιγειότατον. Ὅθεν συμβαίνει κατὰ μὲν τὴν τῶν ἐκκέντρων ὑπόθεσιν ἀεὶ καὶ κατὰ τὴν τῶν ἐπικύκλων δὲ, ὅταν αἱ ἀπὸ τῶν ἀπογείων αὐτῶν μεταβάσεις εἰς τὰ προηγούμενα γίνωνται, τὸν ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον μείζονα γίνεσθαι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὴν μεγίστην διὰ τὸ κατὰ τὸ ἀπόγειον ἐν ἑκατέρᾳ τὴν ἐλαχίστην πάροδον ἀποτελεῖσθαι· κατὰ δὲ τὴν εἰς τὰ ἑπόμενα τῶν ἐπικύκλων τὰς ἀπὸ τοῦ ἀπογείου ποιοῦσαν περιαγωγὰς τῶν ἀστέρων ἀνάπαλιν τὸν ἀπὸ τῆς μεγίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον μείζονα γίνεσθαι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην, διὰ τὸ καὶ ἐνταῦθα κατὰ τὸ ἀπόγειον τὴν μεγίστην πάροδον ἀποτελεῖσθαι.*

Wir haben diese wichtige Stelle im Wortlaut unverkürzt aufgenommen, obwohl sie auch die Epicyklenhypothese behandelt, von der noch später die Rede sein wird. Was die Annahme excentrischer Planetenbahnen betrifft, so wird also in der angeführten Stelle behauptet, die Differenz der wahren und scheinbaren Bewegung, d. h. in der Figur 2 der Winkel $E\Gamma Z$, werde am grössten, wenn die scheinbare Entfernung vom Apogeum 90° beträgt. In Figur 3 sei $AB\Gamma\Delta$ die excentrische Planetenbahn mit dem Centrum E und in Z auf der Erde der Standort des Beobachters, ferner $BZ\Delta$ senkrecht auf dem Durchmesser $AE\Gamma$ und der Planet stehe im Punkte B und Δ, weil dann für den Beobachter in Z die Bogen AB und $A\Delta$ die scheinbare Grösse von 90° haben (die Winkel AZB und $AZ\Delta$ betragen 90°). Dann beträgt die Differenz der scheinbaren, ungleichen

Fig. 3.



vegung und der wahren, gleichmässigen Bewegung in B und Δ am isten, d. h. $EBZ > E\Theta Z$ und $> EKZ$. Der Winkel ΔEB giebt wahre Bewegung an, der Winkel $\Delta ZB\,(= 90^0)$ die scheinbare, und Winkel EBZ die Differenz von beiden; es wird nun behauptet, ss EBZ grösser ist als $E\Theta Z$ und als EKZ. Nachdem die notndigen Hilfslinien gezogen worden sind, ergiebt sich folgendes. In dem Dreieck liegt der grössten Seite der grösste Winkel gegenüber, Z ist aber grösser als $Z\Delta$, folglich Winkel $\Theta\Delta Z > \Delta\Theta Z$; ferner $\Delta\Theta = E\Theta\Delta$, folglich $E\Delta Z\,(= EBZ) > E\Theta Z$.

Anderseits $\Delta Z > KZ$, also auch $ZK\Delta > Z\Delta K$; $EK\Delta = E\Delta K$, glich $E\Delta Z\,(= EBZ) > EKZ$.

Dass aber der Bogen ΔB, von dem es heisst *περιέχει τὸν ἀπὸ ἐλαχίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον*, grösser ist als der gen $B\Gamma$ (*ἥτις περιέχει τὸν ἀπὸ τῆς μέσης κινήσεως ἐπὶ τὴν μεγίστην νον*), bedarf keines weiteren Beweises (Halma S. 176).

An letzter Stelle ist nun noch zu ermitteln, wieviel der Winkel EBZ die scheinbare Bewegung der Sonne beträgt, deren Excentricität oben S. 178 zu $\frac{1}{24}$ Radius EB berechnet worden ist. Denken wir um das Dreieck EBZ einen Kreis geschlagen mit dem Diameter, so beträgt EZ $\frac{1}{24}$ von BE, d. h. wenn BE zu 120 Einheiten genommen wird, gleich 5 Einheiten. Mit Hilfe der Sehnentafeln det man aber, dass dann zur Sehne EZ von 5 Einheiten ein Bogen $2^0 23'$ gehört. Somit beträgt also der Winkel EBZ $2^0 23'$ und Punkt B ist auf der excentrischen wahren Sonnenbahn vom ogeum $92^0 23'$ entfernt und Δ liegt zwar auf dem 270^0 der scheinen Sonnenbahn, aber auf dem $267^0 37'$ der wahren Sonnenbahn alma 188 flg.).

Der Winkel der *προσθαφαίρεσις* (EBZ) wird bei seiner Annäherung das Perigeum Γ und an das Apogeum Δ immer kleiner und beträgt Δ und $\Gamma = 0^0$; auf der Strecke $\Delta\Gamma\,(1^0 - 180^0)$ findet man die einbare Bewegung, indem man den Betrag der Prosthaphaeresis von n Betrage der wahren Bewegung abzieht, während der Betrag für Strecke $\Gamma\Delta\,(181^0 - 360^0)$ zu gleichem Zwecke addiert werden muss.

Das eigentliche Verbum für diese Umrechnung der wahren und einbaren Bewegung vermittelst der *προσθαφαίρεσις* ist *διακρίνειν*. eon im Kommentar zum 3. Buche (S. 171): *τὸ γὰρ τὴν διαφορὰν ς ὁμαλῆς κινήσεως καὶ τῆς ἀνωμάλου λαμβάνειν τὴν ὁμαλὴν ἐστι κρίνειν τῆς ἀνωμάλου.*

Schliesslich werden in einem eignen *κανόνιον τῆς ἡλιακῆς ἀνωμαλίας* einzelnen Beträge der Prosthaphaeresis für die Grade der excentrischen hn zusammengestellt, im ersten und letzten Viertel ($1^0 - 90^0$; $0 - 360^0$) in Abständen von 6 zu 6^0, in den beiden andern Vierteln Abständen von 3 zu 3^0 (Halma S. 201).

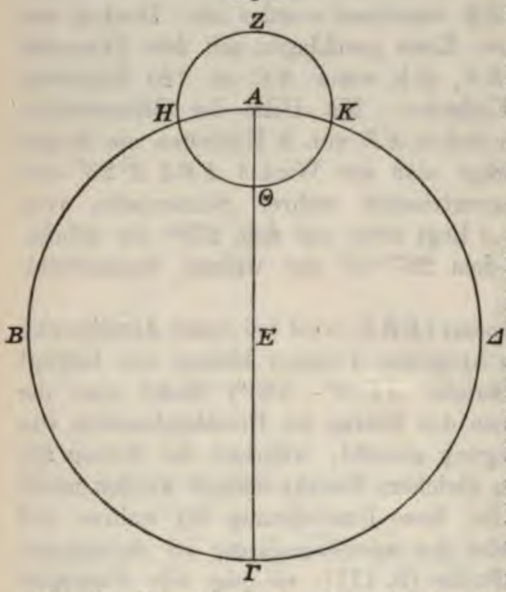
So kann man die sogenannte erste Anomalie der Sonnenbewegung it Hilfe der Excentricität der Bahn erklären. Eine andere Möglichkeit der Erklärung bietet der Epicykel, zu dem wir nunmehr übergehen wollen.

Die Theorie der Nebenkreise geht nach dem ausdrücklichen Zeugnis von Ptolemaeus auf Apollonius zurück und wurde dann vermutlich von Hipparch mit der Lehre von den excentrischen Bahnen verbunden; systematisch hat dann diese Verbindung der beiden Annahmen Ptolemaeus in seiner Lehre von den Planetenbewegungen ausgebildet. Während man nämlich bei der Sonne mit der einen oder der andern Annahme ganz allein auszukommen vermag, wird bei den grösseren Unregelmässigkeiten der anderen Planeten eine Verbindung beider Theorien ganz notwendig.

Zunächst gilt es zu beweisen, dass auch bei der Annahme eines Epicykels in gleicher Zeit scheinbar ungleiche Bogen von einem in regelmässiger Bewegung begriffenen Planeten zurückgelegt werden können.

In Figur 4 stellt der Kreis $AB\Gamma\Delta$ die Ekliptik dar mit dem Mittelpunkte E und dem Diameter $AE\Gamma$, der Kreis $ZH\Theta K$ aber den Epicykel, dessen Mittelpunkt A sich gleichmässig auf der Bahn $AB\Gamma\Delta$ bewegt, während der Planet selbst mit gleicher Geschwindigkeit die Bahn $ZH\Theta K$ durchläuft. Bewegt sich nun das Centrum des Epicykels von A nach B, so wird für das Auge des Beobachters in E der Planet nur dann im Mittelpunkte A zu stehen scheinen, wenn er sich in Z oder Θ (im Apogeum oder Perigeum des Epicykels) befindet, sonst nicht. Hat sich nun gleichzeitig der Epicykel von A nach B bewegt und der Planet selbst auf dem Epicykel von Z nach H, so wird die scheinbare Bewegung um den Bogen AH grösser sein als die wahre von A nach B, oder wenn sich der Planet gleichzeitig nach der entgegengesetzten Richtung von Z nach K bewegt, um den Bogen AK kleiner.

Fig. 4.



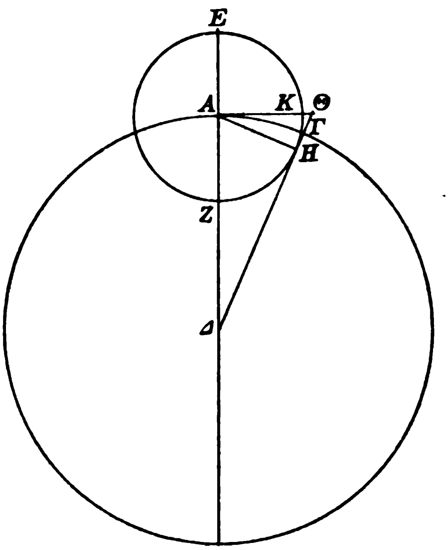
Weiter ersieht man aus der Figur, dass unter der Voraussetzung, Epicykel und Planet bewegen sich gleichzeitig nach derselben Richtung, die scheinbare Bewegung am grössten ist vom Apogeum des Epicykels an; bewegen sich dagegen Epicykel und Planet nach der entgegengesetzten Richtung, so ist die scheinbare Bewegung im Apogeum am kleinsten (Halma S. 171flg.).

Für die Erklärung der scheinbaren Bewegung der Sonne macht es aber thatsächlich nichts aus, ob man die Excentricität der Sonnenbahn oder Bewegung der Sonne auf einem Epicykel annimmt, wenn das nämliche Verhältnis besteht einerseits zwischen Excentricität und Radius des excentrischen Kreises, anderseits zwischen Epicykelradius und Ekliptikradius, und wenn in der gleichen Zeit der Planet den Epicykel und das Epicykelcentrum die Ekliptik in der nämlichen Richtung zurücklegt (Halma S. 173).

Bei der Epicykeltheorie kommt es vor allem darauf an, ob sich der Planet auf dem Epicykel und der Epicykel selbst nach der gleichen oder entgegengesetzten Richtung bewegen; ist das erstere der Fall, so ist die scheinbare Bewegung im Apogeum am grössten (im andern Falle am kleinsten) und die Zeit von der grössten Bewegung bis zur mittleren Bewegung beträgt mehr als die Zeit von der mittleren Bewegung bis zur geringsten Bewegung (im andern Falle ist die Zeit von der geringsten Bewegung bis zur mittleren grösser als die von der mittleren bis zur grössten; Halma S. 174). Nehmen wir an, dass Planet und Epicykel sich nach der nämlichen Richtung bewegen, so haben wir betreffs der Zeitdauer wieder das nämliche Resultat wie bei der Annahme einer excentrischen Bahn.

Es bleibt nun auch für die Epicykelannahme zu beweisen, dass gleichwie bei der Excentricität der Bahnen die grösste Differenz zwischen wahrer und scheinbarer Bewegung eintritt, wenn der scheinbare Abstand vom Apogeum des Epicykels 90° beträgt (Halma S. 174, s. oben).

Fig. 5.



In Figur 5 stelle H den Punkt dar, wo der Stern für den Beschauer in $\varDelta$ 90° vom Apogeum E entfernt zu sein scheint; man ziehe nun $\varDelta H$ und ihre Verlängerung schneide die Hauptbahn in Γ, verbinde ferner H mit A, dann ist $\varDelta H \Gamma$ eine Tangente des Epicykels und $A H \varDelta = 90^{0}$.

Die gleiche (wahre) Bewegung des Planeten vom Apogeum an stellt dar der Winkel EAH, die Differenz zwischen wahrer und scheinbarer Bewegung der Winkel $A \varDelta H$; nun ist aber $EAH = A \varDelta H + AH\varDelta$, also bezeichnet $AH\varDelta$ die scheinbare Bewegung vom Apogeum an und ist nach der Voraussetzung $= 90^{0}$. Demnach ist $\varDelta H \Gamma$ thatsächlich die

Tangente des Epicykels und der Winkel $A\Delta\Gamma$ die grösste mögliche Differenz zwischen wahrer und scheinbarer Bewegung (Halma S. 176 flg.). Ferner ist der Bogen EH, d. h. die Zeit von der geringsten Bewegung bis zur mittleren, falls der Epicykel und der Planet sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, grösser als der Bogen HZ, d. h. die Zeit von der mittleren Bewegung bis zur schnellsten Bewegung, und zwar um das Doppelte von $A\Gamma$. Denn zieht man $AK\Theta$ senkrecht zu $A\Delta$, so sind die Winkel KAH und $A\Delta\Gamma$ gleich und Bogen $KH =$ Bogen $A\Gamma$; um denselben Betrag ist aber Bogen EKH grösser und Bogen HZ kleiner als ein Viertel des Epicykels.

Schliesslich ist auch noch für die Epicyklentheorie zu bemerken, dass das nämliche Gesetz für die Prosthaphaeresis gilt wie bei den excentrischen Bahnen, falls sich Epicykel und Planet in derselben Richtung bewegen; der Betrag wird bei der Epicyklenhälfte Apogeum-Perigeum (1^0—180^0) von der scheinbaren Bewegung abgezogen, um die wahre Bewegung zu ermitteln, bei der andern Hälfte (181^0—360^0) addiert.

Im vierten Kapitel des dritten Buches wird als Ergebnis der Beobachtung festgestellt, dass bei der Sonne bloss die erste Anomalie vorhanden ist und die Zeit von der geringsten Bewegung bis zur mittleren Bewegung mehr beträgt als die Zeit von der mittleren Bewegung bis zur grössten Bewegung. Diese Thatsache ist entweder zu erklären durch die Annahme einer excentrischen Bahn, wie oben ausführlich dargelegt wurde, oder durch die Annahme eines Epicykels, auf dem sich die Sonne selbst in der Richtung nach Westen bewegt. Die Entscheidung trifft Ptolemaeus mit den Worten *εὐλογώτερον δ’ ἂν εἴη περιαφθῆναι τῇ κατ’ ἐκκεντρότητα ὑποθέσει ἁπλουστέρᾳ οὔσῃ καὶ ὑπὸ μιᾶς, οὐχὶ δὲ ὑπὸ δύο κινήσεων συντελουμένῃ* (Halma S. 183 flg.). Das Apogeum der excentrischen Sonnenbahn liegt $65^0 30'$ östlich vom Punkte der Frühlingsäquinoktien (Halma IV, S. 45; in Figur 1 also $AH = 65^0 30'$); vergl. auch Wolf, Geschichte der Astronomie S. 46.

Hier dürfte es nun angezeigt sein, ehe wir zur Betrachtung der übrigen Planetenbahnen übergehen, auf einen Punkt hinzuweisen, der, soviel ich sehen kann, bei der geschichtlichen Betrachtung der Planetenbewegungen in den deutschen Bearbeitungen ganz unberücksichtigt geblieben ist, während ihm allerdings die Franzosen Delambre im Anfange des Jahrhunderts und neuerdings Tannery die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt haben. Ich meine die sogenannte Breitenbewegung der Planeten.

In jedem modernen Handbuche der Astronomie ist die Rede von der Neigung der einzelnen Planetenbahnen gegen die Ekliptik; sie beträgt bei Merkur 7^0, bei Venus $3^0 23'$, bei Mars $1^0 51'$, bei Jupiter $1^0 19'$, bei Saturn $2^0 29'$. Der Mond kommt für uns hierbei nicht in Betracht, da er ja um die Erde sich bewegt, und die Sonne tritt weder nördlich noch südlich bedeutend aus der Ekliptik heraus. Wenn man nun vom

nkte der modernen Erkenntnis aus die Frage aufwirft, wie
h im Altertum die Thatsache erklärte, dass die genannten
ı (und für das Altertum dürfen wir da den Mond nicht aus-
n) sich bald nördlich bald südlich von der Ekliptik bewegen,
ben die deutschen Darlegungen der Ptolemaeischen Welt-
ung die Antwort darauf schuldig, obwohl in der antiken
ır auch diese Frage gründlich behandelt worden ist. Auf sie
sich sogar die ganze erste Hälfte des 13. Buches der Μεγάλη
;, von anderen Stellen ganz zu schweigen. Wir können uns
icke in der deutschen Berichterstattung bloss daraus erklären,
olemaeus in allen Büchern ausser dem 13. von der Neigung
ıetenbahnen gegen die Ekliptik vollständig absieht, weil er in
üchern die Längenbewegung der Planeten behandelt und hierbei
geringen Neigung der Bahnen gegen einander ganz absehen
n glaubt, wie er ausdrücklich mehrmals versichert (Halma II
g. 368. 371). Es wird im folgenden noch eingehender darüber
lt werden.

ıon beim Monde, zu dessen Betrachtung wir nun übergehen,
Sache aber von Bedeutung. Für die folgenden Ausführungen
besondere Dienste geleistet die Dissertation von Paul Kempf
uchungen über die Ptolemaeische Theorie der Mondbewegung"
1878).

as erste Ziel, welches die Astronomen zu erreichen suchten,
nen umfassenden Cyklus zu finden, in welchem sich alle
ıförmigkeiten — des Mondlaufes — periodisch wiederholten.
ldäer gaben dafür die bekannte Periode von 18 Jahren 10 Tagen
lmehr von 6585⅓ Tagen: Hipparch jedoch fand dieselbe nicht
enug und ersetzte sie durch die andere von 126 007 Tagen
le. In diesem Zeitraume fand er 4267 synodische Monate,
erioden der Anomalie, 4612 siderische Umläufe — 7½° und
ınenjahre weniger 7½°. Die beiden ersten Zahlen durch den
chaftlichen Divisor 17 teilend, fand er noch, dass 251 synodische
gerade gleich 269 Restitutionen der Anomalie seien, und
entsprachen nach ihm 5458 synodische Monate 5923 Umläufen
umentes der Breite" (Kempf S. 2 flg.).

us diesen Daten ergeben sich nun leicht die mittleren Be-
n des Mondes": Dauer eines synodischen Monates

$$29^d\ 31'\ 50''\ 8'''\ 20'''',$$

ıd hat in dieser Zeit durchlaufen

$$389^0\ 6'\ 23''\ 1'''\ 24''''\ 2'''''\ 30''''''\ 57''''''',$$

eträgt die mittlere tägliche Bewegung

$$13^0\ 10'\ 34''\ 58'''\ 33''''\ 30'''''\ 30''''''$$

Länge. Es beträgt ferner die mittlere tägliche Bewegung der
ie

$$13^0\ 3'\ 53''\ 56'''\ 29''''\ 38'''''\ 38''''''.$$

Es beträgt ferner die **mittlere** tägliche Bewegung des Arguments der Breite

$$13^0\ 13'\ 45''\ 39'''\ 40''''\ 17'''''\ 19''''''.$$

„Ptolemaeus bringt an diesen Hipparchschen Zahlen nur noch unbedeutende Korrektionen an und entwirft dann mit ihnen Tafeln für die mittleren Bewegungen des Mondes, wonach man leicht für jeden Zeitpunkt den mittleren Mondort berechnen kann.“ (Kempf S. 4.)

„Ptolemaeus unterscheidet in dem Mondlaufe zwei Ungleichheiten; da jedoch die zweite in den Syzygien ganz verschwindet und die erste gerade aus Mondfinsternissen, also aus Beobachtungen in der Opposition bestimmt werden soll, so kann man die Untersuchung derselben auch ohne Kenntnis der zweiten ausführen.“ (S. 4.)

Wir haben bei der Sonne gesehen, dass zur Erklärung der ersten Anomalie sowohl die Annahme einer excentrischen Sonnenbahn wie eines Epicykels, dessen Mittelpunkt um das Weltcentrum rotiert, ganz den gleichen Dienst leisten, zumal da bei der Sonne das Gestirn die Epicykelbahn in derselben Zeit durchläuft als wie das Epicykelcentrum die Bahn um das Weltcentrum. „Da aber der Mond früher an denselben Punkt der Ekliptik wiederkehrt als (in das Apogeum des Epicykels d. h.) in dieselbe Lage zur Apsidenlinie, so wird eine Komplikation in der Darstellung der Mondbewegung durch den excentrischen Kreis notwendig, wenn man sie mit der durch den Epicykel in Einklang bringen will“ (S. 6). Bei der Erklärung der ersten Ungleichheit allein hat aber Ptolemaeus die Wahl zwischen den beiden Annahmen eines Epicykels und eines excentrischen Kreises und er entscheidet sich schliesslich für die epicyklische Hypothese, indem er sich den excentrischen Kreis für die Erklärung der zweiten Ungleichheit vorbehält* (S. 6 flg.).

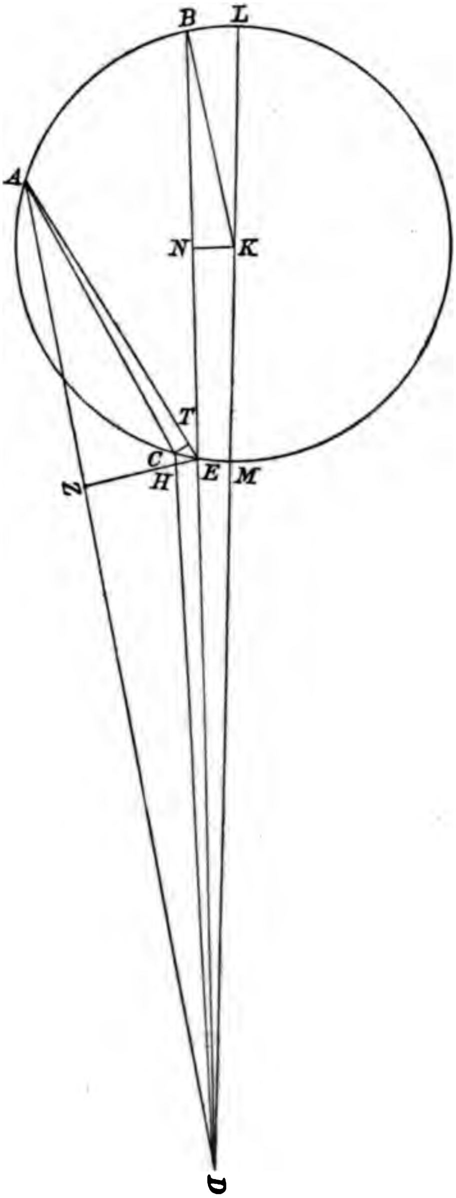
Die Grösse des Epicykelradius wird berechnet mit Hilfe von Mondfinsternissen:

„Die erste der drei babylonischen Finsternisse ereignete sich im ersten Jahre des Mardocempadus in der Nacht vom 29. zum 30. des Monats Thoth. Die Finsternis war eine totale und begann eine gute Stunde nach Aufgang, d. h. etwa $4\frac{1}{2}$ Stunde vor Mitternacht, da die Nacht damals zwölf Stunden dauerte. Die Mitte der Finsternis trat, da sie total war, etwa $2\frac{1}{2}$ Stunden vor Mitternacht in Babylon ein. Alexandrien liegt nach den Angaben der Alten 50^m westlicher als Babylon, also haben wir für die Mitte der Finsternis nach Alexandrinischer Zeit $3^h\,20^m$ vor Mitternacht. Ebenso erhalten wir für die zweite Finsternis die Nacht vom 18. zum 19. Thoth im zweiten Jahre des Mardocempadus. Die Mitte trat für Alexandrien 50^m vor Mitternacht ein. Für die dritte endlich finden wir die Nacht vom 15. zum 16. Phamenoth desselben Jahres $4^h\,20^m$ vor Mitternacht.

* Das folgende angeschlossen an Kempf S. 9—14.

Die Sonnenörter für die drei Finsternisse ergeben sich zu 1ˢ 24° 30′; 11ˢ 13° 45′; 5ˢ 3° 15′. Mithin die Mondörter 174° 30′ 63° 45′; 333° 15′ (Differenz 180°).

Fig. 6.



Für die Zwischenzeiten wischen den einzelnen Finster- issen erhält Ptolemaeus mit erücksichtigung der Zeit- leichung 354ᵈ 2ʰ 34ᵐ und 76ᵈ 20ʰ 12ᵐ (genauer ist 13ᵐ). erechnet man hiermit die ittlere Bewegung des Mondes Länge und Anomalie, so ndet man für die erste wischenzeit 345° 51′ und 6° 25′ (genauer 24), für e andere 170° 7′ (8) und O° 26′. Der wahre Unter- hied in Länge ist aber ischen den beiden ersten ten 349° 15′, zwischen den iden anderen 169° 30′. Es t daher in dem ersten Inter- lle die wahre Bewegung n 3° 24′ grösser als die ittlere und in dem zweiten n 0° 37′ kleiner; d. h. es ist r Unterschied der beiden sten Mittelpunktsgleichungen eich 3° 24; der der beiden nderen gleich 0° 37′.

Es sei nun (Fig. 6) D s Centrum visionis, die Erde : der Epicykelmittelpunkt, rner ABC die Punkte, in elchen sich der Mond wäh- nd der drei Finsternisse be- nd. Dann geht aus dem Ge- gten hervor

$$\angle ADB = 3^\circ 24',$$

$$\angle CDB = 0^\circ 37',$$

lso

$$\angle ADC = 2^\circ 47'.$$

erner Bogen $BA = 360^\circ - 306^\circ 25' = 53^\circ 35'$, Bogen $AC = 150^\circ 26' - 53^\circ 35' = 96^\circ 51'$, Bogen $BC = 150^\circ 26'$. Aus den vorliegenden aten soll das Verhältnis von $DK : LK$ berechnet werden.

Fällen wir von E auf AD und CD die Lote EZ und EH und von C auf AE das Lot CT, dann ist $\angle EDZ = 3^0\,24'$; aus der Sehnentafel ergiebt sich $EZ = 7^p\,7'\frac{DE}{120}$.

Ferner ist

$$\begin{array}{ll} \angle AEB = \tfrac{1}{2}AKB = \tfrac{1}{2}\,53^0\,35' = 26^0\,47'\,30''; \\ \angle EDA \qquad\qquad\qquad\qquad = \ \ 3^0\,24' \\ \hline \qquad\qquad\quad \angle EAD = 23^0\,23'\,30'', \end{array}$$

folglich $EZ = 47^p\,38'\,30\frac{AE}{120}$. Mithin wenn $EZ = 7^p\,7'\frac{DE}{120}$, so ist

$$AE = \frac{120^p}{47^p\,38\tfrac{1}{2}'}\cdot 7^p\,7'\frac{DE}{120} = 17^p\,55'\,32''\frac{DE}{120}.$$

Nun ist $\angle BDC = 0^0\,37'$, also Sehne $EH = 1^p\,17'\,30''\frac{DE}{120}$. $\angle BEC = \frac{150^0\,26'}{2} = 75^0\,13'$, $\angle CDE = 0^0\,37'$, also $\angle ECD = 74^0\,36'$, woraus folgt Sehne $EH = 115^p\,41'\,29''\frac{EC}{120}$. Wenn aber

$$EH = 1^p\,17'\,30''\frac{DE}{120},$$

so ist $EC = 1^p\,20'\,23''\frac{DE}{120}$.

$$\angle AEC = \frac{96^0\,51'}{2} = 48^0\,25\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad TCE = 41^0\,34'\,30''.$$

Also die dazu gehörigen Sehnen

$CT = 89^p\,46'\,13''\frac{CE}{120}$; $ET = 79^p\,37'\,55''\frac{CE}{120}$

$CT = \ 1^p\ \ 0'\ \ 8''\frac{DE}{120}$; $ET = \ 0^p\,53'\,21''\frac{DE}{120}\left(\text{da } EC = 1^p\,20'\,23''\frac{DE}{120}\right)$,

$AE = 17^p\,55'\,32''\frac{DE}{120}$, folglich

$$AT (= AE - ET) = 17^p\,55'\,32'' - 0^p\,53'\,21'' = 17^p\,2'\,11''\frac{DE}{120}.$$

Nun ist $AC^2 = AT^2 + CT^2 = 1^p\,0'16'' + 290^p\,14'19'' = 291^p\,14'35''$; daraus ergiebt sich $AC = 17^p\,3'\,57''\frac{DE}{120}$. Anderseits ist aber auch AC = Bogen $AEC = 89^p\,46'\,14''$ nach der Sehnentafel, wenn der Durchmesser des Epicykels $2r = 120^p$ ist. Aus der Vergleichung dieser beiden Resultate ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} DE = 631^p\,13'\,48'' \\ CE = \quad 7^p\ \ 2'\,50'' \end{array}\right\} \text{wenn } r = 60^p \text{ ist.}$$

Der Bogen über CE wird somit (nach der Sehnentafel) $CAE = 6^{0}44'1''$ ıd da Bogen $BAC = 150^{0}26'$ war, so ist Bogen $BCE = 157^{0}10'1''$ $.50^{0}26' + 6^{0}44'1''$); die Sehne BE mithin $= 117^{p}37'52''$. Es ist es kleiner als der Durchmesser 120, folglich liegt das Centrum des ɔicykels ausserhalb des Kreisabschnittes $BACE$, wie auch in der gur angenommen worden ist.

Nun ist $BD = BE + ED$, ferner $BD \cdot DE = LD \cdot DM$, wenn das Perigeum, L das Apogeum des Epicykels ist, oder

$$BD \cdot DE = DL(LD - LM) = LD^{2} - LD \cdot LM.$$

Anderseits ist $DK^{2} = LK^{2} + LD^{2} - LM \cdot LD = LK^{2} + BD \cdot DE$. ist

$$\begin{array}{lll} BD = & 748^{p}51'20'' & \multirow{2}{*}{\left\{\begin{array}{l}\text{(oben berechnet, desgl. } BE\text{;}\\ \text{die Summe ergiebt } BD\text{).}\end{array}\right.} \\ DE = & 631^{p}13'48'' & \\ \hline \end{array}$$

s Produkt $\quad = 472700^{p}\ 5'\ 32''$ $\quad (BD \cdot DE)$

$$\begin{array}{l} LK^{2} = 3600^{p}\ 0'\ 0'' \\ \hline DK^{2} = 476300^{p}\ 5'\ 32'' \\ DK = 690^{p}\ 8'\ 42'', \end{array}$$

hrend der Epicykelradius $= 60$ ist. Setzen wir daher $DK = 60^{p}$, wird der Epicykelradius $= 5^{p}\ 12{,}978'$, oder wie Ptolemaeus sagt $= 5^{p}\ 13'$ ἔγγιστα.“

Im Anschluss daran wird weiter die Entfernung des Punktes B ɱ Apogeum und die Mittelpunktsgleichung für die zweite Finsternis, o die Winkel LKB und LDB berechnet, $= 12^{0}24'$ und $0^{0}59'$. empf S. 13 u. 14.)

Für unsere gegenwärtigen Zwecke bleibt nun nur noch zu berechnen Excentricität der Bahn des Mondes; das geschieht im vierten Kapitel s fünften Buches. Das Ergebnis beträgt: Excentricität $= 10^{p}\ 19'$, nn der Diameter $= 120$ Einheiten gesetzt wird. (Kempf S. 23 flg.)

Wolf (Handbuch I, S. 452): „Schliesslich ist für Ptolemaeus das gebnis, soweit es für unsere Zwecke in Betracht kommt, dahin sammenzufassen, „dass der Mond den Epicykel in einem anomalistischen ɔnat ($27^{d}\ 13^{h}\ 18^{m}\ 37{,}44^{s}$) durchläuft, während gleichzeitig der Mittelnkt des Epicykels sich in einem zweiten, dem sogenannten deferierenden eise, gleichförmig in einem drakonitischen Monat ($27^{d}\ 5^{h}\ 5^{m}\ 35{,}81^{s}$) ı die Erde bewegt; dabei ist der Deferens gegen die Ekliptik um e zu $5^{0}\ 0'$ bestimmte Neigung der Mondbahn geneigt und seine notenlinie besitzt eine retrograde Bewegung, die dem Überschusse r Bewegung in Beziehung auf die Knoten über die Bewegung in inge entspricht.“ (Ptolemaeus, Hypotheseis, Halma IV S. 46.)

Wolf (Handbuch I, S. 528 flg.): „Wir haben somit gesehen, in elch geschickter Weise Hipparch — und nach seinem Vorgange tolemaeus — erste Theorien der Sonne und des Mondes aufzustellen wussten, um auf diesem Wege das gewünschte Ziel in befriedigender Weise zu erreichen". Dazu das nötige Quellenmaterial Almagest IX, cap. 2 (Halma S. 118/119).

Zunächst berechnet nun Ptolemaeus die *μέση κίνησις* der fünf übrigen Planeten und geht dann im fünften Kapitel (S. 156 flg.) über zu den allgemeinen Voraussetzungen seiner Theorie. Zur Verfügung stehen ihm nur die Excentricität der Planetenbahnen und die Epicykeln. Mit diesen Hilfsmitteln der Erklärung sucht er sich nun in der Weise abzufinden, dass er (S. 157) annimmt, die Planeten selbst bewegen sich auf einem Epicykel, aber nicht wie der Mond von Ost nach West, sondern von West nach Ost, weil ihre schnellste Bewegung im Apogeum stattfindet, nicht im Perigeum wie beim Monde. Anderseits lehrt die Beobachtung der fünf Planeten, „*τὸν ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον μείζονα γιγνόμενον ἀεὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὴν μεγίστην*", und diese Thatsache wird am natürlichsten erklärt durch die Annahme, dass das Centrum des Epicykels sich auf der excentrischen Bahn von West nach Ost bewegt.

Allein auch das genügte Ptolemaeus noch nicht, da er konstatieren musste, „pour chacun de ces astres — die fünf Planeten gemeint — l'inégalité, qu'on trouve par les plus grandes différences d'anomalie Zodiacale, est presque double de l'inégalité qui provient de la grandeur de l'excentricité causée par les progressions de l'épicycle dans les plus grandes et moindres distances (d'où il suit, que le centre des moyens mouvements est placé à une distance qui n'est que la moitié de la ligne qui joint le centre de l'excentrique et du zodiaque ou moitié de l'excentricité) ... Also le cercle exentrique sur lequel est toujours porté le centre de l'épicycle est décrit d'un centre qui est le point du milieu entre le centre du zodiaque et celui qui rend uniforme la circonvolution de l'épicycle; parceque pour chacun de ces astres ... (Fortsetzung vorhin)" — S. 210 Halma; vergl. S. 158. Dazu Wolf (Handbuch S. 530): „Ptolemaeus entschloss sich, den bisherigen excentrischen Kreis zwar als Equans beizubehalten, und sich einen Punkt in demselben gleichförmig bewegen zu lassen — dagegen als Deferens oder als Träger des Epicykels einen zweiten jenem gleichen Kreis einzuführen, dessen Centrum die Mitte zwischen Erde und Centrum des Equans einnahm und von dem aus er je die für eine gewisse Zeit im Equans erhaltene Lage m nach M auf den Deferens übertrug. Er scheint allerdings nicht bemerkt zu haben, dass er durch diese Konstruktion das bis dahin so ängstlich festgehaltene Grundprinzip verletzte; denn wenn auch die $\angle\, m'cm''$ und $m''cm'''$ den Zwischenzeiten proportional angenommen werden, so

Fig. 7.

ind es eben die $\angle M'CM''$ und $M''CM'''$ nicht mehr, und es ist also ie Bewegung im Deferens nicht mehr eine gleichförmige."

Nur noch zwei Punkte verdienen eine Hervorhebung, dass nämlich las Apogeum und Perigeum der excentrischen Kreise an der Bewegung ler Fixsternsphäre nach Osten hin (1^0 in 100 Jahren) teilnehmen, sowie lass noch eine besondere Thatsache beim Merkur vorliegt, da derselbe ›ei einem Umlaufe um die Erde zweimal im Perigeum gerade wie der Mond beobachtet wurde. Der letztere Umstand führte zu der Annahme, lass beim Merkur das Centrum des Deferens nicht festliegt, sondern während eines Umlaufes des Planeten um die Erde gleichzeitig in der Richtung von Ost nach West einen Kreis um den Mittelpunkt des Equans beschreibt (also C rotiert von Ost nach West um c). — Halma S. 158 flg., S. 171 flg., 175.

Des weiteren stellt dann Ptolemaeus schliesslich fest, in welchem Teile das Apogeum der Planetenbahnen anzusetzen ist, wieviel ihre Excentricität beträgt und wie gross der Radius des betreffenden Epicykels ist.

Apogeum	Excentricität	Radius des Epicykels.
♂ $3^s 11^0 45'$	$\frac{6}{60}$: 0,1 (Tannery 0,2)	$\frac{39\frac{1}{2}}{60} R = 0{,}65833\ldots$
♃	$\frac{2\frac{3}{4}}{60}$: 0,0458333	$\frac{11\frac{1}{2}}{60} R = 0{,}19166\ldots$
♄	$\frac{3\frac{5}{12}}{60}$: 0,05694 (2)	$\frac{6\frac{1}{2}}{60} R = 0{,}10833\ldots$
☿	$\frac{6}{60}$: 0,1 (Tannery 0,05)	$\frac{22\frac{1}{2}}{60} R = 0{,}375$ (Tannery anders)
♀	$\frac{2\frac{1}{2}}{60}$: 0,05 (Tannery anders)	$\frac{43\frac{1}{10}}{60} R = 0{,}71944$ (Tannery anders).

In den Erörterungen, die sich auf die Bewegung der Planeten (l) in der Länge beziehen, lässt Ptolemaeus die Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik ganz ausser acht, weil der geringe Betrag derselben für jene Frage so gut wie gar nicht in Betracht kommt (Halma II S. 368: *μηδεμιᾶς ὡς ἔφαμεν διὰ τοῦτο γινομένης ἀξιολόγου παραλλαγῆς περὶ τὴν κατὰ μῆκος πάροδον ἢ τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀνωμαλιῶν μέχρι γε τῶν τηλικούτων ἐγκλίσεων*). So erklärt es sich wohl, dass häufig in geschichtlichen Betrachtungen der Ptolemaeischen Theorie von der Bewegung der Planeten in der Breite gar nicht gesprochen wird; gleichwohl muss sich doch jedem, der in den wichtigsten Annahmen der modernen Astronomie bewandert ist, der Gedanke aufdrängen: wie suchte man denn im Altertume die Erscheinungen zu erklären, die sich für uns aus der Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik ergeben, d. h. den Stand der Gestirne bald nördlich bald südlich von der Ekliptik? In den Büchern 9—12 wird immer angenommen, die einzelnen Ebenen der Planetenbahnen fallen mit der Ekliptik zusammen, dabei hebt aber Ptolemaeus zu wiederholten Malen ausdrücklich hervor, diese Annahme widerspreche der Wirklichkeit, man könne sie indessen einstweilen gelten lassen, weil der geringe Betrag der Neigung kaum in Betracht komme.

Wie gesagt, Ptolemaeus hat alles gethan, um einer falschen Annahme vorzubeugen, im 13. Buche aber will er in der ersten Hälfte das nachholen, was bisher ausser acht geblieben ist, nämlich die Bewegung der Planeten in der Breite (*κατὰ πλάτος*) feststellen.

Über diese neue Bewegung, deren Betrachtung uns nun im folgenden beschäftigen soll, habe ich eine eingehendere Erörterung nur bei Delambre (im zweiten Bande seiner L'Histoire de l'Astronomie) und bei Tannery (Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne) gefunden, die aber nicht in jeder Hinsicht befriedigen; ausserdem kommt auch noch in Betracht, dass Tannery seinen Auseinandersetzungen nicht die *Μεγάλη σύνταξις*, sondern die *Ὑποθέσεις* zu Grunde gelegt hat, die hier in einem Hauptpunkte merkwürdigerweise vom astronomischen Hauptwerke abweichen. Überdies findet sich zu dem betreffenden Abschnitte in der Halmaschen Ausgabe folgende Note von Delambre (S. 25): Cette traduction, qui rend fidèlement le sens de l'auteur, en abrégeant ses longueurs, modifie quelques unes de ses expressions trop vagues, trop incomplettes et trop obscures. Tout ce chapitre est difficile à entendre, impossible à retenir. On ne peut se faire une idée bien précise de toute cette théorie qu'en examinant les tables où elle est renfermée. Cette remarque s'applique plus ou moins à tout ce qui suit jusqu'aux tables."

Anderseits findet sich, gleichsam um die verwickelte Schwierigkeit seiner Theorie zu entschuldigen, ein höchst charakteristischer Erguss bei Ptolemaeus, den Delambre in seinem geschichtlichen Werke frei so wiedergiebt (S. 395): Que personne n'imagine que ces hypothèses soient difficiles, en voyant les embarras de nos machines; car il ne faut pas comparer les choses humaines aux divines — Alors tout nous paraîtra plus simple que ce qui le paraît le plus parmi nous, parce qu'il sera impossible d'y soupçonner le moindre travail ni la moindre difficulté."

Je dunkler und schwerverständlicher die Auseinandersetzungen von Ptolemaeus sind, um so grösserer Vorsicht wird es bedürfen bei der Prüfung des Ptolemaeischen Textes.

Wir haben auszugehen von den Beobachtungen und sorgfältig darauf zu achten, welche Schlüsse für die Theorie daraus abgeleitet werden.

1. Beobachtung (Halma II S. 368).

Wenn eine genaue Berechnung (*διευκρινημένος*) des Punktes, wo sich das Epicykelcentrum auf der excentrischen Bahn befindet, sowie eine genaue Berechnung, wo der Planet sich auf seinem Epicykel befindet, ergiebt, dass beide Male der Abstand 90^0 (*τεταρτημόριον*) beträgt, einmal vom Apogeum bis Perigeum der excentrischen Bahn (*βόρειον καὶ* *νότιον πέρας τοῦ ἐκκέντρου*), das andere Mal vom Apogeum-Perigeum des Epicykels (*ὁ δὲ τοῦ οἰκείου ἀπογείου*), dann erscheint der Planet genau in der Ekliptik.

Daraus ergiebt sich erstens: die Ebenen der Ekliptik und des excentrischen Kreises sind so gegeneinander geneigt, dass der Mittelpunkt des Zodiakus auf der gemeinsamen Geraden liegt, in der sich die beiden Ebenen schneiden, und dass diese senkrecht steht zur Linie Apogeum-Perigeum der excentrischen Bahn, zweitens: die Ebenen des Epicykels und der excentrischen Bahn sind so gegeneinander geneigt, dass die Gerade, in der sie sich schneiden, senkrecht steht zur Linie Apogeum-Perigeum des Epicykels.

Diese Annahme gilt für alle fünf Planeten.

2. Beobachtung (Halma II S. 368: *Πάλιν δὲ ἐπὶ μὲν τῶν τριῶν* etc.).

Wenn Mars, Jupiter, Saturn sich in dem *ἀπογειότερον τμῆμα* des excentrischen Kreises befinden, stehen sie nördlich von der Ekliptik und zwar am meisten nördlich im Perigeum des Epicykels; wenn sie sich in dem *περιγειότερον τμῆμα* des excentrischen Kreises befinden, stehen sie südlich von der Ekliptik (dazu fügt Theon in seinem Kommentar S. 412 ergänzend: *πάλιν τῷ πλείστῳ νοτιώτεροι, ὅταν ἐν τοῖς περιγειοτέροις τῶν ἐπικύκλων τυγχάνωσιν, ἤπερ πρὸς τοῖς ἀπογειοτέροις*). Ferner beobachtet man, dass die *βορειότατα πέρατα* (das können aber wohl nicht die Linien Apogeum-Perigeum sein — zur Berichtigung von S. 192 —) bei der Bahn des Saturn und Jupiter im Anfange der Krebsscheren liegen, bei Mars am Ende des Krebses und zwar *σχεδὸν περὶ αὐτὸ τὸ ἀπογειότατον*.

Daraus ergiebt sich, dass die excentrischen Bahnen an den entsprechenden Teilen des Zodiakus nach Norden geneigt sind, die entgegengesetzten nach Süden und dass die Perigeen der Epicyklen nach derselben Seite geneigt sind wie die excentrischen Bahnen, da wo sie sich befinden; nämlich wie Theon S. 412 erläuternd hinzufügt *ἐπὶ μὲν τῶν βορείων τοῦ ἐκκέντρου ἐπὶ τὰ βόρεια, ἐπὶ δὲ τῶν νοτίων ἐπὶ τὰ νότια*. Die Durchmesser der Epicykeln aber, die senkrecht stehen zum Epicykeldurchmesser Apogeum-Perigeum, bleiben stets der Ekliptik parallel.

3. Beobachtung (Halma S. 369 *Ἐπὶ δὲ Ἀφροδίτης καὶ Ἑρμοῦ* etc.).

Wenn Venus und Merkur im Apogeum oder Perigeum des excentrischen Kreises sich befinden, dann unterscheiden sich die Planetenbewegungen im Apogeum und im Perigeum des Epicykels hinsichtlich der Breite (*κατὰ πλάτος*) voneinander nicht, sondern stets um den gleichen Betrag finden sie statt nördlicher bei der Venus, südlicher bei dem Merkur.

Für den Fall der grössten Elongation (*κατὰ τὰς μεγίστας ἀποστάσεις*) des Planeten im Apogeum oder Perigeum des excentrischen Kreises beträgt der Unterschied in der Breite bei der östlichen und westlichen

Elongation ziemlich viel, und zwar steht im Apogeum des excentrischen Kreises ♀ nördlicher als der excentrische Kreis, im Perigeum südlicher als der excentrische Kreis: bei ☿ ist es umgekehrt. Ich lese die offenbar korrupte Stelle S. 369 flg. so: *Αἱ δὲ κατὰ τὰς μεγίστας ἀποστάσεις αὐτῶν πάροδοι ἀλλήλων μὲν τῷ πλείστῳ διαφέρουσι τουτέστιν αἱ ἑῷοι τῶν ἑσπερίων κατὰ τὰ ἀπόγεια καὶ περίγεια* (S. 370) *τῆς παρὰ* (Theon liest dafür *περὶ*) *τὸν ἔκκεντρον διαφορᾶς εἰς τὰ ἐναντία τῷ ἴσῳ πάλιν τῆς ἑπομένης καὶ ἑσπερίου μεγίστης ἀποστάσεως* — d. h. bei der grössten östlichen und westlichen Elongation — *ἐπὶ μὲν τοῦ τῆς Ἀφροδίτης κατὰ τὸ ἀπόγειον τοῦ ἐκκέντρου βορειοτέρας γινομένης καὶ κατὰ τὸ περίγειον νοτιωτέρας, ἐπὶ δὲ Ἑρμοῦ τὸ ἐναντίον κατὰ τὸ ἀπόγειον νοτιωτέρας καὶ κατὰ τὸ περίγειον βορειοτέρας.*

Ergiebt die genaue Berechnung, dass das Epicykelcentrum sich im Knoten der Ekliptik und der excentrischen Bahn befindet, dann ergeben sich zwei Möglichkeiten: 1. der Planet befindet sich auf seinem Epicykel einen Quadranten entfernt vom Apogeum und Perigeum seines Epicykels — grösste Elongation — und erscheint dann beide Male in der Ekliptik; 2. der Planet befindet sich im Apogeum oder Perigeum des Epicykels, dann ist beide Male der Breitenunterschied sehr beträchtlich, da ♀ im Knoten des Halbkreises 1^0-180^0 vom Apogeum des excentrischen Kreises an gerechnet (*ἐπὶ τοῦ κατὰ τὸ ἀφαιρετικὸν ἡμικύκλιον συνδέσμου*) südlich von der Ekliptik steht, im Knoten des Halbkreises 180^0-360^0 nördlich von der Ekliptik; entgegengesetzt ist es bei ☿ (er steht im *ἀφαιρετικὸν ἡμικύκλιον*-Knoten nördlich, im entgegengesetzten südlich von der Ekliptik).

Die hier aufgeführten Beobachtungen führen zu folgendem Ergebnis (S. 370: *ὥστε καὶ ἐκ τούτου συνάγεσθαι, διότι αἱ μὲν τῶν ἐκκέντρων ἐγκλίσεις* etc.): bei ♀ und ☿ bewegen sich entsprechend den Umläufen der Epicyklen auch die excentrischen Bahnen auf und nieder und zwar fallen sie, wenn der Epicykel in die Knoten kommt, mit der Ebene der Ekliptik zusammen, aber in dem Apogeum und Perigeum des excentrischen Kreises wird der Epicykel der Venus stets am weitesten nach Norden gehoben und der Epicykel des Merkur am tiefsten nach Süden hinabgedrückt. Dabei wird im Epicykel der Diameter Apogeum-Perigeum am meisten geneigt gegen den excentrischen Kreis in den beiden Knoten, der dazu senkrecht stehende Diameter des Epicykels 90^0-270^0, an den die grösste Elongation geknüpft ist, am meisten geneigt zu der excentrischen Bahn im Apogeum und Perigeum des excentrischen Kreises. Jene Neigung ist die *ἔγκλισις*, diese die *λόξωσις*.

Das ist im wesentlichen der Inhalt des ersten Kapitels vom 13. Buche der *Μεγάλη σύνταξις*. Im dritten Kapitel — auf das zweite ist noch später zurückzukommen — wird dann die Grösse der Neigung der excentrischen Bahn gegen die Ekliptik und des Epicykels gegen die excentrische Bahn berechnet und zwar auf „*τοῦ διὰ τῶν πόλων* *τοῦ ἐγκλινομένου καὶ ὀρθοῦ πρὸς τὸ τοῦ διὰ μέσων ἐπίπεδον γραφομένου μεγίστου κύκλου* (S. 376).

1. (S. 376: *ὅταν μὲν γὰρ κατὰ τὰ ἀπόγεια καὶ περίγεια* etc.)

Die Centren der Epicykeln von ♀ und ☿ befinden sich im Apogeum und Perigeum der excentrischen Bahn und der Planet selbst steht im Apogeum oder im Perigeum seines Epicykels, dann sollte der Abstand der Planeten von der Ekliptik beide Male gleichviel betragen (bei ♀ nach Norden, bei ☿ nach Süden). Beobachtungen haben ergeben, dass ♀ stets ca. $^1/_6{}^0$ nördlich von der Ekliptik steht, ☿ stets $^3/_4{}^0$ südlich von des Ekliptik. Da nun bei den gemachten Annahmen der Planet selbst, im Apogeum-Perigeum seines Epicykels befindlich, in der Ebene des excentrischen Kreises steht, so bezeichnen natürlich jene Werte die Neigung der excentrischen Bahnen von ♀ und ☿ gegen die Ekliptik.

2. (S. 376: *Περὶ δὲ τὰς μεγίστας τοῦ ἡλίου διαστάσεις* etc.)

Die Centren der Epicykeln von ♀ und ☿ befinden sich im Apogeum und Perigeum der excentrischen Bahn und der Planet selbst befindet sich in der grössten Elongation, d. h. also an den Enden des Epicykeldurchmessers 90°—270°; dann beträgt der Unterschied in dem nördlichen und südlichen Abstande von der Ekliptik im Mittel etwa 5°. Die Hälfte davon ($2^1/_2{}^0$) ergiebt die *λόξωσις* des Epicykeldurchmessers 90°—270° im Apogeum und Perigeum des excentrischen Kreises.

3. (S. 377: *ὅταν δὲ κατὰ τοὺς συνδέσμους καὶ τὰς* etc.)

Das Centrum des Epicykels befindet sich in den beiden Knoten und Venus steht im Apogeum des Epicykels, denn steht sie 1° nördlich oder 1° südlich von der Ekliptik, je nachdem das Epicykelcentrum in dem einen oder in dem andern Knoten sich befindet; steht dagegen Venus im Perigeum des Epicykels unter der nämlichen Voraussetzung, so beträgt der Abstand von der Ekliptik $6^1/_3{}^0$ nördlich oder südlich, je nach dem Knoten, in dem sich das Epicykelcentrum befindet. Daraus ergiebt sich, dass die Neigung des Epicykeldurchmessers Apogeum-Perigeum (*ἔγκλισις*) gegen die in den Knoten zusammenfallenden Ebenen des excentrischen Kreises und der Ekliptik $2^1/_2{}^0$ beträgt.

Steht Merkur unter der gleichen Voraussetzung im Apogeum des Epicykels, so steht er südlicher oder nördlicher von der Ekliptik, je nach dem Knoten, in dem sich das Epicykelcentrum befindet, $1^3/_4{}^0$; im Perigeum des Epicykels 4°.

4.

Schon oben ist dargelegt worden, dass unter der gleichen Voraussetzung, wenn der Planet in der grössten Elongation am Ende des Epicykeldiameters 90°—270° steht, der Planet alsdann in der Ekliptik sich befindet (d. h. die *λόξωσις* ist gleich Null). Vergl. S. 368: *ὅταν* *ὅ τε τοῦ διευκρινημένου μήκους καὶ ὁ τῆς διευκρινημένης ἀνωμαλίας ἀριθμὸς ἑκάτερος ἅμα τεταρτημόριον ἔγγιστα ἀπέχῃ ... κατ' αὐτοῦ τοῦ περὶ τὸν διὰ μέσων ἐπιπέδου ·φαίνεσθαι τοὺς ἀστέρας*).

Wir müssen noch einmal zurückkommen auf die Bewegung der beiden sich rechtwinklig schneidenden Diameter des Epicykels Apogeum-Perigeum und (senkrecht dazu) 90°—270° bei allen fünf Planeten bez. bei ♀ und ☿. Im zweiten Kapitel wird deren Bewegung auf und nieder ausführlich dargestellt, dabei heisst es, die Epicykel-Diameter Apogeum-Perigeum kommen an einem bestimmten Punkte genau in die Ebene des excentrischen Kreises zu liegen und dann *παραφέρονται ὑπὸ κυκλίσκων παρακειμένων φέρ' εἰπεῖν τοῖς περιγείοις αὐτῶν πέρασι, συμμέτρων μὲν τῇ τηλικαύτῃ* (S. 372) *πρὸς τὸ πλάτος παραχωρήσει, ὀρθῶν δὲ πρὸς τὰ τῶν ἐκκέντρων ἐπίπεδα καὶ τὰ κέντρα ἐχόντων ἐν αὐτοῖς, περιστρεφομένων δ' ὁμαλῶς καὶ ἀκολούθως ταῖς κατὰ μῆκος παρόδοις, ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν κατα τὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων αὐτῶντε καὶ τῶν ἐπικύκλων ἀρχῆς ὡς πρὸς τὰς ἄρκτους καθ' ὑπόθεσιν* („ils portent le planète vers les ourses, par exemple") *καὶ συμπαραγόντων τὰ ἐπίπεδα τῶν ἐπικύκλων, κατὰ μὲν τὴν ἐπὶ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον στροφὴν ἐπὶ τὸ βορειότατον δηλονότι πέρας, κατὰ δὲ τὴν ἑξῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἐκκέντρου πάλιν ἐπίπεδον, κατὰ δὲ τὴν ἐπὶ τὸ τρίτον ἐπὶ τὸ νοτιώτατον πέρας, κατὰ δὲ τὴν ἐπὶ τὸ λεῖπον ἀποκατάστασιν ἐπὶ τὸ τῆς ἀρχῆς ἐπίπεδον.* Dieses Auf- und Niedergehen des Epicykel-Diameters Apogeum-Perigeum beginnt mit dem Aufsteigen aus der Ebene des excentrischen Kreises nach Nord bei ♄♃♂ im aufsteigenden Knoten, bei ♀ im Perigeum der excentrischen Bahn, bei ☿ im Apogeum.

Der zum Diameter Apogeum-Perigeum senkrecht stehende Epicykel-Diameter 90°—270° bleibt bei ♄♃♂ stets parallel zur Ekliptikebene; anders bei ♀ und ☿, wo ebenfalls an diesen Diameter die grösste Elongation geknüpft ist: (S. 372) *ἐπὶ δὲ Ἑρμοῦ καὶ Ἀφροδίτης καὶ αὐταὶ γινόμεναι πάλιν ἀπό τινος ἀρχῆς ἐν τῷ τοῦ διαμέσων ἐπιπέδῳ παραφέρονται ὑπὸ κυκλίσκων παρακειμένων τοῖς ἑπομένοις φέρ' εἰπεῖν αὐτῶν πέρασι, συμμέτρων μὲν πάλιν τῇ τηλικαύτῃ κατὰ πλάτος παραχωρήσει, ὀρθῶν δὲ πρὸς τὸ τοῦ διὰ μέσων ἐπίπεδον καὶ τὰ κέντρα ἐχόντων ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν* (S. 373) *παραλλήλων τῷ τοῦ διὰ μέσων ἐπιπέδῳ, περιστρεφομένων δὲ ἰσοταχῶς τοῖς ἄλλοις ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν κατὰ τὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τε καὶ τῶν ἐπικύκλων ἀρχῆς ὡς πρὸς τὰς ἄρκτους πάλιν καθ' ὑπόθεσιν καὶ συμπαραγόντων τὰ πρὸς ἑσπέραν πέρατα τῶν ἐκκειμένων διαμέτρων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν δηλονότι τῇ προειρημένῃ.* Bei der Venus beginnt das Aufsteigen des östlichen Endes vom Diameter 90°—270° bei dem Knoten *κατὰ τὸ προσθετικὸν ἡμικύκλιον*, beim Merkur im Knoten *κατὰ τὸ ἀφαιρετικόν* (sc. *ἡμικύκλιον*; jenes der Halbkreis vom Perigeum bis zum Apogeum der excentrischen Bahn, dieses der Halbkreis vom Apogeum bis zum Perigeum).

Bezeichnet $\varkappa$ das Apogeum, λ das Perigeum vom Epicykeldiameter Apogeum-Perigeum, ferner μ das östliche, ν das westliche Ende des Epicykeldiameter 90°—270°, so ergiebt sich für

Venus. Apogeum des excentrischen Kreises: $\varkappa\lambda$ in der Ebene des excentrischen Kreises und bei $\mu\nu$ die grösste λόξωσις (μ nördlich, ν südlich von der excentrischen Kreisbahn).

Absteigender Knoten (*κατὰ τὸ ἀφαιρετικὸν ἡμικύκλιον*): $\varkappa$ südlich, λ nördlich vom excentrischen Kreise (grösste ἔγκλισις); $\mu\nu$ ganz in der Ebene des excentrischen Kreises (λόξωσις = 0°).

Perigeum des excentrischen Kreises: $\varkappa\lambda$ in der Ebene des excentrischen Kreises (ἔγκλισις = 0°), $\mu\nu$ weist die grösste λόξωσις auf (μ südlich, ν nördlich von der excentrischen Bahn).

Aufsteigender Knoten (*κατὰ τὸ προσθετικὸν ἡμικ.*): grösste ἔγκλισις bei $\varkappa\lambda$ ($\varkappa$ nördlich, λ südlich von der excentrischen Bahn), $\mu\nu$ in der Ebene des excentrischen Kreises (λόξωσις = 0°).

Für **Merkur** hat man nur überall die Begriffe „nördlich" und „südlich" für die Bezeichnungen $\varkappa\lambda\mu\nu$ zu vertauschen.

Mit der gegebenen Erklärung stimmt auch überein der Kommentar von Theon zu der betreffenden Stelle und die dazu gehörigen Erläuterungen von Delambre (Hist. de l'Astron. anc. II, S. 615).

Es entsteht nun die Frage, wie wir uns die κυκλίσκοι denken sollen, die, wie es scheint, mit ihrer vollen Umdrehung (περιφορά) um ein noch unbestimmtes Centrum die Auf- und Niederbewegung der Epicykelebene hervorrufen. Das eine Mal sind sie angebracht (παράκεινται) am Perigeumsende des Diameters Apogeum-Perigeum, stehen senkrecht zur Ebene des excentrischen Kreises, die sie halbiert; das andere Mal am östlichen Ende des Diameters 90°—270°, stehen senkrecht zur Ebene der Ekliptik, die sie ebenfalls halbiert. Ptolemaeus scheint im zweiten Kapitel sagen zu wollen, dass die Bewegung der beiden Diameter aus der Ebene des excentrischen Kreises das eine Mal, sowie aus der Ebene der Ekliptik das andere Mal bis zur höchsten nördlichen oder südlichen ἔγκλισις (beim Diameter Apogeum-Perigeum) oder λόξωσις (bei dem Diameter 90°—270°) — eine Bewegung, die er richtig παραφορά nennt, d.h. auf und nieder — bewirkt wird durch eine volle Bewegung des κυκλίσκος um die Länge eines Quadranten des κυκλίσκος. Denn er spricht mit Beziehung auf den κυκλίσκος von einer Bewegung, die er περιφορά nennt, d.h. doch wohl eine volle Kreisbewegung um einen Mittelpunkt. Nun bewegt sich aber der Epicykel auf einem Kreise, der excentrisch zur Ekliptik ist, so dass die vier Teile der Bahn Apogeum bis zum absteigenden Knoten, absteigender Knoten bis zum Perigeum, Perigeum bis zum aufsteigenden Knoten, aufsteigender Knoten bis zum Apogeum ungleich werden in Beziehung auf die Ekliptik. Andrerseits sollen die Hebung und Senkung der beiden Diameter mit Beziehung auf die Ebenen des excentrischen Kreises und der Ekliptik die Folge einer ganz gleichmässigen

Bewegung (ὁμαλὴ κίνησις) des κυκλίσκος sein, und so bleibt nichts anderes übrig, als dass der κυκλίσκος bei seiner περιφορά sich nicht um sein eignes Centrum bewegt, sondern um einen anderen Punkt, dessen Abstand vom Centrum des κυκλίσκος genau entspricht dem Abstand des Mittelpunktes vom excentrischen Kreise vom Mittelpunkte des Zodiakus. Nur so kann erreicht werden, dass die vier gleichen Viertel des κυκλίσκος in ungleichen Zeiten die betreffenden Diameter um gleichen Betrag heben und senken mit Beziehung auf die Ebenen der excentrischen Planetenbahn und der Ekliptik, gleichwie durch die Excentricität der Planetenbahn bewirkt wird, dass der Planet auf seinem Epicykel gleiche Strecken der Ekliptik in ungleichen Zeiten durchläuft.

So ist schliesslich Ptolemaeus auch zur Annahme einer excentrischen Bewegung gezwungen beim κυκλίσκος, und wir verstehen es, dass ihn selbst angesichts solcher Kompliziertheit seiner Theorie der Breitenbewegung ein gewisser Schrecken befallen hat, dem er eben in der oben angeführten Stelle (S. 192) lebhaften Ausdruck verliehen hat.

Wir verstehen nun auch, warum er in seiner späteren Schrift Ὑποθέσεις (Halma IV) diese verwickelte Theorie durch eine neue, einfachere ersetzt hat, die Tannery in seinen Recherches etc. ganz allein berücksichtigt hat.

In dieser Schrift ist in Beziehung auf die Breitenbewegung zwischen den fünf Planeten kein Unterschied gemacht, sondern für alle folgendes System aufgestellt.

Zunächst ist die Rede von einer Epicykelsphäre, in der wieder drei κυκλίσκοι unterschieden werden. In der Ebene der geneigten (λοξός) excentrischen Bahn liegt der erste κυκλίσκος, der sich nicht bewegt, sondern festliegt, so dass die verlängerte Linie zwischen dem Epicykelcentrum und dem Centrum des Equans (περὶ ὃ κινεῖται ἰσοταχῶς) immer in denselben Punkten den κυκλίσκος schneidet, nämlich im Apogeum und im Perigeum des Epicykels. Ein zweiter κυκλίσκος, der mit dem ersten allem Anschein nach zusammenfällt, obwohl das nicht direkt gesagt wird, ist in beständiger, gleichmässiger Bewegung begriffen um das Epicykelcentrum in der Richtung von Ost nach West. Ein dritter κυκλίσκος ist gegen die Ebene des zweiten κυκλίσκος geneigt um so viel, als wie die Neigung des Epicykels gegen die Ebene des excentrischen Kreises in der ersten Theorie von Ptolemaeus beträgt; auf diesem dritten κυκλίσκος bewegt sich nun der Planet in der Richtung von West nach Ost.

Wie Ptolemaeus dazu gekommen ist, für die Erklärung der Breitenbewegung der Planeten jene erste, verwickelte Theorie preiszugeben und die vereinfachte der Ὑποθέσεις zu setzen, vermögen wir nicht zu sagen.

Recensionen.

Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Von Angelo Genocchi. Herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. Leipzig 1898/99.

Das im Jahre 1884 von Peano neu herausgegebene Genocchische Werk „Calcolo differenziale e prinzipii di calcolo integrale" fand von vornherein in unseren mathematischen Kreisen eine äusserst freundliche Aufnahme und günstige Beurteilung. In ihm wurde zum ersten Male mit Hilfe der einfachen Funktionen

$$f(x, y) = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx)$$

die Fehlerhaftigkeit der alten Theorie über die Maxima und Minima der Funktionen zweier Veränderlichen klargestellt und sodann eine einwandfreie Theorie dieses Gegenstandes entwickelt. Wie Herr A. Mayer in dem Vorwort zu der deutschen Ausgabe bemerkt, können alle die schönen und zum grossen Teile fundamentalen Arbeiten von Scheeffer, Stolz und V. von Dantscher über die Theorie der Maxima und Minima von Funktionen zweier und mehrerer Variabeln im Grunde zunächst auf das Peanosche Werk zurückgeführt werden. Daneben besass das Buch noch andere Vorzüge. Die Darstellung war im allgemeinen präzis und strenge, eine grosse Menge althergebrachter Fehler war in ihm vermieden, so dass ihm in unserer deutschen Litteratur nur wenige ältere oder gleichzeitige Werke ebenbürtig an die Seite gestellt werden konnten.

In der nunmehr vorliegenden deutschen Übersetzung, die noch durch fünf Anhänge von Herrn Peano vergrössert worden ist, treten jene Vorzüge für diejenigen deutschen Leser, welche der fremden Sprache nicht völlig mächtig sind, noch klarer und deutlicher hervor. Das Peanosche Buch ist kein Werk für Anfänger, dazu tritt die prinzipielle Seite des Gegenstandes zu sehr in den Vordergrund, es ist ferner kein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes, da die üblichen geometrischen Anwendungen sehr in den Hintergrund treten und auch sonst nicht alle Gegenstände gleichmässig eingehend und ausführlich behandelt werden — innerhalb dieser Grenzen kann es aber auch heute noch als eine wichtige Erscheinung unter den vorhandenen Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung bezeichnet werden, dessen Übersetzung sich sicherlich als nützlich erweisen wird.

Freilich vollkommen ist das Werk auch innerhalb der angegebenen Grenzen nicht zu nennen. Thatsächlich finden sich in ihm einige Fehler und Unebenheiten, die als zeitgemäss nicht angesehen werden können. Es soll das etwas näher ausgeführt werden.

So sind, um sogleich mit einem wichtigen Gegenstand zu beginnen, die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Entwickelung einer Funktion einer veränderlichen Grösse in eine Taylorsche Reihe auf Seite 70 nicht einwandfrei angegeben worden. Dieselben lauten thatsächlich anders und sind in voller Strenge zuerst von Pringsheim im 44. Bande der Mathematischen Annalen entwickelt worden.* Analog sind die Betrachtungen über die Entwickelung einer Funktion mehrerer Veränderlichen auf S. 137 nicht als einwandfrei zu bezeichnen. Die Theorie der unendlichen Produkte ferner, wie sie auf S. 92 flg. entwickelt wird, dürfte kaum noch zeitgemäss erscheinen. Der Logarithmus hat mit den unendlichen Produkten wenig oder gar nichts zu thun, seine Hinzunahme verdunkelt thatsächlich die eigentliche Theorie. Es möge in Bezug hierauf vor allem auf eine Arbeit von Pringsheim im 33. Bande der Math. Annal. verwiesen werden. S. 94 Z. 8 von unten muss „von Null verschiedenen" fortfallen.

Wenig glücklich erscheint auch S. 119 die Definition der Stetigkeit einer n-dimensionalen Punktmenge mit Hilfe stetiger Parameter-Darstellung der Koordinaten, schon aus dem Grunde, weil sie für den Fall $n=1$ nicht zu gebrauchen ist. Die Möglichkeit, irgend zwei Punkte einer stetigen Punktmenge durch einen der Menge angehörenden Weg zu verbinden, dürfte zweckmässiger als eine Folge der Stetigkeit und nicht als definierende Eigenschaft anzusehen sein. Jedenfalls hätte nicht übergangen werden dürfen, dass eine Fundamentaleigenschaft stetiger Mengen in der Zugehörigkeit ihrer Grenzpunkte besteht.**

Der Satz über die Umkehrbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen S. 127 erscheint mir unnötig weit und nicht völlig präzis gefasst zu sein. Erstens brauchen nicht alle Ableitungen zweiter Ordnung als stetig vorausgesetzt zu werden, damit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

besteht. Dann aber ist nicht gesagt, inwieweit die Existenz und Stetigkeit vorausgesetzt wird, ob nur in dem Punkte x, y oder auch in dessen Umgebung, so dass der Umfang der geforderten Voraussetzungen ziemlich dunkel erscheint. Beim Beweise benutzt wird die Stetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ nur in dem betreffenden Punkte, dagegen die Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x}$

* Vergl. hierüber: Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, S. 79, 80.

** Vergl. hierüber: Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, S. 45—47.

$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ für alle Punkte einer gewissen Umgebung von x, y. Mir scheint, dass die Darstellung dieses Satzes in einigen anderen Lehrbüchern besser und präziser ist.

Etwas Ähnliches gilt von dem Satze 105 auf S. 129 flg.

Bei dem Beweise des Satzes 110 wird auf S. 140 Z. 1 — 4 von oben eine Schlussform gebraucht, die als strenge nicht bezeichnet werden kann. Es wird da geschlossen, dass y eine stetige Funktion von x ist, weil x_1 beliebig klein gemacht werden kann. Das genügt aber nicht — es muss vielmehr gezeigt werden, dass zu unendlich kleinen Werten von h unendlich kleine Werte x_1 gehören.

Der Beweis der Sätze auf S. 213 bis S. 217 dürfte als zu umständlich zu bezeichnen sein. Benützt man den Cauchyschen Doppelreihensatz, wonach die Glieder einer absolut konvergierenden zweifach unendlichen Reihe beliebig angeordnet werden können, so ergiebt sich ganz unmittelbar die Existenz des Taylorschen Satzes mitsamt der gliedweisen Differenzierbarkeit von $f(x) = \Sigma u_r x^r$.

Freilich fehlt jener Cauchysche Satz in dem Buche ganz, wie denn überhaupt auf den Unterschied von bedingter und unbedingter Konvergenz unendlicher Reihen mit keinem Worte eingegangen wird. In diesem völligen Verschweigen eines unentbehrlichen Fundamentalbegriffes der Reihenlehre dürfte eine empfindliche Lücke des Buches zu erblicken sein.

Mit der ganzen Anordnung der Lehre vom unbestimmten und bestimmten Integral kann ich mich nicht einverstanden erklären. Wenig zweckmässig scheint es mir, dass der Existenzbeweis zunächst für das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion geführt und an dieses letztere späterhin die Definition des bestimmten Integrals geknüpft wird. Thatsächlich haben die Methoden der sogenannten unbestimmten Integration mit jenem Existenzbeweise nicht das geringste zu thun. Und die Frage nach der allgemeinen Existenz lässt sich viel einfacher und vollständiger im Anschluss an die Definition des bestimmten Integrals als Summengrenze erledigen, wobei dann überhaupt die Beziehungen zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integrale sich natürlicher und präziser ergeben als bei der Peanoschen Darstellungsweise.

Die Herleitung der Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

S. 230, 280 flg. ist durchaus unzulänglich. Die Gleichung selbst ist in der angegebenen Allgemeinheit überhaupt nicht richtig, sie gilt zunächst nur bei umkehrbarer Eindeutigkeit und Stetigkeit von $x = \varphi(t)$. Bezüglich des zumeist vorkommenden Falles, dass die Gleichung $x = \varphi(t)$ keine eindeutige Auflösung $t = \psi(x)$ besitzt, fehlt jede nähere Erörterung.

Schliesslich ist auch die Reihenentwickelung der bestimmten Integrale S. 300 flg. nicht einwandfrei. Der Satz Ende der Seite 300: Hat dann $\int_a^b R_n dx$ den Grenzwert Null, so erschliesst man die Reihenentwickelung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0 dx + \cdots$$

ist nicht stichhaltig, er wird erst richtig, wenn die Integrierbarkeit von $f(x)$ ausdrücklich vorausgesetzt wird. Endlich sind die Sätze 213 und 214 dem Wortlaute nach äusserst ähnlich, die Beweise dagegen wesentlich verschieden. Es herrscht hier eine Unklarheit, die jedenfalls hätte gehoben werden müssen.

Die gemachten Bemerkungen haben nicht den Zweck, den Wert des verdienstvollen Werkes zu beeinträchtigen. Dasselbe ist vor 15 Jahren geschrieben und zwar auf Grund von Vorlesungen, die noch weitere Jahre zurückreichen — es ist daher nicht zu erwarten, dass dasselbe auch heute noch nach jeder Richtung hin vollkommen sei oder gar die Kritik aller kommenden Zeiten in allen seinen Teilen gleichmässig ertragen könne. Jene Bemerkungen sollen vielmehr auf eine Lücke aufmerksam machen, die bei dieser deutschen Ausgabe leicht hätte vermieden werden können. In einigen ähnlichen Fällen, wie bei der Übersetzung und Herausgabe der Serretschen Differential- und Integralrechnung durch Harnack und der Dinischen Funktionentheorie durch Lüroth und Schepp sind von den Übersetzern Berichtigungen und Zusätze gemacht worden, welche den Wert der Werke ungemein erhöht haben. Derartiges fehlt bei dem Peanoschen Werke, ja nach der Vorrede des Herrn A. Mayer könnte es scheinen, als wenn Berichtigungen überhaupt unnötig wären. Die Herren Übersetzer Bohlmann und Schepp begnügen sich mit der Bemerkung, dass von einer wesentlichen Erweiterung der in den Anmerkungen gegebenen historischen Notizen Abstand genommen ist und verweisen dieserhalb auf die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Ein derartiger Hinweis hat etwas Missliches. Erstens hat nicht jeder Leser des Buches die Encyklopädie zur Hand, und zweitens enthält die letztere zwar die Sätze aber nicht deren Beweise, kann daher niemals ein wirkliches Lehrbuch ersetzen. Soll das Peanosche Werk wirklich zu einem gleichmässig vollkommenen und zeitgemässen Führer auf dem Gebiete der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung werden, so bleibt nichts anders übrig, als auch bei ihm, ohne seine Grundlage zu ändern, an geeigneten Stellen Berichtigungen und Zusätze anzubringen.

M. Krause.

reatise on the theory of functions, by J. HARKNESS (Bryn Mawr College, Pennsylvania) and F. MORLEY (Haverford College, Pennsylvania), London, Macmillan (1893). IX und 507 S.

oduction to the theory of analytic functions, by J. HARKNESS and F. MORLEY, London, Macmillan (1898). XVI und 336 S.

Das erste der beiden vorliegenden Werke giebt eine Darstellung der rie der analytischen Funktionen einer komplexen Variabelen, welche hl in Bezug auf die grundlegenden Lehren wie in den Einzelhrungen mit grosser Gründlichkeit und Sachkenntnis durchgeführt ist. Buch ist als Lehrbuch durchaus zu empfehlen, es vermittelt eine rundete und einheitliche Auffassung der Theorie der Funktionen einer plexen Variabelen. Zugleich vermeidet dasselbe in glücklicher Weise die hr der Einseitigkeit, welche sich bisher so häufig in den Darstellungen Funktionentheorie als verhängnisvoll erwies. Sind doch die bei dieser genheit oft genannten Unterschiede in den Auffassungen Riemanns und rstrass' z. B. noch in dem übrigens hochgeschätzten Werke von Forsyth ger zur inneren Berührung als zur äusseren Aneinanderreihung gelangt; auch in der deutschen Lehrbuchlitteratur ist man erst in neuester Zeit die gleichmässige Berücksichtigung der verschiedenen Standpunkte ngegangen.

Was die Stoffauswahl im grossen angeht, so sei folgende Beung gestattet. Nach Entwickelung der Theorie der Riemannschen hen wendet sich die Darstellung zu den elliptischen und Abelschen tionen. Ein anderes Gebiet von Funktionen auf Riemannschen Flächen, he im Vergleich zu den Abelschen Funktionen vielleicht elementarer für die Anwendungen wichtiger sind, kommt nicht zur Geltung: ich die hypergeometrischen Funktionen, sowie überhaupt die Funktionen, he linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten gen. Es ist unzweifelhaft, dass diesen Funktionen in einer ausführlichen tellung der Funktionentheorie schon jetzt ihre Stelle neben den ellipen und Abelschen Funktionen gebührt. Doch soll diese Bemerkung nur die Stellung des vorliegenden Buches gegenüber der modernen tionentheorie charakterisieren, und es soll in keiner Weise ein Tadel esprochen sein, dass die Verfasser bei ihren Ausführungen allein die tischen und Abelschen Funktionen wählen.

Die Bezeichnungen und die Ausdrucksweise im einzelnen sind stets ge und wissenschaftliche; sie halten Schritt mit dem Ziele der ganzen tellung, welche die einzelnen Gegenstände in ihrer vollen wissenschaftn Bedeutung geben will. Eine beiläufige Bemerkung sei wegen des iffs der „semikonvergenten Reihen" (S. 64) gestattet. Diese Benennung nicht in dem sonst verbreiteten Sinne gebraucht, sondern bezeichnet ch eine „bedingt konvergente" Reihe. Diese Abweichung von dem meinen Brauch ist, wenn auch die Verfasser dabei nicht allein dastehen, zweckmässig.

Das zweite Kapitel, welches reelle Funktionen behandelt, hat nur eine mehr beiläufige Bedeutung; die Darstellung geht im übrigen nur auf die analytischen Funktionen einer komplexen Variabelen aus. Sie gründet sich zunächst auf die im dritten Kapitel entworfene Theorie der Potenzreihen. Im vierten Kapitel, die algebraischen Funktionen, findet sich ein ausgedehnter Exkurs in das Gebiet der ebenen Kurven, die singulären Punkte betreffend; diese Entwickelungen sollen zur Grundlage für die Verzweigungstheorie der algebraischen Funktionen dienen.

Es ist überraschend, dass die Theorie der Riemannschen Flächen, welche sich hier unmittelbar angeschlossen hätte, von den Verfassern zunächst zurückgestellt wird. Vielmehr kommen jetzt erst die Theorie der komplexen Integrale und die Grundlagen der Cauchyschen Funktionentheorie zur Darstellung. Bei den weittragenden Ansätzen, welche namentlich auch für die Bildungsgesetze der analytischen Funktionen hier entspringen, gelingt es, gleich einige Angaben über Produkt- und Partialbruchdarstellungen nach Weierstrass zu machen.

Es folgt nun eine ausführliche Behandlung der Riemannschen Flächen für algebraische Funktionen, wobei die Theorie der zugehörigen Integrale hier nur in den Grundlagen entwickelt wird, während die Weiterführung erst ganz am Ende des Werkes folgt.

Die Theorie der elliptischen Funktionen ist auf den Begriff der doppelten Periodizität gegründet und unter fast ausschliesslicher Bevorzugung der Weierstrassschen Funktionen dargestellt. Die Transformationstheorie bleibt natürlich ausserhalb der Betrachtung. Auch das algebraische Fundament der Theorie der elliptischen Funktionen kommt nur kurz zur Geltung; speziell wird die Abbildung der zerschnittenen Riemannschen Fläche auf ein Parallelogramm, welche sich völlig einwurfsfrei nur schwierig entwickeln lässt, nicht mit voller Ausführlichkeit behandelt.

Weiterhin bedienen sich die Verfasser einer etwas merkwürdigen Disposition. Am leichtesten zugänglich erscheint ihnen hier die Theorie der Thetareihen mit zwei Argumenten; diese Theorie wird demnach jetzt zunächst entwickelt. Vorteilhaft ist dies insofern, als auf diese Weise in der Theorie der Abelschen Integrale und Funktionen (letztes Kapitel) die Einführung der Thetafunktionen keine Unterbrechung mehr nötig macht. Getrennt sind diese beiden Kapitel noch durch eine anderweitige, übrigens sehr wertvolle Entwickelung, welche Probleme der konformen Abbildung und Existenztheoreme der zugehörigen Funktionen nach Riemann, Schwarz, Neumann u. a. behandeln.

Es ist ein beredtes Zeugnis für die beifällige Aufnahme des besprochenen Werkes, dass sich die Verfasser wenige Jahre nach dessen Erscheinen zur Herausgabe des zweiten in der Überschrift genannten Werkes entschlossen haben.

Dieses Buch erscheint für das einführende Studium sehr geeignet. Eingehende Theorien, wie die der Abelschen Funktionen, bleiben hier abseits; und die Darstellung ist überall nur auf die Gewinnung der Grundlagen, t auf Spezialuntersuchungen gerichtet. Elementarere Entwickelungen r konforme Abbildungen an Beispielen nehmen dafür einen weit breiteren m ein als im erstgenannten Werke. So ist ein besonderes Kapitel geometrischen Theorie der Exponentialfunktion und des Logarithmus idmet, und sogar zwei Kapitel (das dritte und fünfte) handeln von der nsformation der Kreisverwandtschaft. Die Theorie der elliptischen ktionen beschränkt sich hier ganz auf die Anfänge der transcendenten orie nach Weierstrass auf Grund des Begriffs der doppelten Periodizität. h die Theorie der algebraischen Funktionen wird nur in ihren ersten ängen skizziert und an einigen elementaren Beispielen ausgeführt, von en $y^2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$ das komplizierteste ist. Den chluss bilden Ausführungen über die Cauchysche Theorie, an welche its ein früheres Kapitel herangeführt hatte, sowie über die reellen Bedteile komplexer Funktionen.

R. Fricke.

---

rbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. Zweite Auflage, zweiter Band. Braunschweig 1899, Vieweg & Sohn. XVI und 856 S.

Der zweite Band von Webers Algebra ist in erster Auflage 1896 erenen und wurde im Jahrgang 43 dieser Zeitschrift hist.-litterar. Abteil. 6 flg. ausführlich besprochen. Wie vom ersten Bande, so ist in äusserst er Zeit auch vom zweiten eine Neuauflage nötig geworden, welche vorliegt. Bei der reifen und durchgearbeiteten Form, welche bereits erste Auflage des fraglichen Werkes besass, wird man weitgehende nderungen hier nicht zu erwarten haben. Immerhin hat der Verfasser e Mühe gespart, durch kleinere Abänderungen in der Disposition den rblick zu erhöhen. Es wird kaum nötig sein, hierauf im einzelnen hineisen.

Dagegen muss sehr hervorgehoben werden, dass der Verfasser durch ührliche Berücksichtigung neuerer wichtiger Fortschritte der Gruppenrie und Arithmetik sein Werk zu einem durchaus modernen fortgebildet In dieser Hinsicht sind in dem allgemeinen gruppentheoretischen chnitte neuere Untersuchungen Dedekinds hinzugekommen, welche die letzterem so benannten Hamiltonschen Gruppen betreffen. Eine weit nere Begründung hat vor allem der Abschnitt über die linearen Gruppen onnen, insofern der Verfasser hier ausführlich auf die ausgezeichneten ersuchungen von Frobenius aus den Jahren 1896 und 1897 über ppencharaktere, Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Subition u. s. w. eingeht.

Nicht minder wichtig sind die Ergänzungen, welche die zahlenretischen Abschnitte gewonnen haben. Hier war vor allem das Erinen des berühmten „Berichtes über die Theorie der algebraischen len" von Hilbert massgeblich. Der Verfasser hat, wie er im Vorwort erkt, geschwankt, ob er sich nicht für die ganze Behandlung der

Abelschen Körper unter Zurückstellung seiner eigenen früheren Methode an Hilbert anschliessen sollte. Indessen schien es rätlich, hiervon abzusehen. Jedenfalls aber ist Hilberts Bericht auf den neunzehnten Abschnitt, welcher die Beziehungen eines Körpers zu seinen Teilern behandelt, von bedeutendem Einfluss gewesen. Auch die Minkowskischen Methoden, welche übrigens auch schon in der ersten Auflage herangezogen waren, finden jetzt im zwanzigsten Abschnitt eine breitere Behandlung.

Fortgefallen gegenüber der ersten Auflage sind die Anwendungen auf die quadratischen Körper. Der Verfasser hat sich hierzu zum Zwecke der Raumersparnis entschlossen. Indessen sollen diese Entwickelungen darum unverloren sein; denn sie werden in der beabsichtigten Fortsetzung des Werkes ihre Stelle finden. Diese Fortsetzung, in welcher vor allem die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen zur Darstellung kommen dürfte, wird von den Freunden des vorliegenden Werkes mit besonderer Spannung erwartet werden.

R. Fricke.

Handbuch der Geophysik. Von Dr. Siegmund Günther. Zwei Bände. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Zweiter Band mit 230 Abbildungen (im Text). Stuttgart 1899, Verlag von Ferd. Enke. 8°. XIV, 1009 S.

Bei unserer Besprechung der neuen Auflage des ersten Bandes erwähnten wir schon (Bd. 44, S. 127 flg.), dass im Interesse einer gleichmässigen Stärke beider Bände des Werkes die vierte Abteilung mit ihren vier Kapiteln, von den magnetischen und elektrischen Erdkräften handelnd, aus dem zweiten in den ersten Band übertragen worden sei. Trotz dieser Übertragung ist der vorliegende zweite Band um volle 25 Druckbogen gewachsen, so dass sich die ungleiche Stärke beider Bände eben auch in der neuen Auflage wieder eingestellt hat. Aus dieser Äusserlichkeit ersieht man, dass der Verfasser gewiss von einer durchaus erweiterten Auflage seines Werkes sprechen darf — ob auch von einer gänzlich umgearbeiteten Auflage, dürfte bestritten werden.

Denn vor allem sind die zwei, schon bei oberflächlichem Durchblättern in die Augen fallenden Eigentümlichkeiten des Werkes völlig gewahrt geblieben: nämlich die Menge der je am Ende der einzelnen Kapitel gegebenen Citate und die streng durchgeführte Rücksichtnahme auf die geschichtliche Entwickelung der jeweils darzustellenden Lehren. Ja diese Besonderheiten treten in der neuen Auflage sogar in verstärkter Weise hervor: an Stelle der früheren etwa 3000 Angaben von Belegstellen und Litteraturnachweisungen sind jetzt deren gegen 9000 getreten und geben offenkundiges Zeugnis von der Mühe und Sorgfalt, mit der der Verfasser die neuesten Forschungen und Darstellungen des Stoffgebietes berücksichtigt, mit der er zugleich auch erneut die frühere Litteratur durchgearbeitet und verwertet hat. In der That wird jeder, der das vorliegende Handbuch benützt, auch um für Nach-studien sich Rats zu erholen, dem Verfasser Dank wissen für die reichlichen Nachweise und wird sich einen sogar anscheinenden Überfluss hieran gern gefallen lassen. Und in Bezug auf den zweiten Punkt, die Darlegung geschichtlicher Entwickelung der betreffenden Lehren, ist ebenfalls der Charakter des Werkes erhalten geblieben, ja durch ein an vielen Stellen erfolgtes reichlicheres Gliedern des Stoffes und etwas ausführlichere Darstellung hat das Werk nach dieser Seite ebenfalls gewonnen.

Während so die genannte in allen Arbeiten des Verfassers zu findende lobenswerte Eigentümlichkeit auch in der vorliegenden zweiten Auflage einer Erdphysik wieder hervortritt, ist auch die Anordnung des Stoffes im grossen und ganzen erhalten geblieben. Wie früher, so behandelt auch jetzt die fünfte Abteilung (S. 1—375) die Lehre von der Atmosphäre, die sechste (S. 375—559) die Ozeanographie und ozeanische Physik, die siebente (S. 559—659) die dynamischen Wechselbeziehungen zwischen Meer und Land, endlich die achte (S. 659—946) das Festland mit seiner Süsswasserbedeckung. In der Lehre von der Lufthülle der Erde wurde das frühere zehnte Kapitel „Angewandte Meteorologie“ in zwei zerlegt, die die „Praktische Meteorologie“ und die „Hygienische Meteorologie“ behandeln.

Im einzelnen freilich ist ungemein vieles geändert, umgestellt, erweitert und verbessert worden. Wir führen nur die am meisten ins Auge fallenden Abänderungen und Ergänzungen hier an. So wurden die allgemeinen Eigenschaften der Atmosphäre eingehender behandelt und klarer gegliedert, neue Aufnahme fanden die Hochstationen und Luftballonfahrten (S. 85), neue Behandlung die Dämmerungserscheinungen (S. 106) und die Lehre von der Luft- und Gewitterelektrizität (S. 157); die Kapitel von der Bewegung der Luft (S. 178 flg.) und von den Klimaänderungen (S. 318 flg.) erscheinen wie neu bearbeitet. Neu aufgenommen ist auch die Berücksichtigung des Plankton sowohl als Verursachers und Trägers des Meeresleuchtes wie als Bodenbildners (S. 391), eingehender betrachtet die künstliche Beruhigung der Wellen (S. 453 flg.), klarer und ausgeführter die Lehre von den modernen Theorien über die Gezeiten (S. 472), übersichtlicher gestaltet die Lehre von Grund und Ursache der Meeresströmungen (S. 512 flg). Eine fast neue Darstellung erfuhr auch die Lehre vom Meereis (S. 531 flg.), insbesondere durch stärkere Hervorhebung der erdkundlichen Seite des Gegenstandes, sowie die Lehre von den Strandverschiebungen und von den neuesten Theorien zu deren Erklärung (S. 570 flg.). Auch die Darstellung von Bildung und Wanderung der Dünen, sowie von der Wechselwirkung zwischen Pflanzenwuchs und Landbildung (S. 620) erscheint zum guten Teil in neuem Gewande, nicht minder die Lehre von den Korallenbauten und deren Weiterbildung (S. 641 flg.); eine Gliederung und Kennzeichnung der Haupttypen von Inseln ist neu hinzugekommen (S. 640). Die stärkste Umwandlung hat wohl die achte Abteilung erfahren, die vom Festland und seiner Süsswasserbedeckung handelt: die Lehren der Geognosie, dann die von der Bodenplastik im allgemeinen, auch die vom fliessenden Wasser der Erde sind stark erweitert und an vielen Stellen in neuer Darstellung gegeben.

In rascher Übersicht über den starken Band haben wir die wesentlichsten Abänderungen und Ergänzungen der vorliegenden zweiten Auflage in aller Kürze erwähnt. Wir haben noch beizufügen, dass eine eingehende Inhaltsübersicht, eine alphabetische Aufzählung der vorkommenden Schriftstellernamen und ein Schlüssel für die vielen abgekürzten Verweisungen auf Zeitschriften und sonstige Litteratur den Gebrauch dieses Handbuches sehr erleichtern und seinen Wert erhöhen; leider konnte wegen der grossen Stärke des Bandes diesem nicht auch noch ein Sachverzeichnis beigegeben werden.

Für eine etwaige neue Auflage bringen wir abermals unsern Wunsch nach mässigerem Gebrauch von Fremdwörtern vor. Ist die Zahl deren, die in einem wissenschaftlichen Werke gebraucht werden müssen, an sich schon überaus gross, so sollte in Verwendung vermeidbarer weitestgehende Zurückhaltung geübt werden. Dass partiziperen, aptieren, signalisieren (nicht im Sinn von Zeichen geben!) und ähnliche immer wiederkehren erweist nicht deren Berechtigung; warum Naturkräfte gerade destruktiv und konstruktiv genannt werden müssen, um zerstörend und aufbauend zu wirken, weshalb Kraftanstrengungen der Natur gerade kataklysmatischen Charakter zugeschrieben werden muss, ist nicht einzusehen; auch wäre z. B. die fluviatile Korrasion ganz gut deutsch zu sagen. Auch in der Aufnahme von unnötig künstlich gebildeten Fremdausdrücken anderer Schriftsteller dürfte Maß gehalten werden — oder sind etwa in potamogenen und thalassogenen Neulandstreifen besondere Geheimnisse verborgen oder sind in bradyseismischen Bewegungen Entdeckungen besonderer Art zu finden, die nicht deutsch zu benennen wären? Derselben „Kategorie“ gehören die äolischen und die subaërischen Bildungen an, die der Verfasser selbst als „synonym“ erklärt und deren Verwendung im ersten Kapitel der achten Abteilung er verspricht, thatsächlich aber gar nicht nötig hat. Dass der Verfasser das umgebende „milieu“ selbt als Umwelt ersetzt, zeigt, dass er ganz wohl deutsch schreiben könnte.

Der vorliegende Band ist mit Abbildungen versehen, die meist deutlich darstellen, was sie zeigen sollen; nur wäre zuweilen eine andere Stellung im Druck zu wünschen (z. B. sollten die Figuren 69 und 70 auf derselben Seite zu finden sein).

Wir stehen am Ende unserer Überschau. Erneut müssen wir unserer staunenden Bewunderung Ausdruck geben über die Beschaffenheit, Verarbeitung und Gestaltung des riesigen Lehrstoffes, den das Buch bietet, und müssen den Dank aussprechen für die handliche, bequeme und anregende Darbietung alter und neuer Lehren der Wissenschaft. Wir haben in dem jetzt wieder abgeschlossen vorliegenden Werk einen trefflichen Führer, der vieles selbst erzählt, der aber in weit mehr Fällen stets getreue Auskunft erteilt, wo weitere Aufschlüsse zu erlangen sind. Dank dem Verfasser, Dank auch der rührigen Verlagshandlung!

TREUTLEIN.

G. W. Hankel. **Elektrische Untersuchungen.** Einundzwanzigste Abhandlung. Über die thermo- und piëzo-elektrischen Eigenschaften der Krystalle des ameisensauren Baryts, Bleioxyds, Strontians und Kalkes, des salpetersauren Baryts und Bleioxyds, des schwefelsauren Kalis, des Glycocolls, Taurins und Quercits. Des 24. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Nr. 6. Mit 2 Tafeln. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 27 S., Pr. 2 M.

Die vorliegende Abhandlung reiht sich unmittelbar an die früheren an. Sie enthält nur die Untersuchungen über die im Titel angeführten Krystalle. Wer sich dagegen über die Methode und die Versuchsanordnung unterrichten will, muss auf die früheren Veröffentlichungen zurückgreifen. Es würde hier zu weit führen, wenn die einzelnen Ergebnisse auch nur angedeutet werden sollten.

B. Nebel.

Der Gang des Menschen. II. Teil: Die Bewegung des Gesamtschwerpunktes und die äusseren Kräfte von Otto Fischer. Des 25. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Nr. 1. Mit 12 Tafeln und 5 Textfiguren. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 130 S., Pr. 8 M.

Nach einer Einleitung, in welcher die Mechanik des Gehens und die dabei in Betracht kommenden inneren und äusseren Kräfte erläutert werden, werden die Methoden gekennzeichnet, die zur Bestimmung der Schwerpunktsbahn führen. Von den beiden einzuschlagenden Wegen, von denen wieder je drei Richtungen abzweigen, geht der Verfasser, nachdem er sie eingehend behandelt hat, zur Bestimmung der Bahn des Gesamtschwerpunktes des menschlichen Körpers über und berechnet die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche der Gesamtschwerpunkt während der Zurücklegung der einzelnen Bahnpunkte besitzt. Schliesslich wird noch die Grösse der äusseren Kräfte ermittelt während der einzelnen Phasen des Gehens und bei verschiedener Versuchsanordnung.

Aus der Tafel 1 ist unmittelbar zu ersehen, in welcher Weise sich mit Hilfe eines aus Parallelogrammen zusammengesetzten Gelenkmechanismus nicht nur die Schwerpunkte verschiedener Abschnitte des menschlichen Körpers, sondern auch deren Gesamtschwerpunkt ermitteln lassen. Um nun einen richtigen Einblick in die Bewegungsvorgänge zu erhalten, wurde die geschlossene Raumkurve des Gesamtschwerpunktes in drei Komponenten zerlegt, und zwar nach der Gangrichtung, der Seitenrichtung und der vertikalen Richtung. Die dabei ermittelten Kurven, sowie der Verlauf der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den einzelnen Projektionspunkten sind in besonderen, sehr übersichtlichen Tafeln zur Anschauung gebracht, so dass die Periodizität sofort in die Augen springt. Es würde zu weit führen, wollten wir noch näher auf diese höchst interessanten Versuche eingehen. Deshalb müssen wir uns darauf beschränken, jeden, der sich für die Vorgänge beim Gehen interessiert — und wer sollte dies unter den Gebildeten nicht thun —, auf dieses an lehrreichen Ergebnissen reiche Werk aufmerksam zu machen.

B. Nebel.

Lehrbuch der Experimentalphysik von Adolph Wüllner. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Vierter Band. Die Lehre von der Strahlung. Erster Halbband. Mit 147 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren und einer lithographierten Tafel. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 512 S.

Der erste Abschnitt des vierten Bandes umfasst die Ausbreitung und Wahrnehmung der Strahlung, und zwar wird ausgegangen von deren ungestörter Ausbreitung, an die sich die gestörte, insbesondere die durch Reflexion und Brechung, anschliesst. Das dritte Kapitel enthält die Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen. In dem vierten Kapitel, welches die Wahrnehmung des Lichtes zum Gegenstande hat, sind auch die optischen Instrumente zu finden. — Diesem ersten Halbband, welcher sich vollkommen ebenbürtig seinen Vorgängern anreiht, wird demnächst der zweite Halbband folgen. — Wenngleich durch die Herausgabe eines solch umfangreichen Werkes die Anforderungen an die Arbeitskraft eines Mannes, der auch sonst noch vielfach in Anspruch genommen ist, nicht unterschätzt werden dürfen, so erfordert doch die heutige schnelllebige Zeit, dass es im eigensten Interesse von Herausgeber und Verleger ist, wenn mit allem Hochdruck die Vollendung eines solchen Werkes betrieben wird.

B. Nebel.

Die Wirkungsweise und Berechnung der Ammoniak-Absorptionsmaschine von H. Lorenz. Separatabdruck aus der Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie. 1899. Heft II. 9 S.

Vergleicht man die Vorgänge der Kälteerzeugung bei den Absorptionsmaschinen mit denen bei den Kompressionsmaschinen, so sollte man glauben, dass die Maschinen der ersteren Gattung denen der letzteren überlegen wären, weil bei den ersteren die Energie fast ausschliesslich in Form von Wärme zur Verwendung gelangt, während bei der letzteren Gattung die Energiezufuhr nur in Form von mechanischer Arbeit erfolgt. Gleichwohl werden die Kompressionsmaschinen den Absorptionsmaschinen vorgezogen, weil bei diesen die Ausnutzung der zugeführten Wärme ungünstiger ist. Da aber Absorptionsmaschinen immer noch verwendet werden, so hat sich der Verfasser der dankenswerten Arbeit unterzogen, die Wirkungsweise der Absorptionsmaschine im Zusammenhang darzustellen, wodurch den Interessenten ein wesentlicher Beitrag zur Klärung dieser Maschinengattung geliefert wird.

B. Nebel.

Die Physikalischen Erscheinungen und Kräfte, ihre Kenntnis und Verwertung im praktischen Leben von Leo Grunmach. Mit über 600 Textabbildungen und 3 Tafeln. Leipzig 1899, Verlag von Otto Spamer. 442 S. Pr. geh. 6 M., elegant gebunden 7.50 M.

Das im Jahre 1898 als Sonderabdruck aus dem „Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien" erschienene Werk wurde nun als selbständiges Buch der Öffentlichkeit übergeben. Im wesentlichen handelt es sich um einen Abdruck, der durch wichtige Neukonstruktionen und Entdeckungen der allerjüngsten Zeit erweitert worden ist. Dahin gehören die von Ramsay entdeckten Elemente der Atmosphäre, das Fernrohr der Treptow-Sternwarte, die Ergebnisse der Marconischen Funkentelegraphie, die neuesten Apparate für Untersuchungen mit Röntgenstrahlen u. s. w. Mit Rücksicht auf die Besprechung des Sonderabdruckes kann hier von weiterem abgesehen werden.

B. Nebel.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von Richard Börnstein. 912 S. Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von Richard Assmann. 566 Seiten. 53. Jahrgang. Braunschweig 1898, Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn.

Mit grosser Pünktlichkeit sind auch die beiden letzten Abteilungen der Fortschritte der Physik für das Jahr 1897 erschienen. Wenn dies so anhält, so wird man in kurzem vergessen, welche Stockung in der Herausgabe der Fortschritte vor noch nicht langer Zeit geherrscht hat. Wer diese Zeit miterlebt hat, wird voll Bewunderung sein über die von den Redakteuren an den Tag gelegte Energie. Sollen aber die Fortschritte der Physik wieder die dominierende Stellung in Deutschland einnehmen, wozu sie voll und ganz berechtigt sind, dann müssen sie nicht mehr alljährlich, sondern mindestens monatlich erscheinen; denn die Anforderungen an ein solches Werk sind bedeutend gestiegen gegen früher.

B. Nebel.

Jahrbuch der Naturwissenschaften. Enthaltend die hervorragendsten Fortschritte auf den Gebieten: Physik, Chemie und chemische Technologie; angewandte Mechanik; Meteorologie und physikalische Geographie; Astronomie und mathematische Geographie; Zoologie und Botanik; Forst- und Landwirtschaft; Mineralogie und Geologie; Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte; Gesundheitspflege, Medizin und Physiologie; Länder- und Völkerkunde; Handel, Industrie und Verkehr. Unter Mitwirkung von Fachmännern herausgegeben von Max Wildermann. Freiburg in Breisgau, Herdersche Verlagsbuchhandlung. Zweigniederlassungen in Wien, Strassburg, München und St. Louis, Mo. — 13. Jahrgang 1897—1898. 532 S. Mit 39 in den Text gedruckten Abbildungen und zwei Karten. 1898. Pr. 6 M. — 14. Jahrgang 1898—1899. 549 S. Mit 45 in den Text gedruckten Abbildungen. 1899. Pr. 6 M.

Dass das Verständnis für die Naturwissenschaften immer mehr und mehr in das Volk eindringt, sehen wir an der stets grösser werdenden Zahl von Aufsätzen über die neuesten Errungenschaften auf diesem Gebiete in den politischen Tageszeitungen. Will man sich aber das eine oder andere wieder ins Gedächtnis zurückrufen, so scheitert dies an dem zeitraubenden Suchen. In dem Jahrbuch der Naturwissenschaften ist dagegen das Material in übersichtlicher Weise zusammengestellt, und man ist sicher, dass nichts von Bedeutung fehlt. Für Laien wie für Gelehrte ist das Buch von gleich grossem Wert; denn auch der Gelehrte ist nicht mehr im stande, die gesamten Naturwissenschaften in Fachzeitschriften zu verfolgen, da er durch sein Spezialgebiet zu sehr in Anspruch genommen ist. Das Buch eignet sich sehr gut, neue Freunde den Naturwissenschaften zu gewinnen und die alten dauernd zu fesseln.

B. Nebel.

Vorlesungen über Gastheorie von Ludwig Boltzmann. II. Teil. Theorie van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molekülen; Gasdissociation; Schlussbemerkungen. Leipzig 1898, Verlag von Johann Ambrosius Barth. 265 S.

Es ist ein grosses Verdienst Boltzmanns, dass er sich nicht von der Mode in der Wissenschaft unterkriegen lässt, sondern dass er den Mut hat, gegen eine Zeitströmung anzukämpfen. Mittels der Gastheorie ist es van der Waals gelungen, eine grosse Zahl von Resultaten abzuleiten, die sich mit der Erfahrung vollständig decken. Neuerdings hat diese Theorie wieder den Anlass zu neuen Entdeckungen gegeben, nämlich des Argons und Neons, zweier chemischen Elemente. Ihr verdankt man auch die Bestätigung der Existenz und der Grösse des Temperaturursprunges bei der Wärmeleitung in sehr verdünnten Gasen. Eine Theorie, die zur Hebung solcher wissenschaftlichen Schätze beizutragen vermag, kann nicht als überwunden angesehen werden. Boltzmann unternimmt es daher, dieser Theorie wieder mehr Eingang zu verschaffen, indem er sie weiteren Kreisen zugänglich macht. — Im ersten Abschnitt des vorliegenden zweiten Teiles behandelt er die Grundzüge der Theorie van der Waals und reiht im zweiten Abschnitt deren physikalische Diskussion daran. Der dritte Abschnitt enthält Sätze, die, der allgemeinen Mechanik entnommen, sich für die Gastheorie als besonders nützlich erweisen. In den folgenden Abschnitten werden die Gase mit zusammengesetzten Molekülen näher betrachtet, die van der Waalssche Gleichung mittels des Virialbegriffes abgeleitet, und die Theorie der Dissociation von neuen Gesichtspunkten in Angriff genommen. Den Schluss bilden Ergänzungen zu den Sätzen über das Wärmegleichgewicht in Gasen mit zusammengesetzten Molekülen.

B. Nebel.

Physikalisches Praktikum. Mit besonderer Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden von Eilhard Wiedemann und Hermann Ebert. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage mit 366 eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig 1899, Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 574 S.

Die in relativ kurzer Zeit erschienene vierte Auflage beweist, wie sehr das Bedürfnis nach einem solchen Buche vorhanden war. Es entlastet den Lehrer wesentlich im Laboratorium und gestattet dem Schüler, sich gründlich für den Versuch vorzubereiten. Dem Schüler bleibt es noch ein getreuer Ratgeber, wenn jener auf eigene Füsse gestellt wird. Herausgeber und Verleger wetteifern in der Vervollkommnung des Buches. Die Reinheit des Druckes und die Schönheit der Figuren geben dem Buch schon äusserlich ein vornehmes Gepräge. — Jedem angehenden Physiker sei es aufs wärmste empfohlen.

B. Nebel.

Über die Differentialgleichungen der Mondbewegung von W. Scheibner Des 26. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Nr. 2. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 25 S., Pr. 1 M. 50 Pf.

In einer früheren Abhandlung über die gestörte elliptische Bewegung und Hansen's ideale Koordinaten (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1897) hat der Verfasser darauf aufmerksam gemacht, dass trotz der Fortschritte der Störungstheorie in den letzten Dezennien die glänzend erprobten Hansenschen Methoden in der Praxis noch nicht überflüssig geworden sind. Der Verfasser unternimmt es daher in der vorliegenden Abhandlung, die Differentialgleichungen der Mondbewegung auf Grund der von Hansen aufgestellten Theorie zu entwickeln. Die gewählten Bezeichnungen sind identisch mit denen in der früheren Abhandlung, auf die somit Bezug zu nehmen ist. Die Astronomen, für welche diese Gleichungen besonderes Interesse haben, werden diese Arbeit mit Freuden begrüssen.

B. Nebel.

Vorlesungen über technische Mechanik von August Föppl. Vierter Band: Dynamik. Mit 69 Figuren im Text. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 456 S.

Mit dem vorliegenden vierten Band der technischen Mechanik, der Dynamik, schliesst auch der Cyklus der Vorlesungen über technische Mechanik an der Hochschule ab. Die Zeit für diese Vorlesungen fällt aber gewöhnlich in ein an sich kurzes Sommersemester, weshalb der Verfasser in diesem Bande den Vorlesungsrahmen überschritten und die Dynamik in demselben Umfange behandelt hat, wie dies bei der in einer vierstündigen Wintervorlesung durchzunehmenden Festigkeitslehre der Fall war. Dadurch wird es dem strebsamen Studenten ermöglicht, durch Privatstudien seine Kenntnisse in der Dynamik zu erweitern, ohne nach neuen Werken greifen zu müssen. In der Auswahl des Stoffes hält sich der Verfasser nicht ängstlich an die rein technischen Forderungen, sondern er geht z. B. auch auf die von Newton für die Planetenbewegung gegebene Erklärung ein, so dass die jungen Leute nicht rein mechanisch auf ihren zukünftigen Beruf hin gedrillt werden. Die wissenschaftliche Ausbildung findet in der Technik immer mehr und mehr Anerkennung, wofür als Symptom auch das Verlangen nach technischen Physikern anzusehen ist. Im Laufe des Jahres 1900 soll der zweite Band dieses Werkes erscheinen, wodurch es dann seinen Abschluss erreicht hat.

B. Nebel.

Die Medialfernrohre. Eine neue Konstruktion für grosse astronomische Instrumente. Von L. Schupmann. Mit 28 Figuren im Text. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 145 S.

Durch systematisches Vorgehen in dem Bestreben, das sekundäre Spektrum aufzuheben, ergab sich ein neuer Fernrohrtypus, dem der Name Medialfernrohr beigelegt worden ist, weil er zwischen den Refraktoren und Reflektoren liegt. Gemeinsam mit den Refraktoren ist die Objektivlinse, in deren Brennpunktnähe sich ein mit einer Konkavlinse bedeckter kleiner Hohlspiegel behufs Achromatisierung befindet. Die Gattung zerfällt wieder in zwei Arten, die Brachymediale und die Mediale kurzweg, bei den ersteren ist der Tubus wesentlich kürzer. Nach der Berechnung eines Medials wird es auf seine Abweichungen hinsichtlich der optischen Bedingungen untersucht, und schliesslich die Montierung und Ausführung der Mediale erläutert. Über die Einführung der Mediale kann indessen nur der praktische Versuch entscheiden.

B. Nebel.

Grundriss der Naturlehre für die oberen Klassen der Mittelschulen. Von W. Pscheidl. Mit 283 Abbildungen. Wien und Leipzig 1899, Verlag von Wilhelm Braumüller. 371 S. Preis 2 fl. 60 kr. gleich 4.40 Mk.

Das grosse Interesse, welches der Schüler bei den mit Messungen verbundenen Versuchen an den Tag legt, gab dem Verfasser die Anregung, bei der Behandlung des Stoffes das Hauptaugenmerk auf die Messversuche zu legen. Die Ergebnisse solcher Versuche werden dann weiter zu entsprechenden Hausaufgaben verwendet. Verfasser hat sicher die Mehrzahl der Schüler richtig beurteilt; denn den meisten sind abstrakte Dinge ein horror. Richtet sich doch der jeweilige Besuch akademischer Vorlesungen über Physik noch häufig nach der Zahl der auf dem Experimentiertisch stehenden Apparate. — Dass die Mechanik einen grossen Teil des Buches umfasst, ist besonders anzuerkennen, denn vielfach fehlt es den Schülern an einer gründlichen Kenntnis der Mechanik. — Bei der Durchsicht der eigentlichen Disziplinen der Physik ist einzelnes zum Teil sehr eingehend behandelt, was, wie der Verfasser in der Vorrede erwähnt, doch nicht als Fehler angerechnet werden könne. Auch darin pflichte ich dem Verfasser bei, dass die Ansichten über die Auswahl des Lehrstoffes oft sehr stark voneinander abweichen. Gleichwohl glaube ich aber doch, dass es die vorherrschende Meinung ist, dass bei dem ersten Physikunterricht der Schüler mit den ihn im täglichen Leben umgebenden Dingen zunächst bekannt gemacht werden muss. Sicher werden die Niveauflächen den Schüler zunächst weniger interessieren, als der Phonograph, die Photographie mit Röntgenstrahlen, die Telegraphie ohne Draht und dergleichen mehr. — Das Buch enthält auch die Grundlehren der Astronomie und mathematischen Geographie, sowie die der Chemie. Es scheinen dies Erfordernisse der österreichischen Unterrichtspläne zu sein. B. Nebel.

Oeuvres scientifiques de L. Lorenz. Revues et annotées par H. Valentiner. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg, Tome second. Premier fascicule. Copenhague 1899, Librairie Lehmann & Stage. 315 S.

Da die früher erschienenen Teile schon in diesen Blättern besprochen worden sind, so können wir uns auf die Anführung der in diesem Bande enthaltenen Arbeiten beschränken. Der erste Gegenstand betrifft eine Abhandlung über die Elastizitätstheorie homogener Körper mit konstanter Elastizität. Die zweite Arbeit handelt über die Zahl der in einem Milligramm Wasser enthaltenen Moleküle. Die dritte lautet: Bestimmung des Wärmegrades in absoluten Einheiten. Die fünf letzten beziehen sich auf die Elektrizität, nämlich der elektrische Widerstand des Quecksilbers in absoluten Einheiten, über die Methoden zur Bestimmung des Ohm, Bestimmung des elektrischen Widerstandes des Quecksilbers in absoluten elektromagnetischen Maßen, über die Ausbreitung der Elektrizität und über die Leitung der Metalle hinsichtlich der Elektrizität und der Wärme.

B. Nebel.

A treatise on dynamics of a partiell with numerous examples by Edward John Routh. Cambridge 1898. At the university press. 417 S. Preis 14 sh.

Vor nicht langer Zeit wurde in diesen Blättern die Dynamik starrer Körper von Routh besprochen, welche in deutscher Übersetzung mit einem Vorwort von Felix Klein dem deutschen Publikum zugänglich gemacht worden ist. Jetzt liegt in englischer Sprache die Dynamik eines Teilchens vor, die in der gleichen Weise behandelt wird, wie die Dynamik starrer Körper. Sobald ein Ergebnis abgeleitet ist, wird dieses unmittelbar darauf an ausgewählten Beispielen, die grösstenteils Examensaufgaben waren, gründlich eingeübt. Erst dann wird zu einem neuen Problem übergegangen. Bezüglich der der deutschen Litteratur gegenüber eigenartigen Behandlung der Materie sei auf die frühere Besprechung verwiesen.

B. NEBEL.

Traité d'astronomie stellaire par CH. ANDRÉ. Première partie. Étoiles simples. Avec nombreuses figures et 2 planches. Paris 1899, Gauthier-Villars. 344 S. Preis 9 Fr.

Durch die Herausgabe des Unterrichtsstoffes, den der Verfasser seit mehreren Jahren an der Universität Lyon vorträgt, beabsichtigt er denjenigen Teil der Astronomie, den er als die Herschelsche Astronomie bezeichnet, wieder zu grösserem Ansehen zu bringen. Die allmähliche Vernachlässigung dieses Teiles sei hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass kein einheitliches Werk existiere, welches die in den verschiedensten Blättern veröffentlichten Arbeiten der Astronomen im Zusammenhang darstellt. Der zweite Teil soll die Doppel- und mehrfachen Sterne enthalten, während in dem dritten Teil die Hilfsmittel, nämlich die Photometrie, die Photographie und die Spektroskopie bearbeitet werden. Ein solches Werk, welches insbesondere der geschichtlichen Entwickelung Rechnung trägt, wird überall mit Freuden begrüsst werden.

B. NEBEL.

Das Aluminium, seine Darstellung, Eigenschaften, Verwendbarkeit und Verwendung. Zweite, wesentlich vermehrte Auflage. Von RICHARD KÖHLER. Altenburg 1898, Verlag der Schnuphase'schen Hofbuchhandlung (Max Lippold). 71 S.

Wer sich für das Aluminium interessiert, der findet in diesem kleinen Buche eine hinreichende allgemeine Belehrung. Namentlich findet er auch Aufschluss über das „Für und Wider" des Aluminiums bei Kochgeschirren und Gefässen für Flüssigkeiten. Wer aber das Aluminium in einen Betrieb einführen will, nach den besten Aluminiumlötmitteln sucht und dergleichen mehr, der sucht hier vergebens nach Rat. Vielleicht geht der Verfasser bei einer neuen Auflage noch einen Schritt weiter und gestaltet das kleine Buch zu einem Handbuch über Aluminium, wodurch er sich bei Vielen Dank erwerben wird.

B. NEBEL.

Die moderne Entwickelung der elektrischen Prinzipien. Fünf Vorträge von FERDINAND ROSENBERGER. Leipzig 1898, Verlag von Johann Ambrosius Barth. 170 S. Preis 3 Mk.

Die vorliegenden fünf Vorträge verdanken ihre Entstehung einem Ferienkursus für Lehrer höherer Schulen, die in die modernen Anschauungen über das Wesen der Elektrizität eingeführt werden sollen. Für die Drucklegung wurden die Vorträge noch ergänzt und mit wissenschaftlichen Anmerkungen versehen. Wie aus den angeführten Titeln zu ersehen ist, haben die Vorträge einen geschichtlichen Charakter. Der erste Vortrag um-ıst die Theorien der elektrischen Imponderabilien im vorigen Jahrhundert, hrend die in unserem Jahrhundert Gegenstand des zweiten Vortrages d. Der dritte Vortrag ist dem Begründer der modernen Anschauungen widmet und hat als Titel: Feraday und seine Umgestaltung der elekschen Fundamente. An den vierten Vortrag: Die moderne Gestaltung der ktrischen Theorien, schliesst sich ein Gleichnis an. Der letzte Vortrag andelt die Elektrizität und die fundamentalen Grenzbegriffe der Physik. s Gleichnis wäre besser unterdrückt worden, da es in den übrigen hmen nicht hineinpasst.

B. NEBEL.

---

hrbuch der Mechanik (Cours de mécanique). Von CH. STURM. Übersetzt von THEODOR GROSS. Erster Band. Berlin 1899, Verlag von S. Calvary & Co. 258 S. Preis 6 Mk., in eleg. Leinenband 7 Mk.

Die durch besondere Klarheit sich auszeichnenden Werke von Ch. Sturm d den deutschen Fachgenossen längst bekannt. Um nun die Mechanik em grösseren Leserkreis zugänglich zu machen, soll diese auch in deuter Übersetzung erscheinen. Nur wenige Änderungen wurden dabei vornommen, die sich hauptsächlich auf die Formeln beziehen, um sie mit ı neueren Vorstellungen in Übereinstimmung zu bringen. Die im Ang befindlichen Aufgaben werden mit Lösungen versehen und zu einem tten Bande vereinigt. Dieser und der zweite Band werden demnächst scheinen.

B. NEBEL.

---

undlagen der Lufttechnik. Gemeinverständliche Abhandlungen über eine neue Theorie zur Lösung der Flugfrage und des Problems des lenkbaren Luftschiffes. Von MAX LOCHNER. Berlin 1899, Verlag von W. H. Kühl. 33 S. Preis M. 1. 60.

An der Hand der Elementarsätze der Lufttechnik weist der Verfasser nächst auf die Irrtümer hin, die so viele Erfinder von Luftschiffen behen, wenn sie die Verhältnisse bei dem Wasser einfach auf die Luft auben übertragen zu dürfen. Der Hauptunterschied liegt in der Verchtung der Luft und der Unzusammendrückbarkeit des Wassers. Bei der ronautik ist daher für eine beständige Kompression der Luft zu sorgen, e nur bei möglichster Beschränkung abzufliessen vermag. Dies ist der rnpunkt der vorliegenden Erfindung, deren technische Gestaltung sich an e Verhältnisse bei den Vogelflügeln anlehnt, bei denen auch die eine ante versteift ist, während die andere mehr und mehr verläuft. Aus den igegebenen Figuren ist zu ersehen, in welcher Weise die Erfindung zuchst praktisch durchgebildet zu denken ist. Mögen die praktischen rsuche die Theorie nicht im Stiche lassen.

B. NEBEL.

Die Entstehung des Lebens, aus mechanischen Grundlagen entwickelt von Ludwig Zehnder. Erster Teil. Moneren. Zellen. Protisten. Mit 123 Abbildungen im Text. Freiburg, Leipzig und Tübingen 1899, Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). 256 S. Preis 6 Mk.

Wie der Verfasser in seinem vor zwei Jahren erschienenen Buche: „Die Mechanik des Weltalls" bestrebt war, alle physikalischen und chemischen Kräfte auf die Gravitation als einzige Fundamentalkraft zurückzuführen und die wichtigsten thatsächlich feststehenden Vorgänge in der unorganischen Welt aus diesen untersten mechanischen Grundlagen folgerichtig abzuleiten, so unternimmt er es in dem vorliegenden Werke, aus denselben Grundlagen die Vorgänge in der organischen Welt zu entwickeln. Ausgehend von der Atomlehre, schildert der Verfasser zur Erklärung der Aggregatzustände die Vorgänge der Bewegung der Molekeln, welche dem Physiker aus der kinetischen Gastheorie bekannt sind, und gelangt dabei dazu, die Erscheinungen der Wärme, des Schalls, der Elektrizität und des Lichts auf bestimmte Bewegungsvorgänge, also auf rein mechanische Grundlagen zurückzuführen. Bei der näheren Betrachtung der Bewegung der mit Ätherhüllen umgebenen Atome ergeben sich ohne jeden Zwang die Molekeln, sowie deren Wachstum und deren Struktur. Nun beginnt der Kampf ums Dasein; Änderungen in der Affinität, die Osmose, der Einfluss der Strahlung und dergleichen mehr kommen zur Geltung, wodurch sich der Fundamentalsatz der Biologie ergiebt: „Die Substanz hat das Bestreben, sich zu vermehren." — Die Bildung der Molekeln zu Gruppen und deren Gleichgewichtszustand führen zu der Struktur und gewähren einen Einblick in deren Vielseitigkeit. Höchst interessant ist zu verfolgen, wie die Fistellen entstehen, und von welcher Wichtigkeit sie sind z. B. hinsichtlich der Assimilation, der Nahrung und Belichtung. Dinge, zu denen der Biologe z. B. nur durch weitere Ausbildung der Versuchsmethoden schrittweise gelangen kann, wenn das Vordringen überhaupt praktisch möglich ist, finden hier ihre ungezwungene natürliche Erklärung, so z. B. das Umgebensein der Molekeln mit einer Membran, sowie das zum Leben und zur Fortpflanzung nötige gleichzeitige Vorhandensein eines Zellkernes und der Protoplasmasubstanz. Überall finden sich in der biologischen Litteratur zahlreiche Stützpunkte für die Anschauungen des Verfassers, der sich in diesem ersten Teil seines Werkes zunächst auf die Moneren, Zellen und Protisten beschränkt hat. Mit grossem Interesse wird man dem Verfasser bei seinem Aufstieg folgen, den er von den einfachsten mechanischen Vorgängen der unorganischen Materie aus unternimmt, dann zu den verwickelteren vordringt, um sich schliesslich in das Pflanzen- und Tierreich zu erheben. Das Endziel führt zu dem höchst entwickelten Lebewesen, dem Menschen, bei welchem das Seelenleben von grösster Bedeutung ist, wobei in dem letzten Teil des Werkes das Verständnis für die in den einfacheren Lebewesen sich abspielenden seelischen Vorgänge eröffnet werden soll unter strenger Vermeidung der Teleologie.

B. Nebel.

Unités électriques absolues. Leçons professées à la Sorbonne 1884—1885 par G. Lippmann. Rédigées par A. Berget. Paris 1899, George Carré et C. Naud. 240 S. Preis 10 Fr.

Durch die Herausgabe dieser an der Sorbonne früher gehaltenen Vorlesungen über die elektrischen absuluten Einheiten soll es den jungen Physikern und Elektrikern ermöglicht werden, sich leicht in diese Materie einzuarbeiten, die von dem Verfasser in solch klarer Weise behandelt worden ist. Die Einleitung geht von der Mechanik aus. Daran schliessen sich die elektrischen Maßsysteme an, und zwar wird begonnen mit dem elektrischen System, welchem das elektromagnetische folgt. Beide unterscheiden sich durch eine Potenz von V. Durch diese Geschwindigkeit wurde die Brücke zur elektromagnetischen Lichttheorie geschlagen, die in dem dritten Teil enthalten ist. Den Anhang bilden 1. das Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität, und 2. die Lippmann'schen Quecksilber-Galvanometer und -Dynamometer. Sicherlich wird sich auch in Deutschland dieses Buch schon seiner präzisen Darstellungsweise wegen rasch Eingang verschaffen.

B. Nebel.

Premiers principes d'électricité industrielle. Piles, accumulateurs, dynamos, transformateurs par Paul Janet. Ouvrage couronné par l'académie des sciences. Troisième édition, entièrement refondue. Paris 1899, Gauthier-Villars, 280 S.

Wenn auch das Grundgerippe aus den früheren Auflagen unverändert in die dritte Auflage herübergenommen worden ist, so war der Verfasser doch bestrebt, den Fortschritten in der Elektrotechnik überall Rechnung zu tragen. Erwähnt seien in erster Linie die Akkumulatoren, die durch ihre Verwendung bei den Strassenbahnen nunmehr auch schnell und mit konstanter Spannungsdifferenz geladen werden. Einzelne Kapitel über Dynamomaschinen, Wechselstrommaschinen und Transformatoren sind geändert worden, insbesondere sind die Abbildungen durch solche von modernem Typus ergänzt worden. Die Generatoren für Mehrphasenstrom sind bei den gewöhnlichen Wechselstrommaschinen behandelt worden, während die Drehstrommotoren für den zweiten Teil dieses Werkes reserviert worden sind. Die Anordnung des Stoffes zeichnet sich durch grosse Übersichtlichkeit aus.

B. Nebel.

Société internationale des électriciens. Une excursion électrotechnique en Suisse par les élèves de l'école supérieure d'électricité, avec une préface de P. Janet. Paris 1899, Gauthier-Villars. 92 S. Preis 2 Fr. 75 c.

In dem vorliegenden Werkchen sind in Kürze dargestellt diejenigen Punkte, welche für die Teilnehmer an der Exkursion von besonderem Interesse gewesen sind. Dass die Schweiz hinsichtlich der grossen Verschiedenheit ihrer elektrischen Anlagen namentlich für angehende Technikcr ein reiches Feld darbietet, ist auch in Deutschland längst gewürdigt worden; denn auch von hier aus werden zahlreiche Exkursionen und wissenschaftliche Reisen nach der Schweiz unternommen. Durch den Abdruck des Reiseplanes wird es anderen ermöglicht, ohne diese schwierige Arbeit sich den gleichen Genuss zu verschaffen.

B. Nebel.

Soleil, terre et électricité. (Un chapitre de la théorie nouvelle de l'univers.) Par le prof. Jr. Skwortzow. Kharkow 1898. 8 S.

Die fundamentale Form der Energie ist die Elektrizität, alle anderen Energieformen sind nur abgeleitete und haben daher sekundären Charakter. Demnach erwärmt und beleuchtet die Sonne die Erde nicht direkt, vielmehr vermag die Sonne nur durch elektrische Induktion Störungen im Gleichgewicht der Energie der Erde zu erzeugen, d. h. Potentialdifferenzen hervorzurufen. Die Lichterscheinungen sollen in den Luftschichten ihren Ursprung haben, während die Entstehung der Wärme den Flüssigkeiten und den festen Teilen der Erde zugeschrieben werden. Die Wärmeerscheinungen sollen ihre Entstehung Thermoströmen verdanken, die zwischen dem Äquator und den Polen entstehen. Die Erdströme sind die Ursache für die chemischen Prozesse, für die Verdampfung und Verdichtung des Wassers (Schnee, Eis), für die Ebbe und Flut und für die Strömungen in der Luft und den Meeren. Die vorliegende, in französischer Sprache erschienene Broschüre ist ein Exposé des in russischer Sprache erschienenen Werkes.

B. Nebel.

Inledning till theorien för de elektriska strömmarne af A. V. Bäcklund. Efter författarens universitetsföreläsningar under första hälften af Vårterminen 1898, Gleerupska Universitetsbokhandeln. Lund (Hjalmar Möller). 112 S.

Die Einleitung in die mathematische Theorie der elektrischen Ströme wird mit der Behandlung der elektrischen stationären Ströme von allgemeinem Charakter begonnen. Das zweite Kapitel greift auf die mechanische Wärmetheorie zurück und hebt namentlich die Sätze besonders hervor, welche für die Theorie der Elektrizität von Bedeutung sind. Das dritte und letzte Kapitel enthält die elektrische Stromarbeit, wobei nicht nur die metallischen Leiter, sondern auch die Elemente, die Elektrolyse und die Akkumulatoren untersucht werden.

B. Nebel.

Bibliographie.

Periodische Schriften.

ematica. Bd. 24. Stockholm, Beijer. Kr. 12. 50.
er sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Mathem.-phys. Klasse. 52. Bd. II. zig, B. G. Teubner. M. —. 60.
e, die, der Physik im Jahre 1899. Dargestellt von der physikal. Gechaft zu Berlin. 55. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. Braunschweig, reg & Sohn. M. 26.
ler Mathematik. 29. Bd. 2. Heft. Berlin, Reimer. M. 5.
nautisches, oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1903 zur Bemung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Behtungen. Herausgegeben vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1. 50.
n der Hamburger Sternwarte. Nr. 6. Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 4.
DE, Halfmaandelijks tijdschrift voor allen, die belang stellen in vlug nauwkeurig rekenen. Red.: A. LABBERTON. 1e jaarg. 1900/01. Nr. 1. dam, Pomper. Per jaarg. (24. Nrs.) Fl. 1.
richte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. I. Abt. 108. Bd. 8. — 10. Heft. n, Gerold's Sohn. M. 4. 50.
elbe. 109. Bd. 1. — 3. Heft. Ebenda. M. 5. 70.
elbe. Abt. IIa. 108 Bd. 10. Heft. Ebenda. M. 3. 28.
elbe. 109. Bd. 1. — 3. Heft. Ebenda. M. 3. 70.
hungen des königl. preuss. meteorolog. Instituts. 1898. 2. Heft. Ergeb- der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1898. Berlin, r & Co. M. 3. 50.
elbe. 1899. 2. Heft. Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in dam im Jahre. 1899. Ebenda. M. 3. 50.
elbe. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im e 1898. Ebenda. M. 8. 50.
schrift der astronomischen Gesellschaft. 35. Jahrgang. 1. und 2. Heft. zig, Engelmann. à M. 2.
physikalische. Herausgegeben von E. RIECKE und H. TH. SIMON. 2. Jahrg. ber 1900 bis September 1901. 52. Nrn. Leipzig, Hirzel. Viertelj. M. 5.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Allgemeines.

OR., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Bd. 1. Abtlg. 1668 — 1699. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6. 60.
R., Sophus Lie. Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften. (Aus: liotheca mathematica.") Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
ILEO, Le opere. Edizione nazionale. Vol. X. Firenze, Barbera.
CH., Mathématique de l'histoire (géométrie et cinématique). Lois DE K, chronologie géodésique de la Bible. Bruxelles, Kiessling. Fr. 12.

Müller, Fel., Mathem. Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. 1. Hälfte. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

Suter, Heinr., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. (Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissensch. 10. Heft. Zugleich Supplement zum 45. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.

Reine Mathematik.

Boehm, Karl, Zur Integration partieller Differentialsysteme. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1.80.

Bortolotti, Ett., Lezioni di calcolo infinitesimale. Modena, lit. Pizzolotti.

Budisavljević, Eman. v., Leitfaden für den Unterricht der höheren Mathematik an der kaiserl. und königl. Artillerie- und der Pionier-Kadettenschule. Wien, Seidel & Sohn. M. 14.40.

Dziobek, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Teil. Analytische Geometrie der Ebene. Berlin, Hoffmann. M. 6.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. I. Teil. 2. Bd. 4. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.80.

Friedrich, Max, Katechismus der analytischen Geometrie. 2. Aufl. Durchgesehen und verbessert von Ernst Riedel. (Weber's illustrierte Katechismen Nr. 116.) Leipzig, Weber. geb. M. 3.

Gauss, Carl Friedr., Werke. VIII. Bd. Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig, B. G. Teubner. kart. M. 24.

Gazzaniga, E. Pietro, Aritmetica generale. Nuovi studî e teoremi. Bergamo, fratelli Bolis. L. 8.

Glinzer, E., Kurzes Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für gewerbliche Schulen sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Dresden, Kühtmann. M. —.80, geb. M. 1.

Gundelfinger, S., Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen. Leipzig, Veit & Co. In Leinw. kart. M. 2.80.

Guradze, H., Die Reye'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde behandelt mittels einer besonderen Art bilinearer Formen. Dissert. Breslau.

Haase, Geo., Repetitorium der Physik. Freiburg i. Br., Speyer & Kaerner. M. 2, geb. M. 2.40.

Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. III. Bd. 2. Lieferung. Berlin, Dames. M. 5.

Heilermann, H., und Diekmann, J., Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen. 2. Teil. Die Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Die Progressionen. Die kubischen und biquadratischen Gleichungen. Niedere Analysis. 5. Aufl. Essen, Baedeker. geb. M. 2.80.

Hossenfelder, E., Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. Programm. Strasburg i. Westpr.

Jochnick, W., Det viktigaste af differential-och integral-räkningen. Stockholm, Bonnier. Kr. 1.

Lechthaler, A., Zur Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen und der allgemeine Proportionalitätssatz. Programm. Linz.

Lee, A., Integral tables of $F(r, v)$ and $H(r, v)$ functions. London. 2 s. 6 d.

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. 25. Aufl. Leipzig, Brandstetter. M. 4.

Martus, H. C. E., Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an deutschen höheren

Schulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Ergebnisse zu einem Übungsbuch vereint. 3. Teil. Aufgaben. Dresden, Koch. M. 4. geb. M. 4. 50.

culation Model answers. Mathematics. Being the London University Matriculation Papers in Mathematics from June, 1893, to June, 1900. With answers by Tutors of University Correspondence College. London, Clive. 2 s.

oirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the jubilee of Sir George Stokes, Bart. Cambridge, University Press. Cloth. 21 s.

(Enthält Abhandlungen von A. Cornu, H. F. Baker, A. Berry, L. Boltzmann und Mach, E. W. Brown, W. Burnside, A. R. Forsyth, E. W. Hobson, H. Lamb, J. Larmor, G. D. Liveing, O. J. Lodge, A. E. H. Love, E. O. Lovett, H. M. Macdonald, P. A. Mac Mahon, A. A. Micheson, G. Mittag-Leffler, H. Poincaré, H. W. Richmond, A. Schuster, C. Taylor, H. M. Taylor.)

l, F., Recueil de problèmes de géométrie analytique, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Solutions des problèmes donnés aux concours d'admission à l'école polytechnique de 1860 à 1900. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 6.

l, Ernesto, Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Deutsche Ausgabe von Herm. Leitzmann (Teubners Sammlung Bd. III). geb. M. 10.

l, Ernst, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theorie, Litteratur). Deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp. Analysis und Geometrie. 1. Teil. Die Analysis. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

, Ang., Sull' influenza di alcuni singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P. Mondovì, Vescovile.

ello, Dom., Sulle funzioni trascendente intere: tesa di laurea. Messina, tip. dell'Epoca.

ioni riguardanti la geometria elementare, trattate da U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calo, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vitali, raccolte e coordinate dal prof. F. Enriques. Bologna, Zanichelli. L. 12.

, Gregorio, Lezioni di algebra complementare. Verona-Padova, fratelli Drucker. L. 10.

l, Ernst, Katechismus der Planimetrie, mit einem Anhang über harmon. Teilung, Potenzlinien und das Berührungsproblem des Apollonius. (Webers illustr. Katechismen Nr. 225.) Leipzig, Weber. geb. M. 4.

e, E., et Lévy, L., Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Tome I. Calcul différentiel. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.

, J., Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (synthetischen Geometrie, Geometrie der Lage). 1. Teil. Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. (Kleyers Encyklopädie.) Stuttgart, Maier. M. 5.

milch, Osk., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2. Teil. Aufgaben aus der Integralrechnung. 4. Aufl. Bearbeitet von R. Henke. Leipzig, B. G. Teubner. M. 9.

nflies, Arth., Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII. Bd. 2. Heft). Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

Young, J. W. A., and Linebarger, C. E., The elements of the differential and integral calculus, based on Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von W. Nernst und A. Schönflies. New-York, Appleton. Cloth. $ 2.50.

Angewandte Mathematik.

Adamczik, Jos., Compendium der Geodäsie. Wien, Deuticke. M. 10.

Appell, P., Traité de Mecanique rationelle. Tome III. Equilibre et mouvement des milieux continus. Fascicule I[er]. Paris, Gauthier-Villars. Le Tome III complet Fr. 15.

Autenrieth, Ed., Technische Mechanik. Berlin, Springer. M. 12. geb. M. 13.20.

Bolte, F., Die Nautik in elementarer Behandlung. Stuttgart, Maier. M. 5.

Castle, Frank, Workshop Mathematics. Parts 1 and 2. Illust. London, Macmillan. each. 1 s. 6 d.

Cerri, Aug., Triangoli sferici con lati molto piccoli in confronto del raggio della sfera. Pavia, tip. Cooperativa.

Хандриковъ, М., Теорія Фигуры земли (Высшая геодезія). Кіевъ, Тип. Кульженко.

Chandrikoff, M., Theorie der Erdgestalt (Höhere Geodäsie). Kiew. R. 2.

Cohn, Fritz, Ableitung der Deklinationen und Eigenbewegungen der Sterne für den internationalen Breitendienst (Veröffentlichungen des Centralbureaus d. internation. Erdmessung, neue Folge Nr. 2). Berlin, Reimer. M. 3.

Doležal, Ed., Über Photogrammetrie und ihre Anwendungen. (Aus: Schriften des Vereins zur Verbreitung naturw. Kenntnisse in Wien. 40. Jahrg. 10. Heft.) Wien, Braumüller. M. 1.80.

Fischer, Otto, Der Gang des Menschen. 3. Teil. (Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaft. Mathem.-physikal. Klasse, 26 Bd. Nr. III.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.

Föppl, Aug., Vorlesungen über die technische Mechanik. 2. Bd. Graphische Statik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

Fuhrmann, Arwed, Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. (In sechs Teilen.) 1. Teil. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. 2. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. M. 6.

Heun, Karl, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Bericht (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, IX. Bd. 2. Heft.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.

Johnson, J. B., Theory and practice of surveying; for surveyors and engineers generally, but especially for students of engineering. 15[th] edition, revised and enlarged. New-York, Willey. Cloth. $ 4.

Martensson, Olof, Exempel i navigation och astronomi. Malmö, Envall. Kr. 3.

Moor, J. F. de, Leçons de géométrie descriptive sur le point, la droite et le plan. Edition revue. Bruxelles, Castaigne. Fr. 4.

Nicoli, Fr., Geometria descrittiva. Modena, lit. Pizzolotti.

Schilling, Frdr., Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

Scholz, P., Über die Reduktion des Drei-Körper-Problems auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung. Dissertation. Berlin.

Sonnet, H., Dictionnaire des mathématiques appliquées, comprenant les principales applications des mathématiques, à l'architecture, à l'arithmétique commerciale, à l'arpentage, à l'artillerie, aux assurances, à la balistique, à la banque, à la charpente, aux chemins de fer, etc., et l'explication d'un grand nombre de termes techniques usités dans les applications. 6[e] édition. Paris, Hachette. Fr. 30.

Тиме, Г., Аналитическая механика. Вып. 3. Изд. Горнаго Института.
THIEME, G., Analytische Mechanik. 3. Heft. St. Petersburg, Berginstitut. R. 1. 25.

Зубовъ, И. М., Моменты инерціи, статическіе моменты и др. элементы сѣченій частей металлич. Формъ.
SUBOFF, J. M., Trägheitsmomente, statische Momente und andere Elemente der Querschnitte von Teilen von Metallkonstruktionen. Moskau. R. 1. 75.

Physik und Meteorologie.

BEZOLD, WILH. v., Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissenschaftlichen Luftfahrten des deutschen Vereins zur Förderung der Luftschiffahrt in Berlin. (Aus: Assmann und Berson, wissenschaftliche Luftfahrten.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1.

BUCKINGHAM, EDGAR, An outline of the theory of Thermo-Dynamics. Macmillan. 8 s.

CASTELLI, ENR., Energia raggiante: conferenze sperimentali. Aquila, Grossi.

CLAUSEN, FR., und BRONK, O. v., Neue Erscheinungen auf dem Gebiete der Physik. Clausen & v. Bronk. M. —. 60.

CRANZ, C., und KOCH, K. R., Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes, I. Schwingungen in verticaler Ebene. B. Versuche mit kleinkalibrigen Gewehren. (Aus: Abhandlungen der bayer. Akad. der Wissenschaften.) München, Franz. M. 1. 60.

DÉCOMBE, L., La célérité des ébranlements de l'ether. Paris, Carré & Naud. Fr. 2.

EBERT, H., Die Theorie des Elektromagnetismus. (Handbuch der Elektrotechnik, I. Bd. 3. Abtlg.) Leipzig, Hirzel. M. 4. 50.

GALLENMÜLLER, J., Die Dauer der Dämmerung auf der Erdoberfläche. Programm. Aschaffenburg.

GILLES, J. J., Die Gravitation der kleinsten Massenteilchen. Programm. Essen.

HEPPT, O., Scheinbare Anziehung und Abstossung von Kugeln, die in einer klebrigen Flüssigkeit rotieren. Dissertation. Heidelberg.

HIRSZBERG, L., Über elektrische Potentialmessungen bei Spitzenentladungen in Luft von normalem Druck. Dissertation. Heidelberg.

HOLLARD, AUGUSTE, La théorie des ions et l'électrolyse. Paris, Carré & Naud. cart. Fr. 5.

KAPP, GISB., Elektrische Wechselströme. Deutsch von HERM. KAUFMANN. 3. Aufl. Leipzig, Leiner. M. 2, geb. M. 2. 75.

KAYSER, H., Handbuch der Spectroscopie. 1. Bd. Leipzig, Hirzel. M. 40, geb. M. 44.

KÖNIGSBERGER, J., Über die Absorption des Lichtes in festen Körpern. Hab. Freiburg.

KOHLRAUSCH, FRDR., Die Energie oder Arbeit und die Anwendungen des elektrischen Stromes. Leipzig, Duncker & Humblot. M. 2. 40.

KOLLERT, J., Die galvanischen und thermoelektrischen Stromquellen. (Handbuch der Elektrotechnik, III. Bd. 1. Abtlg.) Leipzig, Hirzel. M. 3.

LANGER, H., Über die mechanischen Principien der modernen Elektrizitätslehre (Fortsetzung). Programm. Linz.

LESSING, A., Über die Elasticität einiger Kupfer-Nickel-Legierungen. Dissert. Berlin.

LIEBENOW, C., Die atmosphärische Elektrizität, ihre Verteilung und wahrscheinlichen Ursachen. Halle, Knapp. M. 2.

MANNING, G. L., Beitrag zur Kenntnis der Absorption des Lichtes. Dissertation. Berlin.

Micheli, E. J., Über den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magnetooptische Phänomen. Dissertation. Leipzig.

Neuhoff, O., Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft und deren rechnerische und graphische Bestimmung. Dissertation. Berlin.

Saur, K., Volt-Ampère-Watt-Pferdestärken. 12 graphische Tabellen über die in der Praxis zumeist vorkommenden Werte und Wirkungsgrade. Leipzig, Leiner. kart. 1 M.

Steinmetz, Charles Proteus, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Deutsche Ausgabe. 2. Hälfte. Berlin, Reuther & Reichard. Subskriptionspreis M. 6. (Kompl. erh. Pr. M. 12, geb. M. 13.50)

Teudt, H., Über die Änderung der spezifischen Wärmen wässeriger Salzlösungen mit der Temperatur. Dissertation. Erlangen.

Thompson, S. P., Die dynamoelektrischen Maschinen. 6. Aufl. 8. Heft. Halle, Knapp. M. 2.

Waals, J. E. van der, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Teil. Binäre Gemische. Leipzig, Barth. M. 5, geb. M. 6.

Warthmann, F., Das Klima der Rheinebene, der Baar und des hohen Schwarzwaldes mit besonderer Berücksichtigung des Luftdruckes. Dissertation. Freiburg.

Wiener †, Chr., Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung. Herausgegeben von H. Wiener und O. Wiener. (Abhandl. der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher, 73. Bd. Nr. 1.) Leipzig, Engelmann. M. 12.

Zeuner, Gust., Technische Thermodynamik. 2. Aufl. Zugleich 4. Aufl. der „Grundzüge der Wärmethorie". 1. Bd. Fundamentalsätze der Thermodynamik. Lehre von den Gasen. Leipzig, Felix. M. 1

Mathematisches Abhandlungsregister.

1899.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. Dezember.

A.

Abbildung.

1. Sur la représentation conforme des variétés à trois dimensions. E. Cotton. Compt. Rend. CXXVII, 349.
   Vergl. Mehrdimensionale Geometrie 399.

Abelsche Transcendenten.

2. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1898, II, 477.
3. Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXXVII, 579.
4. Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes. G. Humbert. Compt. Rend. CXXVII, 857.
5. Sur les fonctions abéliennes singulières. G. Humbert. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 233.

Absolute Geometrie.

6. Alcune ricerche di geometria non euclidea. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 3, II, 95.

Aerodynamik.

7. Applications of diffusion to conducting gases. J. S. Townsend. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 469.

Akustik.

8. On the cooling of air by radiation and conduction and on the propagation of sound. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 308.

Analytische Geometrie der Ebene.

9. Les courbes images et les courbes symétriques. G. de Longchamps. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 373.
10. Sur un système de cubiques à trois points d'inflexion réels. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 98.
11. Contribution à la théorie des cubiques cuspidales. Ch. Zahradnik. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 389.
12. Sur une hypocycloïde à trois rebroussements. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 385.
   Vergl. Kegelschnitte.

Analytische Geometrie des Raumes.

13. Le congruenze. T. Cifarelli. Annali mat. Ser. 3, II, 139.
14. Sur quelques questions de la théorie des courbes à double courbure: H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 508.

215. Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique. Gem. Pirondini. Crelle CXXI, 245.
216. Sur un théorème de Mr. Cosserat. Tzitzeica. Compt. Rend. CXXVII, 167.
217. Enveloppe de la trace d'un cône mobile sur un plan de section droite du cylindre. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 338.
Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

Astronomie.

218. Tables numériques pour faciliter le développement par interpolation de la fonction perturbatrice. O. Callandreau. Compt. Rend. CXXVII, 6.
219. Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. O. Callandreau. Compt. Rend. CXXVII, 211.
220. Sur l'intégration du problème restreint des trois corps avec la première puissance de la masse troublante. J. Perchot et W. Ebert. Compt. Rend. CXXVII, 504.
221. On the forced precession and nutations of a rotating ellipsoidal shell containing liquid. W. Mc. F. Orr. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 545.
222. Sur la théorie de la lunette zénithale. Hatt. Compt. Rend. CXXVII, 291.

Ausdehnungslehre.

223. Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés. F. Caspary. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 248 (vergl. Bd. XLIV Nr. 232).

B.

Bestimmte Integrale.

224. Sur le second théorème de la moyenne. Tikhomandritzky. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 173.
225. The theory of the G-function. E. W. Barnes. Quart. Journ. math. XXXI, 264.
226. Sur la réduction des intégrales multiples. Ch. J. de la Vallée-Poussin. Compt. Rend. CXXVII, 950.
227. Réduction des intégrales multiples généralisées. Ch. J. de la Vallée-Poussin. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 191.
228. Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algebriques. E. Picard. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 5.
229. Valeur de $\int\int x^{1/2} y^{1/2} (1-x-y)^{2/3} dx\,.\,dy$ à l'intérieur d'un triangle donné. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 462.
230. Valeur de $\int\int\int \left[(x+y+z)^2 - \frac{9a^2}{5}\right] dx\,.\,dy\,.\,dz$ à l'intérieur d'un certain volume. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 464.
Vergl. Funktionen 317. Quadratur.

D.

Determinanten.

231. Sur la théorie des abaques à alignements. E. Duporcq. Compt. Rend. CXXVII, 265.
232. Sui determinanti d'ordini infinito. T. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 143.
233. Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. T. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 3, I, 83.
234. Appunti sulla moltiplicazione di determinanti normaloidi. T. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 3, II, 229.
235. A simple proof of the reality of the roots of discriminating determinant equations and of kindred facts. E. B. Elliott. Quart. Journ. math. XXXI, 233.
Vergl. Imaginäres.

Differentialgleichungen.

236. Über die Irreduktibilität algebraischer Funktionalgleichungen und linearer Differentialgleichungen. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1899, II, 672.

237. Über die Irreduktibilität algebraischer Differentialgleichungen. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1899, II, 783.
238. Zur Theorie der associierten Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 182.
239. Über lineare Differentialgleichungen mit mehrwertigen algebraischen Koeffizienten. L. W. Thomé. Crelle CXXI, 1. (Vergl. Bd. XLIV Nr. 255.)
240. Über lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungierten zu derselben Art gehören. Rich. Fuchs. Crelle CXXI, 205.
241. Sur les équations aux différentielles totales linéaires. Alf. Guldberg. Compt. Rend. CXXVII, 1199.
242. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werten des Arguments. Ad. Kneser. Crelle CXX, 267. (Vergl. Bd. XLII Nr. 483.)
243. Studî sulle equazioni differenziali lineari. Ul. Dini. Annali mat. Ser. 3, II, 297; III, 125.
244. Die Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Funktion der willkürlichen Konstanten ist. G. Wallenberg. Crelle CXXI, 210.
245. Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. J. Horn. Crelle CXX, 1. (Vergl. Bd. XLIV Nr. 250.)
246. Sur les équations différentielles du premier ordre. Arm. Cahen. Compt. Rend. CXXVII, 1196.
247. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXVII, 541, 945.
248. Sur les intégrales intermédiaires des équations du second ordre. E. Goursat. Compt. Red. CXXVII, 603.
249. Über eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. G. Wallenberg. Crelle CXX, 113.
250. Intégration de $(x+a)(x^2-a^2)y''-2x(x+a)y'+6ay=2(x-a)^3$. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 463.
251. On linear differential équations of the third and fourth orders in whose solutions exist certain homogeneous relations. D. F. Campbell. Quart. Journ. math. XXXI, 161.
252. Über die einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung adjungierten und associierten Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. E. Grünfeld. Crelle CXXI, 218.
253. Über Riccatische Differentialgleichungen höherer Ordnung. G. Wallenberg. Crelle CXXI, 196.
254. Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. M. Hamburger. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 140.
255. Über die singulären Lösungen der Differentialgleichungen höherer Ordnung. M. Hamburger. Crelle CXXI, 265.
256. Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes. Ed. Collignon. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 488.
257. Über Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Funktionen zweiter Art Genüge leisten. M. Krause. Annali mat. Ser. 3, I, 265.
258. Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. Riquier. Compt. Rend. CXXVII, 809.
259. Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche. Or. Tedone. Annali mat. Sér. 3, I, 283.
260. Intégrer un système de trois équations différentielles. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 461.
261. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. J. Le Roux. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 359.
262. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles réductibles aux équations différentielles ordinaires. J. Beudon. Compt. Rend. CXXVII, 1003.
263. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premièr ordre en involution. J. Beudon. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 351.
264. Zur Theorie der simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 222.

265. Applications of certain partial differential equations derived from Codazzis equations. Th. Craig. Crelle CXX, 165.
266. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. N. Saltykow. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 435.
267. Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. N. Saltykow. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 533.
268. Intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. V. Jamet. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 553.
269. Sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre $(px+qy)^2-2a(py-qx)+2F(z)=0$. A. Vacquart. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 134.
270. Sur quelques types intégrables d'équations aux dérivées partielles du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXXVII, 854.
271. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali. P. Medolaghi. Annali mat. Ser. 3, I, 229.
272. Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^{2n}=0$. Em. Almansi. Annali mat. Ser. 3, II, 1.

Vergl. Funktionen 314, 315. Mechanik. Mehrdimensionale Geometrie 400. Potential. Thetafunktionen.

Differentialquotient.

273. Über die Differentiale von symbolischen Ausdrücken. R. Lipschitz. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 122.

Differenzenrechnung.

274. Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. A. Hurwitz. Acta Math. XX, 285.
275. On the algebra of difference-tables. J. D. Everett. Quart. Journ. math. XXXI, 357.

Vergl. Reihen 454, 455.

Dreiecksgeometrie.

276. Egalité des aires d'un triangle et d'un quadrilatère. G. Candido. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 170.
277. Formules pour l'étude d'une figure remarquable. G. Candido. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 31.

E.

Elastizität.

278. Sulle vibrazioni dei solidi elastici. G. Lauricella. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 113.
279. On the application of force within a limited space required to produce spherical solitary waves or trains of periodic waves. Lord Kelvin. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 480; XLVIII, 227, 388.
280. Sur l'équilibre d'élasticité d'un bandage pneumatique. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXVII, 168.
281. Elastic stability of long beams under transverse forces. A. G. M. Michell. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 298.
282. Reflexion and refraction of elastic waves with seismological applications. C. G. Knott. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 64.
283. Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique. Eug. et Franç. Cosserat. Compt. Rend. CXXVII, 315.

Elektrizität.

284. Über vermeintlich irreversibele Strahlungsvorgänge. L. Baltzmann. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 182. — M. Planck ebenda II, 449; 1899, I, 440. (Vergl. Bd. XLIV, Nr. 38.)
285. Zur Prisson'schen Theorie der Elektrostatik, insbesondere über die elektrische Verteilung auf einem von drei Kugelflächen begrenzten Konduktor. E. Neumann. Crelle CXX, 60, 277.
286. The Thomson effect in a binary electrolyte. F. G. Donnan. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 529.

Theory of the Hall-effect in a binary electrolyte. F. G. Donnan. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 465.
On the pressure of rodiation, showing an apparent failure of the usual electromagnetic equations. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 522.
On the mechanical forces acting on a piece of iron carrying an electric current. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 154.
On the application of the gamma-function to an electrostatic problem. R. H. Jude. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 254.
A quantitative study of the higt-frequency induction-coil. W. P. Boynton. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 312.
On the theory of the conduction of electricity through gases by charged ions. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 253.
On the propagation of damped electrical oscillations along parallel wires. W. B. Morton. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 296.
On opacity. O. Lodge. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 385.
The equivalent resistance and inductance of a wire to an oscillatory discharge. E. H. Barton. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 433.
On the criterion for the oscillatory discharge of a condenser. E. H. Barton. Phil. Mag. Ser. XLVIII, 143.

Elimination.

Mémoire sur l'élimination. J. Hadamard. Acta Math. XX, 201.
Vergl. Gleichungen 348.

Ellipse.

Circle tangant à une ellipse. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 435.
Produit de deux longueurs égal à la somme des carrés des demi-axes d'une ellipse donnée. Ern. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 334. — A. Boulanger ibid. 335. — Mannheim ibid. 475.

Ellipsoid.

Sur les normales de l'ellipsoïde. O. Böklen. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 121.
Vergl. Astronomie 221. Elastizität 283. Hydrodynamik 352.

Elliptische Transcendenten.

Über die Gauss'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. L. Schlesinger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 346.
Sur l'équation d'Euler $\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\psi(x_1)}}$. E. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 293.
Sur le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. E. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 543.
Sur les systèmes de trois relations doublement quadratiques entre trois variables. G. Fontené et R. Bricard. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 437.
Vergl. Geschichte der Mathematik 336.

F.

Formen.

Sur le hessien d'une forme cubique binaire. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 459.
Il discriminante delle forme binarie del settimo ordine. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 255.

Funktionen.

Sur les fonctions de variables réelles. R. Baire. Annali mat. Ser. 3, III, 1.
Sur la convergence des réduites de la fonction exponentielle. H. Padé. Compt. Rend. CXXVII, 444.
Sur une fonction entière de trois variables dont une n'a aucune influence sur la valeur de la fonction pourvu qu'il existe un certain rapport de grandeur entre les deux autres. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 383.

310. Über diejenigen algebraischen Körper, welche aus zwei anderen komponiert sind. K. Hensel. Crelle CXX, 99. [Vergl. Bd. XLII Nr. 539 u. 540.]
311. Sur les zéros des fonctions entières. Em. Borel. Acta Math. XX, 357.
312. Sur la valeur asymptotique d'une fonction remarquée par M. Poincaré. S. Zaremba. Compt. Rend. CXXVII, 215.
313. Un applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa. Ul. Dini. Annali mat. Ser. 3, I, 39.
314. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. H. Poincaré. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 137.
315. Sur l'équation $\Delta u = e^u$. E. Picard. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 313.
316. Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. P. Stäckel. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 53. [Vergl. Bd. XLI Nr. 356.]
317. Sull' operazione funzionale rappresantata da un integrale definito considerata come elemento d'un calcolo. Ad. Viterbi. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 281. Ser. 3, III, 299.
318. Sulla razionalità dei piani multipli $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$. Am. Bottari. Annali mat. Ser. 3, II, 277.

Vergl. Abel'sche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Differenzenrechnung. Elliptische Transcendenten. Gleichungen. Hyperelliptische Transcendenten. Integration (unbestimmte). Invarianten. Kettenbrüche. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Variationsrechnung.

G.

Geometrie (höhere).

319. Sur le rapport anharmonique. L. Autonne. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 341.
320. Sur des angles résultants. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 407. — C. A. Laisant ibid. 419.
321. Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques du plan. L. Ripert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 101.
322. Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques de l'espace. L. Ripert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 306.
323. Sur les lignes composées de parties rectilignes. D. Gravé. Compt. Rend. CXXVII, 1005.
324. Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenzi lineari di rette. D. Montesano. Annali mat. Ser. 3, I, 311.
325. Cubique, lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère. Hilaire. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 472.
326. Point remarquable dans le plan d'une cubique. Stuyvaert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 275.
327. Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4. ordine. Gaet. Scorza. Annali mat. Ser. 3, II, 155.
328. Sur une courbe de quatrième degré. Retali. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 472.
329. Über eine Kugelschar. H. E. Timerding. Crelle CXXI, 188.
330. Über die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Polartetraeder übergeführt werden. H. E. Timerding. Annali mat. Ser. 3, I, 95.

Vergl. Absolute Geometrie. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Winkelteilung.

Geschichte der Mathematik.

331. Hrabanstudien. E. Dümmler. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 24.
332. Leibniz und das Problem der Universalsprache. H. Diels. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 579.
333. Über die vier Briefe von Leibniz, die Samuel König in dem Appel au public (Leide MDCCLIII) veröffentlicht hat. C. J. Gerhardt. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 419.
334. Friedrich der Grosse und D'Alembert. J. Vahlen. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 43.
335. Zur Biographie von Maupertuis. H. Diels. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 51.
336. Über die Entdeckung der doppelten Periodizität und Jacobi's Anteil daran. S. Gundelfinger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 342.

Gleichungen.

Graphisches Rechnen.

H.

Hydrodynamik.

Hyperelliptische Transcendenten.

I.

Imaginäres.

Integration (unbestimmte).

Invarianten.

K.

Kegelschnitte.

360. Über ein quadratisches Nullsystem. H. E. Timerding. Annali mat. Ser. 3, II, 249.
361. Coniques inscrites à un quadrilatère. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 483.
362. Étant données le centre d'une conique et trois tangentes, trouver les points de contact. R. Gilbert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 337.
363. Trois droites dans une conique qui concourent en un même point. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 480.
364. Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes: les circonférences, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 384. — Mannheim ibid. 476.
365. Conique engendrée au moyen d'un triangle et d'une droite. A. Vacquant. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 79.
366. Propriétés du cercle ayant pour diamètre une corde d'une conique passant par un de ses foyers. E. Malo. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 92.

Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere) 325.

Kettenbrüche.

367. Über einen besonderen Kettenbruch mit negativen Teilzählern nebst einleitenden allgemeinen Bemerkungen zur Konvergenz oder Oscillation der Kettenbrüche. L. Saalschütz. Crelle CXX, 132, 242, 354.

Kinematik.

368. Démonstration de quelques théorèms de cinématique. H. Duport. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 5.
369. Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. E. Duporcq. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 121.
370. Sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques. R. Bricard. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 409.
371. Note de géométrie cinématique. V. Nobile. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 218.

M.

Magnetismus.

372. De l'énergie d'un champ magnétique. H. Pellat. Compt. Rend. CXXVII, 507.
373. Radiation phenomena in the magnetic field; magnetic perturbations of the spectral lines. Th. Preston. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 165.
374. The scattering of electro-magnetic waves by a sphere. G. W. Walker. Quart. Journ. math. XXXI, 36, 252. [Vergl. Bd. XLIV, Nr. 446.]
375. On the effect of a solid conducting sphere in a variable magnetic field on the magnetic induction of a point outside. C. S. Whitehead. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 164.
376. On the possible effects of solar magnetization on periodic variations of terrestrial magnetism. A. Schuster. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 395.
377. On electromagnetic induction in plane, cylindrical and spherical current-sheets and its representation by moving trails of images. G. H. Bryan. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 381.

Mechanik.

378. Sur une forme générale des équations de la dynamique. P. Appell. Crelle CXXI, 310.
379. Une propriété d'une intégrale première des équations de la dynamique à deux variables et à potentiel homogène. W. Ebert et J. Perchot. Compt. Rend. CXXVII, 657.
380. Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions sigma d'un seul argument et leur application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. E. Jahnke. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 155.
381. Sur le mouvement d'un point sollicité par une force centrale constante. L. Lecornu. N. annal. math. Sér. 3, XVIII, 161.

Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons. P. Appell. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 187.

Formole per la composizione di più movimenti finiti. R. Marcolongo. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 101.

Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions. G. Ricci. Compt. Rend. CXXVII, 344.

Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque. G. Ricci. Compt. Rend. CXXVII, 360, 390.

Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points. R. Liouville. Acta Math. XX, 239.

Sur la stabilité. J. Andrade. Compt. Rend. CXXVII, 712.

On the flexure of heavy beams subjected to continuous systems of load. K. Pearson & L. N. G. Filon. Quart. Journ. math. XXXI, 66.

The stresses and deflection of braced girders. W. H. Macaulay. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 42.

The stress in the web of a plate girder. J. H. Michell. Quart. Journ. math. XXXI, 377.

Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Fr. Kötter. Crelle CXXI, 300.

Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire. M. Lévy. Compt. Rend. CXXVII, 10, 140.

Der Bodendruck von Sand in vertikalen cylindrischen Gefässen. Fr. Kötter. Crelle CXX, 189.

Sur l'isochronisme pratique des régulateurs. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXVII, 1007.

Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXVII, 843.

Aperçu sur la théorie de la bicyclette; équilibre du cavalier. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXVII, 895.

Sur la théorie de la bicyclette. J. Boussinesq. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 117, 217.

Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Elastizität. Elektrizität. Elliptische Transcendenten 303. Geschichte der Mathematik 333. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Nautik. Optik. Potential. Wärmelehre. Wellenlehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

On the expansion in powers of arc of the coordinates of points on a curve in Euclidean space of many dimensions. H. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXXI, 315.

Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di S_n sopra un S_{n-2}. C. Rosati. Annali mat. Ser. 3, I, 25.

Sull' integrazione dell' equazione $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$. Or. Tedone. Annali mat. Ser. 3, I, 1.

Un théorème de géométrie à n dimensions. H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 132.

On the figure of six points in space of four dimensions. H. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXXI, 125.

Vergl. Invarianten 337.

N.

Nautik.

Sur une théorie géométrique des compas de marine. S. L. Ravier. Compt. Rend. CXXVII, 443.

The wave-resistance of a ship. J. H. Michell. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 106.

O.

Oberflächen.

405. Sur la déformation des surfaces. J. Weingarten. Acta Math. XX, 159.
406. Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante L. Bianchi. Annali mat. Ser. 3, III, 185.
407. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Hadamard. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 27.
408. Étude sur la transformée homographique générale de la surface de l'onde. R. Bricart. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 197.
409. Sur les systèmes orthogonaux. Tzitzeica. Compt. Rend. CXXVII, 856.
410. Une question de géométrie différentielle. H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 454.
411. The quartic surfaces with 14, 15 and 16 nodes. C. M. Jessop. Quart. Journ. math. XXXI, 354.
412. Propriétés d'une surface de Steiner. Em. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 285.
413. Sur une surface étudiée par Painvin. O. Böklen. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 370.
414. Prouver que $F(z) = f(x, y)$ est l'équation de toute surface-moulure de l'hélicoïde développable $z = f(x, y)$. A. Boulanger. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 336.
415. Lieu des centres des sphères tangentes à la fois à deux droites données dans l'espace. Philbert du Plessis. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 421.

Vergl. Bestimmte Integrale 228. Singularitäten.

Oberflächen zweiter Ordnung.

416. Die reciproken Figuren der graphischen Statik. G. Hauck. Crelle CXX, 109.
417. Sur des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 67.
418. Sur les quadriques circonscrites à un tétraèdre. Ch. Bioche. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 38.
419. Étant donnée une quadrique, trouver les quadriques qui la coupent orthogonalement. A. Boulanger. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 335. — A. de Saint-Germain ibid. 473.
420. Généralisation d'un théorème sur le paraboloïde hyperbolique. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 478.
421. Propriété de l'hyperboloïde équilatère. E. Genty. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 532.

Vergl. Ellipsoid. Geometrie (höhere) 329, 330.

Optik.

422. Relative motion of de earth and aether. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 23.
423. Sur la polarisation par diffraction. H. Poincaré. Acta Math. XX, 313.
424. On achromatic polarization and differential double refraction. D. B. Brace. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 345.
425. On the admissible with of the slit in interference experiments. J. Walker. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 472.
426. On the orientation of the slit in interference experiments. J. Walker. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 553.
427. Application of Sellmeier's dynamical theory to the dark lines D_1, D_2 produced by sodium-vapour. Lord Kelvin. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 302.
428. On dynamical illustrations of certain optical phenomena. J. D. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 227.
429. On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 375.
430. On certain diffraction fringes as applied to micrometric observations. L. N. G. Filon. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 441.
431. A theory of the connexion between cathode and Röntgen-rays. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 172.
432. Diffraction phenomena in the focal plane of a telescope with circular aperture, due to a finite source of light. H. Nagaoka. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 1.

433. Étude d'un système de deux miroirs sphériques. Lefebvre. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 512.

Vergl. Astronomie 222. Geschichte der Mathematik 337. Mehrdimensionale Geometrie 400.

P.

Potential.

434. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. H. Poincaré. Acta Math. XX, 59.

435. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. A. Liapounoff. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 241.

436. Über die erweiterte Laplace'sche Differentialgleichung für die allgemeine Potentialfunktion. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 5, 93.

437. Über das erweiterte Prinzip der Erhaltung der Flächen und dessen Anwendung auf kinetische Potentiale erster Ordnung. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 148.

438. Über die Erniedrigung der Anzahl der unabhängigen Parameter Lagrangescher Bewegungsgleichungen durch Erhöhung der Ordnung des kinetischen Potentials. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1898, II, 491.

439. Über die allgemeinen kinetischen Potentiale. L. Koenigsberger. Crelle CXXI, 141.

440. Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten abhängigen kinetischen Potentials. K. Boehm. Crelle CXXI, 124.

441. Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel. M. Lerch. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 427.

Q.

Quadratur.

442. Sur l'aire de certaines lunules. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 191.

443. Valeur inexacte d'une aire. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 477.

444. Théorème erronné sur certaines surfaces. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 95 — Issaly ibid. 241. — A. de Saint-Germain ibid. 242.

R.

Reihen.

445. Démonstration nouvelle de la règle de convergence de Gauss. Godefroy. N. ann. math. Sér. XVIII, 157.

446. Sur les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes. Leau. Compt. Rend. CXXVII, 607.

447. Sur le cercle de convergence des séries. Leau. Compt. Rend. CXXVII, 711.

448. Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. L. Leau. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 365.

449. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. Le Roy. Compt. Rend. CXXVII, 654.

450. Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. Le Roy. Compt. Rend. CXXVII, 948.

451. Sur les points singuliers d'une série de Taylor. Eug. Fabry. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 317.

452. Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor. Em. Borel. Compt. Rend. CXXVII, 751.

453. Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. Em. Borel. Compt. Rend. CXXVII, 1001.

454. On the values of the series $x^n + (x-q)^n + (x-2q)^n + \cdots + r^n$ and $x^n - (x-q)^n + (x-2q)^n - \cdots \pm r^n$. J. W. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 193. [Vergl. Bd. XLIV, Nr. 313.]

455. On $1^n(x-1)^n + 2^n(x-2)^n + \cdots + (x-1)^n 1^n$ and other similar series. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 241.

456. Sur certaines sommes arithmétiques. P. de Séguier. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 55.

457. On certain properties of the hypergeometrical series, and on the fitting of such series to observation polygons in the theory of chance. K. Pearson. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 236.

S.

Singularitäten.

458. Zur Theorie der singulären Punkte einer Raumkurve. Alfr. Meder. Crelle CXXI, 230.
459. Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche. B. Levi. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 219.
460. Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche. B. Levi. Annali mat. Ser. 3, II, 127.
461. Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la configurazione di Kummer. Edg. Ciani. Annali mat. Ser. 3, II, 53.

Stereometrie.

462. Die Formen der Vielflache. O. Hermes. Crelle CXX, 27, 305.

Substitutionen.

463. Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions. H. Laurent. Journ. Mathem. Sér. 5, IV, 75.
464. Über projektive Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen. L. Schlesinger. Crelle CXXI, 168.
465. Über vertauschbare lineare Substitutionen. L. Schlesinger. Crelle CXXI, 177.
466. Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1898, II, 501.
467. Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 330.
468. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 482.
469. On the simple isomorphisms of a substitution-group in itself. G. A. Miller. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 234.
470. On the holomorph of the cyclical group and some of its subgroups. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXXI, 382.
471. A class of linear groups including the Abelian group. L. E. Dickson. Quart. Journ. math. XXXI, 60.
472. On the primitive substitution groups of degree ten. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXXI, 228.
473. On the transitive substitution groups of degree seventeen. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXXI, 49.
474. Sopra i gruppi astratti di grado 32. G. Bagnera. Annali mat. Ser. 3, II, 263.
475. La composizione dei Gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo. G. Bagnera. Annali mat. Ser. 3, I, 137.
476. Sur les groupes d'ordre $p^m q^2$. C. Jordan. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 21.

Vergl. Geometrie (höhere) 319.

T.

Thetafunktionen.

477. Sur les systèmes d'équations différentielles auquels satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. M. Krause. Compt. Rend. CXXVII, 91. (Vergl. Bd. XLIV Nr. 475.)

Transformationsgruppen.

478. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio. Fed. Enriques e G. Fano. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 59.
479. Notions élémentaires sur les groupes de transformations. Combebiac. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 347.

Sur une classe de transformations de contact. E. O. Lovett. Compt. Rend. CXXVII, 480.

V.

Variationsrechnung.

Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intégrale définie multiple sous la forme propre aux applications. G. Sabinine. Annali mat. Ser. 3, II, 203.

W.

Wärmelehre.

Über den stationären Temperaturzustand eines von einem elektrischen Strome erwärmten Leiters. Fr. Kohlrausch. Berl. Akad. Ber. 1899, II, 711.

L'intégrale des forces vives en thermodynamique. P. Duhem. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 5.

Sur l'égalité de Clausius. P. Duhem. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 175.

On the conduction of heat in a spherical mass of air confined by walls at a constant temperature. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 314.

L'équivalent mécanique de la calorie et des chaleurs spécifiques des gaz. A. Leduc. Compt. Rend. CXXVII, 860.

The Joule-Thomson thermal effect. E. F. J. Love. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 106.

On the ratio of the specific heats of air. J. Rose-Innes. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 286.

On the alleged sign of specific heat of saturated ether vapour. K. Tsuruta. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 288.

On the source of energy in diffusive convection. Alb. Griffiths. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 522.

A study of an apparatus for the determination of the rate of diffusion of solids dissolved in liquids. Alb. Griffiths. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 530.

On the rate of explosion in gases. D. L. Chapman. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 90.

Vergl. Akustik.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

On James Bernoulli's theorem in probabilities. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 246.

Vergl. Reihen 457.

Wellenlehre.

On discontinuities connected with the propagation of wave-motion along a periodically loaded string. Ch. Godfrey. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 356.

On iso-periodic systems. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 567.

On the reflexion and refraction of solitary plane waves at a plane interface between two isotropic elastic mediums. Lord Kelvin. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 179.

Longitudinal vibrations in solid and hollow cylinders. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 333.

Winkelteilung.

Sur le problème de la polysection de l'angle. Mariantoni et Palatini. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 126.

Z.

Zahlentheorie.

Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern. R. Dedekind. Crelle CXXI, 40.

Extension du Nr. 162 des Disquisitiones arithmeticae de Gauss. De Jonquières. Compt. Rend. CXXVII, 596.

Rapprochements entre les procédés de Lagrange et de Gauss pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré. De Jonquières. Compt. Rend. CXXVII, 694.

Sur les nombres premiers. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 234.

503. Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^\lambda + 1$, in welcher $q=1$ oder eine ungerade Primzahl ist. G. Wertheim. Acta Math. XI, [illegible]
504. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen [illegible] und 5000. G. Wertheim. Acta Math. XX, 153.
505. Congruences relating to the sums of products of the first n numbers and to other sums of products. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 1.
506. Residues of binomial-theorem-coefficients with respect to p^3. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 110.
507. A congruence theorem relating to the Bernoullian numbers. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 253.
508. On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers and their powers to modulus p^2 or p^3. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 321.
509. Les lignes arithmétiques. G. Tarry. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 149.
510. Curiosité mathématique. G. Tarry. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 156.
511. Sur une équation indéterminée. C. Störmer. Compt. Rend. CXXVII, 752.
512. Forme de n si $n-1$ et $n+1$ ou bien $n-2$ et $n+2$ sont deux nombres premiers plus grands que 5. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, [illegible]

Vergl. Funktionen 316. Reihen 456. Winkelteilung.

ABHANDLUNGEN
Ł GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN. X. HEFT.
LEICH SUPPLEMENT ZUM 45. JAHRGANG DER ZEITSCHRIFT FÜR
'HEMATIK UND PHYSIK. HRSG. VON R. MEHMKE UND M. CANTOR.

DIE MATHEMATIKER UND .STRONOMEN DER ARABER UND IHRE WERKE.

VON

DR. HEINRICH SUTER,
PROFESSOR AM GYMNASIUM IN ZÜRICH.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Vom vorliegenden Hefte ab erscheinen die **Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik** unter dem erweiterten Titel: **Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluſs ihrer Anwendungen.**

B. G. Teubner.

Vorwort.

Für das Studium der Geschichte jeder Wissenschaft bildet die Kenntnis des Lebens und der Werke der Gelehrten, die sich mit derselben beschäftigt haben, die notwendige Grundlage, ohne welche ein fruchtbares Studium der historischen Entwickelung dieser Wissenschaft unmöglich ist. Was nun speziell die Geschichte der Mathematik und Astronomie bei den Arabern anbetrifft, so wird man gestehen müssen, dafs für diese eine solche Grundlage bis jetzt noch sehr lückenhaft war; wohl sind eine Reihe wichtiger Werke arabischer Gelehrter auf diesem Gebiete zu unserer Kenntnis gekommen, wohl haben wir durch Arbeiten von Männern, wie Sédillot, Woepcke, Hankel, M. Cantor, Steinschneider u. a., ein Bild von dem Zustand dieser Wissenschaften bei diesem Volke erhalten, das manchem als deutlich genug erscheinen könnte; allein bei näherer Prüfung der Sache müssen wir uns gestehen, dafs doch noch vieles in dieser Richtung unklar ist und weiterer und gründlicherer Untersuchung bedarf, dafs Leben, Schriften, ja sogar Namen von arabischen Gelehrten von Bedeutung bisher nicht ganz sicher gestellt waren. Wenn ich es nun unternommen habe, mit dieser bio- und bibliographischen Arbeit, denn etwas anderes soll sie nicht sein, diese Lücke, soweit es in meinen Kräften steht, auszufüllen, die Gelehrten auf die noch n den Bibliotheken vergrabenen Arbeiten der Araber aufmerksam zu machen, nd die mit der arabischen Sprache Vertrauten zu deren Studium, bezw. eröffentlichung einzuladen, so möchte ich dabei zugleich die Bitte ausrechen, dafs diejenigen Gelehrten, welche die Schwierigkeiten einer solchen beit und die Mühe, die sie dem Verfasser bereitet, zu würdigen verstehen, ch schonend beurteilen mögen, wenn sie hier und da einen Fehler oder en Mangel in den Angaben entdecken werden.

Man verzeihe mir, wenn ich an dieser Stelle darauf aufmerksam mache, s das Erscheinen der „Geschichte der arabischen Litteratur" von C. Brockelman (bis jetzt ist der 1. Bd., Weimar, 1897—98, erschienen) keineswegs wa mein Buch entbehrlich macht; man vergleiche die Kapitel über thematik und Astronomie in jenem Werke mit meiner Arbeit und man wird meine Bemerkung gerechtfertigt finden. Allerdings hat sich Brockelmann die Aufgabe gestellt, nur diejenigen Autoren aufzunehmen, von denen noch Werke in den Bibliotheken vorhanden sind, aber auch in dieser Beschränkung ist er, wie man leicht sehen wird, noch sehr lückenhaft. Für die Abfassung einer Litteraturgeschichte irgend eines Wissenszweiges ist meiner Ansicht nach eine gehörige Kenntnis dieser Wissenschaft und ihrer Geschichte ebenso notwendig, als die Kenntnis der betreffenden Sprache; wo ist aber der Gelehrte, der heutzutage alle Wissenschaften und ihre Geschichte, die humanistischen wie die realistischen, auch nur einigermafsen zu beherrschen vermöchte?

Manchem Leser meines Buches mag es vielleicht scheinen, ich sei in der Aufnahme von Gelehrten mathematisch-astronomischer Richtung zu weit gegangen; allein ich dachte mir, eine angenäherte Vollständigkeit (denn ganz kann sie ja nicht sein) in dieser Richtung dürfte nichts schaden, und es könnte dabei auch für die arabische Litteratur- und Kulturgeschichte im allgemeinen hier und da vielleicht ein nützlicher Brocken abfallen. So richtet sich das Buch also nicht blofs an solche, welche sich mit dem Studium der arabischen Mathematik, Astronomie und Astrologie befassen, sondern es mag auch denjenigen, die überhaupt auf irgend einem Gebiete der Geschichte des geistigen Lebens bei den Arabern arbeiten, bisweilen von Nutzen sein, wie ich selbst gerne anerkenne, aus dem Wüstenfeldschen Buche „die Geschichtschreiber der Araber und ihre Werke“, das mir wesentlich als Vorbild gedient hat, manche Belehrung gezogen zu haben.

Was den Umfang meiner Arbeit anbetrifft, so beginne ich selbstverständlich mit dem ältesten in den Quellen genannten Gelehrten mathematisch-astronomischer Richtung, es ist dies Ibrâhîm el-Fazârî, und schliefse mit einem Mathematiker aus dem Ende des 16. Jahrhunderts, mit Behâ ed-dîn el-ʿÂmilî, gest. 1622; was nach diesem auf dem Gebiete der Mathematik und Astronomie bei den Arabern geleistet worden ist, hält man allgemein nicht mehr der Beachtung wert. Im ganzen habe ich über 500 Gelehrte aufgenommen, bei der Mehrzahl derselben aber wird der Leser vergeblich nach genauern, ihm genügend Aufschluss gebenden Notizen über ihr Leben suchen, da die Artikel über Gelehrte mathematischer Richtung in den biographischen Werken der Araber meistens sehr knapp gehalten sind, indem die Verfasser solcher Werke mit wenigen Ausnahmen den mathematischen Wissenschaften ferner gestanden sind und sich deshalb für die Vertreter derselben weniger interessiert haben mögen. Was dann die Biographien derjenigen Gelehrten anbetrifft, für welche die Quellen reichlicheres Material geliefert haben, so sind dieselben zum gröfseren Teile nicht in dem vollen Umfange von mir gegeben worden, wie sie die Quellen enthalten, nur das für uns Wesentliche und Wichtige ist aufgenommen, alles Nebensächliche weggelassen worden. Bei der Aufzählung der Schriften eines Gelehrten wurden nur die mathematischen, astronomisch-astrologischen und naturphilosophischen berücksichtigt; was die handschriftlichen und gedruckten lateinischen Übersetzungen arabischer Werke anbetrifft, so bitte ich meine Unvollständigkeit nach dieser Richtung entschuldigen zu wollen, das Material wäre durch Aufnahme aller dieser zu grofs geworden, ich verweise hierfür auf die bezüglichen Schriften von Wenrich, Wüstenfeld und Steinschneider.

Was die Wiedergabe der arabischen Büchertitel anbetrifft, so habe ich die Transskription derselben nicht konsequent durchgeführt, besonders von solchen Werken, die nicht mehr vorhanden sind, habe ich die Titel nur in deutscher Übersetzung gegeben: die Herren Orientalisten werden mich vielleicht darob tadeln, sie mögen aber nicht vergessen, dafs ich in erster Linie für Mathematiker und Historiker der Mathematik schreibe, denen die arabische Sprache fremd ist. Mit gröfserem Rechte mag man mich der Inkonsequenz in der Transskription der arabischen Eigennamen und Büchertitel zeihen; was die Konsonanten anbetrifft, so weiche ich allerdings von der in Deutschland jetzt üblichen Transskriptionsart nur darin ab, dafs ich خ durch das deutsche ch wiedergebe, dessen alemannische Aussprache derjenigen des arabischen Buchstabens am nächsten kommt; in Bezug auf die kurzen Vokale aber konnte ich mich nicht entschliefsen, wie es viele Orientalisten thun, nur a, u und i zu gebrauchen, die ersten beiden liefs ich auch, der neuarabischen Aussprache folgend, vor und nach gewissen Konsonanten in e und o übergehen; dem entsprechend kommt neben ai auch ei vor. Die der arabischen Sprache nicht kundigen Leser verweise ich, was Aussprache und Betonung anbetrifft, auf das, was ich im Vorwort meiner Übersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fihrist (Abhandlgn. zur Gesch. d. Mathem. Heft VI. Suppl. zum 37. Jahrg. der Zeitschrift f. Math. und Phys. p. 4 und 5) bemerkt habe, hier füge ich nur noch folgendes hinzu: man spreche ǵ = dsch, š = sch, č (das nur einige Male in persischen Wörtern vorkommt) = tsch. Den Artikel schreibe ich stets „el", auch vor n und r und vor d-, t- und s-Lauten, wo das l in der Aussprache dem folgenden Konsonanten zu assimilieren ist. Den oft wiederkehrenden Namen Muḥammed kürze ich zu „Muh.," ibn oder ben (= Sohn), wenn es zwischen zwei Namen steht, zu „b." ab.

Kilchberg bei Zürich, im Januar 1900.

Hch. Suter.

Verzeichnis der Quellen.

Abulfar. = Historia orientalis, auctore Gregorio **Abul-Pharajio**, **arabice edita et latine verta ab Ed. Pocockio. Oxon. 1672. — Neuere Ausgabe von Ṣâliḥâni, Beirût 1890. Meine Zitate beziehen sich auf die ältere Ausgabe.**

Abulfid. = **Abulfedae annales muslemici, arab. et lat. opera et studiis** J. J. Reiskii etc. edid. J. G. Chr. Adler. Tomi V, Hafniae 1789—94.

Abulmah. = Abûl-Maḥâsin Jûsuf b. Taġrî Bardî annales (*el-nuġûm el-zâhira* = die glänzenden Sterne, über die Herrscher von Alt- und Neu-Kairo) edid. F. G. J. Juynboll. Leiden 1851—61.

B. = Bibliotheca arabico-hispana, Tom. I—VIII. Matriti 1883—92. Alle acht Bände sind biographische Lexica über westarabische Gelehrte. Bd. I und II enthalten: *el-ṣile* (das Geschenk) von Ibn Baškuwâl (Chalaf b. 'Abdelmelik b. Mes'ûd b. Mûsâ el-Anṣârî aus Cordova, geb. 494 (1101), gest. 578 (1183) (nach andern 490—577). — Bd. III: *biġjet el-multamis fî târîch riġâl ahl el-andalus* (der Wunsch des nach der Geschichte der spanischen (gelehrten) Männer Verlangenden) von Aḥmed b. Jaḥjâ b. Aḥmed b. 'Omaira el-Ḍabbî (Velez-Murcia, gest. nach 595 [1199]). — Bd. IV: *el-mo'ġam* (das alphabetische Verzeichnis der Schüler des Abû 'Alî el-Ṣadafî, eines berühmten Traditionisten und Rechtsgelehrten aus Saragossa (ca. 444—514, 1052—1120), verfaſst von Abû 'Abdallâh Muh. b. 'Abdallâh b. Abî Bekr el-Qoḍâ'î, bekannt unter dem Namen Ibn el-Abbâr (Valencia 595 (1198/99) — Tunis 658 (1259/60). — Bd. V und VI: *el-takmile li-kitâb el-ṣile* (die Ergänzung zum Buche *el-ṣile* des Ibn Baškuwâl) von dem eben genannten Ibn el-Abbâr. — Bd. VII und VIII: *kitâb târîch 'ulemâ el-andalus* (Geschichte oder Chronik der Gelehrten Spaniens) von Abû Welîd 'Abdallâh b. Muh. b. Jûsuf, bekannt unter dem Namen Ibn el-Faraḍî (351 (962) — Cordova 404 (1012/13).

C. = Casiri, Bibliotheca arabico-hispana escurialensis, T. I und II, Matriti 1760—70.

Fihr. = *Kitâb el-Fihrist* (Buch des Verzeichnisses), von Abû'l-Faraġ Muh b. Isḥâq, bekannt unter dem Namen Ibn Abî Ja'qûb el-Nadîm, herausgegeben von G. Flügel, J. Roediger und A. Müller, 2 Bde., Leipzig 1871—72. Hinter den Seitenzahlen des Fihr. folgen jeweilen diejenigen meiner Übersetzung des 2. Teils des 7. Abschnittes (s. oben), bezeichnet mit „Übers."

H. = v. Hammer-Purgstall, Litteraturgeschichte der Araber, 7 Bde., Wien 1850—56.

H. Ch. = Lexicon bibliograph. et encycl. a Haji Khalfa (Ḥâġî Chalfa oder Chalîfa, gest. 1068 (1657/58)) compositum. Edid. et lat. vert. G. Flügel, Lips. 1835—58.

: *'Ujûn el-anbâ fî ṭabaqât el-aṭibbâ* (Quellen der Nachrichten über der Ärzte) von Ibn Abî Uṣaibi'a (gest. 668 (1269/70)), heraus- ı A. Müller, 2 Bde., Kairo 1884.

'afajât el-a'jân etc. (Tod der Vornehmen) von Ibn Challikân (gest. 3)), Ausgabe von Bulak, 2 Bde., 1299 (1882). — Übers. = Ibn biographical dictionary, transl. from the arabic by Mac Guckin de ., Paris-London 1843—71.

Târîch el-ḥokamâ (Chronik der Gelehrten) von Ibn el-Qifṭî (gest.)), zitiert nach den Auszügen bei C. (Casiri) und A. Müller (2. Bd. Anmerkungen) und nach dem Münchener Ms. 440.

bn Quṭlûbuġas Klassen der Ḥanefiten, von G. Flügel, in den d. D. M. G. für die Kunde des Morgenlandes, 2. Bd., Nr. 3.

Akademien der Araber und ihre Lehrer. Nach Auszügen aus Ibn assen der Schafeïten bearbeitet von F. Wüstenfeld, Göttingen 1837.

t el-wafajât (Suppl. zu Ibn Challikâns *wafajât el-a'jân*), von Muh. . Aḥmed el-Kutubî (auch el-Kutbî), gest. 764 (1362/63), 2 Bde., (1866/67).

el-ṭîb min ġoṣn el-andalus el-raṭîb (der Duft des Besten (oder der) von dem zarten Zweige Andalusien) von Aḥmed b. Muh. el-Tlemsen, Algier, ca. 1000 — Kairo 1041 (1632)); 1. Ausgabe von Dozy, hl und Wright, in 2 Bdn., Leiden 1855—61, unter dem Titel: ur l'histoire et la littérature des Arabes d'Espagne; 2. Ausgabe in ro 1884. Die erste Ausgabe wird mit Maq. L., die zweite mit iert. Aus diesem Werke wurden besonders das 5. und 7. Kapitel s 'erstere enthält die Biographien derjenigen spanischen Gelehrten, em Orient gereist sind, um dort ihre Studien zu vervollständigen, handelt über Sitten, Gebräuche, wissenschaftliche Thätigkeit und er spanischen Araber.

-moḥâḍara fî achbâr miṣr we'l-qâhira (die Vortrefflichkeit der Unter- er die Geschichten von Alt- und Neu-Kairo) von 'Abderraḥmân ır b. Muh. el-Sujûṭî (Siut 849 (1445) — Kairo 911 (1505)); 2 Bde.,

qâ'iq el-no'mânîje (die Anemonenblüten), über die Gelehrten des ı Reiches, von Ṭâšköprizâdeh (gest. 968 (1560/61)), am Rande der ɜgabe des Ibn Challikân v. J. 1882 gedruckt.

Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Ärzte und Naturforscher, 840.

Wüstenfeld, die Geschichtschreiber der Araber und ihre Werke: teilung in den Abhandlungen d. kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften n, 28. Bd. 1881; 3. Abteilung ebenda 29. Bd. 1882; auch in einem erschienen, Göttingen, 1882. Von diesem Werke sind jeweilen nicht ıhlen, sondern die Artikelnummern zitiert.

urden benützt: Ibn 'Aḏârî, Histoire de l'Afrique et de l'Espagne, Dozy, Leiden 1848—51, 2 Vol. — R. Dozy, Recherches sur l'histoire ıre de l'Espagne pendant le moyen âge, 2. édit. 2 tomes, Leiden ozy, Geschichte der Mauren in Spanien bis zur Eroberung Anda- die Almorawiden, übersetzt von W. W. v. Baudissin, 2 Bde., Leipzig oudi (= Mas'ûdî), les prairies d'or. Texte arabe et trad. par

C. Barbier de Meynard et Pavet de Courteille. T. 1—9. **Paris 1861—77.** — El-Bîrûnî, the chronology of ancient nations, transl. and edit. by E. Sachau, London 1879. — El-Ja'qûbî, *kitâb el-buldân* (das Buch der Städte oder Länder), edid. A. W. Th. Juynboll, Leiden 1861. — El-Anbârî (Abderraḥmân b. Muh., gest. 577 (1181)): *nuzhet el-alibbâ* (das Vergnügen der mit Verstand oder Herz Begabten), über die Klassen der Philologen, Kairo 1294 (1877). — Aug. Müller, der Islam im Morgen- und Abendlande (4. Teil, II. Hauptabt. der Allgemeinen Geschichte in Einzeldarstellungen von W. Oncken), 2 Bde., Berlin 1885—87. — P. de Gayangos, the history of the Mohammedan dynasties of Spain, 2 Bde., London 1840. Dieses Werk ist eine freie Bearbeitung des Maqqarî'schen Buches (s. oben). — M. Amari, Bibliotheca arabo-sicula, Lips. 1857. — M. Amari, Storia dei musulmani di Sicilia, 3 Bde., Firenze 1854—72. — Ibn Chaldûn, Prolegomena zu seinem Geschichtswerke, 1. Ausg. von Quatremère im 16., 17. und 18. Bd., übersetzt von Mac Guckin de Slane im 19., 20. und 21. Bd. der Notices et extraits des manuscrits de la biblioth. impériale; 2. Ausgabe in Beirût in 1 Bd., 2. Aufl. 1886. — Jâqût, geographisches Wörterbuch, herausg. v. F. Wüstenfeld, 6 Bde., Leipzig 1866—73. — Edrîsî, Description de l'Afrique et de l'Espagne, texte arabe avec trad. par R. Dozy et M. J. de Goeje, Leiden 1866. — F. Wüstenfeld, die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrh., Göttingen 1877. u. a.

Die den jeweilen zitierten Manuskripten beigefügten Orte und Nummern beziehen sich auf folgende Kataloge:

Berlin: Ahlwardt, W., Verzeichnis der arabischen Handschriften der königl. Bibliothek zu Berlin, V. Bd. 1893. Wenn hinter „Berlin“ ein P. steht, so bezieht sich dieses auf: Pertsch, W., Verzeichnis der persischen Handschriften der königl. Bibliothek zu Berlin, 1888.

Wien: Flügel, G., die arab., pers. und türkischen Handschriften der k. k. Hofbibliothek zu Wien, 3 Bde. 1865—67.

München: Aumer, J., die arabischen Handschriften der königl. Hof- und Staatsbibliothek in München, 1866. Steht hinter „München“ ein P., so bezieht sich dieses auf: Aumer, J., die persischen Handschriften der königl. Hof- und Staatsbibliothek in München, 1866.

Gotha: Pertsch, W., die arabischen Handschriften der herzogl. Bibliothek zu Gotha, 4 Bde. 1877—83.

Leipzig: Catalogus libror. manuscr. qui in bibl. senat. civ. Lips. asserv., edid. A. G. R. Neumann, H. O. Fleischer et F. Delitzsch. Grimae 1838.

Leipzig (Ref.): Katalog der *Refâ'ije* (Abteilg. d. Universitätsbibliothek) von H. L. Fleischer, in der Z. D. M. G. 8. Bd. p. 573—84.

Strafsburg: Landauer, S., Katalog der hebr., arab., pers. und türkischen Handschriften der kaiserl. Univ.- und Landesbibliothek zu Strafsburg, 1881.

Paris: Catalogue des manuscr. arabes de la biblioth. nationale, par M. le baron de Slane, Paris 1883—95.

Leiden: Catalogus cod. orient. bibl. acad. Lugd.-Batav. auctore R. Dozy, P. de Jong et M. J. de Goeje, vol. I—VI., Leiden 1851—77.

Oxford: Catalogus cod. mss. orient. bibl. Bodleyanae a Joh. Uri conf. P. I. Oxon. 1787. — P. II. conf. A. Nicoll, absolvit et catal. Urian. aliquatenus emend. E. B. Pusey, Oxon. 1835.

Cambridge: Catalogue of the Oriental Mss. in the library of King's College, by **Ed. H. Palmer**, im Journal of the R. Asiat. Soc. of Gr. Britain and Ireland, New Ser. Vol. III. p. 105—31.

Brit. Mus.: Catalogus cod. mss. orient. qui in Museo Brit. asserv. P. II. cod. arab. amplect., London 1846—71. Steht hinter „Brit. Mus." ein P., so bezeichnet dieses: **Rieu**, Catalogue of the Persian mss. in the Brit. Museum, 3 Vol., London 1879—83.

Ind. Off.: Catalogue of the arabic mss. in the library of the India Office, by **O. Loth.**, London 1877.

Escurial: **Casiri**, Bibliotheca arabico-hispana escurial. T. I und II. Matriti 1760—70. (**Derenbourg**, les manusc. arab. de l'Escurial, Vol. I. [einzig erschienen] Paris 1884, enthält die mathematischen und astronomischen Mss. leider nicht.)

Mailand: Catalogo dei cod. arabi, pers. e turchi, della bibl. Ambrosiana, von **Hammer-Purgstall**, in Bibliot. italiana T. XCIV, Milano 1839.

Florenz: Catalogus mss. orient. bibl. Medic.-Laurent. et Palat., recens. et digessit S. E. Assemanus, Flor. 1742.

Vatican: Catalogus cod. arab. pers. turc. biblioth. Vaticanae, in Scriptor. veter. nova collectio e vatic. cod. edita ab Angelo Maio, Tom. IV. Romae 1831.

St. Petersb.: Catalogue des mss. et xylographes orient. de la biblioth. imp. de St. Pétersbourg, 1852.

Algier: Catalogue générale des mss. des bibl. publ. de France. Départements. T. XVIII. Alger, édit. par **E. Fagnan**, 1893.

Kairo: Katalog der arab. Handschr. der vicekgl. Bibl. zu Kairo, von **K. Vollers** und andern. V. Bd. Kairo 1308 (1890) (arab.). Hier zitiere ich nicht die Nummer des Mss., sondern die Seitenzahl des Bandes, und nacher diejenige meiner Übersetzung eines Teils des math.-astron. Abschnittes des Katalogs (in Zeitschr. f. Math. und Phys., hist.-litter. Abtlg. Jahrg. 38, 1893).

Konstant.: Katalog der arab., pers. und ṭürkischen Werke (gedr. Bücher und Mss.) der Bibliothek der Moschee Aja Sofia in Konstantinopel, 1304 (1887) (türk.).

.THEMATIKER UND ASTRONOMEN DER ARABER

UND IHRE WERKE.

1. Ibrâhîm b. Habîb b. Soleimân b. Samora b. Ǧundab, Abû q el-Fazârî, war der erste Muslim, welcher Astrolabien verfertigte; onstruierte nämlich ein *musaṭṭaḥ* (ebenes, planisphärisches) und ein *ṭṭaḥ* (?). Er schrieb: Eine *Qaṣîde* (Gedicht) über die Astrologie. Über Iefsinstrument für den wahren Mittag (*zawâl*).[a]) Das Buch der Tafeln den Jahren der Araber. Über den Gebrauch der Armillarsphäre. den Gebrauch des planisphärischen Astrolabiums. Er starb c. 160 (777). . 273, Übers. 27; Ibn el-Q., Münchener Ms. 440, fol. 24[a]; Flügel, mat. Schulen der Araber, 207.)[1]

2. El-Nûbacht (oder Naubacht), der Perser, der Astrolog des Chalifen nṣûr (136—158), ist der Stammvater einer Reihe von Gelehrten und smännern. Er leitete mit Mâšâllâh zusammen die Vermessungen bei Grundlegung der Stadt Bagdad (145), deren Bau dann unter Leitung Aufsicht von Châlid b. Barmek weitergeführt wurde. Er starb c. 160).[b]) (Abulfar. 224, Übers. 145; Jaʿqûbî, 9.)

3. Ǧâbir b. Haijân el Ṣûfî, Abû ʿAbdallâh, aus Kûfa gebürtig, dort lebend, der gröfste Alchymist der Araber, ein Schüler von Ǧaʿfar diq (gest. 148), oder nach Andern von Châlid b. Jezîd, was aber ich unwahrscheinlich ist. Es ist dies der Geber[2] des Mittelalters; 'ühre ihn hier nur an, weil er nach Muh. b. Saʿîd el-Saraqosṭî (s. Art. der Verfasser eines Buches „über den Gebrauch des Astrolabiums" soll, das er selbst in Kairo gesehen habe, und das c. 1000 Probleme ʒen) enthielt, denen nichts zu jener Zeit gleichkam.[c]) Der Fihrist eine grofse Reihe von Werken von ihm an, von denen aber wohl ihm fälschlich zugeschrieben werden, so einen Kommentar zum Euklides, solchen zum Almagest etc. Was seine Lebenszeit anbetrifft, so führt ı. (V. 34, 79 etc.) an, er sei 160 (777) gestorben, Brockelmann, Gesch. ab. Litteratur, I. 241, setzt seine Blütezeit in dieses Jahr; übrigens

---

a) d. h. der Zeitpunkt, wo die Sonne niederzusteigen beginnt, es könnte auch Sonnenuntergang" übersetzt werden.

b) H. Ch. V. 35 nennt ihn als Verfasser eines *kitâb el-aḥkâm* (Buch der astrohen Urteile).

c) Vielleicht ist es das vom Fihr. angeführte „Buch der Fragen".

ist zu dieser Frage zu bemerken, dafs der Fihrist selbst Quellen anführt, die ihn als eine sagenhafte Persönlichkeit bezeichnen, es heifst daselbst (p. 355): „Eine Anzahl von Männern der Wissenschaft behaupten, daſs Gâbir nirgends woher stammte, und in Wirklichkeit nicht existiert hat." Seine alchymistischen und magischen Schriften sind viel verbreitet und teilweise auch herausgegeben, ich trete hierauf nicht ein. (Fihr. 354; C. I. 424 n. Ibn el-Q.)

4. Ja'qûb b. Târiq gehörte zu den berühmten Astronomen und Astrologen und wird von den bedeutendsten Vertretern dieser Wissenschaften zitiert. Wann er gelebt hat, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden, doch ist es nach Stellen, die Reinaud in seinem Mémoire sur l'Inde (Paris 1849, p. 312—14) aus dem *Târîch el-hind* des el-Bîrûnî (Paris, 2280, früher Suppl. arabe 934) veröffentlicht hat, sehr wahrscheinlich, dafs Ja'qûb b. Târiq um das Jahr 150 an den Hof des Chalifen el-Mansûr mit dem indischen Gelehrten Kankah (od. Mankah?), der den *Siddhânta* mitgebracht hat, gekommen ist. Seine Abhandlung über die Sphäre soll er im J. 161 geschrieben haben, er mag also so gegen 180 (796) gestorben sein. Wahrscheinlich war er ein Perser.[a]) Er schrieb: Über die Teilung des Kardaga.[b]) Über das, was sich vom halben Tagebogen in die Höhe erhebt. Das Buch der Tafeln, dem Sindhind (*Siddhânta*) entnommen, von Grad zu Grad, in zwei Teilen: der erste handelt über die Wissenschaft der Sphärik[c]), der andere über die Wissenschaft der Zeitperioden (Chronologie). (Fihr. 278, Übers. 33; C. I. 125 u. 26 n. Ibn al. Q.; Reinaud, l. c. nach el-Bîrûnî.)

5. Abû Jahjâ el-Batrîq lebte zur Zeit el-Mansûrs, der ihn mit der Übersetzung einer Reihe von älteren Werken beauftragte. Seine Übersetzungen sollen gut sein, aber doch nicht an diejenigen Honeins hinanreichen; er übersetzte besonders Werke von Hippokrates und Galenus, auch für 'Omar b. el-Farruchân (s. d. Art.) das Quadripartitum des Ptolemäus ins Arabische. Er wird so zwischen 180—190 gestorben sein. (Fihr. 273, Übers. 27; Ibn Abi U. I. 205.)

6. Muh. b. Ibrâhîm b. Habîb, Abû 'Abdallâh el-Fazârî, der Sohn von Nr. 1, ein bedeutender, vielseitiger Gelehrter, besonders in der Astronomie hervorragend. Er wurde von el-Mansûr beauftragt, die Über-

a) C. I. 425 macht ihn zu einem Spanier, was er auch mit andern Persönlichkeiten, so z. B. mit 'Alî b. 'Îsa el-Astorlâbî versucht hat.

b) Es ist dies Wort wahrscheinlich korrumpiert aus dem indischen kramagja — gerader Sinus, d. h. der Sinus (od. der Bogen) von 225'. Vergl. auch Fihr. Übers. 66.

c) Dies ist jedenfalls das von el-Bîrûnî genannte Buch über die Sphäre, das bei C. als ein eigenes Werk hingestellt wird, wie auch dasjenige über die Chronologie.

;ung des von dem indischen Gelehrten Kankah (?) gebrachten astronochen Werkes *„Siddhânta“* zu besorgen. Auf diese Übersetzung gründete n Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî seine astronomischen Tafeln.[a]) Der r. reiht ihn unter die Grammatiker ein und führt an, dafs er eine sehr rekte Schrift besessen habe. El-Ṣafadî (n. Flügel) und H. Ch. IV. 549 reiben ihm die *Qaṣide* über die Astrologie zu, die der Fihr. (p. 273) dem ‹er zuteilt. Flügel irrt sich jedenfalls, wenn er seinen Tod in die erste fte des 3. Jahrh. d. H. setzt, ich möchte ihn etwa in die Jahre 180—190 6—806) legen.[b]) (Fihr. 79; C. I. 428—29 n. Ibn el-Q.; Flügel, gramm. ulen d. Araber, 207; Reinaud, Mém. sur l'Inde, 313.)

7. **El-Faḍl b. Nûbacht, Abû Sahl**, der Sohn von Nr. 2, ebenfalls rolog und zwar hauptsächlich im Dienste des Chalifen Hârûn el-Rašîd, dem er auch zum Oberaufseher der Bibliothek ernannt wurde. Er gete auch zu den Übersetzern aus dem Persischen ins Arabische. Er rieb: Das Buch *el-nahmaṭân* (?)[c]), über die Geburten. Über den astroschen Fâl. Das Buch über die Geburten: einzig in seiner Art (oder h „selten“). Über den Umlauf der Geburtsjahre. Das Buch der Einang. Über die Vergleichung und die Allegorie (?). Das Buch der Zitate den Sentenzen der Astrologen über die Prophezeiungen, Fragen, Geten und and. Er wird ums Jahr 200 (815) gestorben sein. (Fihr. 274, rs. 28; Abulfar. 224, Übers. 145; C. I. 421 n. Ibn el-Q.)

8. **Mâ-šâ'-allâh** (d. h. „was Gott will“), zusammengezogen **Mâšâllâh**[d]) **ṭarî**,[e]) ein Jude, dessen eigentlicher Name **Manasse**[f]) war, lebte unter lanṣûr bis auf die Tage el-Mâmûns. Er war einer der ersten Astrologen er Zeit und überhaupt der Araber, und wurde auch bei der Gründung Bagdad (145) von el-Manṣûr mit el-Nûbacht (s. Art. 2) zusammen zum er der Vermessungen und der Fundamentierungen ernannt. Er wird m das Jahr 200 (815) gestorben sein. Es werden ihm folgende Werke eschrieben: Das grofse Buch über die Geburten in 14 Abschnitten. Das

---

[a]) Und wohl auch Ja'qûb b. Ṭâriq die seinigen und ebenso Aḥmed b. 'Abdh, genannt Ḥabaš, seine ersten Tafeln.

[b]) Es ist nicht zu verkennen, dafs hier Verwechslungen zwischen Vater und n stattgefunden haben können, und dafs vielleicht dem Vater Ibrâhîm die Be;ung der Übersetzung des indischen Werkes übertragen wurde, zumal dasselbe h el-Bîrûnî schon 154 übersetzt worden sein soll; aber el-Bîrûnî und Ibn el-Q. en ausdrücklich „Muh. el-Fazârî“.

[c]) Sollte wohl heifsen *„nimûdâr“*, das pers. Wort für Horoskop.

[d]) Dies ist der Messalah od. Messahala od. Messahalach etc. des Mittelalters.

[e]) Ja'qûbî hat „Sârije“, das Berliner Ms. Lbg. 68, welches die Astrologie s Schülers Abû 'Alî el-Chaijâṭ enthält, hat „Marzûq el-Baṣrî“.

[f]) Von den Arabern gewöhnlich durch „Mîšâ“ wiedergegeben.

Buch der 21 (Abschnitte?) über die Konjunktionen, Religionen und Sekten.[a]) Über die Projektion der Strahlen (ein astrol. Begriff, vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 46, Anmerkg. 14). Das Buch der Bedeutungen (die significationes der Astrologie). Über die Konstruktion und den Gebrauch der Astrolabien. Über die Armillarsphären. Über Regen und Winde. Über die beiden Lose (das günstige und ungünstige). Das Buch, bekannt unter dem Namen „das siebenundzwanzigste".[b]) Über die Buchstaben (d. h. ihre magischen Eigenschaften). Über die Herrschaft. Über die Reisen.[c]) Über die Preise. Über die Geburten. Über den Umlauf der Geburtsjahre. Über die Dynastien und die Völker (oder Religionen). Über das Urteilen nach den Konjunktionen und Oppositionen. Über die Kranken (?). Über die Sternbilder und das Urteilen nach ihnen.[d]) (Fihr. 273, Übers. 27; C. I. 434—35 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 248, Übers. 161; el-Jaʿqûbî, 9.)

Von diesen Schriften ist arabisch einzig noch vorhanden, soviel uns bekannt: Auszüge aus dem Buche der Preise (asʿâr), in Oxford (II. 285,6°); davon existiert ebenfalls in Oxford (Catal. v. Coxe, II. Aul. Mar. Magd. Nr. 2,11°) eine latein. Übersetzung: *Messahalac libellus de mercibus.* — Einige seiner Werke wurden von Joh. Hispalensis (de Luna, oder auch Hispanus) ins Lateinische übersetzt, so „über die Konjunktionen", „über die Bedeutungen", „über die Konstruktion und den Gebrauch der Astrolabien" (Paris, Cod. 7298, 8°); letzteres wurde gedruckt zu Basel 1583 (de compos. astrolab. Messahalath et tractat. utilit. astrolab. in Margar. philos. a F. Greg. Reisch dialogismis primum tradita, deinde ab Oront. Finaeo locupl.). In Bern (Cat. cod. Bern. edid. Hagen, Nr. 483, 5°) ist vorhanden: Epistula Messehalahu in pluviis et ventis, a magistro Drogone (?) transl. de arab. in latin. — Von oben nicht angeführten Titeln findet man noch folgende in Übersetzungen: Epistola de rebus eclipsis lunae et solis; de receptione planetarum sive de interrogationibus; de revolutione annorum mundi; alle diese wurden im Druck herausgegeben, z. B. in Venedig, 1493. In einigen lat. Mss. sind mehrere seiner Werke vereinigt und unter e i n e n Titel gebracht, hiebei sind sehr wahrscheinlich auch Verwechslungen vorgekommen, indem Schriften anderer Astrologen, wie z. B. des Abû Maʿšar und Sahl b. Bišr, dem Mâšâllâh zugeschrieben wurden und umgekehrt. Da es sich nur um rein astrologische Schriften handelt, trete ich auf weitere Untersuchungen hierüber nicht ein.

---

[a]) Bei C. ist „über die Religionen und Sekten" ein eigenes Werk.

[b]) Ist vielleicht das 1504 und 1549 gedruckte Buch: de scientia motus orbis, welches in der zweiten Ausgabe 27 Kapitel enthält (s. Bibl. math. 5 (1891) p. 66 u. 72).

[c]) d. h. wahrscheinlich: über die astrologische Auswahl der Reisetage.

[d]) Die letzten 10 Werke stehen nicht bei C.

9. ʿAlî b. el-Aʿrâbî, Abû'l-Ḥasan, el-Šeibânî³, aus Kûfa gebürtig, war ein trefflicher Mann und hervorragend in der Astrologie. Er schrieb: Das Buch der Fragen und der Tagewählerei. (Fihr. 278, Übers. 34.)

10. ʿAbdallâh b. ʿObeid el-Asnî war der Astrolog Hârûn el-Rašîds und schrieb für diesen das astrologische Werk: *Fâl*[a]) *Hârûn el-Rašîd,* im Brit. Mus. (1004), in Konstantinopel (2685).[b]) Starb ca. 200 (815/16).

11. El-Faḍl b. Sahl el-Sarachsî,[c]) Abû'l-ʿAbbâs, war einflußreicher Wezir des Chalifen el-Mâmûn und einer der ersten Astrologen seiner Zeit, dessen Prophezeiungen außerordentlichen Erfolg hatten. Er wurde im Monat Šaʿbân 202 (818) zu Sarachs im Bade ermordet, nach den Einen im Alter von 48, nach den Andern von 60 Jahren. (Ibn Ch. I. 413, Übers. II. 472.)

12. Jaḥjâ b. Zijâd b. ʿAbdallâh, Abû Zakarîjâ, bekannt unter dem Namen el-Farrâ, geb. in Kûfa, ein Freigelassener der Benî Minqar, war einer der gelehrtesten Grammatiker der Schule von Kûfa, Lehrer der Söhne el-Mâmûns in Grammatik und Syntax. Ich erwähne ihn hier nur, weil alle Quellen ihm große Kenntnisse in der Astronomie zuschreiben. Er starb i. J. 207 (822/23) auf der Reise nach Mekka. (Fihr. 66; Ibn Ch. II. 228, Übers. IV. 63; Abulfid. II. 142; Flügel, gramm. Schulen d. Araber, 129.)

13. ʿOmar b. el-Farruchân,[d]) Abû Ḥafṣ, el-Ṭabarî, war einer der bedeutendsten Übersetzer aus dem Persischen ins Arabische und einer der ersten Kenner der Astronomie und Astrologie. Er war eng befreundet mit Jaḥjâ b. Châlid, dem Barmekiden, ebenso mit dem Wezir el-Mâmûns, Faḍl b. Sahl (s. Art. 11). Er wird auch unter den Baumeistern und Ingenieuren Bagdads mit el-Fazârî zusammen genannt von el-Jaʿqûbî (p. 13). Er verfaßte außer den Übersetzungen aus dem Persischen eine Reihe von Schriften, darunter solche im Auftrage und zum Gebrauche el-Mâmûns. Der Fihr. und Ibn el-Q. erwähnen nur folgende Werke, von denen keines mehr vorhanden zu sein scheint: Das Buch der Vorzüge (schönen Eigenschaften). Über die Übereinstimmung und die Uneinigkeit der Philosophen in Bezug auf die Bahnen der Planeten. Er ist auch der Kommentator des Quadripartitum des Ptolemäus, welches für ihn Abû Jaḥjâ el Baṭrîq (s. Art. 5) aus dem Griechischen übersetzt hatte; ebenso kommentierte er den Pentateuch (ein astrol. Werk) des Dorotheus Sidonius. Er starb um das Jahr 200.

---

[a]) Dieses Wort bedeutet allgemein „Weissagung", „Prophezeiung".

[b]) Hier heißt er „el-Ansi" statt „el-Asnî".

[c]) Sarachs ist eine Stadt in Chorâsân, an der heutigen persischen Grenze gegen Merw hin gelegen.

[d]) Der Fihr. hat im Titel „ʿOmar b. el-Farruchân", im Artikel selbst „Abû Ḥafṣ ʿOmar b. Ḥafṣ".

(Fihr. 268 und 273, Übers. 21 und 27 und Anmerkg. 85; C. I. 362 n. Ibn el-Q.)

Von ihm oder wenigstens als ihm zugeschrieben existieren noch: Das Buch der (astrol.) Fragen: in Paris (2600, 1^0), wo der Verfasser ʿOmar b. Farġân el-Ṭîrân heifst, in Berlin (5878 u. 79), in Kairo (316, Übers. 171), dasselbe umfafst 138 oder 137 (Paris) Kapitel; im Escurial (917) befindet sich: Prinzipien der Astrologie (*Kitâb el-uṣûl bi'l-nuǵûm*), welches Werk mir nach der Beschreibung Casiris identisch mit dem vorigen zu sein scheint, obgleich es 150 Kapitel enthalten soll. Übrigens gehört sehr wahrscheinlich dieses Buch der Fragen dem Sohne unsers Autors, Muh. b. ʿOmar b. el-Farruchân, an (s. d. Art.), welchem der Fihr. ausdrücklich ein solches Werk zuschreibt.[4]

14. Jaḥjâ b. Abî Manṣûr, Abû ʿAlî, war der Astrolog el-Mâmûns, nachdem er vorher im Dienste seines Wezirs el-Faḍl b. Sahl (s. Art. 11), der ebenfalls Astrolog war, gestanden hatte, und sein Schüler in dieser Kunst gewesen war. Er war der Abstammung nach ein Perser und trat erst zum Islam über, als er im Dienste el-Mâmûns stand. Er nahm auch teil an den astronomischen Beobachtungen in Bagdad (i. J. 214) beim Thor Šamâsîje. Er starb, als er el-Mâmûn auf einer Expedition nach Tarsus begleitete, i. d. J. 215—217 (830—32), und wurde in Ḥaleb begraben. Ibn Ch. berichtet, dafs zu seiner Zeit noch sein Grabmal mit seinem Namen daselbst zu sehen war. — Er schrieb: Das Buch der (durch die Beobachtung) erprobten Tafeln, in zwei Ausgaben. Über die Bestimmung der Höhe des Sechstels einer Stunde für die Breite von Bagdad. Ein Buch, welches seine Beobachtungen und Berichte über eine Menge anderer Beobachtungen enthält. (Fihr. 143 und 275, Übers. 29; Ibn Ch. II. 194, Übers. III. 605; Abulfar. 248, Übers. 161; C. I. 425 n. Ibn el-Q.; Ibn Jûnis, i. d. Notices et extraits, VII. 56.)

Von diesen Schriften sind nach C. I. 364 die Tafeln noch vorhanden im Escurial (922), doch könnte es möglich sein, dafs dieselben, da sie „die Mâmûnischen" betitelt sind, von Ḥabaš el-Merwazî (vergl. Art. 22) herrühren würden. Was übrigens diese Tafeln anbetrifft, die den einzelnen Beobachtern el-Mâmûns unter verschiedenen Titeln zugeschrieben werden, wie „die erprobten", „die damascenischen", „die mâmûnischen", so ist es wahrscheinlich, dafs dieselben von allen oder mehreren zusammen gemeinsam ausgeführt worden und sogar identisch sind, wenigstens läfst sich dies mit gröfster Wahrscheinlichkeit von den „erprobten" und den „mâmûnischen" sagen und zwar aus folgenden Gründen: Dem Ḥabaš el-Merwazî schreibt der Fihr. „damascenische" und „mâmûnische" Tafeln zu, Ibn. el-Q. und Abulfar. erstens „Tafeln nach Art des Sindhind", zweitens „erprobte" und drittens „die kleinen

Tafeln", betitelt „el-šâhî"; el-Bîrûnî (the chronology of ancient nations, p. 180) spricht nur von einem Canon probatus (= erprobte Tafel) des Ḥabaš, und Ibn Jûnis (Ḥakem. Tafeln, Not. et extr. VII p. 56 ff.) spricht stets von den Verfassern der „erprobten" Tafeln (d. h. den Astronomen el-Mâmûns). Es ist also nach meiner Ansicht sehr wahrscheinlich, daſs in dem Ms. 922 des Escurial diese „erprobten" Tafeln der Beobachter el-Mâmûns noch erhalten sind.

15. El-Ḥasan b. Muh.[a]) el-Ṭûsî el-Temîmî, bekannt unter dem Namen el-Abaḥḥ, lebte unter Hârûn el-Rašîd und el-Mâmûn und war ein bedeutender Astrolog, Zeitgenosse von ʿOmar b. el-Farruchân el-Ṭabarî (s. Art. 13). Ibn Abî U. erzählt von zwei medizinisch-astrologischen Konsultationen dieser beiden Gelehrten bei einer der Frauen Hârûns und bei der Mutter des Barmekiden Ǧaʿfar b. Jaḥjâ. Er schrieb: Über die Tagewählerei, für el-Mâmûn. Über den Regen. Über die Geburten. (Fihr. 275, Übers. 30; Ibn Abi U. I. 120 und 131.)

16. El-Ḥaǧǧâǧ b. Jûsuf b. Maṭar, ein Übersetzer zur Zeit Hârûn el-Rašîds und el-Mâmûns, also ca. 170—220 (786—835); über sein Leben habe ich nur noch die Angabe Jaʿqûbîs (p. 13) zu zitieren, daſs er bei dem Bau von Bagdad beteiligt gewesen sei; dies wird sich aber kaum auf die Grundsteinlegung beziehen, die 145 stattgefunden hat. Er übersetzte die Elemente des Euklides zweimal ins Arabische, zuerst für Hârûn und nachher für el-Mâmûn; diese Übersetzung, allerdings nur die sechs ersten Bücher, befindet sich in Leiden (965).[b]) Ferner übersetzte er den Almagest des Ptolemäus, ebenfalls in Leiden vorhanden (1044)[5], und das Buch über den Spiegel von Aristoteles (?).[c]) Ibn Abî U. berichtet, daſs Ṯâbit b. Qorra seine Übersetzung des Euklides verbessert habe, was wohl eine Verwechslung mit derjenigen des Isḥâq b. Ḥonein ist. (Fihr. 252, 265, 268, Übers. 9, 16, 20; Ibn Abi U. I. 204.)

17. Jaḥjâ b. Ġâlib,[d]) Abû ʿAlî el-Chaijâṭ (der Schneider), ein Schüler von Mâšâllâh, gehörte zu den vorzüglichsten Astrologen. Er schrieb: Das Buch der Einleitung (in die Astrologie). Das Buch der Fragen, in Berlin (5876). Über die Bedeutungen (significationes). Über die Zeitperioden (?). Über die Geburten, in Oxford (I. 371, 3°) und Kairo (314). Über

---

[a]) Der Fihr. hat „b. Ibrâhîm".

[b]) Wird jetzt von Besthorn und Heiberg arabisch mit latein. Übersetzung herausgegeben in Kopenhagen; erschienen sind bis jetzt Fasc. I—III.

[c]) Es ist noch nicht festgestellt, was dies für eine Schrift und von wem sie verfaſst sei; vielleicht ist sie identisch mit der dem Euklides zugeschriebenen Katoptrik.

[d]) Der Fihr. bemerkt, er werde auch genannt Ismâʿîl b. Muh.

den Umlauf der Geburtsjahre. Das Buch der Blumenlese (wörtlich „des Zerstreuten“), für Jaḥjâ b. Châlid verfaſst. Das Buch der goldenen Rute. Über den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch der Anekdoten (treffenden oder auch vieldeutigen Antworten). Er wird ca. 220 (835) gestorben sein. (Fihr. 276, Übers. 31.)

In Kairo (291, Übers. 170) befindet sich noch: *Fawâ'id falakîje* (astrologische Nützlichkeiten) aus einer Abhandlung des Abû ʿAlî el-Chaijâṭ entnommen; aus welcher, ist nicht zu entscheiden. — Das Buch über die Geburten wurde ins Lateinische übersetzt von Plato von Tivoli (1136) und etwas später (1153) von Joh. Hispalensis.[a]) Mss. dieser Übersetzungen befinden sich in Oxford, Florenz, Wien, Paris und Erfurt (amplon. Sammlung).[b]) Die Übersetzung des Joh. Hispalensis (nicht, wie Wüstenfeld angiebt, des Plato von Tivoli) wurde im Druck herausgegeben von Schoner in Nürnberg 1546 und 1549, unter dem Titel: Albohali Arabis astrologi antiquissimi ac clarissimi de iudicijs nativitatum liber unus, antehac non editus etc.

18. Ahmed b. Muh. el-Nehâwendî, der Rechner, schrieb: Das Buch an Muh. b. Mûsâ (vergl. folg. Art.) über den Vorteil oder das Erreichen (arab. *neil*)? Eine Einleitung in die Astrologie.[c]) Über die Vermehrung und die Verminderung. Astronomische Tafeln, genannt „die umfassenden“ (*muštamil*). Seine Beobachtungen machte er in Ǧundîsâbûr zur Zeit Jahjâ b. Châlid b. Barmeks (gest. 187). Er wird ca. 220—230 (835—845) gestorben sein. (Fihr. 282, Übers. 38; Ibn Jûnis in d. Not. et ext. VII. 156.)

19. Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî (oder Chwârezmî), Abû ʿAbdallâh, gebürtig aus Chowârezm,[d]) arbeitete auf der Chalifenbibliothek unter el-Mâmûn und gehörte zu den Astronomen, die in el-Mâmûns Diensten standen. Vor und nach der Zeit, da die Beobachtungen unter el-Mâmûn gemacht wurden, pflegten die Leute sich auf seine zwei Tafeln zu verlassen, die unter dem Namen Sindhind[e]) bekannt sind. Er verfaſste: Das Buch der astronomischen Tafeln, in zwei Ausgaben. Über die indische Rechnungsweise. Über die Vermehrung und die Verminderung. Das Buch der Algebra.[f]) Über die Sonnenuhr. Über den Gebrauch des Astrolabiums. Über

---

[a]) Vergl. Wüstenfeld, die Übersetzungen arabischer Werke in das Lat. etc. p. 41 und 42, und Steinschneider, Biblioth. math. 4 (1890), p. 69 und 70.

[b]) Vergl. Wüstenfeld (l. c.) und Steinschneider (l. c.).

[c]) H. Ch. V 473 hat: Einleitung in die Astronomie (hei'a).

[d]) Die Gegend des heutigen Chiwa und dieses selbst.

[e]) Ist das indische Siddhânta = das letzte Ziel, das vollendete System.

[f]) Vergl. über die drei letzten Werke, die der Fihr. dem Sind b. ʿAlî zuschreibt, was ich in meiner Übers. aus dem Fihr. p. 62, Anm. 166 gesagt habe.

die Konstruktion des Astrolabiums. Das Buch der Chronik."[a]) Sein Todesjahr wird ebenfalls zwischen 220 und 230 fallen. (Fihr. 274, Übers. 29; Abulfar. 248, Übers. 161; Masʿûdî, I. 11.)[5a]

Von diesen Werken ist nur noch arabisch vorhanden die Algebra (eigentl. „Abrifs oder Kompendium der Algebra") in Oxford (I. 918, 1⁰), herausgeg. von Fr. Rosen: The Algebra of Moh. b. Musa, London 1831. Das Kap. über die Ausmessung wurde auch in französ. Übers. veröffentlicht von Arist. Marre: Le messâhat de Moh. b. Mousa el Khârezmi etc. in den Nouvelles Annales de Math. T. V. 1846 und in etwas veränderter Form zum zweiten mal in Rom 1866. In lateinischer Übersetzung ist vorhanden: 1. Über die indische Rechnungsweise: Algoritmi de numero Indorum (Cambridge, Cod. I. i. 6. 5), übersetzt von Gerard von Cremona oder Athelard von Bath, herausgeg. von Bald. Boncompagni (Trattati d'aritmetica, pubbl. da B. B., Roma 1857, Nr. 1). 2. Die Algebra (Paris, 7377 A. 2⁰ und 9335), übersetzt von Gerard von Cremona, veröffentlicht von G. Libri, histoire des sciences math. etc. T. I. p. 253 ff. Eine von dieser etwas verschiedene Übersetzung durch Robertus Retinensis befindet sich in Wien (Cod. Palat. Vindob. 4470) und vielleicht auch in Dresden (C. 80) (vergl. Bibl. math. 1899, p. 90). 3. Vielleicht sind auch die von Athelard von Bath übersetzten astronomischen Tafeln (*Zîǧ Ǧaʿfar*) in Oxford (Catal. Mss. Angl. T. I. P. I. Nr. 4137) und Paris (Bibl. Mazar. Nr. 1256) diejenigen des Muh. b. Mûsâ, vielleicht aber auch von Abû Maʿšar Ǧaʿfar b. Muh. el-Balchî.[b])

20. Châlid b. ʿAbdelmelik el-Merwarrûḏî,[c]) einer der astronomischen Beobachter unter el-Mâmûn, wird unter denjenigen Astronomen genannt, die bei der Sonnenbeobachtung[d]) in Damaskus im J. 217 (832) mitgewirkt haben; als die übrigen werden genannt: Sind b. ʿAlî, ʿAlî b. ʿÎsâ und andere. Wahrscheinlich war er auch schon bei der im J. 214 (829) in Bagdad gemachten Beobachtung[e]) anwesend, als deren Teilnehmer genannt werden: Jaḥjâ b. Abî Manṣûr, el-ʿAbbâs b. Saʿîd el-Ǧauharî, Sind b. ʿAlî

---

[a]) Dafs wirklich dieses Werk von Muh. b. Mûsâ ist, bezeugt uns el-Masʿûdî in seinen „goldenen Wiesen", wo er Bd. 1, p. 11 die Historiker und Chronisten anführt, die er benutzt habe, und unter diesen befindet sich auch Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî.

[b]) Vergl. Wüstenfeld, die Übers. arab. Werke in das Latein. etc. Göttingen, 1877, p. 21 f.

[c]) d. h. von Merw al-Rûḏ, einer Stadt in Chorâsân, zu unterscheiden von Merw al-Šâhǧân, ebenfalls in Chorâsân, dem heutigen Merw, wovon das Relat. „el-Merwazî" lautet.

[d]) Bestimmung der Schiefe der Ekliptik, des Apogeums etc., vergl. hierfür Ibn Jûnis in den Not. et extr. VII. p. 56.

[e]) Vergl. Ibn Jûnis, ibid.

und andere. Über sein Leben ist sonst weiter nichts bekannt. (C. I. 435 n. Ibn el-Q.; Masʿûdî I. 182; Notices et extr. VII. 56; el-Bîrûnî, Chronol. of anc. nations, 147; H. Ch. III. 466.)

21. El-ʿAbbâs b. Saʿîd el-Ǧauharî, gehörte zu den astronomischen Beobachtern unter el-Mâmûn, doch widmete er sich hauptsächlich der Geometrie. Er war bei den Beobachtungen anwesend, die 214 in Bagdad und 217 in Damaskus gemacht wurden (vergl. Art. 14 und 20), und auf Grund deren die „erprobten" oder „Mâmûnischen" Tafeln zusammengestellt worden sind.[a]) Er schrieb: Einen Kommentar zu den Elementen des Euklides. Das Buch der Sätze, die er zum ersten Buch des Euklides hinzugefügt hat. (Fihr. 272, Übers. 25; C. I. 403 n. Ibn el-Q.; Not. et extr. VII. 56 und 166.)

22. Aḥmed b. ʿAbdallâh, bekannter unter dem Namen Ḥabaš el-ḥâsib (der Rechner), el-Merwazî, d. h. gebürtig aus Merw, wohnte in Bagdad und war Astronom zur Zeit el-Mâmûns und el-Moʿtaṣims. Er war berühmt in der Berechnung des Laufes der Gestirne; man hat von ihm drei verschiedene astronomische Tafeln: die ersten waren verfafst nach Art des Sindhind, er wich aber, sowohl was die Gesamtheit der Ausführung als auch die Berücksichtigung der Theon'schen Theorie von der Trepidation der Fixsterne anbetrifft, von el-Fazârî und el-Chowârezmî ab, und verbesserte so ihre Angaben über die Längen der Gestirne; er schrieb diese Tafeln im Anfang seiner Wirksamkeit, als er noch ganz auf dem Boden des Sindhind stand. Die zweiten Tafeln heissen die „erprobten", sie sind das berühmteste Werk, das er verfafst hat, und auf sorgfältige eigene Beobachtungen gegründet. Die dritten Tafeln sind die kleineren, bekannt unter dem Namen Tafeln des Šâh. So berichtet Ibn el-Qifṭî und nach ihm Abûlfarag; merkwürdigerweise nennt Ibn el-Q., nachdem er von diesen drei Tafeln gesprochen hat, unter den nach dem Fihrist aufgezählten Werken el-Merwazîs nur zwei Tafeln und zwar unter andern Titeln, nämlich die damascenischen und die mâmûnischen; Reinaud (Mém. sur l'Inde p. 319) nennt die Tafeln des Šâh die persischen und Ibn Jûnis (Not. et extr. VII. p. 58, 160 etc.) spricht von arabischen Tafeln[b]) des Aḥmed b. ʿAbdallâh. In Berlin (5750) sind astronomische Tafeln von el-Ḥabaš vorhanden, in 168 Blättern; welche es seien, können wir nicht entscheiden, eine Vergleichung dieses Ms. mit dem Ms. 922 des Escurial (vergl. Art. 14) wäre für die Klärung dieser Tafel-

[a]) Die Tafeln, die ihm speziell von Ibn el-Q. und H. Ch. III. 466 zugeschrieben werden, sind jedenfalls die von allen Astronomen el-Mâmûns gemeinsam verfafsten, sog. „erprobten" (vergl. Art. 14).

[b]) Es ergiebt sich hieraus mit grofser Wahrscheinlichkeit, dafs die „erprobten", die „mâmûnischen" und die „arabischen" Tafeln eine und dieselben sind und gemeinsam von den Astronomen el-Mâmûns ausgearbeitet wurden.

frage von grofsem Interesse.[5b] — Es werden ihm noch folgende Werke zugeschrieben: Über die Entfernungen und die Körper (Himmelskörper?). Über die Konstruktion des Astrolabiums. Über die Sonnenuhren und die Gnomone. Über die drei sich berührenden Kreise und die Art und Weise der Verbindungen (unter ihnen). Über die Konstruktion der horizontalen, senkrechten, geneigten und schiefen (gedrehten) Flächen.[a]) Nach dem Fihrist soll el-Merwazî über 100 Jahre alt geworden sein, sein Tod mag also etwa in die Jahre 250—260 (864—874) zu setzen sein; seine Beobachtungen machte er in den Jahren 210—220 (825—835).[b]) (Fihr. 275, Übers. 29; Abulfar. 247, Übers. 161; Ibn el-Q. n. Wiener Ms. 1121; Not. et extr. VII. 58, 160 etc.; el-Bîrûnî 178, 180.)

23. ʿAlî b. ʿÎsâ el-Aṣṭorlâbî, ein astronomischer Beobachter und berühmter Verfertiger astronomischer Instrumente, woher er auch den Namen el-Aṣṭorlâbî erhielt. In dieser Kunst war er nach dem Fihrist Schüler von Ibn Chalaf el-Merwarrûḏî Er nahm teil an den Beobachtungen zu Bagdad und Damaskus in den J. 214 und 217 mit Jaḥjâ b. Abî Manṣûr, Sind b. ʿAlî, el-ʿAbbâs el-Ǧauharî, Châlid b. ʿAbdelmelik etc. zusammen. Auch soll er bei der Gradmessung beteiligt gewesen sein, die auf Befehl Mâmûns in der Ebene Singâr zwischen Euphrat und Tigris ausgeführt worden sein soll.[6] ʿAlî b. ʿÎsâ schrieb eine Abhandlung über das Astrolabium, die noch arabisch vorhanden ist in Oxford (I. 967, 11⁰), in Leiden (1159) und wahrscheinlich auch im Escurial (972, 3⁰), obgleich Casiri den Verfasser ʿAlî b. ʿÎsâ el-Išbîlî (d. h. der Sevillaner) nennt. (Fihr. 284, Übers. 41; C. I. 400; Not. et extr. VII. 54, 56 und 66.)

24. Sind b. ʿAlî, Abû'l-Ṭaijib, war zuerst Jude und trat dann unter el-Mâmûn zum Islam über. Er gehörte zu den astronomischen Beobachtern unter diesem Chalifen, und war sogar das Haupt derselben (n. d. Fihr.). Ihm wird der Bau der Kanîsa zugeschrieben, die in der Nähe des Thores Šamâsîje in Bagdad stand.[c]) Er schrieb: Astronomische

---

[a]) Es handelt sich hier wahrscheinlich um Sonnenuhren, vergl. Anmerkg. 172 in meiner Übers. aus dem Fihrist.

[b]) Diesen und die beiden folgenden Autoren (23 und 24) habe ich hier behandelt, um sie den übrigen Astronomen el-Mâmûns anzureihen, obgleich sie chronologisch vielleicht eine etwas spätere Stelle einnehmen sollten.

[c]) Sehr wahrscheinlich war diese Kanîsa das Gebäude für die astronomischen Beobachtungen und nicht eine Synagoge, wie Steinschneider (Bibl. math. 1894, p. 104) meint, denn alle Autoren, die über diese Beobachtungen in Bagdad berichten, nennen als Ort derselben das Quartier Šamâsîje beim Thore gleichen Namens.

Tafeln, in zwei Ausgaben.[a]) Über die Apotomeen und die Medialen.[b]) Über die Schneidenden (Sekanten?). In den hakemitischen Tafeln (Not. extr. VII, 67) findet sich noch folgende Stelle über Sind b. ʿAlî: Ibn Jûnis erzählt, wie Sind b. ʿAlî an irgend einem Orte bemerke, er habe die Armillarsphäre gesehen, mit welcher Jahjâ b. Abî Manṣûr beobachtet hatte, und die nach seinem Tode verkauft worden sei, auf dem Marktplatz der Papierhändler (Bücherabschreiber) in Bagdad; dieselbe habe eine Gradeinteilung von 10 zu 10 Minuten gehabt. Über Sind b. ʿAlîs Teilnahme an der Gradmessung s. den vorigen Art. Sind b. ʿAlî scheint ziemlich alt geworden zu sein, da er noch mit Aḥmed b. Mûsâ im wissenschaftlichen Verkehr gestanden ist (vergl. den Art. 43), er wird also wohl nach 250 (864) gestorben sein. (Fihr. 266 und 275, Übers. 17 und 29; C. I. 439 n. Ibn el-Q.; Not. et extr. VII. 56, 66 und 94.)

25. Sahl el-Ṭabarî, auch genannt Rabban[c]) el Ṭabarî (d. i. der Rabbiner aus Ṭabaristân), war nach Ibn el-Q. ein jüdischer Arzt und Astrolog, hervorragend auch in den mathematischen Disziplinen und auch als Übersetzer. Sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Sahl war ebenfalls ein berühmter Arzt und Lehrer des Abû Bekr el-Râzî (Rhases) nach Ibn el-Q. (p. 268) und Ibn Abî U. I. 309, der später aus Ṭabaristân nach ʿIrâq übersiedelte und in Sarr-man-ra'â wohnte. Sahl war einer der ersten in den Wissenschaften der Juden. Es wird ihm auch eine Almagestübersetzung zugeschrieben. Der Astrolog Abû Maʿšar soll nämlich nach dem Ort der Strahlenwerfung[d]) gefragt worden sein, da habe er geantwortet, daſs bei den Übersetzern des Almagestes aus dem Griechischen über den Ort der Strahlenwerfung nichts gefunden werde, sondern nur in der Übersetzung des Rabban el-Ṭabarî; weder Ṯâbit noch Ḥonein (sollte heiſsen: Isḥâq b. Ḥonein), noch el-Kindî, auch keiner von den Söhnen Nûbachts hätten die Stelle des Ptolemäus gekannt (kann auch heiſsen: verstanden, erklärt). Da Rabbans Sohn Lehrer des Abû Bekr el-Râzî war und dieser 320 im hohen Alter gestorben ist, so können wir annehmen, daſs er etwa 260 der Schüler ʿAlî b. Sahls gewesen sei, der schon ca. 220 unter Moʿtaṣim zum

---

a) Vergl. was ich über diese astron. Tafeln gesagt habe in den Art. 14, 21, 22 und Noten zu denselben.

b) Sehr wahrscheinlich der Kommentar des 10. Buches des Euklides (oder ein Teil desselben), den ihm der Fihr. zuschreibt.

c) Diese Lesart zieht A. Müller vor, andere, wie z. B. Ibn el-Q. (p. 268) haben „Zein". Steinschneider (Z. D. M. G. 50. p. 203 und Bibl. math. 1894, 42) vermutet, Sahl el-Ṭabarî könnte identisch sein mit Sahl b. Bišr (vergl. folg. Art.), welcher Meinung ich nach Ibn el-Q. und dem Fihrist nicht beistimmen kann.

d) Vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 46, Anmerkg. 14.

m übergetreten ist; sein Vater Sahl (od. Rabban) wird also etwa in Jahre 170—230 (786—845) zu setzen sein. (C. I. 436 n. Ibn el-Q.; Ch. Übers. III. 314; Ibn Abi U. I. 308.)

Von folgenden 17 in den Art. 26—42 behandelten Gelehrten ist die enszeit und daher auch die chronologische Reihenfolge nicht genau festtellen, doch ergiebt sich mit mehr oder weniger Sicherheit, dafs ihre desjahre etwa in den Zeitraum von 230—250 (845—864) fallen.

26. Sahl b. Bišr b. Ḥabîb b. Hânî (oder auch Hâjâ), Abû ʿOṯmân, r Jude, stand im Dienste (wahrscheinlich als Astrolog) des Ṭâhir b. elsein el-Aʿwar, des Statthalters von Chorâsân, gest. 207 (822/23), und chher des el-Ḥasan b. Sahl, des Wezirs el-Mâmûns, gest. 235 oder 236 50/51). Er war ein scharfsinniger und vortreff licher Mann und ein auseichneter Astrolog. Er schrieb: Die Schlüssel der Urteile, oder das ine Fragenbuch. Über die beiden Lose. Das grofse Buch der Geburten. er den Umlauf der Jahre der Welt. Das kleine Buch der Einleitung. s grofse Buch der Einleitung. Das Buch der Astronomie und der chenkunst. Über den Umlauf der Geburtsjahre. Das kleine Buch der burten. Das grofse Fragenbuch. Über die Tagewählerei. Über die areszeiten (auch Zeitperioden). Über den Schlüssel.[a]) Über Regen und nde. Über die Bedeutungen. Über den Regenten der Geburtsstunde und jenigen der Lebenszeit. Über die Erwägungen(?). Über die Verfinstegen. Das Buch der Synthesis. Das Buch, genannt „das zehnte", in Abschnitte geteilt, das das Wesentliche aus seinen Schriften in sich einigt; er verfafste es in Chorâsân und die Rumäer (Oströmer) sollen sehr geschätzt haben. Ein Buch über Algebra, ebenfalls von den Rumäern lobt. (Fihr. 274, Übers. 28 und 62; C. I. 439 n. Ibn el-Q.)

Von seinen Schriften sind noch arabisch vorhanden: Über die Jahresten, in Kairo (309 und 312, Übers. 170). Über die Urteile aus den stirnen (de astrologia judiciaria), im Escurial (914) und wahrscheinlich ch in Kairo (268, Übers. 168), ist schwer mit einem der oben genannten identifizieren. Das Buch über die Fragen und die Urteile (Weissagungen), 14 Kapiteln, in Oxford (941, 3⁰), wahrscheinlich das erste der oben nannten Werke. Über die Urteile nach den Umläufen der Jahre und dere, in Berlin (5883), ebenfalls nicht zu identifizieren. Über die Urteile *fîʾl-aḥkâm*), in Leipzig (Refâʿîje Nr. 116), soll nach Steinschneider (Bibl. th. 8, 1894, p. 41) mit dem lat. Introductorium[b]) übereinstimmen, das 493 in Venedig hinter dem Quadripartitum des Ptolemäus gedruckt

[a]) Hier fehlt wohl eine nähere Bestimmung.

[b]) Ob dies die kleine oder grofse Einleitung sei, können wir nicht entscheiden.

worden ist. Ebenfalls in Venedig (1493) wurden noch gedruckt: de interrogationibus, de electionibus, de temporum significationibus in judiciis; dieselben Abhandlungen auch in Basel 1533.

27. El Hasan b. Sahl b. Nûbacht, wahrscheinlich ein Neffe von Nr. 7, Astrolog von el-Wâtiq und vielleicht auch noch von el-Mutawakkil, ebenfalls Übersetzer aus dem Persischen ins Arabische wie sein Onkel. Er schrieb: Über den helischen Untergang der Mondstationen (*fî'l-anwâ'*). Dieser Autor wird etwa verwechselt mit el-Hasan b. Sahl el-Sarachsî, dem Wezir el-Mâmûns, dem Bruder von el-Fadl b. Sahl (s. Art. 11). (Fihr. 244 und 275, Übers. 30; Abulfar. 258, Übers. 168.)

28. 'Abdallâh b. Sahl b. Nûbacht, wahrscheinlich ein Bruder des vorigen, Astrolog unter und nach el-Mâmûn, wird nur von Abulfar. (248, Übers. 161) erwähnt.

29. Jahjâ b. el-Batrîq, Abû Zakarîjâ, der Sohn von Nr. 5, gehörte zu den Genossen el Hasan b. Sahls (gest. 235 oder 236). Er verstand das Arabische nicht recht, auch das Altgriechische nicht, er war nämlich Latiner (Latînî, sic!), d. h. er verstand die Sprache der Rumäer von damals und ihre Schrift (d. h. doch wohl das Neugriechische jener Zeit), die zusammenhängend (?) ist, nicht getrennt wie das Altgriechische. Er übersetzte unter anderem das Buch des Aristoteles über den Himmel und die Welt ins Arabische, welche Übersetzung dann von Honein verbessert wurde. (Fihr. 250, Übers. 8; Ibn Abi U. I. 205.)

30. Muh. b. 'Abdallâh b. 'Omar b. el-Bâzjâr, ein Schüler von Ahmed b. 'Abdallâh el-Habaš und ein vorzüglicher Astrolog. Er schrieb: Über die Atmosphäre, in 19 Abschnitten (nach andern Cod. nur 7). Das Buch der Tafeln. Über die Konjunktionen und den Umlauf der Jahre der Welt.[a]) Über die Geburten und den Umlauf der Geburtsjahre. Abû Ma'šar widmete sein Buch über die Konjunktionen dem Ibn el-Bâzjâr. (Fihr. 276, Übers. 30; C. I. 432 n. Ibn el-Q.)

31. Ibn Hibintâ (oder Hinbitâ n. H. Ch. V. 654), ein christlicher Astrolog in Bagdad, schrieb i. J. 214 (829) ein astrologisches (?) Werk, betitelt: *el-mogni* (das ersetzende, entbehrlich machende) über die Gestirne;[b]) der zweite Teil davon befindet sich in München (852).

32. Ibrâhîm b. el-Salt war einer der mittelmäfsigen Übersetzer. Er übersetzte das erste Buch der Physik des Aristoteles ins Arabische, ebenso das Quadripartitum des Ptolemäus, welche Übersetzung von Honein

---

a) Dieses Buch wird von el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 25) zitiert.

b) H. Ch. hat: *el-mogni fî iršâd el-qâsid* (das ersetzende für die rechte Leitung des Strebenden).

verbessert wurde; er schrieb auch einen Kommentar zum Quadripartitum. (Fihr. 250 und 268. Übers. 8 und 20; Ibn Abi U. I. 205.)

33. Ibn Râhiweih el-Arğânî (oder Arrağânî)[a]) kommentierte das 10. Buch des Euklides nach Fihr. 266, Übers. 17. — Steinschneider[b]) hält diesen Autor identisch mit Ishâq b. Ibrâhîm b. Machlad el-Merwazî, genannt Ibn Râhiweih, einem bedeutenden Rechtsgelehrten und Traditionisten, gest. 238 (852/53) in Nîšapûr;[c]) Flügel hält nach dem Index zum Fihrist beide nicht für identisch; die Frage ist nicht zu entscheiden.[d])

34. Muh. b. ʿOmar b. el-Farruchân, Abû Bekr, el-Ṭabarî, der Sohn von Nr. 13, war einer der vortrefflichsten Astronomen und Astrologen. Er schrieb: Über den Gnomon (der Sonnenuhren). Über die Geburten. Über den Gebrauch des Astrolabiums. Das Buch der Fragen. Das Buch der Einleitung. Über die Tagewählerei. Das kleine Buch der Fragen. Über den Umlauf der Geburtsjahre. Über die directiones (*tasjîrât*).[e]) Über die Neigungen (*mijâlât?*).[f]) Über den Umlauf der Jahre der Welt. Das Buch der directiones bei den Geburten.[g]) (Fihr. 273, Übers. 27; C. I. 431 n. Ibn el-Q.)

Von diesen Schriften ist noch vorhanden: Das Buch der Fragen, das aber in den Mss. seinem Vater zugeschrieben wird (vergl. Art. 13). In lateinischer Übersetzung von Joh. Hispalensis ist noch das Buch über die Geburten (de nativitatibus) vorhanden in Wien (3124, 8°) und in der Amplonianischen Sammlung in Erfurt (Qu. 330, 11° und 365, 18°).[h]) Gedruckt ist: Omar Tiberiadis de nativitatibus et interrogationibus. Venet. 1503.

35. ʿAbdelḥamîd b. Wâsiʿ b. Turk, Abû'l-Faḍl (auch Abû Muh.) el-Chuttalî,[i]) der Rechner, schrieb verschiedene Werke über die Rechenkunst, die berühmt und verbreitet waren, so: Das Ganze der Rechenkunst in 6 Büchern. Das Buch der Seltenheiten in der Rechenkunst und der

---

[a]) d. h. von Arrağân (oder Arğân), einer Stadt in Chûzistân, dem Gebiete zwischen Baṣra und Fâris, gebürtig.

[b]) Z. D. M. G. 50. p. 167; hier ist das Zitat: Hammer IV. 168 zu verbessern in: IV. 152.

[c]) Vergl. Ibn Ch. Übers. I. 180 und Masʿûdî VII. 288.

[d]) Ibn el-Q. (Münchener Ms. 440, fol. 151[a]) hat einen Abû Saʿîd el- Arğânî, Arzt unter den Bujiden, gest. im Ğumâdâ I. 384 (994) in Bagdad.

[e]) Vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 61, Anmerkg. 148.

[f]) Vergl. hierüber ebenfalls meine Übers. aus dem Fihr. ibid. A. 149.

[g]) Fehlt bei C. I. 431.

[h]) Nach Steinschneider, Biblioth. math. 1891, p. 67.

[i]) So liest Flügel in seiner Ausgabe des Fihrist; C. hat el-Ğebelî, es könnte auch heifsen el-Ğîlî, alle drei Lesarten sind unsicher.

besondern Eigenschaften der Zahlen.[a]) (Fihr. 281, Übers. 37; C. I. 405 n. Ibn el-Q.)

36. Muh. b. el-Ǧahm, der Barmekide, lebte unter den Chalifen el-Mâmûn und el-Moʿtaṣim, war noch Zeitgenosse von Abû Maʿšar, der nach dem Fihrist in wissenschaftlichen Fragen der Autorität Ibn el-Ǧahms zu folgen pflegte. Er war ein charaktervoller, zuverlässiger und gelehrter Mann, bedeutender Logiker und Astrolog, auch Historiker.[b]) Ibn Ch. erzählt von ihm, daſs einst der Chalife el-Moʿtaṣim gegen ihn erzürnt gewesen sei und ihn zum Tode verurteilt habe, da sei er durch die Dazwischenkunft seines Freundes Aḥmed b. Abî Duwâd gerettet worden, der des Chalifen Eigennutz anzuregen wuſste, indem er aus den Gesetzesvorschriften nachwies, daſs der Chalife sein Vermögen nicht einziehen dürfe, wenn er ihn ohne gerichtlichen Nachweis seiner Schuld töten lasse. (Vergl. auch Weil, Gesch. d. Chalifen, II. 333.) Er schrieb für el-Mâmûn ein vortreffliches Buch über Tagewählerei. (Fihr. 275 und 277, Übers. 30 und 33; C. I. 430 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. I. 23, Übers. I. 63; el-Bîrûnî, 108.)

37. Ibn Isḥâq b. Kusûf, wahrscheinlich ein Astronom zur Zeit der Beobachtungen unter el-Mâmûn oder etwas später, wird nur von Ibn Jûnis (Not. et extr. VII. 58) zitiert.

38. ʿÎsâ b. Jûnis, der Sekretär und Rechner, gehört zu der Zahl der verdienstvollen Männer ʿIrâqs, die die Erwerbung der alten Werke der griechischen Wissenschaften begünstigten. (Ibn Abi U. I. 206.)

39. Aḥmed[c]) b. Muh. b. Keṯîr el-Farġânî, aus Farġân in Transoxanien gebürtig, einer der Astronomen el-Mâmûns und seiner Nachfolger,[d]) schrieb: Das Buch der Elemente der Astronomie, Auszug aus dem Almagest (auch unter dem Titel: Das Buch über das gesamte astronomische Wissen und die himmlischen Bewegungen). Über die Konstruktion der Sonnenuhren. (Fihr. 279, Übers. 34; C. I. 409 und 432 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 248, Übers. 161; Abûlmaḥ. I 742.)

Von seinen Werken ist das erstgenannte noch vorhanden in Oxford

---

[a]) Statt dieses Werkes hat der Fihr.: das Buch über den Geschäftsverkehr; es ist möglich oder wahrscheinlich, daſs diese Angabe unrichtig ist, zumal dasselbe Werk unmittelbar nachher auch seinem Enkel (s. Art. 75) zugeschrieben wird.

[b]) Er schrieb nach el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 108) „Das Buch der Lebensbeschreibungen der Könige“. Wüstenfeld hat ihn in seinem Werke „Die Geschichtsschreiber der Araber etc.“ vergessen.

[c]) Abulfar. hat „Aḥmed b. Muh.“, der Fihr. nur „Muh.“ Ibn el-Q. macht zwei Personen aus der einen, was höchst wahrscheinlich unrichtig ist, ihm folgt auch Flügel: Dissertat. de arab. scriptor. graecor. interpret., 1841, p. 29 und 34.

[d]) Abûlmaḥ. I. 742 schreibt, er sei von el-Mutawakkil (232—247) zur Beaufsichtigung des Baues eines Nilmessers im J. 247 (?) nach Fosṭâṭ geschickt worden

(I. 879, 1°), in Paris (2504, 3°) und in Kairo (310, Übers. 170). Herausgegeben wurde dasselbe lateinisch von Melanchthon aus dem Nachlasse Regiomontans, Nürnberg 1537, und von Jakob Christmann, Frankfurt 1590, arabisch und lateinisch von Golius, Amsterdam 1669. Mss. der ältern lateinischen Übersetzungen von Joh. Hispalensis und Gerard von Cremona existieren in beträchtlicher Zahl (vergl. Wüstenfeld, die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische etc. p. 26 und 63). — Aufser den oben genannten Werken werden ihm noch zugeschrieben: Über die Konstruktion des Astrolabiums, in Berlin (5790—93)[a]) und Paris (2546, 5°). Über die Berechnung (?) der sieben Klimata, unvollständig, vielleicht nur ein Teil aus seinen Elementen der Astronomie, in Kairo (311, Übers. 170).

40. Benî el-Ṣabbâḥ (die Söhne el-Ṣabbâḥs), Muh., Ibrâhîm und el-Ḥasan, waren alle drei geschickte Astronomen, besonders auf dem Gebiete der beobachtenden Astronomie und Astrologie bewandert. Sie schrieben: Das Buch der Beweise zu den Operationen mit dem Astrolabium, es wurde teilweise verfafst von Muh., vollendet von Ibrâhîm. Über das Verfahren zur Bestimmung des Mittags mittelst einer einzigen geometrischen Messung, von Muh. begonnen, von el-Ḥasan vollendet. Über die Konstruktion der Sonnenuhren, von Muh.

Dem el-Ḥasan b. el-Ṣabbâḥ, dem dritten der genannten Söhne, widmet der Fihrist noch einen selbständigen Artikel, in welchem er bemerkt, dafs er sich neben der Astronomie auch mit Geometrie beschäftigt habe und ihm noch folgende Werke zuschreibt: Das Buch der Lehrsätze und der Ausmessungen. Über die Kugel. Über den Gebrauch der Armillarsphäre. — Ibn el-Q. (C. I. 413 und Münchener Ms. fol. 67[a]) kennt noch einen el-Ḥasan b. Miṣbâḥ und schreibt ihm astronomische Tafeln zu, in denen er die mittlern Örter der Gestirne feststellte nach den Systemen des Ptolemäus und des Sindhind, und die Schiefe der Ekliptik nach den Beobachtungen seiner Zeit.[7] (Fihr. 276, Übers. 31; C. I. 413 n. Ibn el-Q.)

41. Ḥâriṯ, der Astrolog, war eng befreundet mit el-Ḥasan b. Sahl[b]) und ein vorzüglicher Gelehrter, den auch Abû Maʿšar als Autorität anführt. Er schrieb: Das Buch der Tafeln. (Fihr. 278, Übers. 34.)[8]

42. Chorzâd[c]) b. Dâršâd, der Rechner, ein Schüler (wörtlich „Diener") des Juden Sahl b. Bišr (s. Art. 26), sehr wahrscheinlich ein

---

[a]) Das Ms. 5793 ist von den drei ersten etwas verschieden, obgleich es ungefähr denselben Titel trägt; mit welchem von diesen das Pariser Ms. identisch ist, kann ich nicht angeben.

[b]) Es ist dies der Wezir el-Mâmûns, el-Ḥasan b. Sahl el-Sarachsî, der 235 oder 236 gestorben ist (vergl. Ibn Ch. I. 141, Übers. I. 408).

[c]) Oder „Chorrazâd".

Perser, schrieb: Über die Geburten. Über die Tagewählerei. (Fihr. 276, Übers. 30.)

43. Benî[a]) Mûsâ (die Söhne Mûsâs), Muh., Ahmed und el-Hasan. Über den Vater Mûsâ b. Šâkir berichtet Ibn el-Q. (Wiener Handschrift Nr. 1161 n. Flügels Kat.) Widersprechendes, wenn Flügel richtig gelesen hat: p. 364 heisst es, er sei sehr bewandert in Geometrie und Astronomie gewesen, so dafs er sogar zu den berühmteren Astronomen el-Mâmûns gezählt habe; p. 510 liest man, dafs Mûsâ kein Mann der Wissenschaft und Bildung, sondern in seiner Jugend sogar ein Räuber gewesen sei, der die Wege Chorâsâns unsicher gemacht habe; später soll er dann allerdings ein geordneteres Leben geführt haben, so dafs er sogar ein Genosse (Freund) el-Mâmûns wurde, der dann auch für die Erziehung seiner Söhne besorgt war. Die Söhne Mûsâs widmeten sich mit grofsem Eifer den Wissenschaften, sie verwandten den gröfsten Teil ihres Vermögens auf die Erwerbung griechischer Werke und deren Übersetzung ins Arabische, sie reisten selbst oder sandten andere Gelehrte in die oströmischen Länder, um philosophische, mathematische, astronomische und medizinische Werke anzukaufen. Zu den mit den Söhnen Mûsâs in engster Beziehung stehenden Übersetzern gehörten Honein b. Ishâq und Tâbit b. Qorra, welch letzterer durch Muh. (oder Ahmed?) b. Mûsâ in den Kreis der Freunde des nachmaligen Chalifen el-Moʿtadid eingeführt wurde (s. Art. 66). Der bedeutendste der drei Brüder scheint Muh. gewesen zu sein, mit dem Beinamen Abû Ǧaʿfar; er war bewandert in den Elementen des Euklides und im Almagest und in allen andern Werken über Mathematik und Astronomie, auch in der Logik. Ahmed soll sich besonders in der Mechanik ausgezeichnet haben und der Fihrist nennt ihn auch als Verfasser des Buches über die Mechanik, das Ibn el-Q. allen drei Brüdern gemeinsam zuschreibt; dieses Buch soll nach Ibn el-Q. Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik aufweisen, wie sie selbst bei Heron nicht gefunden würden. Hasan, der dritte der Brüder, zeichnete sich besonders in der Geometrie aus, wofür er eine wunderbare Anlage gehabt haben soll; als er nur die 6 ersten Bücher der Elemente studiert hatte, behauptete er, jeden Satz selbständig beweisen zu wollen, den man ihm aus den übrigen Büchern vorlegen würde. Was die Gradmessung anbetrifft, die den Söhnen Mûsâs von Ibn Ch. und Abulfid., wohl aus einer Verwechslung mit Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî entspringend, beigelegt wird, vergleiche man, was ich im Art. 23 und Anmerkung 6 gesagt habe. Muh. b. Mûsâ starb im Rabîʿ I. 259 (Jan. 873). Den Söhnen Mûsâs werden folgende Werke zugeschrieben: Das Buch über die Wage (Farasṭûn oder

---

[a]) Altarabisch „Banû“.

Qarasṭûn, vergl. auch Art. 66). Das Buch über die Mechanik, von Aḥmed b. Mûsâ. Über die länglich-runde Figur (d. h. die Ellipse),[a]) von Ḥasan b. Mûsâ. Über die Bewegung der ersten Sphäre,[b]) von Muh. Das Buch der Kegelschnitte.[c]) Das Buch der drei (?), von Muh. Über die geometrische Figur, deren Eigenschaften Galenus[d]) erklärt hat, von Muh. Über den Teil (vielleicht auch: über die Wurzel), von Muh. Das Buch, in welchem durch Vernunftgründe (?) und auf geometrischem Wege dargethan wird, dafs aufserhalb der Fixsternsphäre keine neunte Sphäre existiert, von Aḥmed. Über die Priorität (oder den Anfang) der Welt, von Muh. Über die Frage, welche Aḥmed dem Sind b. ʿAlî vorlegte. Ein Buch über das Wesen der Rede (Rhetorik), von Muh. Über die Fragen, um welche es sich ebenfalls zwischen Sind und Aḥmed handelte. Das Buch über die Ausmessung der Kugel, die Dreiteilung des Winkels und die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Gröfsen. (Fihr. 271, Übers. 24; C. I. 418 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 280, Übers. 183; Ibn Ch. II. 79, Übers. III. 315; Abulfid. II. 241.)

Von ihren Schriften sind noch vorhanden: Die Mechanik, im Vatican (317, 1°). Die 7 Bücher der Kegelschnitte des Apollonius in der Übersetzung des Hilâl b. Abî Hilâl el-Ḥimṣî und des Ṯâbit b. Qorra und der Recension des Aḥmed b. Mûsâ, in Oxford (I. 943). Das 5., 6. und 7. Buch der Kegelschnitte in der Übersetzung des Ṯâbit b. Qorra und der Recension des Aḥmed b. Mûsâ, in Oxford (I. 885) und Leiden (979). Das Buch über die Ausmessung der Kugel, etc. in Oxford (I. 960), in Berlin (5938), in Paris (2467, 3°), Bruchstücke daraus in Ind. off. (1043, 2° und 3°); es trägt in diesen Mss. den Titel: Über die Ausmessung der ebenen und sphärischen Figuren von den Söhnen Mûsâs, Muh., el-Ḥasan und Aḥmed. Die Übersetzung dieser Schrift ins Lateinische durch Gerard von Cremona wurde von M. Curtze nach dem Basler Ms. F. II. 33 unter dem Titel Liber trium fratrum etc. in den Nova acta d. K. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturfor. Bd. XLIX. Nr. 2, Halle 1885, veröffentlicht. Die Bibl. palat.-medic. zu Florenz enthält ein Ms. (271), in welchem sich befindet: Liber de sphaera in plano describenda, von Abû Ǵaʿfar Muh. b. Mûsâ.

44. Honein b. Isḥâq el-ʿIbâdî,[e]) Abû Zeid, wurde geboren in

---

[a]) Vergl. Woepcke, im Journal asiat. V. Sér. T. V. 1855, p. 223.

[b]) Der Text hat wohl unrichtig: über die erste Bewegung der Sphäre.

[c]) Es ist dies wahrscheinlich eine Umarbeitung und Neuausgabe der Kegelschnitte des Apollonius.

[d]) Soll wahrscheinlich heifsen „Menelaus“ und die geometrische Figur wäre dann die Transversalenfigur, vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 24 und 57.

[e]) ʿIbâd ist der Name eines christlichen Stammes der Araber, der in der Gegend von Ḥîra seine Wohnsitze hatte.

Hira i. J. 194 (809/10), wo sein Vater Apotheker war, und starb zu Bagdad im Safar d. J. 260[a]) (Dez. 873). Er war einer der bedeutendsten Ärzte seiner Zeit, aber ebenso berühmt als Übersetzer griechischer Werke ins Syrische und Arabische, denn er war in allen drei Sprachen bewandert. Er durchzog fremde Gegenden, besonders die oströmischen Länder, um daselbst wissenschaftliche Werke zu sammeln, die meisten derselben waren für die Söhne Mûsâs bestimmt (vergl. Art. 43). Diese unterstützten die Übersetzer griechischer Werke, unter anderen den Honein b. Isḥâq, seinen Neffen Hobeiš b. el-Ḥasan (n. Abulfar. „b. el-Aʿsam") und den Ṯâbit b. Qorra, jeden mit ungefähr 500 Dinaren im Monat. Ibn Abi U. sagt p. 188: „Was sein Sohn Isḥâq b. Honein anbetrifft, so war er ebenfalls berühmt in der Arzneikunst und man hat viele Werke von ihm; er übersetzte auch eine grofse Zahl griechischer Werke ins Arabische, und zwar wandte er sein Hauptinteresse den philosophischen Werken, wie z. B. den Aristotelischen Schriften, zu, während sein Vater Honein die medizinischen Werke bevorzugte, besonders die des Galenus, so dafs kaum etwas von Galenus existiert, das nicht von ihm übersetzt oder verbessert worden wäre." Dieses verbunden mit dem Umstand, dafs nur Ibn Ch. und einige noch vorhandene Mss. den Honein als Übersetzer der Elemente des Euklides und des Almagestes nennen, die älteste Quelle, der Fihrist, aber die letzten beiden Übersetzungen ausdrücklich dem Sohne Isḥâq zuschreibt, führt uns zu der Annahme, dafs der Fihrist hierin Recht habe. Hierauf gestützt können wir demnach für Honein blofs vindizieren die Übersetzungen des Quadripartitum des Ptolemäus,[b]) und eines verloren gegangenen Buches (oder einer Pseudoschrift) des Ptolemäus über die Kometen; es wäre auch möglich, dafs das letztere eine selbständige Abhandlung des Honein wäre, sie wird allerdings vom Fihrist[c]) dem Ptolemäus zugeschrieben, dagegen im Katal. von Kairo (314, Übers. 171) dem Honein (hier heifst es statt *ḏawâ'ib* — *zawâ'id*, daher habe ich übersetzt: über die Gestirne, die einer Zunahme fähig sind); Auszüge daraus befinden sich in Oxford (II. 285, 3°). Dann hat der Escurial (916) noch eine Übersetzung eines astrologischen Werkes von Apollonius (von Tyane?), betitelt „der Einflufs der himmlischen Erscheinungen auf die zusammengesetzten (d. h. irdischen) Dinge", durch Honein. Der Fihrist (p. 250, Übers. 8) erwähnt, Honein habe eine Übersetzung der Aristotelischen Schrift „über den Himmel und die Welt" von Ibn el-Baṭrîq (s. Art. 29) verbessert. Honein diente lange Zeit dem Chalifen el-Mutawakkil als Leibarzt, wurde

a) So nach Ibn Ch., dem Fihr. und Abulfid., nach Ibn Abi U. 264.

b) Nach dem Fihr. verbesserte er blofs die Übersetzung des Ibrâhîm b. el-Ṣalt

c) p. 268, Übers. 20, wo ich *dawât el-ḏawâ'ib* unrichtig mit „Personen des Adels (der Würde)" übersetzt habe.

dann aber von einem andern christlichen Arzte el-Ṭaifûrî bei den christlichen Vorgesetzten (Katholikus und Bischof) aus Neid der Gotteslästerung angeklagt, daraufhin exkommuniziert, und soll dann aus Kummer hierüber oder auch an Gift bald gestorben sein.

Aufser seinen Übersetzungen werden ihm noch folgende Schriften (die medizinischen übergehe ich selbstverständlich) zugeschrieben: Über Ebbe und Flut.[a]) Über die Wirkungen der Sonne und des Mondes. Eine zusammenfassende Darstellung des Buches (von Aristoteles) über den Himmel und die Welt. Über die Meteore. Sammlung der Kommentare der alten Gelehrten zu dem Aristotelischen Werke über den Himmel und die Welt. Über den Regenbogen. (Fihr. 294, Übers. 43 und 76; C. I. 286—288 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. I. 167, Übers. I. 478; Ibn Abi U. I. 184; Abulfar. 263, Übers. 171.)

45. Ja'qûb b. Isḥâq b. el-Ṣabbâḥ el-Kindî, Abû Jûsuf, „der Philosoph der Araber“ genannt, der Vortrefflichste seiner Zeit in der Kenntnis der alten Wissenschaften insgesamt. Er stand in hohem Ansehen bei el-Mo'taṣim und seinen Nachfolgern, besonders bei el-Mutawakkil und verfafste viele Werke über die verschiedensten Wissenszweige, so über die einzelnen Disziplinen der Philosophie und Mathematik, über Astronomie, Medizin und Musik. Er war aus Baṣra gebürtig und von edler Herkunft, sein Grofsvater war Gouverneur des Gebietes der Benî Hâšim, sein Vater solcher von Kûfa; von Baṣra siedelte er dann nach Bagdad über, wo er nun eifrig den Wissenschaften oblag. Ibn Abi U. nennt ihn, wohl nach dem Zeugnis Abû Ma'šars, auch als Übersetzer aus dem Griechischen, doch steht die Wahrheit dieser Behauptung nicht aufser allem Zweifel. Der gleiche Autor berichtet auch einiges über unfreundliche Beziehungen, die zwischen den Söhnen Mûsâs und el-Kindî bestanden haben sollen, wobei es sogar soweit kam, dafs erstere dem el-Kindî sämtliche Bücher wegnahmen und in einem besondern Gebäude einschlossen; durch Vermittlung Sind b. 'Alîs, der selbst kein Freund el-Kindîs, aber ein gerechter Mann war, erhielt später el-Kindî seine Bücher wieder zurück. El-Kindîs Geburts- oder Todesjahr wird nirgends angegeben, doch läfst sich aus verschiedenen Angaben mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit der Schlufs ziehen, dafs er ca. 260 (873/74) gestorben ist.

Für seine vielen Schriften (ca. 270) verweise ich auf die Arbeit Flügels: Al-Kindî, genannt „der Philosoph der Araber“,[b]) und auf meine Übersetzung

---

[a]) Nur diese Schrift wird auch vom Fihr. erwähnt, die übrigen finden sich blofs bei Ibn Abi U.

[b]) Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes, 1. Bd. Nr. 2.

aus dem Fihrist. Da ich aber daselbst die astrologischen Schriften weggelassen habe, so trage ich dieselben hier noch nach, zusammen mit den Zusätzen aus Ibn Abi U., die ich auch in meiner Übersetzung aus dem Fihrist nicht berücksichtigt habe.

Astrologische Schriften: Über das Vorangehen der Erkenntnis durch Beweise in den himmlischen Dingen vor den Fragen (Aufgaben).[a]) Einleitung in die Astrologie in Form von Fragen (Aufgaben). Erste, zweite und dritte Abhandlung über die Astrologie mit (verschiedenen) Einteilungen (?). Über die Vorbedeutungen der beiden Unglückssterne (Saturn und Mars), wenn sie im Zeichen des Krebses stehen. Über das Mafs des Nutzens der Tagewählerei. Über das Mafs des Nutzens der Weissagung aus den Gestirnen, und wie der Mann sein mufs, der mit Recht ein Astrolog genannt wird. Kurzgefafste Abhandlung über die Planetenbezirke der Horoskope.[b]) Über den Umlauf (Wechsel) der Geburtsjahre. Über die Beweiskraft der Finsternisse in Bezug auf (bevorstehende) Ereignisse.

Unter den astronomischen Schriften stehen bei Ibn Abi U. noch folgende: Brief an seinen Schüler Zarnab (?) über die Geheimnisse der Gestirne und die Belehrung über die Anfänge ihrer Einflüsse. Über die Ursache der Höfe um Sonne, Mond und Sterne. Abhandlung über die Gestirne. — Unter den geometrischen finden sich daselbst noch folgende: Probleme (Fragen) über die Ausmessung der Flüsse u. a.[c]) Über die zeitlichen Verhältnisse. Über die Zahl. Über die Brennspiegel. — Unter den Schriften über die Himmelssphären kommen noch folgende hinzu: Über die Zusammensetzung der Sphären. Über die aus der Höhe herabfallenden Körper und die raschere Bewegung des einen vor dem andern. Über den Gebrauch des Instrumentes, welches „das allgemeine" (umfassende, *ǵâmi'a*) genannt wird. Abhandlung über die Art und Weise der Rückläufigkeit der Planeten.[d]) — Nach den meteorologischen Schriften und vor denjenigen über die Entfernungen stehen bei Ibn Abi U. noch folgende: Über die Meteorologie (wahrscheinlich eine Bearbeitung oder ein Kommentar der Aristotelischen Schrift). Abhandlung an seinen Sohn Aḥmed gerichtet, über die Verschiedenheit der bewohnten

---

[a]) Flügel (l. c. p. 29) übersetzt diese ziemlich klare Stelle jedenfalls unrichtig mit: „Über die Vorkenntnisse vermittelst der einzelnen Himmelskörper auf die Lehrsätze einen Schlufs zu ziehen (d. h. diese kennen zu lernen und zu beweisen)."

[b]) Flügel (l. c. p. 29) übersetzt: über die positiven Bestimmungen der Hor.

[c]) Flügel (l. c. p. 26) mufs hier eine andere Lesart vor sich gehabt haben, die aber Müller in seiner Ausgabe des Ibn Abi U. nicht anführt, er übersetzt: Lehrsätze über die Kürze und Länge der Tage und anderer Zeitteile.

[d]) Flügel (l. c. p. 28) übersetzt: „über die Art und Weise der hin- und herirrenden Planeten"; der Text hat *ruǵû'*, was einfach „das Zurückkehren" heifst.

)rte der Erde; es ist dies ein Kommentar des Buches des Theodosius „über lie bewohnten Orte der Erde“. Über den Gebrauch des Azimutes (wahrcheinlich des Azimutalquadranten). — Nach den Schriften über die Entrnungen findet sich noch bei Ibn Abi U.: Abhandlung an Aḥmed b. Muh. l-Chorâsânî gerichtet, über Metaphysik und die Erklärung dessen, was am ufsersten Ende der Welt sich befinde. — Als letzte Schrift führt Ibn Abi U. och an: Abhandlung über die Himmelssphäre und die Gestirne, worin die kliptik nicht in 12 Teile geteilt wird, über ihre Benennung als Glückd Unglückbringende, ihre Häuser, ihre Erhöhungen und ihre Termini (Beirke) mit geometrischen Beweisen.[a]) (Fihr. 255, Übers. 10; C. I. 353 n. bn el-Q.; Ibn Abi U. I. 206; Abulfar. 273, Übers. 179.)

Von seinen vielen Schriften sind leider nur einige unbedeutende och vorhanden, und diese sind teilweise nicht sicher mit solchen in en Quellen angeführten zu identifizieren: Im Escurial (913, 2°) „über en Umlauf der Jahre“, wahrscheinlich die unter den astrologischen chriften stehende Abhandlung „über den Umlauf der Geburtsjahre“. Ibid. 913, 3°) „über Planetenkonjunktionen“; es ist dies sehr wahrscheinlich seine ben genannte Schrift „über die Vorbedeutungen der beiden Unglückssterne Saturn und Mars)“ etc., die sich auch im Brit. Mus. (426, 18°) befindet, nter dem Titel: „Abhandlung über das Reich der Araber und seine Dauer igentlich Gröfse, Länge)“, und von O. Loth in „Morgenländische Forschungen“ Festschrift zu Ehren H. L. Fleischers) Leipzig, 1875, Nr. 7 veröffentlicht orden ist. Ibid. (913, 4°) „über das Weissagen aus den Finsternissen“, ahrscheinlich die oben genannte Abhandlung „über die Beweiskraft der insternisse in Bezug auf (bevorstehende) Ereignisse“. In Leiden (1049): e ratione qua ope instrumenti *ḏât el-šoʿbatain* (das mit den zwei Ästen?) icti distantiae praecipue stellarum mensurantur, wahrscheinlich die 6. oder der in meiner Übersetzung aus dem Fihr. p. 14 unter den Schriften über ie Entfernungen aufgeführten Abhandlungen. Ibid. (1050) „über Tageählerei“, wahrscheinlich die oben genannte Schrift „über das Mafs des ntzens der Tagewählerei“. In Kairo (338, Übers. 172): *el-dawârad hamġ* (?), ein Titel, aus dem nichts zu machen ist, den aber auch das Wiener s. des Fihrist (vergl. Fihrist, I. Bd., Lesarten, p. 21) unter den arithmechen Schriften am Schlusse enthält. Im Katalog von Kairo ist bemerkt, fs diese Schrift über den Fâl mit Rücksicht auf die Zahl und die Rechng nach den Gestirnen und die Weissagung aus dem Vogelflug handle, ist also sehr wahrscheinlich die siebente der arithmetischen Schriften: iber die Weissagung aus dem Vogelflug und das Fâlstechen mit Rücksicht

---

[a]) Diese Abhandlung fehlt in der Arbeit Flügels.

auf die Zahl". In Paris (2467, 2°): Auszug aus der Verbesserung der Optik (des Euklides). Ibid. (2544, 9°): Erklärung einer Stelle des Almagestes über die Armillarsphäre, die von den Übersetzern schlecht wiedergegeben worden ist, es ist dies vielleicht die letzte der Schriften über die Kugel. In Oxford (I. 877, 12°): Über Ebbe und Flut. Ibid. (I. 877, 13°): Über die Ursache der blauen Farbe, welche an der Oberfläche des Himmels gesehen wird.

Ins Lateinische übersetzt wurden von den genannten Schriften: De aspectibus (wahrscheinlich die verbesserte Optik des Euklides) von Gerard von Cremona, handschriftlich vorhanden u. a. O. in Basel (F. II. 33). De judiciis astrorum von Robertus Anglicus, handschriftlich u. a. O. in Oxford (Cat. Mss. Angl. T. I. P. I. Nr. 1692). De effectu proiectuque radiorum, oder auch nur de radiis (über die Projektion der Strahlen, ein astrol. Begriff, vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 46 und 47), von unbekanntem Übersetzer, handschriftlich in Oxford (l. c. Nr. 1692 und 1784). Liber electionum in Oxford (l. c. Nr. 1648) und ebenda: liber de criticis diebus. De pluviis imbribus et ventis ac aeris mutatione, auch nur betitelt: de impressionibus aeris, ebenfalls von unbekanntem Übersetzer, handschriftlich in Oxford (l. c. T. II. P. I. Nr. 6784), gedruckt Venetiis 1507.

46. Muh. b. Châlid b. ʿAbdelmelik el-Merwarrûdî, der Sohn von Nr. 20, wird ebenfalls wie sein Vater als astronomischer Beobachter gerühmt. Die unten zitierte Quelle bemerkt, daſs sein Vater als Astronom unter el-Mâmûn in Damaskus auf dem Berge Qâsjûn[a]) beobachtet habe (C. I. 430 n. Ibn el-Q.)

47. Muh. b. ʿÎsâ, Abû ʿAbdallâh el-Mâhânî,[b]) aus Bagdad, war sehr gelehrt in Arithmetik, Geometrie und Astronomie. In der letzteren Wissenschaft zeichnete er sich hauptsächlich als Beobachter aus, Ibn Jûnis[c]) führt von ihm eine Reihe von Beobachtungen von Mond- und Sonnenfinsternissen und von Planetenkonjunktionen an, aus den Jahren 239—252 (853—866). Sein Tod wird etwa in die Jahre 260—270 (874—884) zu setzen sein. Er schrieb: Über das Verhältnis. Einen Kommentar zum 5. Buche des Euklides.[d]) Über die 26 Sätze des ersten Buches des Euklides, welche ohne reductio ad absurdum bewiesen werden. Einen Kommentar

---

[a]) Ein Berg nördlich von Damaskus, heute noch so genannt, der Text bei Casiri hat Qâsûn.

[b]) d. h. aus Mâhân, einer Stadt in Kirmân (Persien) stammend.

[c]) In den hakemitischen Tafeln (Not. et extr. VII. p. 102—112).

[d]) Nach dem Pariser Ms. 2467, 16° wahrscheinlich identisch mit der Abhandlung über das Verhältnis, oder diese ist ein Teil jenes Kommentars.

10. Buche des Euklides.[a]) Eine Abhandlung über die Throne (?)[b]) iestirne. (Fihr. 266 u. 271, Übers. 16 u. 25; C. I. 431 n. Ibn el-Q.; et extr. VII. 58, 102—112, 164.)

Von diesen Schriften sind noch arabisch vorhanden: Über das Veris (fi'l-nisbe), in Paris (2467, 16°) und in Berlin (6009). Ein Teil Kommentars zum 10. Buche des Euklides, in Paris (2457, 39°), (vergl. Woepcke in Mém. prés. par div. sav. à l'acad. des sciences, T. XIV. 9). — Nach dem Leidener Katalog (p. 50, praef. ad ms. 991) soll hânî auch einen Kommentar zum 2. Buche des Archimedes über die l und den Cylinder geschrieben haben, wozu später Abû Sahl el-Kûhî Abû'l-Ǧûd b. el-Leiṯ einen Zusatz verfafst habe (vergl. Woepcke, L'al- d'Omar Alkhayyâmî, p. 96—103). Ebenso soll er (nach der praefat. ns. 988 derselben Bibliothek) die Sphaerica des Menelaus in der Überng des Ḥonein b. Isḥâq (Isḥâq b. Ḥonein) verbessert, d. h. besser redi-haben.

48. Abû Sa'îd el-Ḍarîr (der Blinde), el-Ǧorǧânî, nach Flügel ımat. Schulen d. Araber p. 147) ein Schüler des i. J. 231 (845/46) rbenen Ibn el-A'râbî, schrieb: Geometrische Aufgaben, in Kairo (203, ;. 22), und das Buch über die Auffindung der Mittagslinie, aus dem e „Analemma" entnommen, samt dem Beweise dazu, in Kairo (204, ı. 23).

49. Hilâl b. Abî Hilâl el-Ḥimṣî (d. h. aus Emessa in Syrien ge-ʒ) war genau in der Übersetzung, es fehlte ihm aber die Schönheit Geläufigkeit des sprachlichen Ausdruckes. Er soll unter der Leitung im Auftrage) Aḥmed b. Mûsâ b. Šâkirs die vier ersten Bücher der lschnitte des Apollonius ins Arabische übersetzt haben.[c]) Er wird ums 270 (883/84) gestorben sein. (Fihr. 267, Übers. 18; Ibn Abi U. I. 204.)

50. El-Ḥosein b. Muh., Abû 'Alî, el-Adamî schrieb: Über *el-'ât* (?) und die Fäden (am Astrolabium?)[d]) und die Verfertigung der n. (Fihr. 280, Übers. 36.)

51. Ibn Ḥabaš, Abû Ǧa'far, der Sohn von Aḥmed b. 'Abdallah ınt Ḥabaš (Art. 22), war sehr gelehrt in der Astronomie und geschickt

---

a) Steht weder im Fihr. noch bei Ibn el-Q.

b) Ich vermute, dafs statt *'uruš* ein anderes Wort mit der Bedeutung von nsterung", z. B. *kusûf,* ursprünglich im Text gestanden hat, leider giebt Ibn den Titel des Werkes von el-Mâhânî, aus dem er seine Beobachtungen enten hat, nicht an.

c) Über noch vorhandene Exemplare der arab. Übers. der Kegelschnitte s. Ṯâbit b. Qorra.

d) Vergl. Dorn, drei astronom. Instrumente, p. 77.

in der Verfertigung von astronomischen Instrumenten. Vielleicht ist er identisch mit dem im Fihr. 285, Übers. 41 genannten Instrumentenkünstler 'Alî b. Ahmed dem Geometer. Er schrieb: ein Buch über das Planisphaerium (Fihr. 275, Übers. 30; C. I. 408 n. Ibn el-Q.) Ein Ms. des Buches über das Planisphaerium befindet sich in Paris (2457, 30°).[a])

52. Muh. b. Ahmed b. Jûsuf el-Samarqandî, ein Astronom, der in Samarqand in den Jahren 251—252 (865—866) Beobachtungen machte und Tafeln verfaſste. Ich finde ihn nur von Ibn Jûnis in den hakemitischen Tafeln (Not. et extr. VII. 152 u. 166) zitiert.

53. Ǵa'far b. Muh. b. 'Omar el-Balchî, Abû Ma'šar, aus Balch in Chorâsân gebürtig, der berühmteste Astrolog der Araber, im Abendlande unter dem Namen Albumasar bekannt. Er wohnte beim Thore Chorâsân im westlichen (?) Teil von Bagdad und gehörte anfänglich zu den Traditionisten. Er haſste den el-Kindî und stachelte die Leute gegen ihn auf und schmähte ihn wegen seiner Philosophie; da schickte el-Kindî heimlich solche Leute hinter ihn, welche ihm das Studium der Arithmetik und Geometrie angenehm zu machen wuſsten; infolge dessen wandte er sich diesen Gebieten zu, beendete aber seine Studien hierin nicht, sondern ging zur Astrologie über. Jetzt hörten die Bosheiten gegen el-Kindî auf, denn er gehörte nun zu derselben Gelehrtenklasse. Es wird erzählt, daſs er mit dem Studium der Astrologie erst nach seinem 47. Lebensjahre begonnen habe. Über den Charakter und die Begabung Abû Ma'šars bringt der Fihr. widersprechende Angaben; er sagt im Art. „Abû Ma'šar“ zuerst, daſs derselbe von scharfer, treffender Urteilskraft gewesen sei, und am Schlusse heiſst es: Abû Ma'šar pflegte (in wissenschaftlichen Dingen) der Autorität der Barmekiden 'Abdallâh b. Jahjâ und Muh. b. el-Ǵahm zu folgen und doch übertraf er sie im Wissen. Und an einer andern Stelle berichtet er nach Ibn el-Muktafî, daſs Abû Ma'šar in seinen Werken sich vielfach als Plagiator erweise, besonders an Sind b. 'Alîs Schriften. Abû Ma'šar starb, über 100 Jahre alt, in Wâsit, am 28. Ramadân 272 (April 886). (Fihr. 277, Übers. 31; C. I. 351 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. I. 112, Übers. I. 325; Abulfar. 273, Übers. 178; el-Bîrûnî 29, 94, 95, 187.)

Was das Verzeichnis seiner Werke anbetrifft, so verweise ich auf den Fihr. und meine Übers. (p. 31—33). Von diesen Werken sind noch arabisch vorhanden: Das Buch der Geburten (wahrscheinlich das kleine), in Berlin (5881 u. 82), in Wien (1419), in Florenz (Bibl. Medic.-Laur. Nr. 10),[b]) in

[a]) Hier fehlt im Namen des Verf. „Abû Ǵa'far Ahmed b. 'Abdallâh“ hinter Ǵa'far ein „b.“.

[b]) Wird hier vom Verf. des Kat. irrtümlicherweise dem Ǵa'far el-Sâdiq zugeschrieben.

(346, Übers. 173). In Paris befinden sich eine Reihe von Werken dem Titel „Traité des nativités“ (2583—87, 2718, 2°), die teilweise mit einander übereinstimmen und alle dem Abû Ma'šar zugeschrieben ›n. Das grofse Buch der Einleitung, in Oxford (II. 272 und 294), ·ial (912), Leiden (1051), Paris (2588), hier unter dem Titel: *aḥkâm l sinî el-mawâlîd* (Urteile nach dem Umlauf der Geburtsjahre).[a]) Ein ›endium dieses Werkes ist im Brit. Mus. (415, 4°), ein Auszug daraus ıris (2696, 2°). *Fî'l-nimûdârât* (über die Horoskope oder Nativitäten), rit. Mus. (426,17°). Das Buch der Konjunktionen, in Oxford (II. 284, 1°), ıris (2580,3°). Über den Umlauf der Geburtsjahre, in Oxford (I. 878).[b]) die Tagewählerei, im Brit. Mus. (415, 5°? u. 12°). Das Buch der Tafeln *ûrât* (die Tausende), wahrscheinlich in Paris (2581). An verschiedenen ı befindet sich auch noch ein Werk von Abû Ma'šar mit dem Titel: r die Geheimnisse der Gestirne“, so im Escurial (913, 6° u. 933, 1°) in Kairo (331 u. 369). — El-Bîrûnî (p. 187) führt ein Buch von Abû ar an: „Über die Häuser der Gottesverehrung“, wahrscheinlich sein h der Tausende“ oder ein Teil desselben. (Vergl. meine Übers. aus Fihr. p. 65, Anmerkg. 187.)

Von diesen Schriften wurden ins Lateinische übersetzt: Das grofse Buch Einleitung: Introductorium majus oder Liber introductorius major in sterio scientiae astrorum, von Joh. Hispalensis (Handschriften in Paris, rd, München etc.). Gedruckt zu Augsburg 1489 unter dem Titel: Introrium in astronomiam Albumasaris abalachii octo continens libros par-; ebenso zu Venedig 1489 u. 1506. — Das Buch der Konjunktionen: conjunctionum siderum, von Joh. Hispalensis (Handschriften in Oxford, etc.). Gedruckt zu Augsburg 1489 unter dem Titel: Albumasar de ıis conjunctionibus et annorum revolutionibus ac eorum profectionibus, continens tractatus; ebenso zu Venedig 1489 u. 1515; in dieser Ausscheinen vereinigt zu sein „das Buch der Konjunktionen“, und „das über den Umlauf der Geburtsjahre“. — Das kleine Buch der Einleitung: ge minor, von Athelard von Bath, handschriftlich in Oxford (Cat. Mss. T. I. P. I. Nr. 1669). — Es existiert ferner eine lateinische Überng, ebenfalls von Joh. Hispalensis, unter dem Titel: Albumasaris flores logiae, oder flores de judiciis astrorum, welches Werk Wüstenfeld[c]) als

---

a) Die Werke erscheinen sehr oft unter verschiedenen Titeln, so dafs man ens nur aus dem Anfang und dem Schlufs mit einiger Sicherheit schliefsen welches Werk gemeint sei.

b) Vielleicht ist dies auch das grofse Buch der Einleitung wie das Pariser 588.

c) Die Übers. arab. Werke ins Lat. etc. p. 30.

einen Auszug aus dem Buch der Konjunktionen betrachtet; ich halte es für „das Buch der Tagewählerei",[a]) denn der Cat. Mss. Angl. T. I. P. I enthält unter Nr. 1649 ein Oxforder Ms. betitelt: Flores Albumazaris de electionibus. Handschriften desselben befinden sich ferner in Paris, München etc. Gedruckt zu Augsburg 1488, ebenso zu Venedig 1488 u. 1495 unter dem Titel: Albumasar flores astrologie.

54. Muh. b. Jaḥjâ[b]) b. Akṯam, des Richters,[c]) zeichnete sich vor allem in der Rechenkunst aus und schrieb: Über Zahlenprobleme. Ich halte diesen Autor für den Sohn des bedeutenden Juristen und Richters Jaḥjâ b. Akṯam, Abû Muh., des Qâḍî von Baṣra unter el-Mâmûn, gest. im Ḏû'l-Ḥiǧǧe 242 (857).[d]) (Fihr. 282, Übers. 38; C. I. 433 n. Ibn el-Q.)

55. 'Abdallâh b. 'Alî, Abû 'Alî, el-Dandânî (oder el-Randânî?) der Christ, schrieb: Das Buch der Sterndeutungskunst. El-Bîrûnî zitiert in seiner Chronol. of anc. nations p. 245 einen 'Abdallâh b. 'Alî, Mathematiker (was hier wohl „Astrolog" bedeuten wird), aus Bochârâ, der etwas nach el-Kindî gelebt hat, dieser mag mit dem unsrigen identisch sein.[e]) (Fihr. 280, Übers. 36.)

56. Muh. b. Isḥâq b. Ibrâhîm, Abû'l-'Anbas, el-Ṣaimarî, ursprünglich aus Kûfa stammend, war Qâḍî von Ṣaimara[f]) und daneben Litterat, Dichter und Astrolog. Er war Vertrauter (Zechgenosse) des Chalifen Mutawakkil und noch von Mo'tamid. Nach dem Kat. von Kairo (228, Übers. 164) wurde er im Ramadân 213 (Ende 828) geboren und starb nach Abulmah. i. J. 275 (888/89). Er schrieb: Das Buch der Widerlegung der Astrologen. Das Buch der Geometrie des Verstandes (oder des Herzens), wahrscheinlich ein satirisches Werk. Das Buch der Urteile nach den Gestirnen.[g]) Das Buch der Einleitung in die Astrologie. Das Buch der Geburten.[h]) Es wer-

---

[a]) Dieses Buch habe ich in meiner Übers. aus dem Fihr. p. 32 aus Versehen weggelassen; vor dem Werk „Über die Tagewählerei nach den Mondstationen" soll stehen: „Über die Tagewählerei".

[b]) Jaḥjâ fehlt bei C.; hier wird zum Namen (in Klammern) hinzugefügt „Hispalensis", was nicht im arabischen Texte steht.

[c]) Ich betrachte „el-qâḍî" als Apposition zu „Akṯam".

[d]) Vergl. auch Art. „Abû'l-Wefâ", wo ich die Vermutung ausgesprochen habe, Abû'l-Wefâ könnte der Kommentator der Zahlenprobleme (Algebra) des Muh. b. Jaḥjâ sein.

[e]) Vor dem Namen 'Abdallâh steht im Fihr. noch das Wort „qadîm", was wohl sagen will, dafs dieser Autor zu den älteren Astrologen gehöre.

[f]) So und nicht Ṣamîra, wie der Fihr. p. 151 hat, mufs es heifsen; Ṣaimara ist nach Jâqût (III. 443) ein Flecken im Gebiete von Baṣra.

[g]) Steht im Fihr. nur p. 152, nicht aber 278, wo er speziell als Astrolog figuriert.

[h]) Steht umgekehrt p. 278, nicht aber p. 152.

n auch alchymistische Werke zugeschrieben. (Fihr. 151, 173, 277, 58, Übers. 33; C. I. 409 n. Ibn el-Q.; Abulmaḥ. II. 80.)

ielleicht ist von diesen Werken noch arabisch vorhanden „das Buch teile nach den Gestirnen", in Berlin (5711), wo der Titel fehlt. Im on Kairo (228, Übers. 164) wird ihm zugeschrieben: Der Anfang der ʒsgründe (Elemente); es ist dies nach dem Fihr. (277, Übers. 32) ein von Abû Maʿšar, das Abû'l-ʿAnbas für sich in Anspruch nahm.

7. ʿAbdallâh b. Muslim, Abû Muh., el-Dînawarî, bekannt dem Namen Ibn Qoteiba, einer der ältesten Historiker der Araber, J. 213 (828/29) in Bagdad oder Kûfa, war eine zeitlang Qâḍî von ar, setzte sich dann in Bagdad fest und lehrte dort Grammatik und ionen. Er starb daselbst 276 (889/90), nach Andern 270 oder 271. schäftigte sich auch mit astrologischen Studien und schrieb: *Kitâb el-falak* (Das Buch über die Wissenschaft der Sphäre), in Oxford)0); *kitâb el-anwâ'* (Das Buch über die helischen Untergänge der ationen), in Oxford (I. 1033). (Ibn Ch. I. 251, Übers. II. 22; el-, 272; W. G. 73.)

8. Jaʿqûb b. ʿAlî el-Qaṣrânî (unrichtig: el-Qaisarânî), Abû Jûsuf ·šî, stand in grofser Gunst bei den Beherrschern und Emiren des Chorâsân wegen seiner astrologischen Kenntnisse. Er schrieb: Das ler Fragen über die Wissenschaft der Urteile aus den Gestirnen,[a]) ord (I. 996), in Berlin (5877), in Kairo (235 u. 316, Übers. 171). 284, Übers. 41; C. I. 419 n. Ibn el-Q.)[9]

9. Muh. b. ʿAbdallâh b. Samʿân, ein Schüler (Diener) des Abû , schrieb: Einleitung in die Astrologie. (Fihr. 279, Übers. 34.)

0. Aḥmed b. Dâ'ûd, Abû Ḥanîfa, el-Dînawarî, berühmter gelehrter und Historiker, aber auch sehr bewandert in Philosophie, natik, Astronomie und Botanik. Er wohnte meistens zu Dînawar und .. J. 282 (895). Er schrieb: Über die helischen Untergänge der ationen.[b]) Über die Qible. Das Buch der Algebra. Über den *ḥisâb jâ* (die Testamentsrechnung). Über den *ḥisâb el-daur* (besonderer der Testamentsrechnung).[c]) Das Buch *el-tacht*,[d]) über die indische ungsweise. Das Buch der algebraischen Seltenheiten (Kuriositäten).

Auch unter dem Titel „Einleitung in die Wissenschaft der Urteile aus stirnen", so in Berlin (Kat. V. p. 278).

Wird von el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 335 u. 351) zitiert.

Vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 71, Anmerkg. 236.

Alle Quellen haben nach dem Fihr. *„el-bacht"*, doch mufs es heifsen *„el-* vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 37, 40, 41, 70.

Das Buch der astronomischen Beobachtungen.[a]) Astronomische Tafeln.[b]) (Fihr. 78; Ibn Qutl. 95; el-Anbârî, 305; Abulfid. II. 277; Bibl. arab.-hisp. T. X. 376; el-Bîrûnî, Chronol. 335 und 351; Flügel, gramm. Schulen, 190; W. G. 79.)

Von den mathematischen und astronomischen Werken sind, soviel mir bekannt, keine mehr vorhanden; was die Schriften über die Erbteilung oder Testamentsrechnung anbetrifit, so kann ich hierüber nichts Bestimmtes sagen, da ich die Kataloge in Bezug auf Jurisprudenz nicht näher untersucht habe.

61. Muh. b. ʿAbdelbarr el-Kilâ'î aus Ǵaijân (Jaen), war ein Schüler von Jaḥjâ b. Jaḥjâ[10] und ʿAbdelmelik b. Ḥabîb[11] und ein vortrefflicher Mann, scharfblickend im Erbrecht und in der Rechenkunst. Er starb zur Regierungszeit des Emirs ʿAbdallâh (888—912) im Jahre 283 (896) über 80 Jahre alt, wie Châlid[12] erwähnt (B. VII. 315).

62. el-Ḥasan b. el-Chaṣîb, Abû Bekr (?),[c]) war sehr geschickt in der Kunst der Astrologie und schrieb: Das Buch, betitelt *Kâr-i mihtar*,[d]) in 4 Abschnitten. Einleitung in die Astronomie. Über den Umlauf der Jahre der Welt. Über die Geburten. Über den Umlauf der Geburtsjahre.[e]) Casiri hat noch ein Werk „Liber florilegium", das der Fihrist aber dem folgenden Autor, Abû ʿAlî el-Chaijâṭ zuschreibt. Ich bin der Ansicht, daſs dieser el-Ḥasan b. el-Chaṣîb der Verfasser des im Jahre 1218 oder 1228 zu Padua von einem gewissen Kanonikus Salio (oder Salomon?) übersetzten und zu Venedig 1492 gedruckten „liber de nativitatibus" sei, das folgendermaſsen beginnt: Dixit Albubather (= Abû Bekr) magni Alchasili[f]) Alcharsi[g]) filius, auctor astronomiae perspicuus etc. Es ist möglich, daſs das im Ms. 935 des Escurial enthaltene Werk „über die Geburten" dasjenige des

---

a) Nur von H. Ch. III. 470 erwähnt, die Beobachtungen sollen i. J. 235 in Ispahan gemacht worden sein.

b) H. Ch. III. 558.

c) Diesen Beinamen hat der Fihr. nicht, ebensowenig C., ich habe ihn hinzugefügt, weil ich ihn identisch halte mit Abû Bekr el-Chaṣîbî.

d) Es ist dies persisch und bedeutet: das gröſsere Werk; wahrscheinlich ist dies das von H. Ch. II. 571 unter dem Titel *„el ǵâmiʿ el-kebîr fî aḥkâm el-nuǵûm"* (corpus magnum de astrologia judiciaria) einem Chaṣîbî zugeschriebene Werk.

e) In meiner Übers. aus dem Fihrist p. 31 habe ich irrtümlicherweise die 4 lezten Werke als die 4 Abschnitte des ersten angesehen.

f) Eine Münchner Handschrift dieses Werkes hat richtig „Alchasibi".

g) Ich vermute, daſs dieses heiſsen sollte „Alfarsî" = der Perser; in der That nennt Ibn el-Q. nach C. den Ḥasan b. el-Chaṣîb einen Perser, auch der persische Titel des erstgenannten Werkes spricht dafür. Für diese Ansicht spricht noch mehr der Titel des Ms. der amplonianischen Sammlung (Steinschneider in d. Bibl. math. 1891, p. 44), wo statt „Alcharsi" steht „Alqûsi", was leicht aus „Alfarsi" entstanden sein kann.

n b. el-Chaṣîb ist, der Verfasser wird genannt Ibn ʿAzrâ el-Chaṣîbî; ıt hat ein Abschreiber Ibn ʿAzrâ (oder ʿAzrî) vor el-Chaṣîbî gesetzt, er das Werk als ein solches von Abraham ben Esra ansah.[a]) Das 3 des Escurial enthält ein Werk, betitelt: *el-moqniʿ fî'l-mawâlîd* erzeugende über die Geburten) von Ibn el-Chaṣîb el-Kûfî, das viel-benfalls von unserm el-Ḥasan b. el-Chaṣîb herrühren könnte. (Fihr. bers. 31; C. I. 413 n. Ibn el-Q.)

;. Aḥmed b. Muh. b. Merwân, Abû'l-ʿAbbâs, el-Sarachsî, er unter dem Namen Aḥmed b. el-Ṯaijib, nach Abstammung ein Schüler el-Kindîs (nach Ibn Abi U. auch sein Verwandter); sehr ert in den alten Wissenschaften, von gewählter Sprache und schönem r war anfänglich Lehrer des nachmaligen Chalifen el-Moʿtaḍid, nach-n Genosse und Vertrauter. Nach Ibn Abi U. war das Wissen bei rherrschend, nicht das Genie. Sein intimes Verhältnis zu el-Moʿtaḍid ch die Ursache seines Todes: der Chalife vertraute ihm nämlich ein nis an, das den Wezir el-Qâsim b. ʿObeidallâh und einen Lieblings- el-Moʿtaḍids, Namens Bedr, betraf; Aḥmed schwatzte es aus, el-d, darüber erbost, gab ihn der Rache der beiden preis, die ihn mit nung des Chalifen ums Leben brachten i. J. 286 (899). Er schrieb: ofse Buch der Nester(?)[b]) und der Rechenkunst. Das kleine Buch ıtes(?)[b]) der Künste und des Rechnens. Einleitung in die Astrologie. ofse Buch über die Musik, in zwei Teilen, es giebt keines, das ihm trefflichkeit gleichkommt. Das kleine Buch über die Musik. Das er Arithmetik: über die Zahlen und über die Algebra.[c]) Einleitung Musik. Über die Alt-Weiberkälte.[d]) Über den *Fâl.* Über das des Nebels. (Fihr. 261, Übers. 21; C. I. 407 n. Ibn el-Q.; Ibn I. 214; Abulfar. 282, Übers. 185.)

ŀ. Ibn Abî Qorra, Abû ʿAlî, der Astrolog des Fürsten von Baṣra, rî;[e]) er war aber nicht glücklich in seinen Prophezeiungen. Er Über die Ursache der Verfinsterung von Sonne und Mond, für

---

Dieser Ansicht neigt sich, wie es scheint, auch Steinschneider zu; vergl. beit über Abraham b. Esra in Abhandlungen z. Gesch. d. Math. 3. Heft, p. 74.
Wahrscheinlich ein durch Abschreiber verdorbenes Wort, bei C. steht er ğiŝŝ) statt ʿaŝŝ, was „Betrug" bedeutet, aber wieder keinen Sinn giebt.
H. Ch. macht daraus zwei Werke: über die Zahlen (V. 38) und über die (V. 67).
Vergl. hierüber meine Übersetzung aus dem Fihr. p. 47, Anmerkg. 29, Bîrûnî, Chronol. p. 245.
Es ist dies wahrscheinlich der angebliche ʿAlide ʿAlî b. Muh. b. ʿAbder- der Häuptling der Zenğ, die Baṣra von 257—270 mit Unterbrechung ten; er ist auch bei C. „el-chârig" d. h. „der Rebell" genannt.

el-Muwaffaq, den Bruder des Chalifen el-Moʿtamid, gest. 278 (891), verfaſst. (Fihr. 278, Übers. 34; C. I. 409 n. Ibn el-Q.)

65. Hârûn b. ʿAlî b. Jaḥjâ b. Abî Manṣûr, der Enkel von Nr. 14, ebenfalls bedeutender Astrolog und Verfertiger astronomischer Instrumente, daneben in der Litteratur und Dichtkunst bewandert. Er starb in Bagdad i. J. 288 (901).[a]) Er verfaſste astronomische Tafeln, die lange Zeit sehr geschätzt und gebraucht wurden. (Fihr. 144; C. I. 424 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 194, Übers. III. 604.)

66. Ṯâbit b. Qorra b. Merwân,[b]) Abû'l-Ḥasan, el-Ḥarrânî (d. h. aus Ḥarrân in Mesopotamien gebürtig), gehörte zu der bekannten Sekte der Ṣabier,[c]) war erst Wechsler in seiner Vaterstadt, begab sich dann nach Bagdad, um die Wissenschaften der Alten zu studieren. Später ging er wieder nach Ḥarrân zurück, hatte dort mit seinen Glaubensgenossen Streit und wurde schlieſslich aus der Sekte ausgeschlossen. Er lieſs sich dann dauernd in Bagdad nieder, wo ihn Muh. b. Mûsâ b. Šâkir, der nach seiner Rückkehr von einer Reise in die griechischen Länder auf seine Gelehrsamkeit und Sprachkenntnis aufmerksam geworden war, in sein Haus aufnahm und auch in den Gelehrtenkreis des Chalifen el-Moʿtaḍid[d]) einführte. Er war ein bedeutender Arzt, aber sein Hauptgebiet waren die philosophischen und mathematischen Wissenschaften, in denen er einen hohen Rang in der arabischen Litteraturgeschichte einnimmt. Er verstand das Griechische, Syrische und Arabische, machte Übersetzungen aus beiden erstern Sprachen in die letztere und verbesserte von andern gemachte Übersetzungen, wie z. B. die Übersetzung der Elemente des Euklides durch Isḥâq b. Ḥonein. Seine selbständigen Werke sind zahlreich; über seine astronomischen Beobachtungen und Arbeiten, besonders über die Sonne, läſst sich im besonderen noch Ibn Abi U. aus, er sagt: „Er stellte seine schönen Beobachtungen, die er über die Sonne in Bagdad gemacht hatte, in einem Buche zusammen, in welchem er seine Methode (der Rechnung) nach dem Sonnenjahre, seine Beobachtungen der Kulmination der Sonne, die Gröſse ihres Jahres und ihre Gleichung auseinandersetzte.“ Ṯâbit wurde geboren i. J. 211[e]) (826) und starb in Ṣafar 288 (901).

[a]) C. hat unrichtig „376 im Alter von 74 Jahren“.

[b]) Ibn Ch. hat „Hârûn“ oder als andere Lesart „Zahrûn“.

[c]) deren Glauben ein Sterndienst war, mit dem alten chaldäischen Sonnendienst verwandt.

[d]) El-Moʿtaḍid war damals noch nicht de jure Chalife (sondern el-Moʿtamid), wohl aber de facto, das rechtmäſsige Chalifat bekleidete er nur während der 9 letzten Lebensjahre Ṯâbits und starb kaum ein Jahr nach diesem.

[e]) Ibn Ch. und Ibn el-Q. haben 221, Ibn Abi U. setzt den Monat Ṣafar des Todesjahres zum Geburtsjahr.

Er schrieb: Über die (Zeit-) Rechnung nach den Neumonden. Über das Sonnenjahr. Über die Auflösung der geometrischen Aufgaben. Über die befreundeten Zahlen. Über die Transversalenfigur. Über den dem Sokrates zugeschriebenen Beweis.[a]) Über die Aufhebung der Bewegung im Tierkreis.[b]) Einleitung in den Almagest. Das Buch der Auslegung (Kommentar) des Almagestes. Das grofse Buch der Erklärung des Almagestes, das unvollendet blieb.[c]) Über den Gebrauch der Himmelskugel. Über den Schnitt des Cylinders. Über die Sätze und Fragen, die entstehen, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden. Eine zweite Abhandlung hierüber. Über das rechtwinklige Dreieck. Über die Bewegung der Himmelssphäre. Über die Zusammensetzung der Sphären, ihre Natur, ihre Zahl, die Zahl ihrer Bewegungen, über die Gestirne an denselben und die Art ihrer Bahnen und die Richtung ihrer Bewegungen. Über die Einteilung der Erde. Ein Buch über die Astronomie. Über die Prämissen (Axiome, Postulate etc.) des Euklides. Über die Lehrsätze des Euklides. Über die Sätze des Almagestes.[d]) Über die Konstruktion des Körpers von 14 Flächen in eine gegebene Kugel. Seine Antwort über den Grund der Abweichungen der Tafeln des Ptolemäus von den „Erprobten". Über die Beschwerlichkeit der astronomischen Rechnung. Über den unerläfslichen Weg zur Auffindung des Gesuchten in den geometrischen Wahrheiten. Einleitung in das Buch des Euklides, ein vortreffliches Werk. Kommentar zur Physik des Aristoteles, unvollendet. Über die Erscheinungen bei den Mondfinsternissen und ihre Bedeutungen. Über die Ursachen der Sonnen- und Mondfinsternisse, unvollendet. Über die Ausmessung der ebenen Figuren und der übrigen Flächen und der Körper. Über das Wesen der Gestirne und ihre Einflüsse. Über die Sonnenuhren. Erklärung der Art und Weise, wie nach Ptolemäus' Angabe seine Vorgänger die mittlere Umlaufszeit des Mondes bestimmt haben. Auszug aus den zwei Büchern der Arithmetik des Nikomachus. Sätze aus der Mechanik. Auszug aus dem 1. Buche des Quadripartitum des Ptolemäus. Das Buch über die Parabel. Über die Ausmessung der parabolischen Körper. Über die Konstruktion der Schattenlinien des Gnomons der Sonnenuhr. Abhandlung über die Geometrie, gerichtet an Ismâ'îl

[a]) Es handelt sich hier um das bekannte Kapitel des Menon über die Beziehung der Fläche eines Quadrates zu derjenigen des Quadrates über der Diagonale.

[b]) Dieser Titel ist verdorben; nach dem Pariser Ms. 2457, 13° handelt es sich hier um die bekannte Theorie von der Trepidation der Fixsterne.

[c]) Statt dieser drei zuletzt genannten Werke hat C. nur: Drei Bücher zur Erklärung des Almagestes, das gröfste und beste blieb unvollendet.

[d]) Wahrscheinlich identisch mit einem der drei schon genannten Werke über den Almagest.

b. Bulbul. Über das was Theon übersehen hat bei der Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse. Über die Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse. Über die helischen Untergänge der Mondstationen. Über das zusammengesetzte Verhältnis.[a]) Über die magischen Zahlen (Zahlenquadrate). Über den Gebrauch der „erprobten" Tafeln und Darstellung dessen, was er an Ḥabaš in diesen seinen Tafeln auszusetzen hatte. Über die Ausmessung des Schnittes der Linien (?). Verschiedene Schriften über die astronomischen Beobachtungen, arabisch und syrisch. Über die Verifikation algebraischer Aufgaben durch geometrische Beweise. Verbesserung (Rezension) des 1. Buches des Apollonius über das bestimmte Verhältnis (de sectione oder ratione determinata), eine sehr gute Rezension mit Kommentar dazu; das 2. Buch behandelte er nicht, es war unverständlich (zu schwierig). Ein Kompendium der Astrologie. Ein Kompendium der Geometrie. Antworten auf eine Anzahl Fragen von Sind b. ʿAlî.

Von seinen Übersetzungen und Verbesserungen solcher führe ich hier nur die folgenden an und verweise im übrigen auf Wenrich, Steinschneider und meine Übersetzung aus dem Fihrist: Ṯâbit übersetzte, wie die Quellen berichten, die Kreisrechnung des Archimedes, seine Lemmata und seine (angebliche) Schrift über die Siebenteilung des Kreises; einen Teil des Kommentars des Eutokius zum 2. Buche des Archimedes über Kugel und Cylinder, wo es sich um das Problem von der Verdoppelung des Würfels handelt; das 5., 6. und 7. Buch der Kegelschnitte des Apollonius; vielleicht auch die Abhandlung des Apollonius über den Verhältnisschnitt (de sectione rationis); die Geographie des Ptolemäus. Er verbesserte die Übersetzung der Elemente des Euklides durch Isḥâq b. Ḥonein, der Data des Euklides durch denselben, der Abhandlung des Euklides „über die Teilung der ebenen Figuren" durch einen Anonymus; die Übersetzung des Werkes von Archimedes „über Kugel und Cylinder" mit dem Kommentar des Eutokius, wahrscheinlich durch Isḥâq b. Ḥonein, etc. (Fihr. 272, Übers. 25; C. I. 386 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. I. 215; Ibn Ch. I. 100, Übers. I. 288; Abulfar. 281, Übers. 184.)

Von seinen Schriften und Übersetzungen (die Verbesserungen lasse ich weg) sind noch vorhanden: Über die Rechnung nach den Neumonden, Brit. Mus. (426, 13°). Über das Sonnenjahr, Ind. Off. (734, 1°). Über die Verzögerung und Beschleunigung der Bewegung im Tierkreis, Paris (2457, 13°). Über die befreundeten Zahlen, Paris (2457, 38°). Über die (Ausmessung der) Parabel, Paris (2457, 25°), Kairo (200, Übers. 20). Über die Aus-

[a]) Wahrscheinlich identisch mit der vorher genannten Schrift über die Transversalenfigur.

messung der parabolischen Körper, Paris (2457, 24°). Über den unerläfslichen Weg zur Auffindung des Gesuchten in den geometrischen Wahrheiten, Kairo (200, Übers. 20). Über den dem Sokrates zugeschriebenen Beweis, Kairo (200, Übers. 20). Über die Sätze und Fragen, die entstehen, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden (oder über den Beweis des berühmten Postulates des Euklides), Paris (2457, 32°), Kairo (201, Übers. 20). Über den Schnitt des Cylinders, Kairo (202, Übers. 22). Über das rechtwinklige Dreieck, Escurial (955, 8° ?). Über die Transversalenfigur, Escurial (967, 2°), Kairo (201, Übers. 20), Paris (2457, 15°, 2467, 11° und 13°), in allen drei Mss. nur Bruchstücke davon, Algier (1446, 4°), Berlin (5940), nur ein kurzer Auszug daraus. Über die Art und Weise der Auflösung der geometrischen Aufgaben, Paris (2457, 43°). Die Data[a]) in der Rezension des Naṣîr ed-dîn, Paris (2467, 4°), Berlin (5939), Florenz (Palat. 271 und 286), Kairo (202, Übers. 21). Das Buch über die Wage *(Faras{ûn* oder *Qaras{ûn)*, Berlin (6023), Ind. off. (767, 7°).[b]) Seine Übersetzung des 5.—7. Buches der Kegelschnitte des Apollonius, Oxford (I. 943), Leiden (979), Florenz (Palat. 275); diejenige der Lemmata des Archimedes, Oxford (I. 875, 895, 939, 960), Leiden (982), Florenz (Palat. 271 und 286), Kairo (202, Übers. 21); diejenige der Siebenteilung des Kreises von Archimedes, Kairo (203, Übers. 22); diejenige eines Teils des Kommentars des Eutokius zum 2. Buche des Archimedes über Kugel und Cylinder, Paris (2457, 44°); sein Auszug aus der Arithmetik des Nikomachus, Brit. Mus. (426, 15°).[c]) Endlich werden ihm noch zugeschrieben: Über die Trisektion des Winkels, Paris (2457, 45°), de horometria, Escurial (955, 7°); ob dies eine der oben genannten Schriften sei, können wir nicht entscheiden. — Ins Lateinische übersetzt wurde die Schrift über die Transversalenfigur von Gerard von Cremona: Liber thebit de figura alchata (auch de figura sector), in Paris (7377 B) und in Erfurt (Ampl. Sammlung. Qu. 349, 16°); ferner die Schrift über die Wage, ebenfalls von Gerard: Liber carastonis sive tractatus de statera, authore Thebit ben Corath, in Paris (7377, B, 7434, 6°); die Abhandlung über die Vorwärts- und Rückwärtsbewegung im Tierkreis, von demselben: Liber thebit de motu accessionis et recessionis, in Paris (9335), in Oxford (Cat. Mss. Angl. T. I. P. I. 6567); wahrscheinlich seine Einleitung in

---

[a]) Dieses Buch findet sich nicht im Verzeichnis seiner Schriften; es ist wahrscheinlich eine Bearbeitung (Kompendium) des Euklidischen Werkes gleichen Namens.

[b]) Ein Buch gleichen Titels schreibt der Fihr. den Söhnen Mûsâs zu (s. d. Art.); es ist möglich, dafs sich der Verf. des Fihr. hier geirrt hat.

[c]) Im Kat. des Brit. Mus. heifst es: Übersetzung der Einleitung in die Arithmetik von Nikomachus.

den Almagest, von demselben, unter dem Titel: De expositione nominum (oder vocabulorum) almagesti, oder auch: de iis quae indigent expositione, antequam legatur almagestum, in Paris (7195, 7215 etc.), in Oxford (Cat. Mss. Angl. T. I. P. I. 2083 und 2458, 14°) etc. Ferner wurde von Joh. Hispalensis eine angebliche Schrift des Ṯâbit übersetzt unter dem Titel: de imaginibus (astronomicis), eine astrologische Abhandlung, in Paris (7282, 4°), in Oxford (Cat. Mss. Angl. T. I. P. I. 2456, 9°) etc. Welche der genannten Abhandlungen des T. dies sei, oder welcher sie entnommen sei, können wir nicht entscheiden.

67. Muh. b. Arqam el-Sabâ'î aus Cordova, gehörte zu den Kennern der Sprachwissenschaft und der Rechenkunst; er unterrichtete el-Qâsim, Aṣbag und ʿOṯmân, die Söhne des Emirs Muh. b. ʿAbderraḥmân (852—886), wie el-Râzî[13] und andere berichten. (B. V. 92.)

68. ʿAbdallâh b. Masrûr el-Naṣrânî (der Christ), war Schüler und Freund von Abû Maʿšar und bedeutender Nachfolger von ihm in der Astrologie. Er schrieb: Über den Ort der Strahlenwerfung (Projektion der Strahlen). Über den Umlauf der Jahre der Welt und das Weissagen nach ihnen. Über den Umlauf der Geburtsjahre. (Fihr. 277, Übers. 33; C. I. 403 nach Ibn el-Q.)

In Oxford (I. 442) befindet sich von ihm eine Astrologie (arabisch in hebräischer Schrift); welches der oben genannten Werke dies sei, kann ich nicht entscheiden.

69. ʿOmar b. Muh. b. Châlid b. ʿAbdelmelik, der Sohn von Nr. 46 und der Enkel von Nr. 20, ebenfalls Astronom wie diese beiden, gab nach seines Grofsvaters und Sind b. ʿAlîs und anderer System und Berechnung verfafste astronomische Tafeln heraus, die er „abgekürzte Tafeln“ nannte. Ferner schrieb er: Das Buch der Gleichung der Planeten.[a]) Über die Konstruktion des Planisphäriums (eigentlich des Astrolabiums, genannt *el-musaṭṭaḥ*). (Fihr. 276, Übers. 31; C. I. 435 n. Ibn el-Q.)

70. ʿAlî b. Dâ'ûd,[b]) ein Jude aus ʿIrâq gebürtig, lebte in Bagdad, war ein vortrefflicher Mann und hervorragender Astrolog. Er schrieb: Über den Regen. (Fihr. 278, Übers. 33; C. I. 408 n. Ibn el-Q.)

71. Ibn Sîmaweih, der Jude, der Astrolog, war sehr erfahren in dieser Kunst. Er schrieb: Einleitung in die Astrologie. Über den Regen. (Fihr. 278, Übers. 33; C. I. 417 n. Ibn el-Q.)

72. ʿAbdelhamîd b. ʿAbdelʿazîz el-Qâdî, Abû'l-Ḥâzim, stammte aus Baṣra, studierte die Rechtswissenschaft bei el-Bakîr (?) el-ʿOmmî. Er

---

[a]) Der Text hat einfach „Sterne“.

[b]) C. hat n. Ibn el-Q. „Abû Dâ'ûd“, ich halte beide für identisch.

verwaltete nach einander das Richteramt in Syrien, in Kûfa und in Karch bei Bagdad. Er starb i. J. 292 (905). Er war sehr gelehrt in der Rechenkunst, Algebra, Ausmessungslehre und in der Erbteilung, über welch letztere Disziplin er ein Werk geschrieben hat. (Ibn Qutl. 24.)

73. Muslim b. Aḥmed el-Leiṯî, Abû ʿObeida, bekannt unter dem Namen Ṣâḥib el-qible (Meister oder Bewahrer der Qible), aus Cordova. Er reiste nach dem Osten i. J. 259 und kam daselbst mit einer grofsen Zahl von Traditions- und Rechtsgelehrten zusammen. Er hörte in Mekka den Muh. b. Idrîs el-Warrâq el-Ḥomeidî, ʿAlî b. ʿAbdelʿazîz, Abû Jaḥjâ b. Abî Masarra etc., in Kairo den el-Muzenî,[a]) el-Rabîʿ b. Soleimân el-Mu'eḏḏin etc. Es sagt Aḥmed b. ʿAbdelbarr[14]: „Abû ʿObeida war einer der wahrhaftigsten Männer seiner Zeit; ich habe gehört, wie ʿAbdallâh b. Muh. b. Ḥonein von ihm sagte, dafs es für ihn leichter gewesen wäre, vom Himmel auf die Erde zu fallen, als zu lügen." Er war gelehrt in Rechenkunst und Astronomie und leidenschaftlich besorgt um die Innehaltung der Gebetsrichtung, weshalb er auch den Namen Ṣâḥib el-qible erhalten hatte. Zu seinen Schülern gehörten ʿOṯmân b. ʿAbderraḥmân, Qâsim b. Aṣbag,[15] ʿAbdallâh b. Jûnis und viele andere. Gegen das Ende seines Lebens wurde er blind; er starb i. J. 295 (907/08) nach Aḥmed.[16] (B. VII. 413 und III. 456; die letztere Quelle hat als Todesjahr 304.)

74. Isḥâq b. Ḥonein b. Isḥâq el-ʿIbâdî, Abû Jaʿqûb, der Sohn von Nr. 44, war einer der hervorragendsten Mediziner seiner Zeit. Als Kenner verschiedener Sprachen und als Übersetzer erreichte er seinen Vater an Ruhm. Er übersetzte besonders die philosophischen Werke der Griechen, in erster Linie des Aristoteles, ebenso mathematische und astronomische ins Arabische. Er stand in grofser Gunst bei den Chalifen el-Mutawakkil, el-Moʿtamid und el-Moʿtaḍid, besonders aber bei dem Wezir des letztern, Qâsim b. ʿObeidallâh. Er starb im Rabîʿ II. 298 (Ende 910) in Bagdad. — Von Übersetzungen werden ihm zugeschrieben: Die Elemente des Euklides, verbessert von Ṯâbit b. Qorra, in Oxford (I. 919 und 958);[b]) der Almagest des Ptolemäus, ebenfalls verbessert von Ṯâbit, in Paris (2482 und 83), unvollständig. Sehr wahrscheinlich sind auch von ihm und nicht von seinem Vater, wie teilweise in den Mss. angegeben ist, übersetzt: Die Sphärica des Menelaus, in Leiden (988), Florenz (Palat. 271 und 286); die Data des Euklides, in Oxford (I. 875, 895, 960), Berlin (5929), Ind. Off. (743, 1°), Florenz (Palat. 271 und 286), Kairo (200, Übers. 19), an letztern beiden

---

a) Oder auch Muzeinî, vom Stamme Muzeina, ein grofser ägyptischer Rechtsgelehrter und Traditionist, gest. 264 (878). (Ibn Ch. I. 71, Übers. I. 200.)

b) Das 14. u. 15. Buch sind übersetzt von Qosṭâ b. Lûqâ.

Orten in der Rezension des Naṣîr ed-dîn; die Optik des Euklides, in Oxford (I. 875), Leiden (976 und 977), Florenz (Palat. 271 und 286); die zwei Bücher über die Kugel und den Cylinder von Archimedes, in Oxford (I. 875 und 895, mit dem Kommentar des Eutokius), Ind. Off. (743, 6°), Florenz (Palat. 271 und 286, in der Rezension des Naṣîr ed-dîn); über die bewegte Sphäre von Autolykus, verbessert von Ṯâbit, in Oxford (I. 908); über die Aufgänge der Gestirne von Hypsikles, in Paris (2457, 36°), verbessert von Ṯâbit; vielleicht sind auch von ihm übersetzt die Phänomena des Euklides, in Oxford (I. 875 und 895) und Leiden (1040). — Nach Ibn Abi U. hat Isḥâq b. Ḥonein einen Auszug (Kompendium) aus dem Buche (den Elementen) des Euklides verfasst. (Fihr. 285 und 298, Übers. 16 und 20; Ibn Ch. I. 66, Übers. I. 187; Ibn Abi U. I. 200; Abulfar. 266, Übers. 173.)

75. El-Faḍl b. Muh. b. ʿAbdelḥamîd b. Wâsiʿ el-Chuttalî, Abû Barza, der Enkel von Nr. 35, ebenfalls geschickter Rechner und gelehrter Arithmetiker. Er lebte in Bagdad und starb daselbst nach Ibn el-Q. am 27. Ṣafar d. J. 298 (Nov. 910). Er schrieb: Das Buch über den Geschäftsverkehr. Das Buch über die Ausmessung (der Figuren). (Fihr. 281, Übers. 37; C. I. 408 und 421 n. Ibn el-Q.)

76. Ḥâmid b. ʿAlî, Abû'l-Rabîʿ, el-Wâsiṭî (d. h. von Wâsiṭ gebürtig, einer der geschicktesten Verfertiger von astronomischen Instrumenten. Ibn Jûnis sagt (Not. et extr. VII. 54): „Die Gelehrten ersten Ranges und die grofsen Künstler sind selten . . . solche waren: Ptolemäus in der Methode des Beweisens, Galenus in der Medizin, ʿAlî b. ʿIsâ und Ḥâmid b. ʿAlî el-Wâsiṭî in der Kunst der Herstellung von Astrolabien.“ Der Fihrist nennt ihn einen Schüler von ʿAlî b. Aḥmed, dem Geometer, es ist dies wahrscheinlich der Sohn von Aḥmed b. ʿAbdallâh el-Ḥabaš, der sich in der Verfertigung astronomischer Instrumente ausgezeichnet hat (vergl. Art. 51). (Fihr. 285, Übers. 42.)

77. Qosṭâ b. Lûqâ el-Baʿalbekî, war ein Christ aus Baʿalbek gebürtig. Er war ein geschickter Arzt, Philosoph, Astronom, Mathematiker und Übersetzer, Kenner der griechischen, syrischen und arabischen Sprache, und zeichnete sich besonders in der letztern durch einen vortrefflichen Stil aus. Er machte Reisen nach den griechischen Ländern und brachte von da eine grofse Zahl wissenschaftlicher Werke nach Syrien zurück. Als Arzt und Übersetzer lebte er nachher in Bagdad und später in Armenien, wohin ihn der Fürst Sanḥârîb kommen liefs (nach ʿObeidallâh b. Ǵabrîl); es befand sich dort auch Abû'l-Giṭrîf el-Baṭrîq, ein gelehrter und vortrefflicher Mann, für diesen verfafste Qosṭâ eine Reihe von ausgezeichneten Werken. Er starb dort, wahrscheinlich im Anfang der Regierungszeit el-Moqtadirs

(295—320), also ca. 300 (912/13); es wurde ihm ein herrliches Grabmal gesetzt und dasselbe verehrt wie dasjenige von Königen und geistlichen Würdenträgern. Er schrieb: Einleitung in die Geometrie, in Form von Fragen und Antworten, für Abû'l-Ḥasan ʻAlî b. Jaḥjâ.[a]) Über den Beweis zur Regel der beiden Fehler. Über den Satz (?) von der Kugel und dem Cylinder. Über die Astronomie und die Zusammensetzung der Sphären. Über die Rechnung *el-talâqi*[b]) auf dem Wege der Algebra. Übersetzung des Buches des Diophantus über die Algebra.[c]) Über den Gebrauch des Himmelsglobus. Über den Gebrauch des Instrumentes, auf welches die *ǧawâmiʻ* gezeichnet werden und mit welchem die *natâ'iǧ* erhalten werden.[d]) Über die Brennspiegel. Über die Gewichte und Maſse. Über den Wind und seine Ursachen. Über die Wage. Über die schwierigen Stellen des Euklidischen Buches. Einleitung in die Astrologie. Abhandlung über die Auflösung von Zahlenaufgaben aus dem dritten Buche des Euklides. (Fihr. 295, Übers. 43; C. I. 419 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. I. 244; Abulfar. 274, Übers. 179.)

Von seinen Schriften sind noch vorhanden: Über den Gebrauch des Himmelsglobus, in Berlin (5836), Brit. Mus. (407[a], 10⁰ u. 415, 7⁰), Oxford (II. 297), Konstant. (2635), das Ms. Leiden (1053) betitelt: *Kitâb el-ʻamal bi'l-asṭorlâb el-kuri* (das Buch über den Gebrauch des sphärischen Astrolabiums) scheint nicht dasselbe Werk zu sein, rührt vielleicht auch nicht von Qosṭâ her. Über die Astronomie und die Zusammensetzung der Sphären in Oxford (I. 879, 2⁰). Über den Beweis zur Regel der beiden Fehler, in Ind. off. (1043, 12⁰). — Von seinen Übersetzungen finden sich noch vor: Theodosius, über die bewohnten Orte, in Berlin (5649 u. 50), Ind. Off. (744, 2⁰), Florenz (Palat. 271 u. 286), Kairo (199, Übers. 19). Theodosius, die Sphärik, in Berlin (5933), in Florenz (Palat. 271 und 286). Theodosius, über die Tage und Nächte, ibid. und in Berlin (5648). Autolykus, über die Aufgänge und Untergänge, in Leiden (1042), Florenz (Palat. 271 und 286), Oxford (I. 875 u. 895). Hypsikles, über die Aufgänge der Gestirne, in Oxford (I. 875 u. 895), Leiden (1043), Berlin (5652), Ind. Off. (743, 5⁰), Kairo (202, Übers. 21). Aristarchus, über die Gröſse und Entfernung von Sonne und Mond, in Ind. Off. (744, 4⁰), Florenz (Palat. 271 und 286),

---

[a]) Es ist dies der Gesellschafter des Chalifen el-Mutawakkil, der Sohn des Astronomen Jaḥjâ b. Abî Manṣûr, gest. 275 (888/89).

[b]) *el-talâqi* heiſst wörtlich „das Zusammentreffen", was seine eigentliche Bedeutung hier ist, habe ich nicht ausfindig machen können.

[c]) Der Fihr. hat hier: Ein Kommentar zu dreieinhalb Büchern des Diophantischen Werkes über arithmetische Aufgaben.

[d]) Ist eine magische Schrift: ǧawâmiʻ und natâ'iǧ sind gewisse Sandfiguren (vergl. Sprenger, a dictionary of the technical terms, etc. 1862).

Berlin (5651); fast alle diese genannten Abhandlungen sind aber nicht in der ursprünglichen Form, sondern in der Rezension des Naṣîr ed-dîn vorhanden. Heron, über das Heben der Lasten, in Leiden (983), Kairo (199, Übers. 19), herausgegeben und übersetzt von Carra de Vaux (Journ. asiat. Sér. 9, Vol. I. p. 386—472, Vol. II. p. 152—269, 420—514). — Ins Lateinische übersetzt wurde seine Abhandlung über den Gebrauch des Himmelsglobus: de sphera solida, von Stephanus Arnaldi, in Oxford (Coxe, P. III. 340, 3⁰).

78. **Aḥmed b. Jûsuf b. Ibrâhîm, Abû Ǵa'far,**[a] **el-Miṣrî** (der Ägypter), der Geometer. Sein Vater **Jûsuf b. Ibrâhîm b. el-Dâja**, von Ibn Abi U. zweimal (I. 130 u. II. 34) „der Rechner" genannt, lebte zuerst in Bagdad, dann (v. 225 an) in Damaskus und später in Ägypten. Dieser wird viel zitiert von Ibn Abi U., wahrscheinlich als Verfasser einer Geschichte der Ärzte.[17] Aḥmed b. Jûsuf war Geheimschreiber der Ṭûlûniden, der Beherrscher Ägyptens von 254—292 (868—905). — Es werden ihm zugeschrieben: 1. Das Buch über das Verhältnis und die Proportion.[b] 2. Ein Kommentar zum Centiloquium des Ptolemäus. 3. Über ähnliche Bögen. 4. Über die Ṣafîḥa (Scheibe des Astrolabiums) für alle Breiten. Alle vier sind noch arabisch vorhanden: Nr. 1 in Algier (1446, 2⁰) und in Kairo (198, Übers. 18). Nr. 2 in Berlin (5874) und in St. Petersburg (Institut des langues orientales, Katal. v. Rosen, 1877, Nr. 191, 4⁰).[c] Nr. 3 in Oxford (I. 941, nach Pusey, Catal. P. II. p. 602). Nr. 4 in Oxford (Ibid.) und vielleicht auch in Leiden (1158). Es ist möglich, dafs er auch der Verfasser der „Geschichte der Astronomen" ist, welche von H. Ch. I. 191 dem Ibn el-Dâja zugeschrieben wird, oder dann sein Vater; diese Frage ist heute noch nicht zu entscheiden. Die von H. Ch. I. 199 einem Aḥmed b. Jûsuf beigelegte Schrift „über Tagewählerei" ist wahrscheinlich von dem Westaraber Aḥmed b. Jûsuf b. el-Kemâd (s. Art. 487). Als Todesjahr des Aḥmed b. Jûsuf giebt H. Ch. III. 639 das Jahr 334 (945/46) an, was kaum richtig sein kann; er ist wohl früher, ca. 300 (912/13) gestorben. (Fihr. 268, Übers. 20; C. I. 372 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. I. 119, 190, 207.)

Ins Lateinische übersetzt wurden die ersten drei Abhandlungen: Nr. 1 unter dem Titel: Liber Hameti de proportione et proportionalitate, von Gerard von Cremona (Mss. in Paris, 7377 B, 7⁰ u. 9335; in Wien 5277,

---

a) Das Ms. von Kairo (198) hat „Abû Ḥafṣ".

b) Diese Schrift handelt über das 5. Buch des Euklides und über die Transversalenfigur (vergl. M. Cantor in Bibl. math. 1888, p. 7—10, und M. Curtze, Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii, Lips. 1899, p. XXVII).

c) Nach Steinschneider, Bibl. math. 1888, p. 113.

' u. 5292;[a]) in Oxford, Black, Ashmole 357, 4⁰ etc.). Nr. 2 unter dem el: Liber de arcubus similibus, ebenfalls von Gerard (Mss. in Oxford, tal. Mss. Angl. et Hibern. T. I. P. I. 3623, 15⁰; in Paris 9335 und 247 etc.).[b]) Nr. 3, Kommentar zum Centiloquium, von Plato von Tivoli[c]) ss. in Paris, 7480, 7198, 5⁰, 7282, 2⁰ etc., in Oxford, Coxe, P. II. Colleg. rp. Chr. 101, 2⁰ etc.). In diesen Mss. wird der Kommentar fälschlich dem ly heben Rodan (= ʿAlî b. Riḍwân) beigelegt. Das Centiloquium mit sem Kommentar ist auch gedruckt worden in Venedig 1493 und 1519, ersterer Ausgabe (die mir allein zu Gebote steht) hinter dem Quadritum des Ptolemäus mit dem Anfang: Incipit liber centum verborum ıolemei cum commento haly.

79. Ibn Abî Râfiʿ, Abû'l-Ḥasan, ein vorzüglicher Gelehrter, schrieb: er die Verschiedenheit des Aufgangs (der Gestirne). (Fihr. 279, Übers. 34.)

80. Isḥâq b. Ibrâhîm b. Zeid (and. Jezîd), bekannt unter dem Nan Abû'l-Ḥosein b. Karnîb, ein bedeutender Naturphilosoph und Mathetiker, lebte in Bagdad und schrieb: Wie man mit Hilfe der bestimmten he (der Sonne) erkennen kann, wie viel Stunden des Tages vorüber sind. ihr. 273, Übers. 26.)

81. Šoǧâʿ b. Aslam b. Muh. b. Šoǧâʿ, Abû Kâmil, der Rechner, s Ägypten, war ein sehr gelehrter Mathematiker und schrieb: Das Buch s Glückes (wahrscheinlich eine astrologische Schrift). Das Buch des hlüssels zum Glücke (ebenso). Das Buch des Ausgepreſsten (ʿaṣîr?). Über n Vogelflug. Über die Algebra. Über die Vermehrung und die Verminrung. Über die beiden Fehler.[d]) Das Buch der Ausmessungslehre und r Geometrie. Das Buch des Genügenden (?). (Fihr. 281, Übers. 37.)

In Leiden (1003) existiert von ihm ein Buch über unbestimmte Aufben, betitelt: *Ṭarâ'if* (Auserlesenes, Seltenes) aus der Rechenkunst, leider t diese Schrift unvollständig. Nach H. Ch. V. 68 u. 168 hat Abû Kâmil ch ein Buch über die Erbteilungen, mit Hilfe der Algebra gelöst, gehrieben. (Vergl. auch meine Übers. aus dem Fihr. p. 69 u. 70, Anrkg. 229.) Seine Algebra wurde kommentiert von el-Iṣṭachrî (s. Art. 103) d ʿAlî b. Aḥmed el-ʿImrânî (s. Art. 119).

[a]) Die letzten beiden Zahlen zitiere ich nach Steinschneider (Bibl. math. 88, p. 112).

[b]) Sehr wahrscheinlich ist die von M. Curtze in den Mitteilungen des Coperkus-Vereins zu Thorn, VI. Heft, 1887 veröffentlichte Abhandlung: Liber de simibus arcubus diese lateinische Übersetzung der Schrift des Aḥmed b. Jûsuf.

[c]) So nach Steinschneider (Bibl. math. 1888, p. 113), Wüstenfeld, Die Übers. rab. Werke ins Lat. etc. p. 28 schreibt sie Joh. Hispalensis zu.

[d]) Ist wohl identisch mit demjenigen „Über die Vermehrung und die Verinderung"; vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 70, Anmerkg. 230.

82. Muh. b. el-Hosein b. Hamîd, bekannt unter dem Namen Ibn el-Adamî,[a]) ein sehr gelehrter Astronom und Astrolog, der Sohn von Nr. 50. Er verfaſste Tafeln, deren Vollendung er aber nicht erlebte; nach seinem Tode wurden sie von seinem Schüler el-Qâsim b. Muh. b. Hišâm el-Madânî (Reinaud : Madaynî)[b]) el-ʿAlawî i. J. 308 (920/21) herausgegeben, unter dem Titel: *Nazm el-ʿiqd* (die Anordnung des Perlenhalsbandes). Diese Tafeln enthalten die Elemente der Astronomie, die Gleichungen der Planeten und die Berechnung der Bewegung der Gestirne nach der Methode des Sindhind; man findet darin auch eine Darstellung der Theorie der Trepidation der Fixsterne. Sie werden auch rühmend genannt von dem Toledaner Sâʿid el-Qâdî (s. Art. 244). (C. I. 430 n. Ibn el-Q.; Not. et extr. VII. 126 u. 128.)

83. Ibrâhîm b. Jûnis, bekannt unter dem Namen Ibn el-Hassâb (Sohn des Rechners), Freigelassener des Mûsâ b. Nasîr (oder Nosair); er hatte auch den Beinamen „Hârit der Rechenkunst".[18] Er gehörte zum Gerichtshof von Kairowân und auch zu den Richtern der Stadt Rakâda.[c]) Er starb i. J. 308 (920/21). (Ibn ʿAdârî, Histoire de l'Afrique et de l'Espagne et fragments de la chronique d'Arîb, publ. par R. Dozy, Leyde 1848—51 I. 189.)

84. Salhab b. ʿAbdessalâm el-Faradî (d. h. der Erbteiler) Abû'l-ʿAbbâs, aus Cordova, war sehr gelehrt im Erbrecht und scharfsinnig in der Arithmetik und ein vortrefflicher Mensch. Er starb i. J. 310 (922/23), wie dem Verfasser dieses Artikels (Ibn el-Faradî, s. Vorwort) von Ismâʿîl b. Ishâq[19] mitgeteilt worden ist. (B. VII. 164.)

85. Jahjâ b. Jahjâ, Abû Bekr, bekannt unter dem Namen Ibn el-Samîna, aus Cordova, war sehr gelehrt und bewandert in der Litteratur, Rechtswissenschaft und Tradition, daneben auch ein scharfsinniger Metaphysiker und Erklärer von Poesien, und zeichnete sich auch in der Rechenkunst, Astronomie und Medizin aus. Er reiste nach dem Osten und neigte sich hier den Lehren der Moʿtaziliten[d]) zu; er kehrte dann wieder nach Spanien zurück und las hier über die Möglichkeit,[e]) worüber er bei Chalîl b. ʿAbdelmelik gehört hatte. Er starb i. J. 315 (927) nach Soleimân b. Eijûb.[20] (B. VIII. 53; Maq. K. II. 232; Ibn Abi U. II. 39.)

---

[a]) Reinaud (Mém. sur l'Inde, p. 320) hat „el-Odmy" und hält ihn identisch mit dem im Fihr. genannten Hosein b. Muh. el-Adamî (Art. 50); warum führt aber dann der Fihr. seine Tafeln nicht an?

[b]) Ibn el-Q. (Ms. 440 von München, fol. 107[a]) hat auch el-Madâ'inî und statt Hišâm — Hâtim.

[c]) Rakâda war ein Flecken bei Kairowân.

[d]) B. VIII. 53 hat „Mutakallimîn", was jedenfalls unrichtig ist.

[e]) Istitâʿa (= δύναμις) im Gegensatz zu faʿl (= ἐντελέχεια = Wirklichkeit).

86. Jaḥjâ b. ʿAǧlân aus Saragossa, war ausgezeichnet als Gelehrter d als tugendhafter Mensch. Er zeichnete sich besonders in der Erbteilung d Rechenkunst aus und verfaſste hierüber ein Buch, das viel benutzt ırde. Es erwähnt dies Ibn el-Ḥâriṯ,[a]) der auch anführt, daſs er gröſsere isen gemacht habe. (B. VIII. 49.)

87. Jaḥjâ b. Muh. b. Asâma aus Saragossa war gelehrt und scharfckend in der Erbteilung und Arithmetik nach Châlid. (B. VIII. 52.)

88. El-Faḍl b. Ḥâtim el-Nairîzî,[b]) Abû'l-ʿAbbâs, ein bedeuten· Geometer und Astronom, auf dessen Autorität man sich gerne bezog, nentlich in der beobachtenden Astronomie. Er schrieb: Einen Kommentar den Elementen des Euklides. Kommentar zum Quadripartitum des Ptoıäus. Das groſse Buch der Tafeln. Das kleine Buch der Tafeln. Über Gebetsrichtung (qible). Über die atmosphärischen Erscheinungen, für Moʿtaḍid verfaſst. Das Buch der Beweise[c]) und der Herstellung von strumenten, mit welchen die Entfernungen von Gegenständen bestimmt ırden können. Kommentar zum Almagest des Ptolemäus.[d]) Er starb . 310 (922/23). (Fihr. 279, Übers. 35; C. I. 421 n. Ibn el-Q.; el-Bîrûnî, 139.)

Von diesen Schriften sind arabisch vorhanden: Über die Gebetsrichtung, ı Paris (2457, 17°). Der Kommentar zu den Elementen des Euklides, in eiden (965), aber nur 1.—6. Buch, wird gegenwärtig mit lat. Übersetzung rausgegeben von Besthorn und Heiberg in Kopenhagen, erschienen sind s jetzt Fasc. I—III. Eine lateinische Übersetzung dieses Kommentars ırch Gerard von Cremona befindet sich, und zwar die 10 ersten Bücher nfassend, in Krakau (569), dieselbe wurde nach letzterem Codex herausgeben von M. Curtze (Anaritii in decem libros priores elementorum Eucli- commentarii. Suppl. ad Euclidis opera omnia, edid. Heiberg et Menge; ps. 1899). Wahrscheinlich ein Auszug aus diesem Kommentar des elirîzî ist die in Paris (2467, 7°) und in Berlin (5927) sich befindende ›handlung „Über das berühmte (5.) Postulat" betreffend die parallelen Linien. ı Escurial befindet sich (956, 6°) eine Abhandlung „über den Gebrauch s sphärischen Astrolabiums" (wahrscheinlich des Himmelsglobus), die dem ıdl b. Ḥâtim el-Nairîzi zugeschrieben wird.

89. Muh. b. Ǧâbir b. Sinân, Abû ʿAbdallâh, el-Battânî[e]) (auch

---

[a]) Vergl. Anmerkg. 19.

[b]) d. h. aus Nairîz, einer Stadt im Gebiete von Šîrâz, gebürtig.

[c]) Dieses Wort fehlt bei C.

[d]) Dieses Werk fehlt im Fihr., steht aber bei C.; es wird auch von H. Ch. V. 386 wähnt und von el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 139) zitiert.

[e]) Battân oder auch Bittân ist ein Flecken im Gebiet von Ḥarrân.

el-Raqqî), stammte aus Ḥarrân und war von Haus aus Ṣâbier.[a]) Es ist dies der berühmte Astronom, der im Abendland unter dem Namen Albategnius bekannt war. Er wohnte anfänglich in Raqqa und machte auch dort seine ersten Beobachtungen, deren Anfang ins Jahr 264 (877/78) fällt, nach Ǧa'far b. el-Muktafî, und die sich bis zum Jahre 306 (918/19) erstreckten. Wegen der Unterdrückungen, die ihm und den Söhnen el-Zeijâts in Raqqa zu teil wurden,[b]) zog er mit diesen nach Bagdad. Im Jahre 317 (929) wollte er wieder nach Raqqa zurückkehren, starb aber auf dem Heimweg auf der Feste Ḥaḍr.[c]) Er schrieb: Das Buch der Ṣâbischen[d]) Tafeln, in zwei Ausgaben, von denen die zweite vorzüglicher war als die erste; er gab in denselben die Örter der Fixsterne für das Jahr 299 (911/12)[91] an. Über die Kenntnis der Aufgänge der Häuser nach den vier Quadranten der Sphäre. Abhandlung über die Verifizierung der Wirkungen der Konjunktionen, die er für Abû'l-Ḥasan b. el-Farât verfaſste. Einen Kommentar zum Quadripartitum des Ptolemäus. (Fihr. 279, Übers. 35; C. I. 343 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 80, Übers. III. 317; Abulfar. 291, Übers. 191; Abulfid. II. 358; Bîrûnî 177 und 358.)

Von diesen Werken sind noch arabisch vorhanden: Die Tafeln, im Escurial (903), mit deren Herausgabe gegenwärtig C. A. Nallino in Neapel beschäftigt ist.[e]) Das genannte Ms. umfaſst 229 Blätter, von denen etwa die Hälfte den Tafeln zufällt. Der Kommentar zum Quadripartitum des Ptolemäus, im Escurial (966, 2⁰) und in Berlin (5875).

Der Text (oder die astronomische Einleitung) zu den Tafeln wurde ins Lateinische übersetzt von Plato von Tivoli, die Tafeln selbst sollen von Robertus Retinensis übersetzt worden sein nach einem Auszug, den Maslama b. Aḥmed el-Maǧrîṭî (s. d. Art.) aus denselben gemacht hatte. Die erstere Übersetzung ist noch vorhanden zu Paris und Oxford; sie wurde gedruckt zu Nürnberg 1537 mit den Zusätzen des Regiomontanus hinter den Rudi-

[a]) Ibn Ch. hält es für zweifelhaft, ob er sich zum Islam bekannt habe; doch, sagt er, spreche sein Name dafür.

[b]) Dies könnte dafür sprechen, daſs er noch des Ṣâbismus verdächtig war.

[c]) Der Fihr. hat unrichtig „Ǧaṣṣ“; el-Ḥaḍr ist ein Städtchen in der Nähe von Tikrît zwischen Euphrat und Tigris.

[d]) Dieses Attribut giebt ihnen der Fihr. nicht, wohl aber Ibn Ch. u. Abulfid.

[e]) Die geographischen Tafeln dieses Werkes hat Nallino bereits mit reichhaltigem Kommentar veröffentlicht im Cosmos di Guido Cora, Vol. XII (1894—96), Fasc. VI; auch selbständig erschienen, Turin 1898; vom Gesamtwerke ist bereits der 3. Teil, den arabischen Text enthaltend, erschienen, in Mailand, 1899, unter dem Titel: Al-Battânî sive Albatenii opus astronomicum, ad fidem cod. Escurial. arabice editum, lat. versum, adnotation. instructum a C. A. Nallino. P. III. Textum arabic. continens.

menta astronomica des Alfraganus, später nochmals einzeln zu Bologna 1645, unter dem Titel: Mahometis Albatenii de scientia stellarum liber, cum aliquot additionibus Joannis Regiomontani, ex biblioth. Vaticana transcriptus. Auf einem ersten Titelblatt steht: Albategnius de numeris stellarum et motibus. — In lateinischer Übersetzung existieren noch unter dem Namen des el-Battânî folgende Abhandlungen: Centiloquium Bethen (= el-Battânî); de horis planetarum; de ortu triplicitatum. Es sind dies wahrscheinlich nur einzelne Teile seines Buches „über die Kenntnis der Aufgänge der Häuser" (vergl. auch meine Übers. aus dem Fihr. p. 67—68, Anmerkg. 211).

90. ʿOmar b. ʿAbdelchâliq aus Algeziras (Spanien), war sehr scharfsinnig in der Erbteilung und Rechenkunst; er machte die Wallfahrt nach Mekka und gehörte nachher zum Gerichtshof seiner Vaterstadt; er war Besorger des Gebetes daselbst. Er starb ums Jahr 320 (932) nach Châlid. (B. VII. 265.)

91. Bekr b. Châṭib el-Marâdî el-Makfûf, Abû Muh., der Grammatiker, aus Cordova, war sehr gelehrt in der Sprachwissenschaft, Poetik und Rechenkunst. Er schrieb ein Werk über Grammatik, das sehr verbreitet war; es erwähnt ihn auch Muh. b. el-Ḥasan.[21] (B. VII. 85.)

92. Ḥobâb b. ʿIbâda el-Faraḍî, Abû Gâlib, aus Cordova, war ein vortrefflicher Mann, gelehrt in der Erbteilung und Rechenkunst; über die erstere Disziplin verfasste er mehrere Werke. Der Vater des Autors dieser Biographien (d. h. der Vater von Ibn el-Faraḍî), sowie eine Menge seiner Zeitgenossen waren seine Schüler. (B. VII. 93.)

93. Muh. b. Zakarîjâ el-Râzî, Abû Bekr, der grofse Arzt der Araber, bei den Abendländern Rhases oder Rhazis genannt, beherrschte neben der Medizin auch die übrigen Wissenschaften der Alten, besonders Philosophie, Mathematik und Astronomie. Er wurde geboren zu Raj in Chorâsân, und brachte dort die ersten 30 Jahre seines Lebens ohne bestimmte wissenschaftliche Thätigkeit zu; er begab sich dann nach Bagdad und lag hier eifrig medizinischen und philosophischen Studien ob. Im Art. 25 ist gesagt worden, dafs der Sohn Rabban el-Ṭabarîs der Lehrer des Râzî in der Medizin gewesen sei, in der Philosophie war es besonders el-Balchî.[22] Nach Beendigung seiner Studien kehrte er nach Raj zurück und wurde dort Direktor des Hospitals, später stand er in gleicher Eigenschaft dem Krankenhaus in Bagdad vor, das nachher nach seinem Restaurator das ʿAḍudeddaula'sche genannt wurde. Er war sehr hochherzig und wohlthätig gegen die Armen; gegen das Ende seines Lebens wurde er blind, nach Ibn el-Q. wegen des häufigen Genusses ägyptischer Bohnen, nach Ibn Ch. infolge eines Peitschenschlages, den er von dem Emir von Chorâsân Abû Ṣâliḥ el-Manṣûr b. Isḥâq b. Aḥmed erhalten hatte. Charakteristisch ist die Antwort, die er auf die Aufforderung hin, er möchte sich doch operieren lassen, er komme vielleicht wieder zum Sehen, gab: „Ich habe genug von der Welt gesehen." Er starb i. J. 320 (932).[a])

Für seine Schriften verweise ich auf meine Übersetzung aus dem Fihr. p. 43, ich gebe hier nur diejenigen, die nicht im Fihr., dagegen bei Ibn Abi U. sich finden, oder deren Titel hier etwas anders lauten: Über die äufsere Erscheinung (Form) der Welt; er bewies darin, dafs die Erde kugelförmig sei, dafs sie in der Mitte der Himmelssphäre liege und dafs diese (nicht die Erde, wie W. Ä. p. 45 übersetzt) sich um zwei Achsen drehe, und dafs die Sonne gröfser, der Mond kleiner sei als die Erde. Über die Ursache, weshalb der Herbst schlecht ausfällt und der Frühling gut, trotzdem die Sonne in beiden Jahreszeiten in derselben Stellung sich befindet. Über die Art und Weise der Gesichtserscheinungen (des Sehens); er zeigt darin, dafs das Sehen nicht durch Strahlen entsteht, die vom Auge ausgehen, und widerlegt darin auch gewisse Sätze aus der Optik des Euklides. Über die Unmöglichkeit, dafs die Welt anders sein kann, als wie sie unsern Augen erscheint. Über die sieben Planeten in der Philosophie.[b]) Über die Diagonale des Quadrates, dafs dieselbe mit der Seite inkommensurabel sei, nicht auf geometrischem Wege bewiesen. (Fihr. 299, Übers. 43; C. I. 262 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 78, Übers. III. 311; Abulfar. 291, Übers. 191; Ibn Abi U. I. 309; Abulfid. II. 347.)

94. El-Hasan b. ʿObeidallâh b. Soleimân b. Wahb, Abû Muh., der Sohn des Wezirs des Chalifen el-Moʿtaḍid, ʿObeidallâh b. Soleimân b. Wahb, der i. J. 288 (901) gestorben ist. Er war ein bedeutender Geometer und schrieb: Einen Kommentar zu den schwierigen Partien des Euklidischen Werkes. Das Buch über das Verhältnis.[23] (Fihr. 273, Übers. 26; C. I. 413 n. Ibn el-Q.)[c])

95. Muh. b. ʿÎsâ b. Abî ʿAbbâd (oder ʿObbâd), Abû'l Ḥasan,[d]) geschickt in der Verfertigung astronomischer Instrumente, schrieb: Über den Gebrauch des Astrolabiums mit den zwei Ringen[e]) und andere. (Fihr. 279, Übers. 34; C. I. 432 n. Ibn el-Q.)

96. Abû Jaḥjâ el-Merwazî (auch Mâwardî) wird vom Fihrist

[a]) Nach Ibn Ch. 311 (923/24), ich halte die obige Angabe für die richtige.

[b]) Vielleicht könnte hier „ḥikme" auch mit „Astrologie" zu übersetzen sein.

[c]) In Paris (2457, 43°) befindet sich eine Abhandlung von Ṯâbit b. Qorra „über die Art und Weise der Auflösung der geometrischen Aufgaben", gerichtet an Ibn Wahb, es ist dies sehr wahrscheinlich der Vater unsers Geometers, der oben genannte Wezir.

[d]) Der Fihr. fügt hinzu: „nur unter diesem Namen bekannt".

[e]) So übersetzt Dorn (Drei astronom. Instrum. p. 85) ḏât el-šoʿbatain, was wörtlich „das mit den zwei Ästen" heifst.

unterschieden von dem syrischen Arzt und Philosophen gleichen Namens in Bagdad, dem Lehrer des Abû Bišr Mattâ b. Jûnis, dem Kommentator der Analytica posteriora des Aristoteles, war ebenfalls Arzt und geschickt in Geometrie, Zeitgenosse des Abû ʿAlâ b. Karnîb (s. d. folg. Art.) und mit diesem Lehrer des Abû ʿAmr el-Moġâzilî, des Oheims des Abû'l-Wefâ. Er wird so zwischen 320 und 330 (932—942) gestorben sein.[a]) (Fihr. 263, Übers. 15 und 48.)

97. Abû'l-ʿAlâ b. Karnîb, Sohn von Nr. 80, sehr bewandert in der Mathematik, besonders Geometrie, war Zeitgenosse des eben genannten Gelehrten Abû Jaḥjâ el-Merwazî. (Fihr. 263, 273 und 283, Übers. 15, 26 und 48.)

98. Saʿîd b. Jaʿqûb el-Dimišqî, Abû ʿOṯmân, war einer der berühmtern Ärzte von Bagdad, auch Übersetzer medizinischer und anderer Werke ins Arabische. Er war ein intimer Freund von ʿAlî b. ʿÎsâ, dem Wezir el-Moqtadirs (295—320). Es sagt Ṯâbit b. Sinân der Arzt: „Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. ʿÎsâ der Wezir gründete (oder nahm in Besitz) i. J. 302 (914/15) das Hospital im Quartier el-Ḥarbîje[b]) in Bagdad und verwandte viel von seinem eigenen Vermögen darauf und setzte über dasselbe als Direktor den Abû ʿOṯmân el-Dimišqî, zugleich unterstellte er seiner Oberleitung auch die Hospitäler in Mekka und Medina.“ Abû ʿOṯmân übersetzte einige Bücher der Elemente des Euklides ins Arabische, worunter auch das 10., und den Kommentar des Pappus[24] zu diesem 10. Buche, letztere Übersetzung befindet sich in Paris (2457, 5° und 6°).[c]) (Fihr. 265 und 298, Übers. 16; Ibn Abi U. I. 205 und 234.)

99. ʿAbdallâh[d]) b. Amâǧûr, Abû'l-Qâsim, el-Turkî[25] und sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Amâǧûr, zusammen oft die Benî Amâǧûr genannt, gehörten zu den vorzüglichsten astronomischen Beobachtern der Araber; sie beobachteten von 272—321 (885—933), Ibn Jûnis führt eine Reihe ihrer Beobachtungen an. Sie wurden darin noch von einem Freigelassenen des Abû'l-Ḥasan ʿAlî, mit Namen Mufliḥ unterstützt, der auch eigene Tafeln verfaſst haben soll. Es sind also wahrscheinlich die verschiedenen Tafeln, die der Fihr. alle dem Vater ʿAbdallâh zuschreibt, auf die drei Personen, Vater, Sohn und Freigelassenen zu verteilen. Der

---

[a]) Es wäre immerhin möglich, daſs diese beiden Abû Jaḥjâ identisch wären; welchem von beiden die von C. (I. 350) erwähnte Schrift des Escurial (Nr. 911, 2°) „de apotelesmatibus“ (d. arab. Titel fehlt) angehört, kann ich nicht entscheiden.

[b]) Fihr. II. (Anmerkungen) p. 144 hat ḥadîṯat ḥarš in Ġûṭa bei Damaskus.

[c]) Vergl. Woepcke, Mém. prés. par div. sav. à l'acad. des sc. T. XIV. p. 674.

[d]) In den Not. et extr. VII. p. 140 u. a. O. wird er ʿAlî und sein Sohn Abû'l-Ḥasan ʿAlî genannt.

Fihr. schreibt dem Vater folgende Werke zu: Das Buch des Fragens (Prüfens) (?). Das Buch, genannt der Reiseproviant. Das Buch der Tafeln, bekannt unter dem Namen „die Reinen, oder Fehlerfreien" *(el-châliṣ)*. Die Tafeln, genannt „die Gegürteten" *(el-muzannar)*. Die Tafeln, genannt „die Wundervollen" *(el-bedî')*. Die Tafeln des Sindhind. Die Tafeln der Durchgänge.[a]) Ibn el-Q. hat noch: Tafeln des Mars nach persischer Zeitrechnung. Im Pariser Ms. 2486, das die Tafeln des Abû'l-Qâsim b. Maḥfûẓ (s. Art. 490) enthält, kommt als letzter Abschnitt vor: *Zîǧ el-ṭailisân* (Tafeln des Ṭailisân, d. h. des Überwurfes, Mantels) von Abû'l-Qâsim 'Alî b. Mâǧûr (so wird auch geschrieben statt Amâǧûr). (Fihr. 280, Übers. 35; C. I. 403 n. Ibn el-Q.; Not. et extr. VII. 120—178.)

100. Muh. b. Aṣbag b. Lebîb, Abû 'Abdallâh, aus Estiǧa (Ecija), hörte hier bei 'Omar b. Jûsuf b. 'Omrûs und in Cordova bei Muh. b. 'Omar b. Lubâba und anderen. Er reiste nach dem Osten und hörte in Mekka bei Abû Ǧa'far el-'Aqîlî und Abû Sa'îd b. el-A'râbî und anderen, kehrte dann nach Spanien zurück und lebte zurückgezogen von den Menschen. Er war sehr gelehrt, besonders in der Erbteilung, Rechenkunst, Grammatik, Erklärung der Dichter, und neigte zu den Mystikern hin. Nach Ibn el-Hâriṯ starb er im J. 327 (938/39) oder 328. (B. VII. 346.)

101. 'Omar b. Muh. b. Jûsuf, Abû'l-Ḥosein, ein vielseitig gebildeter Rechtsgelehrter in Bagdad, dessen Kenntnisse sich auch über Arithmetik und Erbteilung erstreckten. Er starb i. J. 328 (939/40). (Flügel, grammat. Schulen d. Araber, p. 202.)

102. Mattâ b. Jûnis,[b]) Abû Bišr, ein Grieche, bedeutender Arzt und Philosoph zu Bagdad, Übersetzer aus dem Griechischen und Syrischen ins Arabische, Schüler des Abû Jaḥjâ el-Merwazî (s. Art. 96) und Lehrer des el-Fârâbî (s. Art. 116). Er übersetzte unter anderem den Kommentar des Themistius zum Buche des Aristoteles „über den Himmel", verbessert von Abû Zakarîjâ Jaḥjâ b. 'Adî. Er war Christ und wurde erzogen in der Schule Mar Mârî (St. Maris) in Dair Qunnâ (Kloster Qunnâ) in Syrien. Er starb in Bagdad am 11. Ramadân 328 (940).[c]) (Fihr. 263, Übers. 15; Ibn Ch. II. 76 u. 77, Übers. III. 307 u. 310; Ibn Abi U. I. 235; Abulfar. 304 und 316; Übers. 200 und 208; Abulfid. II. 417.)

---

[a]) Die letzten drei Tafeln hat C. nicht, sie stehen aber in dem Pariser Ms. 2112 des Ibn el-Q. (bezw. el-Zûzenî), das Sédillot zu seinen Anmerkungen zu den „Prolégomènes des tables astronom. d'Oloug-Beg" (Paris, 1846—53) benutzt hat. Bei den letzten Tafeln können unter „Durchgänge" *(mamarrât)* die Vorübergänge eines Gestirns vor einem andern verstanden sein.

[b]) Ibn Abi U. hat „Jûnân" (d. h. Ionier, Grieche).

[c]) Abulfid. hat als Todesjahr 329.

103. El-Iṣṭachrî,[a]) der Rechner, schrieb: Das Buch über das gesamte Rechnen. Einen Kommentar zur Algebra des Abû Kâmil (s. Art. 81). Flügel, Fihr. II. 133, vermutet, dieser Rechner könnte identisch sein mit dem 244 (858) geborenen und 328 (939/40) gestorbenen Richter Abû Saʿîd el-Ḥasan b. Aḥmed b. Jezîd el-Iṣṭachrî, der als Marktaufseher (Moḥtasib: Aufseher über Gewichte und Maſse) in Bagdad fungierte. (Fihr. 282, Übers. 38; Ibn Ch. I. 129, Übers. I. 374.)

104. Fatḥ b. Naǧîje,[b]) ein astronomischer Instrumentenkünstler, nach dem Fihr. (wo der Name Fatḥ fehlt) Schüler von Ḥâmid b. ʿAlî (s. Art. 76), nach Ibn el-Q. wohnhaft in Bagdad und zubenannt el-Aṣṭorlâbî. Er wird ums Jahr 330 (941/42) gestorben sein.[c]) (Fihr. 285, Übers. 42; C. I. 422 u. Ibn el-Q.)

105. ʿAbdallâh b. Abî'l-Ḥasan b. Abî Râfiʿ, Abû Muḥ., Sohn von Nr. 79, schrieb eine Abhandlung *(risâle)* über die Geometrie. (Fihr. 279, Übers. 34.)

106. Mûsâ b. Jâsîn, Abû ʿImrân, der Freigelassene des Ṣâliḥ b. Idrîs el-Ḥamîrî,[26] des Herrn von Nekûr,[d]) bekannt unter dem Mamen Ibn Muweij (?), ging nach Spanien und widmete sich hauptsächlich der Rechenkunst und der Erbteilung und verfaſste über beide Gebiete gute Bücher, welche sehr geschätzt waren, wie el-Râzî erwähnt. (B. V. 378.)

107. Muh. b. Ismâʿîl el-Naḥwî (der Grammatiker) Abû ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen el-Ḥakîm (der Weise), aus Cordova, war ein Schüler von Muh. b. ʿAbdessalâm el-Chošenî und anderen, war bewandert in Grammatik und Rechenkunst und von scharfem Verstand. Er lebte in Geistesfrische bis zum 80. Lebensjahre, er unterrichtete auch den Emir el-Ḥakem el-Mustanṣir billâh; er starb am 10. D̲û'l-Ḥiǧǧe 331 (943). Diese Angaben sind teilweise aus Châlid entnommen. (B. VII. 348.)

108. Sinân b. Tâbit b. Qorra, Abû Saʿîd, Sohn von Nr. 66, folgte seinem Vater in der Kenntnis der Wissenschaften und in der Tüchtigkeit als Arzt; er war auch sehr bewandert in der Astronomie. Der Chalife el-Qâhir billâh wollte ihn zum Islam bekehren; um diesen Versuchungen zu entgehen, floh er nach Chorâsân, trat dann aber doch schlieſslich zum Islam über und kehrte nach Bagdad zurück, woselbst er im D̲û'l-Qaʿda

---

a) Der Fihr. kennt keinen andern Namen, er bedeutet: aus Iṣṭachar, einer Stadt in Persien, stammend.

b) C. hat „Naǧiba"; es ist aber jedenfalls dieselbe Persönlichkeit, wie im Fihr. gemeint.

c) C. hat als Todesjahr 450, das Münchener Ms. des Ibn el-Q. 405, was beides nicht richtig sein kann, wenn er ein Schüler Ḥâmid b. ʿAlîs war.

d) Eine Stadt im Rîf von Marokko, fünf Meilen vom Meere.

331 (943) gestorben ist. Er diente nacheinander den drei Chalifen el-Moqtadir, el-Qâhir und el-Râdî als Leibarzt. Er schrieb: 1. Über die Mondstationen.[a]) 2. Über den Stern Kanopus. 3. Über die Gestirne. 4. Über die Einteilung der Wochentage nach den sieben Planeten, an Abû Isḥâq Ibrâhîm b. Hilâl (s. Art. 164) und noch einen andern Gelehrten gerichtet. 5. Verbesserung des Buches des[b]) .... über die Elemente der Geometrie, worin er Verschiedenes zu dem Original hinzufügte. 6. Abhandlung an ʿAḍud ed-daula über die geradlinigen Figuren im Kreise, worüber er verschiedene Probleme löste. 7. Verbesserung eines Kommentars des Abû Sahl el-Kûhî zu seinen sämtlichen Schriften, auf den Wunsch Abû Sahls verfafst. 8. Verbesserung zu einigem, was Jûsuf el-Qass aus dem Syrischen ins Arabische übersetzt hatte aus dem Buche des Archimedes über die Dreiecke.[c]) (Fihr. 272 und 303, Übers. 26; C. I. 437 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. I. 220; Abulfar. 299, Übers. 197; Abulfid. II. 425.)

109. Aḥmed b. Naṣr aus Cordova gehörte zu den berühmtesten Gelehrten in der Rechenkunst und Geometrie; es erwähnt ihn Abû Muh. ʿAlî b. Aḥmed,[27] und sagt, dafs er ein Buch über die Ausmessungslehre[d]) verfafst habe, das an Bedeutung von keinem übertroffen wurde. Er starb nach C. II. 135 im Raǧeb d. J. 332 (944).[28] (B. III. 195; Maq. K. II. 134; Maq. L. II. 119.)

110. ʿAbdallâh b. Muh. el-Moǵîlî, Abû Muh., aus Cordova, war ein gelehrter Mann, besonders in der Rechenkunst bewandert. Er starb i. J. 334 (945/46) nach Ibn el-Ḥâriṯ. (B. VII. 188.)

111. Ḥassân (oder Ḥossân) b. ʿAbdallâh b. Ḥassân, ʿAbû Alî, aus Ecija, war ein ausgezeichneter Rechtsgelehrter, Traditionist und Metaphysiker, ebenfalls bewandert in Sprachwissenschaft und Poetik, scharfsinnig in Arithmetik und Erbteilung. Ibn el-Ḥâriṯ lobt ihn sehr und bemerkt, dafs in Ecija vor und nach ihm kein ihm gleichkommender zu finden war.

---

a) Im Fihr. und bei C. steht *el-istiwâ'* (= Gleichheit), da aber el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 232) erwähnt, dafs Sinân b. Ṯâbit ein Buch über die Mondstationen (anwâ') verfafst habe und Stellen daraus zitiert, so glaube ich, dafs an Stelle von *istiwâ'* zu lesen sei *anwâ'*.

b) Bei Ibn Abi U. ist hier im Text eine Lücke, C. hat Aqâṭon, Steinscheider vermutet „Euklides", was natürlich das nächstliegende ist.

c) Vergl. hierüber meine Übers. aus dem Fihr. p. 18 und 50 und Steinschneider in Z. D. M. G. 50 p. 175—177. — Was die Abhandlungen 4, 6 und 7 anbetrifft, so können diese nicht von Sinân b. Ṯâbit herrühren, da die Personen, an die sie gerichtet sind, 40—50 Jahre nach Sinân gestorben sind.

d) Maq. L. II. 119 fügt zu *misâḥa* (Ausmessung) hinzu: *maǧhûle* = unbekannte, (bis dahin) noch nicht gefundene.

Er war ein Schüler von ʿObeidallâh b. Jaḥjâ, Abû ʿObeida, dem Bewahrer der Qible (s. Art. 73) und anderen. Einer seiner Schüler war der eben genannte Ibn el-Ḥâriṯ, nach welchem Ḥassân im Ḏû'l-Ḥiǧǧe 334 (946) gestorben ist im Alter von 56 Jahren. (B. VII. 100.)

112. El-Ḥasan b. Aḥmed b. Jaʿqûb, Abû Muh.,[a]) el-Hamdânî, auch bekannt unter dem Namen Ibn el-Ḥâ'ik (Sohn des Webers), bedeutender Grammatiker, Historiker, Dichter und Astronom, aus Jemen gebürtig und auch daselbst, nämlich im Gefängnis zu Ṣanʿâ, i. J. 334 gestorben. Er schrieb: Die Krone, ein Werk über die Genealogie der Himjariten und die Chronologie ihrer Könige; in diesem 10 Bände umfassenden Werke kommen auch Kapitel über die Berechnung der Konjunktionen und ihrer Epochen, über Naturphilosophie (Physik) und die Grundlagen der Astrologie, über die Ansichten der Alten von der Ewigkeit und den Perioden der Welt, etc. vor. Das Buch der Geheimnisse der Wissenschaft (Philosophie): es enthält die Kenntnisse über die Wissenschaft der Sphären und die Bewegungen der Gestirne und die Erklärung der Lehren der Astrologie (wahrscheinlich ein Teil des vorhergehenden Werkes). Astronomische Tafeln, die man in Jemen hauptsächlich benutzte. (C. I. 413 n. Ibn el-Q.; Flügel, grammat. Schulen d. Arab. p. 220.)

113. Ibrâhîm b. Sinân b. Ṯâbit b. Qorra, Abû Isḥâq, Sohn von Nr. 108 und Enkel von Ṯâbit b. Qorra, wie sein Vater und Grofsvater geschickter Arzt und vollkommener Kenner der philosophischen und mathematischen Wissenschaften, so dafs zu seiner Zeit keiner gefunden wurde, der ihn an Gelehrsamkeit und Scharfsinn übertroffen hätte. Er wurde geboren i. J. 296 (908/09) und starb schon im Muḥarrem 335 (946), erst 38 Jahre alt, an einem Leberleiden. Er schrieb: Einen Kommentar zum ersten Buche der Kegelschnitte, der aber nicht vollständig ist. Über die Zwecke des Almagestes.[b]) Über die Sonnenuhren (wörtlich Schatteninstrumente). Über die Konstruktion und die Anwendung der Sonnenuhren. Über den Schatten und besonders über die Einrichtung der Sonnenuhr, bei der der Schatten nicht länger und nicht kürzer wird als es erforderlich ist für die Auffindung der Mittagslinie, etc. Dreizehn geometrische Abhandlungen über sich berührende Kreise und Gerade, die durch (gegebene) Punkte gehen und anderes. Eine Abhandlung über 41 schwierige geometrische Probleme über Kreis und Gerade, über Dreiecke und sich berührende

---

[a]) C. hat „Abû Aḥmed".

[b]) Ist jedenfalls diejenige Arbeit, von der Ibn el-Q. (vergl. meine Übersetzung aus dem Fihr. p. 59—60) den Inhalt etwas ausführlicher, aber unverständlich angiebt, und wo es sich um die Methode handelt, die Ptolemäus zur Erklärung der Ungleichheiten der drei obern Planeten angewandt hat.

Kreise, etc. Über die Konstruktion der drei Kegelschnitte.[a]) Über die Methoden der Analysis und Synthesis und die Lösung geometrischer Aufgaben nach denselben. Nach el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 322) schrieb Ibrâhîm b. Sinân auch ein Buch „über die Bewegungen der Sonne". (Fihr. 272 und A. 128, Übers. 26 und 59; Ibn el-Q. n. der Wiener Handschrift 1161, p. 67; Ibn Abi U. I. 226.)

Von seinen Schriften sind noch vorhanden: Über die Konstruktion der drei Kegelschnitte, im Brit. Mus. (975, 3⁰). Abhandlung über die Methoden der Analysis und Synthesis, in Paris (2457, 1⁰), in Kairo (200, Übers. 19). Ferner befindet sich noch eine Schrift von ihm, betitelt „über die Ausmessung der Parabel", in Paris (2457, 26⁰), im Ind. Off. (767, 6⁰), in Kairo (200 u. 205, Übers. 20 u. 23), wahrscheinlich ebenfalls ein Teil seines Kommentars zum ersten Buche der Kegelschnitte.

114. Muh. b. ʿAbdallâh b. ʿArûs, Abû ʿAbdallâh, aus Mauzûr[b]), war ein feiner Sprachkenner und gewandt in der Poetik und Rechenkunst; er starb im Anfang des Jahres 338 (949) nach el-Zobeidî. (B. V. 99.)

115. Saʿîd b. Aḥmed el-Faraḍî, Abû ʿOṯmân, bekannt unter dem Namen ʿAinî el-Šât, aus Cordova, war sehr bewandert in der Rechenkunst und ein höchst rechtschaffener Mann. Er starb am 1. Šauwâl 338 (950) nach el-Râzî. (B. VII. 144.)

116. Muh. b. Muh. b. Ṭarchân b. Auzlaǵ[c]), Abû Naṣr, el-Fârâbî, d. h. aus Fârâb gebürtig, einer Stadt in Turkestân, nördlich von Šâš (Taschkend) gelegen, die im 12. Jahrh. Oṭrâr hiefs, wahrscheinlich das heutige Aris. Er war türkischer Nationalität und verbrachte seine Jugendzeit in Fârâb, wo sein Vater ein höherer Militär war, begab sich dann nach Bagdad zur Vervollkommnung seiner Kenntnisse im Arabischen und lag hier hauptsächlich philosophischen Studien ob, sein Lehrer hierin war unter andern Abû Bišr Mattâ b. Jûnis (s. Art. 102), es war dies zur Zeit des Chalifen el-Moqtadir (295—320). Als zweiter Lehrer in Philosophie wird genannt Jûḥannâ b. Ḥailân[d]), wie Mattâ b. Jûnis ein Christ, den er nach den einen (Ibn Abi U. und Ibn el-Q.) in Bagdad, nach den andern (Ibn Ch. und Abulfid.) in Ḥarrân gehört haben soll. Später siedelte el-Fârâbî nach Syrien über, wo er weiter wissenschaftlichen Studien oblag, und Tage und Nächte mit Lesen und Schreiben zubrachte. Nach und nach

[a]) Ist wohl identisch mit dem Kommentar zum ersten Buche der Kegelschnitte, oder dann ein Teil desselben.

[b]) Der Text hat unrichtig Maurûr, Mauzûr war ein Flecken in der Nähe von Carmona (zwischen Cordova und Sevilla).

[c]) So Ibn Ch., Ibn Abi U. hat Auzlaǵ vor Ṭarchân.

[d]) Ibn Ch. hat „Chailân", Ibn el-Q. bei C. „Ǧiblâd", Abulfid. „Abû Hajâ".

wurde seine Tüchtigkeit erkannt, seine Stellung und sein Ansehen bedeutender, seine Schriften berühmt, seine Schüler vermehrten sich, so dafs ihn der Emir Seif ed-daula ʿAlî b. ʿAbdallâh b. Ḥamdân durch Ehrenbezeugungen auszeichnete. Er wurde mit der Zeit ein vollendeter Philosoph, einer der ausgezeichnetsten Imâme, hervorragend in den mathematischen Wissenschaften, von scharfem Verstand, von rechtschaffenem, tugendhaftem Lebenswandel. Er war auch sehr bewandert in der Medizin, übte sie aber nicht praktisch aus, auch ein grofser Kenner der Musik, über die er verschiedene Werke verfafst hat. Er ist als der erste zu betrachten, der die griechische Philosophie den arabischen Gelehrten zum eigentlichen Verständnis gebracht hat, wie Ibn Sînâ selbst bezeugt hat.[a]) Im Jahre 338 begab sich el-Fârâbî nach Ägypten und starb nach seiner Rückkehr nach Damaskus daselbst im Raǧeb 339 (Ende 950 oder Anfang 951) im Alter von ungefähr 80 Jahren. — Er schrieb: Kommentare zu den Aristotelischen Schriften: über den Himmel, die Physik und die Meteorologie, alle drei in Form von Notizen (Glossen). Einen Kommentar zum Almagest des Ptolemäus. Kommentar zu den Schwierigkeiten der Einleitungen[b]) des 1. u. 5. Buches des Euklides. Über die höhern (himmlischen) Einflüsse. Notizen (Glossen) über die Gestirne. Abhandlung darüber, dafs die Bewegung der Himmelssphäre ewig sei. Einleitung in die hypothetische (nur in der Vorstellung existierende)[c]) Geometrie, als Auszug. Über das Teilbare (den Teil) und das Unteilbare. Abhandlung über das, was sicher oder unsicher ist von den astrologischen Urteilen.[d]) Über das, was dem Studium der Philosophie vorhergehen mufs. Encyklopädie oder Einteilung und Anordnung der Wissenschaften. Dann verschiedene Abhandlungen über Geomantie und Alchymie, die ich hier übergehe. (Fihr. 263; C. I. 189 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 76, Übers. III. 307; Ibn Abi U. II. 134; Abulfar. 316, Übers. 208; Abulfid. II. 457.)

Von diesen Schriften sind noch arabisch vorhanden: Die Abhandlung über das, was sicher oder unsicher ist in den astrologischen Urteilen, im Brit. Mus. (425, 6°). Die Encyklopädie im Escurial (643, 3°). Über das, was dem Studium der Philosophie vorangehen mufs, in Leiden (1435 u. 36)

---

[a]) Über seine philosophischen Ansichten und Schriften speziell vergl. Steinschneiders Al-Farabi etc. in den Mém. de l'acad. imp. de St.-Pétersbourg, VII. Sér. T. XIII. Nr. 4.

[b]) Hier mag wohl *„mosâdarât“* in einem allgemeinern Sinne zu nehmen sein als in demjenigen von „Postulaten“, also „Definitionen, Axiome, Postulate“.

[c]) Steinschneider übersetzt „reine“; es ist möglich, dafs unter *„handase wahmîje“* diese Geometrie im Gegensatz zur praktischen (Ausmessungslehre) gemeint ist, doch habe ich diesen Begriff nirgends sonst gefunden.

[d]) Bei Ibn Abi U. weicht der Titel etwas von diesem ab, doch ist das gleiche Werk gemeint.

herausgeg. mit andern Abhandlungen el-Fârâbîs von Schmoelders, Bonn 1836 und auch von Dieterici, Leiden 1890. — In lateinischer Übersetzung von Gerard von Cremona existiert die Encyklopädie in Oxford und Paris, doch nicht vollständig; ein Auszug daraus wurde herausgegeben von Camerarius, Paris 1638, unter dem Titel: Alpharabii vetustissimi Aristotelis interpretis opera omnia, quae latina lingua conscripta reperiri potuerunt.

In der Bodl. zu Oxford (940, 6⁰) befindet sich ein Brief über astronomische Tafeln und Strahlenprojektion an Abû'l-Rîhân, der einem Abû Naṣr zugeschrieben wird; Steinschneider (l. c. p. 74) hat diesen Brief unter die Schriften el-Fârâbîs eingereiht, muſs aber natürlich seine Echtheit bezweifeln, da el-Fârâbî 100 Jahre vor Abû'l-Rîhân gelebt hat; dieser Abû Naṣr ist aber eben nicht el-Fârâbî, sondern Manṣûr b. ʿAlî b. ʿIrâq, Abû Naṣr (s. d. Art.), der Lehrer el-Bîrûnîs nach seinem eigenen Zeugnis (vergl. Chronol. of anc. nat. p. 167).

117. Soleimân b. ʿOqba[a]), Abû Dâ'ûd, ein Zeitgenosse (vielleicht etwas älterer) von Abû Ǧaʿfar el-Châzin. Er schrieb: Einen Kommentar zur 2. Hälfte des 10. Buches des Euklides, welcher (oder wenigstens ein Teil desselben) in Leiden (974) unter dem Titel: Über die Binomialen (wörtlich: die zwei Namen Besitzenden) und die Apotomeen (die Abgeschnittenen, Abgetrennten), welche sich im 10. Buche (im Ms. unrichtig: in den zehn Büchern) des Euklides befinden. (Cat. Cod. Or. Lugd. Bat. III. 41 u. 42.)

118. ʿAlî b. Muh. b. Dâ'ûd[b]), Abû'l-Qâsim, el-Tenûchî, wurde geboren in Antiochia im Ḏû'l-Hiǧǧe 278 (892). Er zeichnete sich besonders als Jurist aus, hatte dabei aber auch eine groſse Kenntnis der Litteratur, neigte zu den Lehren der Moʿtaziliten hin und war sehr bewandert in Erbteilung, Geometrie und Astrologie. Er war längere Zeit Qâḍî von Baṣra und von Ahwâz und begab sich dann an den Hof Seif ed-daulas b. Hamdân. Er starb in Baṣra im Rabîʿ I. 342 (953). (Ibn Ch. I. 353, Übers. II. 305; Ibn Qutl. 33.)

119. ʿAlî b. Ahmed el-ʿImrânî, gebürtig aus Moṣul und wohnhaft daselbst, war ein bedeutender Kenner der Rechenkunst und Geometrie und ein groſser Büchersammler. Es kamen zu ihm Leute aus den entferntesten Gegenden, um seine Vorlesungen zu hören. Er starb i. J. 344 (955/56).

[a]) Der Katalog von Leiden (l. c.) hat ʿOṣma; H. Ch. I. 382 dagegen ʿOqba, was ich hier vorziehe; ich halte diesen Geometer nicht identisch mit dem Astrologen Abû Dâ'ûd oder ʿAlî b. Dâ'ûd (s. Art. 70), was Steinschneider (Z. D. M. G. 24 p. 386) zu vermuten scheint.

[b]) Es wäre nicht unmöglich, daſs dieser ʿAlî b. Muh. b. Dâ'ûd identisch wäre mit ʿAlî b. Dâ'ûd (vergl. Art. 70), obgleich der letztere als Jude bezeichnet wird; beide werden nämlich als bewandert in der Astrologie genannt.

schrieb: Einen Kommentar zur Algebra des Abû Kâmil Šoğâ' b. Aslam Art. 81). Über die Tagewählerei. Eine Anzahl von Büchern über die rologie und was damit zusammenhängt.[a]) Er war der Lehrer des Astroen 'Abdel'azîz b. 'Otmân el-Qabîṣî (s. Art. 132). (Fihr. 283, Übers. 39; I. 410 n. Ibn el-Q.)

Von diesen Werken ist nur noch die Tagewählerei lateinisch (de ctionibus) vorhanden in der amplonianischen Sammlung zu Erfurt (Fol. i, 4° und Oct. 83, 2°)[b]); die Übersetzung ist von Abraham Judaeus (Saorda) in Barcelona 1134 gemacht.

120. Jûsuf el-Herawî (d. h. aus Herat) oder auch el-Harûnî and. Lesarten), schrieb: Über astrologische Betrügerei (Heuchelei) in 300 Blättern.[29] (Fihr. 280, Übers. 35; C. I. 426 n. Ibn el-Q.)

121. Muhâb b. Idrîs el-'Adawî (?) el-Faraḍî, Abû Mûṣâ, prünglich aus 'Adawa (?), wohnhaft in Ecija, hörte in Cordova den sim b. Aṣbag und andere. Er war gelehrt in der Erbteilung und Rechennst und unterrichtete in diesen beiden Disziplinen; Ibn el-Ḥâriṯ lobt ihn hr. Er starb in Ecija i. J. 352 (963). (B. VIII. 27.)

122. Muh. b. Aḥmed b. Ḥibbân (oder Ḥabbân), Abû Ḥâtim, -Bustî el-Temîmî, gebürtig aus Bust in Siğistân, war ein bedeutender echtsgelehrter und Historiker, daneben auch sehr bewandert in Astronomie, edizin und andern Wissenschaften. Er machte grofse Reisen, auf denen seine Bildung vervollkommnete. Er bekleidete nach der Rückkehr die elle eines Qâḍî von Samarqand, später von Nasâ und Nîsâpûr. Er starb Šauwâl 354 (965) in Bust. (Ibn Ch. I. 507 und II. 96, Übers. III. und 364; W. G. 130.)

123. Aḥmed b. el-Ḥosein, el-Ahwâzî, el-Kâtib[c]) schrieb einen ommentar zum 10. Buche des Euklides, in Leiden (970), Berlin (5923) d Paris (2467, 18°) noch vorhanden, aber an allen drei Orten nur in nem Auszug von ca. 10 Seiten; ebenso heifst an allen drei Orten der erfasser nur el-Ahwâzî; de Jong und de Goeje und Ahlwardt (nach ihnen) entifizieren ihn nach Flügels Index zu H. Ch. mit 'Abdallâh b. Hilâl -Ahwâzî, dem um 165 d. H. lebenden Übersetzer von Kalîla we dimna s dem Persischen ins Arabische. Ich bezweifle eine so frühe Kommenerung des 10. Buches des Euklides und halte diesen Ahwâzî deshalb für entisch mit dem Sohne des im Fihr. (p. 263, Übers. 15) unter den Naturilosophen genannten Abû Aḥmed el-Ḥosein b. Karnîb el-Kâtib, dem Enkel

---

[a]) Von diesen drei Werken kennt der Fihr. nur das erste.

[b]) Nach Steinschneider, Bibl. math. 1891, p. 48.

[c]) Woher Wenrich (de auctor. graec. vers. etc. p. 187) die Kunje Abû'l-osein hat, weifs ich nicht.

von Nr. 80 und Neffen von Nr. 97. Sehr wahrscheinlich ist auch der bei el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 284 und 288) als Verfasser eines Buches über die Wissenschaften der Griechen genannte Aḥmed b. el-Ḥosein el-Ahwâzî mit unserm Autor identisch.

124. Abû Ğa'far el-Châzin (d. h. der Schatzmeister oder Bibliothekar), einer der ersten Mathematiker und Astronomen seiner Zeit und ebenfalls ausgezeichneter Beobachter. Er war aus Chorâsân gebürtig[a]) und wird so zwischen 350 und 360 (961 und 971) gestorben sein. Er schrieb: Die Tafeln der (für die) Scheiben (*ṣafâ'iḥ* pl. v. *ṣafîḥa)* (des Astrolabiums). Das Buch der Zahlenprobleme. Einen Kommentar zum ersten Teile des 10. Buches des Euklides.[b]) Die grofse Einleitung in die Astronomie. Untersuchungen über die Neigung (Schiefe) der partiellen Neigungen und die Aufgänge auf der geraden Sphäre.[c]) (Fihr. 266 und 282, Übers. 17 und 39; C. I. 408 n. Ibn el-Q.; el-Bîrûnî, 183, 249, 322.)

Von diesen Schriften ist nur noch vorhanden der Kommentar zum Anfang des 10. Buches des Euklides, in Leiden (968 und 969), in Berlin (5924) und in Paris (2467, 17°). Dann befinden sich in Berlin (5857), in einem Werke eines Anonymus, zwei kurze Kapitel über zwei astronomische Instrumente, einem Werke des Abû Ğa'far el-Châzin (wahrscheinlich seinen „Tafeln der Scheiben") entnommen. In Leiden (992) befinden sich die kürzern Lösungen zweier geometrischer Probleme durch einen Anonymus, die Abû Ğa'far im ersten Buche seiner „Tafeln der Scheiben" weitschweifig gelöst hatte. Endlich ist noch anzuführen, dafs im Ms. 1013 in Leiden, das die Antworten des Abû'l-Ğûd Muh. b. el-Leit auf vier ihm vorgelegte geometrische Fragen enthält, sich am Anfang der Antwort auf die 4. Frage folgende Stelle befindet: „Es sagt Abû Ğa'far el-Châzin in seinen Tafeln der Scheiben, dafs, wenn die Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile möglich wäre, er auch die Berechnung der Sehne eines Winkels von 1^0 ausführen könnte." Dann folgt diese Rechnung auf Grundlage der als möglich angenommenen Dreiteilung des Winkels.

125. Muh. b. el-Ḥosein b. Muh., Abû'l-Faḍl, el-Kâtib, bekannt unter dem Namen Ibn el-'Amîd, war Wezir des Bujiden Rukn ed-daula.

[a]) Der Fihr. nennt ihn p. 266 el-Chorâsânî.

[b]) Der Fihr. sagt einfach, Abû Ğa'far habe den Euklides kommentiert; entweder sind die Kommentare zu den übrigen Büchern verloren gegangen, oder der Fihr. berichtet unrichtig.

[c]) Die beiden letzten Werke stehen weder im Fihr. noch bei Ibn el-Q., das erstere wird von el-Bîrûnî (Chronol. of anc. nat. p. 183), das letztere von Naṣîr ed-dîn (in seinem *šakl el-qaṭṭâ'*, herausgegeben von Caratheodory, p. 115, Übers. 150) zitiert.

›safs grofse Kenntnisse in der Astrologie und den philosophischen ınschaften, sowie auch in der Sprachwissenschaft. Er starb i. J. 359 '0) (nach andern 360) in Raj oder Bagdad. (Ibn Ch. II. 57, Übers. 56.)

ı26. Ṯâbit b. Sînan b. Ṯâbit b. Qorra, Abû'l-Ḥasan, der von Nr. 108, der Enkel Ṯâbit b. Qorras, ebenfalls bedeutender im Dienste der Chalifen el-Râḍî, el-Muttaqî, el-Mustakfî und el-Muṭî', en auch verdienter Historiker und Kenner der mathematischen Wissen- en. Er schrieb eine Chronik seiner Zeit (c. v. 290—360), die dann einem Neffen Hilâl b. el-Muḥsin (al. Muḥassan) b. Ibrâhîm fortgesetzt und die als ein vortreffliches Werk gerühmt wird. Mathematische ten werden keine von ihm angeführt. Er starb nach dem Fihrist ı'l-Qa'da 363 (974), nach Ibn el-Q. 365 (976). (Fihr. 302; Ibn Abi U. 4; Abulfar. 316, Übers. 208; Abulfid. II. 526.)

127. Jaḥjâ b. 'Adî b. Ḥamîd, Abû Zakarîjâ, der Logiker, einer rsten Kenner der philosophischen Disziplinen zu seiner Zeit. Er war itischer Christ und ein Schüler von Abû Bišr Mattâ und Abû Naṣr âbî. Er war ein vorzüglicher Übersetzer aus dem Syrischen ins sche und verfafste eine grofse Zahl von Übersetzungen, Kommentaren lbschriften solcher, ich nenne hier nur seine Übersetzung (oder Ver- ung) des Kommentars des Themistius zum Buche „über den Himmel" ıristoteles, und des Kommentars des Alexander von Aphrodisias zu eteorologie desselben Philosophen. Er starb im Ḏû'l-Qa'da 364 (975), ter von 81 Sonnenjahren in Bagdad, nach andern 363. (Fihr. 250, ınd 264, Übers. 8, 9, 10 und 15; Ibn Abi U. I. 235; Abulfar. 317, . 209.)

128. Muh. b. Jûsuf b. Naṣr el-Azdî el-Faraḍî aus Cordova, sein Vater Jûsuf aus Ecija gezogen war. Er war ein Schüler von d b. Châlid und Ḥobâb b. 'Ibâda (s. Art. 92) und übertraf den letztern in der Kenntnis der Erbteilung und der Rechenkunst. Sein Sohn*) nt ihn in seinem Geschichtswerk an verschiedenen Stellen; nach ihm er in Toledo im Ǧumâdâ II. 365 (976). (B. V. 103.)

129. Ṯâbit b. Ibrâhîm b. Zahrûn, Abû'l-Ḥasan, el-Ḥarrânî, inem andern Zweige der Sabier stammend als die bisher genannten, ein geschickter Arzt und von grofsen Kenntnissen in den übrigen ıschaften der Alten. Der Fihr. reiht ihn unter die Mathematiker nter die Ärzte ein, erwähnt aber keine mathematischen Schriften von

) Ibn el-Faraḍî, der Verfasser des VII. und. VIII. Bds. der Bibl. arab.-hisp. Vorwort).

ihm, wenn nicht die Abhandlung „Antworten auf Fragen, die an ihn gerichtet wurden" eine solche ist. Er starb im Dû'l-Qa'da 365 (976), nach andern 369, in Bagdad im Alter von 82 Jahren. (Fihr. 272 und 303, Übers. 26; Ibn Abi U. I. 227; Abulfar. 324, Übers. 213; Abulfid. II. 544.)

130. El-Ḥasan b. 'Abdallâh b. el-Marzûbân, Abû Sa'îd, el-Sîrâfî,[a]) besafs grofse Kenntnisse in den Rechts- und Sprachwissenschaften, in der Poetik und Mathematik. Er war Qâḍî von Bagdad, Lehrer der Grammatik daselbst und neigte den Lehren der Mo'taziliten zu. Er starb im Raǵeb 368 (979), im Alter von 84 Jahren. (Fihr. 62; Ibn Ch. I. 130, Übers. I. 377; Ibn Qutl. 17; Abulfid. II. 543.)

131. Jûḥannâ b. Jûsuf b. el-Ḥâriṯ b. el-Baṭrîq, el-Qass (d. i. der Priester), ein sehr gelehrter Mann, besonders als Geometer ausgezeichnet. Er hielt Vorlesungen über die Elemente Euklids und andere geometrische Werke, und machte auch Übersetzungen aus dem Griechischen ins Arabische. Er schrieb: Einen Auszug aus zwei Tafeln (?) über Geometrie. Eine Abhandlung über den Beweis, dafs, wenn eine gerade Linie zwei andere in einer Ebene gelegene Gerade schneidet, die beiden inneren Winkel, welche auf der einen Seite (der Schneidenden) liegen, weniger als zwei Rechte betragen. Er wird ums Jahr 370 (980/81) gestorben sein, was ich auch mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit von den folgenden beiden Autoren annehmen darf. (Fihr. 282, Übers. 38; C. I. 426 n. Ibn el-Q.)[b])

Von den genannten Schriften ist nichts mehr vorhanden, dagegen wird ihm zugeschrieben eine Abhandlung „über die rationalen und irrationalen Gröfsen", in Paris (2457, 48^{0}). Ferner enthält das Ms. 2457, 10^{0} in Paris eine Abhandlung des Aḥmed b. Muh. el-Siǵzî, worin er über den Irrtum des Jûhannâ in seiner Lösung der Aufgabe der Teilung einer Geraden in zwei gleiche Teile (?) handelt.

132. 'Abdel'azîz b. 'Otmân b. 'Alî, Abû'l-Ṣaqr, el-Qabîṣi, der Alcabitius des Mittelalters, bedeutender Astrolog, wird im Fihr. nur im Art. Euklides als Diener (oder Schüler?) des 'Alî b. Aḥmed el-'Imrânî (s. Art. 119) in Moṣul genannt. Nach dem Tode dieses Mathematikers lebte er in der Umgebung des Sultans Seif ed-daula b. Ḥamdân (gest. 356). Er war auch Dichter; Ibn Ch. (I. 365, Übers. II. 335) führt ein schönes Gedicht über den Regenbogen an, das von den einen dem Qabîṣî, von den andern dem Seif ed-daula zugeschrieben wurde. Er schrieb: Einleitung in die Kunst der Astrologie *(el-madchal ilâ ṣinâ'at [aḥkâm] el-nuǵûm)*, die sich noch in Oxford (I. 941, 1^{0}), in Gotha (65, 2^{0}) und in Kairo (295 und 316)

[a]) d. h. von Sîrâf, am persischen Meerbusen, stammend.

[b]) Vergl. über ihn auch Woepcke in den Mém. prés. par div. savants T. XIV. p. 665.

ndet. Das Werk ist dem Sultan Seif ed-daula gewidmet. Es wurde ins einische übersetzt von Joh. Hispalensis, diese Übersetzung ist an vielen en (Oxford, Florenz, Paris, München etc.) noch vorhanden unter dem l: Alchabitii Abdilazi liber introductorius ad magisterium judiciorum orum interprete Joanne Hispalensi. Es wurde mehrmals, meist mit dem nmentar des Johannes de Saxonia zusammen, gedruckt, zum erstenmal Venedig 1485. Wüstenfeld (die Übers. arab. Werke ins Lat. etc. p. 32) ähnt eine französische Übersetzung eines Werkes des Qabîṣî, betitelt: ité des conjonctions des planètes etc., par Oronce Fine, Paris 1557. nschneider (Bibl. math. 1891, p. 44) hält diese Abhandlung nicht für selbständiges Werk, sondern entnommen dem 4. und 5. Teil der Introtio. (Fihr. 265, Übers. 16; Ibn Ch. I. 365, Übers. II. 335.)

133. ʿÎsâ el-Raqqî, Abû'l-Qâsim,*) el-Tiflîsî, aus Raqqa gebürtig, t und Astrolog am Hofe Seif ed-daulas, des Ḥamdâniden (gest. 356) mit diesem befreundet. Hammer erzählt n. Ibn el-Q., dafs Abû'l-Qâsim Raqqî in den Tagen ʿAḍud ed-daulas (gest. 372) nach Bagdad gekommen und dort mit dem Astrologen Abû'l-Qâsim el-Qaṣrânî (vielleicht identisch Abû'l-Qâsim el-Qaṣarî, s. d. Art.) zusammengetroffen sei, den er zuerst erschätzt, nachher aber seine bedeutenden Kenntnisse in Astronomie annt habe. Abû'l-Qâsim el-Raqqî war auch sehr erfahren auf dem iete der astronomischen Tafeln. (C. I. 409 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. 140; H. V. 310.)

134. ʿAbdallâh b. Temâm b. Azhar el-Kindî, Abû Muh., annt unter dem Namen el-Masarrî, aus Cordova, ursprünglich aus Ecija nmend, war ein Schüler des Qâsim b. Aṣbag und andern, machte Reisen h dem Orient und widmete sich auf denselben hauptsächlich dem Studium Erbteilung und der Rechenkunst. Er gab Unterricht in der letztern ziplin und las auch über Traditionen. Er starb im D̲û'l-Ḥiǧǧe 373 (984). VII. 197.)

135. Lubnâ, Geheimschreiberin des Chalifen Ḥakem II., war höchst sichtsvoll in ihrem Berufe, sehr bewandert und scharfsinnig in der mmatik, Metrik, Dichtkunst und Rechenkunst und hatte eine sehr schöne rift. Sie starb i. J. 374 (984/85). (B. II. 630 und III. 530; die ere Quelle hat als Todesjahr 394, was kaum richtig sein wird, da kem II. schon 366 starb.)

136. Abû ʿAbdelmelik el-T̲aqifî war ein gelehrter Arzt und sehr andert in den Elementen des Euklides und in der Ausmessungslehre.

*) Ich bin nämlich der Ansicht, dafs der von Ibn Abi U. genannte Arzt ʿIsâ aqqî el-Tiflîsî und der bei C. erwähnte Astrolog Abû'l-Qâsim el-Raqqî (bei C. erhaft geschrieben „el-Saraqqî") eine und dieselbe Persönlichkeit seien.

Er diente den Chalifen el-Nâṣir (= ʿAbderraḥmân III., 912—961) und el-Mustanṣir (= Ḥakem II., 961—976) als Arzt. Er verfasste seltene Werke über Medizin. Er war auch Vorsteher des Zeughauses (in Cordova?). Er war hinkend, wurde am Ende seines Lebens blind und starb an der Wassersucht. (Ibn Abi U. II. 46.)

137. ʿAlî b. el-Ḥosein,[a]) Abû'l-Qâsim el-ʿAlawî, bekannt unter dem Namen Ibn el-Aʿlam, el-Šerîf el-Ḥoseinî,[b]) war sehr gelehrt in der Astronomie, einer der ersten seiner Zeit; auch als Astrolog stand er bei ʿAḍud ed-daula in grofser Gunst. Er verfafste astronomische Tafeln, die nicht nur zu seiner Zeit, sondern noch lange nachher bis auf die Zeit Ibn el-Q.'s (ca. 1220) bei den Astronomen in grofsem Ansehen standen. Von dem Sohne ʿAḍud ed-daulas, Ṣamṣâm ed-daula, nicht mehr mit gleicher Gunst ausgezeichnet, zog er sich von dem Hofe der Bujiden zurück. Nach einer Wallfahrt i. J. 374 nach Bagdad zurückgekehrt, starb er bald darauf im Muḥarrem d. J. 375 (985). Ibn Jûnis (Not. et extr. VII. 156) sagt von ihm: „Diejenigen, welche ihn gekannt haben, rühmen in hohem Mafse sein Wissen in der Astronomie und seine Genauigkeit in der Beobachtung; sie sagen, dafs sie in seinem Hause die Instrumente sahen, mit denen er beobachtet und die er selbst verfertigt hatte.“ (C. I. 411 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 325, Übers. 214; Not. et extr. VII. 150, 156 und 168.)

138. ʿAbderraḥmân b. ʿOmar,[c]) Abû'l-Ḥosein, el-Ṣûfî, gehörte zu den vortrefflichsten Astronomen der Araber und war berühmt durch seine weitverbreiteten Werke. Er war der Lehrer und Freund ʿAḍud ed-daulas, der sich mit Stolz dreier Lehrer rühmte: in der Grammatik des Abû ʿAlî el-Fârisî el-Nasawî,[d]) in der Kenntnis der astronomischen Tafeln des Šerîf Ibn el-Aʿlam (s. Art. 137) und in den Örtern und Bewegungen der Fixsterne des ʿAbderraḥmân el-Ṣûfî. Er starb nach Hilâl b. el-Muḥsin (s. Art. 126) im Muḥarrem d. J. 376 (986), geboren war er in Raj im Muḥarrem 291 (903). Er schrieb: Das Buch der Fixsterne, mit Figuren. Eine *Arǵûza* (Gedicht) über die Fixsterne, mit Figuren. Das Buch der *tadkira* (Notiz, Mémoire) und der Projektion der Strahlen. Abhandlung über das Astrolabium und seinen Gebrauch.[e]) (Fihr. 284, Übers. 40;

[a]) So Abulfar. und Not. et extr.; Ibn el-Q. hat „Ḥasan“; Not. et extr. haben p. 168 noch „b. Muh. b. ʿÎsâ“.

[b]) So in den Not. et extr.

[c]) C. hat noch weiter: b. Muh. b. Sahl, dann Abû'l-Hasan statt Abû'l-Ḥosein und noch el-Râzî (d. h. aus Raj gebürtig).

[d]) Ibn Ch. Übers. I. 173 und 379 hat el-Fasawî, von einer Stadt Fasa oder Basa in der Provinz Fars in Persien.

[e]) Diese Abhandlung wird nur von H. Ch. (III. 366) erwähnt.

C. I. 361 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 325, Übers. 214; Not. et extr. VII. 150 und 154; el-Bîrûnî, 335 und 358.)

Von diesen Werken sind noch vorhanden: Das Buch der Fixsterne, in Berlin (5658, 59 und 60, alle drei unvollständig), im Escurial (915), in Paris (2488, 2489, 1°, 2490—92), in Oxford (I. 899 und 916), im Brit. Mus. (393), im Ind. Off. (731 und 32); persisch in Konstantinopel (2595). Die Arǧûza, in Paris (2561, 4°), in München (870), in Gotha (1398), in Kairo (226, Übers. 164).[30] Über das Astrolabium, in Paris (2493 und 2498, 2°), in Konstantinopel (2642). Es wird ihm auch noch eine Einleitung in die Astrologie zugeschrieben, welche noch im Escurial (915)[a]) existiert; Teile davon befinden sich in Paris (2330, 2°) und im Ind. Off. (733). Sehr wahrscheinlich bezeichnen die obigen Titel „*taḏkira* und Projektion der Strahlen" Abschnitte dieser Einleitung, zumal ein Fragment des eben genannten Ms. 733 betitelt ist „der zweite Abschnitt des 4. Buches: über die Projektion der Strahlen". — Das Buch der Fixsterne wurde von Schjellerup in französischer Übersetzung herausgegeben: Description des étoiles fixes, St. Pétersbourg 1874.

139. ʿAbdallâh[b]) b. el-Ḥasan, Abû'l-Qâsim, genannt Ġolâm Zuḥal (Diener Saturns), war ein bedeutender Rechner und Astrolog im Dienste ʿAḍud ed-daulas, ein Zeitgenosse ʿAbderraḥmân el-Sûfîs (s. vor. Art.), er starb sogar im gleichen Jahre mit ihm, 376 (986/87), nach Hilâl b. el-Muḥsin. Abulfar. erzählt von ihm ein Gespräch mit Abû Soleimân, dem Logiker aus Siǧistân, über die Richtigkeit der astrologischen Prophezeiungen, woraus seine vorurteilsfreie Stellung zu dieser Frage hervorgeht. Er schrieb: Über die Profectiones.[c]) Über die Strahlen. Über die Urteile aus den Gestirnen. Ein grofses Buch über die Profectiones und die Strahlen. Das grofse allumfassende Buch *(el-ǵâmiʿ el-kebîr)*. Das Buch der ausgezogenen (oder abstrakten, oder erprobten)[d]) Elemente. Über die Tagewählerei. Das Buch über die Zerteilungen (Entscheidungen).[e]) (Fihr. 284, Übers. 40; C. I. 404 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 327, Übers. 215.)

140. ʿAlî b. Aḥmed, Abû'l-Qâsim, el-Anṭâkî (d. h. von Antiochia), el-Muǧtabâ (der Auserwählte), lebte in Bagdad, war befreundet mit dem Bujiden ʿAḍud ed-daula und einer der bedeutenderen Mathematiker

a) Sehr wahrscheinlich enthält dieses Ms. dieses astrologische Werk und nicht, wie C. meint, das Buch der Fixsterne.

b) Abulfar. und C. haben ʿObeidallâh.

c) Vergl. über diesen astrologischen Begriff meine Übersetzung aus dem Fihr. p. 61, Anmerkg. 148.

d) Arab. „*muǵarrade*".

e) Arab. *infiṣâlât*"; fehlt bei C.

der Araber, obgleich nach dem Urteil el-Nasawîs seine Schriften etwas unklar und übermäfsig breit ausgearbeitet sein sollen (vergl. Woepcke, Journal asiat. 1863, VI. Sér. T. I. p. 493 ff.). Neben seinen mathematischen Kenntnissen besafs er eine grofse Beredsamkeit und Eleganz des sprachlichen Ausdrucks. Er starb im Dû'l-Ḥiǧǧe d. J. 376 (987).[a]) Er schrieb: Das grofse Buch *el-tacht* (= die Tafel), über die indische Rechnungsweise.[b]) Über das Rechnen auf der Tafel ohne Auslöschen (der Ziffern). Einen Kommentar zu der Arithmetik.[c]) Über die Auffindung der Übersetzer oder Übersetzungen *(istichrâǧ el-tarâǧim)* (?). Einen Kommentar zum Euklides. Über die Kuben.[d]) Über die arithmetischen Proben. Über das Rechnen mit der Hand (Fingerrechnen) ohne Tafel.[e]) (Fihr. 266 und 284, Übers. 17, 40, 75 und 78; C. I. 411 n. Ibn el-Q.)

Hiervon ist noch vorhanden der Kommentar zum Euklides, in Oxford (II. 281).

141. ʿAlî b. Muh. b. Ismâʿîl b. Muh. b. Bišr, Abû'l-Ḥasan, aus Antiochia, kam im Rabîʿ II. des Jahres 352 (963) nach Spanien und wurde von dem Chalifen el-Ḥakem sehr wohlwollend aufgenommen. Er war sehr gelehrt in der Korankenntnis, ja der erste hierin zu seiner Zeit, ebenso bewandert in Sprachwissenschaft und Rechenkunst. Er hatte viele Schüler, die seine Schriften abschrieben und verbreiteten. Er wurde, wie er selbst angiebt, 299 (911/12) in Antiochia geboren und starb in Cordova im Rabîʿ I. 377 (987). (B. VII. 261; Maq. K. II. 120.)

142. Ǧaʿfar b. el-Muktafî, Abû'l-Faḍl, Sohn des Chalifen el-Muktafî billâh (289—295), ein sehr gebildeter Mann, in der alten Philosophie, Mathematik und Geschichte bewandert, auch geschickt in der Astrologie. Ǧars el-Naʿma Abû Naṣr (s. d. Art.) erzählt, er habe ein Buch von Ibn el-Muktafî über die Kometen gesehen, in welchem dieser von einer Erscheinung spricht, die am 19. Raǧeb 225 (Mai 840) beobachtet wurde, nämlich von einem dunkeln Flecken in der Sonne, den el-Kindî als Konjunktion der Venus mit der Sonne erklärt habe.[31] Von Ibn el-Muktafî soll auch jene Notiz stammen, die im Fihr. nach dem Art. „el-Ababh" steht und die dem Abû Maʿšar einige Werke abspricht und sie dem Sind

---

[a]) So bei C., der Fihr. hat „kurz vor Beginn des Jahres 376"; es sollte wahrscheinlich heifsen 377, dann würde es mit der obigen Angabe stimmen.

[b]) Der Fihr. hat *el-taht*, man vergleiche was ich hierüber in meiner Übers. aus dem Fihr. p. 75 und 78 gesagt habe; heute glaube ich, dafs die Lesart „*el-tacht* = die Tafel" die richtige ist.

[c]) Woepcke (l. c.) vermutet „des Nikomachus".

[d]) Diese Schrift steht nur im Fihr.

[e]) Die zwei zuletzt genannten Schriften sind nur bei Ibn el-Q. genannt.

b. ʿAlî zuschreibt (vergl. Art. 53). Ǧaʿfar b. el-Muktafî wurde geboren i. J. 294 und starb im Ṣafar 377 (987). (Fihr. 275 und 279, Übers. 30; C. I. 422 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 328, Übers. 216.)

143. Aḥmed b. Muh. el-Ṣâġânî,[a]) Abû Ḥâmid, el-Aṣṭorlâbî (d. h. der Verfertiger von Astrolabien), war in Geometrie und Astronomie einer der ersten seiner Zeit, besonders aber ein berühmter Instrumentenkünstler. Er übte seine Kunst in Bagdad aus und hatte eine grofse Zahl von Schülern, die sich rühmten, ihn zum Lehrer gehabt zu haben. Er erfand auch zu den schon bekannten alten Instrumenten einige neue vorzügliche. Šaraf ed-daula, der Sohn ʿAḍud ed-daulas, liefs in Bagdad auf einer von ihm neu errichteten Sternwarte den Lauf der sieben Planeten beobachten unter der Leitung des Astronomen Wîǧan b. Rustem el-Kûhî (s. Art. 175), unter den Beobachtern befand sich auch Aḥmed b. Muh. el-Ṣâġânî, und wahrscheinlich wurden auch von ihm konstruierte Instrumente dabei benutzt. Diese Beobachtungen fanden i. J. 378 statt, im Ḏû'l-Qaʿda 379 (990) starb Aḥmed b. Muh.[b]) (C. I. 410 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 329, Übers. 216.)

Schriften werden von ihm in den Quellen keine erwähnt, dagegen befindet sich in Oxford (I. 940, 3°) eine Abhandlung, betitelt: „über die auf den Scheiben des Astrolabiums konstruierten Stunden (-Linien)“, die ihm zugeschrieben wird. Ebenso wird ein Satz von ihm über die Dreiteilung eines Winkels zitiert in der Abhandlung des Abû Saʿîd Aḥmed b. Muh. el-Siǧzî, die sich in Leiden (996) befindet.[c])

Es folgen nun eine Reihe von Autoren (Art. 144—157[a]), über deren Lebenszeit wir gar keine andern Anhaltspunkte haben, als dafs sie vor der Zeit des Verfassers des Fihrist, der sein Werk in der Hauptsache i. J. 377 (987) geschrieben hat, gelebt haben müssen, da sie in diesem Werke behandelt werden.

144. Aḥmed b. ʿOmar el-Karâbîsî[d]) gehörte zu den vorzüglichsten Mathematikern und schrieb: Einen Kommentar zum Euklides. Über die

---

[a]) d. h. von Ṣâġân, einem Flecken bei Merw, stammend.

[b]) Eigentümlicherweise wird dieser Zeitgenosse des Verfassers des Fihrist von diesem unter den Verfertigern von astronomischen Instrumenten (p. 285, Übers. 42) nicht genannt, oder ist es vielleicht der dort genannte Aḥmed b. ʿAlî b. ʿÎsâ, zu dem der Fihr. hinzufügt „aus der jüngsten Zeit“.

[c]) Vergl. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 119.

[d]) d. h. der Händler mit grober Leinwand oder Kleidern aus solcher: *karâbîs* = arab. Plural des pers. Wortes *kirbâs* (oder *kirpâs*) = grobe Leinwand, oder Kleid aus solcher (n. Ibn Ch. Übers. I. 417).

Testamentsrechnung. Über die Erbteilungen. Über das Planisphärium,[a]) noch vorhanden in Oxford (I. 913, 2°) und in Kairo (204, Übers. 23). Das Buch über das indische (Rechnen?). (Fihr. 282, Übers. 38; C. I. 410 n. Ibn el-Q.)

145. Ja'qûb b. Muh., Abû Jûsuf, el-Miṣṣîṣî, der Rechner, berühmt zu seiner Zeit in der Arithmetik. Er schrieb: Das Buch der Algebra. Über die Erbteilungen. Über die Verdoppelungen der Häuser (Felder) des Schachspiels.[b]) Das umfassende (*el-ǧâmi'*) Buch. Über das Verhältnis der Jahre.[c]) Das allumfassende Buch (*ǧawâmi' el-ǧâmi'*). Das Buch der beiden Fehler. Über die Testamentsrechnung.[d]) (Fihr. 281, Übers. 37; C. I. 426 n. Ibn el-Q.)

146. 'Alî b. el-Miṣṣîṣî, Abû'l-Ḥasan, vielleicht ein Sohn des vorhergehenden Autors, schrieb: Über die Konjunktionen. (Fihr. 278, Übers. 34.)

147. Ja'qûb b. Muh., Abû Jûsuf, el-Râzî, schrieb: Das Buch über das gesamte Rechnen. Das Buch *el-tacht* (über das indische Rechnen). Über die Rechnung mit den beiden Fehlern. Das Buch der dreifsig seltenen Probleme. Kommentar zum 10. Buche des Euklides, im Auftrage von Ibn el-'Amîd ausgeführt.[32] (Fihr. 266 und 281, Übers. 17 und 37.)

148. Muh. b. Lurra[e]) (oder Ludda, oder Lara?), der Rechner, aus Ispahan, berühmt in seiner Kunst zu seiner Zeit, schrieb: Das Buch über das gesamte Rechnen. (Fihr. 282, Übers. 38; C. I. 433 n. Ibn el-Q.)[33]

149. Sinân b. el-Fatḥ, vielleicht der Sohn von Nr. 104, aus Harrân gebürtig, in Rechenkunst und Zahlenlehre hervorragend, schrieb: Das Buch *el-tacht*. über die indische Rechnungsweise. Über die Vermehrung und die Verminderung. Einen Kommentar zu dem Buche über die Vermehrung und die Verminderung (wahrscheinlich des Chowârezmî). Einen Kommentar zur Algebra des Chowârezmî. Über die Erbteilungen. Über

[a]) Im Kat. v. Oxford wird *misâhat el-halqa* übersetzt mit „de circulorum dimensione"; es wäre auch möglich, dafs die Schrift über die Ausmessung des Kreises handeln würde.

[b]) Es ist dies jedenfalls die bekannte Aufgabe über die Zahl der Gerstenkörner.

[c]) Ich glaube, dafs hier im arab. Text ein Fehler vorliege und dafs es statt „*nisbet el-sinîna*" heifsen sollte „*el-nisbe el-sittînîje*" = über das Sechzigerverhältnis, d. h. über die Operationen mit den Sexagesimalzahlen, worüber verschiedene Schriften existieren, z. B. in München (865 und 866) eine solche von einem Anonymus.

[d]) Vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 71, Anmerkg. 236.

[e]) Das Münchener Ms. 440 des Ibn el-Q. hat „Kurra".

die Kubenrechnung (Kubikwurzelausziehung, oder Summation von Kuben?).[a]) (Fihr. 281, Übers. 37; C. I. 437 n. Ibn el-Q.)

150. ʿOṭârid b. Muh., der Rechner und Astrolog, war ein vortrefflicher und gelehrter Mann; er schrieb: Über die indische Wahrsagekunst (aus Kameelmembranen) und ihre Erklärung. Über den Gebrauch des Astrolabiums. Über den Gebrauch der Armillarsphäre. Über die Zusammensetzung der himmlischen Sphären. Über die Brennspiegel. (Fihr. 278, Übers. 33.)

Die Pariser Bibliothek (2775, 3⁰) besitzt von ihm eine Schrift, betitelt: die Vorteile (nützlichen Eigenschaften) der kostbaren Steine. H. Ch. IV. 113 legt dem ʿAbderraḥmân b. ʿOmar el-Ṣufî folgende Worte in den Mund: „Dixit duos se vidisse libros de quadraginta octo stellarum fixarum constellationibus, quorum prior Battani, posterior ʿOṭârid auctorem habet, uterque tamen minime veritati et rectae rationi respondet.“ Nach diesem hätte ʿOṭârid nach el-Battânî gelebt.

151. Ǧannûn (?) b. ʿAmr b. Jûḥannâ b. el-Ṣalt, Abû Zakarîjâ, schrieb: Das Buch des Beweises für die Richtigkeit der Gestirne (Astrologie) und der auf sie gegründeten Prophezeiungen. (Fihr. 280, Übers. 36.)

152. ʿAbdallâh b. el-Ḥasan el-Ṣaidanânî, der Rechner und Astrolog, schrieb: Einen Kommentar zur Algebra des Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî. Einen Kommentar zu seinem Buche über die Vermehrung und die Verminderung. Über die verschiedenen Arten des Multiplizierens und Dividierens. (Fihr. 280, Übers. 36.)

153. El-Ḥaijânî (oder el-Ǧanâbî?), Abû'l-Faḍl, schrieb: Das Buch der geometrischen Tafeln (?). (Fihr. 280, Übers. 36.)

154. El-ʿAbbâs b. Bâgân b. el-Rabîʿ, Abû'l-Rabîʿ, war Astronom und schrieb: Das Buch der Einteilung der bewohnten Gegenden der Erde und der äufseren Erscheinung der Welt. (Fihr. 280, Übers. 36.)

155. Muh. b. el-Ḥasan b. Achî Hišâm, Abû ʿAbdallâh, el-Šaṭawî, schrieb: Über die Konstruktion der geneigten Sonnenuhr. Über die Konstruktion der trommelnden *(moṭabbile?)* Sonnenuhr[b]) und der Wasseruhren, welche Kugeln werfen.[c]) Über die Bestimmung der Höhen und der Azimute. (Fihr. 281, Übers. 36.)

[a]) Vergl. Woepcke, Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, im Journal de mathém. par Liouville, 1864 und 65.

[b]) Flügel (Fihr. II. 132) sagt, es sei dies „unstreitig eine Sonnenuhr, die die Mittagsstunde durch Beckenschall andeutete“; die Verbindung dieses Instrumentes mit den Wasseruhren, welche Kugeln werfen, mag diese Ansicht wohl rechtfertigen.

[c]) Vergl. hierüber meinen Nachtrag zur Übers. aus dem Fihr. in Z. f. M. u. Ph. 38. Jahrg. (1893), hist.-litt. Abtlg. p. 126.

156. Ǧaʿfar b. ʿAlî b. Muh. el-Mekkî, der Geometer, schrieb: Das Buch über die Geometrie. Abhandlung über den Kubus (Kubikzahlen?). (Fihr. 282, Übers. 38.)

157. Ibn Rauḥ, der Ṣabier, übersetzte zwei Bücher des Kommentars des Alexanders von Aphrodisias zur Physik des Aristoteles ins Arabische, welche Übersetzung dann noch von Jaḥjâ b. ʿAdî (s. Art. 127) verbessert wurde. Im Art. „Aristoteles" des Fihr. und auch bei C. I 246 steht allerdings „Abû Rauḥ", aber es ist wohl zweifellos dieselbe Persönlichkeit gemeint. (Fihr. 250 u. 282, Übers. 8 u. 38; C. I. 246 n. Ibn el-Q.)

157ᵃ. Muh. b. Nâǧije (C. hat Nâǧîm), der Schreiber, beschäftigte sich auch mit Geometrie und schrieb „das Buch über die Ausmessung (der Figuren)". C. nennt ihn einen Spanier, der Fihrist und das Münchener Ms. 440 haben diesen Zusatz nicht. (Fihr. 281, Übers. 36; C. I. 433 n. Ibn el-Q.; Münchener Ms. 440 des Ibn el-Q. fol. 108ᵇ.)

Der Fihrist hat am Schlusse des Mathematiker-Verzeichnisses ein besonderes Kapitel über die Instrumentenkünstler, in welchem aber nichts als Namen aufgeführt werden; von diesen Künstlern haben schon einige ihre Stelle in den vorhergehenden Artikeln gefunden, für die übrigen verweise ich auf den Fihr. (p. 284 f.) und meine Übersetzung aus demselben (p. 41 f.).

158. Naẓîf b. Jumn (oder Jemen) el-Qass (der Priester), ein Grieche, war sehr bewandert in den Sprachen, er übersetzte aus dem Griechischen ins Arabische unter anderem das 10. Buch der Elemente des Euklides, Bruchstücke dieser Übersetzung sind noch vorhanden in Paris (2457, 18° u. 34°). Als Arzt scheint er kein gar grofses Vertrauen bei den Leuten genossen zu haben, so dafs, wie Ibn Abi U. erzählt, ein höherer Militär ʿAḍud ed-daulas sogar auf den Gedanken kam, er sei bei seinem Fürsten in Ungnade gefallen, da ihm dieser den Naẓîf als Arzt zugesandt hatte, als er von einer Krankheit befallen worden war. Naẓîf wird ca. 380 (990/91) gestorben sein. (Fihr. 266, Übers. 16 u. 17; Ibn Abi U. I. 238; Abulfar. 326, Übers. 215.)

159. Muh. b. Jabqa b. Muh.[a]) b. Zerb, Abû Bekr, Qâḍî von Cordova, ein Schüler von Qâsim b. Aṣbaġ, Muh. b. ʿAbdallâh b. Abî Doleim u. a. Er hatte das mâlikitische Recht studiert und lehrte es auch; daneben war er sehr bewandert in Sprachwissenschaft und Rechenkunst, hatte ein schönes Erzählertalent, war unparteiisch und wohlthätig in hohem Grade. Er starb im Ramaḍân d. J. 381 (991). (B. VII. 387.)

160. Ṣâliḥ b. ʿAbdallâh el-Omawî el-Qassâm (d. h. der Erbteiler), Abû'l-Qâsim, aus Cordova. Er war sehr gelehrt in der Rechenkunst und

[a]) Dieses Muh. fehlt bei Flügel, grammat. Schulen d. Arab. p. 264.

Erbteilung und las über diese Disziplinen nach den Werken von Abû Muh. ʿAbdallâh b. Temâm b. Azhar (s. Art. 134); einer seiner Schüler war der Qâḍî Abû ʿOmar b. Samîq. (B. I. 233.)

161. Muh. b. ʿAbdûn el-Ǧebelî[a]) el-ʿAḏrî[b]) aus Cordova, reiste i. J. 347 (958/59) nach dem Osten, kam nach Baṣra, wandte sich dann nach Ägypten und wurde in Fosṭâṭ (Alt-Kairo) Vorsteher des Krankenhauses. Er war ein tüchtiger Arzt und befestigte die Grundlagen dieser Wissenschaft; er verwandte auch vielen Fleiſs auf die Logik, sein Lehrer darin war Abû Soleimân Muh. b. Ṭâhir el-Siǧistânî. Er kehrte i. J. 360 (970/71) nach Spanien zurück und diente als Leibarzt den Chalifen Ḥakem II. und Hišâm II. Bevor er zur Medizin überging, hatte er Unterricht in der Rechenkunst und Geometrie gegeben; er schrieb ein gutes Buch, betitelt: „*el-taksîr*" (ob über Bruchrechnung oder Ausmessung der Figuren oder ein medizinisches Werk, ist ungewiſs). Es sagt der Qâḍî Ṣâʿid (s. Art. 244): „Es hat mir Abû ʿOṯmân Saʿîd b. Muh. b. el-Baǧûniš (s. Art. 222) erzählt, daſs er in Cordova während seines Studienaufenthaltes daselbst keinen getroffen habe, der den Muh. b. ʿAbdûn in der Heilkunde erreicht hätte und mit ihm in der Genauigkeit, Übung und im Scharfsinn hätte wetteifern können." (Ibn Abi U. II. 46; B. V. 102; Maq. K. I. 393 u. 437.)

162. Ǧâbir b. Ibrâhîm, Abû Saʿîd, el-Ṣâbî (d. h. der Ṣabier), wahrscheinlich der Sohn von Nr. 113, schrieb: *Iḍâḥ el-burhân* (die Verdeutlichung des Beweises), über die Rechnung mit den beiden Fehlern, in Oxford (I. 913) und Leiden (1004).[c]) Über die Aufgänge der Mondstationen, eine Qaṣîde (Gedicht), in Gotha (1378, 2⁰). Über die Merkursphäre, in Oxford (I. 940, 10⁰).[d])

163. Rabîʿ b. Zeid el-Usqof (der Bischof),[e]) von Cordova, war nach Maq. K. II. 318 der Verfasser mehrerer astrologischer Werke, unter andern eines Buches, betitelt: „Die Einteilung der Zeiten und das Wohl (die Wiederherstellung) der Leiber", zugeeignet dem Chalifen Ḥakem II., in welchem er über die Mondstationen (*anwâ'* oder anoë) und was damit

---

a) W. A. 139 liest: el-Ǧilî.

b) Maq. K. I. 437 hat auch el-ʿAḏrî, aber p. 393 el-ʿAdawî, ebenso W. A. 139; B. V. 102 liest el-ʿAdadî. — ʿAḏra (jetzt Adra) ist ein Städtchen westlich von Almeria.

c) Es soll dies ein Kommentar zu der Abhandlung des Qosṭa b. Lûqâ (s. Art. 77) über denselben Gegenstand sein.

d) Hier heiſst er: Abû Saʿd el- Ṣâbî.

e) Soll nach R. Dozy (Z. D. M. G. 20. p. 595—609) identisch sein mit Rekemundus, dem Bischof von Elvira (Eliberis), den ʿAbderraḥmân III. als Gesandten i. J. 955 zu Otto I. geschickt hatte.

zusammenhängt, handelt.[34] — H. V. 310 hat über Ibn Zeid nach Gayangos (I. 199 u. 482) noch folgendes: „Er lebte ums Jahr 350 (961) und war Bischof von Cordova (oder nach Dozy: Elvira, s. o. die Note) unter der Regierung Ḥakems II., bei dem er in besonderer Gunst stand."

Das Buch „Einteilung der Zeiten und Wohl der Leiber" wurde (wahrscheinlich von Gerard von Cremona) ins Lateinische übersetzt und von Libri in seiner Histoire des sciences mathém. en Italie, 2. édit. 1865, T. I p. 389—452 veröffentlicht (es ist möglich, dafs Gerard bei seiner Übersetzung noch eine andere Vorlage ähnlichen Inhaltes benutzt hat und zwar vielleicht das *kitâb el-anwâ'* des ʿArîb b. Saʿd, s. Anmerkg. 34).

164. Ibrâhîm b. Hilâl b. Ibrâhîm b. Zahrûn, Abû Isḥâq, el-Ḥarrânî, der Ṣabier, war Staatssekretär unter dem Chalifen el-Muṭîʿ lillâh und den Bujiden Moʿizz ed-daula und ʿIzz ed-daula. Bei ʿAḍud ed-daula fiel er wegen seiner offenen und freimütigen Sprache in Ungnade und brachte einige Jahre im Gefängnis zu, erhielt dann aber 371 seine Freiheit wieder. Er war Historiker, Dichter, Astronom und Mathematiker; er wohnte auch den astronomischen Beobachtungen in Bagdad i. J. 378 (988/89) unter Wîǧan b. Rustem el-Kûhî (s. Art. 175) bei. Nach Ibn Ch. starb er in Bagdad i. J. 384 (994) im Alter von 71 Jahren, nach dem Fihr. vor 380 im Alter von ungefähr 60 Jahren,[a]) und zwar in grofser Dürftigkeit. Er konnte sich nie dazu bewegen lassen, zum Muhammedanismus überzutreten. Er schrieb verschiedene Abhandlungen über mathematische Fragen an zeitgenössische Gelehrte gerichtet, eine solche (welchen Inhalts ist nicht angegeben) an Abû Sahl el-Kûhî gerichtet, befindet sich in Kairo (201, Übers. 21). Ein Buch über die Dreiecke, dessen vom Verfasser geschriebenes Ms. Ibn el-Q. (resp. el-Zûzenî) gesehen zu haben angiebt. (Fihr. 134; C. I. 442 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. I. 12, Übers. I. 31; Abulfar. 330, Übers. 217; Abulfid. II. 583; W. G. 149.)

Die Bibliothek der Aja Sofia in Konstant. enthält ein Ms. (2741) von einem Abû Isḥâq, betitelt: Kommentar zur Geometrie des Euklides; vielleicht ist dies das oben genannte Buch über die Dreiecke; möglich ist aber auch, dafs unter diesem Abû Isḥâq ein anderer Ṣabier, nämlich Ibrâhîm b. Sinân b. Ṯâbit (s. Art. 113), oder eine dritte Persönlichkeit gemeint wäre.

165. Muh. b. ʿAbdallâh b. Muh. el-ʿOtaqî,[b]) el-Fîrjâbî,[c]) der

---

[a]) Da der Verfasser des Fihr. noch sein Zeitgenosse war, so sollte man seinen Angaben gröfseres Vertrauen schenken können, es ist aber eigentümlich, dafs er keine genaue Todesangabe machen kann.

[b]) H. V. 20 liest el-ʿItqî, doch ist el-ʿOtaqi, d. h. vom Stamme ʿOtaqâ, das richtige.

[c]) Fîrjâb oder Firjâb ist nach Jâqût ein Ort in Chorâsân.

Astrolog, aus Nordafrika stammend,[a]) in Kairo wohnhaft, ein vielseitig gebildeter Mann, vor allem aber in der Astrologie bewändert. Er starb im Ramaḍân 385 (995). Er schrieb eine Geschichte der Omeijaden und ʿAbbâsiden und mehrere Werke über die Gestirne und das Weissagen aus ihnen. (C. I. 431 n. Ibn el-Q.)

166. Abû ʿAbdallâh b. el-Balensî (Sohn des Valencianers), der Astrolog, ausgezeichnet und glücklich in seinen Weissagungen; el-ʿAzîz (der Fâtimidische Chalife von Ägypten, 975—996), in dessen Dienst er stand, verliefs sich vollständig auf dieselben, er stand daher bei ihm in grofser Gunst und sein Ansehen überstrahlte dasjenige aller seiner Fachgenossen. Er starb im Rabîʿ I. 386 (996). Es wäre möglich, dafs dieser Abû ʿAbdallâh mit dem eben genannten Astrologen Muh. b. ʿAbdallâh el-ʿOtaqî identisch wäre, da beide zu gleicher Zeit in Kairo lebten und auch beide angeblich aus dem Westen stammten. (C. I. 407 n. Ibn el-Q.)

167. Muh. b. Muh. b. Jaḥjâ b. Ismâʿîl b. el-ʿAbbâs, Abû'l-Wefâ el-Bûzǵânî, einer der gröfsten Mathematiker der Araber, geboren zu Bûzǵân im Gebiete von Nîsâbûr am 1. Ramaḍân d. J. 328 (Juni 940). Er erhielt Unterricht von seinem Oheim (väterlicherseits) Abû ʿAmr el-Moǵâzilî und seinem Oheim (mütterlicherseits) Abû ʿAbdallâh Muh. b. ʿAmbasa — Abû ʿAmr selbst hatte die Geometrie unter Abû Jaḥjâ el-Merwazî (oder Mâwardî?) (s. Art. 96) und Abû'l-ʿAlâ b. Karnîb (s. Art. 97) studiert. — Abû'l-Wefâ wanderte im Jahre 348 nach ʿIrâq aus;[35] er starb n. Ibn Ch. i. J. 387 (997), n. Ibn el-Q. im Raǵeb 388 (Juli 998). Er schrieb: Das Buch über das, was die Geschäftsleute und die Schreiber von der Rechenkunst gebrauchen, in Leiden (993), doch nur die drei ersten Abschnitte, und wahrscheinlich in Kairo (185, Übers. 10).[b]) Einen Kommentar zu den Elementen des Euklides, unvollendet. Einen Kommentar zur Algebra des Chowârezmî. Einen Kommentar zur Algebra des Diophantus. Einen Kommentar zur Algebra des Hipparchus.[36] Einleitung in die Arithmetik. Das Buch über das, was gelernt werden mufs vor dem Buche der Arithmetik. Das Buch der Beweise zu den Sätzen, welche Diophantus in seinem Buche gebraucht, und zu dem, was er (Abû'l-Wefâ) in seinem Kommentar angewandt hat. Eine Abhandlung über die Auffindung der Seite des Würfels, des Quadrates des Quadrates, und dessen, was aus beiden zusammengesetzt ist.[c]) Ein Buch über die Kenntnis des Kreises aus der Sphäre (?). Das voll-

---

[a]) Ibn el-Q. giebt ihm nämlich noch den Beinamen el-Ifrîqî.

[b]) Es ist hier nur genannt „das Buch des Abû'l-Wefâ", befindet sich aber in der Abteilung über die Rechenkunst.

[c]) Nach Woepcke (Journ. asiat. 1855, p. 254) handelt es sich hier höchst-

ständige (umfassende) Buch, in drei Abschnitten: der erste handelt über die Dinge, die gelernt werden müssen vor der Bewegung der Himmelskörper; der zweite über die Bewegung der Himmelskörper; der dritte über das, was sich bei der Bewegung der Himmelskörper zeigt (ereignet, daraus resultiert). Dieses Buch ist höchstwahrscheinlich identisch mit dem von Ibn el-Q. genannten „Almagest",[a]) noch vorhanden in Paris (2494), doch nicht vollständig. Das Buch der genauen, klaren (*el-wâḍiḥ*) Tafeln, in drei Abschnitten, die denjenigen des vorhergehenden Werkes vollkommen entsprechen; es sind dies jedenfalls die zu diesem Werke als Text gehörenden Tafeln, und wahrscheinlich identisch mit den von Ibn el-Q. genannten Sexagesimaltafeln und dem von Ibn Ch. genannten Werke über die Bestimmung der Sehnen; sie sind noch vorhanden in Florenz (Palat. 289).[b]) (Fihr. 266 u. 283, Übers. 17 u. 39; C. I. 433 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 81, Übers. III. 320; Abulfar. 338, Übers. 222; Abulfid. II. 599.)

In Oxford befindet sich ferner noch ein Ms. (I. 913, 3°), betitelt: Archimedis, Abulwafa al-Burǧânî (sic), Aḥmed b. Muh. el-Serî Problemata ad triangulum circulumque pertinentia. Konstantinopel (2753) hat ein „Buch über die Geometrie", entweder der von H. Ch. (I. 382) und im Fihr. (266, Übers. 17) genannte Kommentar zu den Elementen des Euklides, oder dann, was wahrscheinlicher ist, das ebenfalls von H. Ch. (V. 172) angeführte „Buch der geometrischen Konstruktionen", das allerdings Woepcke (Journ. asiat. Sér. V. T. V. p. 309 ff.) nicht für von Abû'l-Wefâ selbst verfaſst hält, sondern von einem seiner Schüler nach seinen Vorlesungen. Woepcke giebt eine Analyse des interessanten Werkes (ibid. p. 218—256 u. 309—359) nach einem pers. Ms. (Anc. fonds 169) der Pariser Bibliothek.

168. Sahl b. Ibrâhîm b. Sahl b. Nûḥ, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn el-ʿAṭṭâr, aus Ecija gebürtig, von berberischem Stamme, mit den Benî Omeija verbündet (befreundet), war sehr gelehrt in der Koran- und Traditionswissenschaft, ebenso bewandert in der Rechenkunst. Er war ein Schüler von Aḥmed b. Châlid, Aḥmed b. Zijâd u. a. in Cordova, reiste i. J. 319 nach Elvira und hörte dort bei Muh. b. Fiṭṭîs

wahrscheinlich um die geometrische Auflösung der Gleichungen: $x^3 = a$, $x^4 = a$, $x^4 + ax^3 = b$.

a) Vergl. auch Woepcke im Journ. asiat. Sér. V. T. V. p. 256, u. ibid. Sér. V. T. XV. p. 281 ff., wo Woepcke eine Stelle aus diesem Almagest über die Berechnung des sinus 30′ in Übersetzung veröffentlicht hat.

b) Hier heiſsen sie „*el-šâmil*" (= die allgemeinen, umfassenden), es stimmt dieses Attribut ungefähr überein mit demjenigen, das der Fihr. dem vorhergehenden Werke, d. h. dem Texte zu diesen Tafeln, giebt, nämlich „*el-kâmil*" (= das vollständige, umfassende).

(Faṭîs?) el-Elbîrî und ʿOṯmân b. Ǧarîr. Er hatte sehr viele Schüler. Er wurde geboren i. J. 299 (911/12) und starb im Raǵeb d. J. 387 (997). (B. VII. 162.)

169. ʿAbderraḥmân b. Ismâʿîl b. Bedr, bekannt unter dem Namen „der Euklides von Andalusien", war hervorragend in Geometrie und Logik; er verfafste einen berühmten Auszug aus den acht logischen Büchern (des Aristoteles, fügt H. V. 303 hinzu). Soweit C. I. 404 nach Ibn el-Q. — H. V. 303 hat noch weiter nach der Wiener Handschrift des Ibn el-Q., Bl. 131: Sein Neffe Abû'l-ʿAbbâs Aḥmed b. Abî Ḥâkim erzählt, dafs er unter der Regierung des grofsen Wezirs Manṣûr[a]) aus Spanien nach dem Osten gereist und dort gestorben sei.[37]

170. Saʿîd b. Fatḥûn b. Mokram, Abû ʿOṯmân, el-Toǵîbî el-Saraqosṭî (d. h. von Saragossa), mit dem Beinamen el-Ḥammâr (d. h. der Eseltreiber), lebte zur Zeit Hišâms II. und des Wezirs Ibn Abî ʿÂmir el-Manṣûr (also etwa 350—390, 961—1000). Er beschäftigte sich hauptsächlich mit den alten Wissenschaften, besonders mit Logik und andern philosophischen Disziplinen, sehr wahrscheinlich auch mit Mathematik, obgleich dies in den Quellen nicht ausdrücklich erwähnt ist. Er wurde deshalb auch von el-Manṣûr, der die orthodoxen Muslime gewinnen wollte und aus diesem Grunde die philosophischen und astronomischen Werke der grofsen Bibliothek zu Cordova verbrennen liefs, verfolgt, eingekerkert, dann aber wieder freigelassen, worauf er nach Sicilien sich begab, wo er auch gestorben ist, sein Todesjahr aber ist unbekannt. Er schrieb unter anderm nach Maq. *„rasâ'il maǵmûʿa we ʿujûn"* (gesammelte Abhandlungen oder Briefe und Quellen). Ich vermute, dafs der von C. I. 380 als Verfasser einer Encyklopädie der Wissenschaften (*ǵawâmiʿ el-ʿulûm,* Escurial 945) genannte Šaʿjâ (?) b. Fariǵûn (?) mit diesem Saʿîd b. Fatḥûn identisch sei. Von diesem Werke berichtet übrigens Casiri folgendes Interessante: „ubi scientiarum fere omnium regulae, ductis quibusdam lineis atque circulis, mira brevique arte traduntur. Id scribendi genus Arabum scriptores artem magnam appellant".[b]) — Saʿîd b. Fatḥûn wird auch erwähnt von Abû Muh. ʿAlî b. Aḥmed el-Ẓâhirî (s. Anmerkg. 27). Sein Bruder war Muh. b. Fatḥûn Abû ʿAbdallâh (?)[c]) (B. III. 299; Amari, Bibl. arab.-sicula, 674, nach el-Sujûṭî, Klassen der Lexikographen und Grammatiker; Maq. K. II. 133).

---

[a]) Es ist dies der allmächtige Minister unter Ḥakem II. und Hišâm II., Ibn Abî ʿÂmir el-Manṣûr, der etwa von 970—1000 das Staatsruder geleitet hat.

[b]) Ist dieser Saʿîd vielleicht der Verfasser der von Gerard von Cremona übersetzten Algebra? Vgl. Cantor, Vorlesgn. I. 688 (1. Aufl.), 756 (2. Aufl.).

[c]) Vergl. B. VIII. 98.

171. Muh. b. ʿAbdallâh, Abû Naṣr, el-Kalwâḏânî,[a]) gehörte zu den vortrefflichsten Kennern der Rechenkunst, Geometrie und Astronomie. Er lebte in Bagdad zur Zeit ʿAḍud ed-daulas des Bujiden (gest. 372) und noch einige Zeit nachher. Er schrieb: Das Buch *el-tacht*, über die indische Rechnungsweise.[b]) (Fihr. 284, Übers. 41; C. I. 433.)

172. El-Ḥasan b. Suwâr b. Bâbâ b. Bihrâm,[c]) Abû'l-Chair, bekannt unter dem Namen Ibn el-Chammâr (Sohn des Weinhändlers), geb. im Rabîʿ I. 331[d]) (942), war Christ und sehr gelehrt in der Medizin, in den philosophischen Wissenschaften, besonders in der Logik, und gewandt in der Übersetzung aus dem Syrischen ins Arabische. Er war ein Schüler von Jaḥjâ b. ʿAdî (s. Art. 127). Er schrieb: Ein Buch über die Erscheinungen der Atmosphäre, die aus dem Wasserdampf entstehen und welche sind: die Höfe, der Regenbogen und der Nebel. Aus dem Syrischen ins Arabische übersetzte er das Buch über die Meteore (wahrscheinl. des Aristoteles). (Fihr. 265, Übers. 16; Ibn Abi U. I. 322.)

173. Ḥâmid b. el-Chiḍr, Abû Maḥmûd,[e]) el-Choǧendî[f]) starb ums Jahr 390 (1000).[38] Er schrieb: Über die Konstruktion und den Gebrauch des umfassenden (allgemeinen) Instrumentes (Astrolabiums),[g]) in Oxford (I. 970). Er soll auch eine Abhandlung über rationale rechtwinklige Dreiecke und über den Satz, daſs die Summe zweier Kubikzahlen nicht wieder eine Kubikzahl sein kann, geschrieben haben (vgl. Cantor, Vorlesgn. 1. Aufl. I. 646, 2. Aufl. 708). In Kairo (205, Übers. 24) befinden sich von ihm „geometrische Aufgaben", welcher Art dieselben seien, sagt der Katalog nicht.

174. El-Ḥasan b. ʿAlî, Abû Naṣr, el-Qummî,[h]) der Astrolog,

a) C. liest „el-Koluzi", der arab. Text bei C. hat aber „Kalwâḏi", was ebenso richtig ist als „Kalwâdânî", der Name kommt von Kalwâḏâ, einem Dorfe bei Bagdad.

b) Dieses Buch wird von el-Nasawi (s. Art. 214) erwähnt und als schwierig bezeichnet (vergl. Cantor, Vorlesgn. I. 654, 1. Aufl. 717, 2. Aufl.).

c) Ibn Abi U. hat „Bihnâm" und sagt: Dies ist ein pers. Wort, zusammengesetzt aus bih = gut und nâm = Name, d. h. „der gute Name".

d) Muh. b. Muh. b. Abi Ṭâlib soll nach Ibn Abi U. behaupten, daſs el-Ḥasan b. Suwâr i. J. 330 schon gelebt habe.

e) Nicht Muh., wie Cantor (Vorlesgn. I. 646. 1. Aufl. 708, 2. Aufl.) nach Woepcke hat, beide Namen werden sehr leicht verwechselt.

f) d. h. von Choǧenda, einer Stadt in Transoxanien, das heutige Koǧend am Sir Daria (Jaxartes).

g) H. Ch. V. 120 nennt dieses Instrument das Zarqâlische Astrolabium, welchen Titel ihm jedenfalls el-Choǧendi nicht gegeben haben kann.

h) Ich habe in meiner Übers. aus dem Kat. von Kairo p. 171 unrichtig ge-lebte ums Jahr 360 (971) und wird also auch ca. 390 (1000) gestorben sein. Er schrieb: Eine Einleitung in die Astrologie, verfaſst i. J. 357, in Oxford (II. 371, 1°), Berlin (5661), Paris (2589), Kairo (361, Übers. 171).

175. Wîǧan (oder Weiǧan) b. Rustem, Abû Sahl, el-Kûhî, d. h. aus Kûh in Ṭabaristân gebürtig, ausgezeichneter Geometer und Astronom unter den Bujiden ʿAḍud ed-daula und Śaraf ed-daula. Er war der Leiter der im Auftrage des letzteren Fürsten in Bagdad i. J. 378 (988) gemachten astronomischen Beobachtungen, für welche Šaraf ed-daula eine neue Sternwarte im Garten seines Palastes hatte erbauen lassen. Besonders wurde der genaue Eintritt der Sonne in die Zeichen des Krebses und der Wage beobachtet. Unter den mitwirkenden Astronomen befanden sich noch: Aḥmed b. Muh. el-Ṣâǧânî (s. Art. 143), Abû Isḥâq Ibrâhîm b. Hilâl (s. Art. 164), Muh. b. Muh. Abû'l-Wefâ (s. Art. 167), Abû'l-Ḥasan Muh. el-Sâmirî (?) und Abû'l-Ḥasan el-Maǧrebî.[a]) Er schrieb: Das Buch über die Mittelpunkte der Kugeln,[b]) unvollendet. Das Buch der Elemente, nach demjenigen des Euklides; das 1. und 2. Buch befinden sich in Kairo (203, Übers. 22), ein Teil des 3. Buches in Berlin (5922). Das Buch über den vollkommenen Zirkel, in Leiden (1059 u. 1076),[c]) in Kairo (203, Übers. 22). Zwei Bücher über die Konstruktion des Astrolabiums mit Beweisen, in Leiden (1058). Über die Auffindung der Punkte auf den Linien,[d]) in Paris (2457, 8°). Über die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise auf gegebenen Linien, nach der Methode der Analysis ohne Synthesis, in Paris (2457, 2°). Das Buch der Zusätze zum zweiten Buche des Archimedes über die Kugel und den Cylinder, in Leiden (1001), in Paris (2467, 8°), hier am Schlusse der Naṣîr ed-dîn'schen Bearbeitung des Archimedischen Buches, im Ind. Off. (743, 6°), an allen drei Orten wahrscheinlich unvollständig. Über die Auffindung der Siebeneckseite im Kreise, im Ind. Off. (767, 4°), in Kairo (201, Übers. 21). Über die zwei Linien, in Proportion stehend (d. h. über die Konstruktion von zwei mittlern Proportionalen), im Ind. Off.

---

lesen „el-qamî", d. h. „der kleine"; el-Qummî heiſst von Qumm, einer Stadt in Persien 12 Parasangen von Qâšân entfernt, gebürtig.

a) Es ist wohl möglich, daſs dieses der noch ums Jahr 1020 am Hofe des Ziriden Moʿizz b. Bâdîs in Kairowân lebende Astronom Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Abî'l-Riǧâl (Abenragel) (s. Art. 219) gewesen ist.

b) Andere Codices haben „der Instrumente", wieder andere „der Erde".

c) Nach diesem Ms. wurde diese Abhandlung aus dem Nachlaſs Woepckes herausg. von J. Mohl in den Not. et extr. des Mss. de la bibl. impér. T. XXII. 1.

d) Der Titel ist nach Woepke (*L'algèbre d'Alkhayyâmî*, p. 55 u. 56) genauer: über das Ziehen zweier Linien aus einem gegebenen Punkte unter gewissen gegebenen Bedingungen.

(767, 5⁰), in Kairo (201, Übers. 21),[a]) vielleicht nur ein Teil seines Buches der Zusätze zum 2. Buche des Archimedes. Das Buch an die Logiker über die Aufeinanderfolge der beiden Bewegungen: zur Verteidigung Ṯâbit b. Qorras. — Aufser diesen in den Quellen genannten Schriften werden ihm noch zugeschrieben: Über die Konstruktion eines gleichseitigen Fünfecks in ein gegebenes Quadrat, in Kairo (201, Übers. 20). Über die Ausmessung des Paraboloids, ibid. (201 u. 204, Übers. 20 u. 23). Verschiedene geometrische Aufgaben (ohne nähere Bezeichnung), ibid. (201 u. 205, Übers. 21 u. 24). (Fihr. 283, Übers. 40; C. I. 441 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 329, Übers. 217.)

176. Maslama b. Aḥmed el-Maǧrîṭî, Abû'l-Qâsim, aus Cordova,[b]) lebte zur Zeit Ḥakems II. und Hišâms II. Der Qâḍî Ṣâ'id sagt in seinem Buche über die Klassen der Völker, dafs er das Haupt der andalusischen Mathematiker zu seiner Zeit war und gelehrter als alle seine Vorgänger in der Wissenschaft der Sphären und der Bewegungen der Gestirne. Er war besonders gewandt in der Beobachtung und in der Erklärung des Almagestes des Ptolemäus. Er schrieb ein schönes Buch über das Ganze der Wissenschaft von den Zahlen, das unter dem Namen el-Mo'âmalât (d. h. das kaufmännische oder das Geschäfts-Rechnen) bekannt war; ferner einen Auszug aus den Tafeln el-Battânîs über die Gleichungen der Planeten (vergl. Art. 89). Er veröffentlichte auch eine neue Ausgabe der Tafeln des Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî, indem er die persische Zeitrechnung derselben in die arabische umwandelte; er bestimmte darin die mittlern Positionen der Sterne beim Beginn der Aera der Hiǧra und vermehrte sie (d. h. die Tafeln des Muh.) um weitere schöne Tafeln, in denen er aber die Fehler des Muh. nicht beachtete und stehen liefs[c]); hierzu bemerkt der Qâḍî Ṣâ'id, er habe in seinem Buche „über die Verbesserung (der Berechnung) der Bewegungen der Gestirne und die Belehrung über die Irrtümer der Astronomen" auf diese Fehler aufmerksam gemacht. — Von Maslama b. Ahmed sind noch vorhanden: Über Konstruktion und Gebrauch des Astrolabiums, im Escurial (967), in lateinischer Übersetzung durch Rudolf von Brügge in Oxford (Bibl. Cotton. p. 104). Ausgabe (Bearbeitung einzelner Teile) der Abhandlungen der lautern Brüder, in Paris (2306 u. 2307), im Escurial (923), in Oxford (I. 904 u. 989). Zwei magisch-alchymistische Werke: *Rutbet el-ḥakîm* (Würde, Rang des Weisen)

[a]) Hier ist zu diesem Titel noch hinzugefügt: und über die Teilung des Winkels in drei gleiche Teile.

[b]) d. h. er wohnte in Cordova und war, aus dem Beinamen zu schliefsen, wahrscheinlich aus Madrid gebürtig.

[c]) C. liest aus seinem Texte gerade das Gegenteil der Lesart des Ibn Abi U. heraus, der ich gefolgt bin.

in Paris (2612 u. 13) und in Kairo (381, Übers. 176); *ġâjet el-ḥakîm* (das Endziel des Weisen), eine weitere Ausführung des ersten Werkes,[a]) im Escurial (942, 2⁰), in Oxford (I. 990), in Wien (1491).[39] Nur in latein. Übersetzung durch Rudolf von Brügge ist vorhanden eine Bearbeitung (Kommentar) des Planisphäriums des Ptolemäus, gedruckt in einer Sammlung astronomischer Schriften in Basel 1536, unter dem Titel: Sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus: ad totius mundi fabricationis cognitionem fundamenta; ebenso Venedig 1558. Auch die Neuausgabe der Tafeln des Muh. b. Mûsâ soll von Rudolf von Brügge übersetzt worden sein.

El-Maǵrîṭî starb i. J. 398 (1007/8)[b]) vor Beginn des Bürgerkrieges. Er hatte berühmte Schüler, zu den bedeutendsten gehörten: Ibn el-Samḥ, Ibn el-Ṣaffâr, el-Zahrâwî, el-Karmânî und ʿOmar b. Aḥmed b. Chaldûn (s. diese Art.). (Ibn Abi U. II. 39; C. I. 378 n. Ibn el-Q.; B. II. 564; Maq. K. II. 134.)

177. ʿÎsâ b. Isḥâq b. Zurʿa b. Marqus, Abû ʿAlî, bekannt unter dem Namen Ibn Zurʿa, ein jakobitischer Christ, berühmter Logiker und Übersetzer. Er schrieb: Einen Auszug aus dem Buche des Aristoteles (?)[c]) über die bewohnte Erde. Über die Bedeutungen (oder über die Ideen) eines Teils des dritten Buches der Schrift des Aristoteles über den Himmel. Über die Ursache des Leuchtens der Sterne, obgleich sie und die sie tragenden Sphären aus einer einzigen einfachen Substanz bestehen. Er wurde geboren zu Bagdad i. J. 331 (942/43) und starb daselbst im Šaʿbân 398 (1008). (Fihr. 264, Übers. 15; Ibn Abi U. I. 235; Abulfar. 338, Übers. 222.)

178. ʿAlî b. Abî Saʿîd ʿAbderraḥmân[d]) b. Aḥmed b. Jûnis (oder Jûnos), Abû'l-Ḥasan, el-Ṣadafî[e]), allgemein bekannt unter dem Namen Ibn Jûnis, ist neben el-Battânî wohl der bedeutendste Astronom der Araber. Sein Vater Abû Saʿîd ʿAbderraḥmân b. Aḥmed b. Jûnis, bei den arabischen Gelehrten auch unter dem Namen Ibn Jûnis bekannt, war ein bedeutender Historiker und Traditionist und starb in Kairo i. J. 347 (958/59). Das Geburtsjahr des Astronomen Ibn Jûnis ist nicht bekannt. Er war in ver-

---

[a]) Vergl. Ibn Chaldûns Prolegomena, texte arabe p. 209, traduct. p. 227, in Not. et extr. T. 18 u. 21.

[b]) B. II. 564 hat 395, fügt dann aber hinzu: „Ibn Ḥaijân sagt im J. 397 beim Ausbruch des Bürgerkrieges".

[c]) Sollte wohl heifsen „Theodosius" (de habitationibus), oder dann könnte auch die Geographie des Ptolemäus gemeint sein.

[d]) Brockelmann, Gesch. d. arab. Litt. I. Bd. 224 hat unrichtig: Abî Saʿîd b. ʿAbderraḥmân.

[e]) d. h. zum Stamme Ṣadaf, einem Zweige des Stammes Ḥimjar, gehörend.

schiedenen Wissenschaften bewandert, auch ein guter Dichter, doch war sein Hauptstudium die Astronomie und Astrologie, in welch' letzterer er äufserst geschickt und glücklich gewesen sein soll. Über sein sonderbares Wesen, das sich besonders in der Kleidung geäufsert haben soll, führt Ibn Ch. zwei Stellen eines zeitgenössischen Autors an. Im Auftrage des Fatimiden el-ʿAzîz begann Ibn Jûnis (wohl ca. 380) die Abfassung seiner astronomischen Tafeln, die dann unter dessen Sohn el-Ḥâkim kurz vor Ibn Jûnis' Tode (also ca. 398) beendigt wurden und *el-zîǧ el-kebîr el-ḥâkimî* (die grofsen ḥâkimitischen Tafeln) genannt wurden. Caussin schliefst aus zwei Stellen H. Ch.'s (III. 558 u. 570), dafs dieselben in zwei Ausgaben, die eine in 4 Bänden unter el-ʿAzîz, die andere in 2 Bänden unter el-Ḥâkim erschienen seien, was aber sehr zweifelhaft ist.[a]) Sie wurden zu ihrer Zeit als die umfassendsten und genauesten Tafeln betrachtet und genossen eines grofsen Ansehens. Ibn Jûnis starb im Šauwâl d. J. 399 (Juni 1009).[b]) (Ibn Ch. I. 375, Übers. II. 365; Abulfid. II. 619; S. I. 311.)

Leider sind seine Tafeln in ihrer Gesamtheit nicht erhalten, Teile davon sind noch vorhanden: in Leiden (1057), nach Caussin etwa die Hälfte des Werkes; in Oxford (II. 298) der 3. und 4. Teil, also auch etwa die Hälfte; im Escurial (919, 5^0) der 2. Teil; in Paris (2495) eine Abschrift des Ms. von Leiden, und ebenda (2496, 1^0 u. 2531, 4^0) einige Fragmente aus den Tafeln, ebenso solche in Berlin (5752) und in Kairo (233, 242 u. 265, Übers. 165, 166 u. 168). Auch die Azimuttafeln,[c]) die sich in Berlin (5753) und in Kairo (242, Übers. 166) befinden, mögen aus seinen grofsen Tafeln entnommen sein. Caussin hat im VII. Bd. der Notices et extr. p. 16—240 einige Kapitel aus dem Leidener Ms. veröffentlicht und übersetzt, welche besonders Beobachtungen von Finsternissen und Konjunktionen von ältern Astronomen und Ibn Jûnis selbst enthalten und von historischem Werte sind. In Gotha (1401) befinden sich Erläuterungen zum 1. und 9. Kap. (nicht 3., wie das Ms. irrtümlich hat) des 1. Teils, und ebenda (1459) ein astrologisches Werk, das sonst nirgends angeführt wird, betitelt: *bulûǧ el-umnîje* (die Erreichung des Wunsches), über das, was zusammenhängt mit dem Siriusaufgang. In Mailand (Ambr. 281, e) befindet sich eine Abhandlung über die Methode, den Meridian zu bestimmen, von Ibn Jûnis.

179. Muh. b. Ahmed b. ʿObeidallâh b. Saʿîd el-Omawî (d. h. der

---

[a]) Alle älteren arabischen Quellen führen vier Bände an.

[b]) Brockelmann (l. c.) hat 1008, wie irrtümlich auch andere Autoren, indem sie den Monat Šauwâl nicht berücksichtigt haben; Caussin aber nennt den Monat und schreibt doch 1008.

[c]) Brockelmann (l. c.) übersetzt unrichtig: Zenittabellen; *el-semt* (ohne weiteren Zusatz) heifst „das Azimut", *semt el-ra's* ist „der Zenit".

Omeijade) Abû ʿAbdallâh, aus Cordova, bekannt unter dem Namen Ibn el-ʿAṭṭâr (d. h. der Sohn des Droguisten), war ein Schüler von Abû ʿÎsâ el-Leiṯî, Abû Bekr b. el-Qûṭîja und andern. Er reiste nach dem Osten und hörte dort die Vorlesungen einer grofsen Zahl von Gelehrten. Er war ein scharfsinniger Rechtsgelehrter, auch bewandert in vielen andern Disziplinen, so in der Grammatik, Poetik und Rechenkunst. Er hatte eine grofse Zahl von Schülern. Er wurde geboren im J. 330 (941/42) und starb im Dû'l-Ḥiǧǧe 399 (1009). (B. VIII. 81: Fragmente zu Ibn Baškuwâls el-Ṣile.)

180. ʿÎsâ b. Jaḥjâ el-Masîḥî (der Christ), Abû Sahl, el-Ǧorǧânî, nicht zu verwechseln mit dem Übersetzer ʿÎsâ b. Jaḥjâ b. Ibrâhîm, der zur Zeit Ḥoneins lebte, war ein ausgezeichneter Arzt und gewandt in der arabischen Sprache. Es sagt der Šeich el-Imâm el-Ḥakîm Muhaḏḏab ed-dîn ʿAbderraḥîm b. ʿAlî, dafs er keinen der frühern und spätern christlichen Ärzte kenne, der klarer in der Auslegung und ausgezeichneter im sprachlichen Ausdruck war als Abû Sahl el-Masîḥî. Er war der Lehrer Ibn Sînâs in der Medizin und starb schon im Alter von 40 Jahren ca. 400 (1009/10).[a]) Er schrieb einen Auszug (Kompendium) aus dem Almagest. (Ibn Abi U. I. 327.)

181. Muh. b. ʿAbdelʿazîz el-Hâšimî lebte vor el-Bîrûnî (gest. 440), denn dieser zitiert ihn in seiner Chronol. of anc. nat. (p. 315) als Verfasser von astronomischen Tafeln (Kanon), genannt *el-kâmil* (die vollkommenen). Er schrieb ferner eine Abhandlung über die Quadratwurzelausziehung, betitelt: *el-muwaḍḍiḥ* (die erklärende), über die irrationalen Wurzeln, gerichtet an Ǧaʿfar b. el-Muktafî billâh (s. Art. 142), der 377 (987) gestorben ist, noch vorhanden in Oxford (I. 940, 2⁰) und Paris (2457, 16⁰); übersetzt wurde diese Abhandlung von Woepcke und publiziert im Journ. asiat. 1851 (cah. de Sept.-Oct.).

182. Jûsuf b. Hârûn el-Kindî, Abû ʿOmar, bekannt unter dem Namen el-Ramâdî (d. h. von Ramâda),[b]) einer der bedeutendsten Dichter und Gelehrten Spaniens, lebte ums Jahr 970 in Cordova, und würde so, was die Zeit betrifft, am besten für den Josephus sapiens des Gerbert gehalten werden können. Aber es wird nicht berichtet, dafs er sich mit mathematischen Studien beschäftigt habe. Eines seiner bedeutendsten Werke ist das Buch der Vögel (in poetischer Form). Er starb i. J. 403 (1012/13). (B. III. 478; Ibn Ch. II. 410, Übers. IV. 569.)

---

[a]) Er war ein Zeitgenosse des Melik el-ʿÂdil Chowârezmšâh Abû'l-ʿAbbâs Mâmûn, gest. 406 oder 407.

[b]) Jâqût kennt verschiedene Orte unter diesem Namen, worunter auch einen in Maǵreb; ob er darunter Marokko oder allgemein den Westen verstehe, kann ich nicht entscheiden.

183. Muh. b. el-Hosein, Abû Ǧa'far lebte etwas nach Abû Mahmûd el-Choǧendî (s. Art. 173) und schrieb eine Abhandlung über die Bildung (Auffindung) rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten, in Paris (2457,20⁰), an Abû Muh. 'Abdallâh b. 'Alî, den Rechner, gerichtet, in welcher er die gleichartigen Untersuchungen Choǧendîs als mangelhaft bezeichnet.[a]) In Algier (1446, 10⁰) befindet sich eine Schrift „über die Dreiteilung des Winkels, entnommen dem Buche der Kegelschnitte in der Verbesserung des Abû Ǧa'far Muh. b. el-Hosein el-Hârit“, der sehr wahrscheinlich mit unserm Autor identisch ist.

184. Abû'l-Qâsim el-Qaṣrî (el-Qaṣrânî?), bedeutender Astronom und Astrolog unter den Bujiden, vielleicht identisch mit dem im Fihr. (284, Übers. 41) und bei C. I. 419 nur unter dem Namen el-Qaṣrânî genannten Astronomen (vergl. Art. 58 und 133). Er starb in Bagdad im Muharrem d. J. 413 (1022). (C. I. 409 n. Ibn el-Q.)

185. Ahmed b. Muh. b. 'Abdelǧalîl, Abû Sa'îd, el-Siǧzî,[b]) lebte etwa von 340—415 (951—1024). Es existieren nämlich von ihm eigenhändige Manuskripte (Abschriften von Arbeiten anderer Mathematiker) in dem Sammelband Nr. 2457 der Pariser Bibliothek, datiert aus dem Jahre 358; wir müssen annehmen, dafs er diese als ganz junger Mann, als Studierender der Mathematik, geschrieben habe, denn er war noch ein Zeitgenosse von el-Bîrûnî (gest. 440), was durch eine Stelle in dessen Chronol. of anc. nat. p. 52 bezeugt wird. Er war einer der bedeutendsten Geometer der Araber und schrieb: 1. Über die Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile und die Konstruktion des Siebenecks in den Kreis, in Kairo (203, Übers. 23), in Leiden (996).[c]) 2. Abhandlung über die Auflösung von zehn Aufgaben, die ihm ein Geometer von Šîrâz vorgelegt hatte, in Paris (2457, 31⁰). 3. Über die Ausmessung der Kugeln durch die Kugeln (?), in Paris (2457, 46⁰). 4. Über die in gegebenen Kreisen durch gegebene Punkte gezogenen Linien, in Paris (2458, 1⁰). 5. Richtigstellung einiger Beweise von Sätzen des Euklides, im Ind. Off. (734, 14⁰); hiermit identisch sind vielleicht die beiden Briefe, der eine gerichtet an el-Melik el-'Âdil Abû Ǧa'far Ahmed b. Muh. über die Lösung der Aufgabe der Teilung einer Geraden in zwei gleiche Teile, in Paris (2457, 10⁰), der andere an Abû 'Alî Nazîf b. Jumn (s. Art. 158) den Arzt, über die Konstruktion eines spitzwinkligen Drei-

[a]) Vergl. Cantor, Vorlesgn. I. 646 (1. Aufl. 708, 2. Aufl.). Diese Abhandlung wurde in franz. Übersetzung veröffentlicht von Woepcke in den Atti dell' acad. pont. de' Nuovi Lincei, T. XIV. 1861.

[b]) Abkürzung für el-Siǧistânî; er wird auch mitunter unrichtig el-Sinǧarî genannt.

[c]) Hier steht von der Konstruktion des Siebenecks nichts.

ecks aus zwei ungleichen Geraden (?), in Paris (2457, 27°). 6. Die Ergebnisse aus geometrischen Sätzen (wörtlich „Regeln"), in Paris (2458, 2°). 7. Ein Brief an Abû'l-Ḥosein Muh. b. ʿAbdelğalîl[a]) über die Schnitte von Rotations-Paraboloiden und Hyperboloiden, in Paris (2457, 28°). 8. Ein Brief als Antwort auf eine an ihn gerichtete Frage über die Erklärung von Sätzen aus den Lemmata des Archimedes, in Paris (2458, 3°). Der Inhalt der Abhandlungen 4, 6, und 8, d. h. die einzelnen Sätze ohne Beweise, wurde von L. A. Sédillot in den Not. et extr. T. XIII. p. 129—150 veröffentlicht. 9. Über die Beschreibung (auch Eigenschaft) der Kegelschnitte, in Leiden (995). 10. Über das Hervorgehen der elf verschiedenen Fälle der ebenen Transversalenfigur aus einer einzigen Betrachtung, in Leiden (997). 11. Über das Verhältnis der Hyperbel zu ihren Asymptoten, in Leiden (998), wahrscheinlich nur ein Teil von 9. 12. Über den Umlauf der Geburtsjahre,[b]) in Oxford (I. 948). 13. Das Buch der Beweise in der Astrologie, im Brit. Mus. (415, 8°). 14. Die Regeln, deren sich die Astrologen für die Auffindung der Urteile bedienen, im Brit. Mus. (415, 9°). — H. Ch. führt (I. 198) an, er habe auch „über die Tagewählerei" und (III. 366) „über das Astrolabium" geschrieben. El-Siğzî selbst zitiert in der Abhandlung 6 seine Arbeit, betitelt „geometrische Zusätze (Glossen)".

186. Manṣûr b. ʿAlî b. ʿIrâq, Abû Naṣr, ein Zeitgenosse des vorhergehenden Gelehrten und Lehrer el-Bîrûnîs nach dessen eigenem Zeugnis (Chronol. of anc. nat. p. 167), ebenfalls in den mathematischen Wissenschaften sehr bewandert. Er soll den sphärischen Sinussatz zuerst zur allgemeinen Anwendung gebracht haben an Stelle der Transversalenfigur, was ihm allerdings von Abû'l-Wefâ und el-Choğendî (s. Art. 167 und 173) streitig gemacht wurde.[c]) Er schrieb: 1. Über die Konstruktion des Astrolabiums auf künstlichem (?) Wege, in Berlin (5797). 2. Über zwei Theoreme aus der sphärischen Trigonometrie, erhalten in einer Abschrift aus einem Briefe el-Bîrûnîs an Abû Saʿîd el-Siğzî, in Leiden (1007); diese handeln sehr wahrscheinlich über den oben angeführten Sinussatz. 3. Eine Abhandlung (Brief) an el-Bîrûnî gerichtet, über eine zweifelhafte (schwierige) Stelle im 13. Buche des Euklides, in Berlin (5925). 4. Der königliche Almagest *(el-meǧisṭî el-šâhî)*, wird erwähnt von Naṣîr ed-dîn in seinem *šakl el-qaṭṭâʿ* (Ausgabe v. Caratheodory, p. 125, Übers. 162) und im Cat. of the Ind. Off., wo sich (734, 2°) eine ganz kurze Abhandlung befindet, betitelt: „Aufsuchung der Entfernung zwischen den beiden Mittelpunkten,

---

[a]) Man könnte hierin seinen Vater vermuten.

[b]) H. Ch. I. 171 hat „Jahre der Welt".

[c]) Vergl. meine Abhandlung „Zur Geschichte der Trigonometrie" in der Bibl. math. 7 (1893), p. 1—8.

aus dem königlichen Almagest des Abû Naṣr b. ʿIrâq". 5. Eine Abhandlung (Brief) an el-Bîrûnî gerichtet, betitelt: Tafel der Minuten,[a]) in Oxford (I. 940, 6°). 6. Eine verbesserte Ausgabe der Sphaerica des Menelaus, i. J. 398 (1007/08) herausgegeben, in Leiden (989).

187. El-ʿAlâ b. Sahl,[b]) Abû Saʿd wird in der Abhandlung des Ibn el-Haiṯam „über das Licht" (Z. D. M. G. 36. p. 223) als Verfasser einer Schrift über denselben Gegenstand genannt.[c]) Über sein Leben habe ich keine Angaben gefunden, da er aber el-Kûhî kommentiert hat und von Ibn el-Haiṯam zitiert wird, so mag er ein Zeitgenosse der vorigen beiden (Art. 185 und 186) Mathematiker gewesen sein. Er schrieb ferner: Über die Eigenschaften der drei Kegelschnitte, in Paris (2457, 29°). Einen Kommentar zu der Schrift „über die Konstruktion des Astrolabiums" von Wîǧan b. Rustem el-Kûhî, in Leiden (1058).[d]) Das Buch der Synthesis zu den von Abû Saʿd el-ʿAlâ b. Sahl gelösten Aufgaben, in Kairo (204, Übers. 23); ob diese Schrift von ihm selbst oder von einem andern verfaſst sei, können wir nicht entscheiden.

188. Aḥmed b. Muh. b. Aḥmed, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ṭoneizî, aus Cordova, wohnhaft in Sevilla, ein Kenner der Litteratur und Erbteilung. Von ihm erwähnt el-Chaulânî,[40] daſs er sehr bewandert und geschickt in der Rechenkunst war. Er schrieb auch vortreffliche Werke über die Erbteilung und andere Wissenszweige. Ums Jahr 413 siedelte er nach Almeria über und starb dort 416 oder 417 (1025/26) im Alter von 76 Jahren. (B. I. 36.)

189. Ǧaʿfar b. Mufarraǧ b. ʿAbdallâh el-Ḥadramî, Abû Aḥmed, aus Sevilla, war ein ausgezeichneter Mediziner und vortrefflicher Kenner der Rechenkunst; zu seinen Lehrern in dieser gehörte unter andern Maslama el-Maǧrîṭî, die Medizin hatte er hauptsächlich unter seinem Vater studiert. Er wird auch zitiert von Ibn Chazraǧ,[e]) der seine Geburt ins Jahr 358 (968/69) versetzt, sein Todesjahr aber nicht angiebt. (B. I. 130.)

190. ʿAlî b. Soleimân el-Zahrâwî, Abû'l-Ḥasan,[41] war gelehrt in Arithmetik und Geometrie und bewandert in der Medizin. Er schrieb

---

a) Uri fügt in Klammern hinzu: de tabulis astronomicis et radiorum projectione.

b) In der Abhdlg. von Ibn el-Haiṯam heiſst er el-ʿAlâ b. Soheil.

c) Dieselbe befindet sich nach E. Wiedemann (Z. D. M. G. Bd. 38, p. 145) als Bestandteil einer gröſsern Abhandlung (Kommentar) über die Optik des Ptolemäus in der Bibl. des Oriental. Institutes zu St. Petersburg (Kat. v. Rosen, Cod. 192, Nr. 132).

d) Hier heiſst er Aʿlâ statt ʿAlâ.

e) Wahrscheinlich Abû Muh. ʿAbderraḥmân b. ʿAbdelmunʿim el-Chazraǧî, Koranerkärer und Traditionist, gest. 564 (?) (1168/69). Vergl. H. Ch. IV. 331.

ein vortreffliches Buch über das Geschäftsrechnen *(mo'âmalât)* (in beweisender Form), es wird auch „das Buch der Grundlagen (Stützen)" genannt. Den gröfsten Teil seines Wissens in den mathematischen Disziplinen verdankte er seinem Lehrer Abû'l-Qâsim el-Maǧrîṭî, dessen steter Begleiter er lange Zeit war. (Ibn Abi U. II. 40; B. I. 406 und III. 410; Maq. K. II. 232.)

191. Alî b. Soleimân war ein vortrefflicher Arzt, bewandert in Philosophie und Mathematik, einzig in der Kenntnis der Astrologie. Er lebte zur Zeit der Fatimiden el-'Azîz billâh und seines Sohnes el-Ḥâkim in Kairo (365—411, 976—1020) und starb nach dem letztern. Er schrieb: Abhandlung darüber, dafs die Möglichkeit der Körperteilung nicht aufhöre, und dafs man nicht zu etwas gelangen werde, das nicht mehr teilbar sei. Über die Aufzählung der schwierigen Stellen des Aristotelischen Buches über die Gesichtswahrnehmungen[a]) und ebenso der schwierigen Stellen (des Buches) über die Kometen.[b]) (Ibn Abi U. II. 90.)

192. Kûšjâr b. Lebbân b. Bâšahrî el-Ǧîlî,[c]) Abû'l-Ḥasan, ein bedeutender Mathematiker und Astronom, lebte ca. 360—420 (971—1029), denn 'Alî b. Ahmed el-Nasawî (s. Art. 214), der zur Zeit des Bujiden Meǧd ed-daula (gest. 420) und seines Nachfolgers[d]) schrieb, zitiert sein Rechenbuch[e]) und soll nach dem Ṣiwân el-ḥikme (Cod. Leid. 133, Gol. p. 75) auch sein Schüler gewesen sein. Übrigens haben wir für die Lebenszeit Kûšjârs noch andere Anhaltspunkte: Er wird in dem *šakl el-qaṭṭâ'* des Naṣîr ed-dîn (p. 125, Übers. 162) von el-Bîrûnî als derjenige bezeichnet, der der sog. „ersetzenden Figur" (d. h. dem sphärischen Sinussatz) zuerst diesen Namen beigelegt habe; ferner hat nach demselben el-Bîrûnî Abû'l-Wefâ zuerst die Tangente in die Trigonometrie eingeführt, über diese hat aber Kûšjâr in seinen astronomischen Tafeln mehrere Kapitel (s. Katal. v. Berlin, V. p. 204), also wird Kûšjâr seine wichtigsten Arbeiten nach Abû'l-Wefâ (gest. 387) und vor el-Bîrûnî (gest. 440) geschrieben haben. Endlich führt Kûšjâr in seinen Tafeln (s. Katal. v. Berlin, V. 206) die Arbeiten Ibn el-A'lams an, der 375 gestorben ist, Ibn Jûnis (gest. 399) zitiert die

---

[a]) Wahrscheinlich das unter den Aristotelischen Werken genannte Buch „über den Spiegel".

[b]) Vielleicht das dem Ptolemäus zugeschriebene Buch über diesen Gegenstand.

[c]) d. h. von Ǧîlân in Persien stammend.

[d]) Er nennt ihn in der Vorrede zu seinem Buche über das indische Rechnen Šaraf el-mulûk, ob dieses 'Alâ ed-daula der Bujide (gest. 433), oder ein anderer gewesen sei, können wir nicht entscheiden.

[e]) Vergl. Woepcke im Journ. asiat. 1863 (I.) p. 496—500 und Catal. Cod. oriental. bibl. acad. Lugd.-Bat. T. III. p. 68.

Tafeln Ibn el-Aʿlams, diejenigen Kûšjârs aber nicht, was wohl beweisen mag, dafs die letztern nach 399 verfafst worden sind.[a]) Er schrieb: Astronomische Tafeln, genannt die umfassenden und gereiften (*el-ǵâmiʿ we'l-bâliǵ*), (nach H. Ch. in zwei verschiedenen Ausgaben, was aber unrichtig zu sein scheint), in 4 Abschnitte eingeteilt, in Leiden (1054), in Berlin (5751), doch nur die zwei ersten Abschnitte und auch diese nicht ganz vollständig, in Kairo (317, Übers. 171), nur der 1. Abschnitt. Eine persische Übersetzung dieser Tafeln (doch auch nur des 1. Abschnittes) von Muh. b. ʿOmar b. Abî Ṭâlib el-Tebrîzî aus dem Jahre 483 (1090/91) befindet sich in Leiden (1056). — Einleitung in die Kunst der Astrologie (oder auch Zusammenstellung der Prinzipien d. Kunst d. Astrol.), ebenfalls in 4 Abschnitten, im Escurial (972, 1°), in Berlin (5884), im Brit. Mus. (415, 1°), in Kairo (268 u. 369, Übers. 168 u. 175). Ein Buch über das Astrolabium, in Paris (2487, 1°), im Brit. Mus. (415, 11°), in Kairo (298, Übers. 170). — Abhandlung über die Rechenkunst (von el-Nasawî zitiert; vergl. auch H. Ch. VI. 51), soll noch hebräisch existieren (vergl. Steinschneider, Z. D. M. G. 24, p. 375). — Ibn el-Q. (C. I. 348) schreibt ihm ein Kompendium des Almagestes des Ptolemäus zu.[b])

193. Muh. b. el-Ḥasan (auch el-Ḥosein), Abû Bekr, el-Karchî,[c]) lebte zur Zeit von Abû Ġâlib Muh. b. Chalaf, Fachr el-mulk, der nacheinander Wezir von Behâ ed-daula Abû Naṣr und seinem Sohne Sulṭân ed-daula Abû Šoǵâʿ war, und im Rabîʿ I. 407 (Sept. 1016) hingerichtet wurde auf Befehl des Sulṭân ed-daula, bei dem er in Ungnade gefallen war. El-Karchî mag also etwa um d. J. 420 (1029) gestorben sein. Er war einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit und schrieb mehrere Abhandlungen, von denen noch zwei vorhanden sind, die eine über Arithmetik, betitelt: *el-kâfî fî'l-ḥisâb* (das Genügende über die Rechenkunst), die zweite, eine Fortsetzung der ersten bildend, über die Algebra, betitelt: *el-Fachrî*, beide im Auftrage des Wezirs Fachr el-Mulk verfafst. Die Arithmetik befindet sich einzig noch in Gotha (1474) und wurde in deutscher Übersetzung herausgegeben von A. Hochheim, in 3 Heften, Halle 1878—80. Die Algebra befindet sich in Paris (2459), in Kairo (212, Übers. 45) und

a) Dafs man sich in solchen Fragen nicht auf H. Ch. verlassen darf, wie es Steinschneider und Brockelmann thun, beweist die Thatsache, dafs H. Ch. (V. 475) den Kûšjâr im J. 357 seine Astrologie und (III. 570) im J. 459 seine Tafeln schreiben läfst.

b) Dafs der Fihr. ihn nicht unter den Bearbeitern des Almagestes nennt, spricht auch dafür, dafs er nach 377 geschrieben hat.

c) d. h. von Karch, einer Vorstadt Bagdads. De Slane bemerkt zu dem Art. „Fachr el-mulk, der Wezir" (Ibn Ch. Übers. III. 280), dafs el-Karchî selbst den Beinamen Fachr ed-dîn gehabt habe, in der That hat der Katal. von Kairo diesen Beinamen auch.

wahrscheinlich in Oxford (I. 986, 3⁰).[a]) Woepcke hat nach dem Pariser Ms. den *Fachrî* (auszugsweise) herausgegeben, unter dem Titel: Extrait du Fakhrî, Paris, 1853. — In der Vorrede zur Arithmetik erwähnt el-Karchî, es habe ihn zur Abfassung eines solchen Werkes der erlauchte Gelehrte Abû'l-Ḥasan Aḥmed b. ʿAlî el-Bustî eingeladen. Dieser Name könnte vielleicht durch fehlerhaftes Abschreiben aus Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Aḥmed el-Nasawî entstanden sein, die Verschiedenheit ihrer Richtungen als Arithmetiker[b]) würde diesem meiner Ansicht nach nicht entgegenstehen. (Ibn Ch. II. 65, Übers. III. 279.)

194. Aṣbaġ b. Muh. b. el-Samḥ, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn el-Samḥ, der Geometer aus Granada. Der Qâḍî Ṣâʿid berichtet, dafs Ibn el-Samḥ ein vorzüglicher Gelehrter in Rechenkunst und Geometrie war, ebenfalls hervorragend in der Wissenschaft der Sphären und der Bewegung der Gestirne, daneben war er auch geschickt in der Medizin. Er verfafste mehrere sehr gute Werke, unter andern eine Einleitung in die Geometrie zur Erklärung des Euklidischen Werkes, dann die Vorteile (Früchte) der Zahlen, auch bekannt unter dem Titel: *kitâb el-moʿâmalât* (das Buch über das Geschäftsrechnen), ferner über die Natur der Zahlen, dann das grofse Buch über die Geometrie, die er nach geradlinigen und krummlinigen Gebilden einteilte; ferner zwei Bücher über das Astrolabium, das eine über seine Einrichtung und Konstruktion in 2 Abschnitten, das andere über seinen Gebrauch und seine sämtlichen Nutzanwendungen in 130 Kapiteln, das letztere ist noch vorhanden im Brit. Mus. (405, 2⁰). Sein bedeutendstes Werk aber waren seine astronomischen Tafeln nach der Methode des Sindhind, in zwei Teilen, der eine enthielt die Tafeln, der andere die Abhandlungen (Erläuterungen) zu denselben. Aufser diesen Werken werden von H. Ch. noch erwähnt: V. 20, *el-kâfî fî'l-ḥisâb el-hawâ'î* (das Genügende über das Luftrechnen, d. h. Kopfrechnen), vielleicht in Berlin (6010), wo kein Verfasser genannt ist, und V. 27, *el-kâmil fî'l-ḥisâb el-hawâ'î* (das Ganze, Vollkommene über das Kopfrechnen). — Es sagt ferner der Qâḍî Ṣâʿid: Abû Merwân Soleimân b. Muh. b. ʿÎsâ b. el-Nâšî, der Geometer, erzählte mir, dafs sein Lehrer Ibn el-Samḥ in Granada am 18. Raġeb 426 (1035) im Alter von 56 Sonnenjahren gestorben sei. (Ibn Abi U. II. 39; Maq. K. II. 232.)[42]

195. ʿAbdallâh b. Saʿîd b. ʿAbdallâh el-Omawî, Abû Muh., bekannt unter dem Namen Ibn el-Šiqâq, aus Cordova, einer der gröfsten Muftî dieser Stadt, war auch ein sehr scharfsinniger Arithmetiker; er starb im Ramaḍân 426 (1035) im Alter von 81 Jahren. (B. I. 261.)

---

[a]) Der Katalog hat einfach: Buch über die Algebra von Abû Bekr el-Karǧî (sic).

[b]) Vergl. Cantor, Vorlesgn. I. 655—57 (I. Aufl.) 718—20 (II. Aufl.).

196. Ahmed b. ʿAbdallâh b. ʿOmar el-Ġâfiqî, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ṣaffâr[a]) (Sohn des Kupferschmieds), aus Cordova, war sehr gelehrt in der Rechenkunst, Geometrie und Astronomie und erteilte Unterricht in diesen Disziplinen. Er verfaſste ein Kompendium astronomischer Tafeln nach Art des Sindhind und ein Buch über den Gebrauch des Astrolabiums, kurz und leichtverständlich, noch vorhanden im Brit. Mus. (408, 8⁰ und 976) und in Kairo (288); eine noch kürzere und berichtigte Ausgabe dieser Abhandlung von ʿAbdallâh b. Muh. b. Saʿd el-Toǧîbî befindet sich in Berlin (5805)[b]) und im Brit. Mus. (407, 5⁰), hier aber unvollständig. C. II. 140 spricht von einem arithmetischen Werke, das er verfaſst habe; davon steht in dem mir vorliegenden arabischen Text des Ibn Baškuwâl, aus dem auch C. geschöpft hat, nichts. Er war ein Schüler des Maslama b. Ahmed el-Maǧrîṭî; er zog aus Cordova weg, nachdem der erste Teil des Bürgerkrieges vorüber war und lieſs sich in Denia nieder; hier starb er Ende des Jahres 426 (1035). Er hinterlieſs in Cordova eine groſse Zahl von Schülern; er hatte auch einen Bruder Muh., der sehr berühmt war als Verfertiger von Astrolabien, wie vor ihm kein anderer in Spanien. (B. I. 45; Ibn Abi U. II. 40; Maq. K. II. 232; C. II. 140.)

197. Chalaf b. Ḥosein b. Merwân b. Ḥaijân, Abû'l-Qâsim, aus Cordova, der Vater des Historikers Abû Merwân Ḥaijân b. Chalaf,[c]) studierte den Koran unter Abû'l-Hasan el-Anṭâkî. Es wird von ihm erzählt, daſs er eine sehr schöne Stimme hatte und deshalb von el-Anṭâkî beim Koranlesen sehr bevorzugt wurde. Er war Geheimschreiber des Ibn Abî ʿÂmir und begleitete ihn auf seinen Kriegszügen; er war auch sehr bewandert in der Rechenkunst und Geometrie und geschätzt in Bezug auf seine Methode. Sein Sohn Abû Merwân erwähnt ihn in seinen Geschichten und giebt seinen Tod auf das Jahr 427 (1035/36), sein Alter auf 88 Jahre an; die letzten 11 Jahre war er beinahe blind und verlieſs das Haus nie. (B. V. 46.)

198. El-Ḥosein b. ʿAbdallâh b. el-Ḥosein (auch Ḥasan) b. ʿAlî, Abû ʿAlî, el-Šeich el-Raʾîs, Ibn Sînâ, einer der gröſsten Ärzte und Philosophen der Araber, der Avicenna des Abendlandes. Er wurde geboren im Ṣafar 370[d]) (980) in Efšene bei Charmîṭan (oder Charmeitan), einem Flecken im Gebiete von Bochârâ, wo sein Vater, der ursprünglich aus Balch stammte,

---

a) So in den zitierten Quellen, in den vorhandenen Mss. seiner Abhandlungen nur „el-Ṣaffâr".

b) Hier heiſst unser Autor: Ahmed b. ʿAbderrahmân b. ʿOmar.

c) Vergl. W. G. 212.

d) Ibn Abi U. hat 375.

Staatsbeamter war. Lassen wir nun Ibn Sînâ selbst sprechen: „Mein Vater gehörte zu denjenigen, welche dem Propheten der Ägypter anhingen, der zu den Ismâ'îliten zählte; von diesen hörte er die Lehre von der Seele und dem Intellekt in der Art, wie sie dieselbe auffafsten, ebenso mein Bruder; sie unterhielten sich oft über diese Dinge und ich hörte ihnen zu; da fingen sie an mich einzuladen, ihren Unterhaltungen zu folgen und ihren Ansichten beizutreten, allein mein Verstand wollte ihnen nicht zustimmen. In ihren Gesprächen kamen sie auch auf Geometrie und indische Rechnungsweise. Ich wurde dann zu einem Manne geschickt, der Gewürzhändler war und als Kenner der indischen Rechnungsweise galt, die ich nun von ihm lernte. Es kam nun nach Bochârâ ein Mann, Namens Abû 'Abdallâh el-Nâtilî, genannt der Philosoph; diesen nahm mein Vater in unser Haus auf, damit ich von ihm Unterricht empfinge. Vor seiner Ankunft hatte ich mich schon viel mit der Rechtswissenschaft beschäftigt unter Anleitung des Mönches Ismâ'îl, und war gewöhnt an den Weg des Postulierens und des Widerspruches gegen diejenigen, die den allgemein betretenen Weg gingen. Unter ihm (el-Nâtilî) fing ich nun mit der Isagoge (des Porphyrius) an; als ich ihn aber korrigieren mufste bei der Definition der Kategorien, da staunte alles über mich; welche Frage man auch an mich stellen mochte, ich erfafste sie besser als er, und als wir zur Logik übergingen, so zeigte es sich bald, dafs er die schwierigeren Partien derselben nicht verstand. Ich begann nun diese Bücher selbständig zu studieren und vertiefte mich in die Kommentare, so dafs ich immer sicherer wurde in der Logik und im Euklides, von dem ich unter ihm nur die ersten fünf oder sechs Sätze durchgenommen hatte. Ich ging dann nachher zum Almagest über, und als ich mit seinen einleitenden Sätzen zu Ende war und zu den geometrischen Sätzen kam, sagte el-Nâtilî zu mir, ich solle nun fortfahren, dieses Buch selbständig zu lesen, nachher würden wir es dann zusammen lesen und er werde mich dann das Richtige vom Falschen unterscheiden lehren. Ich begann nun mit dem Studium desselben und bald zeigte es sich, dafs ich viele Sätze ihm erst erklären mufste, da er sie bis jetzt noch nicht verstanden hatte. Bald nachher ging er von uns fort nach Korkânğ (arabisch Ğorğânîja).*) Ich fuhr dann fort mit dem Studium der Bücher über die Rhetorik und der Kommentare zu der Physik und der Metaphysik.“ Er ergeht sich dann noch des weitern über seine philosophischen und medizinischen Studien; im 22. Lebensjahre verlor er seinen Vater, nun änderten

*) Die Hauptstadt von Chowârezmien, in der Nähe des Aralsees, zu unterscheiden von Ğorğân, einer Stadt in Chorâsân, in der Nähe des kaspischen Meeres, von den Arabern auch Meer von Ğorğân genannt.

sich für ihn die Verhältnisse, indem er zuerst die Geschäfte seines Vaters für den Sultan von Chorâsân übernahm, bald aber diese Stellung verliefs und von Bochârâ nach Korkânǧ übersiedelte, wo er in den Dienst des Emirs ʿAlî b. Mâmûn b. Muh. trat. Auch hier blieb er nicht lange, wir treffen ihn nacheinander in verschiedenen Städten, in Nasâ, Ṭûs, Abîward, Dahistân und zuletzt in Ǧorǧân. Hier befreundete er sich mit Abû ʿObeid el-Ǧûzǧânî. Dieser Freund erzählt nun weiter: „Es lebte in Ǧorǧân ein reicher Mann, Namens Abû Muh. el-Šîrâzî, dieser kaufte dem Ibn Sînâ ein Haus in seiner Nähe, wo er seine Vorlesungen halten konnte. Ich ging jeden Tag zu ihm und studierte mit ihm die Logik und den Almagest. Er verfafste für mich den mittlern Auszug aus der Logik und für Abû Muh. el-Šîrâzî das Buch des Ursprungs und des Jenseits (der Auferstehung) und das Buch der gesamten astronomischen Beobachtungen. Ebenso verfafste er daselbst noch mehrere andere Bücher, wie den Anfang des Kanon (sein grofses medizinisches Hauptwerk) und den Auszug (Kompendium) aus dem Almagest.“ Von Ǧorǧân ging er nach Raj und trat in den Dienst der dortigen Fürstin und ihres Sohnes Meǧd ed-daula ein, welche ihn aus seinen Schriften kannten. Hierauf traten Verhältnisse ein, die ihn zwangen, nach Qazwîn und von da nach Hamadân zu gehen, wo er in den Dienst einer vornehmen Frau, Namens Kubḏâneweih, eintrat, später dann aber Wezir des Emirs Šems ed-daula Abû Ṭâhir wurde. Nach wechselvollen Schicksalen, die ihn hier trafen, trat er in den Dienst des Statthalters von Ispahân ʿAlâ ed-daula Abû Ǧaʿfar. Hier vollendete er noch eine Anzahl seiner Werke, z. B. auch seinen Auszug aus dem Almagest, nachdem er auch den Euklides und die Arithmetik[a]) und Musik[a]) in einen Auszug gebracht hatte. Was den Almagest anbetrifft, so fügte er zehn Sätze hinzu über die Parallaxe (*ichtilâf el-manẓar)* und machte auch am Ende einige astronomische Zusätze, auf die keiner vor ihm gekommen war. Auch zum Euklides fügte er einiges hinzu, ebenso zur Arithmetik schöne Eigenschaften (der Zahlen) und zur Musik einige Probleme. Einst kam bei ʿAlâ ed-daula das Gespräch auf mangelhafte Angaben in den auf Grund der alten Beobachtungen hergestellten Kalendern, da beauftragte der Emir den Ibn Sînâ mit den hierzu nötigen Beobachtungen und verschaffte ihm die dazu erforderlichen Summen. Er begann mit denselben und wurde dabei von seinem Freunde Abû ʿObeid el-Ǧûzǧânî unterstützt, der auch die Anschaffung der Instrumente besorgt hatte. — Ibn Sînâ, der nicht gar mäfsig gelebt haben soll,[b]) starb auf einem Feldzug, den ʿAlâ ed-daula gegen Hamadân

[a]) Die Autoren dieser beiden Werke sind nicht genannt.

[b]) Es soll unter anderem auch dem Weine ergeben gewesen sein.

unternommen hatte, im Ramaḍân 428 (1037) und wurde in letzterer Stadt begraben.[a]) Das Wort des Dichters gilt mit Recht von ihm:

fafî kullî šaiin lahu âjatun
tadullu ʿalâ annahu wâḥidun.

An jedem Dinge fand er etwas (zu studieren),
Das beweist, dafs er einzig war.

Er schrieb: Das Buch der gesamten astronomischen Beobachtungen. Über den Winkel, an Abû Sahl el-Masîḥî (s. Art. 180) gerichtet und in Ǧorǧân verfafst. Beantwortung einer Frage seines Schülers Abû'l-Ḥasan Bihminjâr (?) b. el-Marzubân über die Eigenschaften des Äquators. Antworten auf zehn Fragen von Abû Rîḥân el-Bîrûnî (s. Art. 218), in Leiden (1475), hauptsächlich naturphilosophischen Inhaltes. Antworten auf sechszehn Fragen von Abû Rîḥân (auf die aristotelischen Schriften „über den Himmel" und „die Physik" sich beziehend), in Leiden (1476), in Oxford (I. 980, 2⁰), im Brit. Mus. (978, 50⁰) und in Mailand (Ambros. 320, e). Über die Gestalt der Erde vom Himmel aus gesehen und ihre Existenz in der Mitte des Weltalls, an Aḥmed b. Muh. el-Soheilî gerichtet, in Oxford (I. 980, 1⁰) und im Brit. Mus. (981, 11⁰). Über die Himmelskörper, vielleicht identisch mit der in Oxford (980, 8⁰) vorhandenen Schrift „über die scheinbaren Entfernungen der Himmelskörper", oder dann mit derjenigen im Escurial (700, 10⁰) „über die Bewegung der Himmelskörper". Über die Art und Weise der Beobachtung und ihre Übereinstimmung mit den Lehren der Physik. Über das astronomische Instrument, das er in Ispahân zu seinen Beobachtungen für ʿAlâ ed-daula konstruiert hatte, vielleicht in Leiden (1061).[b]) Auszug aus Euklides, es ist dies der geometrische Teil seines Buches *el-naǧât* (die Befreiung), eines encyklopädischen Werkes, die Logik, Mathematik, Physik und Metaphysik umfassend, das wieder nur ein Kompendium seines gröfsern Werkes *el-šifâ'* (die Heilung) ist. Das erstere befindet sich noch in Oxford (I. 456, 2⁰) und im Brit. Mus. (978, 5⁰ und 979), es wurde auch gedruckt in der arabischen Ausgabe des Kanon, Rom 1593, und öfters in lateinischer Übersetzung herausgegeben unter dem Titel: de removendis nocumentis. Das zweite ist noch vorhanden in Leiden (1444 und 45), in Berlin (5044); Teile desselben in Oxford (I. 435—37, 452, 467, 468, etc.), im Ind. Off. (477, 1⁰), enthält den Teil über die mathematischen Wissenschaften, und in Konstantinopel (2720), enthält denselben Teil. Über die Abschaffung (oder Nichtigkeit) der Sterndeuterei, in Leiden

---

[a]) Nach andern in Ispahân.

[b]) Der Titel heifst hier: Abhandlung über die von ihm bevorzugte Art der Auswahl (oder auch Herstellung) der astronomischen Instrumente.

(1464, 13°) und im Brit. Mus. (1349, 6°). Kurze Abhandlung darüber, dafs der Winkel zwischen dem Bogen und der Tangente keine Gröfse habe.[a]) Kompendium des Almagestes, in Paris (2484, 1°) und in Oxford (I. 1012). Kompendium der Astronomie, auch betitelt „über den Himmel, die Gestirne und die Meteore", im Brit. Mus. (977, 27°), in Algier (1452) und vielleicht auch in Kairo (224, Übers. 163). — (C. I. 268 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. I. 152, Übers. I. 440; Ibn Abi U. II. 2; Abulfar. 349, Übers. 229; Abulfid. III. 93.)

199. **ʿAbdelqâhir b. Ṭâhir b. Muh., Abû Manṣûr, el-Baġdâdî**, ein gelehrter Jurist und Litteraturkenner. Er war auch in andern Wissenschaften, besonders in der Arithmetik und Erbteilung sehr bewandert. Über erstere Disziplin schrieb er mehrere Werke, worunter eines, betitelt: *el-takmile* (die Vervollständigung). Auch als Dichter hatte er einen Namen. Er hielt sich längere Zeit in Nîšapûr auf, hielt dort Vorlesungen über verschiedene Wissenszweige und starb zu Isfarâ'in i. J. 429[b]) (1037/38). (Ibn Ch. I. 298, Übers. II. 149; Kut. I. 379.)

200. **ʿAbdelmelik b. Soleimân b. ʿOmar, Abû'l-Welîd, el-Omawî**, aus Sevilla, bekannt unter dem Namen **Ibn el-Qûṭîja**,[c]) verfügte über grofse Kenntnisse in Recht, Sprachwissenschaft, Rechenkunst etc. Nach Ibn Chazraǧ starb er i. J. 429 (1037/38) im Alter von 75 Jahren. (B. I. 353.)

201. Muh. b. Jûsuf b. Muh. el-Omawî el-Naǧǧâd, Abû ʿAbdallâh, aus Cordova, war bewandert in Sprachwissenschaft, Poetik und Rechenkunst; er hielt in Cordova Vorlesungen, verliefs die Stadt zur Zeit des Bürgerkrieges, kehrte später wieder dahin zurück und starb daselbst im Ḏû'l-Qaʿda 429 (1038). (B. VIII. 100: Fragmente zu Ibn Baškuwâls el-Ṣile.)

202. Muh. b. ʿAbdallâh b. ʿAlî b. Ḥosein el-Farâiḍî (d. h. der Erbteiler), el-Ḥâsib (d. h. der Rechner), Abû Bekr, bekannt unter dem Namen el-Masrûrî, aus Cordova, war ein vorzüglicher Koranleser mit schöner Stimme, ein Meister in der Rechenkunst und Erbteilung. Er reiste nach dem Osten, besuchte ʿIrâq und Syrien, kam mit vielen Gelehrten zusammen, unter andern mit ʿAbdelwahhâb b. ʿAlî b. Naṣr el-Faqîh, den er in Bagdad i. J. 415 hörte. Er wurde nach Ibn Chazraǧ i. J. 371

---

a) Wahrscheinlich seine oben genannte Abhandlung „über den Winkel".

b) Kut. hat 420.

c) Ein Verwandter des Historikers Ibn el-Qûṭîja (Sohn der Gothin); vergl. W. G. 141.

(981/82) geboren und starb nach 419 (1028). (B. VIII. 93: Fragmente zu Ibn Baškuwâls el-Ṣile.)[a])

203. Ibn el-ʿAǵîm,[b]) ein geschickter Arzt und Astrolog, auch bewandert in den übrigen Wissenschaften der Alten, hatte zur Zeit der Bujiden einen grofsen Ruf als praktischer Arzt und Gelehrter in Persien und ʿIrâq. Er starb i. J. 430 (1038/39). (C. I. 417 n. Ibn el-Q.)

204. El-Ḥasan[c]) b. el-Ḥasan[d]) b. el-Haiṯam, Abû ʿAlî, von Baṣra, bekannt unter dem Namen Ibn el-Haiṯam, oder auch Abû ʿAlî el-Baṣrî, wanderte von Baṣra nach Ägypten aus und blieb dort bis zu seinem Tode. Er war ein vortrefflicher Mensch, besafs hohe Intelligenz und grofses Wissen, es kam ihm keiner seiner Zeit gleich, ja nicht einmal nahe in den mathematischen Wissenschaften. Er war ausdauernd in der Arbeit, fruchtbar als Schriftsteller und sehr enthaltsam im Leben. Er bearbeitete und kommentierte einen grofsen Teil der Aristotelischen Schriften, ebenso derjenigen des Galenus und war bewandert in den Prinzipien der Medizin, in allen ihren Regeln und Praktiken, doch übte er den Beruf nie aus, seine therapeutischen Kenntnisse waren gering. Er hatte auch eine schöne Schrift und war ein gründlicher Kenner der arabischen Sprache. Ibn Abî U. erzählt nach ʿAlam ed-dîn Qaiṣar b. Abî'l-Qâsim, dem Geometer (s. Art. 358), folgendes: „Ibn el-Haiṯam war anfänglich in Baṣra und seiner Umgegend und bekleidete auch (zeitweise) das Amt eines Wezirs. Sein Geist neigte sehr zur Gelehrsamkeit und zur Kontemplation hin, so dafs er gerne den Beschäftigungen entsagt hätte, die ihn am wissenschaftlichen Arbeiten hindern konnten. Infolge seiner eifrigen Studien und seiner übrigen Beschäftigung trat eine Geistesstörung bei ihm ein, so dafs er sein Amt niederlegen mufste. Nachdem er wieder geheilt war, begab er sich nach Ägypten und liefs sich in Kairo nieder.“ Ibn el-Q. berichtet folgendes über Ibn el-Haiṯam: „Es waren die grofsen wissenschaftlichen Kenntnisse des Ibn el-H. dem el-Ḥâkim, dem Beherrscher Ägyptens, zu Ohren gekommen, und er verlangte nach seinem Rat. Es war ihm auch mitgeteilt worden, er habe gesagt, wenn er in Ägypten wäre, so würde er den Nil so korrigieren, dafs er in jedem Zustand, bei Zu- und Abnahme des Wasserstandes, nutzbringend sein würde. Dies bewog vollends el-Ḥâkim, ihn kommen zu lassen. Er lud ihn also ein und schickte ihm die Mittel zur Reise; als er

---

a) Vergl. was ich über diesen Autor in der Bibl. math. 13 (1899) p. 87 u. 88 gesagt habe.

b) Soll wahrscheinlich heifsen ʿAǵam, C. transskribiert ʿOǵaim, Ibn el-Q. Münchner Ms. 440 (f. 162[b]) hat Abû'l-ʿOǵaim.

c) Ibn Abi U. hat Muh.

d) Abulfar. hat el-Ḥosein.

ankam, ging er ihm sogar bis vor die Thore von Kairo entgegen, nahm ihn als Gast zu sich und erwies ihm grofse Ehren. Er versah ihn dann mit allen nötigen Hilfsmitteln zu seiner Nilunternehmung und Ibn el-H. reiste nach den südlichen Nilgegenden ab. Als er aber dorthin gekommen war und die grofsen Denkmäler der alten Völker dieses Landes sah, als er daraus schliefsen mufste, dieselben seien auf einer hohen Stufe der technischen Ausbildung und der geometrischen Kenntnisse gestanden, sah er ein, daß das, was er beabsichtigte, nicht im Bereich der Möglichkeit war; denn wenn es möglich gewesen wäre, so hätten es jene, welche vorausgegangen waren, jedenfalls gethan. Er stand daher von seinem Vorhaben ab und ging nach Norden zurück. Noch einmal schien ihm eine Stelle des Nils, genannt el-Ǧenâdil (die Katarakte), südlich von Assuan, als Ausgangspunkt des Unternehmens geeignet zu sein, allein bei näherer Prüfung sah er ein, daß er auch hier sein Projekt nicht zur Ausführung bringen könne. Beschämt und niedergeschlagen kehrte er nach Kairo zurück, wo ihn anfänglich el-Hâkim gut aufnahm; diese Stimmung schlug aber bald in eine andere um, und Ibn el-H. sah bald seine Stellung und sogar sein Leben gefährdet. Um sich zu retten, kam er auf den Gedanken, sich wahnsinnig zu stellen; diese List gelang ihm, er wurde in seiner Wohnung eingeschlossen und bewacht und sein Vermögen konfisziert. In diesem Zustand mufste er nun freilich aushalten bis zum Tode el-Ḥâkims, dann wurde er freigelassen, erhielt sein Gut wieder zurück, bezog eine Wohnung ganz in der Nähe der Moschee el-Azhar und lebte hier gottergeben, genügsam und arbeitsam bis zu seinem Tode.“ Neben der Abfassung eigener Arbeiten schrieb er für seinen Lebensunterhalt eine grofse Menge mathematischer und anderer Werke ab, so jedes Jahr einmal die Elemente des Euklides, die mittleren Bücher und den Almagest; er schrieb schön und fehlerlos. Ibn el-H. wurde ca. 354 (965) geboren und starb in Kairo Ende d. J. 430 (1039) oder kurze Zeit nachher. (C. I. 414 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. II. 90; Abulfar. 340, Übers. 223.)

Er schrieb eine grofse Zahl von mathematischen, astronomischen und naturphilosophischen Werken und Abhandlungen; Ibn Abi U. führt ca. 130 solche an, deren Aufzählung man mir erlassen möge, ich verweise den Leser auf Woepckes Ausgabe der Algebra des Chaijâmî.[a]) Es sei mir hier nur gestattet, einige Unrichtigkeiten Woepckes in der Wiedergabe der Titel einzelner Abhandlungen zu verbessern. Nr. 21 heifst bei Woepcke: Traité de l'instrument universel, abrégé extrait du traité d'Ibrahim b. Henân; es mufs heifsen: Abhandlung über das Schatteninstrument, ausgezogen und klar-

[a]) F. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî etc. Paris 1851, p. 73 ff Woepcke läfst einige Schriften weg, er hat nur 117 Nummern.

gelegt aus dem Buche des Ibrâhîm b. Sinân über diesen Gegenstand (vergl. Art. 113). Nr. 14[a]) lautet bei W.: Deux livres des centres de continuité; es soll heifsen: Über die Schwerpunkte (wörtl. Mittelpunkte der Schwere). Nr. 20: Abrégé sur les figures de la nouvelle lune, und Nr. 21: Mémoire développé sur les figures de la nouvelle lune, müssen lauten: „Kurze Abhandlung über die Mondfiguren“, und „Ausführliche Abhandlung über die Mondfiguren“.[b]) Nr. 41: Problèmes sur les changements optiques, soll heifsen: Abhandlung über die Parallaxe des Mondes. Nr. 51: Mémoire sur les nombres harmoniques, ist zu verbessern in: Über die Zahlen des magischen Quadrates. Nr. 67: Mémoire sur le Qarasṭûn, ist zu übersetzen durch: Abhandlung über die Wage; W. kennt dieses Wort, das auch in den Schriften von Ṯâbit b. Qorra und der Benî Mûsâ vorkommt, nicht, und meint, es sei zu lesen „Qaraṭǧûn“, welches ein bei den Sonnenuhren vorkommender technischer Ausdruck sein soll.

Von seinen Werken sind noch vorhanden: Kommentar zu den Elementen des Euklides, doch nicht vollständig, nur bis zur Mitte des 5. Buches gehend, in Leiden (966). Über die Bestimmung der Höhe der aufrechtstehenden Gegenstände, der Berge und der Wolken, in Leiden (1008) und Oxford (I. 877, 10°). Über die genaue Bestimmung der Polhöhe, in Leiden (1063), Oxford (I. 877, 6°), im Brit. Mus. (404), mit lateinischer Übersetzung von Jak. Golius, Leiden 1643. Abhandlung über den Zirkel der grofsen Kreise, in Leiden (1064), im Ind. Off. (734, 16°). Über die Quadratur des Kreises, in Berlin (5941), im Vatikan (320), arabisch herausgegeben mit deutscher Übersetzung in der Z. f. M. u. Ph. 40. Bd. (1899) p. 33—47, von Hch. Suter. Über einen Satz der Söhne Mûsâs, die denselben ihrem Buche über die Kegelschnitte vorangestellt haben, im Brit. Mus. (975, 2°) und im Ind. Off. (734, 8°). Über das Licht, in Berlin (6018), im Ind. Off. (734, 4°), arabisch herausgegeben mit deutscher Übersetzung in Z. D. M. G. Bd. 36 (1882), p. 195—237, von J. Baarmann, auch separat, Halle, 1882.[42a] Über das Licht der Sterne, in Berlin (5668), in Oxford (I. 877, 7°) und im Ind. Off. (734, 3°). Auszug aus der Abhandlung „über die Lösung der Schwierigkeiten im Buche des Euklides“, in Berlin (5921). Über die Natur der Schatten (Schattenwerfung),[c]) in Berlin (6019). Über die Milchstrafse (Antwort auf die Frage, ob die Milchstrafse im Luftkreis der Erde oder am Himmelsgewölbe sich befinde), in Leiden (1065). Über das Bild (bildliche Darstellung?) der Finsternisse, in Oxford (I. 877, 2°), im Ind. Off. (734, 13°

---

[a]) Fortsetzung des Verzeichnisses seiner Werke.

[b]) Vergl. Z. f. M. u. Ph. 44. Bd. (1899) hist.-litt. Abtlg. p. 36.

[c]) Nicht über die Tangenten und Cotangenten, wie Woepcke, l. c. p. 75 hat.

und 767, 2⁰). Über die Kegelschnitt-Brennspiegel, in Leiden (1010), im Ind. Off. (734, 5⁰). Über die Teilung der Linie, die Archimedes in seinem Buche über die Kugel und den Cylinder angewandt hat, in Leiden (1009), im Ind. Off. (734, 18⁰), in französischer verkürzter Übersetzung veröffentlicht von F. Woepcke, in dem Buche: L'algèbre d'Alkhayyâmî etc. Paris 1851, p. 91—93. Über die Kugel-Brennspiegel,[a]) im Ind. Off. (734, 6⁰). Über den Raum, im Ind. Off. (734, 7⁰). Über das Licht des Mondes, im Ind. Off. (734, 9⁰). Über die Ausmessung des Paraboloids, im Ind. Off. (734, 11⁰). Ausführliche Abhandlung über die Mondfiguren, im Ind. Off. (734, 12⁰). Über die äufsere Erscheinung des Weltgebäudes, im Ind. Off. (734, 15⁰), in der lat. Übersetzung des Abraham de Balmes im Vatikan (Nr. 4566), und in der anderen eines Anonymus in Oxford (Catal. Coxe, P. III. Mss. bibl. canonic. Nr. 45) unter dem Titel: Liber de mundo et coelo, de motibus planetarum etc. in partes duas distinctus, per Abrah. Hebraeum iubente Alphonso Hispaniae rege de Arab. in Hispanum, postea ab anonymo quodam in Lat. versus, cum figuris, praeviis capitulorum elencho et Alphonsi epistola. Über eine Aufgabe über Körperzahlen (Kubikzahlen),[b]) im Ind. Off. (734, 17⁰). Über die Parallaxe des Mondes,[c]) im Ind. Off. (734, 19⁰). Über eine arithmetische Aufgabe, im Ind. Off. (734, 20⁰). Über die Prämissen für die Konstruktion der Siebeneckseite, im Ind. Off. (734, 21⁰). Über die Auffindung der Qible (Richtung nach Mekka), in Oxford (I. 877, 4⁰). Über die Bewegung des Mondes, in Oxford (I. 877, 3⁰). Abhandlung über eine geometrische Aufgabe, in Oxford (I. 877, 5⁰) und in Kairo (205, Übers. 24). Über die Verbesserung der astronomischen Verrichtungen,[d]) in Oxford (I. 877, 8⁰). Über die Schwierigkeiten (zweifelhaften Stellen) bei Ptolemäus, in Oxford (I. 877, 9⁰). Kommentar zu den Postulaten des Euklides, in Oxford (I. 908, 1⁰) und in Algier (1446, 1⁰). Über die gegebenen Gröfsen (Data), in Paris (2458, 5⁰), in französ. Übersetzung unter dem Titel: „Traité des connues géomètriques d'Ibn Alhaïtham" veröffentlicht von L. A. Sédillot im Journ. asiat. XIII. (1834), p. 435 ff. Das Buch über die Optik, nach der Ansicht von de Slane noch vorhanden in Paris (2460).[e]) Die Optik

[a]) Das Ms. hat „Kreis-Brennspiegel".

[b]) Das Ms. beginnt so: Wir wollen eine gegebene Zahl in zwei Teile zerlegen, so dafs der eine eine Kubikzahl sei, etc.

[c]) Der Text des Ibn Abi U. hat unrichtig: *fî ichtilâf el-naẓar,* statt: *fî ichtilâf manẓar el-qamar.*

[d]) Der Text hat *a'mâl* = Verrichtungen, Operationen, nicht *raṣd* = Beobachtung.

[e]) Nach meiner Ansicht ist das Pariser Ms. die Optik des Euklides in der Rezension des Naṣîr ed-dîn, da der Titel heifst: *taḥrîr el-munâẓira* (sollte wohl heifsen, *manâẓir*), (Rezension oder Revision der Optik).

wurde ins Lateinische übersetzt wahrscheinlich von Witelo (Mss. in Oxford, Coxe, P. II. Colleg. Corp. Christi Nr. 150; in Paris Cod. 7247 etc.), herausgegeben zu Basel 1572 unter dem Titel: Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Eiusdem liber de crepusculis et nubium ascensionibus etc. a Fed. Risnero. Die letztere Schrift „über die Dämmerung und das Aufsteigen der Wolken" wurde von Gerard von Cremona übersetzt (Mss. in Cambridge, Catal. Mss. Angl. et Hib. T. I. P. III. Nr. 1685; in Paris, Cod. 7310, 4⁰), und schon vor 1572 herausgeg. zu Lisabon, 1541, hinter dem Buche „de crepusculis" des Petrus Nonius. — Es werden ihm ferner noch folgende Abhandlungen zugeschrieben, die nicht im Verzeichnis seiner Schriften stehen: Eine *Qaṣîde* (Gedicht) in *ʿain* über den Zodiakus, die Sonne und den Mond, mit einem Kommentar von Ibn Hišâm Abû ʿAbdallâh Muh. el-Lachmî, in Algier (613, 12⁰) und Berlin (5745).[a]) Ein Auszug aus einem Kompendium des Archimedischen Buches über die Kugel und den Cylinder, in Algier (1446, 8⁰).[b])

205. ʿAlâ el-Kirmânî, Abû'l-Qâsim, ein Zeitgenosse Ibn Sînâs, Arzt und Astrolog. Er ist wahrscheinlich der Verfasser des in Oxford (I. 941, 5⁰) sich befindenden Buches „über die Elemente der Astrologie" (*fî uṣûl el-aḥkâm*) von Abû'l-Qâsim el-Kirmânî, und vielleicht auch der in Leiden (1189) existierenden pers. Abhandlung „über die Kugel, zur richtigen Bestimmung der Qible" von ʿAlâ el-Kirmânî. (Ibn Abi U. II. 8.)[c])

206. El-Châqânî war ein bedeutender Astronom und Astrolog, bewandert in der Kenntnis des Laufes der Gestirne und ihrer Natur, sowie in der Herstellung von Tafeln. Er starb ca. 430. (C. I. 427 n. Ibn el-Q.)

207. Muh. b. Aḥmed b. Muh. el-Qummî, war ein jüngerer Zeitgenosse von Aḥmed b. Muh. el-Sigzî (s. Art. 185); er schrieb eine Abhandlung über die Asymptoten der Hyperbel, noch vorhanden in Leiden (1000), auf Wunsch des Fürsten ʿAbdelʿazîz b. ʿAlî b. ʿAbdelʿazîz.

208. Muh. b. Merwân b. ʿÎsâ el-Omawî, Abû Bekr, bekannt unter dem Namen Ibn el-Šiqâq (oder Šaqâq), aus Cordova, ein Schüler von ʿAbbâs b. Aṣbaġ, el-Aṣîlî[d]) u. a. Er war in vielen Wissenschaften bewandert, vor allem in der Sprachwissenschaft und Rechenkunst. Er starb i. J. 432 (1040/41). (B. VIII. 102: Fragmente etc.)

---

a) Im Berliner Ms. wird das Gedicht einem Hâšimî (Ibn Hišâm?) zugeschrieben, im Ms. von Algier und bei H. Ch. IV. 549 dagegen dem Ibn el-Haiṯam selbst, an letzterem Orte heifst er allerdings Abû ʿAlî el-Ḥasan b. el-Ḥosein el-Baġdâdî.

b) Ist vielleicht identisch mit der Abhandlung „über die Teilung der Linie, die Archimedes im 2. Buche über die Kugel und den Cylinder angewandt hat".

c) Hier heifst er nur Abû'l-Qâsim el-Kirmânî.

d) Ein berühmter Faqîh unter Ḥakem II. und Hišâm II.

209. Muh. b. ʿAbdallâh b. Mazîn (?), Abû ʿAbdallâh, aus Cordova, ein Schüler von ʿAbbâs b. Aṣbag, Chalaf b. Qâsim u. a. Er war ein bedeutender Traditionist, Koranforscher und Rechner. Er starb in Sevilla im Anfang d. J. 434 (1042), im Alter von 83 Jahren. (B. VIII. 104: Fragmente etc.)

210. ʿAlî b. Chalaf b. Ġâlib el-Anṣârî, Abû'l-Ḥasan, aus Cordova, ein Schüler von Abû'l-Qâsim b. Raḍâ und Abû ʿAbdallâh b. Maʿmar u. a., lehrte Erbteilung und Rechenkunst und wurde Ṣûfî. Er verfaſste das Buch *„el-jaqîn"* (die Gewiſsheit). Er wohnte auf dem Schloſs des ʿAbdelkerîm (?), wie Eijûb b. ʿAbdallâh el-Sebtî (d. h. von Ceuta) berichtet, der ihn öfters besuchte; er war sehr fromm, herablassend, poetisch und produktiv.[43] (B. VI. 672.)

211. Jûsuf b. ʿOmar el-Ǧuhanî[a]) (oder Ǧuhenî) aus Toledo, bekannt unter dem Namen Ibn Abî Ṯalla,[b]) war gelehrt in Litteratur, Erbteilung und Astronomie.[44] Er starb 435 (1043/44). (B. II. 615; C. II. 148.)

212. Châlid b. Muh. b. ʿAbdallâh el-Adîb, Abû Welîd, aus Sevilla, war gelehrt in Sprachwissenschaft und Rechenkunst und bewandert in den Dichtungen der vormuhammedanischen Zeit. Zu seinen Lehrern gehörte unter andern Ibn el-Ṣaffâr, der Rechner (vergl. Art. 196). Er wurde auf verräterische Weise in Badajoz am Ende d. J. 436 (1045) ermordet, etwa 50 Jahre alt. (B. I. 181.)

213. Muh. b. Jûsuf b. Aḥmed b. Moʿâḏ el-Ǧuhanî, Abû ʿAbdallâh, aus Cordova, war Korankenner, auch sehr bewandert in Sprachwissenschaft, Erbteilung und Rechenkunst. Er studierte hauptsächlich unter Abû ʿAbdallâh b. Abî Zamanîn und Abû'l-Qâsim ʿAbderraḥmân b. ʿAbdallâh b. Châlid. Er hielt sich während 5 Jahren, von Anfang 403 bis Ende 407, in Kairo auf. Vielleicht ist er der Verfasser des noch in Algier (1446, 3°) existierenden Kommentars zum 5. Buche des Euklides, wo allerdings el-Ǧaijânî statt el-Ǧuhanî steht, welche Verwechslung aber leicht stattfinden kann; ebenso könnte er der Verfasser einer Schrift „über die Auffindung der Oberfläche der Kugelsegmente" sein, die noch im Escurial (955) vorhanden ist, und deren Verfasser nach C. I. 382 (Abû) ʿAbdallâh Muh. b. Moad Cordubensis heiſst (vergl. auch Bibl. math. 11 (1897), p. 83 u. 84). Er wurde geboren i. J. 379 (989/90), sein Todesjahr wird nicht genannt. (B. II. 480.)

214. ʿAlî b. Aḥmed, Abû'l-Ḥasan, el-Nasawî (d. h. von Nasâ), lebte unter Meǧd ed-daula (gest. 420) und seinem Nachfolger, wie sich aus

---

a) Ǧuhanî ist (nach Ibn Ch. I. 146, Übers. I. 422) entweder abgeleitet von Ǧuhaina, einem Dorfe bei Mosul, oder dann von dem arabischen Stamme Ǧuhaina.

b) C. II. 148 hat „Thalta".

der Vorrede zu seiner indischen Rechenkunst ergiebt. Er hatte zuerst dieses Rechenbuch persisch abgefafst zum Gebrauche der Finanzbeamten des Bujidischen Hofes in Raj oder Ispahan, unter Meǧd ed-daulas Nachfolger übertrug er dasselbe ins Arabische und gab ihm den Titel: *el-moqniʿ fî'l-ḥisâb el-hindî* (das Befriedigende oder Überzeugende über die indische Rechenkunst), dasselbe ist noch vorhanden in Leiden (1021).[a]) Ebenso hat man von ihm noch einen Kommentar zu dem Transversalensatz des Menelaus, betitelt: Das Buch der Sättigung (*kitâb el-išbâʿ*), in Leiden (1060); ferner einen Kommentar zu den Lemmata des Archimedes, in der Rezension des Naṣîr ed-dîn, in Oxford (I. 875, 13°), in Berlin (5936), in Florenz (271) und in Kairo (202, Übers. 21).

215. Muh. b. el-Leiṯ, Abû'l-Ǧûd,[b]) ein hervorragender Mathematiker, Zeitgenosse von el-Bîrûnî (s. Art. 218), schrieb: Antworten auf Fragen, die ihm von Abû'l-Riḥân el-Bîrûnî vorgelegt worden waren, in Leiden (1013). Antwort auf eine Frage, die von Abû Ǧaʿfar el-Châzin aufgestellt worden war, in Leiden (1014). Abhandlung über ein von Abû Saʿîd el-Siǧzî (s. Art. 185) aufgestelltes Problem, in Leiden (1015). Diese Probleme handeln alle über geometrische Fragen, wie die Sieben- und Neunteilung des Kreises, Dreiteilung des Winkels etc., deren Lösung auf kubische Gleichungen führt, und bei der eine Reihe von arabischen Mathematikern des 11. Jahrh. bis auf ʿOmar el-Chaijâmî einen grofsen Scharfsinn bewiesen haben. Ich verweise für die einzelnen Aufgaben auf Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 54—57 u. 91—127, und Cantor, Vorlesgn. I. 652 (1. Aufl.), 714 (2. Aufl.). Woepcke hat die Lösungen der ersten und dritten der von el-Bîrûnî gestellten Fragen in französ. Übersetzung veröffentlicht (l. c. p. 114 u. 125). Diese Lösungen des Abû'l-Ǧûd sind wahrscheinlich einem umfassenderen Werke dieses Autors entnommen, das aber schon el-Chaijâmî nicht mehr gekannt, sondern nur von demselben gehört hat. (Woepcke, l. c. p. 82.) — Einige dieser Probleme befinden sich auch in Kairo in 2 Mss. (203 u. 204, Übers. 22 u. 23), das erste einfach „Abhandlung", das zweite „das Buch über die Konstruktion des Siebenecks"[c]) betitelt. — In Leiden (1016) befindet sich noch eine Abhandlung über ungleichseitige Dreiecke und ihre Eigenschaften, die dem Abû'l-Ǧûd zugeschrieben wird, es wäre aber möglich, dafs dieselbe dem folgenden Mathematiker angehörte.

216. Muh. b. Aḥmed, Abû ʿAbdallâh, el-Šannî, ein Zeitgenosse

[a]) Vergl. Woepcke im Journ. asiat. 1863, I. p. 492 ff. und Cantor, Vorlesgn. I. 653—57 (1. Aufl.), 716—721 (2. Aufl.).

[b]) Nicht mit dem Beinamen „el-Šannî", wie Cantor l. c. hinzufügt.

[c]) Könnte auch „Neuneck" heifsen, da die arabischen Wörter für sieben und neun leicht verwechselt werden können.

des eben genannten Mathematikers Abû'l-Ğûd, oder wenig jünger als derselbe, wird von el-Chaijâmî[a]) neben Abû'l-Ğûd als mutmafslicher Erfinder der Auflösung eines Problems dritten Grades[b]) genannt. Von ihm ist vorhanden: Das Buch über die Berechnung jedes Dreiecks aus seinen Seiten, in Kairo (204, Übers. 23; vergl. den Schlufs des vorigen Art.). Das Buch über die Aufdeckung des Fehlers, der von Abû'l-Ğûd begangen wurde in den beiden Hilfssätzen, die er der Konstruktion des Siebenecks (Neunecks?) vorausgeschickt hat, in Kairo (204, Übers. 23).[c])

217. Abû'l-Fatḥ b. Muh. b. Qâsim b. Faḍl el-Iṣfahânî, ein Perser, der die Kegelschnitte des Apollonius in bessere Form brachte und neu herausgab.[d]) Über seine Lebenszeit findet man widersprechende Angaben: in den Florentiner Mss. (Palat. 270 u. 275), welche die Bearbeitung des 5.—7. Buches der Kegelschnitte enthalten, steht, dafs er diese Bearbeitung verfafst habe „sub auspiciis regis Abicaligiaris, qui ab anno heg. 372[e]) rebus praefuit"; im Ms. 296 derselben Bibliothek, welches eine pers. Übersetzung sämtlicher sieben Bücher der Kegelschnitte von demselben Autor enthält, steht, er habe im 8. Jahrh. d. H. gelebt; wir müssen aber jedenfalls die erste Angabe als die richtige betrachten, sie stimmt auch mit der von Abraham Ecchellensis veröffentlichten Vorrede des Verfassers. Dieser A. Ecchellensis gab mit G. A. Borelli eine latein. Übersetzung der drei letzten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius nach den genannten Mss. 270 u. 275 heraus, in Florenz 1661. — In Florenz (Palat. 308) befindet sich auch ein Kommentar zu den fünf ersten Büchern der Kegelschnitte von Abû'l-Fatḥ el-Iṣfahânî. In Konstant. (2724) befindet sich ein Auszug aus den Kegelschnitten (*talchîṣ el-machrûṭât*), jedenfalls von demselben Autor, obschon er daselbst heifst: Maḥmûd b. Qâsim b. Faḍl el-Iṣfahânî.

218. Muh. b. Aḥmed, Abû'l-Riḥân (oder Raiḥân) el-Bîrûnî,[f]) geb. in Chowârezm (?) im Ḏû'l-Ḥiğğe 362 (973), war ein Mann von umfassender und gründlicher Bildung, besonders auf den Gebieten der Philosophie, Mathematik, Astronomie, Chronologie und Geschichte, auch in der Medizin hatte er Kenntnisse. Den ersten Teil seines Lebens brachte er in

[a]) Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 57; es steht hier nur der Beiname el-Šannî.

[b]) Zehn in zwei Teile zu teilen, so dafs die Summe der Quadrate derselben vermehrt um den Quotienten des gröfsern durch den kleinern, zweiundsiebenzig ausmache.

[c]) Vergl. auch Woepcke, l. c. p. 83.

[d]) Schwerlich „übersetzte", wie es in Ms. 270 in Florenz heifst.

[e]) Dies ist unrichtig, denn der genannte Fürst ist der Bujide Abû Kalingâr, der Sohn Sulṭân ed-daulas, der von 416—440 die Würde eines Emîr el-Omarâ mit Unterbrechung innegehabt hat.

der Heimat zu, in nahen Beziehungen zum Hofe des Emirs Mâmûn b. Mâmûn Chowârezmšâh stehend. Einige Zeit hielt er sich in Ǧorǧân auf, sein Werk „Chronologie der alten Völker" ist dem Herrn dieses Gebietes, Qâbûs b. Wašmegîr (gest. 403) gewidmet. In dieser Zeit und jedenfalls auch später noch stand er in näherer Beziehung zu Ibn Sînâ, es bestand zwischen ihnen ein reger wissenschaftlicher Verkehr über Fragen vielfacher Art (vergl. Art. 198). Nach dem Tode Mâmûn b. Mâmûns (407) trat er in die Dienste seines Nachfolgers in der Herrschaft über Chowârezm, des grofsen Ġaznawiden Maḥmûd. Unter diesem machte er die Feldzüge nach Indien mit und erwarb sich hierbei grofse Kenntnisse in Sprache, Litteratur, Geschichte, Sitten und Wissenschaften der Indier, die er in dem Buche „Chronik von Indien" der Nachwelt überliefert hat. Er verstand das Arabische, Persische und Sanskrit, auch, wiewohl etwas weniger gut, das Hebräische und Syrische; er übersetzte verschiedene Schriften der Indier ins Arabische und übermittelte den Indiern arabisches Wissen. Er starb wahrscheinlich in Ġazna im Raǧeb 440 (Ende 1048), nach C. E. Sachau. Er schrieb: Die aus den vergangenen Jahrhunderten übrig gebliebenen Spuren (Chronologie oriental. Völker), im Brit. Mus. (422) und in Paris (1489), herausgeg. von C. E. Sachau, Leipzig 1876—78, ins Englische übersetzt und herausgegeben unter dem Titel: Chronology of ancient nations etc. London 1879. Das Buch der Schlüssel zur Astronomie, wahrscheinlich in Paris (2497). Über das Planisphaerium. Über den Gebrauch des Astrolabiums, in Berlin (5794) und Paris (2498, 1°). Ein von diesem verschiedenes Werk über das Astrolabium, betitelt: *kitâb el-isti'âb* (das Buch der gründlichen Behandlung) aller möglichen Methoden für die Konstruktion des Astrolabiums, in Leiden (1066), in Oxford (I. 1037, 3°) und in Berlin (5795 u. 96), gewidmet dem Abû Sahl 'Îsâ b. Jahjâ (s. Art. 180). Der Mes'ûdische Kanon, gewidmet dem Ġaznawiden Mes'ûd b. Maḥmûd, ein astronomisch-geographisches Werk, worin er der Astronomie und Geographie des Ptolemäus folgte, in Oxford (II. 370) unvollständig, und in Berlin (5667).[a]) Das Buch der Belehrung (*kitâb el-tafhîm*), über die Mathematik, Astronomie und Astrologie, in Oxford (I. 1020 u. II. 282, 1°) und in Berlin (5665 u. 66), im Brit. Mus. P. (Add. 7697 u. 23566). Über die Verbesserung der Irrtümer in dem Buche über die Qible. Über den Gebrauch des sphärischen Astrolabiums (Armillarsphäre). Über die Schatten (Tangenten?). Die Mes'ûdischen Tafeln, ebenfalls verfafst für Mes'ûd b. Maḥmûd, wahrscheinlich nur ein Teil des Kanon. Auszug aus dem Almagest.[b]) Über die Auffindung

[a]) In diesem Ms. ist als Todesjahr el-Bîrûnîs 430 angegeben.

[b]) Steinschneider (Bibl. math. 1892, p. 55 und Z. D. M. G. 50, p. 206) vermutet, dieser Auszug sei identisch mit dem Mes'ûdischen Kanon.

(Berechnung) der Sehnen im Kreise, in Leiden (1012), Kairo (203, Übers. 22). Die indische Chronik (*ta'rîch el-hind*), in Paris (2222, 2⁰ u. 2280, unvollständig), herausgeg. von C. E. Sachau (Alberuni's India), London 1887, in englischer Übers. ibid. 1888. Das Buch der Zeugenschaft (*kitâb el-istišhâd*), über die Nichtübereinstimmung der astronomischen Beobachtungen, zitiert in seiner Chronol. of anc. nat. p. 29 u. 167. Im Ind. Off. (1043, 1⁰) wird dem Bîrûnî eine Abhandlung über die Regel de tri nach indischem System (*fî râšîkât*[a]) *el-hind*) zugeschrieben. (Ibn Abi U. II. 20; Abulfar. 348, Übers. 229.)

219. 'Alî b. Abî'l-Riĝâl, Abû'l-Ḥasan, wahrscheinlich aus Cordova gebürtig, ist der im christlichen Abendlande unter dem Namen Abenragel bekannte Astrolog. Es steht ziemlich fest, dafs er einen Teil seines Lebens in Afrika, am Hofe des Ziriden Mo'izz b. Bâdîs b. el-Manṣûr (406—454, 1016—1062) zugebracht hat. Ich habe im Art. 175 darauf hingewiesen, dafs der bei den Beobachtungen i. J. 378 in Bagdad unter den Bujiden als anwesend genannte Abû'l-Ḥasan el-Maĝrebî mit unserm Abenragel identisch sein könnte; wenn wir annehmen, er sei als junger Mann von 23—25 Jahren, der im Osten seine Studien machte, in Bagdad gewesen, so kann er wohl noch bis ca. 440 am Hofe des Mo'izz b. Bâdîs gelebt haben, er wäre dann ca. 85—87 Jahre alt geworden; er kann aber auch vor 440 (1048/49) gestorben sein.[46] Er schrieb: *El-bâri' fî aḥkâm el-nuĝûm* (das vollkommenste Buch über die Urteile aus den Gestirnen), in Berlin (5892),[b]) in Paris (2590),[c]) im Brit. Mus. (1347), im Ind. Off. (735), im Escurial (918), in Algier (1516). Dasselbe wurde von Jehûdâ b. Mûsâ aus dem Arabischen ins Kastilianische und hieraus ins Lateinische übersetzt durch Aegidius de Tebaldis und Petrus de Regio (ums Jahr 1256); diese Übersetzung wurde mehrmals gedruckt, zum erstenmal in Venedig, 1485, unter dem Titel: „Praeclarissimus liber completus in judiciis astrorum, quem edidit Albohazen Haly filius Abenragel" etc., dann auch in Basel 1551 (vergl. auch Wüstenfeld, die Übers. arab. Werke ins Lat. p. 89 u. 90). Ein Gedicht (*arĝûza*) über die Astrologie, im Escurial (904, 3⁰) und im Brit. Mus. (977, 29⁰); es wurde kommentiert von Aḥmed b. el-Ḥasan b. el-Qonfûd (s. Art. 422). (C. I. 344 u. 362.)

220. Ĝâlib b. Muh. b. 'Abderrahmân el-Hawwârî[d]) el-Ašûnî,

---

[a]) Von dem indischen *trairâšika* = dreigliedrig.

[b]) Hier hat der Verfasser noch die Titel: *el-wezîr el-kâtib*, d. h. der Wezir und Geheimschreiber, also jedenfalls des Mo'izz b. Bâdîs.

[c]) Hier ist zu dem Namen 'Alî b. Abî'l-Riĝâl noch hinzugefügt „el-Seibânî" (d. h. aus dem Stamme der Benî Seibân).

[d]) Soll vielleicht „Huwârî" heifsen, vergl. Art. 415.

Abû Temâm, aus Sevilla, war ein frommer Mann und tüchtiger Gelehrter, der sich besonders mit Rechenkunst beschäftigte. In Cordova studierte er unter Abû ʿAbdallâh b. el-ʿAṭṭâr (s. Art. 179) u. a. Er wurde geboren i. J. 376 (986/87) und starb im Šaʿbân 440 (1049). (B. II. 448.)

221. Muh. b. ʿOmar b. Muh., Abû ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn el-Burǵûṯ, studierte unter Abû'l-Qâsim b. el-Ṣaffâr (s. Art. 196) und war der bedeutendste seiner Schüler in den mathematischen Disziplinen. Daneben besafs er grofse Kenntnisse in der Grammatik und Rechtswissenschaft. Er starb i. J. 444 (1052/53). (B. V. 124; Maq. K. II. 232.)

222. Saʿîd b. Muh. b. el-Baǵûniš, Abû ʿOṯmân, aus Toledo, studierte in Cordova unter Maslama b. Aḥmed el-Maǵrîṭî (s. Art. 176) Rechenkunst und Geometrie, unter Muh. b. ʿAbdûn el-Ǧebelî (s. Art. 161), Soleimân b. Ǧulǵul[47] u. a. Medizin. Hierauf kehrte er nach Toledo zurück und wurde daselbst befreundet mit dem Emîr el-Ẓâfir Ismâʿîl b. ʿAbderraḥmân b. Ismâʿîl b. Ḏî'l-Nûn (regierte von 427—429), der ihn sehr hoch schätzte und ihn zur Verwaltung herbeizog. Der Qâḍî Ṣâʿid (s. Art. 244) sagt: Ich kam mit ihm zusammen in Toledo im Anfang der Regierung des Jaḥjâ el-Mâmûn (Sohn des ebengenannten, regierte von 429—467); er hatte soeben mit dem Lesen der propädeutischen Wissenschaften aufgehört und hatte sich der Koranlektüre zugewandt; er verliefs sein Haus selten und gesellte sich nicht unter die Menschen. Er war ein Mann von grofsem Verstand und reinem Lebenswandel; er besafs ausgezeichnete Werke über Philosophie und Religion; er las auch über Logik und Geometrie und hatte grofse Kenntnisse hierin. Später aber ging er von diesen Wissenschaften ab und begeisterte sich für die Schriften des Galenus und verwandte grofsen Fleifs auf ihre Sammlung, Ordnung und Verbesserung, dadurch erlangte er eine eingehende Kenntnis derselben; weniger Erfahrung hatte er in der Diagnose und in der Behandlung der Kranken. Er starb am 1. Raǵeb 444 (1052) im Alter von 75 Jahren. (B. VI. 711; Ibn Abi Ụ. II. 48.)

223. ʿAbderraḥmân b. Maslama b. ʿAbdelmelik b. el-Welîd el-Qorešî el-Mâlaqî (d. h. aus Malaga), wohnhaft in Sevilla, bekannt unter dem Namen Abû Muh. el-Moṭarrif, war in vielen Wissenschaften bewandert, besonders in der Korankenntnis, in der Tradition, Rechtswissenschaft, Medizin und Rechenkunst. Seine Lehrer in Cordova waren el-Aṣîlî, Abû ʿOmar von Sevilla, ʿAbbâs b. Aṣbaǵ, Abû Naṣr u. a. Er starb im Šauwal d. J. 446 (1055) im Alter von 77 Jahren. (B. I. 328.)

224. Jaḥjâ b. Aḥmed, Abû Bekr, bekannt unter dem Namen Ibn el-Chaijâṭ (Sohn des Schneiders), war ein Schüler von Maslama b. Aḥmed el-Maǵrîṭî in der Rechenkunst und Geometrie, ging dann zur Astrologie über und diente als Arzt und Astrolog unter andern dem Soleimân, dem

Sohne Ḥakems II. Er starb in Toledo 447 (1055/56) im Alter von nahezu 80 Jahren. (Ibn Abi U. II. 50.)

225. Ibrâhîm b. Muh. b. Ašaḥ el-Fehmî, Abû Isḥâq, von Toledo, war ein Schüler von Abû Muh. b. el-Qošârî und Jûsuf b. Aṣbaʿ (sic! sollte vielleicht heifsen Aṣbaġ) b. Chiḍr, und sehr vielseitig gebildet, vor allem in Sprachwissenschaft, Erbteilung und Rechenkunst. Er starb im Šaʿbân 448 (1056). (B. I. 94.)

226. Muh. b. ʿAbdallâh b. Muršid, Abû'l-Qâsim, Freigelassener des Wezirs Ibn Ṭumlus, aus Cordova, war ein ausgezeichneter Geheimschreiber und verband damit auch Kenntnisse in verschiedenen Wissenschaften, so in der Rechenkunst, Geometrie und Astrologie. Er starb Mitte des Ḏû'l-Ḥiǧǧe 448 (1057) über 90 Jahre alt; nach Ibn Ḥaijân[48] wurde er 356 (967) geboren. (B. V. 125.)

227. ʿOmar b. Aḥmed b. Chaldûn el-Ḥaḍramî, Abû Muslim,[a]) einer von den Edeln Sevillas und einer der Schüler des Maslama b. Aḥmed el-Maġrîṭî, beherrschte die Philosophie, die Geometrie, die Astronomie und die Medizin; er glich den alten Philosophen in der Reinheit seiner Sitten und der Geradheit seines Handelns. Er starb in Sevilla i. J. 449 (1057/58). Zu seinen berühmtesten Schülern gehört Abû Ǧaʿfar Aḥmed b. ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ṣaffâr,[b]) der Arzt. (Ibn Abi U. II. 41; Maq. K. II. 232.)

228. El-Mubaššir b. Fâtik, Abû'l-Wefâ, el-Âmirî,[c]) einer der vornehmsten Emire Ägyptens und einer seiner vortrefflichsten Gelehrten, von grofser Arbeitskraft. Einer seiner treuesten Genossen und Freunde war Abû ʿAli b. el-Haiṯam (s. Art. 204), dem er viel von seinem Wissen in der Mathematik und Astronomie zu verdanken hatte. Ebenso kam er oft mit dem Scheich Abû'l-Ḥosein, bekannt unter dem Namen Ibn el-Âmidî, zusammen und hörte bei ihm über Philosophie. Er beschäftigte sich auch mit Medizin und praktizierte zusammen mit Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Riḍwân (s. Art. 232). Er verfafste vortreffliche Werke über Logik und andere Gebiete der Philosophie. Er hatte eine sehr grofse Bibliothek, seine ganze Thätigkeit war dem Studium, dem Lesen und Schreiben gewidmet. Zu seinen Schülern gehörte unter andern Abû'l-Chair Salâma b. Mubârak b. Raḥmûn.[d]) (Ibn Abi U. II. 98; S. I. 311.)

[a]) Ein Vorfahre des berühmten Historikers Ibn Chaldûn.

[b]) H. VI. 478 hat „Ibn el-Zohr", was vielleicht richtiger ist, denn der oben genannte Ibn el-Saffâr (s. Art. 196) kann es doch nicht wohl sein.

[c]) S. hat „el-Amawi".

[d]) Ein ägyptischer Arzt, der sich auch mit Philosophie und Astronomie be-

229. El-Ḥosein b. Muh., Abû ʿAbdallâh, el-Wannî[a]) el-Faraḍî (d. h. der Erbteiler) el-Ḥâsib (d. h. der Rechner), war eine der ersten Autoritäten auf den Gebieten der Erbteilung und Rechenkunst. Über die erstere Disziplin schrieb er vorzügliche Werke. Er war der Lehrer des ʿAbdallâh b. Ibrâhîm el-Chabrî (s. Art. 250) in Arithmetik und Erbteilung. Er wurde i. J. 451 (1059) in den durch den Türken Basâsîrî hervorgerufenen Unruhen in Bagdad erschlagen. (Ibn Ch. I. 146; Übers. I. 421.)

230. Jaḥjâ b. Ǧarîr, Abû Naṣr, el-Tekrîtî,[b]) war ein vortrefflicher Arzt und in verschiedenen Wissenschaften sehr bewandert. Er lebte zur Zeit des Naṣîr ed-daula b. Merwân, der 402—453 (1011—1061) über Dijâr-Bekr regierte. Er schrieb: Über die Tagewählerei in der Astrologie. (Ibn Abi U. I. 243.)

231. Ibn el-Nebdî[c]) lebte in Ägypten ums Jahr 435 (1043/44) und war bewandert in den Wissenschaften und in der Kunst der Verfertigung astronomischer Instrumente, von denen der Verfasser des *Târîch el-ḥokamâ* selbst eine Anzahl sehr schöner und genau ausgeführter gesehen hat. (C. I. 417 n. Ibn el-Q.)

232. ʿAlî b. Riḍwân (oder Roḍwân) b. ʿAlî b. Ǧaʿfar, Abû'l-Ḥasan, wurde in Ǧîze bei Kairo geboren. Im 14. Lebensjahre begann er in letzterer Stadt das Studium der Philosophie und Medizin und mufste sich, da sein Vater ohne Vermögen war, den Lebensunterhalt durch astrologische Prophezeiungen, medizinische Anfänger-Praxis und Privatunterricht erwerben. Vom 32. Lebensjahre an, als er schon einen Namen als bedeutender Mediziner erlangt hatte, gestalteten sich seine Lebensverhältnisse angenehmer; er trat in den Dienst des Chalifen el-Ḥâkim und wurde zum Chef der Ärzte Kairos ernannt. Später verlor er den gröfsten Teil seines Vermögens wieder, indem er durch eine Waise, die er in sein Haus aufgenommen hatte, bestohlen wurde; dieselbe flüchtete sich mit dem Gelde und konnte nicht mehr ausfindig gemacht werden; darob soll seine Geisteskraft sehr erschüttert worden sein, er starb in Kairo im Jahre 453 (1061) unter dem Chalifate des el-Mustanṣir billâh Abû Temîm b. el-Ḥâkim. — Er soll keinen noblen Charakter besessen haben, sondern ziemlich streitsüchtig und absprechend gewesen sein,[d]) weshalb er mit mehrern seiner Zeitgenossen,

---

schäftigt hat und mit dem der Spanier Abû'l-Ṣalt Omeija b. ʿAbdelʿazîz (s. Art. 272) in wissenschaftlichem Verkehr gestanden ist.

[a]) d. h. von Wann, einem Dorfe in Kûhistân, gebürtig.

[b]) d. h. von Tekrît, einer Stadt am Tigris oberhalb Bagdad.

[c]) So bei C., das Münchener Ms. des Ibn el-Q. hat „el-Sindbadî" und „el-Sinbadî", für letzteres kann leicht „el-Nebdî" gelesen werden.

[d]) Ein Beleg hierfür ist seine „Abhandlung darüber, dafs Ibn Boṭlân nicht

so unter andern mit dem Arzt Ibn Boṭlân, in mündliche und schriftliche wissenschaftliche Fehden verwickelt wurde. Er schrieb: Hinweisung auf die List derjenigen, welche sich als Kenner der Astrologie ausgeben und über den Ruhm der wirklichen Astrologen. Abhandlung darüber, daſs der Punkt und die Linie nicht abstrakte Begriffe seien, sondern in Wirklichkeit existieren. Über Fragen, die zwischen ihm und Ibn el-Haiṯam sich erhoben hatten, über die Milchstraſse und den Raum. Einen Kommentar zum Quadripartitum des Ptolemäus, in Oxford (I. 992), im Escurial (908 u. 911,1°), lateinisch[a]) herausgegeben mit dem Quadripartitum zugleich in Venedig 1493 und 1519. (Ibn Abi U. II. 99; Abulfar. 356, Übers. 234; C. I. 347 u. 350.)

233. Muh. b. Aḥmed b. Muh. b. el-Leiṯ, ein Schüler des Ibn el-Burǵûṯ (s. Art. 221), war ein gewandter Rechner, Geometer und Astronom, auch bewandert in Sprach- und Rechtswissenschaft, von feiner Bildung und hohem Geist. Nach dem Qâḍî Ṣâ'id starb er in Surrajûn (?) im Gebiet von Valencia i. J. 455 (1063). (B. V. 127; Maq. K. II. 232.)[49]

234. Muh. b. Sa'îd el-Saraqosṭî (d. h. von Saragossa), bekannt unter dem Namen Ibn el-Maššâṭ (Sohn des Friseurs). Der Qâḍî Ṣâ'id kannte ihn persönlich und berichtet, daſs er nach Ägypten gereist sei, um dort mathematischen Studien obzuliegen.[50] (B. V. 127; C. I. 424.)

235. 'Omar b. Ibrâhîm b. Muh. el-Hauzenî, Abû Ḥafṣ, bekannt unter dem Namen Ibn Abî Huraira, aus Sevilla, war von scharfem Verstand und verfügte über groſse Kenntnisse in den Wissenschaften, vor allem in der Rechenkunst. Ibn Chazraǵ erwähnt, er habe mit ihm Vorlesungen bei dem Faqîh el-Teimî gehört. Er starb am 7. Muḥarrem 456 (Dez. 1063) im Alter von 60 Jahren. (B. I. 393.)

236. 'Abderraḥmân b. 'Abdallâh b. Seijid el-Kelbî, Abû Zeid, aus Valencia, war sehr gelehrt in Rechenkunst und Geometrie, in letzterer Disziplin kam ihm keiner seiner Zeit gleich. Er wird erwähnt von dem Qâḍî Ṣâ'id und von Abû Ǵa'far b. el-Dallâl, nach diesem erhielt er von Abû 'Omar b. 'Abdelbarr[51] die Lizenz für die Vorlesung seines Buches über die Erbteilung. Er starb in Játiva im Ḏû'l-Qa'da 456 (1064). (B. VI. 550.)[b])

237. El-Ḥosein b. Aḥmed[c]) b. el-Ḥosein b. Ḥaij el-Toǵibî,

einmal das verstehe, was er selbst schreibe, geschweige denn das, was andere schreiben".

[a]) Aus dem Spanischen ins Lateinische übersetzt von Aegidius de Tebaldis.

[b]) C. II. 131 berichtet nach der gleichen Quelle, daſs er ein Werk über Arithmetik und Algebra geschrieben habe, was nicht in dem mir vorliegenden Texte steht.

[c]) Ibn Abi U. II. 40 hat „Muh."

aus Cordova, bekannt unter dem Namen Ibn Ḥaij, war ein Schüler von Ibn el-Burġûṯ (s. Art. 221) in Rechenkunst und Geometrie und ebenso auch von dem folgenden Gelehrten ʿAmr b. ʿAbderraḥmân el-Karmânî. Er beschäftigte sich eingehend mit den Gleichungen der Gestirne (Planeten) und verfaſste Auszüge aus Tafeln, die der Qâḍî Ṣâʿid erwähnt; er giebt auch seine Genealogie an und berichtet ferner, daſs er i. J. 442 (1050/51) aus Spanien wegzog, auf dem Meere viel Ungemach erlebte und sein Vermögen verlor, dann nach Ägypten, hierauf nach Jemen kam, wo er mit dem Emir dieser Provinz befreundet wurde; dieser schickte ihn als Gesandten zu dem Chalifen Qâ'im bi'amr allâh nach Bagdad, wo er wieder zu Besitztum kam. Er starb in Jemen nach seiner Rückkehr i. J. 456 (1064). (Maq. K. I. 577, II. 232.)

238. ʿAmr[a]) b. ʿAbderraḥmân b. Aḥmed b. ʿAlî el-Karmânî (d. h. aus Carmona stammend) Abû'l-Ḥakem, in Cordova geboren, einer der gelehrtesten Männer Spaniens in Arithmetik und Geometrie. Es sagt der Qâḍî Ṣâʿid: „Sein Schüler el-Ḥosein b. Muh. b. el-Ḥosein b. Ḥaij (s. Art. 237) erzählte mir von ihm, daſs keiner mit ihm in Wettbewerb treten konnte in der Geometrie, er schreckte vor der Lösung der schwierigsten Aufgaben nicht zurück. Er machte Reisen nach den Hauptstädten des Orientes und gelangte bis nach Ḥarrân in Mesopotamien und beschäftigte sich dort eingehend mit dem Studium der Geometrie und der Medizin; dann kehrte er nach Spanien zurück und lieſs sich in Saragossa nieder; er machte seine Landsleute zuerst mit den Abhandlungen der lautern Brüder bekannt.[b]) Er verwandte groſsen Fleiſs auf die Medizin und war sehr geschickt in verschiedenen Zweigen derselben, so im Kauterisieren und Amputieren. Er war nicht besonders bewandert in der theoretischen Astronomie und in der Logik; über diesen Punkt hat mir aber Abû'l-Faḍl Ḥasdâj b. Jûsuf el-Isrâ'îlî (s. Art. 264) erzählt, der hierüber wohl unterrichtet war, daſs im Gegenteil seine Stellung in den spekulativen (theoretischen) Wissenschaften eine solche war, daſs niemand in Spanien ihm hierin gleichkam." Er starb in Saragossa i. J. 458 (1066), 90 Jahre alt oder wenig darüber. (Ibn Abi U. II. 40; C. I. 436 n. Ibn el-Q.; Maq. K. II. 232.)

239. Aḥmed b. Moġîṯ b. Aḥmed el-Ṣadafî, Abû Ǧaʿfar, aus Toledo, war einer der gelehrtesten Männer dieser Stadt, eine Autorität in wissenschaftlichen Fragen, besonders in der Tradition, in der Erbteilung und Rechenkunst und in der Sprachwissenschaft. Er war ein Schüler von Abû

---

a) C. I. 436 hat „ʿOmar", ebenso Maq. K. II. 232.

b) Wenn diese Angabe richtig ist, so müſste diejenige im Art. 176 über Maslama b. Aḥmed falsch sein.

Bekr Chalaf b. Ahmed, Abû Muh. b. 'Abbâs u. a. Er wurde geboren i. J. 406 (1015/16) und starb im Ṣafar 459 (1067). (B. I. 62.)

240. 'Abdallâh[a]) b. Aḥmed von Saragossa, ein Schüler von Ibn el-Burġûṯ, zeichnete sich in Arithmetik, Geometrie und Astronomie aus (Maq. K. II. 232; H. VI. 421 nach Gayangos I. 150, 429 u. 430.) Weiteres enthalten die Quellen über ihn nicht, ebensowenig wie über den folgenden Gelehrten:

241. Muchtâr el-Ro'ainî, Abû'l-Ḥasan,[b]) bewandert in Geometrie und Astronomie, ebenfalls Schüler von Ibn el-Burġûṯ. (Maq. K. II. 232; H. VI. 421 nach Gayangos l. c.)

242. 'Îsâ b. Aḥmed b. Ṯâbit b. Abî'l-Ǧahm el-Wâsiṭî[c]) studierte unter seinem Vater (gest. i. J. 437 (1045/46) nach Ibn Baškuwâl) und war sehr gebildet und gelehrt in der Rechenkunst, er hatte viele Schüler in dieser Disziplin. (B. II. 640.)

243. Merwân b. Ḥakem el-'Arqî (?), Abû 'Abdelmelik, aus Sevilla, war ein sehr eifriger Forscher und beschäftigte sich besonders mit der Rechenkunst, die er bei Abû'l-Qâsim b. el-Ṭoneizî (s. Art. 188) gehört hatte. Er wurde geboren im Ǧumâdâ I. 386 (996) und starb im Šauwâl 462 (1070). (B. II. 558.)

244. Ṣâ'id b. Aḥmed b. 'Abderraḥmân b. Muh. b. Ṣâ'id el-Qorṭubî, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn Ṣâ'id oder Qâḍi Ṣâ'id, stammte aus Cordova, wurde geboren zu Almeria i. J. 420 (1029), und lebte später in Toledo als gelehrter Jurist und Qâḍî dieser Stadt unter Jaḥjâ el-Mâmûn b. Dî'l-Nûn. Auch als Historiker zeichnete er sich aus und schrieb auf diesem Gebiete mehrere viel zitierte Werke, so eine Universalgeschichte der Völker (Belehrung über die Klassen der Völker) und eine Geschichte der Gelehrten unter den Arabern und den fremden Völkern. Er besafs auch ausgedehnte mathematische und astronomische Kenntnisse, einer seiner Lehrer in diesen Wissenschaften war Abû'l-Welîd el-Waqšî (s. Art. 257); wir haben schon im Art. 176 eine Stelle aus seinem Buche über die Klassen der Völker erwähnt, wo er bemerkt, er habe in seinem astronomischen Werke „über die Verbesserung (der Berechnung) der Bewegungen der Gestirne und die Belehrung über die Irrtümer der Astronomen" auf die Fehler aufmerksam gemacht, die Maslama b. Aḥmed el-Maǧrîṭî in seiner Neuausgabe der

---

[a]) H. VI. 421 hat „'Alî".

[b]) Gayangos I. 429 hält diesen Muchtâr für den gleichnamigen Qâḍi von Almeria unter dem Fürsten Zoheir el-'Âmirî, welcher 419 (1028) Fürst von Almeria wurde.

[c]) d. h. von Wâsiṭa (Jâqût hat „Wâsiṭ"), einem Flecken im Gebiete von Cabra, südlich von Cordova.

Tafeln des Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî stehengelassen habe. Dasselbe Werk des Ṣâ'id wird auch genannt in dem Artikel der „Chronik der Gelehrten" des Ibn el-Qifṭî über Ibn el-Adamî, wo es heifst, er (Ṣâ'id) habe aus den Tafeln des Ibn el-Adamî viel bisher Unbekanntes erfahren, das er in seinem oben genannten Werke verwertet habe (vergl. C. I. 430). Durch den jüdischen Astronomen Isḥâq Israeli zu Toledo (ums Jahr 1310) erfahren wir ferner, dafs Ṣâ'id auch ein eifriger Beobachter gewesen ist; er habe Muslime und Juden zu seinen astronomischen Beobachtungen herbeigezogen, deren Resultate zusammen mit denjenigen seines jüngeren Zeitgenossen el-Zarqâlî die Grundlagen der Toledanischen Tafeln bildeten.[a]) Ibn Ṣâ'id starb im Šauwâl des Jahres 462 (1070). (B. I. 234.)

245. Muh. b. Chaira (oder Chîra) el-'Aṭṭâr, Freigelassener des Muh. b. Abî Harîra (oder Huraira), des Geheimschreibers des Ismâ'îl b. D̲î'l-Nûn von Toledo. Er studierte unter Ibn el-Ṣaffâr (s. Art. 196) und Ibn Burǵût̲ (s. Art. 221), war bewandert in Arithmetik und Erbteilung und lehrte diese Wissenschaften in Cordova noch im Jahre 460 (1068) nach dem Qâḍî Ṣâ'id. (B. V. 128.)

246. 'Abderraḥmân b. Muh. b. 'Abdelkerîm b. Jaḥjâ el-Lachmî, einer der Edeln Spaniens, war sehr besorgt um Ausarbeitung und Vorlesung der Bücher des Aristoteles u. a. über Philosophie und mathematische Wissenschaften; er war auch sehr tüchtig in der Kenntnis der einfachen Heilmittel und der Bücher des Dioskorides und des Galenus hierüber, die er ordnete und zu einem ca. 500 Blätter fassenden Bande zusammenstellte. Er befolgte in der Medizin eine eigene vorzügliche Methode und hatte grofse Erfolge. Er war eine zeitlang Wezir des Fürsten Jaḥjâ b. D̲î'l-Nûn von Toledo und im Jahre 460 (1068) noch am Leben. Er soll i. J. 387 (997) geboren sein. (C. I. 405 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi U. II. 49.)

247. 'Abderraḥmân b. Chalaf b. 'Asâkir el-Dâremî (?), Abû'l-Ḥasan, ein spanischer Arzt, verwandte auch grofsen Fleifs auf Geometrie und Logik und war ein Schüler von Ibn el-Baǵûniš (s. Art. 222). (Ibn Abi U. II. 50.)

248. Isḥâq b. Jûnis war ein gelehrter Arzt und Philosoph in Kairo. Er hatte die Philosophie unter Ibn el-Samḥ[52] studiert und Mathematik unter Ibn el-Hait̲am, wie die Randglossen beweisen, die er der Arithmetik des Diophantus nach (d. h. wahrscheinlich nach Diktaten, Vorlesungen des) Ibn el-Hait̲am beigefügt hat.[b]) Er wird ca. 470 (1077/78) gestorben sein. (Ibn Abi U. II. 99.)

---

[a]) Vergl. Steinschneiders Alfarabi in den Mémoires de l'acad. des sciences de St. Pétersbourg. VII. Série. T. XIII. p. 141 ff.

[b]) Diese Stelle ist bei Ibn Abi U. sowohl im Art. „Ibn el-Hait̲am", als auch

249. Aḥmed el-Moqtadir billâh und sein Sohn Jûsuf el-Mutamin, Könige von Saragossa aus dem Stamme der Benî Hûd, pflegten sehr eifrig die Wissenschaften, besonders Philosophie, Mathematik und Astronomie. Über den erstern bricht Abû'l-Welîd el-Šaqundî (d. h. von Saguntí) in einem Briefe an den Maġrebiner Abû Jaḥjâ b. el-Moʿallim el-Ṭanǵi (d. h. von Tanger), in welchem er sein Vaterland Andalusien verteidigt und preist, in die Worte aus: „Habt Ihr (Maġrebiner) in der Wissenschaft der Gestirne, in der Philosophie und Geometrie auch einen König aufzuweisen wie el-Moqtadir b. Hûd von Saragossa?" Der zweite schrieb ein Werk mathematisch-astronomischen Inhaltes, betitelt „das Buch der Vollendung (*istikmâl*) und der optischen (?) Erscheinungen (*manâẓir*)", von welchem Josef b. Jehûda b. Aknin,[a]) ein Schüler des Meimonides, in seiner Schrift „Medizin der Seele" sagt, es sollte neben dem Euklides, den mittlern Büchern und dem Almagest ebenfalls von denjenigen gelesen werden, die sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften widmen wollen.[b]) — Aḥmed regierte von 439—474 (1047—1081) und Jûsuf von 474—478 (1081—85). (Maq. K. I. 206 und II. 141.)

250. ʿAbdallâh b. Ibrâhîm el-Faradî, Abû Ḥakîm, el-Chabri,[c]) Schüler von el-Ḥosein b. Muh. el-Wannî (s. Art. 229), war hervorragend in Rechenkunst und Erbteilung. Er schrieb über letztere Disziplin mehrere Werke und über erstere einen *Talchîṣ* (Auszug). Auch in der Sprachwissenschaft war er bedeutend. Er starb i. J. 476 (1083/84). (Ibn Ch. I. 421, Note 2.)

251. ʿAbdallâh b. Jûnis b. Ṭalḥa b. ʿAmrûn el-Wahrânî (d. h. von Oran), Abû Muh., kam als Kaufmann nach Spanien zur Zeit des großen Wassers i. J. 429 (1037/38) und schlug seinen Wohnsitz in Sevilla auf. Er überlieferte nach afrikanischen Scheichen (Gelehrten), wie Abû Muh. b. Abî Zeid u. a. und war sehr bewandert in Rechenkunst und Medizin. Er wurde nahezu 80 Jahre alt. (B. I. 292.)

252. ʿAbderrahmân b. ʿAbdallâh b. ʿIjâd el-Jaḥṣabî (?) el-Mukattib, Abû Zeid, aus Saragossa, war gelehrt in der Koranlektüre und Rechenkunst. Einer seiner Schüler war der Qâḍî Abû ʿAlî el-Ṣadafî (s. die Quellen). (B. VI. 552.)

---

im Art. „Isḥâq b. Jûnis" etwas unklar, wahrscheinlich hat Ibn el-Haitam einen Kommentar zur Arithmetik des Diophantus geschrieben und Isḥâq b. Jûnis zu diesem Kommentar Glossen hinzugefügt.

[a]) Vergl. Art. 342: Jûsuf b. Jaḥjâ b. Isḥâq el-Sebtî.

[b]) Vergl. Steinschneider, die mittlern Bücher der Araber etc. in Z. f. M. Ph. 10. Jahrg.

[c]) d. h. von Chabr, einem Orte bei Nišâpûr, gebürtig.

253. Muh. b. el-Ḥasan b. el-Qarnî (?), Abû ʿAbdallâh, der Geheimschreiber, war auch Rechner und Astronom und lebte auf der Insel Sicilien. (Bibl. arabo-sicula da M. Amari, p. 595, aus ʿImâd ed-dîn el-Iṣfahânî[53] nach Ibn el-Qaṭṭâʿ.[54])

254. ʿOmar b. el-Ḥasan b. el-Qûnî (?),[a]) Abû Ḥafṣ, der Geheimschreiber, lebte ebenfalls in Sicilien und war Sprachgelehrter, Dichter, Astronom und Geometer. (Ibid. p. 596, nach demselben.)

255. Ibrâhîm b. Jaḥjâ el-Naqqâš (der Graveur), Abû Isḥâq, bekannt unter dem Namen Ibn el-Zarqâla oder el-Zarqâlî,[b]) wahrscheinlich aus Cordova gebürtig, der hervorragendste astronomische Beobachter seiner Zeit und Erfinder astronomischer Instrumente. Von ihm stammt die sog. *Ṣafîḥa* des Zarqâlî (d. h. das Zarqâlische Astrolabium, oder eigentlich „Scheibe", lat. saphaea Arzachelis), „berühmt unter den Astronomen, weil sie auf wunderbare und doch kurze Art zur Beobachtung aller astronomischen Erscheinungen dienstbar gemacht werden kann. Als dieses Instrument den Astronomen des Orients zu Gesichte kam, waren sie hoch erstaunt und hielten es nicht für möglich, es zu verstehen ohne göttliche Hilfe". Von el-Zarqâlî rühren verschiedene Beobachtungen her, die vielfach benutzt worden sind; auf dieselben stützte unter andern seine Arbeiten Ibn el-Ǧemmâd (soll wohl heiſsen „Kemmâd" oder „Kemâd", vgl. Art. 487) el-Andalusî, der nach ihnen drei Tafeln verfaſste: die erste nannte er „die Kreisbewegung", die zweite „das endlose Ziel", aus beiden machte er einen Auszug und nannte ihn „das (aus den beiden andern) Entlehnte". (Soweit C. I. 393 n. Ibn el-Q.) — Wir haben schon im Art. 244 darauf hingewiesen, wie el-Zarqâlî im Verein mit Ibn Ṣâʿid beobachtet und damit die Grundlagen zu den Toledanischen Tafeln gelegt hat.[c]) Die Hauptwerke des Zarqâlî sind seine eben genannten Tafeln mit Erläuterungen (Regeln) dazu und seine Beschreibung und Gebrauchsanweisung zur *Ṣafîḥa*. Von den erstern hat man bis jetzt kein arabisches Manuskript gefunden,[d]) wohl aber exi-

---

[a]) Da aus „el-Qarnî" leicht „el-Qûnî" entstehen kann, oder umgekehrt, so ist es möglich, daſs die in Art. 253 u. 254 behandelten Sicilianer Brüder sind.

[b]) Der Name wird verschieden geschrieben, die ältesten Quellen, Ibn el-Abbâr (vergl. Vorw.) und el-Ḥasan Abû ʿAlî von Marokko (vergl. Art. 363) haben „el-Zarqâla", der arabische Text aus Ibn el-Q. bei Casiri hat „Ibn el-Zarqijâl".

[c]) Vergl. hierüber auch Steinschneider, Etudes sur Zarkali, im Bullet. Boncomp. T. XIV. (1881) p. 174, und für weiteres über Zarqâlî T. XVI., XVII., XVIII. und XX. derselben Zeitschrift.

[d]) Wahrscheinlich existiert ein Teil derselben in München (853); dieses Ms. trägt keinen Titel, aber am Schlusse heiſst es: Ende des Kanons des Eumathius (?) in der Verbesserung (Bearbeitung) des Abû Isḥâq el-Naqqâš, bekannt unter dem Namen el-Zarqâla. Abschrift v. J. 655 (1257).

stieren lateinische Übersetzungen derselben, so z. B. eine solche zu Oxford (Aula Mariae Magd. Nr. I, 9) durch Gerard von Cremona: Canones Arzachelis in tabulas Toletanas a Mag. Gerardo Cremonensi ordinati. Andere Übersetzungen ohne Gerards Namen befinden sich in Oxford und Paris (7421, 8⁰).[a]) — Von seiner Beschreibung der *Safîḥa* existieren, soviel mir bekannt ist, folgende arabische Mss.: Escurial (957), Leiden (1070 u. 71), Brit. Mus. (426, 12⁰) unvollständig, Oxford (St. John's Coll. 175) unter dem Titel: libellus de motu solari, dasselbe handelt aber doch über die Safîḥa. Auch hebräische, spanische und italienische Übersetzungen sind vorhanden; ich verweise für dieselben auf die genannte Abhandlung Steinschneiders. Lateinische Übersetzungen der Beschreibung der *Safîḥa* sind vorhanden: in Paris (Fonds. lat. 7195), in Bern (196, 1⁰),[b]) wahrscheinlich unvollständig, in Wien (Cod. Pal. Vind. 5258, 5280 u. 5496), die letztere mit Kommentar von dem bayerischen Astronomen Jakob Ziegler, verfafst i. J. 1504 in Köln;[c]) ferner noch je eine solche in Oxford (Bodl.), in Cambridge (Coll. Caius-Gonville) und im Brit. Mus.[d]) Ob alle diese Abhandlungen mehr oder weniger genaue Übersetzungen des arabischen Originals seien, ist zweifelhaft; es existiert nämlich auch eine Abhandlung von Joh. de Lineriis (Lignières), betitelt: Instrumentum sapheae. Eine Übersetzung wurde auch im Druck herausgegeben von Joh. Schoner i. J. 1534 in Nürnberg, unter dem Titel: Sapheae recentis res doctrinae patris Abrysakh Azarchelis summi astronomi a Joanne Schonero Carolo-Stadio Germano etc.[e]) — Im Brit. Mus. (977, 18⁰) befindet sich auch ein astrologisches Werk, das dem Zarqâlî zugeschrieben wird, ohne Titel; es handelt über den Einflufs der Planeten, wahrscheinlich gehören dazu die zwölf Planetentafeln in Nr. 977, 17⁰; das gleiche Werk befindet sich auch in Wien (1421), betitelt: Anweisung über die verschiedenen Stellungen der Planeten am Himmel und ihren Einflufs auf die Erde und die Menschen etc. mit Tafeln der Planeten. — Zarqâlîs

---

[a]) Für Weiteres vergl. Wüstenfeld, die Übers. arab. Werke ins Latein. etc. p. 78 u. 79 und die genannte Abhandlung Steinschneiders.

[b]) Catal. codic. Bernens., edid. H. Hagen, 1875, p. 246.

[c]) Vergl. Steinschneider, Bibl. math. 1890, p. 11—12 und Eneström, ibid. 1896, p. 53—54. Über Jakob Ziegler vergl. S. Günther: J. Z., ein bayerischer Geograph und Mathematiker, in Forschungen zur Kultur- und Litteraturgesch. Bayerns, 4. Buch, 1896, p. 1—61.

[d]) Vergl. Steinschneider, Etudes sur Zarkali, l. c. T. XVII. p. 770. Die (oder eine) latein. Übers. der *Safîḥa* soll von Joh. de Brixia (1263) herrühren, nach Steinschneider, Biblioth. math. 11 (1897), p. 35.

[e]) Dafs dieses nicht die Zieglersche Arbeit sei, wie Steinschneider vermutet, wurde von Eneström l. c. konstatiert.

Lebenszeit ist, wenn auch nicht ganz genau,[a]) doch mit ziemlicher Annäherung festzustellen, sie wird ungefähr in die Jahre 420—480 (1029—1087) fallen.[55]

256. ʿAbdallâh b. Fîrah, Abû Muh., aus Tortosa, war gelehrt in Erbteilung und Rechenkunst und erteilte in diesen Disziplinen Unterricht. Einer seiner Schüler war Abû Bekr Muh. b. el-Welîd von Tortosa.[56] (B. VI. 453.)

257. Hišâm b. Aḥmed b. Châlid el-Kenânî, Abû'l-Welîd, bekannt unter dem Namen el-Waqšî, aus Toledo, studierte unter Abû ʿOmar von Salamanca, Abû Muh. b. ʿAbbâs el-Chaṭîb u. a. Es sagt der Qâḍî Ṣâʿid, der noch sein Schüler war: Abû'l-Welîd el-Waqšî war einer der gelehrtesten Männer seiner Zeit, er zeichnete sich besonders in Sprachwissenschaft, Erklärung der Dichter, in der Kenntnis des Rechtes und der Religion, dann auch in der Erbteilung, Rechenkunst und Geometrie aus. Er starb in Denia am 28. Ǧumâdâ II. 489 (1096) im Alter von 81 Jahren. (B. II. 592; Maq. K. II. 232 u. 233.)

258. Aḥmed b. Chamîs b. ʿÂmir b. Dimǧ, Abû Gaʿfar, aus Toledo, beschäftigte sich hauptsächlich mit Geometrie, Astronomie und Medizin; er arbeitete auch auf dem Gebiete der Sprachwissenschaft und hatte auch Glück in der Poesie. Er war ein Zeitgenosse des eben genannten Gelehrten el-Waqšî. (Ibn Abi U. II. 41.)

259. Muh. b. ʿÎsâ b. Maʿjûn el-Zahrî[b]) el-Fâriḍ, Abû ʿAbdallâh, studierte in Denia unter Ibn Seijide,[57] hatte grofse Kenntnisse in der Sprachwissenschaft, der Erbteilung und der Rechenkunst. Zu seinen Schülern gehörte unter andern Abû Bekr b. Abî'l-Daus.[58] (B. V. 140.)

260. Isḥâq b. Jûsuf el-Ṣardafî el-Jemenî (d. h. aus Jemen), Abû Jaʿqûb, gestorben ca. 500[c]) (1106/7), schrieb: *Mochtaṣar el-hindî* (Abrifs der indischen Rechenkunst), in Berlin (5960 u. 61). Einen Kommentar dazu mit vielfachen Zusätzen schrieb Abû Bekr b. ʿAlî b. Mûsâ el-Hâmilî, Sirâǧ ed-dîn, aus Jemen, gest. 769[d]) (1367/68), unter dem Titel: *Maʿûnet el-ṭullâb* (die Hilfe der Studierenden) über die Kenntnis der Rechenkunst, in Berlin (5977).

261. ʿAbdallâh b. el-Faqîh,[e]) Abû Muh., bekannt unter dem

---

[a]) Woher Ahlwardt (Verzeichnis der arab. Handschr. der kgl. Bibl. zu Berlin, 5. Bd. p. 271) das genaue Todesjahr 493 (1100) hat, weifs ich nicht.

[b]) d. h. von Zahra, der berühmten Villenvorstadt von Cordova, jetzt nicht mehr existierend.

[c]) Nach H. Ch. V. 21, der ihn el-Ṣardî statt el-Ṣardafî nennt.

[d]) So bei H. Ch. V. 454, dagegen II. 24 i. J. 765.

[e]) Vielleicht der Sohn des in Art. 235 erwähnten el-Faqîh el-Teimî.

Namen el-Elšî (aus Elche), in Granada wohnhaft, war ein vollendeter Kenner der Erbteilung und Rechenkunst und erteilte in beiden Disziplinen Unterricht. Einer seiner Schüler war Abû ʿAbdallâh b. el-Faras (Farri?), der berichtet, el-Elšî habe ein hohes Alter erreicht. (B. VI. 464.)

262. El-Ḥasan b. ʿAbdelaʿlâ el-Kelâʿî el-Safâqisî, Abû ʿAli, hörte in seiner Vaterstadt Safâqis[a]) bei Abû'l-Ḥasan el-Lachmî die Rechte, kam nach Spanien, hörte hier bei Abû ʿAbdallâh b. Saʿdûn u. a. und liefs sich zuletzt in Ceuta nieder. Er war ein bedeutender Rechtsgelehrter und besafs auch grofse Kenntnisse in der Rechenkunst und Geometrie. Er starb in Aġmât im Muharrem d. J. 505 (1111) nach ʿIjâḍ el-Qâḍî.[59] (B. V. 25.)

263. Muh. b. Muh b. Muh., Abû Ḥâmid, el-Ġazzâlî, der berühmte arabische Philosoph und orthodoxe Gelehrte, der Gegner der griechischen Philosophie und alles fremden (nicht muhammedan.) Wissens, der Verfasser der bekannten *Tahâfut el-falâsife* (= Vernichtung der Philosophen), geboren zu Ṭûs i. J. 450 (1058/59), mufs, trotzdem er ein Feind der alten Wissenschaften war, doch hier genannt werden als Verfasser zweier (?) Werke über Astronomie. Das eine, betitelt „Kompendium der Astronomie" war früher in Paris (1217), ist aber jetzt verloren; das andere „über die Bewegung und Natur der Gestirne" befindet sich, aber mangelhaft, im Escurial (937), es ist dieses vielleicht identisch mit dem vorhergehenden. Abû Ḥâmid el-Ġazzâlî starb in Ṭûs im Ǧumâdâ II. 505 (1111). (Ibn Ch. I. 463, Übers. II. 621; Abulfid. III. 375; Ibn Š., 13.)

264. Ḥasdâj b. Jûsuf b. Ḥasdâj, Abû'l-Faḍl, aus Saragossa, von edler jüdischer Familie aus dem Stamme des Propheten Moses, verwandte grofsen Fleifs auf die Systematisierung der Wissenschaften, befestigte die Grundlagen der Sprachwissenschaft, hatte auch Talent für die Poesie und Rhetorik und ragte in der Arithmetik, Geometrie und Astronomie hervor. Er verstand auch Musik und versuchte sich in der Ausübung derselben, er war auch ein eifriger Naturphilosoph und tiefblickender Arzt. Im Jahre 458 (1066) stand er im Jünglingsalter. (Ibn Abi U. II. 50.)

265. Taufîq b. Muh. b. el-Ḥosein, Abû Muh., aus Spanien oder Nord-Afrika stammend, in Damaskus lebend, war Geometer, Astrolog und Litteraturkenner. Er gab verschiedene wissenschaftliche Werke und Poesien heraus. Er starb in Damaskus im Ṣafar d. J. 516 (1122). (C. I. 441 n. Ibn el-Q. und Münchner Ms. 440, fol. 42ᵇ.)

266. ʿOmar b. Ibrâhîm el-Chaijâmî,[b]) Ġijâṯ ed-dîn, Abû'l-Fatḥ, ein Perser, geb. ca. 430—440, war in seiner Jugend befreundet mit

[a]) Das heutige Sfâkis oder Sfaks in Tunis.

[b]) Pers. gewöhnlich nur ʿOmar Chaijâm genannt, Chaijâm bedeutet „der Zeltmacher".

el-Ḥasan b. el-Ṣabbâḥ (vergl. Anmerkg. 7), dem nachmaligen Stifter der gefürchteten ismaelitischen Sekte der Assassinen, und mit el-Ḥasan b. ʿAlî aus Ṭûs, dem spätern Wezir Niẓâm el-mulk der Seldschukischen Fürsten Alp Arslân (455—65) und Melikšâh (465—85). Er war ein bedeutender Gelehrter, bewandert in den Wissenschaften der Alten, pantheistischen Anschauungen zuneigend, die Schwächen des Islams und der dogmatischen Theologie als geistreicher satirischer Dichter in seinen „Vierzeilern" geifselnd. Im Jahre 467 (1074/75) wurde er von Melikšâh als Astronom an die neu gegründete Sternwarte in Raj (oder Nîšâpûr?) berufen, in Verein mit zwei andern Gelehrten, nämlich Abû'l-Moẓaffar el-Isfarâînî und Meimûn b. el-Neǵîb el-Wâsiṭî. Er erhielt hier den Auftrag, die persische Zeitrechnung neu zu ordnen und ist also der Begründer der sog. Ǵelâleddinischen Aera (so genannt nach dem Ehrennamen „Ǵelâl ed-dîn" des Sultans Melikšâh). Er starb i. J. 517[a]) (1123/24) in Nîšâpûr. Er schrieb philosophische und mathematische Werke; von den erstern ist noch vorhanden die Schrift über die Existenz (*fî'l-wuǵûd*), nach den Werken des Aristoteles, im Ms. Mf. 258 der Berliner Bibliothek;[b]) von den letztern finden sich noch vor: 1. Abhandlung über die Algebra,[c]) in Leiden (1020), in Paris (2458, 7⁰ und 2461), ersteres unvollständig, im Ind. Off. (734, 10⁰); dieses Werk, eines der ausgezeichnetsten der arabischen mathematischen Litteratur, wurde herausgegeben von Woepcke: L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publ., trad. et accomp. d'extraits de manuscr. inédits, Paris 1851. 2. Kommentar zu den Schwierigkeiten in den Postulaten des Euklides, in Leiden (967), verfafst i. J. 470. 3. Über die Kunst, die Quantitäten des Goldes und des Silbers in einem aus diesen beiden Metallen gemischten Körper zu erkennen, in Gotha (1158, 11⁰). Verloren zu sein scheint das im Kat. von Leiden (p. 40, Nr. 967) erwähnte Buch: *muškilât el-ḥisâb* (schwierige Probleme der Rechenkunst). (Münchener Ms. 440, fol. 95ᵇ; Woepcke, l'algèbre d'O. Alkh., p. V, n. Ibn el-Q.; Abulfid. III. 239; A. Müller, der Islam etc. II. 97 f.)

267. Ibn[d]) el-Waqšî el-Ṭolaiṭelî (aus Toledo), wahrscheinlich der Sohn des in Art. 257 behandelten Hišâm b. Aḥmed el-Waqšî, wird von

---

[a]) Vergl. Wittstein, Histor. Miscellen, in der Z. f. M. Ph. 40 (1895), hist.-litt. Abtlg. p. 3; auch der Kat. von Gotha hat als Todesjahr 517, Brockelmann dagegen 515, aus welcher Quelle, weifs ich nicht.

[b]) Vergl. auch Bibl. math. 12 (1898), p. 74. Dieses Werk fehlt im Kat. der Berliner Bibl. von Ahlwardt und deshalb wohl auch bei Brockelmann, Gesch. der arab. Litteratur, 1. Bd. p. 471.

[c]) Oder auch: Abhdlg. über die Beweise zu den Problemen der Algebra.

[d]) Maq. L. II. 255 hat „Ibn", Maq. K. dagegen „Abû", ich acceptiere die erstere Lesart.

Maqqarî unmittelbar mit diesem zusammen genannt als kenntnisreich in Logik und Geometrie und als Verfasser astronomischer Tafeln. (Maq. K. II. 232.)

268. Mozaffar el-Isfarledî, der Imâm, schrieb einen Auszug aus den Elementen des Euklides (*Ichtiṣár li-uṣûl Uqlídis*); das 14. Kap. desdelben, entsprechend dem 14. Buche des Euklides (resp. Hypsikles), befindet sich in Paris (2458, 4⁰), es wurde in französ. Übersetzung (aber nur die Lehrsätze, ohne Beweise) veröffentlicht von L. A. Sédillot in den Notices et extr. des mss. T. XIII. Paris 1838, p. 146—148. Es wäre möglich, daſs dieser Mozaffar identisch wäre mit dem Genossen ʿOmar el-Chaijâmîs (s. Art. 266) Abû'l-Mozaffar el-Isfarâ'înî, oder dann dessen Sohn. Nach dem Pariser Ms. muſs diese Abhandlung Mozaffars vor dem Jahre 539 verfaſst worden sein.

269. ʿAbdelʿazîz b. ʿAlî b. ʿAbdelʿazîz, Abû'l-Aṣbaǵ, aus Tortosa, war ein Schüler von Abû Baḥr el-Asdî u. a., Rechtsgelehrter und Litteraturkenner, bewandert in der Erbteilung und Rechenkunst, beschäftigte sich auch mit Medizin. Er begab sich als Abgesandter der Bürger seiner Vaterstadt zu Ibn Tâšfîn,[a]) nach seiner Rückkehr ereilte ihn der Tod zu Granada i. J. 523 (1129). (B. VI. 624.)

270. ʿAlî b. el-Naṣîr, Abû'l-Ḥasan, el-Adîb (d. h. der Litterat oder litterarisch Gebildete), wird von Abû'l-Ṣalt (s. Art. 272) als der gelehrteste und gründlichste der ägyptischen Astrologen jener Zeit (d. h. der Zeit von ca. 480—520, 1087—1126) bezeichnet, der allein tiefer auf die Prinzipien der Wissenschaft und die Ursachen der Erscheinungen eintrat. Da ihm Abû'l-Ṣalt dieses Lob erteilt, so halte ich es für wahrscheinlich, daſs er der Verfasser des in Berlin (5895) sich befindenden Werkes über die Astrologie sei, betitelt: *sefînet el-aḥkâm* (das Buch [eigentlich Schiff] der Urteile), das einem el-Naṣîrî (oder vielleicht auch Noṣairî) zugeschrieben wird und das Ahlwardt „ein inhaltreiches Sammelwerk für astrologische Anschauungen" nennt; der Verfasser sagt auch in der Vorrede, man müsse in der Astrologie sorgfältig prüfen und das Richtige vom Falschen sondern. Nach Ibn el-Q. war er Qâḍî in Ober-Ägypten. (Abulfar. 377, Übers. 248; Ibn el-Q. Münchener Ms. 440, fol. 93ᵇ.)

271. Rizqallâh el-Naḥḥâs (der Kupferschmied), wird von Abulfar. nach Abû'l-Ṣalt das Haupt der ägyptischen Astrologen und Lehrer von einer groſsen Zahl von Schülern genannt. Abulfar. und Ibn el-Q. erzählen von

[a]) Wenn das Todesjahr 523 richtig ist, so muſs dies der Almorawidische Fürst von Marokko ʿAlî b. Jûsuf b. Tâšfîn (oder auch Tâšufîn) sein, der auch etwa mit Auslassung des Vaters ʿAlî b. Tâšfîn genannt wird; Jûsuf b. Tâšfîn starb schon i. J. 500.

ihm ebenfalls nach Abû'l-Ṣalt eine Anekdote aus seiner astrologischen Praxis. (C. I. 436 n. Ibn el-Q.; Abulfar. 376, Übers. 247.)

272. Omeija b. ʿAbdelʿazîz b. Abî'l-Ṣalt, Abû'l-Ṣalt, aus Denia, wurde geboren i. J. 460 (1067/68) und zählte zu den ersten Ärzten Spaniens, auch in der Litteraturkenntnis und den mathematischen Wissenschaften erreichten ihn wenige. Er war ein Schüler von Abû'l-Welîd el-Waqšî, dem Qâḍî von Denia (s. Art. 257). Ferner war er talentvoll in der Musik und spielte sehr schön auf der Zither. Abû'l-Ṣalt reiste 489 (1096) nach Ägypten und hielt sich längere Zeit in Kairo auf, wo er wegen eines verunglückten Versuches, ein bei Alexandria gesunkenes Schiff zu heben, von dem Chalifen Âmir bi-aḥkâm allâh unter dem Wezirat des Melik el-Afḍal b. Emîr el-Ǵujûš in den Kerker geworfen wurde. Im Jahre 505 wurde er wieder freigelassen, ging dann im folgenden Jahre nach Mahdîja (in Tunis), wo er von dem Emir ʿAlî b. Jaḥjâ b. Temîm b. el-Moʿizz b. Bâdîs sehr ehrenvoll aufgenommen wurde. Hier wurde ihm ein Sohn ʿAbdelʿazîz geboren, der ein angesehener Dichter und vorzüglicher Schachspieler wurde und zu Beǵâja i. J. 546 (1151) gestorben ist. Abû'l-Ṣalt starb am 1. Muḥarrem d. J. 529 (1134) (nach andern 528) in Mahdîja.

Von Schriften des Abû'l-Ṣalt werden genannt: 1. Ägyptische Briefe, in denen er erzählt, was er in den ägyptischen Städten gesehen hat und von den Ärzten, Astronomen und Dichtern berichtet, mit denen er zusammengetroffen ist; dieselben sind dem Fürsten von Tunis Abû'l-Ṭâhir Jaḥjâ b. Temîm b. el-Moʿizz b. Bâdîs gewidmet, dem Vater des oben genannten Emirs, der 510[a]) gestorben ist. 2. Ein Buch über die Geometrie. 3. Ein Kompendium der Astronomie: als er dieses dem Wezir el-Afḍal überreicht hatte, zeigte dieser es seinem Astrologen Abû ʿAbdallâh el-Ḥalebî (von Aleppo), und als dieser es durchgesehen hatte, bemerkte er: „Aus diesem Buche zieht der Anfänger keinen Vorteil und der Geübte kann es entbehren." 4. Eine Abhandlung über den Gebrauch des Astrolabiums, in Berlin (5798), Leiden (1072), unvollständig, Oxford (I. 967, 10⁰), St. Petersburg (128, 2⁰), Mailand (Ambros. 279, c). 5. Über die verschiedenen Bedeutungen des Wortes *„nuqṭa"* (Punkt), in Leiden (1024). 6. Sechs Antworten auf Fragen, die ihm vorgelegt wurden, meist astronomischen und naturphilosophischen Inhaltes, im Escurial (643, 2⁰). (Ibn Ch. I. 80, Übers. I. 228; Abulfar. 375, Übers. 246; Ibn Abi U. II. 52; Maq. K. I. 372.)

273. ʿAbdelkerîm, Abû Muh., der Sicilianer, der Geometer, wurde von dem Wezir Afḍal (487—515, 1094—1121) an das von ihm gegründete Observatorium in Kairo als Astronom berufen, mufste aber, als der

[a]) Ibn Ch. hat 509; ʿAlî, sein Sohn, starb schon 515.

Chalife Âmir den Bau wieder niederreifsen liefs (wahrscheinlich ums Jahr 1126), aus Kairo flüchten. Es werden neben ihm noch als Astronomen an dieser Sternwarte genannt: Abû Ǧaʿfar b. Ḥasdâj (s. Art. 277), der Qâḍî Ibn Abî'l-ʿAiš, der Chaṭîb (Prediger, Vorbeter) Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Soleimân b. el-Bewwâb, Abû'l-Munaǧǧî b. Sened (Sind?) el-Sâʿâtî, der Geometer aus Alexandria u. a. (Bibl. arabo-sicula, von M. Amari, p. 669, aus Maqrîzîs Beschreibung von Ägypten.)

274. Muh. b. Aḥmed b. Gâlib b. Chalaf, Abû ʿAbdallâh, el-Toǧîbî, aus Valencia, bekannt unter dem Namen el-Baqqassânî.[a]) Er war ein Kenner der Erbteilung und der Rechenkunst und beschäftigte sich auch mit Medizin. Er starb ums Jahr 530 (1135/36) nach Ibn ʿIjjâd.[60] (B. V. 164.)

275. Ḥanûn b. Ibrâhîm b. ʿAbbâs b. Isḥâq el-Jaʿmarî, Abû'l-Ḥasan, aus Ubbeda[b]) (Provinz Jaen), war gelehrt in der Erbteilung und Rechenkunst, die er in seiner Vaterstadt auch lehrte, beschäftigte sich nebenbei auch mit schöner Litteratur. Er verfafste ein grofses Buch über das Geschäftsrechnen (*moʿâmalât*). Er starb ums Jahr 530. (B. V. 36.)

276. Muh. b. Aḥmed b. Abî Bišr, Abû Bekr,[c]) Behâ ed-dîn, el-Charaqî,[d]) starb in Merw i. J. 533 (1138/39). Er schrieb: *El-tabṣira* (die Einsicht Verschaffende), über die Wissenschaft der Astronomie, in Gotha (1384), Leiden (1073), Brit. Mus. (1339, 2°), Oxford (I. 911, 921 u. 976), Berlin (5670), Escurial (950), mit Kommentar eines Anonymus, Konst. (2578—81). *Muntahâ el-idrâk* (das höchste Verständnis), über die Einteilung der Sphären, in Paris (2499), Berlin (5669); der Verfasser heifst in beiden Mss. wohl unrichtig: Abû Muh. ʿAbdelǧabbâr b. ʿAbdelǧabbâr el-Charaqî. Die *tabṣira* soll nur ein Auszug aus diesem sein, gewidmet dem Wezir Abû'l-Ḥosein ʿAlî b. Naṣîr ed-dîn (oder Naṣr ed-dîn) (H. Ch. II. 180). *El-risâle el-šâmile* (die umfassende Abhandlung), ein arithmetisches Werk (H. Ch. III. 63).

277. Muh. b. Jaḥjâ[e]) b el-Ṣâiġ, Abû Bekr, bekannt unter dem Namen Ibn Bâǧǧe, oder auch Ibn Ṣâiġ, der Philosoph Avenpace des christlichen Mittelalters, aus Saragossa, war ein bedeutender Arzt und einer der ersten Philosophen der Araber. Zuerst lebte er in Sevilla und praktizierte dort, dann begab er sich nach Fes an den Hof des Fürsten Jaḥjâ b. Tâšfîn und wurde sein Wezir. Von den auf ihn neidischen Ärzten an

---

a) Nach einem Flecken westlich von Valencia.

b) Dozy schreibt in seiner Ausgabe der Geographie Edrîsîs „Ubeda".

c) Bei C. und in den Mss. von Gotha und Oxford „Abû Muh." Brockelmann nennt ihn ʿAbdelǧabbâr b. Muh., Abû Muh., Behâ ed-dîn.

d) d. h. von Charaq, einem Dorfe bei Merw.

e) Ibn Ch. hat statt dieses Namens „Bâǧǧe".

diesem Hofe wurde er vergiftet im Ramadân d. J. 533 (1139). Abû'l-Hasan ʿAlî b. ʿAbdelʿazîz b. el-Imâm aus Granada, ein Zeitgenosse und Freund des Ibn Bâǧǧe, sagt von ihm, dafs er sich auch der Geometrie und Astronomie gewidmet und hierüber Werke hinterlassen habe, die zur Genüge seine Vertrautheit mit diesen Disziplinen bewiesen hätten. Ibn Abi U. nennt aber von mathematischen Abhandlungen nur: 1. Weniges über Geometrie und Astronomie in einem Briefe an seinen Freund Abû Ǧaʿfar Jûsuf b. Aḥmed b. Ḥasdâj (s. Art. 273) nach seiner Ankunft in Ägypten. 2. Seine Antworten auf geometrische Fragen des Ibn Seijid,[61] des Geometers, und dessen Entgegnung (?). (Ibn Abi U. II. 64; Ibn Ch. II. 7, Übers. III. 130; W. A. 93)

278. Hibetallâh b. el-Ḥosein b. Aḥmed, Abû'l-Qâsim, Bedîʿ el-Zamân (das Wunder der Zeit) el-Aṣṭorlâbî el-Baǧdâdî (n. Abulfar. el-Iṣfahânî), gewöhnlich genannt el-Bedîʿ el-Aṣṭorlâbî, einer der ausgezeichnetsten Gelehrten, Mediziner, Philosoph, Dichter, Mathematiker und Astronom, besonders aber nach dem Zeugnis von Muhaḏḏab ed-dîn Abû Naṣr Muh. b. Muh. el-Ḥalebî der erste seiner Zeit in der Verfertigung und Kenntnis des Astrolabiums. Der Vater Muhaḏḏab ed-dîns, bekannt unter dem Namen el-Burhân der Astrolog,[a]) aus Ṭabaristân gebürtig, eine Berühmtheit in dieser Kunst, war lange Zeit Genosse und Freund el-Aṣṭorlâbîs. Dieser verbesserte auch die Konstruktion des Himmelsglobus und das allgemeine (umfassende) Instrument, dessen Erfinder el-Choǧendî ist (s. Art. 173), der es aber nur für eine Breite eingerichtet hatte; ferner die Lineale (*masâṭir?*) und die Zirkel (vollkommenen?). Im Jahre 510 (1116/17) stand el-Aṣṭorlâbî mit Emîn ed-daula b. el-Talmîḏ[b]) in Ispahan im freundschaftlichen Verkehr; er starb i. J. 534 (1139/40). Nach Abulfar. soll er, wie sich beim Verlegen seines Grabes gezeigt hat, als Scheintoter begraben worden sein. Er schrieb: Astronomische Tafeln, betitelt „die Maḥmûdischen", weil sie dem Sultan Maḥmûd b. Muh. Abû'l-Qâsim dediziert wurden. Abulfid. erwähnt astronomische Beobachtungen, die unter Leitung el-Aṣṭorlâbîs i. J. 524 (1130) im Palast der Seldschukischen Sultane in Bagdad begonnen, aber nicht vollendet wurden. (C. I. 424 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 184, Übers. III. 580; Ibn Abi U. I. 280; Abulfar. 395, Übers. 260; Kut. II. 390; Abulfid. III. 441 u. 483.)

279. ʿAbdelʿazîz b. Muh. b. Faraǧ b. Soleimân el-Qaisî, Abû'l-Aṣbaǧ, bekannt unter dem Namen el-Meknâsî, aus Játiva, hörte die

---

[a]) Ibn Ch. (Übers. IV. 138) nennt den Sohn Muhaḏḏab ed-dîn Ibn el-Burhân und nicht den Vater einen Mathematiker und Astronomen, irrt sich aber wahrscheinlich hierin.

[b]) Christlicher Arzt und Presbyter zu Bagdad, gest. i. J. 560 (1164) im Alter von 94 Jahren (vergl. W. A. 97).

Koranexegese bei seinem Vater und bei Abû ʿAlî Manṣûr b. el-Chair u. a., liefs sich in Granada nieder und las dort über Erbteilung und Rechenkunst. Er gehörte zu den vorzüglichsten Kennern der Litteratur und der mathematischen Wissenschaften. Er wurde geboren in Játiva i. J. 452 (1060) und starb zu Granada im Ṣafar 536 (1141). Es erwähnt dies sein Neffe Abû ʿAbdallâh Muh. b. ʿAbderraḥmân b. Muh. (ein Traditionist, Litteratur- und Korankenner, gest. im Ǧumâdâ II. 561 (1166)). (B. VI. 626.)

280. ʿAbdessalâm[a]) b. ʿAbderraḥmân b. Abî'l-Riǧâl Muh. el-Lachmî el-Ifrîqî, später el-Išbîlî (der Sevillaner) genannt, Abû'l-Ḥakem, bekannt unter dem Namen Ibn Barriǧân, hörte bei Abû ʿAbdallâh b. Manṣûr den *Ṣaḥîḥ* des Bochârî,[62] und war sehr bewandert in der Korankenntnis, Tradition und Metaphysik, worüber er verschiedene Schriften verfafst hat. Nach Ibn el-Zobeir[63] und Ibn Furtûn beschäftigte er sich auch eifrig mit Rechenkunst und Geometrie, war überhaupt sehr vielseitig und neigte sehr zur Mystik hin. Er starb in Marokko i. J. 536 (1141/42). (B. VI. 559 u. 645: Anhang zur Takmile des Ibn el-Abbâr aus Cod. Alger.; Ibn Ch. I. 471, Übers. II. 642.)

281. Muwaffaq Abû'l-Ḥasan, der Freigelassene des Jûsuf b. Ibrâhîm, bekannt unter dem Namen el-Masqâlî (oder Masfâlî),[b]) aus Almeria. Er hörte daselbst bei Abû ʿAlî el-Ṣadafî (s. d. Quellen) i. J. 506 (1112/13), dann auch bei Abû ʿAlî el-Ġassânî. Er war Rechner und Astronom und verfafste über letztere Wissenschaft ein Buch, betitelt „die richtige Leitung zu den Leuchten des Himmels"; dasselbe wird erwähnt von Ibn ʿIjâd, der bemerkt, Muwaffaq habe dieses Werk als Auszug (aus einem andern umfangreichern) in Játiva i. J. 506 geschrieben. Er war auch Traditionist. (B. IV. 196 u. V. 408.)

282. Muh. b. Ibrâhîm b. Jaḥjâ b. Saʿîd, Abû ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn el-Emîn, stammte ursprünglich aus Toledo. Er studierte unter ʿÂmir el-Ṣaffâr und Abû Isḥâq el-Zarqâllah (sic!).[64] Er war hervorragend in der Kenntnis der Erbteilung, der Rechenkunst und der Geometrie (Ausmessungslehre). Er starb i. J. 539 (1144/45). (B. V. 175.)

283. Abû ʿAlî, der Geometer, lebte ums Jahr 520—30 (1126—36) in Ägypten, sein eigentlicher Name ist nicht bekannt.[c]) Er war gleich

---

[a]) So heifst er B. VI. 645 und bei Ibn Ch. I. 471 und im Pariser Ms. 2642, wo ein alchymistisches Werk von ihm sich befindet; dagegen B. VI. 559 heifst er mit Weglassung von ʿAbdessalâm blofs ʿAbderraḥmân b. Abî'l-Riǧâl Muh. etc.

[b]) Im Moʿǧam des Ibn el-Abbâr (B. IV. 196) steht „Masnâlî".

[c]) El-Sujûṭî (I. 312) hat einen el-Ḥosein b. Manṣûr, Abû ʿAlî, Arzt, Litteraturkenner und Dichter, gest. im Anfang des 6. Jahrh. d. H., vielleicht ist unser Abû ʿAlî mit diesem identisch, vergl. auch Anmerkg. 30.

ausgezeichnet als Geometer, wie als Kenner der Litteratur und Dichter. Ibn Ch. und Abulfar. führen von ihm Verse an, aus denen man den Geometer erkennt, dieselben Verse werden aber von andern dem Emîn ed-daula b. el-Talmîḏ (s. Art. 278) zugeschrieben. (C. I. 408 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. II. 192; Übers. III. 599; Abulfar. 385, Übers. 253.)

284. Ǧâbir b. Aflaḥ, Abû Muh., aus Sevilla, der Astronom Geber[a]) des Mittelalters, wird von keinem der bisher näher geprüften arabischen Biographen erwähnt, nur H. Ch. VI. 506 hat: *Hei'at ibn Aflaḥ* (die Astronomie des Ibn Aflaḥ), ohne jede weitere Bemerkung. Nach Steinschneider[b]) soll sein Sohn mit Meimonides (1135—1204) persönlich bekannt gewesen sein. Nach C. I. 367, der aber keine Quelle anführt, soll er durch seine astronomischen Beobachtungen, besonders über die Äquinoktien und Solstitien, sich ausgezeichnet haben. Er wird auch von el-Ḥasan b. ʿAlî von Marokko in seinem Werke „die Gesamtheit der Anfänge und der Enden" zitiert als Erklärer der Herleitung des Namens „gerade Sphäre". Seine Lebenszeit ist nicht genau festzustellen, doch darf man mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit annehmen, dafs sein Todesjahr zwischen 535 u. 545 (1140 u. 1150) liegen wird.

Seine „Astronomie" ist in Berlin (5653) und im Escurial (905 u. 925) noch vorhanden;[c]) sie wurde von Gerard von Cremona ins Lateinische übersetzt, zum erstenmal gedruckt in Nürnberg 1534 und zugleich mit Peter Apians Instrumentum primi mobilis und von diesem selbst herausgegeben. Meimonides soll im Verein mit seinem Schüler Joseph b. Jehûdâ b. Aknin eine verbesserte Ausgabe der Astronomie des Ǧâbir unternommen haben (vergl. Steinschneider, l. c. p. 72 und auch C. I. 293 n. Ibn el-Q.). Es wird ihm auch eine Abhandlung über den *šakl el-qaṭṭâʿ* (Transversalensatz) des Menelaus zugeschrieben, welche in der hebräischen Übersetzung eines Anonymus in Oxford (I. p. 84, Hebraeica 433, 2⁰) noch vorhanden ist;[d]) vielleicht ist dies nur eine Übersetzung des sich auf diesen Satz beziehenden Abschnittes seiner Astronomie. Ob das in einem Münchener Codex vorhandene hebräische Werk, betitelt *„Sefer ha-tamar"*, das über Geheimwissen-

[a]) Früher oft und jetzt noch (vergl. Anmerkg. 2) verwechselt mit dem berühmten Alchymisten Ǧâbir b. Ḥaijân.

[b]) Zur pseudepig. Litteratur des Mittelalters, 1862, p. 70.

[c]) Das Berliner Ms. und Nr. 925 des Escurial sind jedenfalls identisch und stimmen im Anfang und Schlufs mit der Gerardschen Übersetzung überein, dagegen zeigt Nr. 905 des Escurial Abweichungen im Anfang und Schlufs; das Berliner Ms. trägt den Titel „Verbesserung (*iṣlâḥ*) des Almagestes durch Ǧâbir b. Aflaḥ".

[d]) Vergl. auch Steinschneider, l. c. p. 72 u. 73.

schaften handelt, dem Ibn Aflaḥ zukomme, wie Steinschneider (l. c. p. 14 ff.) vermutet, bezweifle ich, der Verfasser desselben wird auch nicht Ibn Aflaḥ, sondern Abû Aflaḥ der Saragossaner genannt.

285. Muh. b. Soleimân el-Toġîbî el-Saraqosṭî, Abû ʿAbdallâh, gebürtig aus Saragossa, begab sich später nach Almeria. Er war ein Korankenner und bewandert in der Erbteilung und Rechenkunst; er schrieb hierüber (ob nur über die letzte oder über beide Disziplinen, ist ungewifs) mehrere Werke. (B. V. 182.)

286. El-Zobeir b. Muh. el-Faraḍî, Abû Muh., aus Denia, ein Schüler des berühmten Rechtsgelehrten und Traditionisten Abû ʿAlî el-Ṣadafî (s. d. Quellen), war auch bewandert in der Erbteilung und Rechenkunst. Einer seiner Schüler war Abû ʿAbdallâh b. Saʿîd el-Moqri'. In B. IV. 88 ist in einer Randnote bemerkt, dafs el-Zobeir bei Abû Merwân Muh. b. Jûsuf el-Saraqosṭî i. J. 508 (1114/15) Vorlesungen gehört habe. (B. IV. 88 u. B. V. 73.)

287. Aḥmed b. Muh. b. el-Surâ (wird auch Surrî und Seri gelesen) Neǵm ed-dîn, Abû'l-Futûḥ, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ṣalâḥ, vortrefflich in den philosophischen und mathematischen Wissenschaften, klar und deutlich in der Sprache, hervorragend in der Medizin. Er stammte aus Hamadân in Persien und wohnte in Bagdad; von hier berief ihn Ḥosâm ed-dîn b. Ilġâzî b. Ortoq, Herr von Mâridîn, zu sich und überhäufte ihn mit grofsen Ehren. Er blieb lange Zeit sein Gesellschafter und Leibarzt, dann begab er sich nach Damaskus und blieb dort bis zu seinem Tode, der nach Ibn el-Q. (Münchener Ms. 440, fol. 158[b]) i. J. 548 (1153/54), nach Ibn Abi U. (II. 164) einige Jahre nach 540 erfolgt ist.[a]) Von ihm existieren noch: Zwei geometrische Probleme, in Leiden (1006); das erste verlangt, in einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten gleich dem Durchmesser des Kreises seien (?); das zweite handelt über die Ausmessung der Kugel; wahrscheinlich befinden sich dieselben Abhandlungen auch in Oxford (I. 913, 3°), wo der Titel nur lautet: „Problemata ad triangulum circulumque pertinentia". Über die in den Tafeln des 7 u. 8. Buches des Almagestes vorkommenden Fehler, in Oxford (I. 940, 11°).

288. ʿAdnân b. Naṣr b. Manṣûr Muwaffaq ed-dîn Abû Naṣr, bekannt unter dem Namen Ibn el-ʿAinzarbî, aus ʿAin-Zarba[b]) gebürtig, lebte längere Zeit in Bagdad, widmete sich der Medizin und Philosophie

---

[a]) Die Angabe Weils (Gesch. d. Chalifen III. 400), dafs Ḥosâm ed-dîn b. Ilġâzî die Herrschaft über Mâridîn 580 angetreten habe, ist wohl unrichtig, denn sein Vater Ilġâzî b. Ortoq kam schon 498 in den Besitz von Mâridîn (A. Müller, der Islam etc. II. 138).

[b]) Nach W. A. p. 95 = Anazarbus in Cilicien.

und betrieb mit besonderem Eifer die Astrologie. Von Bagdad zog er nach Ägypten und trat in den Dienst der dortigen Chalifen. Er verfaſste eine groſse Zahl von Werken über Medizin, Logik und andere Wissenschaften und hatte eine groſse Zahl von Schülern. Er starb i. J. 548 (1153/54) in Kairo. (Ibn Abi U. II. 107.)

289. Muh. b. Jûsuf b. ʿAmîra el-Anṣârî, Abû ʿAbdallâh, aus **Orihuela**, hörte die Koranexegese bei Abû ʿAbdallâh b. Farağ el-Meknâsî (Vater von Nr. 279) und Abû'l-Qâsim b. el-Nachchâs etc. Er war auch gelehrt in der Erbteilung und Rechenkunst. Nach Abû ʿAbdallâh b. ʿAbderraḥmân el-Meknâsî (s. Art. 279) starb er i. J. 549 (1154/55) in Orihuela (Provinz Murcia). (B. V. 199.)

290. ʿObeidallâh (auch ʿAbdallâh) b. el-Moẓaffar b. ʿAbdallâh Abû'l-Ḥakem, el-Bâhilî el-Andalusî, wurde geboren zu Almeria[a]) in Spanien i. J. 486 (1093), war vortrefflich bewandert in den philosophischen Disziplinen, in der Geometrie, in Litteratur und Medizin; er war auch ein guter Dichter, dem Scherz und dem Wein ergeben. Er machte die Wallfahrt nach Mekka das erste Mal 516, das zweite Mal 518, ging dann nach Damaskus, von hier nach Kairo und Alexandria, wo er noch weitere Studien machte, dann nach Bagdad, wo er sich für längere Zeit niederlieſs. Von seinem Aufenthalt daselbst erzählt Abulfar.[b]) folgende Geschichte: „Als er einst in den Straſsen der Stadt spazieren ging, sah er vor einem Hause einen Mann, der einem Jüngling den Euklid erklärte; er trat hinzu, hörte, daſs die Erklärungen mangelhaft waren und verbesserte dieselben; der Jüngling teilte dies seinem Vater mit und dieser ersuchte den Abû'l-Ḥakem, seinem Sohne von nun an in den mathematischen Wissenschaften Unterricht zu erteilen; dies geschah unter der Regierung des Chalifen el-Muktafî bi'amr allâh." Später zog Abû'l-Ḥakem nach Damaskus, wo er bis zu seinem Tode als Arzt wirkte; er starb im Ḏû'l-Qaʿda 549 (1155). (Ibn Abi U. II. 144; Ibn Ch. I. 274, Übers. II. 82; Abulfar. 396, Übers. 261; Maq. K. I. 385 u. II. 17.)

291. Muh. b. ʿÎsâ b. ʿAbdelmunʿim,[c]) Abû ʿAbdallâh, el-Ṣiqillî[d]) (d. h. der Sicilianer), war Dichter, Geometer und Astronom, Meister in diesen Wissenschaften, angesehen bei den Gelehrten.[e]) (Bibl. arab.-sicula,

---

[a]) W. A. p. 96 hat unrichtig „Murcia"; Ibn Ch. giebt nur seine Abstammung aus Almeria an, läſst ihn aber in Jemen geboren werden.

[b]) Hier heiſst er fälschlich „Abû'l-Halm" statt „Abû'l-Ḥakem".

[c]) Ibn el-Q. (C. I. 434) und wohl nach ihm Ibn Chaldûn haben nur „el-Munʿim", nicht „ʿAbdelmunʿim"; das letztere wird aber das richtige sein, denn sein Vater heiſst nach der Bibl. arab.-sicula von Amari, p. 586 ʿÎsâ b. ʿAbdelmunʿim.

[d]) So nach Jâqût, wird aber auch gelesen „el-Siqulî".

von M. Amari, p. 587 u. 619, nach ʿImâd ed-dîn el-Iṣfahânî und Ibn el-Q.; C. I. 434 n. Ibn el-Q.)

292. Muh. b. Munachchal[a]) ben Raijân, Abû ʿAbdallâh, gebürtig von der Halbinsel Šuqar[b]), war ein Schüler von Abû Muh. el-Rakallî (?) u. a. und sehr gelehrt in der Korankenntnis, Grammatik, Lexikographie, in der Rechenkunst und Ausmessungslehre. Zu seinen Schülern zählten Dâ'ûd b. Muh. b. Nadîr u. a. Er starb in seiner Heimat i. J. 551 (1156). (B. V. 204.)

293. ʿAbderraḥmân el-Châzinî, Abû Manṣûr, auch Abû'l-Fatḥ, aus Bagdad, schrieb ums Jahr 530: *el-zîǵ el-sinǵarî* (die Sinǵarischen Tafeln), gewidmet dem Sultan Sinǵar b. Melikšâh b. Alparslân (gest. 552), im Vatikan (761). Hammer (Biblioth. ital. T. 46) bemerkt, dafs diese Tafeln nicht weniger bekannt waren als die Ulûǵ Beg'schen.[c])

294. Ḥizballâh b. Chalaf b. Saʿîd b. Huḏeil, Abû Muh., bekannt unter dem Namen el-Tarrâlibî, aus Valencia, machte die Wallfahrt nach Mekka und hörte in Alexandria den Selefî u. a. i. J. 539 (1144/45). Er hatte grofse Kenntnisse in der Erbteilung und Rechenkunst. (B. V. 34.)

295. Muh. b. ʿAbdelʿazîz b. Jûsuf el-Murâdî, Abû'l-Ṭâhir, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ǧijâb (?), lebte nach Casiri im 6. Jahrh. d. H. und war gebürtig aus Sevilla. Er schrieb ein Werk, betitelt: *Taqjîd misâḥat el-suṭûḥ* (Registrierung der Ausmessung der Flächen), mit vielen ebenen und körperlichen Figuren, mit architektonischen und mechanischen Vorschriften, von dem noch ein Exemplar im Escurial (924) vorhanden ist und aus welchem Casiri einen Auszug über die im arabischen Spanien zu jener Zeit gebräuchlichen Mafse und Gewichte giebt. (C. I. 364—67.)

296. ʿAbderraḥîm .... (Lücke im Ms.) el-Šamûqî (?), las in Murcia über den Koran, die Sprachwissenschaft und Rechenkunst. Er war sehr gelehrt und scharfsinnig. El-Dabbî, dessen Werk (s. d. Quellen) dieser Artikel entnommen ist und der nach 592 gestorben ist, hatte noch unter ihm studiert. Er besorgte auch längere Zeit das Gebet in der Moschee zu Murcia. Er verfafste eine *Arǵûza* über die Rechenkunst, worin er der *Arǵûza* des Ibn Seijide[d]) entgegentrat. Er war ein vortrefflicher Mensch und hatte,

---

[a]) Er wird auch genannt „Muh. b. Muh."

[b]) Dozy in seiner Ausgabe der Geographie Edrîsîs sieht hierin das heutige Alcira am Jucar, Provinz Valencia.

[c]) Es ist dies der in Useners Bonner Programm v. J. 1876 (ad historiam astron. symbola) nach H. Ch. (III. 564) Abû'l-Fatḥ ʿAbderraḥmân el-Châzin genannte Astronom; er soll nach H. Ch. ein freigelassener griechischer Sklave gewesen sein; bei Ibn el-Q. (f. 158[a]) heifst er: Abû'l-Faḍl el-Châzimî und sein Todesjahr wird auf ca. 582 (1186/87) angegeben.

[d]) Vergl. Art. 259 und Anmerkg. 57

wenn er ausging, für den Geringsten wie für den Höchsten stets den Grufs bereit. (B. III. 361.)

297. Aḥmed b. ʿAlî b. Ibrâhîm, Abû'l-Ḥosein el-Qâḍî el-Rašîd, el-Aswânî (od. Oswânî)[a]), war ein besonders in den Wissenschaften der Alten, in Philosophie und Geometrie sehr bewanderter Mann, auch ein guter Dichter. Im Jahr 559 wurde er zum Inspektor der Verwaltung in Alexandria ernannt, welches Amt er nur gezwungen annahm; in der That brachten es seine Feinde auch dahin, dafs er im Muḥarrem d. J. 563 (1167) unschuldig verurteilt und hingerichtet wurde. (Ibn Ch. I. 51; Übers. I. 143; el-Sujûṭî I. 311.)

298. ʿAbdallâh b. Aḥmed b. Aḥmed, Abû Muh., bekannt unter dem Namen Ibn el-Chaššâb, geboren zu Bagdad i. J. 492, war ein bedeutender Korankenner und Traditionist, bewandert in Arithmetik und Erbteilung. Er starb zu Bagdad im Ramaḍân 567 (1172). (Ibn Ch. I. 267, Übers. II. 66; Abulfid. III. 645.)

299. ʿAbdallâh b. Šâkir b. Abî'l-Muṭahhir el-Maʿadânî,[b]) war ein ausgezeichneter Gelehrter, besonders in Geometrie und Astrologie bewandert. Er schrieb verschiedene Werke in persischer und arabischer Sprache, worunter auch Poesien. Er starb ums Jahr 570 (1174/75) in Ispahan. (C. I. 404 n. Ibn el-Q.)

300. Hibetallâh b. ʿAlî b. Melkâ,[c]) Abû'l-Barakât, el-Beledî, mit dem Ehrennamen Auḥad el-Zamân (der Einzige der (seiner) Zeit), wurde geboren in Beled,[d]) lebte später in Bagdad und war ein bedeutender Arzt unter dem Chalifen el-Mustanǵid billâh (gest. 566). Er war Jude, trat dann aber später zum Islam über. Er starb in Bagdad ca. 570 im Alter von 80 Jahren. Er schrieb: Über die Ursache, weshalb die Sterne bei Nacht erscheinen und bei Tage verschwinden, in Berlin (5671). In Oxford (I. 1042, 2⁰) befinden sich „Tafeln der Fixsterne“ von Zein ed-dîn Abû'l-Barakât, vielleicht sind diese auch von unserm Autor verfafst. (Ibn Abi U. I. 278; Abulfar. 394, Übers. 259; W. A. 98.)

301. ʿAbdallâh b. Muh. b. Sahl el-Ḍarîr, Abû Muh., aus Granada, bekannt unter dem Namen Waǵh Nâfich,[66] hörte die Koranexegese bei Abû'l-Ḥasan b. Durrî, mit dem er lange Zeit befreundet war, und bei Abû'l-Qâsim ʿAbderraḥîm b. Muh. b. el-Faras. Er war auch bewandert in der Sprachwissenschaft und Litteratur und beschäftigte sich eifrig mit den

---

[a]) d. h. aus Assuan, dem alten Syene, gebürtig.

[b]) Der arabische Text Ibn el-Q.'s hat nach L. A. Sédillot (Prolégom. des tables astron. d'Oloug-Beg, Paris 1847, p. XC) noch den Beinamen „Šems ed-dîn“.

[c]) W. A. 98 hat „Melkân“.

[d]) So hiefsen mehrere Orte, einer derselben lag am Tigris oberhalb Mosul

mathematischen Wissenschaften, die er unter einem der Genossen des Abû Bekr b. el-Ṣâiġ (s. Art. 277) studiert hatte. Er war Erzieher des Sohnes des Emirs Abû ʿAbdallâh b. Saʿd. Er wohnte in Murcia und starb daselbst in der Mitte des Dûʾl-Qaʿda 571 (1176); geboren war er zu Granada im Muḥarrem 490 (Ende 1096). (B. VI. 484; C. II. 99 u. 128 nach Muh. b. ʿAbdallâh Lisân ed-dîn.)[67]

302. Samûʾîl b. Jaḥjâ[a]) b. ʿAbbâs el-Maġrebî el-Andalusi[b]) war ein vorzüglicher Kenner der mathematischen Wissenschaften und der Medizin. Er stammte aus dem Westen, wohnte eine zeitlang in Bagdad, wanderte dann nach Persien aus und blieb dort bis zum Ende seines Lebens. Der Scheich Muwaffaq ed-dîn ʿAbdellaṭîf b. Jûsuf el-Baġdâdî sagt: „Samûʾîl war als Jüngling in Bagdad noch Jude, ging dann zum Islam über und starb im besten Mannesalter zu Merâġa. Er zeichnete sich in der Arithmetik so sehr aus, daſs ihm keiner seiner Zeit gleichkam, ebenso erreichte er in der Algebra den höchsten Grad der Ausbildung. Er hielt sich einige Zeit in Dijârbekr und Âḏerbeiġân auf und schrieb Abhandlungen über Algebra, in welchen er gegen Ibn el-Chaššâb el-Naḥwî (den Grammatiker) auftrat, der sein Zeitgenosse und auch bewandert in Rechenkunst und Algebra war" (s. Art. 298). Ibn el-Q. berichtet, daſs Samûʾîl, nachdem er nach dem Osten gekommen war, nach Âḏerbeiġân ging und dort in den Dienst der Pehlwâne trat, nachher seinen Wohnsitz in Merâġa aufschlug. Hier wurden ihm mehrere Söhne geboren, die sich alle der Medizin zuwandten. Er starb in Merâġa nach dem Jahre 570[c]) (1174/75). Er schrieb: Abhandlung an Ibn Chaddûd[d]) gerichtet über arithmetische und algebraische Fragen. Über die Schwächen[e]) der Geometer, für den Sultan Neġm ed-dîn Abûʾl-Fatḥ Šâh Ġâzî b. Ṭoġrulbeg im Ṣafar 570 geschrieben. Das Buch *el-Qiwâmi*[f]) über das indische Rechnen, verfaſst i. J. 568. Das Buch über das rechtwinklige Dreieck, ein sehr schönes Werk, gerichtet an einen Bewohner von Ḥaleb, genannt der Šerîf.[g]) Das Buch *el-mambar* (Kanzel, Katheder, auch Rechenbrett) (?), über die Ausmessung (sic) der Körper aus gemischten Substanzen zur Bestimmung der unbekannten Mengen (der einzelnen Bestand-

[a]) C. und Abulfar. haben „Jehûdâ".

[b]) Diesen Beinamen haben C. und Abulfar. neben el-Maġrebî.

[c]) Ahlwardt hat als Todesjahr 576, nach H. Ch.

[d]) Sollte wahrscheinlich heiſsen „Ibn el-Chaššâb".

[e]) Das arabische Wort heiſst *iʿġâz* oder *aʿġâz*; Hammer übersetzt „Wunder", und Steinschneider (Biblioth. math. 1896, p. 81) „Schwierigkeiten".

[f]) Sehr wahrscheinlich so genannt nach dem Sekretär Qiwâm ed-dîn Jaḥjâ b. Saʿîd el-Šeibânî (s. Art. 314), dem es wohl gewidmet war.

[g]) C. fügt hier n. Ibn el-Q. noch hinzu: „in welchem eine Reihe von Figuren behandelt sind und von jeder der Flächeninhalt berechnet ist".

le). Enthüllung der Irrtümer der Astrologen, in Oxford (I. 964), in iden (1074). Anleitung (*tabṣira*) zur Rechenkunst, in Oxford (I. 966, 1°) d Berlin (5962).[a]) Das genügende (Buch) über die Rechnung der Drachmen .d Dinare, ein Kompendium des Buches von el-Karchî.[67] Ein Gedicht er Handrechnung (Fingerrechnung).[b]) (C. I. 440 n. Ibn el-Q.; Ibn Abi II. 30; Abulfar. 408, Übers. 268.)

303. Muh. b. Abî'l-Ḥakem ʿObeidallâh b. el-Moẓaffar, Abû'l-əğd, Afḍal ed-daula, der Sohn von Nr. 290, gehörte zu den hervorgendsten Gelehrten in Medizin, Geometrie und Astrologie. Er verstand ch die Musik sehr gut und spielte mehrere Instrumente. Er lebte zur it des Sultans el-Melik el-ʿÂdil Nûr ed-dîn Maḥmûd b. Zenkî (gest. 569), r ihn zum Leiter des von ihm errichteten Hospitals ernannte. Er starb Damaskus ca. 575 (1179/80). (Ibn Abi U. II. 155.)

304. Muh. b. ʿAbdelmelik b. Muh. b. Ṭofeil el-Qaisî, Abû ıkr, bekannt unter dem Namen Ibn Ṭofeil, der Abubacer des christhen Mittelalters, gebürtig aus Wâdî Aš (Guadix[c]) in der Provinz Granada), ıte und lehrte die meiste Zeit seines Lebens in Granada. Er war .ein rühmter Philosoph und Arzt, zeichnete sich auch in Mathematik und Astromie aus; er war ein Schüler von Ibn Bâğğe und Lehrer des Ibn Rošd verroës). Er begab sich später an den Hof des Almohaden Jûsuf b. bdelmumin nach Marokko, trieb mit demselben philosophische und mediıische Studien und starb daselbst i. J. 581 (1185/86). (Ibn Ch. II. 374, ›ers. IV. 474 u. 478; C. II. 76 nach Lisân ed-dîn; Gayangos, I. 335 nach mselben.)[68]

305. Muh. b. Jûsuf b. Muh., Abû ʿAbdallâh, Muwaffaq ed-dîn -Arbilî (d. h. aus Arbela), geboren in Baḥrain, bedeutender Sprachlehrter, Dichter und Kenner der alten Wissenschaften. Er lebte einige ›it in Šahruzûr, dann in Damaskus, wo er mit Ṣalâḥ ed-dîn (Saladdin) ısammenkam und ihn in seinen Gedichten verherrlichte. Er schrieb eine rklärung der Schwierigkeiten im Euklides. Er starb in Arbela im Rabîʿ . 585 (1189). (Ibn Ch. II. 23, Übers III. 172; Abulfid. IV. 103.)

306. ʿAbdelmelik b. Muh., Abû'l-Ḥosein, el-Šîrâzî, lebte ums

---

[a]) Hier wird er genannt: el Moẓaffar b. Jaḥjâ el-Mağrebî, bekannt unter dem men Samû'îl (im Oxforder Ms. el-Šamûlî); es wäre möglich, dafs diese *tabṣira* ntisch wäre mit dem Buch *el-Qiwâmî*, das erste Kap. derselben ist nämlich itelt: über die Kenntnis der indischen Zahlzeichen und ihre Rangordnungen; den Quellen ist sie nicht erwähnt.

[b]) Die zwei letzten Schriften finden sich bei H. Ch. V. 20 und VI. 193 erhnt, in den oben zitierten Quellen nicht.

[c]) Nicht Cadix, wie Wüstenfeld (W. G. 273) übersetzt.

Jahr 550 und starb vor 600 (1203/04). Er schrieb eine kürzere Bearbeitung (Kompendium) der sieben Bücher des Apollonius über die Kegelschnitte, nach der Übersetzung des Hilâl b. Abî Hilâl (s. Art. 49) und des Ṯâbit b. Qorra (s. Art. 66), noch vorhanden in Oxford (I. 913, 987 u. 988), in den letzten beiden Mss. nur das 5.—7. Buch mit Randbemerkungen von ungenanntem Verfasser; in Leiden (980), ebenfalls nur das 5.—7. Buch. Er soll auch nach einer Stelle des Oxforder Ms. 913 einen Auszug aus dem Almagest verfafst haben, von welchem Qoṭb ed-dîn el-Šîrâzî (s. Art. 387) eine persische Übersetzung verfafst hat. (Vergl. Nix, das fünfte Buch der Conica des Apollonius in der arabischen Übersetzung des Thabit ibn Corrah, Leipzig 1889, p. 4—8, und Steinschneider, Z. D. M. G. 50, p. 183.)

307. Maḥmûd b. Qâjid (?) el-Amûnî, Šaraf ed-dîn, von Mekka, vollendete i. J. 568 (1172/73) eine Abhandlung über die Geometrie und die indischen Ziffern (*fî'l-handase we'l-raqm el-hindî*), in Florenz (Palat. 309), unvollständig.

308. Muh. b. el-Ḥosein b. Zeid el-Ġâfiqî, Abû'l-Welîd, von Granada, ursprünglich aus Toledo stammend, ein angesehener und edler Mann, Steuereinnehmer in Granada und sehr bewandert in der Arithmetik. Er starb 588 (1192). (C. II. 91 n. Lisân ed-dîn.)

309. Mubaššir b. Aḥmed b. ʿAlî b. ʿOmar, Abû'l-Rašîd, el-Râzî, geboren und wohnhaft in Bagdad, genannt el-Ḥâsib (der Rechner), einzig zu seiner Zeit in dieser Kunst und der Kenntnis der Eigenschaften der Zahlen, wie auch in Algebra, Erbteilung und Astronomie. Er lehrte zur Zeit des Chalifen Nâṣir li-dîn allâh (575—622) und hatte viele Schüler. Der Chalife überliefs ihm die Auswahl der Bücher, welche er der hohen Schule el-Niẓâmîje in Châtûn[a]) schenken wollte. Er wurde geb. i. J. 530 und starb i. J. 589 (1193). (C. I. 428 n. Ibn el-Q.)

310. Muh. b. ʿAlî b. Šoʿaib, Fachr ed-dîn Abû Šoǵâʿ, bekannt unter dem Namen Ibn el-Dahhân (Sohn des Ölhändlers), war aus Bagdad gebürtig, begab sich später nach Moṣul, wo er sich an Ǧemâl ed-dîn el-Iṣfahânî, dem Wezir, anschlofs. Hierauf trat er in den Dienst des Sultans Saladdin über, der ihn zum Mitglied des Dîwâns von Maijâfâriqîn ernannte. Von hier begab er sich nach Damaskus, reiste dann i. J. 586 nach Ägypten, kehrte aber bald wieder nach Damaskus zurück, wo ihn wiederum Saladdin sehr ehrenvoll aufnahm. Er war sehr gottesfürchtig und enthaltsam, hatte grofse Kenntnisse in der Sprach- und Rechtswissenschaft, wie auch in Mathematik und Astronomie. Er verfafste eine grofse Zahl von Werken, worunter auch sehr korrekt ausgeführte astronomische Tafeln. Im Jahre 589 machte

---

[a]) Es war dies eine Moschee in Damaskus, vergl. Art. 319.

er die Pilgerfahrt nach Mekka, auf der Rückkehr stürzte er bei el-Ḥille mit seinem Kameel und fand hiebei den Tod im Ṣafar d. J. 590 (1194). (Ibn Ch. II. 24, Übers. III. 175; Ibn Abi U. II. 182; W. G. 281.)

311. Muh. b. Omeija, Abû ʿAbdallâh, aus Baeza in Spanien, war ein bedeutender Meister (oder Lehrer) in der Rechenkunst und starb i. J. 591 (1195). (B. V. 265.)

312. Jaḥjâ b. Ismâʿîl el-Andalusî el-Bajâsî (von Baeza), Abû Zakarîjâ, Emîn ed-dîn, gehörte zu den berühmtesten Gelehrten, insbesondere in der Medizin und Mathematik. Er kam von Westen nach Ägypten und blieb längere Zeit in Kairo, hierauf ging er nach Damaskus und hörte dort bei Muhaḏḏab ed-dîn Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. ʿÎsâ, bekannt unter dem Namen Ibn el-Naqqâš el-Baǵdâdî. Er verfertigte für diesen verschiedene zur Geometrie (Meſskunde) gehörende Instrumente, denn er war geschickt in der Tischlerkunst. Er diente als Arzt dem Saladdin und war längere Zeit bei ihm in Beikâr (?); dann nahm er seinen Abschied und ging nach Damaskus, wo er bis zu seinem Tode blieb. (Ibn Abi U. II. 163.)

313. Kaʿb el-ʿAmil (oder ʿAmal) (?), der Rechner, aus Bagdad gebürtig und gestorben daselbst 593 (1196/97), war ein geschickter und viel um Rat gefragter Arithmetiker. (C. I. 427 n. Ibn el-Q.)

314. Jaḥjâ b. Saʿîd b. Hibetallâh, Abû Ṭâlib, Qiwâm ed-dîn el-Šeibânî, stammte aus Wâsiṭ, wurde aber geboren und lebte in Bagdad. Er gehörte zu den ausgezeichnetsten Staatssekretären und besaſs auch groſse Kenntnisse in der Arithmetik, war auch bewandert in der Rechtswissenschaft, in der Dogmatik und andern Wissenschaften. Er bekleidete während seines Lebens verschiedene Ämter, zuletzt war er Direktor der öffentlichen (Staats-) Korrespondenz und Inspektor der verschiedenen Verwaltungszweige. Er starb in Bagdad im Ḏû'l-Ḥiǵǵe 594 (1198). (Ibn Ch. II. 252, Übers. IV. 129.)

315. Muh. b. Aḥmed b. Muh. b. Rošd, Abû Welîd, der berühmte Kommentator des Aristoteles, der Averroës des Mittelalters, wurde geboren zu Cordova ca. 520 (1126), studierte zuerst Theologie und Rechtswissenschaft, wandte sich dann aber hauptsächlich der Philosophie, Medizin und Mathematik zu. Er war zuerst Qâḍî von Sevilla, dann von Cordova, und erwarb sich die Gunst des den Wissenschaften sehr zugeneigten Almohaden Abû Jaʿqûb Jûsuf (558—580) und auch seines Sohnes Jaʿqûb el-Manṣûr (580—595). Ums Jahr 591 fiel er bei letzterem, der durch fanatische Muslime aufgestiftet worden war, in Ungnade und wurde in das von Juden bewohnte Städtchen Lucena (ca. 8 Meilen südöstlich von Cordova) verbannt; 595 wurde er wieder freigelassen, gleich darauf starb el-Manṣûr und Averroës begab sich zu el-Manṣûrs Sohn Muh. nach Marokko, starb aber daselbst noch im gleichen Jahre 595 (1198/99). (Ibn Abi U. II. 75.)

Er schrieb: Einen Kommentar zu der Schrift „de coelo et mundo" des Aristoteles. Über die Bewegung der Sphäre (*fî ḥarakat el-falak*), welche Schrift W. A. p. 107 für die in den Op. omn. Averr. Vol. IX. gedruckte Abhandlung „de substantia orbis" hält. W. A. p. 108 hat aufserdem noch: Epitome Almagesti Ptolemaei, welche noch in einer hebräischen Übersetzung des R. Jakob b. Simson Anatoli an verschiedenen Orten vorhanden ist, unter andern in Paris (903, 3°).[a]) Dafs die arabische Schrift, die sich in Paris (2458, 6°) unter dem Titel „Propositions de trigonométrie sphérique pour servir à l'intelligence de l'almageste" par le Schaikh Abou'l-Welîd, befindet, von Averroës herrühre und mit der Epitome Almagesti identisch oder ein Teil derselben sei, wie de Slane vermutet, ist kaum möglich, wenn das Datum der Abfassung des Ms. (539 d. H.) richtig ist.[b])

316. Ṭâhir b. Naṣrallâh b. Ǧehîl,[c]) Meǧd ed-dîn el-Ḥalebi, ein vorzüglicher Jurist und Mathematiker, lebte anfänglich in Aleppo und wurde dann als Lehrer an der Ṣalâḥîje in Jerusalem angestellt, wo er im J. 596 (1199/1200) im Alter von 64 Jahren starb. (Ibn Š., p. 94.)

317. Aḥmed b. el-Ḥâǧib, Muhaḏḏab ed-dîn, war ein berühmter Arzt und sehr bewandert in den mathematischen Wissenschaften, ebenso in Grammatik und Litteratur. Er wurde geboren in Damaskus, wuchs dort auf und studierte eifrig die Medizin unter Muhaḏḏab ed-dîn b. el-Naqqâš (s. Art. 312). Als dann Šaraf ed-dîn el-Ṭûsî (s. Art. 333) in Moṣul sich aufhielt und sich einen berühmten Namen in der Philosophie, Mathematik und andern Wissenschaften erworben hatte, reisten Ibn el-Ḥâǧib, sowie auch Muwaffaq ed-dîn ʿAbdelʿazîz el-Ḥakîm zu ihm, um unter ihm jene Wissenschaften zu studieren. Sie trafen ihn, wie er eben nach Ṭûs zurückzureisen im Begriffe war, sie gingen mit ihm dorthin und blieben daselbst längere Zeit; hierauf wandte sich Ibn el-Ḥâǧib nach Arbela, wo sich Fachr ed-dîn b. el-Dahhân (s. Art. 310) der Astronom aufhielt; er schlofs sich ihm an, arbeitete mit ihm und studierte mit ihm die astronomischen Tafeln, die Ibn el-Dahhân soeben verfertigt hatte; dann kehrte er nach Damaskus zurück. Er war ein eifriger Freund der Wissenschaften, besonders scharfsinnig in der Geometrie. Vor seinem Auftreten als Arzt versah er den Dienst bei den Uhren der grofsen Moschee in Damaskus; als Arzt wurde

---

[a]) Nach Steinschneider, Bibl. math. I. (1887) p. 99, und de Slane, Catal. des mss. arabes, p. 434.

[b]) Vielleicht ist sie von Abû'l-Welîd el-Waqšî (s. Art. 257), jedenfalls einem der bedeutendsten Geometer Spaniens, da Maqqarî ihn unter den wenigen nennt, die er der Aufzählung würdig gehalten hat.

[c]) Flügel (H. Ch. IV. 447) liest „Ǧobeil", und als Todesjahr ist daselbst 591 angegeben.

er dann angestellt in dem Hospital, welches el-Melik el-ʿÂdil Nûr ed-dîn b. Zenkî in Damaskus errichtet hatte, nachher trat er in den Dienst des Taqî ed-dîn ʿOmar, Fürsten von Ḥamât und blieb daselbst bis zum Tode desselben, dann kehrte er wieder nach Damaskus zurück, ging dann nach Ägypten und trat in den Dienst Saladdins als Arzt und blieb bis zu dessen Tod bei ihm, hierauf wurde er Leibarzt des Sohnes von Taqî ed-dîn, el-Melik el-Manṣûr, Fürsten von Ḥamât und blieb bei ihm etwa zwei Jahre. Er starb an der Wassersucht, wahrscheinlich in den Jahren 595—600 (1199—1204). (Ibn Abi U. II. 181.)

318. El-Ḥasan b. el-Chaṭîr, Abû ʿAlî, el-Noʿmân el-Fârisî (d. h. der Perser), ein ḥanefitischer Rechtsgelehrter, besafs grofse Kenntnisse in Rechenkunst, Astronomie und Medizin, auch in Sprachwissenschaft und Geschichte. Er lebte lange Zeit in Kairo, hielt daselbst Vorlesungen und starb i. J. 598 (1201/02). (S. I. 172.)

319. Muh. b. ʿAbdelkerîm b. ʿAbderraḥmân el-Ḥâriṯî, Abû'l-Faḍl Mu'eijid (oder Mu'jid) ed-dîn el-Muhandis[a]) (der Geometer). Er wurde geboren in Damaskus und wuchs daselbst auf. Er wurde „der Geometer" genannt wegen seiner vorzüglichen Kenntnisse in der Geometrie, die ihn berühmt machten, bevor er als Mediziner einen bedeutenden Namen hatte. Er war anfänglich Tischler und nebenbei auch Steinhauer; seine Arbeiten waren sehr gesucht, die meisten Thüren des grofsen Hospitals in Damaskus, welches el-Melik el-ʿÂdil errichtet hat, waren von ihm verfertigt. Šems ed-dîn el-Miṭwâʿ, der Augenarzt, einer seiner Freunde, erzählt von ihm, dafs seine erste wissenschaftliche Beschäftigung das Studium des Euklides gewesen sei, damit er sich in der Tischlerkunst vervollkommne. In jenen Tagen arbeitete er an der Moschee Châtûn hinter dem Munîbaʿ (?) im westlichen Teil von Damaskus; er ging jeden Morgen sehr früh hin, aber nicht, bevor er schon einiges aus dem Euklid gelernt hatte; so setzte er dies fort, bis er den ganzen Euklid durchstudiert hatte und ihn vollkommen verstand. Nachher machte er sich auch an den Almagest und studierte denselben ebenfalls ganz durch. Um dieselbe Zeit kam el-Šaraf el-Ṭûsî (s. Art. 333) nach Damaskus, der sehr gelehrt in den mathematischen Wissenschaften war, mit diesem trat Abû'l-Faḍl in Verkehr und studierte bei ihm jene Wissenschaften weiter; die Medizin studierte er unter Abû'l-Meǧd Muh. b. Abî'l-Ḥakem. Er verbesserte auch die Uhren an der grofsen Moschee in Damaskus. Er war dann später Arzt am grofsen Hospital daselbst und blieb in dieser Stellung bis zu seinem Tode, der i. J. 599 (1202/03) erfolgte. — Er schrieb: Astronomische Tafeln. Abhandlung über

[a]) W. A. 120 hat „Ibn el-Muhandis", was nach der Darstellung seines Lebens bei Ibn Abi U. unrichtig ist.

die Kenntnis der Kalenderzeichen. Über das Erscheinen des Neumondes, gerichtet an den Qâḍî Moḥjî ed-dîn b. el-Qâḍî Zekî ed-dîn. (Ibn Abi U. II. 190.)

320. ʿAbdallâh b. Muh. b. Ḥaǧǧâǧ, Abû Muh., aus Fes,[a]) bekannt unter dem Namen Ibn el-Jâsimîn (oder Jâsmîn), führte seine Abstammung auf den Berberstamm Isâsa (oder Asâsa) zurück, der in der Umgegend von Fes seine Wohnsitze hatte. Er studierte unter Abû ʿAbdallâh b. el-Qâsim die Rechenkunst und Zahlenlehre und beschäftigte sich auch mit andern Disziplinen. Er stand im Dienste des Sultans von Marokko. Er verfaſste eine *Arǧûza* (Gedicht) über die Algebra und las hierüber auch in Sevilla i. J. 587. Er wurde erdrosselt in Marokko i. J. 601 (1204/05), nach andern i. J. 600. (B. VI. 531.)

Seine *Arǧûza* war sehr verbreitet, was die noch zahlreich vorhandenen Mss. beweisen und wurde auch vielfach kommentiert; sie befindet sich u. a. O. im Escurial (943, 6⁰), in Berlin (5963—69) mit Kommentaren von Ibn el-Hâim, Sibṭ el-Mâridînî u. a., in Paris (4151, 6⁰), in Oxford (I. 966, 6⁰, 1034, 3⁰ u. 1238, 1⁰), das erste und dritte Ms. mit Kommentar von Ibn el-Hâim, im Ind. Off. (770, 2⁰) mit Kommentar von el-Qalaṣâdî, in Gotha (1491), in Algier (376, 8⁰), in Kairo (213—216, Übers. 46—48) etc. (s. auch Art. 423, 444 u. 445).

321. ʿAlî b. Muh. b. Farḥûn el-Qaisî, aus Cordova, ein Schüler von el-Selefî u. a. Er lieſs sich in Fes nieder und war ein vortrefflicher Kenner der Rechenkunst und Erbteilung. Er starb auf der Wallfahrt in Mekka i. J. 601. (B. VI. 675.)

322. Ahmed b. Mesʿûd b. Muh. el-Chazraǧî, Abû'l-ʿAbbâs, von Cordova, war hervorragend als Koraninterpret und Jurist, bewandert auch in der Sprachwissenschaft, Erbteilung, Rechenkunst und Medizin. Er verfaſste vortreffliche Werke und schöne Poesien. Er starb 601. (Maq. K. II. 5.)

323. El-Ḥasan b. ʿAlî b. Chalaf el-Omawî, Abû ʿAlî, bekannt unter dem Namen el-Chaṭîb, aus Cordova gebürtig, wohnhaft in Sevilla, studierte den Koran in seiner Vaterstadt unter Ibn Riḍâ u. a., die Traditionswissenschaft unter Abû'l-Ḥasan Jûnis b. Moġîṯ, die Sprachwissenschaft und Litteratur unter Abû Bekr b. Mesʿûd u. a. Er beschäftigte sich auch mit Astronomie und Astrologie. Abû'l-Welîd b. Rošd (Averroës) erteilte ihm die Lizenz für seine Lehren und Schriften (d. h. zu lehren, was er überliefert, doziert und geschrieben hatte). Er schrieb unter anderm ein Buch „über die helischen Untergänge der Mondstationen" (*el-anwâ'*), ferner ein solches, betitelt: „die schön gereihten Perlen", über die Kenntnis der Zeiten aus den Gestirnen, vielleicht identisch mit dem im Escurial (936)

[a]) Im Berliner Kat. (V. 328) heiſst er el-Išbîlî (der Sevillaner), weil er längere Zeit in Sevilla gelebt und gelehrt hat.

vorhandenen „Buch der Rechnung mit (nach) den Monaten“ von el-Ḥasan b. ʿAlî el-Omawî, dessen Lebenszeit C. allerdings, wahrscheinlich aber unrichtig, um d. J. 356 ansetzt, während unser Autor nach Ibn el-Ṭailisân in Cordova i. J. 514 geboren und in Sevilla i. J. 602 (1205/06) gestorben ist. (B. V. 20.)

324. Ǧaʿfar el-Qaṭṭâʿ,[a]) genannt el-Sedîd,[b]) aus Bagdad gebürtig, war bekannt als Logiker, Dialektiker, Geometer und Erbteiler, ebenso als Bekenner des Schi'ismus. Er starb i. J. 602 in Bagdad. (C. I. 423 n. Ibn el-Q.)

325. Nûr ed-dîn el-Beṭrûǧî,[c]) Abû Isḥâq, der im Mittelalter unter dem Namen Alpetragius bekannte Astronom. Die mir vorliegenden arabischen Quellen enthalten nichts über diesen Gelehrten, aus hebräischen Quellen weiſs man, daſs Abû Bekr b. Ṭofeil (gest. 581, s. Art. 304 und Anmerkg. 68) sein Lehrer war. Wahrscheinlich lebte er in Sevilla, wenigstens soll in dem bei C. I. 396 beschriebenen Ms. seiner Astronomie (*kitâb el-hei'a*) im Escurial (958) zu seinem Namen hinzugefügt sein „el-Išbîlî“ (der Sevillaner). Dieses Werk, bekannt durch eine darin aufgestellte neue Theorie der Planetenbewegung, wurde 1217 von Michael Scottus ins Lateinische übersetzt, Handschriften dieser Übersetzung, die nie gedruckt worden ist, sind noch vorhanden in Paris (16654 u. 17155).[d]) Ins Hebräische wurde es 1259 von Moses b. Tibbon übersetzt und diese Übersetzung wieder ins Lateinische von Kalonymos b. David i. J. 1529; diese Übersetzung wurde 1531 mit Joh. de Sacro Bustos Sphaera und andern Werken unter dem Titel: Alpetragii Arabis Theorica planetarum physicis comm. probata nuperrime ad latinos translata a Calo Calonymos hebraeo Neapolitano, zu Venedig gedruckt.[e])

326. Muh. b. Aḥmed b. ʿAbdallâh b. Saʿd el-Hamdânî, Abû ʿAbdallâh, von Algeziras, ein Schüler von Abû Naṣr Fatḥ b. Muh. el-Ǧadâmî u. a., war ein kenntnisreicher und viel zitierter Erbteiler und Rechner. Er starb am 13. Ramaḍân 604 (1208) im Alter von 90 Jahren. (B. V. 290.)

327. Moses b. Meimûn, ein Jude aus Cordova, der Meimonides des Mittelalters, verlieſs wegen der Judenverfolgungen unter den Almohaden Spanien ums Jahr 560 und begab sich nach Ägypten, wo er sich haupt-

a) C. transskribiert „el-Qoṭâʿ“.

b) C. liest „el-Sodajed“ (?).

c) d. h. aus dem Städtchen Pedroche nördlich von Cordova.

d) Vergl. Wüstenfeld, die Übers. arab. Werke in das Latein. etc. p. 99.

e) Vergl. Steinschneider, Vite di matemat. arabi etc., estratto dal Bullet. di bibliogr. e di stor. delle scienze mat. e fis. T. V. p. 106.

sächlich der Medizin widmete, aber auch philosophische und mathematische Studien betrieb, und in diesen sog. Wissenschaften der Alten einen grofsen Ruf erlangte. Er verbesserte und kommentierte mit seinem Schüler Jûsuf b. Jaḥjâ el-Sebtî (s. Art. 342) zusammen die Astronomie des Ibn Aflaḥ, ebenso das Buch des Ibn Hûd von Saragossa (s. Art. 249), betitelt „die Vollendung" (*istikmâl*). Meimonides war auch Leibarzt von Saladdin und seinem Sohne el-Melik el-Afdal.[a]) Er starb i. J. 605 (1208/09).[b])

328. Muh. b. ʿOmar b. el-Ḥosein, Abû ʿAbdallâh, Fachr ed-dîn el-Râzî, Ibn el-Chaṭîb, einer der vortrefflichsten Philosophen und Theologen der Araber, bewandert in der Medizin und den mathematischen Wissenschaften, daneben aber auch ein eifriger Arbeiter auf dem Gebiete der Astrologie und Magie. Er wurde geboren im Ramaḍân 544 (1150), nach andern 543, in Raj in Chorâsân, studierte zuerst unter seinem Vater, dann unter Kemâl ed-dîn el-Semnânî und Meǵd ed-dîn el-Ǵîlî; als dieser nach Merâǵa berufen wurde, begleitete ihn Fachr ed-dîn und studierte da-selbst noch lange Zeit unter ihm Philosophie und Theologie. Später lehrte er in verschiedenen Städten Chorâsâns und Transoxaniens, hauptsächlich in Raj und Herât und hatte überall eine grofse Zahl von Zuhörern aus allen Ländern. Wenn er ausritt, so begleiteten ihn stets etwa 300 Studenten, unter diesen auch oft der Chowârezmšâh Muh. b. Tukuš. Zu seinen berühmtesten Schülern gehörten Zein ed-dîn el-Kašî, Qoṭb ed-dîn el-Miṣrî und Šihâb ed-dîn el-Nîsâbûrî. Er starb am 1. Šauwâl 606 (1210).

Er schrieb: Über die Postulate des Euklides. Ein Buch über die Geometrie, vielleicht die von W. A. p. 115 angeführten „Eclogae geometricae", die nach ihm noch in Leiden existieren sollen, ich habe aber dieses Buch im Katalog von Leiden nicht gefunden. Das ʿAlâ'ische Buch über die Tagewählerei, dem ʿAlâ ed-dîn Muh. b. Tukuš Chowârezmšâh gewidmet, in Paris (2521, 5°), in Konstantinopel (2689) und vielleicht Fragmente daraus in Leiden (1078 u. 79). *El-sirr el-maktûm* (das verborgene Geheimnis), über die Geheimnisse der Gestirne, in Oxford (I. 917, 950, 981, 1016, II. 282, 2°), in Leiden (1080 u. 81), Florenz (Palat. 319), Konstantinopel (2796) etc.; ein Auszug daraus befindet sich in Paris (2645). Er schrieb auch zwei Encyklopädien, die eine, 40 Disziplinen umfassend, betitelt *ǵewâmiʿ el-ʿulûm* (die Gesamtheit der Wissenschaften), in Leiden (16) pers., die andere, 60 Disziplinen enthaltend, betitelt *ḥadâ'iq el-anwâr* (die Gärten der Lichter), über die Wahrheiten der Geheimnisse, in Paris (fonds pers. 213), Leiden (17) pers., unvollständig, nur die mathematischen Disziplinen. Andere

[a]) So bei Ibn Abi U.; W. A. p. 110 und wohl nach ihm Brockelmann, Gesch. d. arab. Litt. I. 489, haben „el-ʿAzîz.

[b]) Brockelmann, l. c. hat unrichtig 601.

Werke über Geheimwissenschaften übergehe ich. (C. I. 181 n. Ibn el-Q.; Ibn Ch. I. 474, Übers. II. 652; Ibn Abi U. II. 23; Abulfar. 455, Übers. 298; Abulfid. IV. 239.)

329. ʿAbdallâh b. Idrîs b. Muh. b. ʿAlî el-Qoḍâʿî, Abû Muh., bekannt unter dem Namen Ibn Šaqq el-Leil, aus Onda, wohnhaft in Valencia, hörte in Cordova bei Abû'l-Qâsim b. Baškuwâl (s. d. Quellen) und bei Abû Muh. b. Falîḥ u. a. Er war aus angesehener, vornehmer Familie, vertrauenswürdig und wahrhaftig. Er zeichnete sich besonders als ein gründlicher Kenner der Rechenkunst aus. Er starb i. J. 607 (1210/11). (B. VI. 504.)

330. Muh. b. ʿAbderraḥmân, Abû ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn el-Kâtib, aus Granada, beschäftigte sich neben litterarischen Studien hauptsächlich mit Arithmetik, Geometrie und Architektur. Über die beiden ersten Disziplinen schrieb er zwei Werke, deren Titel in den Quellen nicht angegeben sind. Er war Aufseher der Bauten in Granada, errichtete daselbst eine prachtvolle Gerichtshalle und steuerte zu dem Bau der Brücke über den Šenǧil (jetzt Genil) 4000 Dinaren bei. Er starb i. J. 607 in Granada. (C. II. 91 nach Lisân ed-dîn.)

331. Muh. b. Aḥmed b. Chalaf b. ʿAijâš el-Anṣârî el-Chazraǧî, Abû ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen el-Šantijâlî,[a]) aus Cordova, der Gebetsinhaber in der grofsen Moschee daselbst, ein Schüler des Abû'l-Qâsim b. Baškuwâl, der ihm die Lizenz erteilte, dessen Freund er war, und der ihm viele Bücher aus seiner Bibliothek schenkte. Er war ein gelehrter und frommer Mann, bewandert in der Tradition, im Recht, in der Erbteilung und Rechenkunst. Zu seinen Schülern gehörte unter andern Abû'l-Qâsim b. el-Ṭailisân, welcher berichtet, dafs Muh. b. Aḥmed i. J. 534 od. 535 (1140) geboren und im Šaʿbân 609 (1213) gestorben sei. (B. V. 301.)

332. Muh. b. Aḥmed b. Jarbûʿ, Abû ʿAbdallâh, aus Jaen gebürtig, liefs sich später in Ballas[b]) (oder Bullas) im Gebiet von Lorca nieder. Er war sehr bewandert in der Korankenntnis, in der Sprachwissenschaft und Rechenkunst. Er las und unterrichtete bald in Jaen, bald in Qaišâta (Quesada), bald in Ubeda, und verfafste ein vortreffliches Werk über die (verschiedenen) Arten der Poesien.[c]) Einer seiner Schüler war Abû ʿAbderraḥmân b. Ġâlib. Er starb ums Jahr 610 (1213/14). (B. V. 307; C. II. 125 n. Lisân ed-dîn.)

---

[a]) d. h. aus Santa Ella (Provinz Cordova).

[b]) So steht es im Text, C. hat „bls" (unvokalisiert) und übersetzt „Velez vel Balsa".

[c]) C. hat noch: Edidit de arithmetica praeclarum opus, was in B. V. nicht steht.

333. El-Mozaffar b. Muh. b. el-Mozaffar Šaraf ed-dîn el-Ṭûsî (d. h. von Ṭûs gebürtig oder dort lebend), der Lehrer des Mûsâ b. Jûnis Kemâl ed-dîn (s. Art. 354), der Erfinder des Linear-Astrolabiums, bekannt unter dem Namen „der Stab des Ṭûsî".[a]) Er wird ums Jahr 610 gestorben sein. Von ihm existiert in Leiden (1082) eine Abhandlung über das Astrolabium, genannt *el-musaṭṭaḥ* (das ebene, flache), und ebenda (1027) eine geometrische Abhandlung, verfaſst für den Emir der Emire Šems eddîn i. J. 606 in Hamadân, in welcher es sich um die Teilung eines Quadrates in vier Teile handelt, von denen der im Innern ein Parallelogramm und die drei andern Trapeze sind und deren Flächen zu einander ein gegebenes Verhältnis haben sollen. — Im Ind. Off. (767, 3°) befindet sich von einem ungenannten Verfasser eine verkürzte Bearbeitung (*talchîṣ*) eines Werkes über Algebra von Šaraf ed-dîn el-Ṭûsî. (Ibn Ch. II. 133 u. 185, Übers. III. 470 u. 581.)

334. Muh. b. Soleimân b. ʿAbdelʿazîz b. Ġamr (soll vielleicht ʿOmar heiſsen) el-Salamî, Abû Bekr, aus Játiva, war ein Schüler von Abû Bekr b. Moġâwir u. a. Er war bewandert in der Litteratur und den Wissenschaften, besonders in der Arithmetik, Geometrie und Erbteilung. Er verwaltete das Richteramt in Elche (Provinz Murcia). Er las auch über die Maqâmen des Ḥarîrî und war sehr scharfsinnig in der Auflösung von Rätseln. Er starb in Játiva am Ende des Raġeb 612 (1215). (B. V. 309; C. II. 125 n. Lisân ed-dîn.)

335. ʿAbdelmelik Abû Muh. el-Šidûnî,[b]) aus Sevilla, studierte Medizin unter Abû Merwân ʿAbdelmelik b. Zohr (gest. 557), und widmete sich lange Zeit ihrer Praxis, und war in Diagnostik und Behandlung vortrefflich. Er war sehr einsichtsvoll und scharfsinnig und hatte groſse Kenntnisse in der Astronomie und Philosophie. Er war Arzt von el-Nâṣir[c]) und starb in Sevilla unter der Regierung von el-Mustanṣir.[c]) (Ibn Abi U. II. 79.)

336. ʿAbdallâh b. el-Ḥosein b. ʿAbdallâh, Abû'l-Baqâ, el-Okbarî, zubenannt Muḥabb ed-dîn, gelehrt in der Rechtswissenschaft, besonders in der Erbteilung, in der Rechenkunst und Grammatik. Er wurde

---

a) Vergl. meine Notizen hierüber in der Bibl. math. 9 (1895) p. 13—18 und 10 (1896) p. 13—15, und Carra de Vaux im Journal asiat. 1895 (Mai—Juin), wo der genannte Gelehrte die Stelle über dieses Instrument aus dem Werke des Abû'l-Ḥasan ʿAli b. ʿOmar el-Marrâkošî im arab. Text und mit franz. Übersetzung veröffentlicht hat.

b) Nach C. II. 137 soll dies heiſsen „von Medina Sidonia stammend".

c) Muh. el-Nâṣir (595—610) und Jûsuf el-Mustanṣir (610—620) waren almohadische Beherrscher von Sevilla, also starb el-Šidûnî zwischen 610 u. 620 (1213 und 1223).

geboren und lebte in Bagdad, seine Familie stammte aber aus ʿOkbara.[a]) Er war blind. Seine Hauptwerke betreffen das Gebiet der Grammatik, er schrieb aber auch einiges über Arithmetik. Er starb in Bagdad im Rabîʿ II. 616 (1219). (Ibn Ch. I. 266, Übers. II. 65; Abulfid. IV. 285.)

337. ʿAlî b. Chalîfa b. Jûnis, Abû'l-Ḥasan, Rašîd ed-dîn, der Onkel des Ibn Abî U., wurde geboren zu Aleppo i. J. 579 (1183/84). Er studierte Medizin, besonders die Augenheilkunde, beschäftigte sich auch mit den mathematischen Wissenschaften, hauptsächlich mit Astronomie und Astrologie, die er unter Abû Muh. b. el-Ǧaʿdî studiert hatte, der ein vortrefflicher Astrolog war. Später, als er Vorsteher des Krankenhauses zu Damaskus geworden war, hörte er auch noch den Unterricht des ʿAlam ed-dîn Qaiṣar b. Abî'l-Qâsim (s. Art. 358), eines der gelehrtesten Männer seiner Zeit in den mathematischen Wissenschaften; er studierte besonders die Astronomie unter ihm und vervollkommnete sich darin in kurzer Zeit; es war dies ums Jahr 615. ʿAlam ed-dîn war eines Tages bei ihm, da bewies ihm Rašîd ed-dîn einige Sätze aus der Astronomie und ʿAlam sagte hierauf zu ihm: „Oh Rašîd ed-dîn! An dem, was du ungefähr in einem Monat gelernt hast, hätte ein Anderer fünf Jahre zu lernen gehabt.“ Er starb im Šaʿbân 616 (1219), erst 38 Jahre alt. Er schrieb: Das nützliche Kompendium über die Rechenkunst in vier Büchern, verfafst für el-Melik el-Amǧed, den Fürsten von Baʿalbek i. J. 608 (1211/12). Das Buch der Ausmessung (der Figuren). (Ibn Abi U. II. 246.)

338. Muh. b. Mubaššir b. Abî'l-Futûḥ el-Baǵdâdî, war Verwalter (oder Hofmeister) des Emirs Abû Naṣr Muh., des Sohnes des Chalifen Nâṣir li-dîn allâh, der später das Chalifat von 622—623 inne hatte. Er war sehr gelehrt in Geometrie, Astrologie und Philosophie. Er starb in Bagdad im Raǵeb d. J. 618 (1221). (C. I. 434 n. Ibn el-Q.)

339. Muh. b. Bekr b. Muh. b. ʿAbderraḥmân el-Fahrî, Abû ʿAbdallâh, aus Valencia, ein Schüler von Abû ʿAbdallâh b. Nûḥ u. a. Er erhielt die Lizenz von Abû ʿAbdallâh b. Ḥamîd. Er war sehr gelehrt in der Rechenkunst, beschäftigte sich auch mit Medizin, Traditionswissenschaft und Geschichte und schrieb viele Werke. Er starb i. J. 618 (1221/22). (B. V. 322.)

340. ʿAbdallâh b. Aḥmed b. Muh., Abû Muh., el-Ǧammâʿîlî el-Dimišqî, wurde geboren in Ǧammâʿîl[b]) im Šaʿbân 541 (1147) und starb i. J. 620 (1223/24). Er wanderte mit seinem Vater und Bruder nach Bagdad aus und studierte dort unter verschiedenen berühmten Gelehrten.

---

[a]) Ein Dorf am Tigris oberhalb Bagdad.

[b]) Ǧammâʿîl ist ein Flecken in den Bergen von Nâbulus (Sichem) in Palästina.

Er war sehr bewandert in vielen Wissenschaften, so im Recht, in der Kontroverse, in der Grammatik, Erbteilung und Rechenkunst, in der Astronomie, besonders in den Planetenbewegungen und in der Astrologie; er hatte in diesen Wissenschaften viele Schüler. (Kut. I. 260.)

341. Aḥmed b. ʿAlî b. Jûsuf el-Bûnî (d. h. aus Bona in Algier), Abû'l-ʿAbbâs, el-Qorešî, Taqî ed-dîn (auch Mḥojî ed-dîn und Šihâb ed-dîn), war einer der ersten Kenner der Magie und übrigen Geheimwissenschaften der Araber. Von ihm existieren noch viele Werke über dieses Gebiet in fast allen Bibliotheken Europas und des Orientes; die wichtigsten derselben sind: *Šems el-maʿârif we laṭâif el-ʿawârif* (die Sonne der Kenntnisse und die auserlesenen Dinge der Verständigen oder Kenner); *el-anmâṭ* (die Verfahrungsarten); *kitâb et-chawâṣṣ* (das Buch der magischen Eigenschaften). Ich erwähne ihn hier nur wegen seiner Beschäftigung mit den magischen Quadraten.[70] Er starb nach H. Ch. i. J. 622[a]) (1225).

342. Jûsuf b. Jaḥjâ b. Isḥâq Abû'l-Ḥaǧǧâǧ el-Sebtî (d. h. aus Ceuta), ein Jude,[b]) Schüler von Moses b. Meimûn (s. Art. 327), verliefs ums Jahr 570 Spanien und folgte seinem schon ca. 560 nach Ägypten ausgewanderten Lehrer dahin nach. Er brachte aus Spanien die Astronomie des Ibn Aflaḥ mit und verbesserte und kommentierte dieselbe unter Leitung seines Lehrers. Nach dem Tode des letztern (605) begab er sich nach Syrien, wurde dort Leibarzt des Sultans el-Melik el-Ẓâhir und starb in Aleppo i. J. 623 (1226). (Ibn Abi U. II. 213; Abulfar. 461, Übers. 302.)

343. Riḍwân (oder Roḍwân) b. Muh. b. ʿAlî b. Rustem el-Chorâsânî, Fachr ed-dîn b. el-Sâʿâtî (der Sohn des Uhrmachers), wurde geboren und wuchs auf in Damaskus. Sein Vater Muh. war von Chorâsân hieher gezogen und lebte daselbst bis zu seinem Tode (ca. 580); er war einzig in der Kenntnis der Uhrmacherkunst und der Astronomie; er hatte die Uhren konstruiert, die neben dem Thore der grofsen Moschee in Damaskus sich befanden, in den Tagen des Melik el-ʿÂdil Nûr ed-dîn b. Zenkî (gest. 569), wofür er von diesem eine grofse Summe Geldes und viele Gunstbezeugungen erhielt; die Uhren standen unter seiner Aufsicht bis zu seinem Tode. Sein Sohn Fachr ed-dîn Riḍwân b. el-Sâʿâtî war Arzt, er hatte die Medizin unter Raḍî ed-dîn el-Raḥabî und Fachr ed-dîn el-Mâridînî studiert. Er war auch bewandert in der Litteratur, der Logik und den übrigen philosophischen Wissenschaften, ebenso in der Uhrmacherkunst; er pflegte auch eifrig die Schreibkunst und hatte eine sehr schöne Schrift. Er war

---

a) H. VII. 402 hat 625.

b) Als solcher hiefs er Joseph b. Jehûdâ b. Aknin; Ibn Abi U. nennt ihn: Jûsuf el-Isrâ'ilî Abû'l-Ḥaǧǧâǧ aus Fes.

Wezir des Melik el-Fâ'iz (?)[a]) b. el-Melik el-ʿÂdil b. Eijûb (d. i. eines Neffen Saladdins) und nachher Leibarzt von el-Melik el-Moʿaẕẕam b. el-Melik el-ʿÂdil, einem Bruder des genannten (gest. 624). Er starb in Damaskus wahrscheinlich zwischen 620 und 630 (1223 und 1233). Er schrieb: Über die Konstruktion astronomischer Uhren, in Gotha (1348, 1°), geschrieben i. J. 600 in Damaskus.[71] (Ibn Abi U. II. 183.)

344. Ismâʿîl b. el-Razzâz (oder Razzâr) el-Ǧazarî (?) Abû'l-ʿIzz, genannt Bedîʿ el-Zamân (das Wunder der Zeit), schrieb i. J. 602 (1205/06) ein Werk über hydraulische Maschinen, betitelt: *el-kitâb fî maʿrifet el-ḥijal el-handasîje* (das Buch der geometrischen Erklärung der Maschinen), in Leiden (1025 u. 26) und Oxford (I. 886).

345. Theodorus von Antiochia, ein jakobitischer Christ, der syrischen, arabischen und lateinischen[b]) Sprache kundig, studierte schon in Antiochia, dann aber besonders unter Kemâl ed-dîn Mûsâ b. Jûnis (s. Art. 354) in Moṣul die Wissenschaften der Alten, besonders auch den Euklides und den Almagest, ebenso die Schriften des Fârâbî und Ibn Sînâ; später begab er sich nach Bagdad und widmete sich hier hauptsächlich der Medizin. Er trat dann in die Dienste des Sultans ʿAlâ ed-dîn, nachher in diejenigen Konstantins, des Beherrschers von Armenien, des Vaters des Königs Ḥâtim.[c]) Von hier begab er sich zu Kaiser Friedrich II. nach Sicilien. Da ihn dieser gegen seinen Willen zu lange bei sich behalten wollte, entfloh er auf einer Expedition des Kaisers nach dem Orient aus seinem Gefolge, traf aber mit ihm in einer Stadt an der syrischen Küste wieder zusammen und soll sich hier aus Scham wegen seiner Flucht vergiftet haben.[d]) (Abulfar. 521, Übers. 341.)

346. Muh. b. ʿAlî b. el-Zobeir b. Aḥmed el-Qoḍâʿî, Abû ʿAbdallâh, aus Murbîṭar[e]) (Murviedro), stammte ursprünglich aus Onda in der Provinz Valencia, war ein Schüler von Abû'l-ʿAbbâs b. Hoḏeil el-Abîšî (d. h. von Abicha) u. a. Er besorgte das Gebet und die Predigt in seiner Vaterstadt Murviedro und stand auch einige Zeit dem Gerichtswesen der Stadt vor. Er beschäftigte sich auch mit der Rechenkunst und las gegen das Ende seines Lebens auch über Traditionen. Er starb in Valencia im Ǧumâdâ II. 627 (1230) im Alter von 81 Jahren. (B. V. 336.)

---

[a]) Sollte vielleicht heifsen „el-Kâmil".

[b]) Der Text hat *latînîje,* worunter vielleicht auch das „oströmische", d. h. „griechische" verstanden ist.

[c]) „Hethum" bei Müller, der Islam im Morgen- und Abendland, II. p. 228.

[d]) Wenn diese Geschichte wahr ist, so kann dies nur bei Gelegenheit des von Friedrich II. unternommenen Kreuzzuges 626—27 (1228/29) gewesen sein.

[e]) Wird arabisch auch „Murbâṭir" geschrieben.

347. ʿAbderraḥîm b. ʿAlî b. Ḥâmid Muhaḏḏab ed-dîn, Abû Muh., bekannt unter dem Namen el-Dachwâr,[a]) der Lehrer des Ibn Abi U., einer der ersten Ärzte seiner Zeit. Er wurde i. J. 565 in Damaskus geboren, wo sein Vater ein berühmter Augenarzt war und machte auch daselbst seine Studien. Er beschäftigte sich auch mit Astronomie und Astrologie und besafs viele kostbare und seltene Instrumente und viele vortreffliche Werke über diese Wissenschaften. Ibn Abi U. bemerkt, er habe aus seinem Munde gehört, dafs er 16 der seltensten Abhandlungen über das Astrolabium besitze. Er war zuerst Arzt von el-Melik el-ʿÂdil Abû Bekr b. Eijûb (des Bruders von Saladdin), später seines Sohnes el-Melik el-Ašraf Abû'l-Fatḥ Mûsâ. Er starb im Ṣafar d. J. 628 (Ende 1230). (Ibn Abi U. II. 239; Kut. I. 345.)

348. ʿAbdellaṭîf b. Jûsuf b. Muh., Muwaffaq ed-dîn Abû Muh., el-Baġdâdî, stammte aus Moṣul und wurde in Bagdad geboren i. J. 557 (1162). Er war einer der gröfsten, einsichtigsten und aufgeklärtesten Gelehrten des Morgenlandes, bedeutend als Philosoph, Sprachgelehrter, Historiker und Arzt; er hat energisch Stellung genommen gegen verschiedene Auswüchse des geistigen Lebens jener Zeit, wie z. B. die Alchymie. Er studierte zuerst in Bagdad, ging dann nach Moṣul, wo er unter andern mit Kemâl ed-dîn b. Jûnis (s. Art. 354), dem Mathematiker und Rechtsgelehrten, zusammentraf und noch unter ihm studierte. Dann wandte er sich nach Damaskus und wurde dort mit einer grofsen Zahl von Gelehrten bekannt; von hier begab er sich nach Ägypten, machte dort die Bekanntschaft des Moses b. Meimûn (s. Art. 327), mit dem er sich öfters über Philosophie unterhielt. Nach der Eroberung Jerusalems durch Saladdin reiste ʿAbdellaṭîf dorthin und erhielt von ihm eine Professur an der grofsen Moschee zu Damaskus. Nach dem Tode Saladdins zog er wieder nach Ägypten und erhielt eine Anstellung an der Moschee el-Azhar in Kairo. Von hier ging er zum zweitenmal nach Jerusalem und hielt daselbst auch Vorlesungen, hierauf nach Damaskus (i. J. 604), wo er an der ʿAzîzîje mit grofsem Erfolge lehrte. Er machte noch verschiedene Reisen, nach Ḥaleb, Kleinasien etc. Er starb auf einer Pilgerreise in Bagdad im Muḥarrem 629 (1231). — Unter den mehr als 160 Schriften, die Ibn Abi U. von ʿAbdellaṭîf anführt, befindet sich nur eine mathematische: das deutliche (klare) Buch über die indische Rechnungsweise, wahrscheinlich identisch mit der von Kut. genannten „Einleitung in die Rechenkunst". Von den übrigen führe ich noch an: Widerlegung der Schrift des Ibn el-Haiṯam über den Raum. (Ibn Abi U. II. 201; Kut. II. 9; S. I. 312.)

---

[a]) W. A. p. 123 hat „Ibn el-D."

349. Muh. b. Abî Bekr el-Fârisî schrieb: *Nihâjet el-idrâk* (das höchste Verständnis), über die Geheimnisse der Wissenschaft der Sphären, in Berlin (5888), unvollständig, in Kairo (291, 294, 327, Übers. 170), verfafst i. J. 606. Über die Eigenschaften der Zauberquadrate, in Kairo (365).[a]) *Ma'ârig el-fikr el-wahig* (das Aufsteigen des flammenden Gedankens), über die Auflösung (Erklärung) der Schwierigkeiten der astronomischen Tafeln, in Kairo (317).[72] Er starb nach H. Ch. (VI. 176) i. J. 629 (1231/32).

350. Muh. b. 'Abdallâh b. 'Îsâ b. No'mân el-Bekrî, Abû 'Abdallâh, aus Valencia, hörte die Koranexegese bei Abû Bekr b. Ǧazî (oder Ǧuzî)[b]) und Abû Bekr b. Sa'd el-Chair. Er lehrte hauptsächlich Erbteilung und Rechenkunst und war hierin hervorragend. Er wurde geboren i. J. 551 (1156) und starb im Anfang d. J. 632 (1234). (B. V. 341.)

351. El-Ḥasan b. Muh. b. Ǧa'far b. 'Abdelkerîm, Ibn el-Ṭarrâḥ (Sohn des Baumeisters). Er war nach Atîr ed-dîn el-Mufaḍḍal (s. Art. 364) aus einer edeln und den Wissenschaften huldigenden Familie und hatte grofse Kenntnisse in Sprachwissenschaft, Litteratur, Astronomie und Rechenkunst. Er hielt sich bald in Ägypten, bald in Syrien, bald in 'Irâq auf und kämpfte auch mit seinem Bruder el-Moẓaffar b. Muh. b. Ǧa'far[c]) gegen die Tataren. Er wird nach 630 (1232/33) gestorben sein. (Kut. I. 173.)

352. Muh. b. el-Ḥosein b. Muh. b. el-Ḥosein, war ein Zeitgenosse von Kemâl ed-dîn Mûsâ b. Jûnis (s. Art. 354) und von Saladdin, dem er sein einziges noch erhaltenes Werk: *risâle fi'l-birkâr el-tâmm* (Abhandlung über den vollkommenen Zirkel) gewidmet hat, und bei dessen Abfassung ihn der eben genannte Gelehrte Kemâl ed-dîn mit seinen bedeutenden mathematischen Kenntnissen unterstützt hat.[d]) Diese Abhandlung ist noch vorhanden in Leiden (1076), Paris (2468, 4°) und Algier (1446, 5°), und wurde nach den zwei ersten Mss. herausgegeben von Woepcke[e]) mit franz. Übersetzung (Trois traités arabes sur le compas parfait) in den Not. et extr. des mss. T. XXII. P. 1. — Muh. b. el-Ḥosein mag ums Jahr 630 gestorben sein.[f])

353. Maḥmûd b. 'Omar b. Muh. el-Šeibânî, Sedîd ed-dîn Abû'l-Tanâ, bekannt unter dem Namen Ibn Raqîqa (W. A. p. 144 liest Rafîqa),

[a]) Hier ist als Todesjahr unrichtig 751 angegeben.

[b]) Gayangos II. 544 liest „Ǧazzî“.

[c]) Ist vielleicht der Lehrer des Mûsâ b. Jûnis, el-Moẓaffar b. Muh. b. el-Moẓaffar (s. Art. 333).

[d]) Vergl. Not. et extr. XXII. p. 19 u. 20.

[e]) Bezw. nach seinem Tode aus den hinterlassenen Schriften von J. Mohl.

[f]) Wahrscheinlich vor Kemâl ed-dîn Mûsâ b. Jûnis, da er dem schon 589 gestorbenen Saladdin sein Werk gewidmet hat.

ein bedeutender Arzt, zeichnete sich aber auch als Dichter, Philosoph und Astronom aus. Die Philosophie und Medizin hatte er unter Fachr ed-dîn el-Mâridînî studiert. Er beschäftigte sich auch eifrig mit der Mechanik der Söhne Mûsâs, und verfertigte mit ihrer Hilfe einige interessante Apparate. Als Arzt stand er im Dienste des Melik el-Manṣûr Muh., des Herrn von Ḥamât, später in demjenigen des Sultans el-Melik el-Ašraf in Damaskus, wurde dann zum Arzt am grofsen Hospital ernannt, wo er Kollege von Ibn Abi U. war. Er wurde geboren i. J. 564 (1168/69) und starb zu Damaskus i. J. 635 (1237/38). (Ibn Abi U. II. 219.)

354. Mûsâ b. Jûnis b. Muh. b. Manʿa, Abû'l-Fatḥ[a]) Kemâl ed-dîn, gewöhnlich genannt Kemâl ed-dîn b. Jûnis (oder b. Manʿa), einer der gröfsten Gelehrten der Araber. Er wurde geboren in Moṣul im Ṣafar 551 (1156), studierte daselbst unter seinem Vater, begab sich dann i. J. 571 (1175/76) nach Bagdad, wo er an der Niẓâmîje die Grundzüge des Rechtes, die Kontroverse und die Litteratur bei Riḍâ ed-dîn Abû'l-Chair Aḥmed b. Ismâʿîl el-Qazwînî, Abû'l-Barakât ʿAbderraḥmân el-Anbârî u. a. studierte. Nach Moṣul zurückgekehrt, arbeitete er mit grofsem Fleifs und lehrte nach dem Tode seines Vaters an der nach dem Emir Zein ed-dîn, dem Beherrscher von Arbela, benannten Moschee, die, nach Art eines Kollegiums gebaut, später auch das Kemâlische Kollegium nach seinem hervorragendsten Lehrer genannt worden ist. Ibn Jûnis ragte in allen Gebieten des Wissens hervor, besonders in Religions- und Rechtswissenschaft, in Philosophie, Medizin und Mathematik; man behauptet, dafs er eine genaue Kenntnis von 24 Disziplinen hatte, seine Werke waren von hohem Werte. In den mathematischen Wissenschaften beherrschte er den Euklides, die Kegelschnitte und den Almagest, die verschiedenen Mittel,[b]) ebenso die verschiedenen Zweige der Rechenkunst, wie die (gemeine) Arithmetik, die Algebra, die Regel der beiden Fehler, dann die Ausmessung der Figuren, in welcher Disziplin er nicht seines Gleichen hatte; auch in der Wissenschaft der magischen Quadrate fand er neue Verfahren, auf welche bisher niemand gekommen war. Was die Ausmessung der Figuren anbetrifft, so berichtet hierüber der Kosmograph Qazwînî[c]) von einer besondern Leistung des Ibn Jûnis folgendes:[d]) „Die Franken (Europäer) sandten zur Zeit des

[a]) Nach Ibn Abi U. „Abû ʿImrân".

[b]) Wahrscheinlich die verschiedenen Konstruktionen der beiden mittlern Proportionalen.

[c]) Zakarîjâ b. Muh. b. Maḥmûd el-Qazwînî, gest. nach 674 (1275), in seinem von Wüstenfeld (1848) herausgegebenen Werke *Aṯâr el-bilâd we achbâr el-ʿibâd* (Denkmäler der Länder und Nachrichten von den Menschen) p. 310.

[d]) Vergl. auch Bibl. math. 1895, p. 16.

Melik el-Kâmil Fragen nach Syrien, deren Beantwortung sie erbaten, es waren Fragen aus der Medizin, Philosophie und Mathematik. Die medizinischen und die philosophischen beantworteten die Leute (Gelehrten) Syriens selbst, den geometrischen aber waren sie nicht gewachsen, diese sandte man daher an Mufaḍḍal b. ʿOmar el-Abahrî in Moṣul (s. Art. 364), der seines gleichen in der Geometrie nicht hatte; doch die Lösung derselben war ihm zu schwer, er übergab sie daher dem Scheich Ibn Jûnis, der sie wirklich löste; die Aufgabe (von jetzt an ist nur noch von einer die Rede) war folgende: Es sei ein Bogen gegeben, man ziehe seine Sehne und verlängere sie über den Kreis hinaus und konstruiere auf der verlängerten Sehne ein Quadrat, dessen Fläche gleich sei derjenigen des Kreissegmentes (wörtlich des Bogenstückes). Hierauf fand dann el-Mufaḍḍal den Beweis dazu, machte aus dem Ganzen eine Abhandlung und sandte sie nach Syrien an el-Melik el-Kâmil. Als ich (Qazwînî) nach Syrien reiste, traf ich die vortrefflichsten Gelehrten in Verwunderung über die Abhandlung, sie lobten auch die Auffindung des Beweises, denn er war ein seltenes Erzeugnis jener Zeit." — Bei Ibn Abi U. wird das Problem nicht speziell genannt, die Geschichte aber nach dem Qâḍî Ǵelâl ed-dîn el-Baġdâdî, einem Schüler von Ibn Jûnis, so erzählt, es sei der Gesandte des Frankenkönigs Imbarûr[a]) (auch Imbarâdûr geschrieben) direkt zu dem Beherrscher von Moṣul gekommen mit dem Wunsche, er möchte durch seine Gelehrten einige astronomische und geometrische Fragen, die er von seinem Herrn mitgebracht habe, beantworten lassen. Hierauf habe der Fürst von Moṣul den Kemâl ed-dîn holen lassen und dieser habe dem Gesandten persönlich die Antworten auf jene Fragen übergeben. Bei dieser Audienz habe die Bescheidenheit und Einfachheit, mit der der grofse Gelehrte aufgetreten sei, scharf kontrastiert zu dem Glanz und dem Pomp, in welchem der europäische Gesandte und sein Gefolge erschienen sei.[78] — Von seinem umfassenden Wissen wird noch weiter die interessante Thatsache erzählt, dafs bei ihm auch Juden und Christen Vorlesungen über die Thora und das Evangelium hörten,[b]) dafs ferner der berühmte Aṯîr ed-dîn el-Mufaḍḍal (s. Art. 364) schon auf dem Gipfel seines Ruhmes stand, als er noch das Buch zur Hand nahm und sich zu den Füfsen Kemâl ed-dîns setzte und von ihm die Erklärung des Almagestes hörte. Lobend erwähnt ihn auch Abû'l-Barakât b. el-Mustaufî[c]) in seiner Chronik

[a]) Das lateinische „Imperator" wird hier von den Arabern als Eigenname aufgefafst, es ist dies natürlich kein anderer als Kaiser Friedrich II.

[b]) Er stand daher auch etwas im Geruche des Unglaubens.

[c]) Abû'l-Barakât el-Mubârak b. Aḥmed, Ibn el-Mustaufî, geb. 564 (1169) zu Arbela, bedeutender Traditionist und Historiker, Verfasser einer Chronik von Arbela, gest. 637 (1239/40) in Moṣul. (W. G. 322.)

von Arbela, wenn er sagt: „Er war weise, bahnbrechend in jeder Wissenschaft, besonders in denen der Alten, wie Geometrie, Logik etc. Das beweisen die Lösungen der Schwierigkeiten im Euklides und Almagest für den Scheich el-Moẓaffar b. Muh. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî (s. Art. 333), den Erfinder des Linear-Astrolabiums, bekannt unter dem Namen „der Stab".“ Ibn Ch. erzählt noch: Im Jahre 633 war ich in Damaskus, wo damals ein Mann lebte, der in den mathematischen Wissenschaften sich auszeichnete; er fand einige schwierige Punkte in arithmetischen, algebraischen und Ausmessungsaufgaben und im Euklides; diese schrieb er alle auf ein Blatt Papier und schickte sie nach Moṣul zu Kemâl ed-dîn; nach einiger Zeit kam die Antwort zurück und das Rätselhafte und Verborgene war enthüllt und klargelegt. — Kemâl ed-dîn b. Jûnis starb im Ša'bân 639 (1242) in Moṣul. Von ihm wird bei Ibn Abi U. nur genannt: Das Buch der Herrschergeheimnisse aus den Sternen. (Ibn Ch. II. 132; Übers. III. 466; Ibn Abi U. I. 306; Abulfid. IV. 465.)

Nach Steinschneider (Z. D. M. G. 50 p. 184) haben die Mss. Oxford (I. 987 u. 988), welche beide ein Komp. der drei letzten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius von Šîrâzî (s. Art. 306) enthalten, Randnoten, in welchen auch eine Abhandlung von Kemâl ed-dîn „über die Siebenteilung“ des Kreises Platz gefunden hat; dieselbe Abhandlung befindet sich auch in Oxford (I. 940, 8°). In Berlin (6008) und in Paris (2467, 15°)[a]) befindet sich von ihm eine Abhandlung über die Quadratzahlen (daſs die Summe zweier ungerader Quadratzahlen nicht wieder eine Quadratzahl sein kann)

355. Muh. b. el-Ṣaffâr, Abû 'Abdallâh, aus Cordova, war ein bedeutender Litteraturkenner und einer der ersten (Imâme) in der Rechenkunst. Er machte Reisen nach dem Orient und kam bis Bagdad. In die Heimat zurückgekehrt, las er über Litteratur in Marokko, Fes, Tunis u. a. O. Er starb i. J. 639 (1241/42). (Maq. K. I. 378.)

356. Aḥmed b. 'Alî b. Isḥâq[b]) el-Temîmî, Abû'l-'Abbâs (?), bekannt unter dem Namen Ibn Isḥâq, lebte im Anfang des 7. Jahrh. d. H. in Tunis[c]) und ist nach Ibn Chaldûn der Verfasser von im Occident viel gebrauchten astronomischen Tafeln. Der genannte Schriftsteller berichtet ferner, daſs Ibn Isḥâq genaue Beobachtungen zur Aufstellung seiner Tafeln

[a]) Da im Titel der Abhandlung der Verfasser bloſs „Ibn Jûnis“ genannt ist, so identifiziert ihn de Slane im Register mit dem bekannten ägyptischen Astronomen Ibn Jûnis, dem Verfasser der ḥâkimitischen Tafeln.

[b]) Vielleicht auch nur „'Alî b. Isḥâq“.

[c]) Dieser Zusatz findet sich nur in der Beiruter Ausgabe der Prolegomena des Ibn Chaldûn (p. 427), während die Pariser Ausgabe nichts als den Namen „Ibn Isḥâq“ hat.

von einem bedeutenden jüdischen Astronomen in Sicilien mitgeteilt erhalten habe.[a]) (Vergl. auch Art. 487.)

357. ʿAlî b. Jûsuf b. Ibrâhîm, Abû'l-Ḥasan, Ǧemâl ed-dîn, Ibn el-Qifṭî,[b]) Wezir von el-Melik el-ʿAzîz und Qâḍî von Ḥaleb, hatte eine vorzügliche und umfassende Bildung erhalten; er war bewandert in Sprachwissenschaft, im Recht, in der Tradition, in Logik, Astronomie und Geometrie, in Geschichte etc. Er ist hier hauptsächlich zu nennen als Verfasser des *Târîch el-ḥokamâ'*, einer Sammlung von Biographien von Philosophen, Mathematikern, Astronomen, Ärzten etc., das aber leider nur noch in einem, wie es scheint von el-Zûzenî (oder Zauzenî) verfafsten, Auszug vorhanden ist und sich noch an verschiedenen Orten vorfindet, so in Berlin (10053 und 54), Wien (1161), München (440), Paris (2112), Escurial (1773) etc. — Ibn el-Qifṭî starb in Ḥaleb im Ramaḍân 646 (Ende 1248). (Kut. II. 121; Abulfid. Hist. anteislam. 233—235; S. I. 319.)

358. Qaiṣar b. Abî'l-Qâsim b. ʿAbdelǵanî b. Musâfir, ʿAlam ed-dîn, bekannt unter dem Namen Taʿâsîf (?), wurde geboren zu Aṣfûn (in Ober-Ägypten, nördlich von Esneh) i. J. 574 (S. hat 564) und starb zu Damaskus im Raǵeb 649 (1251). Er war ein bedeutender ḥanefîtischer Rechtsgelehrter und hervorragender Ingenieur und Mathematiker, einer der ersten seiner Zeit. Er hatte in Ägypten und Syrien studiert, ging dann nach Moṣul und studierte hier unter Kemâl ed-dîn Mûsâ b. Jûnis besonders Musik, kehrte dann nach Syrien zurück und trat in den Dienst des Taqî ed-dîn Maḥmûd b. el-Melik el-Manṣûr, des Fürsten von Ḥamât; er baute für ihn Befestigungstürme und Wassermühlen am Orontes und konstruierte einen hölzernen, vergoldeten Globus, auf dem er sämtliche beobachteten[c]) Sterne einzeichnete. In Paris befindet sich von ihm eine kleine Abhandlung (2467, 6°) über die Postulate des Euklides, gerichtet an Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî. (Ibn Ch. Übers. III. 471 u. 473;[d]) Abulfid. IV. 479 u. 529; S. I. 313.)

359. Ismâʿîl b. Ibrâhîm b. Ǵâzî, Abû'l-Ṭâhir, el-Mâridînî, bekannt unter dem Namen Ibn Fallûs, geb. 590 (1194), gest. ca. 650[e]) (1252/53), schrieb: *Kitâb iʿdâd el-isrâr fî asrâr el-aʿdâd* (das Buch der Vorbereitung der Mitteilung des Geheimnisses, über die Geheimnisse der Zahlen), ein Kompendium der Arithmetik, in Berlin (5970). *Kitâb iršâd*

[a]) Würde nicht ausdrücklich „jüdisch" stehen, so läge die Vermutung nahe, dafs dies der in Art. 291 behandelte Muh. b. ʿÎsâ b. ʿAbdelmunʿim wäre.

[b]) Nach andern nur el-Qifṭî, d. h. von Qifṭ, einer Stadt in Ober-Ägypten, gebürtig.

[c]) d. h. diejenigen, die in den Sterntafeln verzeichnet waren.

[d]) Die Bulaqer Ausgabe des Ibn Ch. hat diese Stellen über Qaiṣar nicht.

[e]) Nach H. Ch. VI. 346 i. J. 637.

el-hassâb (das Buch der richtigen Leitung des Rechners) zur Erschliefsung der Rechenkunst, in Berlin (5971).

360. Muh. b. Eijûb, Abû Ġa'far, el-Ṭabarî, schrieb i. J. 632 (1234/35): *kitâb miftâḥ el-mo'âmalât fi'l-ḥisâb* (das Buch des Schlüssels des Geschäftsrechnens), in Konstant. (2763); ferner: *kitâb ma'rifet el-asṭorlâb* (das Buch der Kenntnis des Astrolabiums), in München P. (347), unvollständig.

361. 'Abdelwahhâb b. Ibrâhîm, 'Izz ed-dîn el-Ḥaramî[a]) el-Zenġânî, hauptsächlich Grammatiker, beschäftigte sich aber auch mit Astronomie und schrieb eine Abhandlung über den Gebrauch des Astrolabiums, in Leiden (1091). Er starb nach 655 (1257).

362. El-Ḥasan b. Muh. b. Aḥmed b. Naġâ, 'Izz ed-dîn el-Darîr (der Blinde), aus Arbela gebürtig, zeichnete sich besonders in der Kenntnis der Sprachwissenschaft und Litteratur aus, war aber auch bewandert in den alten Wissenschaften. Er hatte ein erstaunliches Gedächtnis, so dafs er die sechs ersten Bücher des Euklides vollständig auswendig wufste und über dieselben als Blinder Vorlesungen hielt. Er starb in Damaskus im Rabî' II. 660 (1262), geboren war er i. J. 586 (1190). (Abulfar. 526, Übers. 344; Kut. I. 171.)

363. El-Ḥasan b. 'Alî b. 'Omar el-Marrâkošî, Abû 'Alî,[b]) lebte in Marokko wahrscheinlich bis ca. 660 (1262).[74] Über sein Leben sind in den arabischen Quellen gar keine Angaben zu finden, trotzdem er, oder vielleicht besser weil er jedenfalls einer der bedeutendsten Astronomen der spätern Zeit war; denn die arabischen Biographen liefsen diejenigen Gelehrten, die sich nur oder hauptsächlich mit den exakten Wissenschaften beschäftigten und auf den Gebieten der sog. humanistischen Disziplinen nichts oder wenig leisteten, meistens unberücksichtigt. Sein Hauptwerk ist der *ġâmi' el-mabâdi we'l-ġâjât* (das Ganze der Anfänge (Prinzipien) und der Enden (Resultate)), eine Abhandlung über die astronomischen Instrumente der Araber und ihren Gebrauch zu den verschiedensten Beobachtungen, noch vorhanden in Paris (2507 u. 2508) und in Konstant. (2599 u. 2669); einzelne Partien daraus in Oxford (I. 902 u. 991) und in Leiden (1098 u. 99). Wahrscheinlich sind auch die in Kairo (275 u. 280, Übers. 169) sich befindenden zwei Abhandlungen „über die Art und Weise des Gebrauches des Himmelsglobus" und „Tafeln der ersten Schiefe von Minute zu Minute" von dem Scheich Šaraf ed-dîn Abû 'Alî el-Marrâkošî Auszüge aus dem

a) Brockelmann, I. 474 hat „Chazraġî", was nicht im Katalog von Leiden steht.

b) So wird er genannt im Pariser Ms. 2507, im Leidener Ms. 1098, im Berliner Ms. 5857 und auch bei H. Ch., wenigstens teilweise: Abû 'Alî Hasan b. 'Alî und Abû 'Alî; im Pariser Ms. 2508 und auch im Bodl. Ms. 902 dagegen heifst er Abû'l-Hasan 'Alî b. 'Omar, bezw. nur Abû'l-Hasan 'Alî.

genannten Werke. J. J. Sédillot hat von diesem Buche denjenigen Teil, der sich im Pariser Ms. 2507 (früher 1147) befindet, nebst einigen Auszügen aus dem Ms. 2508 (früher 1148) ins Französische übersetzt, welche Übersetzung dann sein Sohn L. A. Sédillot veröffentlicht hat unter dem Titel: Traité des instruments astronomiques des Arabes, composé au treizième siècle, par Aboul-Hassan Ali de Maroc, deux tomes, Paris 1834—35. Derjenige Abschnitt des Ms. 2508, der sich auf das Linear-Astrolabium oder den Stab des Ṭûsî bezieht, wurde auf meine Einladung hin von Baron Carra de Vaux in Paris herausgegeben und übersetzt (vergl. Art. 333). In der Einleitung (p. 8) zu der genannten Übersetzung Sédillots ist bemerkt, daſs Abû ʿAlî el-Marrâkošî noch ein Werk, betitelt: *talchîṣ el-aʿmâl fî ru'jet el-hilâl* (Abriſs der Operationen über das Erscheinen des Neumondes), ebenso ein Buch über die Kegelschnitte verfaſst habe; beide Werke scheinen verloren gegangen zu sein. H. Ch. I. 393 führt noch ein anderes Werk von Abû ʿAlî el-Marrâkošî an, betitelt: *âlât el-taqwîm* (Werkzeuge des Kalenders, oder zur Kalenderherstellung). Daſs endlich das im Berliner Ms. 5893 befindliche Stück aus dem astrologischen Werke „über den Einfluſs der Planetenkonjunktionen und der Finsternisse“ von el-Ḥasan b. ʿAlî el-Maġrebî Šaraf ed-dîn von demselben marokkanischen Astronomen herrühre, ist sehr wahrscheinlich.

364. El-Mufaḍḍal b. ʿOmar Aṯîr ed-dîn el-Abahrî,[a]) bedeutender Philosoph, Mathematiker und Astronom, ein Zeitgenosse und in mathematischen Fächern noch Schüler von Mûsâ b. Jûnis Kemâl ed-dîn (s. Art. 354). Er studierte unter diesem, als er schon selbst ein berühmter Lehrer und Gelehrter war, noch den Almagest (vergl. auch Bibl. math. 9 (1895) p. 14). Von ihm ist besonders sein logisches Werk, die *Isagoge,*[b]) berühmt geworden und verbreitet. Von astronomischen Schriften existieren von ihm: in Leiden (1104) ein astronomisches Werk ohne Titel, in der Vorrede aber giebt er an, er behandle darin das Ganze des astronomischen Wissens in 10 Kapiteln. Ein ähnliches Werk ist in Paris (2515), betitelt: *Muchtaṣar fîʿilm el-hei'a* (Abriſs der Astronomie), in 22 Kapiteln; vielleicht ist das erstgenannte Werk nur ein Teil oder noch eine weitere Verkürzung von diesem. Abhandlung über das Astrolabium, in 14 Kapiteln, Paris (2544, 5⁰). Auszüge aus einem Werke von ihm, betitelt: *fî dirâjet el-aflâk* (über die Kenntnis der Sphären)[c]) befinden sich in Oxford (I. 940, 9⁰). Ebenda (I. 913, 5⁰) befinden sich Auszüge aus einem nicht näher bezeichneten Buche unsers Autors.

---

[a]) So und nicht „Abharî“ soll gelesen werden; vergl. Dorn, drei astronom. Instrum. p. 93.

[b]) So genannt nach dem griechischen Vorbilde, der Isagoge des Porphyrius.

[c]) Uri übersetzt: de sectionibus circuli (?).

Ibn Ch. (II. 133, Übers. III. 468) nennt ihn als Verfasser astronomischer Tafeln. El-Abahrî wird ca. 660 (1262)[75] gestorben sein. (Ibn Ch. II. 133, Übers. III. 468; Abulfar. 485.)

365. Jaḥjâ[a]) b. Muh. b. ʿAbdân b. ʿAbdelwâḥid, Abû Zakarîjâ Neǧm ed-dîn, bekannt unter dem Namen Ibn el-Lubûdî, einzig in der Medizin, hervorragend in den philosophischen Disziplinen und in der Mathematik. Er wurde geboren in Ḥaleb i. J. 607 (1210/11), zog als Knabe mit seinem Vater nach Damaskus und widmete sich hier dem Studium der Medizin unter Muhaḏḏab ed-dîn ʿAbderraḥîm b. ʿAlî (s. Art. 347); er trat später in die Dienste des Melik el-Muǵâhid b. Asad ed-dîn, des Fürsten von Ḥimṣ (Emessa), dessen Wezir er wurde. Als dieser Fürst i. J. 643 nach seinem Kriegszug nach Chowârezmien gestorben war, wandte er sich zu dem Melik el-Ṣâliḥ Neǧm ed-dîn Eijûb b. el-Melik el-Kâmil in Ägypten, der ihn mit grofsen Ehren überhäufte und ihn zum Verwaltungsinspektor in Alexandria ernannte. In dieser Stellung blieb er längere Zeit und kehrte dann nach Syrien zurück, wo er in gleicher Eigenschaft angestellt wurde. Er starb nach 666 (1267/68), aus welchem Jahre Ibn Abi U. noch Verse von ihm anführt. Er schrieb: Auszug aus dem Euklides. Kurze Darstellung der Postulate des Euklides. Das Genügende der Rechenkunst. Das Notwendigste, was man braucht, vom Euklides und den mittlern Büchern. Die vollständige (od. vollkommene) Abhandlung über die Algebra. Die Manṣûrische Abhandlung über die Zahlen der magischen Quadrate. *El-zâhî* (das herrliche, glänzende), ein Auszug aus den Tafeln des *Šâh* (oder den königlichen Tafeln, vergl. Art. 22). Die angenäherten (*moqarrab*) (d. h. der Wahrheit ganz nahe kommenden) Tafeln, gegründet auf die erprobte Beobachtung. Über die Kunst der (astrologischen) Urteile. (Ibn Abi U. II. 185; Abulfar. 526, Übers. 344.)

366. Aḥmed b. Ṯâbit[b]) Ǧemâl ed-dîn, Abû'l-ʿAbbâs, gest. 671 (1272/73),[c]) schrieb: *Gonjet el-ḥassâb* (das Genügen oder der Reichtum des Rechners), in Konstant. (2728). In Paris (2474) befindet sich ein Kommentar zu diesem Werke von Muh. b. Ibrâhîm b. el-Ḥanbali (s. Art. 464).[76]

367. Muh. b. Aḥmed b. ʿOmar Ǧemâl ed-dîn, Abû ʿAbdallâh, el-Ḥarâʿî, lebte zur Zeit Hôlâgûs (ca. 650)[d]) und schrieb eine *moqaddame fi'l-ḥisâb* (Einleitung in die Rechenkunst), in Oxford (I. 918, 2°).

368. Muh. b. Muh. b. el-Ḥasan, Abû Ǧaʿfar, Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî, ein Universalgelehrter, besonders aber in Philosophie, Mathematik und

---

a) Im Pariser Ms. 2918, welches einen Abrifs der *Kullîjât* des Ibn Sînâ von Ibn el-Lubûdî enthält, heifst er „Aḥmed".

b) So heifst er im Pariser Ms. 2474, im Katal. von Konstant. aber „Ṯabâta".

c) Nach dem Katal. von Konstant.

d) Nach dem Katal. von Uri.

Astronomie hervorragend und hierin den ersten Gelehrten der Araber gleichkommend; besonders verdanken ihm die ebene und sphärische Trigonometrie ihre höchste Ausbildung, die sie im Mittelalter erreicht haben. Er wurde geboren in Ṭûs (in Chorâsân) am 11. Ğumâdâ I. 597 (Febr. 1201),[a]) war also von Geburt ein Perser und schrieb seine Werke teils in persischer, teils in arabischer Sprache, teils in beiden zugleich. Seine bedeutendsten Lehrer waren Kemâl ed-dîn Mûsâ b. Jûnis (s. Art. 354) und Moʿîn ed-dîn Sâlim b. Bedrân el-Miṣrî, der Moʿtazilit. Er stand zuerst im Dienste des ismaelitischen Fürsten von Alamût und nach der Eroberung dieser Feste durch die Mongolen in demjenigen Hôlâgûs, der seine Kenntnisse und sein Genie erkannte und ihn zum Finanzminister und Wezir ernannte. Auf seinen Rat hin baute Hôlâgû in Merâġa eine grofse Sternwarte, mit ausgezeichneten Instrumenten versehen und mit einer über 400 000 (?) Bände zählenden Bibliothek verbunden, die er aus den in Bagdad, Syrien und Mesopotamien geraubten Büchern geäufnet hatte. Zu den Astronomen, die an dieser Sternwarte unter Naṣîr ed-dîns Leitung die Beobachtungen für die Herstellung der berühmten Îlchânischen Tafeln machten, gehörten Neğm ed-dîn el-Qazwînî (s. Art. 370), Mu'jid[b]) ed-dîn el-ʿOrḍî,[c]) Fachr ed-dîn el-Chalâṭî,[d]) Fachr ed-dîn el-Merâġî,[e]) und der Spanier Moḥjî ed-dîn el-Maġrebî (s. Art. 376), der aber sehr wahrscheinlich nur kürzere Zeit daselbst verweilte und vielleicht erst nach dem Tode Naṣîr ed-dîns. Die Sternwarte war mit grofsen Einkünften aus Stiftungen dotiert und die Astronomen hatten grofse Besoldungen und Pensionen. Der Biograph Naṣîr ed-dîns, el-Kutubî, erzählt, wie es bei den arabischen Biographen mit Vorliebe geschah, einige Anekdoten aus dem Leben unsers Gelehrten, eine solche bezieht sich auch auf diese Ausstattung der Sternwarte. Als Hôlâgû von den grofsen Summen hörte, die dieser Bau kosten sollte, fragte er den Naṣîr, was denn eigentlich der Nutzen dieser Wissenschaft der Gestirne sei und ob derselbe auch in einem richtigen Verhältnis zu den Kosten stehe. Da antwortete ihm Naṣîr: Ich will dir ein Gleichnis vorlegen; du befiehlst jemandem, er solle auf diesen Turm steigen und von oben herunter ein grofses Becken von Erz werfen, ohne dafs jemand etwas hievon weifs; wie es nun hinunterfällt, entsteht ein furchtbarer Schlag, der alle Anwesenden in grofsen Schrecken versetzt, so dafs einige in Ohnmacht fallen, nur ihm (dem Werfer des Beckens) und Hôlâgû geschieht nichts, weil sie um den

---

[a]) Brockelmann (Gesch. d. arab. Litt. I. 508) hat 607.

[b]) oder Mu'aijed.

[c]) Vorher in Damaskus.

[d]) Vorher in Tiflis.

[e]) Vorher in Moṣul.

Grund der Sache wissen. So hat nun auch die Astronomie den Nutzen, dafs der mit ihr Vertraute weifs und versteht, was vorgeht und ihn deshalb nie ein Ereignis so in Schrecken versetzen wird, wie den Gedankenlosen und Unwissenden. Hierauf antwortete Hôlâgû: „Die Sache (d. h. der Kostenpunkt) hat nichts zu sagen“, und beauftragte den Naṣîr mit dem Bau und der Ausstattung der Sternwarte. Der Bau wurde i. J. 657 (1259) begonnen; über die Dauer der Beobachtungen sagt Naṣîr in seinen Îlchânischen Tafeln (nach el-Kutubî) selbst folgendes: „Es sagen die Meister (der astronomischen Wissenschaft), dafs die Beobachtungen der Planeten nicht in weniger als 30 Jahren vollständig durchgeführt werden können, denn in dieser Zeit laufen die Umdrehungen aller sieben Planeten vollständig ab;[a]) Hôlâgû aber sagte: ich verlange, dafs die Beobachtungen in 12 Jahren durchgeführt werden.“ Wirklich wurden nach zwölfjähriger Beobachtung die Tafeln herausgegeben. Über die Sternwarte berichtet ferner noch Šems ed-dîn el-Ḥarîrî (n. el-Kut.) folgendes: „Ich reiste einmal nach Merâġa, um die Sternwarte und ihren Vorsteher Ṣadr ed-dîn ʿAlî b. el-Chôǧâ Naṣîr ed-dîn[b]) einen Besuch abzustatten; er war ein junger Mann, hervorragend in der Wissenschaft der Gestirne und in der persischen Dichtkunst. — — Daselbst sah ich viele Beobachtungsinstrumente, worunter die Armillarsphäre, die aus fünf Ringen aus Kupfer bestand; der erste war der Meridian, der unten im Boden befestigt war, der zweite der Äquator, der dritte die Ekliptik, der vierte der Breitenkreis, der fünfte der Deklinationskreis oder Kolur der Nachtgleichen; ferner sah ich den Azimutalkreis,[c]) mit dem man das Azimut der Sterne bestimmt.“ — Kurz vor seinem Tode verliefs Naṣîr Merâġa und begab sich nach Bagdad, er starb daselbst im Ḏû'l-Ḥiǧǧe 672 (Juni 1274).[d]) (Kut. II. 186; Abulfar. 548, Übers. 358; Abulfid. V. 37; Jourdain, Mém. sur les instr. empl. à l'observ. de Méragah, im Magasin encycl. réd. par A. L. Millin, 1809, T. VI.)

Naṣîr ed-dîn schrieb:[e]) 1. Die *Taḏkira* (Erinnerung, Memorial) über die Astronomie, eines seiner vorzüglichsten und originellsten Werke, in Berlin (5681) mit Kom. von ʿAlî b. Muh. el-Ǧorǧânî (s. Art. 424); Leiden (1092—95), das dritte Exemplar (1094) mit Kom. von Ǧorǧânî; Leipzig (261, 1°); Florenz (Pal. 277)?; Brit. Mus. (1339, 1° und 1342, 3°); Oxford (I. 1018) mit Kom. von Šems ed-dîn Muh. b. Aḥmed el-Ḥafarî (geschrieben

---

[a]) Bekanntlich hat Saturn eine Umlaufszeit von 29,46 Erdjahren.

[b]) Der Sohn Naṣîr ed-dîns folgte seinem Vater nach dessen Tode als Direktor der Sternwarte und in andern Ämtern.

[c]) Der arab. Text hat unrichtig: *el-dâire el-šemsîje* d. h. der Sonnenkreis.

[d]) Nicht 1273, wie man meistens angegeben findet.

[e]) Ich nehme hier nur die math., astron. und astrol. Schriften auf.

932 d. H.); derselbe Kom. im Ind. Off. (747), den Kom. von Ǧorǧânî einschliefsend, der auch allein in 746 enthalten ist; Oxford (II. 292) mit Kom. von Ǧorǧânî; Paris (2330, 8°, 2509, 2510), das letztere Ms. mit Kom. von el-Ḥasan b. Muh. el-Nîsâbûrî (s. Art. 395), betitelt: *tauḍîḥ el-taḏkira*; Konstant. (2589) mit Kom. von dem eben genannten, derselbe Kom. ibid. (2646 u. 47). In pers. Übers., betitelt: *risâle-i hei'a* oder *risâle-i moʿînije* (so genannt, weil sie für Šâh Moʿîn übersetzt worden war), befindet sich dieselbe in Berlin P. (329, 1° u. 330, 2°), Cambridge (200); H. Ch. (III. 444) nennt sie auch, aber ohne Angabe des Autors. Von diesem Werke hat Carra de Vaux einige Auszüge in französischer Übersetzung veröffentlicht, besonders das 11. Kap., in seiner Abhandlung: Les sphères célestes selon Nasîr Eddîn Attûsî, als Append. VI zu Tannery, Recherches sur l'hist. de l'astron. anc., Paris 1893 (vergl. auch Art. 430). — 2. *Risâle-i bîst bâb* (Abhandlung der zwanzig Kapitel), pers., über die Kenntnis und den Gebrauch des Astrolabiums, in St. Petersburg (128, 1°, 130, 8°, 317, 2°), das letztgenannte Ms. mit Kom. von ʿAbdelʿalî el-Barǧendî (s. Art. 456); Florenz (Pal. 318); Brit. Mus. P. (Or. 1585, Add. 22752 u. 23569, 4°), das Ms. 22752 mit Kom. von Barǧendî; Oxford (I. 73, 11° u. 87), Konstant. (2648) mit Kom. von Barǧendî. — 3. *Muchtaṣar fiʿilm el-tanǧîm we maʿrifet el-taqwîm* (Abrifs der Astrologie und Kalenderkenntnis, pers. Titel: *kitâb-i sî faṣl* = Buch der dreifsig Abschnitte), in Berlin (5679) mit Kom. von einem Anonymus; Leiden (1177) pers.; Brit. Mus. (394 u. 395, 1°), ebenda pers. (Add. 7700 u. 23569, 3°); Wien (1424) pers. mit Kom. von Bedr el-Ṭabarî; Oxford (II. 301) mit Kom. eines Anonymus; Paris (2512) (vergl. Art. 425). — 4. Die Îlchânischen Tafeln (*el-zîǧ el-îlchânî*), in Berlin P. (336), Leiden (1181) pers.; Florenz (Pal. 269) pers.; Oxford (I. 897) in arab. Übers. von Šihâb ed-dîn el-Ḥalebî; Brit. Mus. P. (Add. 7698); Gotha (1404) in arab. Übers. des ʿAlî b. el-Rifâʿî*) el-Ḥoseinî (vollendet 934 d. H.), betitelt: *ḥall el-zîǧ* (Auflösung der Tafeln), die Tafeln sind leer gelassen; Paris (Kat. d. pers. Mss. Nr. 169), Abschrift von Aṣîl ed-dîn Ḥasan, dem Sohne Naṣîr ed-dîns. Eine erweiterte Ausgabe dieser Tafeln von el-Ḥasan b. el-Ḥosein Šâhinšâh el-Samnânî (geschr. 795 d. H.), unter dem Titel: *tauḍîḥ-i zîǧ îlchânî* befindet sich im Brit. Mus. P. (Add. 11636); ein Stück aus diesen Tafeln, entnommen dem Kom. des Maḥmûd Šâh Cholǧî, wurde herausgegeben von J. Greaves, betitelt: Astronomia quaedam ex traditione Shah Cholgii Persae, London 1652. — 5. *Muchtaṣar bi-ǧâmiʿ el-ḥisâb bi'l-tacht we'l-turâb* (Abrifs über das Ganze der Rechenkunst auf der Staubtafel, wörtlich „mit der Tafel und dem Staub"), im Escurial (968, 2°);

*) Soll wahrscheinlich heifsen: Jaḥjâ b. ʿAlî el-Rifâʿî, vergl. die Besprechung der Ulûg-Beg'schen Tafeln im Art. 438.

Konstant. (2728) pers., der Katalog hat nur: Pers. Buch über die Rechenkunst von Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî; Berlin (5973), nur der Schlufs oder vielleicht nur ein Anhang zu diesem Werke von einem Ungenannten.[a]) — 6. *Kitâb šakl el-qaṭṭâʿ*[b]) (das Buch über die Transversalenfigur), in Berlin (5956); Oxford (I. 875, 16°); Paris (2467, 10° u. 11°), im letztern Ms. (11°) nur das 2. Buch und auch dieses unvollständig. Dieses Werk, das die ebene und sphärische Trigonometrie in der Form jener Zeit enthält, wurde herausgegeben nach einem Ms. des gewesenen Grofswezirs Edhem Pascha in Konstant. 1891 unter dem Titel: Traité du quadrilatère, attrib. à Nassiruddin el-Toussy, édité et traduit par Alexandre Pacha Carathéodory.[c]) — 7. *Kitâb el-bâriʿ fîʿulûm el-taqwîm we ḥarakât el-aflâk we aḥkâm el-nuǵûm* (das vollkommene Buch über die Kalenderkenntnis, die Bewegung der Sphären und die Astrologie), in Oxford (I. 882); vielleicht ist dieses Buch identisch mit Nr. 3. — 8. Abhandlung über die Postulate des Euklides, in Paris (2467, 5°). — 9. Abhandlung über das 5. Postulat des Euklides, an Qaiṣar b. Abî'l-Qâsim (s. Art. 358) gerichtet, vielleicht nur ein Teil der vorigen Abhandlung, in Berlin (5942), Paris (2467, 6°). — 10. *Qawâʿid el-handase* (Grundlagen der Geometrie), aus Euklides entnommen, in Florenz (Pal. 298), vielleicht identisch mit der Abhandlung über die Postulate des Euklides (Nr. 8). — 11. Hundert und fünf Aufgaben aus den Elementen des Euklides, in Kairo (200, Übers. 19). — 12. *Zubdet el-hei'a* (Essenz der Astronomie), eine Darstellung der Elemente der Astronomie, in Paris (2511)[d]), Leiden (1183) pers. — 13 *El-tashîl fî'l nuǵûm* (die Erleichterung über die Gestirne), in Oxford (I. 901). — 14. Über den Beweis, dafs die Summe zweier ungeraden Quadratzahlen keine Quadratzahl sein kann, in Berlin (6008, 2°), im Ind. Off. (1043, 4°). — 15. Über Bahn, Gröfse und Entfernung des Merkur, in Berlin (5680). — 16. Über Zurückwerfung und Brechung des Lichtes, in Berlin (6020). — 17. *El-wâfî fîʿilm el-raml* (das Vollkommene oder das sein Versprechen Haltende über die Geomantie, d. i. die Wahrsagekunst aus Sandfiguren), in St. Petersburg (547, 5°), München (880), Paris (2716, 5°)?, Algier (1530).[e]) — 18. *Ichtijârât* (Tage-

[a]) C. I. 399 bezeichnet dieses Werk als ein sehr seltenes und kostbares.

[b]) Der Titel heifst auch: *kitâb daʿâwî el-šakl el-maʿrûf bi'l-qaṭṭâʿ*, oder wie er es selbst in seiner Bearbeitung der Sphärik des Menelaus nennt: *Kašf el-qanâʿ ʿan asrâr šakl el-qaṭṭâʿ*.

[c]) Vergl. auch Bibl. math. 7 (1893) p. 1—8, und A. v. Braunmühl, Nassir Eddîn Tûsi und Regiomontan, Nova acta, Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturf., Bd. LXXI. Nr. 2.

[d]) Der Titel heifst hier: *zubdet el-idrâk fî hei'at el-aflâk.*

[e]) Der Titel ist hier: *el-risâle el-sulṭânîje fî chaṭṭ el-raml.*

wählerei), in Konst. (2686) türk. — Es folgen nun die Bearbeitungen (Rezensionen, Redaktionen) und Kommentare der sog. „mittlern Bücher" und anderer Werke griechischer Autoren, deren verbesserte Neu-Ausgabe Naṣîr ed-dîn sich vorgenommen und zur Ausführung gebracht hat: a) die Elemente des Euklides, in zwei verschiedenen Redaktionen, einer gröſseren und einer kleinern. Die gröſsere scheint nur noch in Florenz zu existieren (Pal. 272 u. 313), im letztern Ms. nur die sechs ersten Bücher; diese wurde im Druck herausgegeben in der medic. Bibliothek zu Rom i. J. 1594; merkwürdigerweise findet man verschiedene Exemplare dieser Ausgabe, solche mit 13 und solche mit bloſs 12 Büchern, solche mit und solche ohne lateinischen Titel (Euclidis elementor. geometricor. libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum arab. impressi Romae in typ. Medic. 1594. cum licentia superiorum). Die kürzere Ausgabe, die aber in den meisten Mss. 15 Bücher zählt, befindet sich noch in Berlin (5918 u. 19), München (848), Oxford (I. 949 u. 1012, 1°), Brit. Mus. (974, 1334[a]) u. 35), Paris (2465 u. 66), Ind. Off. (736—40), Konstant. (2722), und vielleicht in Florenz (Pal. 277); diese kürzere Ausgabe wurde gedruckt in Konstant. i. J. 1801. Die sechs ersten Bücher wurden auch im Druck herausgegeben in Calcutta 1824. Ein Kommentar zu dieser Bearbeitung von einem Abû Isḥâq[b]) befindet sich im Brit. Mus. (Suppl. 751) und in Konstant. (2741). — b) Die Data des Euklides, in Berlin (5929), Florenz (Pal. 271, 273, 286), Oxford (I. 875 und 895), Ind. Off. (743, 1°), Kairo (200, Übers. 19). — c) Die Data des Ṯâbit b. Qorra, in Berlin (5939), Leiden (1029), Florenz (Pal. 271 und 286), Oxford (I. 875, 14°), Paris (2467, 4°), Kairo (202, Übers. 21). — d) Die Optik des Euklides, in Berlin (6016 u. 17), Leiden (977), Florenz (Pal. 271 u. 286), Oxford (I. 875 u. 895), Ind. Off. (743, 2°), Kairo (199, Übers. 19). — e) Die Phaenomena des Euklides, in Oxford (I. 875 u. 895), Ind. Off. (743, 3°), Kairo (205, Übers. 24). — f) Die sieben Bücher der Kegelschnitte des Apollonius, in Oxford (I. 943), Ind. Off. (745)?. — g) Das Buch des Archimedes über die Kugel und den Cylinder, in Berlin (5934), Florenz (Pal. 271 u. 286), Paris (2467, 8°), Oxford (I. 875 u. 895), Ind. Off. (743, 6°). — h) Die Kreisrechnung des Archimedes, in Berlin (5934), Florenz (Pal. 271 und 286), Paris (2467, 9°), Oxford (I. 875 u. 895), Ind. Off. (743, 6°). — i) Die Lemmata od. Assumpta des Archimedes, mit dem Kom. des ʿAlî b. Aḥmed el-Nasawî (s. Art. 214), in Berlin (5936), Leiden (982), Florenz (Pal. 271 u. 286), Oxford (I. 875

---

[a]) Dieses Ms. ist sehr alt, es wurde i. J. 656, also noch zur Lebzeit des Verfassers, vom Original abgeschrieben.

[b]) Vergl. auch Art. 399 und Anmerkg. 82.

— ... ber den Aufgang und den Unter-
... Leiden 1042 ?. Florenz (Pal. 271 u.
... Kairo 202, Übers. 21). —
... us, in Berlin (5932), Florenz
... I. 875 u. 895), Ind. Off.
... 1046, 4°). — m) Die Sphärik
... Florenz (Pal. 271 u. 286), Paris
... Sphärik des Theodosius, in Berlin
... 2467, 19°), Oxford (I. 875 u. 895),
... und Nächte von Theodosius,
... Oxford (I. 875 u. 895), Ind.
... Über die bewohnten Orte des
... Leiden 1041), Florenz
... Ind. Off. 744, 2°), Brit. Mus.
... ber die Aufgänge der Gestirne
... Oxford (I. 875 u. 895),
... — Über die Gröfsen und
... von Aristarchus, in Berlin (5651),
... 875 u. 895), Ind. Off. 744, 4°),
... des Ptolemäus, in Berlin (5655),
... Brit. Mus. 391 u. 1338), Ind. Off.
... bemerkt, dafs diese Rezension ver-
... Muh ... vergl. auch
... in Paris (Kat. d. pers. Mss.
... in Leiden 1172 (pers.), Florenz
... 415, 2°), der Text arab., der Kom.
... 2695) arab. u. pers. Die letzten
... Kommentare als blofse Redaktionen
... der genannten Bearbeitungen grie-
... nennt unter den Werken Nasirs
... solches über das Planisphaerium.
... enhält im Ms. 2760 eine ...
... über die Astronomie und Geometrie
... anderes als seine Ausgabe der „mittlern
... nennt unter den Schriften Nasir ed-dins

... deutet, dafs es ungewifs sei, ob das ...
... seine Bearbeitung oder blofs die ursprüng-
... Werkes enthalte.
... Bearbeitungen sind unter ihren bez. Verfassern

dieses Sammelwerk auch und betitelt es: *Kitâb el-mutawassiṭât bein el-handase we'l-hei'a* (das Buch der mittlern (Bücher) zwischen der Geometrie und Astronomie), zählt dann aber doch die einzelnen Werke desselben noch einzeln auf, aber unvollständig; dasselbe thut auch Brockelmann (Gesch. d. arab. Litt. I. p. 511), indem er sub Nr. 31 erwähnt: *el-mutawassiṭât* Bodl. I. 875, 895, unter andern Nummern dann aber auch noch die einzelnen Schriften dieser Sammlung anführt, allerdings läſst er dann bei diesen Nummern die Angabe ihres Vorkommens in der Bodl. weg. Im übrigen ist zu bemerken, daſs Brockelmann im Verzeichnis der Schriften Naṣîrs und ihres Vorkommens in den verschiedenen Bibliotheken ziemliche Lücken zeigt.

369. Muh. b. el-Abahrî, Abû ʿAbdallâh, vielleicht der Sohn von Nr. 364, gestorben nach Casiri i. J. 673 (1274/75), schrieb: *Lawâmiʿ el-wasâ'il fî maṭâliʿ el-rasâ'il,* eine Abhandlung über die Handhabung der verschiedenen astronomischen Instrumente, im Escurial (960), in Gotha (1414); hier wird der Verfasser genannt: Abû Saʿîd ʿAbderraḥmân b. Abî Ḥafṣ ʿOmar b. Muh. el-Abahrî; ob dieser oder der obige der richtige Name sei, können wir nicht entscheiden; Brockelmann (l. c. II. 474) zieht den letztern vor. (C. I. 397.)

370. ʿAlî b. ʿOmar b. ʿAlî, Neğm ed-dîn el-Kâtibî, Debîrân[a]) el-Qazwînî, der Logiker, Philosoph und Astronom, einer der Beobachter an der Sternwarte zu Merâġa unter Naṣîr ed-dîn (s. Art. 368), starb im Ramaḍân 675 (1277). Er verfaſste ein Buch, betitelt: *ʿain el-qawâʿid fi'l-manṭiq we'l-ḥikme* (Quelle der Grundlagen für die Logik und die Philosophie), welches im Abschnitt „Physik“ (Naturphilosophie) auch die mathematischen Wissenschaften behandelt, in Leiden (1525), Escurial (665); der zweite Teil desselben, die Physik und Metaphysik umfassend, erschien auch selbständig unter dem Titel: *ḥikmet el-ʿain* (Weisheit oder Philosophie der Quelle), in Berlin (5080), Brit. Mus. (428 u. 1200, 8°). Er schrieb ferner eine Bearbeitung (Rezension) des Almagestes, in Konstant. (2583). (Abulfar. 549, Übers. 358; Kut. II. 83.)

371. ʿAlî b. Abî ʿAlî, Abû'l-Ḥasan, el-Qosṭanṭînî[b]) el-Ġarnâṭî, verfaſste ein poetisches Werk über Astronomie mit Tafeln, das noch im Escurial (904, 2°) vorhanden ist. Er lebte nach C. I. 344 ums Jahr 653 (1255).

371ª. Ġars el-Naʿma, Abû Naṣr, der Sohn des Arztes Mesʿûd b.

---

a) Dies ist das pers. Wort für el-Kâtibî, das Patronym. von debîr = der Schreiber.

b) d. h. von Constantine in Algier oder auch von Constantina, zwischen Cordova und Sevilla gelegen, doch ist das erstere hier wahrscheinlicher; vergl. über die häufige Schreibweise „Qosanṭînî“ statt „Qosṭanṭînî“ W. G. 455.

...n Verstand und hatte grofse Kenntnis-
... Zeit des letzten Chalifen el-Musta'sim
... 342.)

Hasan, Abû'l-Hasan, 'Alâ ed-din
..., stammte aus Bagdad und wurde
... Er war sehr geschickt in der Wissen-
...chnung, hatte eine sehr schöne Schrift
...arb in Damaskus i. J. 680 (1281/82).

... h. von Sevilla), ein bedeutender Astro-
... der Abfassung eines astrologischen Werkes
...terstadt betrachteten ihn jedoch als einen
...häftigung mit diesen Dingen, daher wagte
...eröffentlichen. Er war ein Zeitgenosse des
... K. II. 138 nach Ibn Sa'îd.)

...âq b. el-Qoff, Emîn ed-daula Abû'l-
... Kark i. J. 630 (1233). Er studierte Medizin
... auch bei Ibn Abi Usaibi'a. Er beschäftigte
...Philosophie unter Šems ed-din 'Abdelhamid el-
... Studium des Euklides unter Mu'jid ed-din el-
... Schwierigkeiten er mit grofser Geschicklichkeit
... Arzt hauptsächlich in Damaskus und starb da-
... 1286). (Ibn Abi U. II. 273.)

...l-Farag Bar-Hebraeus (d. h. der Sohn des
...rische Theolog, Philosoph und Geschichtschreiber,
...nannt zu werden, weil sein bekanntes Geschichts-
...alis,[a]) auch die mathematische und astronomische
...w. die Gelehrten dieser Disziplinen, in Berück-
...rde geboren 623 (1226) zu Malatia im östlichen
... zum Christentum übergetretenen Juden Aaron
...sten Studien, später siedelte er mit seinem Vater
... wurde dort Mönch. Als solcher studierte er dann
... Medizin und vervollkommnete sich in der arabischen
...246 wurde er, 20 Jahre alt, zum jakobitischen Bischof
... ernannt, 1252 wurde er Bischof von Haleb, 1264
der östlichen Jakobiten und wohnte als solcher meistens

...ene, verkürzte Bearbeitung seiner syrischen Chronik: ver...

in Moṣul, doch auch häufig in Tebrîz und Merâġa, wo er im Juli 1286[a]) gestorben ist. Von ihm ist noch ein astronomisch-chronologisches Werk in syrischer Sprache vorhanden, betitelt: das Buch des Aufsteigens des Geistes zum Bilde des Himmels und der Erde, in Oxford (I. 113), Paris (Cod. syr. 162, nach W. A. 146). (W. A. 145; Nöldeke, Orient. Skizzen, p. 253—273.)

376. Jaḥjâ b. Muh. b. Abî'l-Šukr Moḥjî ed-dîn el-Maġrebî, lebte um die Mitte des 7. Jahrh. d. H. Sehr wahrscheinlich reiste er mit Ibn Sa'îd (s. Anmerkg. 77) nach dem Osten, wenigstens treffen wir ihn auch als Gast bei Hôlâgû und finden ihn ebenso unter den Astronomen Naṣîr ed-dîns in Merâġa erwähnt (vergl. Art. 368). Hier wurde er auch mit Abû'l-Faraǧ Bar-Hebraeus (s. Art. 375) bekannt, auf dessen Einladung hin er seinen Auszug aus dem Almagest verfaſst haben soll.[b]) Er wird so zwischen 680 und 690 (1281—1291) gestorben sein, ob in Merâġa oder in seinem Heimatland Spanien, ist ungewiſs. (Abulfar. 535 u. 548, Übers. 350 u. 358.)

Er schrieb: *Tasṭîḥ el-asṭorlâb* (die Ausbreitung, das Ebenmachen des Astrolabiums), über Einrichtung und Gebrauch des Astrolabiums, in Berlin (5806). Über den *šakl el-qaṭṭâ'* (die Transversalenfigur) und das zusammengesetzte Verhältnis, in Berlin (5957). *El-ǧâmi' el-ṣaġîr* (die kleine Sammlung), ein astrologisches Werk, in Paris (2594) *Fî keifîjet el-ḥokm 'alâ taḥwîl sinî el-'âlam* (über die Art und Weise der Weissagung nach dem Umlauf der Jahre der Welt), auch unter dem Titel: *kitâb el-nuǧûm* (Buch der Gestirne), in Paris (2593, 1°), Brit. Mus. (413 u. 414, 1°), Oxford (I. 982, 2°), Ind. Off. (769, 1°), München (873), Leipzig (Ref. 53), Cambridge (203), Kairo (226, Übers. 163). *Kitâb aḥkâm 'alâ qirânât el-kawâkib* etc. (Buch der Weissagungen nach den Konjunktionen der Planeten), im Brit. Mus. (414, 2°), Ind. Off. (769, 2°). *El-madchal el-mufîd fî ḥokm el-mawâlîd* (die nützliche Einleitung in die Wahrsagung nach den Geburten), in Florenz (Pal. 305, 3°), Gotha (65, 1°). *'Omdet el-ḥâsib we ġonjet el-ṭâlib* (die Stütze des Rechners und das Genügen oder der Reichtum des Forschenden), eine Sammlung von astron.-astrolog. Tafeln und Regeln, in Kairo (309). *Risâlet el-chiṭâ we'l-îġûr* (Zeitrechnung der Chinesen (?) und Uiguren), in Oxford (I. 971, 9°). Er befaſste sich auch mit der Neu-Ausgabe griechischer Mathematiker, wozu er wohl durch das Vorgehen Naṣîr ed-dîns ermuntert worden sein mag; so schrieb er: eine verbesserte Ausgabe der Abhandlung des Theodosius über die Sphären, in Paris (2468, 1°), Leiden (985); eine solche der Sphärik des Menelaus, im Ind. Off. (741, 2°); eine Redaktion der Geo-

---

[a]) Nicht 1289, wie Brockelmann I. 349 hat.

[b]) Vergl. H. Ch. V. 387 u. 389.

metrie des Euklides, in Konstant. (2719); eine solche der sieben Bücher des Apollonius über die Kegelschnitte, im Brit. Mus. (975, 4⁰);[a]) endlich den oben schon erwähnten Auszug (*cholâṣa*) aus dem Almagest des Ptolemäus, zu dem nur noch ein Anhang vorhanden ist in Leiden (1101).[b]) [78]

Im Escurial (927) befindet sich ein astron.-chronol.-geograph. Werk, betitelt: *Tâǵ el-azjâǵ we ǵonjet el-moḥtâǵ* (die Krone der Tafeln und das Genügen des Bedürftigen) von Abû ʿAbdallâh Muh. b. Abî'l-Šukr[c]) el-Maǵrebî. Ich vermute, daſs aus Versehen der Abschreiber das „Jaḥjâ" ausgefallen ist und daſs der Verfasser mit unserem Jaḥjâ b. Muh. b. Abî'l-Šukr identisch ist, im andern Falle wäre es ohne jeden Zweifel sein Vater.

377. ʿOmar b. Ismâʿîl b. Mesʿûd, Abû Ḥafṣ, el-Fâriqî, geb. i. J. 595 (1198/99), war der erste Sprachgelehrte seiner Zeit, zugleich in den alten Wissenschaften, besonders in Medizin und Astronomie sehr bewandert. Er war Lehrer an der Ẓâhirîje Ǧuwânîje in Damaskus und starb daselbst im Muḥarrem 689 (1290). (Ibn Š., 80.)

378. Muh. b. Aḥmed b. el-Chalîl b. Saʿâda, Šihâb ed-dîn, Oberrichter, wurde geboren zu Damaskus i. J. 626 (1229), widmete sich hauptsächlich dem Studium des Rechtes und der Tradition, ging später nach Ägypten und wurde dort Qâḍî von Kairo. Von hier ging er dann wieder nach Damaskus zurück, lehrte hier als Jurist und hatte eine groſse Zahl von Schülern. Er war auch sehr bewandert in der Rechenkunst und Erbteilung. Er starb im Ramaḍân 693 (1294). (Kut. II. 227.)

379. Muh. b. Aḥmed el-Raqûṭî, Abû Bekr, aus Murcia, war sehr gelehrt in Mathematik, besonders in der Arithmetik, auch in Medizin und Musik und mehrerer Sprachen kundig. Nach der Eroberung Murcias durch die Christen i. J. 668 (1269/70) wurde er von dem christlichen Beherrscher der Stadt als Lehrer angestellt, als welcher er Muhammedaner, Christen und Juden in den genannten Wissenschaften unterrichtete. Von dem Fürsten zum Übertritt zur christlichen Religion eingeladen, antwortete er: „Ich bin kaum imstande, *einem* Gotte zu dienen, geschweige denn mehrern."[d]) Er

---

[a]) Seine Neu-Ausgaben haben mit Ausnahme derjenigen des Euklides den Titel *tahḏib* (Reinigung, Verbesserung), während diejenigen Naṣîrs bekanntlich mit *taḥrîr* (sorgfältige Abfassung, Redaktion) bezeichnet sind.

[b]) Nicht 901, wie Steinschneider (Bibl. math. 6 (1892) p. 59) und nach ihm Brockelmann I, 474 haben.

[c]) So berichtigt den Namen C. A. Nallino in seiner Abhandlung „le tabelle geograf. d'al-Battânî" im Cosmos di Guido Cora, Ser. II. Vol. XII. Fasc. VI. p. 20 u. 21 del estratto, Casiri hat unrichtig „Śâkir"; Nallino zitiert einige Stellen aus den geographischen Tafeln des Werkes.

[d]) Anspielung auf die christliche Dreifaltigkeitslehre.

starb in Granada gegen das Ende des 7. Jahrh. d. H. (Ende des 13. Jahrh n. Chr.). (C. II. 81 n. Muh. b. ʿAbdallâh Lisân ed-dîn.)

380. Muh. b. Sâlim b. Wâṣil, Ǵemâl ed-dîn Abû ʿAbdallâh, geb. 604 (1207/08), war šâfiʿitischer Rechtsgelehrter, wurde i. J. 659 (1261) von dem Sultan Beibars von Ägypten als Gesandter zu König Manfred nach Sicilien geschickt und trat zu diesem in nähere Beziehungen.[79] Nach seiner Rückkehr wurde er zum Professor des Rechtes in Ḥamât ernannt, las aber auch über Philosophie, Mathematik und Astronomie. Abûlfidâ war sein Schüler in Prosodie und Mathematik. Er starb in Ḥamât im Šauwâl 697 (1298). (Abulfid. V. 144; W. G. 371.)

381. Muh. b. Ibrâhîm b. Muh., Behâ ed-dîn Ibn el-Naḥḥâs (Sohn des Kupferschmieds) el-Ḥalebî, der Grammatiker, wurde geboren im Ǵumâdâ II. 627 (1230) in Aleppo und zog später nach Ägypten. Er war einer der bedeutendsten Sprachkenner, gleich bewandert in Grammatik, wie in Logik und Geometrie, fromm, wahrhaftig und gerecht. Er hatte eine grofse Zahl von Zuhörern in Sprachwissenschaft und Litteratur und war einer der ersten Lehrer seiner Zeit. Er starb im Ǵumâdâ II. 698 (1299) in Kairo. (Kut. II. 215.)

381ª. Muh. b. ʿAlî b. el-Ḥosein el-Ḥimâḏî, schrieb einen Kommentar zur *taḏkira* des Naṣîr ed-dîn, betitelt: *bajân maqâṣid el-taḏkira* (Erklärung der Ziele der taḏkira), im Brit. Mus. (397), mit Glossen von Maḥmûd b. Mesʿûd el-Šîrâzî (s. Art. 387), in denen jener Kommentar teilweise angegriffen und widerlegt wird. Wird ein etwas älterer Zeitgenosse von el-Šîrâzî (gest. 710) gewesen sein.

381ᵇ. Ḥosein b. Aḥmed b. Mâṣ el-Aslamî,[a]) Abû ʿAlî, schrieb: über das vollständige oder Universal-Astrolabium, in 161 Kap., beendigt i. J. 673 (1274), im Escurial (956, 7⁰).

382. Muh. b. Ašraf Šems ed-dîn el-Samarqandî, lebte ums Jahr 675 (1276/77).[b]) Er schrieb: *Aškâl el-taʾsîs* (die Fundamentalsätze), Erläuterungen zu 35 ausgewählten Sätzen der ersten Bücher des Euklides, in Gotha (1496 u. 97), Oxford (I. 967, 2⁰), Brit. Mus. P. (Add. 23570); für die Kommentare dieses Werkes, die meistens auch den Grundtext enthalten, verweise ich auf Art. 430. *Aʿmâl-i taqwîm-i kawâkib-i ṯâbite* (Ausführungen oder Einrichtungen des Fixsternkalenders) für das Jahr 675 d. H., in Leiden (1196, 3⁰) pers.

---

a) C. I. 392 meint, dies bedeute „der von Medina-Sâlim = Medinaceli Stammende".

b) H. Ch. I. 322 setzt sein Todesjahr um 600 an; Ahlwardt (V. 320) sagt: „um 700 am Leben", nach welcher Quelle weifs ich nicht; Brockelmann (I. 468.) „blühte um d. J. 690/1291".

383. Aḥmed b. ʿOmar b. Ismâʿîl, Abû'l-ʿAbbâs Šihâb ed-dîn[a]) el-Ṣûfî,[b]) lebte Ende des 7. Jahrh. d. H. Er schrieb: *Šifâ' el-asqâm* (Heilung der Schäden), über die Festlegung der Stundenlinien auf den Sonnenuhren, in Leiden (1097) i. J. 675 (1276/77) vollendet, in Gotha (1454) unvollständig, Kairo (263). Astronomische Tafeln für die Azimute, Stundenwinkel etc., in Gotha (1402),[c]) Kairo (268).

384. ʿAbdallâh b. Muh. el-Šarrâṭ, aus Malaga, wurde wegen seiner Gewandtheit in der Rechenkunst zum königlichen Finanzminister ernannt. Er starb in Granada i. J. 703 (1303/04). (C. II. 102 n. Lisân ed-dîn.)

385. Muh. b. ʿOmar b. Aḥmed Hibetallâh b. Abî Ğarâda, gab i. J. 691 (1292) eine Bearbeitung (*taḥrîr*) des Buches von Ṯâbit b. Qorra über den Schnitt des Cylinders heraus, Kairo (202, Übers. 22).

386. Aḥmed b. Muh. b. ʿAlî b. el-Rifʿa, Abû'l-ʿAbbâs Neğm ed-dîn, geb. in Kairo i. J. 645 (1247/48), gest. daselbst im Rağeb 710 (1310), ein bedeutender Rechtsgelehrter, verfaſste eine Abhandlung über die Kenntnis des Maſses und Gewichtes, betitelt: *el-iḍâḥ we'l-tibjân* (die deutliche Auseinandersetzung und Erklärung), Kairo (178, Übers. 4). (Abulfid. V. 243.)

387. Maḥmûd b. Mesʿûd, Qoṭb ed-dîn el-Šîrâzî, geb. in Šîrâz i. J. 634 (1236/37), war ein Schüler Naṣîr ed-dîns in Phisosophie, Mathematik und Astronomie, und seines Vaters und anderer in der Medizin. Nach einer gröſseren Reise, die er zur weitern Ausbildung in seinem 24. Jahre unternahm, lieſs er sich in Tebrîz nieder, wo er als ausgezeichneter Lehrer und Schriftsteller in den genannten Wissenschaften bis zu seinem Tode wirkte, der im Ramaḍân 710 (1311) erfolgte. (Abulfid. V. 63, 243; W. A. 148.)

Er schrieb: *Nihâjet el-idrâk* (das höchste Verständnis) über die Kenntnis der Sphären, eine Astronomie in vier Abschnitten, in Berlin (5682), Leiden (1106), Paris (2517 u. 18), Florenz (Pal. 290) unvollständig, Brit. Mus. (399), Kairo (225, Übers. 163), Ind. Off. (769, 3⁰) unvollständig (s. auch Art. 443). *El-tuḥfe el-šâhije* (das königliche Geschenk), ebenfalls eine Astronomie mit genau der gleichen Einteilung wie die vorige, also nur eine Umarbeitung derselben, in Leiden (1105), Brit. Mus. (398 u. 1344), Oxford (I. 891 u. 924), Paris (2516), Florenz (Pal. 306), Konstant. (2584—87) (s. auch Art. 438). Auszug aus dem Almagest des Ğâbir b. Aflaḥ, Oxford (I. 940, 1⁰), Florenz

---

[a]) Der Kat. von Gotha hat „Ğemâl ed-dîn“.

[b]) Derselbe Kat. fügt noch hinzu „el-Maqdisî“ (oder el-Moqaddasî) d. h. aus Jerusalem gebürtig oder dort wohnend.

[c]) Brockelmann (I. 474) hat unrichtig 1702, auch kennt er nur diese Tafeln, obgleich derselbe Kat. von Gotha auch das andere Werk enthält.

(Pal. 315), pers.[a]) *Durret el-tâǵ* (die Perle der Krone), eine Encyklopädie der Wissenschaften (die 4. Abteilung enthält die mathemat. Disziplinen), im Brit. Mus. P. (Add. 7694). *Charîdet el-ʿaǵâ'ib* (die ungebohrte wunderbare Perle), ein astronomisches Werk, in Oxford (I. 1022). *Ichtijârât-i moẓaffarî* (die Moẓaffarischen Tagewählereien), Konstant. (2574 u. 75) pers.

388. Muh. b. Ibrâhîm b. Aḥmed b. el-Rakam (?), Abû ʿAbdallâh, aus Murcia, ausgezeichneter Arzt, Rechner, Geometer und Astronom. Die medizinische Praxis übte er viele Jahre in Granada aus. Er schrieb über alle genannten Disziplinen verschiedene Werke, welche nach Lisân ed-dîn zu seiner Zeit sehr verbreitet waren, darunter befanden sich folgende mathematische und astronomische: Über einige teils verbesserte, teils von ihm erfundene und erprobte geometrische Instrumente. Die korrekten, der Lage Andalusiens angepaſsten Tafeln. — Er starb im hohen Alter in Granada im Ṣafar 715 (1315). (C. II. 82 n. Lisân ed-dîn.)

389. Muh. b. el-Ḥasan,[b]) Kemâl ed-dîn Abû'l-Ḥasan (Ḥosein) el-Fârisî, ein Zeitgenosse des Maḥmûd b. Mesʿûd el-Šîrâzî (s. Art. 387), starb ums Jahr 720 (1320). Er schrieb: *Tanqîḥ el-menâẓir* (Kommentar oder Verbesserung der Optik), ein groſser, mit dem Text 636 Seiten umfassender Kommentar zur Optik des Ibn el-Haiṯam, in Leiden (1011), Konstant. (2598). H. Ch. II. 257 schreibt ihm noch zu: *Taḏkira el-aḥbâb* (die Erinnerung der Freunde), über die Erklärung der befreundeten Zahlen; ferner (IV. 471): *Isâs el-qawâʿid fî uṣûl el-fawâ'id* (die Fundamente der Grundlagen zu den Anfangsgründen der Nützlichkeiten), ein Kommentar zu der *fawâ'id behâ'ije* des ʿImâd ed-dîn ʿAbdallâh b. Muh. el-Chaddâm (s. Art. 494).

390. Muh. b. ʿOmar b. Rošd, Abû ʿAbdallâh, von Ceuta aus edler Familie stammend, geboren 657 (1259), war ein Universalgelehrter, der auch groſse Kenntnisse in Mathematik, Astronomie und Geographie besaſs. Im Jahre 692 (1293) siedelte er nach Granada über, wo er sich groſse Bewunderung durch seine Gelehrsamkeit erwarb. Er gab unter anderm zwei geschätzte Itinerarien heraus. Er starb am 8. Muḥarrem 721 (1321) in Fes. (C. II. 86 nach Lisân ed-dîn.)

391. Muh. b. Muh. b. ʿAbdallâh[c]) el-Kenânî, Abû ʿAbdallâh, von Malaga, ein Jurist, sehr bewandert in den alten Wissenschaften und der ältern arabischen Geschichte, so daſs er in philosophischen, mathematischen und historischen Fragen gleichsam als Orakel betrachtet und sehr

---

[a]) Hier steht nur: Auszug aus dem Almagest.

[b]) So heiſst er im Katalog von Konstantinopel.

[c]) So nach F. G. Robles, Malaga Musulmana, Malaga 1880; C. hat „b. Lebî" (?).

oft um Rat gefragt wurde. Mit christlichen Gelehrten, besonders Bischöfen, stand er in freundschaftlichem Verkehr. Er starb in Malaga ca. 730 (1329/30) und vermachte sein Vermögen und seine Bibliothek der grofsen Moschee daselbst. (C. II. 83 n. Lisân ed-dîn.)

392. Ismâ'îl b. 'Alî b. Maḥmûd b. 'Omar, 'Imâd ed-dîn Abû'l-Fidâ', der grofse Historiker und Geograph, ist hier zu nennen wegen seiner bedeutenden Kenntnisse in Mathematik und Astronomie und wegen seines mit letzterer Wissenschaft in naher Beziehung stehenden Werkes über Geographie. Er stammte aus einer Seitenlinie der Eijubiden und zwar aus derjenigen, welche längere Zeit über Ḥamât in Syrien geherrscht hat. Er wurde im Ǧumâdâ I. 672 (1273) zu Damaskus geboren, war Schüler von Muh. b. Sâlim b. Wâṣil (s. Art. 380), machte verschiedene Kriegszüge unter seinem Vater el-Melik el-Afḍal und andern Führern mit und wurde dann selbst vom Sultan von Ägypten zum Statthalter von Ḥamât ernannt, mit dem Titel el-Melik el-Mu'aijed (der (durch Gott) gestützte König). Er starb zu Ḥamât im Muḥarrem 732 (1331). Für Weiteres über sein Leben mufs ich auf die Quellen verweisen. (Kut. I. 20; W. G. 398.)

Von seinen Werken erwähne ich hier: *Taqwîm el-buldân* (die Ordnung der Länder), geographisches Werk, in Oxford (I. 889, 903, 912), Paris (2239—42), Leiden (727), Vatican (266), Wien (1265) unvollständig, Konstant. (2597) u. a. a. O. Dasselbe wurde herausgegeben unter dem Titel: Géographie d'Aboulféda, texte arabe par M. Reinaud et Mac Guckin de Slane, Paris 1840; die franz. Übersetzung desselben erschien in Paris in 3 Teilen: T. I. (Introd.) und T. II. P. 1 von M. Reinaud, 1848, T. II. P. 2. von St. Guyard, 1883. In Oxford (II. 302, 1°) wird dem Abû'l-Fidâ' ein Buch des verborgenen Geheimnisses (*kitâb el-sirr el-maktûm*), über den Gebrauch der schön geordneten Tafeln, zugeschrieben; das Ms. ist unvollständig.

393. Emîn ed-dîn el-Abahrî schrieb: *Fuṣûl kâfije* (genügende Abschnitte), über das Rechnen auf der Tafel und mit dem Stift (*ḥisâb el-tacht we'l-mîl*), in Berlin (5975). Er starb nach dem Berliner Kat. i. J. 733 (1332/33).[a])

394. 'Omar b. el-Melik el-Mozaffar Jûsuf b. 'Omar, Abû'l-Fatḥ, war der Sohn des um d. J. 680 (1281/82) über Jemen herrschenden Sultans el-Melik el-Mozaffar Jûsuf b. 'Omar,[b]) eines Zeitgenossen des ägyptischen Mamluken-Sultans Kilawûn (678—689), und trug als Herrscher selbst den Titel el-Melik el-Ašraf. Er trieb auch astron.-astrologische Studien und schrieb: *Kitâb el-tabṣira fî ilm el-nuǧûm* (das Buch der Belehrung über die

[a]) Es könnte wohl möglich sein, dafs dieser Autor identisch wäre mit dem in Art. 369 behandelten Muh. b. el-Abahrî, oder wie er auch genannt wird, 'Abderraḥmân b. 'Omar b. Muh. el-Abahrî.

[b]) Vergl. Abulfid. IV. 527 u. V. 61.

Wissenschaft der Gestirne), wahrscheinlich astrologischen Inhalts, in Oxford (I. 905). Sein Tod wird wohl in den Zeitraum zwischen 725 und 735 (1325—1335) fallen.

395. El-Ḥasan b. Muh. b. Ḥosein el-Nîsâbûrî, Niẓâm ed-dîn[a]) el-Qummî, lebte um dieselbe Zeit wie der vorhergehende Autor und schrieb: *El-šemsîje fî'l-ḥisâb* (die sonnige (Abhandlung) über die Rechenkunst), in Leiden (1032), Oxford (I. 1011, 1⁰ u. II. 289, 3⁰), Ind. Off. (748 u. 49), München (Kat. d. pers. Mss. Nr. 346, 3⁰, doch arabisch), Konstant. (2659 u. 2725). Kommentar zur *tadkira* des Naṣîr ed-dîn, betitelt: *Tauḍîḥ el-tadkira* (Erklärung der tadkira), in Paris (2510), Leiden (1096), Brit. Mus. (396 u. 1342, 3⁰), Konstant. (2589 u. 2644), geschrieben im J. 711 (1311/12). Kommentar zur Rezension des Almagestes durch Naṣîr ed-dîn, im Brit. Mus. (392) vollendet i. J. 704 (1304/05). Kommentar der Ilchânischen Tafeln, in Konstant. (2696). Kommentar zur Abhandlung *sî faṣl* (dreifsig Abschnitte) des Naṣîr ed-dîn, in Leiden (1178), Konst. (2664) (vergl. auch Art. 430).

396. ʿAlî-šâh b. Muh. b. Qâsim el-Chowârezmî, bekannt unter dem Namen ʿAlâ el-munaǧǧim (der Astrolog) el-Bochârî, schrieb ums Jahr 700 (1301): *Ašǧâr we atmâr* (Bäume und Früchte), eine Astrologie, in Berlin P. (342), gewidmet dem Šems ed-dunjâ we'd-dîn Seif el-islâm Muh. b. Mubârakšâh; in Konstant. (2688) pers. Ferner ein anderes Werk über Astrologie, betitelt: *aḥkâm el-aʿwâm* (Urteile oder Prophezeiungen der Jahre (oder Tage)), in Berlin P. (343).

397. Muh. b. Mubârakšâh, Šems ed-dîn Mîrak[b]) el-Bochârî, ein Philosoph und Astronom, wird gegen 740 (1339/40) gestorben sein. Er schrieb: Kommentar zur *ḥikmet el-ʿain* des Neǧm ed-dîn ʿAlî b. ʿOmar el-Qazwînî (s. Art. 370), in Berlin (5081), Brit. Mus. (428), Paris (2384), Ind. Off. (498—501, 584, 2⁰, 594, 2⁰), im letztern Ms. unvollständig, Strafsburg (17). Kommentar zur *tabṣira* des Muh. b. Aḥmed b. Abî Bi·r el-Charaqî (s. Art. 276), in Konstant. (2582), geschrieben i. J. 733. Nach H. Ch. VI. 474 soll er auch einen Kommentar zur *hidâjet el-ḥikme* des Atîr ed-dîn el-Abahrî geschrieben haben. Es wäre möglich, dafs dieser Gelehrte identisch wäre mit dem oben (Art. 396) genannten Šems ed-dîn Muh. b. Mubârakšâh, dem ʿAlî-šâh seine Astrologie gewidmet hat; sehr wahrscheinlich aber ist es, dafs dieser Autor der in Useners Bonner Programm vom J. 1876 (ad historiam astron. symbola) p. 15, 21 u. 22 als Verfasser eines persischen Werkes über Astronomie genannte Šems [ed-dîn] Buchârî ist.[80]

a) Oder auch „Niẓâm el-Aʿraǧ".

b) Dieses Wort fehlt auch an einigen Orten, es ist das Diminutivum des pers. „mîr" = Fürst, Herr, Meister.

398. Muh. b. Sim'ûn, Naṣîr ed-dîn, der Gebetsrufer, gest. im Ǵumâdâ 737 (1337), schrieb: *El-tuḥfe el-melikīje* (das königliche Geschenk), über die astronomischen Fragen und Antworten, in Kairo (232, Übers. 164). *Kanz el-ṭullâb* (der Schatz der Studierenden oder Suchenden), über den Gebrauch des Astrolabiums, ausgezogen aus den Werken des Abû'l-Ṣalt Omeija (s. Art. 272) u. a., in Paris (2524, 3⁰).

399. Aḥmed b. Muh. b. 'Oṯmân el-Azdî, Abû'l-'Abbâs, bekannt unter dem Namen Ibn el-Bennâ (Sohn des Baumeisters), wurde ums Jahr 656 (1258) oder noch später geboren und starb gegen 740 (1339/40)[81] in Marokko. Er war einer der Imâme in den Wissenschaften, von edlem Charakter und sittenreinem Lebenswandel. Sein Lehrer in der Sprachwissenschaft war der Qâḍî Muh. b. 'Alî b. Jaḥjâ, im Studium des Euklides Abû Isḥâq el-'Aṭṭâr el-Ǵezûlî,[82] in der Prosodie und Metrik[a]) el-Qallûsî,[b]) in der Tradition 'Abdallâh b. 'Abdelmelik, in der Medizin Ibn Ḥaǵale, in der Astronomie und Astrologie Ibn Machlûf (?) el-Seǵilmâsî. Er war der Lehrer des Muh. b. Ibrâhîm el-Abbelî (s. Art. 414), des Lehrers des Ibn Chaldûn (s. Art. 420).

Er schrieb folgende Werke (ich nenne von den 51 angeführten nur die mathematischen und astronomischen, bezw. astrologischen): 1. *Talchîṣ a'mâl el-ḥisâb* (Auszug der Operationen der Rechenkunst), in Oxford (I. 217, 4⁰ u. 1001), letzteres Ms. mit Kommentar von Abû Bekr b. Zakarîjâ, im Brit. Mus. (417) mit Kommentar von Aḥmed b. el-Meǵdî (s. Art. 432), im Ind. Off. (770, 1⁰ u. 3⁰), im Escurial (928 u. vielleicht auch 948), in Algier (613, 3⁰), in Kairo (179, Übers. 6). Diese Schrift, die ein Auszug aus einem arithmetischen Werke eines gewissen el-Ḥaṣṣâr (s. Art. 495) sein soll, wurde nach dem Oxforder Ms. 217, 4⁰ ins Französische übersetzt von A. Marre und veröffentlicht in den Atti dell' accad. pontif. de' nuovi lincei, T. XVII. 1864 (separat: Rom, 1865). 2. *Raf' el-ḥiǵâb* (das Aufheben des Schleiers), ein Kommentar zu dem eben genannten Talchîṣ.[83] Für weitere Kommentare vergl. Art. 415, 444 u. 503, zwei solche von unbekannten Autoren befinden sich in Paris (2463, 1⁰ u. 2464, 2⁰). 3. Einleitung zum Euklides. 4. *Risâle fî 'ilm el-misâḥa* (Abhandlung über die Ausmessung der Flächen), in Berlin (5945). 5. Die vier Abschnitte (Maqâlât) über die Rechenkunst (vergl. auch Anmerkg. 83), in Berlin (5974): der 1. Abschnitt handelt über die Operationen mit ganzen Zahlen, der 2. über die Brüche, der 3. über

---

a) A. Marre übersetzt *'arûḍ* mit „latitudes des lieux", was unrichtig ist, es ist nicht der Plural von *'arḍ*, sondern ein Sing. mit dem Plur. *a'âriḍ*.

b) Wahrscheinlich Muh. b. Muh. b. Edrîs, Abû Bekr, el-Qallûsî, berühmter Redner und Dichter, gest. in Malaga 750 (1349/50). (C. II. 83 u. Lisân ed-dîn.)

die Wurzeln, der 4. über die proportionalen Gröfsen. 6. *El-minhâǵ* (der breite Weg) für den nach den Gleichungen der Planeten Forschenden,[a]) in Oxford (I. 873, 1°), im Escurial (904, 1°),[b]) in Algier (1454, 1°); vielleicht ist die Abhandlung im Brit. Mus. (977, 7°), betitelt: „die Erleichterung in der Feststellung der Planeten(-bahnen)" identisch mit dieser. 7. *Qânûnât fî ma'rifet el-auqât* (die Regeln über die Kenntnis der Zeiten), wahrscheinlich im Brit. Mus. (407, 2°). 8. *El-uṣûl we'l-moqaddamât fî'l-ǵebr we'l-moqâbale* (die Prinzipien und die Einleitungen zur Algebra) (vergl. auch Anmerkg. 83). 9. *Kitâb fî'l-ǵebr we'l-moqâbale* (das Buch über die Algebra), in Kairo (213, Übers. 46). 10. *Tanbîh el-albâb* (das Erwecken der Herzen) zu den Fragen der Rechenkunst, im Brit. Mus. (420, 8°), in Algier (613, 6°). 11. *Madchal el-nuǵûm we ṭabâ'i' el-ḥurûf* (Einleitung in die Astrologie und die Eigenschaften der Buchstaben), vielleicht ist die in Kairo (314, Übers. 170) vorhandene Abhandlung: *fî aḥkâm el-nuǵûm* (über die Urteile aus den Gestirnen) mit der genannten identisch oder ein Teil von ihr. 12. Zwei Tafeln, betitelt *el-manâḥ* (Almanach = Kalender), mit deren Hilfe erkannt wird, mit welchem Tage das arabische Jahr und seine Monate beginnen, im Brit. Mus. (977, 11°). 13. *Mochtaṣar kâfil li'l-moṭallib* (ein Kompendium, das dem Suchenden ein Bürge ist), eine arithmetische Abhandlung, verfafst im J. 782 (?), in Mailand (Ambr. 246). 14. Abhandlung über das Astrolabium. 15. Über den Gebrauch der Šakârischen und Zarqâlischen *Ṣafîḥa*. 16. Über die Bestimmung der *Qible*. 17. Über die helischen Untergänge der Mondstationen (*anwâ'*)[c]) und die Sternbilder. 18. Über die sechs Summen (?) mit einer Tafel. 19. Widerlegung derjenigen, welche sagen, sie erkennen die Zeit des Untergangs der Sonnenscheibe aus der Betrachtung des Vertikals (*qâ'im*),[d]) der ihr entspricht, und Beweis, dafs dies nicht durchaus richtig ist. 20. Fragment über die *dawât el-asmâ* (Binomiale) und die *munfaṣalât* (Apotomeen).[e]) 21. Fragment über die Proportionen. 22. Über die Erbteilung. (Nach der „Biographie d'Ibn el-Bennâ par A. Marre", in

[a]) Nach Ibn Chaldûns Prolegomena (Notices et extr. T. 21, p. 149) ist dieses Werk ein Auszug aus den astronomischen Tafeln des Ibn Isḥâq (vergl. Art. 356).

[b]) Hier ist die von C. (I. 344) angegebene Abfassungszeit des Ms., nämlich 619 (1222), jedenfalls unrichtig, das Ms. von Algier hat, wie der Verf. des Katal. bemerkt, diese Zahl nicht, dagegen als Ort und Datum der Abschrift: Kairo 742.

[c]) A. Marre (in der oben zitierten Biographie des Ibn el-Bennâ) übersetzt *anwâ'* durch „noyau central" (?).

[d]) Der Vertikal heifst allerdings sonst *el-dâ'ire el-qâ'ime*, allein zu übersetzen „aus der Betrachtung einer Senkrechten, die ihr gegenübersteht", wie A. Marre thut, giebt gar keinen Sinn.

[e]) d. h. Ausdrücke von der Form $m \pm \sqrt{n}$ und $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ (vergl. die oben zitierte Übers. des Talchîṣ von A. Marre, l. c. p. 312 u. 313).

den Atti dell' accad. pontif. de' nuovi lincei, T. XIX. p. 1 etc. und der Einleitung zum Kommentar des Talchîṣ von el-Qalaṣâdî, Gothaer Ms. 1477.)

400. ʿAlî b. Dâ'ûd b. Jaḥjâ, Abû'l-Ḥasan Neğm ed-dîn el-Qaḥfâzî, gelehrt in der Sprachwissenschaft und Poetik, bewandert in der Kenntnis des Astrolabiums und in der Kalenderkunde. Er wurde geboren im Ǧumâdâ I. 668, wohnte und lehrte die meiste Zeit seines Lebens in Damaskus und starb i. J. 744 (1343/44). (Kut. II. 63.)

401. Aḥmed b. ʿOṯmân b. Ibrâhîm b. Muṣṭafâ el-Ǧûzǧânî (od. auch Ǧauzǧânî), war ein bedeutender Sprach- und Rechtsgelehrter, auch bewandert in Logik und Mathematik. Er wurde geboren 681 (1282/83) und starb in Kairo 744. Er schrieb einen Kommentar zur *tabṣira fîʿilm el-hei'a* von Muh. b. Aḥmed el-Charaqî, Behâ ed-dîn (s. Art. 276). (Ibn Quṭl. p. 9.)

402. ʿAbdallâh b. Jaḥjâ b. Zakarîjâ el-Anṣârî, aus Syrien stammend, in Granada geboren, zeichnete sich schon im zwanzigsten Lebensjahre derart durch seine juristischen Kenntnisse aus, daſs er zum Qâḍî ernannt wurde. Er war auch in der Rechenkunst äuſserst gewandt, so daſs er Probleme, die Geübten Schwierigkeiten bereiteten, ohne Mühe löste. Er wurde geboren im Ǧumâdâ II. 675 (1276) und starb i. J. 745 (1344/45). (C. II. 100 nach Lisân ed-dîn.)

403. Maḥmûd b. Muh. b. ʿOmar el-Ǧaǧmînî,[a]) ein nicht unbedeutender Astronom, der sehr wahrscheinlich i. J. 745 (1344/45) gestorben ist,[84] über dessen Lebensverhältnisse aber nichts näheres bekannt ist, als daſs er sich neben seinen astronomisch-astrologischen Studien auch mit Medizin beschäftigt hat, indem von ihm ein Kompendium dieser Wissenschaft unter dem Titel *qânûnče* (kleiner Kanon) noch vorhanden ist. Er schrieb: *Mulachchaṣ fî'l-hei'a* (Kompendium der Astronomie). Dieses Werk ist wohl eines der verbreitetsten der arabischen math.-astronomischen Litteratur, es wurde vielfach kommentiert, so von Qâḍî Zâdeh, ʿAlî el-Ǧorǧânî, Sinân Pâšâ u. a. Ich führe im folgenden nur die Orte an, wo sich der *Mulachchaṣ* ohne Kommentar befindet, für die Kommentare verweise ich auf die Artikel der betreffenden Verfasser (s. Art. 424, 425, 430 u. 456). Der *Mulachchaṣ* befindet sich noch in Berlin (5673 u. 74), Gotha (1385—87), Leiden (1083), Oxford (II. 290, 5⁰), Brit. Mus. (1343, 2⁰), Paris (2330, 7⁰, 2500, 1⁰, 2501, 2502, 1⁰), im erstern Ms. befindet sich als Datum der Kopie 787, Mailand (Ambr. 274 u. 75), Algier (1453) unvollständig, Kairo (224 u. 25, Übers. 162), Konstantinopel (2600 u. 2679). In Paris (2589) befindet sich noch von Ǧaǧmînî eine

[a]) Wird auch Čaǧmînî geschrieben; Ǧaǧmîn oder Čaǧmîn ist ein Flecken in Chowârezmien.

kleine Abhandlung: *Qiwâ el-kawâkib we ḍaʿafhâ* (die starken und schwachen Einflüsse der Gestirne). — Der *Mulachchaṣ* wurde in deutscher Übersetzung veröffentlicht von Rudloff und Hochheim in Z. D. M. G. Bd. 47, p. 213 ff.

404. ʿObeidallâh b. Mesʿûd b. ʿOmar Tâǧ el-Šarîʿa, bekannt unter dem Namen Ṣadr el-Šarîʿa II.[a]) el-Bochârî, lebte in Herât und starb i. J. 747 (1346/47), nach andern Angaben zwei Jahre früher. Er schrieb: *Taʿdîl heiʾat el-aflâk* (Ausgleichung der Astronomie der Sphären), es ist dies der 3. Teil seines encyklopädischen philosophischen Werkes *taʿdîl el-ʿulûm* (Ausgleichung oder Gleichgewicht der Wissenschaften), in Berlin (5096 u. 5683), Brit. Mus. (400), Ind. Off. (532), hier alle drei Teile, Wien (7), ebenso, mit Kommentar von ihm selbst.

405. ʿAlî b. ʿOṯmân b. Ibrâhîm b. Muṣṭafâ el-Mâridînî, ʿAlâ ed-dîn, Oberrichter, bekannt unter dem Namen Ibn el-Turkomânî, geb. 683 (1284/85), Bruder von Nr. 401, war hervorragend in der Tradition, Koranerklärung, Rechtswissenschaft, in Rechenkunst und Erbteilung. Er starb im Muḥarrem 750 (1349).[b]) (Ibn Quṭl. 32.)

406. Muh. b. Aḥmed b. ʿAbderraḥîm, Šems ed-dîn, Abû ʿAbdallâh el-Mizzî, der Gebetsrufer in der Omeijaden-Moschee zu Damaskus, gest. 750. Dorn (Drei astron. Instrumente, p. 18) erwähnt ihn als Verfertiger eines Quadranten, der sich in der k. Bibliothek in St. Petersburg befindet und auf dessen Rand steht: Verfertigt hat ihn Muh. b. Aḥmed el-Mizzî in Damaskus i. J. 734, für Naṣîr ed-dîn Muh. b. ʿAbdallâh b. ʿAbderraḥîm. Er schrieb: *El-rawḍât el-muzhirât* (die blühenden Gärten), über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, in Oxford (I. 967, 6^{0} und 1023, 7^{0}), Leiden (1109), Berlin (5839), Paris (2547, 14^{0}), Algier (1457, 3^{0}), Kairo (259) und wahrscheinlich im Escurial (956, 5^{0}). *Kašf el-raib* (die Zerstreuung des Zweifels), über den Gebrauch des Sinus (ist wohl gemeint „der Sinusquadrant"), in Leiden (1100), Paris (2547, 13^{0}), Mailand (Ambr. 278,b), Kairo (269, 308, 311), im zweiten Ms. nur 24 statt 67 Kap. Abhandlung über den „gefalteten" (*maṭwîje*) Quadranten, in Oxford (I. 967, 7^{0}). Abhandlung über das astronomische Instrument, genannt „das geflügelte" (*muǧannaḥa*), in Paris (2547, 23^{0}). Abhandlung über das Astrolabium, in Oxford (I. 967, 12^{0}), Paris (2547, 6^{0}), Brit. Mus. (977, 1^{0}), der Autor ist hier unrichtig Zein ed-dîn ʿAbderraḥmân el-Mizzî genannt. *Ǧedâwil el-ḥiṣaṣ* (Tafeln der Anteile oder Teilungen (?)) für die Breite von Damaskus, in Kairo (241, Übers. 166).

---

[a]) Sein Urgroſsvater mütterlicherseits hatte ebenfalls den Ehrennamen Ṣadr el-Šarîʿa, deshalb werden sie als erster und zweiter von einander unterschieden.

[b]) Es ist kein Ort angegeben, vielleicht lebte und starb er in Kairo wie sein Bruder.

407. Jaḥjâ b. Aḥmed b. Hâzil (?), Abû Zakarîjâ, einer von den Edeln Granadas, war in allen Zweigen des Wissens bewandert, als Redner, Dichter, Philosoph, Astronom, Arzt und Rechtsgelehrter berühmt. Er starb in Granada im Dû'l-Qa'da 753 (Anfang 1353). (C. I. 117 n. Lisân ed-dîn.)

408. Manṣûr b. 'Abdallâh el-Zuwâwî,[a]) in Granada wohnhaft, war vielseitig gebildet, besonders in Philosophie und Rechtswissenschaft, auch in Mathematik bewandert. In der genannten Stadt las er mit vielem Erfolg über Rhetorik, Philosophie und Rechtswissenschaft. Er starb daselbst im Rabî' II. 757 (1356). (C. II. 96 n. Lisân ed-dîn.)

409. Muh. b. 'Alî b. Sudat (?),[b]) Abû'l-Qâsim, aus Almeria, widmete sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften, der Medizin und der Dichtkunst. Er war i. J. 763 (1361/62) noch am Leben. (C. II. 88 n. Lisân ed-dîn.)

410. Muh. b. 'Abdallâh b. Ibrâhîm, Abû 'Amr, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ḥaǧǧâǧ, aus Granada, ein Zeitgenosse des vorigen, war ein eleganter Redner und Dichter und besafs auch bedeutende Kenntnisse in Medizin und Mathematik. Er war später Qâḍî von Almeria und kam als Gesandter auch nach Tunis und Ägypten. (C. II. 91 n. Lisân ed-dîn.)

411. Muh. b. Muh. b. 'Abdelqawî, el-Qorešî, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ketânî el-Âlâtî, der Rechner, schrieb 747 (1346/47) in Kairo: *Gedâwil el-irtifâ'* (Höhentafeln), in Kairo (241, Übers. 166).

412. Muh. b. el-Gazûlî,[c]) Šems ed-dîn, lebte um die Mitte des 8. Jahrh. d. H., wo, habe ich nicht ausfindig machen können. Er schrieb: Abhandlung über den Gebrauch des Oktanten, in Berlin (5838), in Kairo (286, Übers. 169), i. J. 746 (1345/46) verfafst. Über den Gebrauch des Instrumentes, genannt *el-gaib el-gâjib* (der verborgene Sinus),[d]) in Berlin (5837), Paris (2519, 11°); dasselbe hat eine Halbkreisteilung in 90 Teile, der Radius ist in 60 Teile geteilt. Abhandlung über den Gebrauch des „ersetzenden Astrolabiums“ (*el-asṭorlâb el-mognî*), in Berlin (5799). Abhandlung über den verhüllten (?) Quadranten (*rub' el-musâtara*),[e]) in Kairo (251), ist nicht etwa identisch mit dem „verborgenen Sinus“.

413. Šihâb ed-dîn b. Faḍlallâh b. Aḥmed el-'Omrî, war ein hervorragender Imâm, sehr beredt, einer der ersten Litteraturkenner, einzig

---

[a]) d. h. vom berberischen Stamme „Zuwâwa“ oder „Zûâwa“, zwischen Fes und Oran angesiedelt, daher der heutige Name „Zuaven“.

[b]) So schreibt Casiri, vielleicht Sadât oder Sadad?

[c]) Ahlwardt liest „Gozûlî“.

[d]) d. h. wohl das Instrument „ohne Sinuslinien“.

[e]) Vergl. Sédillot, Mém. sur les instr. astron. des Arabes, p. 151, wo *mésatirah* gelesen und das Wort gar nicht übersetzt wird (s. auch Art. 432).

zu seiner Zeit in der Schriftkunst und Korrespondenz. Er war auch ein Kenner der Klimate und ihrer Grenzen, der Länder und ihrer Eigentümlichkeiten, der Astronomie, besonders des Gebrauches des Astrolabiums, der Einrichtung der Kalender, der Sternbilder, etc. Er wurde geboren zu Damaskus im Šauwâl 700 (1301) und starb wahrscheinlich nach 764 (1362/63), da el-Kutubî, der in diesem Jahre starb, seinen Tod nicht mehr erwähnt. Er schrieb ein geographisches Werk, das unter den Arabern seiner Zeit eine grofse Berühmtheit hatte, es ist betitelt: *kitâb mesâlik el-absâr fî memâlik el-amsâr* (das Buch der Wege der Blicke in die Herrschaften der Städte und Länder) und befindet sich u. a. O. noch in Oxford (I. 900). (Kut. I. 9.)

414. Muh. b. Ibrâhîm el-Abbelî,[a]) Abû ʿAbdallâh, war der Lehrer Ibn Chaldûns in den sog. Verstandeswissenschaften (im Gegensatz zu den überlieferten oder Glaubenswissenschaften), also besonders in der Philosophie und Mathematik. Ibn Chaldûn giebt über seinen Lehrer ziemlich ausführliche Nachrichten. Nach ihm wohnte seine Familie in Tlemsen (im westlichen Algier), wo er seine Jugend zubrachte und sich hauptsächlich mathematischen und philosophischen Studien hingab. Ums Jahr 735 (1334/35) machte er die Wallfahrt nach Mekka; in die Heimat zurückgekehrt, machte er sich an das Studium der Theologie und des Rechtes. Von Tlemsen begab er sich dann nach Marokko, wo er den berühmten Abû'l-ʿAbbâs Ibn el-Bennâ (s. Art. 399) in den mathematischen Wissenschaften hörte und bald seinen Rang und Ruf erhalten sollte. Nach dem Tode Ibn el-Bennâs begab er sich auf die Einladung des ʿAlî b. Muh. b. Tarumît[b]) hin in die Berge von Heskûra (im Atlas), um demselben Unterricht in den Wissenschaften zu erteilen. Später wurde er von dem Sultan Abû'l-Ḥasan als Lehrer nach Marokko berufen, mehrte daselbst stets seinen Ruf und hatte eine grofse Zahl von Schülern. Als er mit dem Sultan Abû'l-Ḥasan nach Tunis kam,[c]) hörte Ibn Chaldûn (wahrscheinlich zwischen 750 und 55) bei ihm die Logik, die Prinzipien der dogmatischen Theologie und der Rechtswissenschaft, sowie Philosophie und Mathematik; er bemerkt dazu, dafs er so gute Fortschritte gemacht habe, dafs sein Lehrer ihm oft seine grofse Befriedigung darüber ausgesprochen habe. Ibn Chaldûn führt keine Werke von el-Abbelî an. Er wird ca. 770 (1368/69) gestorben

[a]) de Slane leitet dies von Abbela, einem Orte im nördlichen Spanien, ab, vielleicht das heutige Avila in Alt-Kastilien.

[b]) Es war dies der Fürst eines grofsen Berberstammes.

[c]) Im J. 748 (1347) bemächtigte sich der Sultan Abû'l-Hasan, der Merinide, der Stadt Tunis und brachte unter seinem Gefolge eine grofse Zahl bedeutender Gelehrter mit, unter andern auch unsern Abbelî.

sein. (Ibn Chaldûns Selbstbiographie in den Notices et extr. T. 19, Introd. p. VI etc.)

415. ʿAbdelʿazîz b. ʿAlî b. Dâ'ûd el-Huwârî,[a]) ein Schüler des Ibn el-Bennâ, schrieb einen Kommentar zum *Talchîṣ* seines Lehrers, der noch vorhanden ist im Escurial (948, 2° u. 949), Oxford (I. 217, 3°), Ind. Off. (770, 3°). Der Codex 949 des Escurial enthält eine Widmung des Wezirs Abû Muh. b. Omad (?) an den Fürsten von Granada Abû Naṣr Ismâʿîl[b]) vom Jahre 761 (1360) datiert. (C. 380—81; H. Ch. II. 400.)

416. ʿAlî b. Ibrâhîm b. Muh. el-Moṭʿim el-Anṣârî, Abû'l-Ḥasan, bekannt unter dem Namen Ibn el-Šâṭir, der Gebetsrufer in der Omeijaden-Moschee zu Damaskus, geb. im Rabîʿ I. 704 (1304), gest. 777 (1375/76), nach andern 781 (1379/80). Er bestimmte 765 (1363/64) zu Damaskus die Schiefe der Ekliptik zu 23° 31′. Er schrieb: Astronomische Tafeln, genannt *el-zîǧ el-ǵedîd* (die neuen Tafeln), in Leiden (1113 u. 14), Oxford (I. 876, II. 275 u. 278), Paris (2522) unvollständig (vergl. auch Art. 426 u. 428). *Tuḥfet el-sâmiʿ* (das Geschenk des Hörenden), über den Gebrauch des umfassenden (*ǵâmiʿ*) Quadranten, ein von ihm selbst i. J. 738 erfundenes Instrument, nur wenig abweichend von der *Safîḥa* des Zarqâlî;[c]) diese Abhandlung ist nicht mehr vorhanden, dagegen ein Auszug daraus: *nuzhet el-sâmiʿ* (die Unterhaltung des Hörenden), in Oxford (I. 1030, 3°), in Kairo (281 u. 326). *Nihâjet el-su'l* (der höchste Wunsch), über die Richtigstellung der Anfangsgründe (der Astronomie), in Leiden (1116), Oxford (I. 920, 2°, 934 u. 979). *Îḍâḥ el-muǵaijeb* (die deutliche Auseinandersetzung des Verborgenen), über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Kairo (273, Übers. 168). *El-nafʿ el-ʿâmm* (der allgemeine Nutzen), über den Gebrauch des vollkommenen (*tâmm*) Quadranten, in Leiden (1115), Berlin (5816), Vatikan (318, 6°), Kairo (281). *Arǵûza* (Gedicht) über die Gestirne, in Leiden (1112). Abhandlung über das Astrolabium, im Brit. Mus. (407*, 1° u. 408, 5°). Kompendium (*mochtaṣar*) über den Gebrauch des Astrolabiums, des Muqanṭarât- und Sinusquadranten, im Brit. Mus. (977, 2°), unvollständig. Über den Gebrauch des ʿAlâ'ischen Quadranten, in Oxford (I. 1030, 1°). Über die Operationen mit den Sechziger-Beziehungen (*bi'l-nisbe el-sittînije*), in Oxford (I. 1030, 2°). *El-rauḍât el-muzhirât* (die blühenden Gärten), über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, in Mailand (Ambr. 276).

417. Muh. Abû ʿAbdallâh el-Ḥâsib (der Rechner) verfaſste eine

---

a) Nach Dozy (Geographie des Edrîsî) ist el-Huwâra der Name eines Berberstammes; im Kat. von Oxford steht „el-Maṣrânî el-Huwâzî", bei C. „Maṣrâtî" statt „Maṣrânî".

b) Es ist dies der nur 2 Jahre (760—761) regiert habende Naṣride Ismâʿîl II.

c) Vergl. Sédillot, Mém. sur les instr. astron. des Arabes, p. 192.

Abhandlung über die Kenntnis der Schatten (*fi ʿilm el-ẓilâl*),[85] beendigt am 6. Rabîʿ I. 762 (1361) in Sevilla, im Escurial (913, 7°). (C. I. 352.)

418. Muh. b. Muh., Abû ʿAbdallâh, Šems ed-dîn el-Chalîlî, der Gebetsrufer in der Jalbaġâ-Moschee[a]) zu Damaskus, schrieb ums Jahr 780 (1378/79) astronomische Tafeln, deren Titel nirgends bestimmt angegeben ist, zur Bestimmung der Zeiten, Sonnenhöhen, Gebetsrichtung etc., in Berlin (5754—56),[b]) Brit. Mus. (977, 31°), Oxford (I. 961, 1039, 2°), Escurial (926, 8°)?, Paris (2558). *El-nuǵûm el-zâhira* (die glänzenden Sterne), über den Gebrauch des Sinus(-quadranten), ohne Zeiger und Kreis(?), in Kairo (312).

419. ʿAlî b. ʿOṯmân b. Muh., Abû'l-Baqâ', Ibn el-Qâṣiḥ (?), gest. 801 (1398/99) schrieb: *Tuḥfet el-ṭullâb* (das Geschenk der Studierenden), über den Gebrauch des Quadranten und des Astrolabiums, in Kairo (232, Übers. 164).

420. ʿAbderraḥmân b. Muh. b. Chaldûn, Abû Zeid, bekannt unter dem Namen Ibn Chaldûn, von edler Familie aus Sevilla stammend, geboren am 1. Ramaḍân 732 (Mai 1332) in Tunis, wohin seine Familie nach der Eroberung Sevillas durch die Christen i. J. 1248 ausgewandert war, ist der Verfasser des berühmten Geschichtswerkes über die Araber und Berber und der noch berühmteren *Moqaddamât* (Prolegomena) zu diesem, der letzte und gröſste Historiker der spanischen Araber. Im Alter von 20 Jahren wurde er zum Geheimsekretär des Ḥafṣidensultans Abû Isḥâq Ibrâhîm ernannt, ging aber bald nachher (755) nach Fes, wo er Sekretär des Meriniden Abû ʿInân wurde. Im Jahr 763 ging er nach Granada, wo er von dem Fürsten Muh. V. Ibn el-Aḥmar und seinem Wezir Ibn el-Chaṭîb Lisân ed-dîn (vergl. Anmerkg. 67) höchst ehrenvoll aufgenommen wurde. Bald aber regte sich bei Ibn el-Chaṭîb der Neid über das gute Verhältnis, in welchem Ibn Chaldûn zum Fürsten stand, und der Wezir brachte es dahin, daſs jener seine Entlassung nahm, nach Afrika zurückkehrte (766) und dort an verschiedenen Höfen nach einander Dienste nahm, unter andern auch am Hofe des Mamlukensultans el-Melik el-Nâṣir in Kairo. Diesen begleitete er auf einem Feldzuge nach Syrien (803) und traf daselbst auch mit dem Eroberer Tîmûr zusammen, der ihn sehr huldvoll empfing. Nach Kairo zurückgekehrt, wurde er Qâḍî dieser Stadt und starb daselbst am

---

a) Nach dem Berliner Ms. 5754 in der Omeijaden-Moschee.

b) Diese Tafeln zerfallen hier in drei Teile, erster und dritter ohne Titel, beim zweiten ist am Schlusse hinzugefügt: *el-ǵedwal el-âfâqî* (die für alle Horizonte dienende Tafel); welchen von diesen drei Teilen, oder ob alle drei, die Mss. im Brit. Mus., in Oxford, Paris und im Escurial enthalten, kann ich nicht entscheiden.

25. Ramaḍân 808 (März 1406). — Ibn el-Chaṭîb selbst, der schon 776 (1374/75) starb, widmet seinem grofsen Nebenbuhler in seiner *Iḥâṭa* (umfassende Geschichte Granadas und seiner berühmten Männer) einen gröfsern ehrenden Artikel. Hierin nennt er ihn auch als Verfasser eines Buches über die Rechenkunst, das leider verloren gegangen ist. Auch Ibn Chaldûn gedenkt in seiner Selbstbiographie (s. Art. 414) mit Achtung seines unglücklichen Gegners. (Ibn Chaldûns Selbstbiographie; Maq. K. IV. 6—17; C. II. 105: dieser Auszug aus der *Iḥâṭa* ist sehr kurz und flüchtig; so erwähnt C. in demselben die „Geschichte der Araber", die Ibn el-Chaṭîb noch gar nicht gekannt haben kann, da Ibn Chaldûn sie erst nach dessen Tode geschrieben hat.)

421. ʿAbdallâh b. Chalîl b. Jûsuf, Ǧemâl ed-dîn el-Mâridînî,[a]) der Grofsvater mütterlicherseits des bekannteren Sibṭ el-Mâridînî und mit diesem öfters verwechselt in den Katalogen, so dafs es oft schwer ist, zu entscheiden, welchem von beiden das eine oder andere Werk angehöre (vergl. auch Art. 445). Er war nach C. I. 368 Gebetsrufer in der Omeijaden-Moschee zu Damaskus[b]) und starb i. J. 809 (1406/07), nach andern 804. Er schrieb: Über den Muqanṭarâtquadranten,[c]) in 20 Kap., in Berlin (5841 u. 42), Escurial (963, 1⁰), Leiden (1121), Kairo (305, 315 u. 329), wird in den letzten beiden Mss. dem Sibṭ el-Mâridînî zugeschrieben. Über den Sinusquadranten, auch in 20 Kap., in Leiden (1119 u. 20), Escurial (926, 2⁰), ein Auszug oder eine Bearbeitung davon in Kairo (292). *El-durr el-manṯûr* (die zerstreuten Perlen), über den Gebrauch des Dustûrquadranten,[d]) in Berlin (5840), Escurial (926, 7⁰), Oxford (I. 967, 8⁰ u. 1042, 1⁰), Paris (2519, 2⁰), Kairo (287 u. 291), wird hier dem Enkel zugeschrieben. *El-šabake* (das Netzwerk), trigon. und astron. Tafeln, in Paris (2525, 1⁰).

422. Aḥmed b. el-Ḥasan b. el-Qonfûd el-Qosṭanṭînî (oder auch Qosanṭînî geschrieben), schrieb einen Kommentar zu der *Arǵûza* über die Astrologie von ʿAlî b. Abi'l-Riǵâl (vergl. Art. 219), im Escurial (904, 3⁰), Oxford (I. 971, 1⁰, II. 285, 2⁰), Brit. Mus. (977, 29⁰). Ebenso verfafste er einen Kommentar zu einem astrologischen Werke des Abû Jaḥjâ el-Merwazî

[a]) d. h. von Mâridîn (oder Mârdîn), einer Stadt im nördlichen Mesopotamien, in der Nähe von Nisibin, stammend.

[b]) Im Kat. von Oxford (I. 1042) steht: Gebetsrufer in der Stadt Kairo; es könnte möglich sein, dafs er erst später hieher übergesiedelt wäre, jedenfalls hat sein Enkel hier gewohnt.

[c]) Diese Abhandlung führt auch den Titel: *waraqât* (Blätter) über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten (vergl. auch Art. 442 und 445).

[d]) Ahlwardt übersetzt *rubʿ el-dustûr* mit „Musterquadrant"; H. Ch. (III. 192) nennt den Autor Ǧemâl ed-dîn Muh. b. Muh. el-Mâridînî, worin die Namen von Grofsvater und Enkel vermengt sind.

(s. Art. 96), der noch im Escurial zusammen mit dem Werke des Abû Jaḥjâ vorhanden ist (911, 2⁰).[a]) Über die Lebenszeit unsers Autors giebt uns der Codex 977 des Brit. Mus., sowie der von Oxford (II. 285) Aufschlufs, es heifst daselbst, der Kommentar sei i. J. 774 (1372/73) beendigt und für Abû Bekr b. Abî Muğâhid Ġâzî, den Wezir des Chalifen Mutawakkil, geschrieben worden. — Ob Aḥmed b. el-Ḥasan b. el-Qonfûd mit Aḥmed b. el-Ḥasan b. ʿAlî el-Chaṭîb, Abû'l-ʿAbbâs, el-Qosṭanṭînî,[b]) dem Verfasser des dem Emir Abû Fâris ʿAbdelʿazîz, dem Meriniden, gewidmeten Geschichtswerkes über die Ḥafṣidendynastie, betitelt *„el-fârisîje"*, das er bis zum Jahre 805 (1402/03) fortgesetzt hat, identisch sei, wie Steinschneider[c]) glaubt, ist ungewifs, aber nicht unwahrscheinlich. Ebenso könnte der von H. Ch. I. 247 als Verfasser einer *Arğûza* über die Medizin genannte Aḥmed b. el-Ḥasan el-Chaṭîb el-Qosṭanṭînî dieselbe Persönlichkeit sein, obgleich als Abfassungszeit der *Arğûza* 712 angegeben ist.

423. Aḥmed b. Muh. b. ʿImâd, Abû'l-ʿAbbâs Šihâb ed-dîn, bekannt unter dem Namen Ibn el-Hâ'im, geb. i. J. 753 oder 756 (1355) zu Kairo, war ein bedeutender Kenner der Erbteilung und der Rechenkunst. Er lebte längere Zeit in Jerusalem als Professor an der Ṣalâḥîje, der von Ṣalâḥ ed-dîn (Saladdin) i. J. 584 (1188/89) gestifteten Schule. Er starb daselbst i. J. 815 (1412), nach einigen im Rağeb, nach andern im Ǧumâdâ II. (Ibn Š. p. 95.)

Seine Werke gehören wie diejenigen seines Kommentators, Sibṭ el-Mâridînî (vergl. Art. 445), zu den verbreitetsten der arabischen Litteratur. Er schrieb: 1. *El-maʿûne* (der Beistand), Abhandlung über die Rechenkunst, in Berlin (5984), Mailand (Ambr. 245), Kairo (190, Übers. 14). 2. *El-wasîle* (der Weg oder das Mittel), über die Rechenkunst, ein Auszug aus dem vorhergehenden Werke, in Berlin (5985), Kairo (188 u. 192, Übers. 13 u. 15). 3. *El-lumaʿ* (die Lichtblitze), über die Rechenkunst mit besonderer Rücksicht auf die Erbteilung, in Berlin (5986 u. 87), Oxford (I. 971, 6⁰), Brit. Mus. (421, 1⁰), Paris (2471 u. 72, 4162, 2⁰), Gotha (1483), Algier (1447, 1⁰), Kairo (186, Übers. 11). 4. *Muršidet el-ṭâlib* (Rechte Leitung des Studierenden) zur Rechenkunst, in Berlin (5978), Brit. Mus. (420, 5⁰). 5. *Nuzhet el-ḥossâb* (oder auch *nuzhet el-aḥbâb* und *nuzhet el-nuzzâr*) (die Unterhaltung der Rechner), über die Rechenkunst, ein Auszug aus dem vorhergehenden Werke, in Berlin (5979 u. 80), Gotha (1479, 2⁰ u. 1481), Oxford (I. 489, 2⁰, II. 287, 2⁰), Brit. Mus. (894, 2⁰)?, Kairo (188, 189 u. 191,

---

[a]) Vergl C. I. 350.

[b]) Wüstenfeld (W. G. 455) nennt ihn Abû'l-ʿAbbâs Aḥmed b. Hosein b. ʿAlî, genannt Ibn el-Chaṭîb, Ibn el-Qonfûd fehlt.

[c]) Vite di matematici arabi di Bern. Baldi, con note etc. p. 78.

Übers. 12, 13 u. 15). 6. *El-moqni'* (das Überzeugende), ein Gedicht über die Algebra, in Berlin (5991)[a]) mit Kommentar von dem Verfasser selbst, Gotha (1484 u. 85, 1491, 3°). 7. *Ġâjet el-su'l* (der höchste Wunsch) in der Bestätigung (der Wahrheit) durch die Unbekannte, Abhandlung über Algebra, in Kairo (212, Übers. 45). 8. Kommentar zur *Jâsminije* des 'Abdallâh b. Muh. b. el-Jâsimîn (s. Art. 320), in Oxford (I. 966, 6° und 1238, 1°), Kairo (189 u. 212, Übers. 13 u. 45). 9. H. Ch. (III. 13)[b]) hat noch: *Ḥâwî fi'l-ḥisâb* (das Umfassende über die Rechenkunst), und VI. 28: *Miftâḥ fi'l-ḥisâb* (Schlüssel zur Rechenkunst). (Vergl. auch Art. 445, 452, 461, 468, 472, 479, 505, 506.)

424. 'Alî b. Muh. el-Seijid el-Šerîf el-Ġorǧânî, ein bedeutender vielseitiger Gelehrter, geb. 740 (1339/40), gest. 816 (1413/14) in Šîrâz. Er zeichnete sich besonders in Sprach- und Rechtswissenschaft, in Philosophie und Astronomie aus, wurde von Tîmûr in hohen Ehren gehalten und schrieb eine grofse Zahl von Werken, von denen hier zu nennen sind: Kommentar zum *Mulachchaṣ* des Ǧaǧmînî (s. Art. 403), in Leiden (1084 u. 85), Oxford (II. 291, 3°), Brit. Mus. (403, 1°, 1342, 1° und 1343, 1°), Gotha (1388), Paris (2505), Escurial (951), Konstant. (2649—55). Kommentar zur *Tadkira* des Naṣîr ed-dîn, in Leiden (1094 und 95), Oxford (II. 292), Berlin (5681), Ind. Off. (746 u. 47), Kairo (223, Übers. 162) Konstant. (2644).

424[a]. 'Abderraḥmân el-Lachmî, Abû Zeid, bekannt unter dem Namen el-Ġâdarî, schrieb i. J. 794 (1391/92) (nach dem Kat. des Brit. Mus.) ein Gedicht, betitelt: *Rauḍat el-azhâr fi'ilm waqt el-leil we'l-nahâr* (der Blumengarten, über die Kenntnis der Zeit von Tag und Nacht), im Brit. Mus. (411, 2°) und in Kairo (291), am erstern Orte mit Kommentar von Muh. b. Aḥmed b. el-Ḥabbâk (s. Art. 435).

425. 'Abdelwâḥid b. Muh. schrieb i. J. 797 (1394/95) einen Kommentar zu den *sî faṣl* des Naṣîr ed-dîn, in Leiden (1179) u. Paris (2511, 2°). H. Ch. schreibt ihm VI. 114 einen Kommentar zum *Mulachchaṣ* des Ǧaǧmînî und VI. 192 eine *Manẓûme* (Gedicht) über das Astrolabium zu, verfafst für seinen Schüler Muh. Šâh el-Fenârî. Von einem Abû 'Obeid 'Abdelwâḥid b. Muh. el-Ġûzǧânî[c]) existiert in Oxford (I. 940, 4°) eine Abhandlung „über die Zeiten, Finsternisse etc.“, in Leiden (1069) ein Aus-

[a]) Es heifst hier *el-musri'* (das schnelle), es ist aber auf Blatt 1 bemerkt, dafs es dasselbe sei wie *el-moqni'*; es soll ein Auszug aus seinem gröfsern Werke *el-mumatti'* (das Nutzen bringende) sein, das ich in keinem Kat. gefunden habe.

[b]) Hier steht als Todesjahr Ibn el-Hâ'ims unrichtig 887.

[c]) d. h. aus Ġûzǧân, einem Bezirk im östlichen Chorâsân, in der Gegend von Balch gelegen.

zug aus einem Werke, betitelt: *keifîje tarkîb el-aflâk* (Art und Weise der Zusammensetzung der Sphären) und im Brit. Mus. (978, 12⁰) ein pers. Anhang zu der philos. Encyklopädie des Ibn Sînâ, betitelt: *el-naǧât.* Ob diese beiden Autoren identisch seien, oder ob der letztere nach H. Ch.'s Angaben (VI. 303) der Freund und Schüler Ibn Sînâs, Abû ʿObeid el-Ǧûzǧânî (vgl. Art. 198, p. 88) sei, können wir nicht entscheiden, doch ist letzteres wahrscheinlich.

426. Muh. b. ʿAlî b. Ibrâhîm, bekannt unter dem Namen Ibn Zarîq el-Chairî,[a] der Gebetsrufer in der Omeijaden-Moschee zu Damaskus, lebte Ende des 8. und Anfang des 9. Jahrhunderts d. H. (ca. 770—830). Er schrieb: *El-rauḍ el-ʿâṭir* (der wohlriechende Garten), ein Kompendium (*talchîṣ*) der astron. Tafeln des Ibn el-Šâṭir (s. Art. 416), in Gotha (1403), Paris (2520, 2⁰). *El-našr el-muṭaijeb* (der angenehme Duft), über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Berlin (5828), Kairo (326). *Talchîṣ el-ʿibârât we îḍâḥ el-išârât* (Auszug der Kommentare und Erklärung der Zeichen), über die Binomialen und Apotomeen, in Algier (1450, 1⁰).

427. Mûsâ b. Muh. b. ʿOṯmân el-Chalîlî, Šaraf ed-dîn Abû Imrân, schrieb ums Jahr 805 (1402/03): *Talchîṣ fî maʿrifet auqât el-ṣalât* (Kompendium über die Kenntnis der Gebetszeiten etc.), in Berlin (5684), Oxford (I. 1023, 10⁰).

428. Aḥmed b. Ġolâmallâh b. Aḥmed, Šihâb ed-dîn el-Kaum el-Rîšî,[b] der Gebetsrufer an der Moschee el-Mu'aijed zu Kairo, gest. 836 (1432/33).[c] Er schrieb: *El-lamʿa* (der Lichtblitz), über die sieben Planeten, in 12 Kap. und 60 Tafeln, in Berlin (5685 u. 86), Gotha (1389), Paris (2526 u. 27), Kairo (272); es ist dies ein Auszug aus seinem gröſsern Werke: *nuzhet el-nâẓir* (die Unterhaltung des Beobachters), welches wiederum ein Auszug (*talchîṣ*) der astron. Tafeln des Ibn el-Šâṭir (s. Art. 416) ist. *Kifâjet el-taʿlîm* (das Genügende der Belehrung), über die Herstellung des Kalenders, in Kairo (270 u. 284).

429. Ǧemšîd b. Mesʿûd b. Maḥmûd, Ġijâṯ ed-dîn el-Kâšî, war der erste Vorsteher der Ulûġ Beg'schen Sternwarte in Samarqand und Mitarbeiter an den astronomischen Tafeln; neben seinen mathematischen und astronomischen Studien beschäftigte er sich auch mit Medizin. Er wird ca. 840 (1436/37) gestorben sein.[d] Er schrieb: *Miftâḥ el-ḥisâb* (Schlüssel

---

[a]) Wird auch gelesen: el-Ǧabarî, el-Ǧîzî, el-Ḥarîrî (Ms. Kairo, 326), el-Ḥadî (Ms. Algier 1450, mit Fragezeichen); Ahlwardt liest Zoreiq statt Zarîq, n. H. Ch. III. 557.

[b]) Der Kat. von Kairo hat el-Kûmî, Ahlwardt im Berliner Kat. el-Kaumrîšî.

[c]) Nach dem Berliner Kat., der keine Quelle angiebt.

[d]) H. Ch. (III. 610) hat als Todesjahr 919, der Petersburger Kat. (p. 118) 887,

der Rechenkunst), in Berlin (5992), St. Petersb. (131), Leiden (1036), Brit. Mus. (419), Ind. Off. (756, 2^0); die Vorrede dazu wurde übersetzt von F. Woepcke (Passages relat. à des sommat. de séries de cubes, Rome 1864). *Talchîṣ el-miftâḥ* (Kompendium des Schlüssels), ein Auszug aus dem vorigen Werke, im Ind. Off. (757). *El-risâle el-kemâlîje* (die Kemâlische Abhandlung), auch betitelt *sullam el-samâ'* (die Himmelsleiter), über die Größen und Entfernungen der Himmelskörper, in Oxford (I. 881, 4^0), Leiden (1141), Ind. Off. (755). Abhandlung über die Auffindung der Sehne und des Sinus für den Drittel eines Bogens, dessen Sehne und Sinus bekannt sind, in Kairo (210, Übers. 44).[a] Die Châqânischen[b] Tafeln, eine Ergänzung der Îlchânischen, in Konstant. (2692) pers.; diese müssen von den Ulûġ Beg'schen oder wie sie auch heifsen Gûrgânischen Tafeln verschieden sein, da er sie selbst unter diesem Namen in der Vorrede zu seinem *miftâḥ* zitiert; er bemerkt dazu, er habe darin alles zusammengestellt, was er an solchen Verfahrungsarten der Astronomen habe finden können, die in andern Tafeln nicht vorkommen und alles mit geometrischen Beweisen versehen. *Zîǵ el-tashîlât* (Tafeln der Erleichterungen) mit verschiedenen Tabellen. *El-risâle el-moḥîṭîje* (die Umfangsabhandlung) über das Verhältnis von Durchmesser zum Umfang eines Kreises. *Nuzhet el-ḥadâ'iq* (der Gartenspaziergang), Beschreibung des von ihm erfundenen astronomischen Instrumentes, genannt *ṭabaq el-manâṭiq* (Platte der Zonen). *Istichrâǵ ǵamî' ǵedâwil el-zîǵ el-îlchânî bi-adaqq 'amal* (Herleitung sämtlicher Tabellen der îlchânischen Tafeln nach dem genauesten (feinsten) Verfahren).[c] (Aus der Vorrede zu seinem *miftâḥ*, Berliner Kat. V. 344.)

430. Mûsâ b. Muh. b. Maḥmûd, bekannt unter dem Namen Qâḍizâdeh el-Rûmî (d. h. der Sohn des Richters aus Kleinasien), gebürtig aus Brussa; wandte sich später nach Chorâsân und von hier nach Transoxanien, um seine Studien zu vervollkommnen. Hier trat er in den Dienst Ulûġ Begs (1393—1449), des Beherrschers von Samarqand, der den mathematischen Wissenschaften sehr zugethan war. Unter dessen Führung wurden

---

beide Angaben sind unrichtig; im Berliner Ms. des *miftâḥ* (5992) steht, daſs der Verfasser diese Abhandlung i. J. 830 geschrieben habe, damals hatte er schon alle oben genannten Schriften verfaſst.

[a]) Sie heiſst hier „über die Auffindung des Sinus eines Grades vermittelst Operationen, die sich auf Geometrie und Arithmetik stützen"; H. Ch. macht aus dieser Abhandlung zwei (III. 364 u. 452). Vergl. auch Cantor, Vorlesgn. I. p. 671 (1. Aufl.), p. 737 (2. Aufl.).

[b]) Châqân bedeutet Groſs-Chân.

[c]) Er setzt vor den Titel dieses Werkes das Wort *ista'naftu* = ich habe begonnen; will er vielleicht damit den Beginn seiner Arbeit an den Ulûġ Beg'schen Tafeln bezeichnen, deren Abschluſs er nicht mehr erlebt hat? (vergl. Art. 430 u. 438).

die berühmten astronomischen Tafeln, die seinen Namen tragen, verfaſst und Qâḍîzâdeh war einer der bedeutendern Mitarbeiter an denselben; er folgte als Direktor der Sternwarte in Samarqand auf Ġijâṯ ed-dîn Ǧemšîd (s. Art. 429) und auf ihn folgte dann ʿAlî b. Muh. el-Qûšǧî (s. Art. 438), der erst die Beobachtungen für die Tafeln zu Ende geführt hat. Qâḍîzâdeh wird zwischen 840 u. 850 (1436 u. 1446)[a]) gestorben sein. Er schrieb: Kommentar zu den „Fundamentalsätzen" des Muh. b. Ašraf el-Samarqandî (s. Art. 382), vollendet i. J. 815 (1412/13), in Berlin (5943 und 44), Gotha (1498 u. 99), München (849), Brit. Mus. (388, 1332 u. 33), Escurial (947), Florenz (Pal. 280), mit den Elementen des Euklides und der Lebensbeschreibung dieses Mathematikers von Qâḍîzâdeh, St. Petersb. (133, 3°u. 241, 2°), Kairo (196, Übers. 18), Konstant. (2640, 2661, 2743 u. 44). Kommentar zum *mulachchaṣ fî'l-hei'a* (Kompend. der Astronomie) des Ǧaġmînî (s. Art. 403), geschrieben i. J. 814,[b]) in Berlin (5675 u. 76), München (854), Leipzig (Ref. 115), Cambridge (250, 2°), Oxford (I. 967, 1° u. 1027, II. 276 u. 291, 4°), Brit. Mus. (401), Ind. Off. (751—53 u. 768, 3°), im letztern Ms. unvollständig, Leiden (1086—88), Paris (2503, 2504, 1° u. 2°, 4386, 3°), Florenz (Pal. 280), mit einer Astronomie von Qâḍîzâdeh selbst (?) in 2 Büchern, St. Petersb. (127), Kairo (223 u. 224, Übers. 162), Konstant. (2657—62) (vergl. auch Art. 443 u. 456). Florenz (Pal. 311) hat noch einen Kommentar zur *taḏkira* des Naṣîr ed-dîn von Qâḍîzâdeh, und Berlin (5657) Glossen von demselben zu dem Kommentar zum Almagest von el-Ḥasan b. Muh. el-Nîsâbûrî (s. Art. 395). (Ṭâšk. p. 17—20.)

431. Muh. b. Muh. b. Aḥmed b. el-ʿAṭṭâr,[c]) Abû ʿAbdallâh el-Bekrî, schrieb ums Jahr 830 (1426/27) eine astronomische Abhandlung, betitelt: *kašf el-qināʿ* (das Wegheben des Schleiers), über die Konstruktion (Zeichnung) der Quadranten, in Paris (2546, 1°), Kairo (269, 275, 286) (vergl. auch Art. 511). In Oxford (I. 974) befinden sich von ihm astronomische Tafeln, mit dem Titel *taḥrîr* (Redaktion, Rezension).

432. Aḥmed b. Raǵeb b. Ṭîboġâ, Šihâb ed-dîn Abû'l-ʿAbbâs, bekannt unter dem Namen Ibn el-Meǵdî, wurde geboren i. J. 760[d]) (1359), war einer der ersten Gelehrten in Rechenkunst und Erbteilung, in Geometrie und Astronomie. Seine Werke waren sehr verbreitet. Er lebte in Ägypten und starb im Ḏû'l-Qaʿda 850 (1447). (S. I. 250.)

---

[a]) H. Ch. hat als Todesjahr 815, was unrichtig ist (vergl. auch Art. 429).

[b]) Nach dem Pariser Ms. 2503 i. J. 815.

[c]) d. h. der Droguist; im Kairenser Ms. p. 269 steht „el-Beiṭâr", dagegen im Ms. p. 286 „el-ʿAṭṭâr".

[d]) Im Berliner Kat. V. p. 168 steht 767, doch an andern Stellen z. B. p. 257 wieder 760.

Er schrieb: 1. *Iršâd el-ḥâ'ir* (die rechte Leitung des Verwirrten), über die Konstruktion der Linien der Stundenwinkel, in Berlin (5688), Leiden (1130), Kairo (227 u. 287). 2. *Zâd el-musâfir* (der Proviant des Reisenden), über die Sonnenuhren mit Tafeln, ein Auszug aus dem eben genannten gröſsern Werke, in Paris (2541, 4°), Oxford (I. 1023, 5°, II. 286, 1°), Berlin (5689), Escurial (963, 3°), Algier (1457, 2°), Kairo (260, 287, 296, 312). 3. Über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, in Berlin (5846), Gotha (1417, 1°, 1418, 1419, 1°, 1420), Leiden (1128 u. 29), München (856—58), Oxford (I. 967, 14°, 1023, 8°), Escurial (956, 2°), Paris (2547, 3°), Kairo (248, 302, 306). 4. *Ta'âdîl el-qamar* (Gleichungen des Mondes), in Kairo (233, Übers. 164). 5. *'Iqd el-durar* (das Perlenhalsband), Tafeln der Länge und Breite des Mondes, in Kairo (310), vielleicht identisch mit dem vorigen. 6. *Ta'dîl zuḥal* (Gleichung des Saturns), in Kairo (233, Übers. 165). 7. *El-muftakarât el-ḥisâbîje* (arithmetische Betrachtungen), im Escurial (948, 3°), mit Kommentar von Nûr ed-dîn 'Alî el-Faraḍî, verfaſst i. J. 866 (1461/62).[a]) 8. *Kitâb el-taqrîb* (das Buch der Annäherung), über die Auflösung und Zusammensetzung astronom. Tafeln, in Oxford (I. 967, 13°), München (855), Kairo (278). 9. *Ǧedâwil el-sumût* (Tafeln der Azimute), in Kairo (240, Übers. 166). 10. *Tuḥfet el-aḥbâb* (das Geschenk der Freunde), über die Bestimmung der *Qible*, in Berlin (5690), Kairo (280, 292, 304). 11. Kurze Abhandlung über den Sonnenstand und die Schattenwerfung (Titel fehlt), in Berlin (6021). 12. *El-rauḍ el-azhar* (der glänzende Garten), über den Gebrauch des verborgenen oder verhüllten (*musattar*) Quadranten (s. auch Art. 412), in Oxford (1023, 3°). 13. *Cholâṣat el-aqwâl* (Auswahl der Worte oder Aussprüche), über die Kenntnis der Zeit mit Hilfe des Sinusquadranten, in Leiden (1126), Oxford (I. 1023, 4°), Kairo (292, 310). 14. *Kašf el-ḥaqâ'iq* (die Enthüllung der Wahrheiten), über die Rechnung mit Graden und Minuten, in Oxford (I. 1023, 1°), Algier (1456). 15. *Ġonjet el-fahîm* (der Reichtum oder das Genügen des Verständigen), über den Weg zur Kenntnis des Kalenders, in Oxford (I. 982, 1°), Paris (2531, 3°). 16. *Dustûr el-naijirain* (Kalender (eig. Verzeichnis) der beiden Leuchten, d. i. der Sonne und des Mondes), in Kairo (246, 275). 17. *El-manhal el-'adb* (die wohlschmeckende Tränke), Kalender der Planeten und Neumonde, in Kairo (307). 18. *El-durr el-jatîm*

[a]) Bei dieser Gelegenheit will ich noch zwei Autoren nennen, deren Lebenszeit unbekannt ist, die aber mit dem genannten Nûr ed-dîn 'Alî el-Faraḍî identisch sein könnten, nämlich: 1. Nûr ed-dîn el-Chafâǧî, den Verfasser von zwei astron. Abhandlungen, die eine über den Gebrauch des Sinusquadranten, die andere über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadraten, in Berlin (5829 u. 5865); 2. Nûr ed-dîn 'Alî b. Aḥmed el-Balchî, den Verfasser einer „Einleitung in die Astrologie", in Kairo (316).

(die unvergleichlichen Perlen); dieses Buch ist nicht mehr vorhanden, dagegen die Abhandlung, die er über den Gebrauch dieses Buches, gleichsam als Kommentar dazu, geschrieben hat, *fî tashîl ṣinâ'at el-taqwîm* (über die Erleichterung der Kalenderherstellung), in Leiden (1127), Escurial (956, 3°)?, Kairo (252 u. 282); nach einer Randbemerkung des Oxforder Ms. 967, 13° scheint diese Abhandlung mit Nr. 8 identisch zu sein (vergl. auch Art. 445).

433. Chalîl b. Ibrâhîm, Chair ed-dîn, ein Perser, schrieb ums Jahr 840 (1436/37) eine Abhandlung über die arithmetischen Operationen, betitelt: *Miftâḥ-i kunûz-i arbâb-i qalam* (der Schlüssel zu den Schätzen der Meister der Schrift), im Brit. Mus. P. (Add. 7693); ferner: *Muškil gušâ-i ḥisâb u mu'ḍil numâ-i kitâb* (das schwierig zu Erschliefsende der Rechenkunst und das schwierig Darzustellende des Buches oder der Schrift), in Konstant. (2731) pers.

434. Aḥmed b. Ibrâhîm b. Chalîl el-Ḥalebî, Šihâb ed-dîn Abû'l-'Abbâs, Gebetsrufer an der Omeijaden-Moschee in Damaskus, gest. 859 (1455), schrieb: *Biġjet el-ṭullâb* (der Wunsch der Studierenden), über den Gebrauch des Quadranten des Astrolabiums, in Leiden (1133), Paris (2524, 10°). *Nubḏe* (kurze Darstellung) über den Gebrauch der Sexagesimaltafeln, in Oxford (I. 1035, 1°). Vielleicht ist dieser Autor der Übersetzer der Îlchânischen Tafeln ins Arabische (s. Art. 368), der im Kat. v. Oxford (I. 897) nur genannt ist: Šihâb ed-dîn el-Ḥalebî.

435. Muh. b. Aḥmed b. el-Ḥabbâk, Abû 'Abdallâh, gest. 867 (1462/63),[a]) schrieb: *Biġjet el-ṭullâb* (der Wunsch der Studierenden), ein Gedicht über die Kenntnis des Astrolabiums, in Berlin (5800), unvollständig, Algier (1458, 1°), Kairo (285). (Vergl. auch Anmerkg. 88 u. Art. 424[a].)

436. Ibrâhîm b. Ibrâhîm b. Muh., Abû Isḥâq el-Nawâwî, lebte ums Jahr 850 (1446/47) und schrieb: *Manẓûme fî'ilm el-farâ'iḍ we'l-ġebr we'l-moqâbale* (Gedicht über die Erbteilung und die Algebra) in ca. 1000 Versen, beendigt i. J. 854 (1450), in Berlin (5993).

437. 'Abdel'azîz b. Muh., Abû'l-Faḍâ'il[b]) 'Izz ed-dîn el-Wefâ'î, der Gebetsrufer in der Moschee el-Mu'aijedî,[c]) gest. 876 (1471/72), nach andern 874, schrieb: Über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Kairo (249, Übers. 167). *El-lulu'e el-muḍî'e* (die glänzende Perle), über die Operationen mit den Sexagesimalbeziehungen (Grade, Minuten und deren trigon. Funktionen), Auszug aus seinem gröfsern Werke *nuzhet el-ṭullâb* (die Unterhaltung der Studierenden), in Oxford (I. 967, 5° u. 1034, 2°), Kairo (275

[a]) Nach dem Berliner Kat. V. p. 234.

[b]) Meistens so, doch auch Abû'l-Faḍl und Abû'l-Jumn.

[c]) Bald so, bald Omeijaden-Moschee, bald Moschee el-Azhar in Kairo; ich halte dafür, dafs derselbe in Kairo gelebt hat.

u. 285, Übers. 169). Über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, in Leiden (1123), Paris (2531, 1⁰, 2544, 15⁰), Kairo (260, 267, 304, 325). Über das Instrument, genannt der Äquatorialkreis (*dâ'iret el-mo'addil*), in Leiden (1124), Paris (2521, 10⁰, 2532, 1⁰ u. 2544, 7⁰). *Nuzhet el-naẓar* (das Vergnügen der Betrachtung), über die auf Sonne und Mond sich beziehenden Operationen, in Paris (2531, 2⁰); ein Kompendium dieses Buches befindet sich in Leiden (1125). Über den Sextanten, in Oxford (I. 971, 8⁰). *Tuḥfet el-ṭullâb* (das Geschenk der Studierenden), über die Rechnungsoperationen, ein Auszug aus seinem gröſsern Werke *'omdet el-ṭullâb* (Stütze der Studierenden), in Oxford (II. 286, 2⁰).

438. 'Alî b. Muh. 'Alâ ed-dîn el-Qûšǵî war der Sohn eines Beamten Ulûǵ Begs, studierte die mathematischen Wissenschaften unter Qâḍîzâdeh, reiste dann nach Kirmân und machte unter den dortigen Gelehrten weitere Studien. Nach Samarqand zurückgekehrt wurde er Nachfolger Qâḍîzâdehs als Vorsteher der Sternwarte und vollendete in dieser Stellung die Ulûǵ Beg'schen Tafeln. Nach dem Tode dieses Fürsten (853, 1449) trat er in die Dienste des Sultans Muh. II., den er auf seinen Feldzügen begleitete und für den er zwei Werke verfaſste, eine Abhandlung über Rechenkunst und Geometrie, genannt *el-Muḥammedîje*, und eine solche über die Astronomie, genannt *el-Fatḥîje.*[a]) Er starb in Konstantinopel i. J. 879 (1474/75) nach H. Ch. (III. 438). (Ṭâšk. p. 177 ff.)

Die *Muḥammedîje* befindet sich in Leiden (1034), ein Auszug daraus in pers. Sprache ebenda (1035), in Oxford (I. 73, 7⁰ u. 85, 1⁰) ebenfalls pers., in Konstant. (2640) auch pers. Die *Fatḥîje* existiert noch arabisch in Paris (2504, 4⁰) mit Kommentar von Mîram Čelebî (s. Art. 457), persisch in Oxford (I. 73, 8⁰), Brit. Mus. P. (Add. 7696, 4⁰, 23440, 2⁰, 23569, 1⁰, Or. 1560), Cambridge (206), Berlin P. (331), München P. (346, 1⁰), Wien (1423), St. Petersb. (315, 1⁰), an beiden letztern Orten mit Kommentar von Muh. el-Lârî el-Anṣârî (vergl. Art. 467), Konstant. (2639 u. 40). Dieselbe wurde in türkischer Übersetzung herausgegeben in Konstant. 1824, unter dem Titel *mirât el-'âlam* (Spiegel der Welt).[b]) Er schrieb ferner einen Kommentar zu *el-tuḥfet el-šâhîje* (das königliche Geschenk) von Qoṭb ed-dîn el-Šîrâzî (s. Art. 387), in Kairo (223), in Konstant. (2643). Oxford (I. 72, 2⁰) besitzt einen pers. Kommentar zu den Ulûǵ Beg'schen Tafeln von 'Alî el-Qûšǵî; es ist dies aber wahrscheinlich ein Kommentar zu dem Werke des Ǵemšîd b. Mes'ûd, betitelt: *sullam el-samâ'*, dieser Name kommt nämlich im Titel des Kommentars vor; allerdings soll nach H. Ch. (III. 560) 'Alî

[a]) Zur Erinnerung an die Eroberung (*fatḥ*) des pers. 'Irâq durch Muh. II.

[b]) Im Berliner Ms. 331 heiſst der Titel dieser Übersetzung *marqât el-samâ'* (die Himmelsleiter).

el-Qûšğî auch einen Kom. zu den Tafeln Ulûġ Begs verfafst haben. H. Ch. führt noch von unserem Autor an: III. 430, *fî ḥall aškâl el-qamar* (über die Erklärung der Mondphasen) und V. 528, *masarrat el-qolûb fî daf' el-kurûb* (die Freude der Herzen über die Verscheuchung der Betrübnisse), eine astronomische Abhandlung. Die III. 458 genannte Abhandlung über die Astronomie ist jedenfalls die *Fatḥije*. — Die Tafeln des Ulûġ Beg sind vorhanden: arabisch in Oxford (II. 273 u. 289, 2⁰), im letztern Ms. unvollständig, Leiden (1139) nur die Tafeln ohne Text, Paris (2534 u. 35), Ind. Off. (741, 3⁰), Kairo (261 u. 315, Übers. 167), Vatican (269), Florenz (Pal. 283) unvollständig, wahrscheinlich an allen genannten Orten, jedenfalls in Oxford, Paris und im Vatican, in der Übers. des Jaḥjâ b. 'Alî el-Rifâ'î; persisch in Oxford (I. 65, 70, 71), Brit. Mus. P. (Add. 7699, 11637, 16742 u. 43) im letzten Ms. nur der Text ohne Tafeln, Cambridge (214), Paris (Anc. fonds pers. 164, 171 u. 172), Berlin P. (337 u. 38), Konstant. (2693). Diese Tafeln wurden vielfach kommentiert und für andere Orte (geogr. Breiten) bearbeitet, ich komme gelegentlich auf solche Kommentare und Bearbeitungen zu sprechen (vergl. Art. 447, 456 u. 457). Von denselben, die aus den Prolegomena und 4 Teilen bestehen, wurden im Druck veröffentlichi: der 1. Teil und das 1. Kap. der Prolegomena von J. Greaves (Joh. Gravius) pers. u. lat., London 1650 u. 1652;[a]) der 4. Teil, der Katalog der Fixsterne, von Th. Hyde, pers. und lat., London 1665;[b]) die Prolegomena, pers. mit franz. Übers. und Kommentar von L. A. Sédillot, Paris 1846—53.[85a]

439. 'Omar b. 'Abderraḥmân b. Abî'l-Qâsim el-Qorešî el-Tûnisî[c]), schrieb: *Ichlâṣ el-naṣâ'iḥ* (Aufrichtigkeit der Ratschläge), über das Zeichnen der Linien auf den Scheiben des Astrolabiums etc., im Brit. Mus. (407*, 8⁰), beendigt i. J. 851 (1447/48).

440. 'Abderraḥmân b. 'Alî b. Muh. el-Aqfahsî schrieb um 860 (1456): *El-ğauhar el-maknûn* (die wohl verwahrte oder kostbare Perle), über die Kenntnis der Berechnung astronomischer Tafeln, in Berlin (5692).

441. Ibrâhîm b. 'Omar b. el-Ḥasan el-Ribâṭ el-Biqâ'î, gest. 885 (1480/81), schrieb einen Kommentar, betitelt: *Ibâḥat el-bâḥa* (Erschliefsung der Meerestiefe oder des Vorhofes) zu dem Gedicht *el-bâḥa*, über die Rechenkunst und die Ausmessungslehre, von unbekanntem Verfasser, in Kairo (177, Übers. 3).

---

a) Epochae celebriores astronomiae, Lond. 1650. — Binae tabulae geograph., una Nassir-Eddini, altera Ulug-Beighi, Lond. 1652.

b) Tabulae long. et latit. stellar. fixar., ex observ. Ulugh-Beighi, etc., London 1665.

c) Wird auch gelesen „el-Tûzarî".

442. **El-Ḥasan b. Chalîl b. ʿAlî el-Karâdîsî el-Ṭobnî** (d. h. aus Tobna in Algier), der Gebetsrufer an der Ašrafîje in Kairo, geb. 823 (1420), gest. 887 (1482), schrieb: *Aškâl el-wasâʾiṭ* (die Sätze der Vermittlungen), über die Konstruktion (Zeichnung) der ebenen und schiefen Sonnenuhren, in Paris (2543), Kairo (228 u. 272). *Kifâjet el-moḥtâǵ min el-ṭullâb* (das Genügende für denjenigen unter den Studierenden, der es nötig hat), über die Kenntnis (Auflösung) der sphärischen Probleme durch Rechnung, in Gotha (1391), Kairo (270). *Moqaddame fî ʿamal el-hilâl* (Einleitung in die Neumondrechnung), in Kairo (318). *El-nukat el-ẓâhirât* (die glänzenden Spitzchen, d. h. Feinheiten), Kommentar zu den *waraqât* des ʿAbdallâh b. Chalîl el-Mâridînî (s. Art. 421), in Leiden (1122).[86]

443. **Jûsuf b. Chiḍrbeg**, bekannt unter dem Namen **Sinân Pâšâ**, Wezir des türkischen Sultans Muh. II., gest. 891 (1486),[a]) war sehr gelehrt in Philosophie und Astronomie. Er war der Sohn Chiḍrbegs, des ersten Richters von Konstantinopel nach Eroberung dieser Stadt durch die Türken, und „in seiner Jugend ein grofser Zweifler, so dafs ihm sein Vater einmal ein kupfernes Gefäfs an den Kopf warf, weil er bezweifelte, ob Kupfer wirklich Kupfer sei, später Mathematiker, Prinzenlehrer und Wezir", er war nach seinem Wezirat auch Lehrer in Adrianopel.[b]) Er schrieb: Glossen zum Kommentar des Qâḍîzâdeh (s. Art. 430) zum *mulachchaṣ* des Ǵaǵmînî (s. Art. 403), im Escurial (954). H. Ch. nennt noch von ihm: VI. 397 Glossen zur *nihâjet el-idrâk* von Qoṭb ed-dîn el-Šîrâzî (s. Art. 387); III. 446 eine Abhandlung mit dem merkwürdigen Titel: *risâle fîʾl-munfariǵe* (Abhandlung über den stumpfen Winkel oder die stumpfwinklige Figur), in welcher gezeigt wird, wie dieser (oder diese) spitzwinklig gemacht werden kann, bevor sie rechtwinklig wird (?).[c])

444. **ʿAlî b. Muh. b. Muh. b. ʿAlî el-Qorešî el-Basṭî,**[d]) **Abûʾl-Ḥasan**, bekannt unter dem Namen **el-Qalaṣâdî**, der fromme, der gesetzeskundige, einer der letzten Imâme Spaniens, die Schriften hinterlassen haben. Die meisten seiner Werke handeln über die Erbteilung und die Rechenkunst, wie seine beiden „wunderbaren" Kommentare zum *Talchîṣ* des Ibn el-Bennâ (s. Art. 399) und zum Ḥaufî[87] u. a. „Es gereicht ihm zum Ruhme, dafs der Imâm el-Senûsî,[88] der Verfasser der *ʿaqâʾid* (Glaubens-

---

[a]) So nach H. Ch., nach Andern 886 (1481).

[b]) Hammer-Purgstall, Gesch. des Osman. Reiches, II. 241.

[c]) H. Ch. fügt hinzu: Haec res singularis est, quam mens aversatur. At Molla eam descripsit possibilemque esse contendit, ut mentis acumine eam cognitam redderet.

[d]) So und nicht el-Busṭî ist zu lesen, von der Stadt Basṭa (heute Baza) in der Provinz Granada.

artikel) das Ganze der Rechenkunst und der Erbteilung bei ihm hörte und ihm hinwiederum die Lizenz für seine Traditionen erteilte." — Er stammte aus Baza, siedelte dann nach Granada über, wo er seinen ständigen Wohnsitz aufschlug. Er hörte daselbst eine gröfsere Zahl von Gelehrten, wie Ibn Futûḥ, el-Saraqosṭî u. a. Dann reiste er nach dem Osten, passierte Tilimsân (jetzt Tlemsen), hörte dort den sehr gelehrten Imâm Ibn Marzûq und den Qâḍî Abû'l-Faḍl Qâsim el-ʿOqbânî und den Abû'l-ʿAbbâs b. Zâǵ u. a. Dann reiste er weiter und traf in Tunis mit Schülern des Ibn ʿOrfa (oder ʿArafa, gest. 803, 1400/01), wie Ibn ʿOqâb, el Qalašânî (gest. 863, 1459) u. a., zusammen. Hierauf machte er die Wallfahrt nach Mekka und fand dort weitere Belehrung; dann kehrte er nach Granada zurück und blieb dort, bis das Unglück über die Stadt hereinbrach;[a]) mit List entging er den Händen der Christen, wandte sich nach Tlemsen und fand dort Unterkunft bei el-Kafîf b. Marzûq, dem Sohne seines Lehrers. Hierauf erneuerte sich bei ihm die Reiselust und er zog weiter, bis ihn bald hernach in Bâǵe in der Provinz Ifrîkîje (Tunis) der Tod ereilte, in der Mitte des Ḏû'l-Ḥiǵǵe 891 (Ende 1486). — Nachdem el-Maqqarî seine Werke genannt hat, fügt er noch hinzu: „Er hörte in Kairo bei dem Ḥâfiẓ Ibn Ḥaǵar[89] und bei el-Zein Ṭâhir el-Nowairî und Abû'l-Qâsim el-Nowairî, bei dem gelehrten und ruhmvollen el-Maḥallî (gest. 864), bei el-Taqî el-Šumunnî, bei Abû'l-Fatḥ el-Merâǵî[b]) u. a., wie er dieses in seiner berühmten Reisebeschreibung erwähnt, in welcher seine Lehrer alle im Osten und Westen und ihre Lebensverhältnisse aufgeführt sind." — Seine mathematischen und astronomischen Werke sind folgende: 1. *El-tabṣira fiʿilm el-ḥisâb* (die Einsicht bringende, oder die Belehrung über die Rechenkunst).[c]) 2. *Kašf el-ǵilbâb ʿan ʿilm el-ḥisâb* (das Aufheben des Schleiers von der Kunst des Rechnens), in Paris (2463, 3°), ein Kommentar zum vorhergehenden Werke.[d]) 3. *Kašf el-asrâr ʿan ʿilm el-ġobâr* (die Enthüllung der Geheimnisse von der Wissenschaft des Ġobâr), ein Auszug aus dem vorhergehenden Werke, in Paris (2473), Brit. Mus. (418), Escurial (848, 4°), Algier (1448), Kairo (185 u. 189, Übers. 11 u. 13);[e])

---

[a]) Da er schon 1486 gestorben ist, so sollte es genauer heifsen „herannahte" oder „hereinzubrechen drohte"; in der That war schon einige Jahre vor der Einnahme der Stadt (1492) die Lage der Einwohner Granadas keine beneidenswerte.

[b]) Also nicht el-Faḍl b. Ḥâtim el-Nairîzî, wie Wüstenfeld (die Übers. arab. Werke ins Latein. p. 76) vermutet hat; Abû'l-Fatḥ Muh. b. Abî Bekr el-Ḥosein el-Merâǵî starb 859 (n. H. Ch. II. 527).

[c]) H. Ch. II. 180 hat: *el-tabṣira fî ḥisâb el-ġobâr*.

[d]) Vergl. Woepcke, Journal asiat. V. Série, T. XIX. p. 110, und Kat. v. Paris, p. 435.

[e]) Hier und im Ms. Algier steht *el-astâr* (der Schleier) statt *el-asrâr* (der Geheimnisse).

hiervon wurde eine französische Übersetzung von F. Woepcke veröffentlicht (nach dem Pariser Ms. 2473) in den Atti dell' accad. pontif. de' nuovi lincei, T. XII. 1859, unter dem Titel: Traduction du traité d'arithmétique d'Aboul-Hasan Ali b. Moh. Alkalsadi etc.; dasselbe wurde auch arabisch herausgegeben in Fes, 1310 (1892/93). 4. *Qânûn el-ḥisâb fî qadr el-talchîṣ* (Kanon der Rechenkunst, über den Wert (Inhalt) des Talchîṣ), in Berlin (5995), und Kommentar dazu, betitelt *inkišâf el-ǧilbâb* (das Aufheben des Schleiers) von dem Kanon des Rechnens, in Kairo (178, Übers. 4). 5. Zwei Kommentare, ein grofser und ein kleiner, zum *Talchîṣ* des Ibn el-Bennâ,[a]) der gröfsere in Paris (2464, 1°), Gotha (1477), der kleinere wahrscheinlich in Paris (2464, 2°), wo der Verfasser fehlt, aber bemerkt ist, er habe einen gröfsern Kommentar zu demselben Werke verfafst; aus dem Pariser Ms. 2464, 1° hat ebenfalls Woepcke einige Stellen in Übersetzung mitgeteilt, in den Annali di matem. pura ed applic. T. V. Nr. 3 (Sep.-Abdr.: Passages relat. à des sommat. de séries de cubes, Rome 1864), und im Journal asiat. VI. Série, T. I. 1863, p. 58—62. 6. Ein Kommentar zur Algebra des Ibn el-Jâsimîn (s. Art. 320) und ein Auszug aus demselben. 7. Kommentar zum Raǧez-Gedicht seines Lehrers Abû Isḥâq b. Futûḥ über die Gestirne, welches beginnt:

subḥâna râfi'i 'l-samâ'i saqfan
nâṣibihâ dalâlatan lâ tachfâ
„Preis sei dem, der den Himmel erhöht hat zum Dache,
„Der ihn aufgepflanzt hat als ein Zeichen, das nie vergeht."

8. *Hidâjet el-nazzar fî tuḥfet el-aḥkâm we'l-asrâr* (die richtige Leitung des Umsichtigen zur Gabe der Weissagungen und der Geheimnisse), ein astrologisches Werk. 9. Das Ganze der Erbteilung und Kommentar dazu. (Maq. K. II. 45 u. 46 nach el-Sachâwî.)[90]

El-Qalaṣâdî ist der letzte bedeutende Mathematiker der Araber, sein Haupt aber durfte er nicht mehr in seinem Heimatlande zur Ruhe legen; nicht lange vor dem letzten Fürsten auf spanischem Boden, dem unglücklichen Boabdil (Abû 'Abdallâh Muh.) von Granada, nahm auch der letzte namhafte Gelehrte muhammedanischen Glaubens in Spanien Abschied von seinem Vaterlande, das seine Glaubensgenossen über 750 Jahre lang im Besitze gehabt und zu hoher wirtschaftlicher und wissenschaftlicher Blüte gebracht hatten.

445. Muh. b. Muh. b. Aḥmed, Abû 'Abdallâh, Bedr ed-dîn (auch Šems ed-dîn) el-Miṣrî el-Dimišqî, bekannt unter dem Namen Sibṭ el-Mâridînî (Enkel des Mâridînî),[90a] geb. im Ḏû'l-Qa'da 826 (1423),

[a]) Es ist möglich, dafs der eine oder andere dieser Kommentare schon in den vorhergehenden Nummern unter anderm Titel genannt ist.

lebte wahrscheinlich anfänglich in Damaskus, wo sein Grofsvater mütterlicherseits, ʿAbdallâh b. Chalîl el-Mâridînî (s. Art. 421), Gebetsrufer an der Omeijaden-Moschee war, und siedelte dann nach Kairo über, wo er Gebetsrufer an der Moschee el-Azhar wurde. Er war ein Schüler Ibn el-Meǵdîs (s. Art. 432) und starb ca. 900 (1494/95).[a]) Er war ein äufserst fruchtbarer Schriftsteller über Rechenkunst und Astronomie, allein seinen Werken kommt, obgleich sie sehr verbreitet sind, keine gröfsere Bedeutung zu, weshalb man mich entschuldigen mag, wenn ich auf die Aufsuchung derselben in den Katalogen nicht dieselbe Sorgfalt verwendet habe, wie bei den Werken anderer Autoren; folgende Aufzählung mag also verschiedene Lücken haben.

Schriften: 1. *Risâle fi'l-ʿamal bi'l-rubʿ el-muǵaijib*[b]) (Abhandlung über den Gebrauch des Sinusquadranten, in 20 Kap., in Berlin (5818 u. 19), Gotha (1417, 3°, 1419, 2°, 1421, 2°, 1422, 1426, 2°), Leiden (1144 u. 45), Escurial (963, 4°), Vatican (318, 3°), Brit. Mus. (407*, 2°, 408, 2° und 6°), Oxford (I. 1041, 4°), Wien (1420, 1°), Paris (2502, 7°), Algier (613, 7°, 1457, 4°, 1460, 1°, 1461), Kairo (266, 276, 277, 302, Übers. 168) (vergl. auch Art. 470 u. 512). 2. *Raqâ'iq el-ḥaqâ'iq* (Subtile Fragen der Wahrheiten), über das Rechnen mit Graden und Minuten, Auszug aus dem *kašf el-ḥaqâ'iq* seines Lehrers Ihn el-Meǵdî, in Berlin (5694 u. 95), Gotha (1390), Oxford (I. 967, 4°), Paris (2560, 15°, 2541, 1°), Algier (1463), Kairo (247, Übers. 167) (vergl. auch Art. 460). 3. *Zubd el-raqâ'iq* (Auswahl von subtilen Fragen), über die Rechnung mit Graden und Minuten, wahrscheinlich ein Auszug aus der vorhergehenden Abhandlung, im Escurial (963, 2°), Kairo (278). 4. *Moqaddame* (Einführung) in die Berechnung der Sinusprobleme und die sphärischen Operationen, in München (862), mit Kommentar von Aḥmed b. ʿÎsâ el-ʿAǵabî, Oxford (II. 286, 6°). 5. *El-ṭoraf el-sanije* (die herrlichen Seltenheiten) über die Sechziger-Beziehungen, Auszug aus Nr. 2, im Escurial (965, 1°), Kairo (264 u. 294). 6. *Laqṭ el-ǵewâhir* (das Auflesen der Perlen), über die Wissenschaft der Zeitbestimmung, in Berlin (5693), Kairo (271, 276, 284 u. 286). 7. *El-nuǵûm el-zâhirât* (die glänzenden Sterne), über den Muqanṭarâtquadranten, ein Auszug daraus in Paris (2547, 17°), wo die Abhandlung dem Grofsvater zugeschrieben wird. 8. *Qaṭf el-zuharât* (das Pflücken der Blumen), ein Auszug aus der vorhergehenden Abhandlung, in Berlin (5851), Algier (1460, 2°); hier heifst sie fehlerhaft *qoṭb el-zâhirât*. 9. *Hâwî el-mochtaṣarât* (die Sammlung der Auszüge), eine andere Abhandlung über den Muqanṭarâtquadranten, in Berlin

[a]) Der Katalog des Vaticans hat 880 ohne Quellenangabe.

[b]) Wird auch *el-fatḥije fi'l-aʿmâl el-ǵaibîje* (die Fatḥische Abhandlg. über die Sinusoperationen) genannt und auch seinem Grofsvater zugeschrieben (vergl. auch Art. 510).

(5850), Escurial (926, 6°), Kairo (243, 302). 10. Dritte Abhandlung über den Muqanṭarâtquadranten, ein Auszug aus den „*waraqât*“ seines Grofsvaters, in Berlin (5843), Paris (2541, 6°)?, Escurial (963, 5° und 965, 3°?). 11. *Izhâr el-sirr el-mauḍû'* (Erklärung des aufbewahrten Geheimnisses), über den „abgeschnittenen“ Quadranten, in Leiden (1143), Oxford (I. 1041, 4°), Escurial (965, 2°)?. 12. *Kifâjet el-qanû'* (das Genügende des Zufriedenen), über den Gebrauch des „abgeschnittenen“ Quadranten, ein Auszug aus dem vorhergehenden Werke, in Berlin (5848 u. 49), Gotha (1426, 1°), Oxford (I. 971, 7°), Paris (2521, 8°, 2542, 1°, 4580, 3°), Kairo (270, 299, 302, 312). 13. *Hidâjet el-'âmil* (die richtige Leitung des Arbeitenden), über den vollkommenen Quadranten, in Berlin (5853), Gotha (1417, 2°). 14. *Hidâjet el-sâ'il* (die richtige Leitung des Fragenden), über den vollkommenen Quadranten, verschieden von der vorigen Abhandlung, in Berlin (5854), Gotha (1428), Leiden (1146), Oxford (I. 1041, 4°), dies kann auch die Abhandlung Nr. 13 sein, Kairo (328). 15. *El-maṭlab* (das Gesuchte oder der vergrabene Schatz), über den Sinusquadranten (in 150 Kap.), in Gotha (1425), Paris (2519, 3°), Escurial (926, 2°), Kairo (299). 16. *El-qaul el-mubdi'* (das schaffende Wort), Kommentar zum *moqni'* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), in Gotha (1491. 3°). 17. *Iršâd el-ṭullâb* (die richtige Leitung der Studierenden) zur *wasîle fi'l-ḥisâb*, d. i. Kommentar zur *wasîle* des Ibn el-Hâ'im, in Oxford (I. 962 u. 977?), Leipzig (Ref. 424), Kairo (177, 189, Übers. 3 u. 13). 18. Kommentar zu *el-luma' fi'ilm el-ḥisâb* (die Lichtblitze in der Rechenkunst) des Ibn el-Hâ'im, in Berlin (5988), Gotha (1483), St. Petersburg (126, 1°), Brit. Mus. (421, 1°), München (371), Paris (2471), Kairo (187, Übers. 12). 19. Kommentar zur *Jâsmînije*, über die Algebra, in Berlin (5966 u. 67), Kairo (190, Übers. 13), Konstant. (2752). 20. *El-lam'a el-mâridînije* (der mâridînische Lichtblitz), Abkürzung des vorigen Kommentars, in Berlin (5968), Gotha (1475), Paris (4162, 4°), Kairo (213 u. 214, Übers. 46 und 47). 21. *Tuḥfet el-aḥbâb* (das Geschenk der Freunde), über die Rechenkunst, mit besonderer Berücksichtigung der Erbteilung, in Berlin (5994), Gotha (1486), Kairo (179, Übers. 6) (vergl. auch Art. 472). 22. *Wasîlet el-ṭullâb* (der Weg der Studierenden), über die Kenntnis der Zeiten durch Rechnung, in München (863), Oxford (II. 286, 4°). 23. *El-tuḥfe el-manṣûrije* (das manṣûrische Geschenk) über den Quadranten und die Kenntnis der Gebetzeiten, im Brit. Mus. (421, 2°), Paris (2519, 7°). 24. *Moqaddame* (Einführung) in die Konstruktion der geneigten Sonnenuhren, mit Tafeln, in Oxford (II. 286, 3°), und wahrscheinlich in Kairo (238 u. 282). 25. Abhandlung über den Äquatorialkreis in Oxford (I. 1041, 4°). 26. Abhandlung über den Quadranten, das Astrolabium und den immerwährenden Kalender, in Florenz (Pal. 320).

446. ʿAlî b. Muh. b. Ismâʿîl el-Zemzemî el-Mekkî, schrieb im J. 878 (1473/74) in Mekka ein Gedicht über die Rechenkunst, betitelt: *Fatḥ el-wahhâb* (der Beistand des Gebers, d. i. Gottes), in Kairo (183, Übers. 9) (s. auch Art. 458).

447. Muh. b. Abîʾl-Fatḥ Sems ed-dîn el-Ṣûfî el-Miṣrî,[a]) gest. ca. 900 (1494/95), schrieb: 1. Kommentar zu den Tafeln Ulûġ Begs und Einrichtung derselben für die Breite von Kairo (233, Übers. 164), vielleicht auch in Gotha (1379). 2. *Sullam el-menâre* (Treppe des Minarets), Tafeln über die Bahnen der Planeten, vielleicht ein Teil des eben genannten Kommentars, in Gotha (1405), Algier (1465). 3. *El-risâle el-šemsîje* (die sonnige oder Šemsische Abhandlung), über die Operationen mit dem Sinusquadranten, in Berlin (5817), Leiden (1136). 4. *Kitâb el-ǧewâhir fî maʿrifet el-semt we faḍl el-dâʾir* etc. (das Buch der Perlen) über die Kenntnis des Azimutes und Stundenwinkels, in Oxford (I. 1040). 5. *Risâlet el-mufaṣṣil* (Abhandlung des Einteilers), über den Gebrauch des Äquatorialkreises, in Leiden (1137). 6. *El-ʿamal el-moṣaḥḥaḥ biʾl-rubʿ el-muǧannaḥ* (der verbesserte Gebrauch des „geflügelten" Quadranten), in Berlin (5844). 7. Kurze Abhandlung über den Gebrauch des Instrumentes, genannt *ṣandûq el-jawâqît* (die Edelsteinschachtel), in Berlin (5845). 8. Über den vollkommenen (*el-kâmil*) Quadranten, im Escurial (926, 3°). 9. Über den Zenit, im Escurial (926, 4°). 10. Über den Aufgang, die Länge und Breite des Mondes und den Neumond, im Escurial (926, 5°). 11. *Fîʾl-basîṭa el-musammât biʾl-rochâme*, über die Sonnenuhr, in Kairo (290). 12. *Risâle fî ḥisâb mawâqiʿ el-sumût weʾl-muqanṭarât* (Abhandlung über die Azimute und Muqanṭarâte), in Kairo (295). 13. *Netâʾiǧ el-fikr* (die Ergebnisse der Überlegung), über die koptischen und griechischen Monate etc., in Kairo (320). 14. *Risâlet el-qabbân* (Abhandlung über die Wage), in Kairo (217 u. 219, Übers. 49 u. 50). 15. *Nuzhet el-nâẓir* (die Unterhaltung des Beobachtenden), über die Festsetzung der Linien der Stundenwinkel, in Kairo (326), verfaſst i. J. 878 (1473/74).

448. Muh. b. el-Qâsim, Moḥjî ed-dîn el-Achwîn, gest. 904 (1498/99),[b]) Lehrer an verschiedenen Schulen des osmanischen Reiches unter Sultan Muh. II., schrieb für Sinân Pâšâ (s. Art. 443): *el-aškâlât* (die (astronomischen) Figuren) der sieben Planetensphären, in Wien (1422); ferner nach Ṭâšk. (p. 212) einen Kommentar zum Sinusquadranten (Verfasser nicht genannt).

---

[a]) d. h. der Ägypter; C. I. 368 macht aus ihm einen Sevillaner aus dem 5. Jahrh. d. H.

[b]) Ṭâšk. (l. c.) hat „am Ende des 9. Jahrh. d. H."

449. ʿAbderraḥmân b. Abî Bekr b. Muh., Ǧelâl ed-dîn Abû'l-Faḍl el-Sujûṭî (oder el-Osjûṭî), wurde i. J. 849 (1445/46) zu Kairo geboren. Er stammte aus Siut in Ober-Ägypten, begann i. J. 864 (1459/60) seine wissenschaftlichen Studien, die sich besonders auf das Recht, die Traditionen und die Geschichte erstreckten. Aber auch in einer Reihe anderer Wissenschaften versuchte er sich und wurde einer der gröſsten Vielschreiber der Araber, er schrieb über 500 Abhandlungen, von denen allerdings manche nur ein oder wenige Blätter umfaſsten. Er starb zu Kairo im Ǧumâdâ I. 911 (1505). (W. G. 506.) — Er schrieb: *Kitâb el-hei'a el-sanîje fî'l hei'a el-sunnîje* (das Buch der erhabenen Astronomie, über die sunnitische Astronomie, d. h. die im Koran und den Traditionen überlieferte), eine Sammlung von Aussprüchen des Korans, der Tradition und der Geschichtswerke über Gegenstände der Astronomie, in Berlin (5697 u. 98), Gotha (52, 4° u. 1383), Paris (4253, 3°), Ind. Off. (1035, 4°), München (133), im Auszug, Konstant. (2680—83).

450. Muh. b. Muh. b. Abî Bekr el-Tîzînî, Abû ʿAbdallâh, der Gebetsrufer an der Omeijaden-Moschee zu Damaskus, lebte ums Jahr 900 (1494/95); er war aus Aleppo gebürtig, daher wird er auch bisweilen el-Ḥalebî genannt. Er schrieb: Über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, in Berlin (5803), Gotha (1421, 1°) unvollständig, Paris (2547, 9° u. 21°), Kairo (308). *Fî ʿilm el-waqt* (über die Wissenschaft der Zeitbestimmung), in Berlin (5804). Über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Paris (2547, 22°), Kairo (315). Über den vollkommenen (*el-kâmil*) Quadranten, in Oxford (I. 967, 9°). Tafeln des Sinus, Sinus versus, der Tangente und der Deklinationen (?), in Oxford (I. 1035, 2°), verfaſst i. J. 896 (1490/91). Astronomisch-chronologische Tafeln, in Oxford (1039, 1°).[91]

451. Muh. b. Aḥmed b. Muh. b. ʿAlî b. Ġâzî el-ʿOṯmânî, Abû ʿAbdallâh, wurde in Meknâsa (jetzt Meknes westlich von Fes) geboren, war ein bedeutender und vielseitiger Gelehrter, der hauptsächlich in Fes seine Wirksamkeit hatte und eine groſse Zahl von Werken hinterlieſs, worunter ein Gedicht über die Rechenkunst, betitelt: *binjet el-ḥisâb* (Bauwerk der Rechenkunst), mit Kommentar dazu, betitelt: *biġjet el-ṭullâb* (der Wunsch der Studierenden), im Brit. Mus. (420, 1°), Escurial (928, 2° u. 3°), Algier (1459), Kairo (179, Übers. 5); das Gedicht ohne Kommentar befindet sich im Brit. Mus. (1005, 4°)[a]) und im Escurial (943, 7° u. 959, 9°).

[a]) Hier, sowie in Ms. 420 derselben Bibliothek und auch in Kairo heiſst das Gedicht *minjet* (od. *munjet*) *el-ḥossâb* (Wunsch der Rechner); im Kairenser Ms. ist bemerkt, daſs der Kommentar im Ramaḍân 895 (1490) beendigt worden sei; im Londoner Ms. 1005 ist angeführt, daſs das Gedicht ungefähr das behandle, was im *Talchîs* des Ibn el-Bennâ enthalten sei.

Muh. b. Ahmed el-ʿOtmânî starb in Meknâsa im Gumâdâ I. 919 (1513). (C. I. 369.)

452. Zakarîjâ b. Muh. b. Ahmed, el-Anṣârî, Zein ed-dîn,[a]) geb. in Sanîka 826 (1423) (?), gest. in Kairo 926 (1520), schrieb einen Kommentar zur *nuzhe* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), in Kairo (183, Übers. 9), und ebenso einen solchen, betitelt: *fath el-mubdiʿ* (der Sieg (oder Eröffnung, Hilfe) des Erfinders) zum *moqniʿ* desselben Autors, in Kairo (189, Übers. 13).

453. Jaʿîš b. Ibrâhîm b. Jûsuf el-Omawî el-Andalusî,[b]) lebte nach dem Berliner Ms. 5949 ums Jahr 900 und schrieb: *Rafʿ el-iškâl* (die Beseitigung des Unklaren), über die Ausmessung der Figuren, in Berlin (5949), geschrieben i. J. 895 (1489/90). *Risâle fî ʿilm el-qabbân* (Abhandlung über die Kenntnis der Wage), in Kairo (218, Übers. 50).

454. ʿAbderraḥmân b. Muh. el-Ṣâliḥî el-Ǧauharî, Zein ed-dîn el-Dimišqî, der Gebetsrufer in der Omeijaden-Moschee zu Damaskus, lebte ums Jahr 900 und schrieb: *El-durr el-nazîm* (die schön geordneten Perlen), über die Erleichterung der Kalenderherstellung, mit Tafeln aus den Ulûǵ Beg'schen ausgezogen, in Berlin (5757), Gotha (1377, 2⁰), Oxford (I. 998, 1⁰, II. 288, 2⁰—7⁰).[c]) *El-kawâkib el-zâhira* (die glänzenden Sterne), über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Paris (2521, 9⁰).[d])

455. Muh. b. Kâtib Sinân el-Qûnawî, war Wezir von Šâhinšâh b. Bâjezîd el-ʿOtmânî, dem Sohne Bâjezîds II. (gest. 1512) und wird so gegen 930 (1523/24) gestorben sein. Er schrieb: *Mûḍiḥ el-auqât* (der Erklärer der Zeiten), über die Kenntnis der Zeiten mit Hilfe der Muqanṭarâtkreise, gewidmet dem Sultan Bâjezîd II., in Konstant. (2708). *Mîzân el-kawâkib* (die Wage (oder das Mafs oder die Menge) der Sterne), in Konstant. (2710). H. Ch. führt von ihm noch an: II. 234, *tuḥfet el-foqarâ'* (das Geschenk der Armen), über die Bestimmung der Zeiten mit Hilfe des Muqanṭarâtquadranten; VI. 499, *hadîjet el-mulûk* (das Geschenk der Könige), über die Festsetzung der Muqanṭarâtkreise.

456. ʿAbdelʿalî[e]) b. Muh. b. el-Ḥosein, Niẓâm ed-dîn el-Barǧendî, ein eifriger Kommentator astronomischer Werke, gest. ca. 930.[f])

---

[a]) Dieser Beiname steht nur bei H. Ch. V. 218 u. 236; als Todesjahr hat H. Ch. an letzterer Stelle 910, dagegen II. 547 das Jahr 926.

[b]) Dieses Relativum steht nur im Katalog von Kairo.

[c]) Das gleiche oder aber ein ganz gleich betiteltes Werk wird in Leiden (1140) und in Oxford (II. 277) dem Taqî ed-dîn Muh. b. Maʿrûf (s. Art. 471) zugeschrieben.

[d]) Hier und auch im Berliner Ms. 5757 heifst der Verfasser ʿAbderraḥmân b. Benefšâ, mit der Kunje Abû Huraira.

[e]) An einigen Stellen kommt unrichtig nur ʿAlî vor.

[f]) Nach dem Katalog von Rieu soll er 930 noch am Leben gewesen sein, da

Von ihm sind noch vorhanden: Glossen zum Kommentar des Qâḍîzâdeh zum *Mulachchaṣ* des Ǧaǧmînî, in Berlin (5677), St. Petersburg (126, 2°), Ind. Off. (754), Kairo (221 u. 224, Übers. 161). Kommentar zum *taḥrîr* (Rezension) des Almagestes von Naṣîr ed-dîn, im Ind. Off. (742). Kommentar zu der Abhandlung des Naṣîr ed-dîn über das Astrolabium, betitelt: *bîst bâb* (zwanzig Kapitel), im Brit. Mus. P. (Add. 22752), St. Petersburg (315, 2° und 317, 2°) pers., Konstant. (2648) pers. Kommentar zu den Tafeln des Ulûġ Beg, im Brit. Mus. P. (Add. 23567), in Cambridge (233) pers. *Risâle-i hei'at* (Abhandlung über die Astronomie), in Oxford (I. 73, 10°) pers., wahrscheinlich einer seiner genannten Kommentare. *Risâle dar ma'rifet-i taqwîm* (Abhandlung über die Kenntnis des Kalenders), in Oxford (73, 12) pers., München P. (346, 5°).

457. Maḥmûd b. Muh. b. Qâḍîzâdeh el-Rûmî, bekannt unter dem Namen **Mîram Čelebî**, der Enkel (nicht Sohn, wie verschiedene Autoren angeben) Qâḍîzâdehs, war zuerst Lehrer in Gallipoli, hierauf in Adrianopel, dann in Brusa. Später ernannte ihn Bâjezîd II. zu seinem Hauslehrer und studierte selbst unter ihm die mathematischen Wissenschaften, in denen er als der erste Gelehrte seiner Zeit betrachtet wurde. Unter Sultan Selim war er einige Jahre Qâḍî in Anatolien; er war auch sehr bewandert in Sprachwissenschaft und Geschichte. Er starb i. J. 931 (1524/25) in Adrianopel. Er schrieb: Kommentar zu den Ulûġ Beg'schen Tafeln, im Auftrag Bâjezîds II. persisch geschrieben, in Paris (Ms. persan 171, anc. fonds),[a]) Konstant. (2697) pers. Kommentar zur *Fatḥîje* des 'Alî b. Muh. el-Qûšǧî (s. Art. 438), in Paris (2504, 5°). *Risâle fî taḥqîq semt el-qible* (Abhandlung über die Richtigstellung des Azimutes der Qible), in Konstant. (2628). *Risâlet el-ǧaib el-ǧâmi'a* (die umfassende Sinusabhandlung), über den Sinusquadranten, dem Sultan Bâjezîd II. gewidmet, in Berlin (5855); es wäre möglich, dafs diese Schrift ein Teil des Kommentars zur *Fatḥîje* wäre. (Ṭâšk. p. 367 f.)

458. 'Orfa[b]) b. Muh. Zein ed-dîn el-Dimišqî, gest. im Šauwâl 931 (1525), schrieb einen Kommentar zu dem Gedicht *fatḥ el-wahhâb* des 'Alî b. Muh. b. Ismâ'îl el-Zemzemî (s. Art. 446), in Kairo (183, Übers. 9).

458[a]. Aḥmed b. Muh. el-Qasṭalânî el-Miṣrî (der Ägypter), Abû'l-'Abbâs, gest. 932 (1525/26), schrieb: *Risâle fî'l-rub' el-muǧaiyeb* (Abhandlung über den Sinusquadranten). (H. Ch. III. 402.)

459. Muh. b. Dallâl el-Wefâ'î, Šems ed-dîn el-Sujûṭî (oder

Chândamîr, der Verfasser des *Ḥabîb el-sijar*, der sein Werk 927—930 geschrieben hat, von ihm als von einem Lebenden spricht.

a) Vergl. auch Journal asiat. V. Série, T. II. 1853, p. 333—56.

b) oder 'Arafa.

Osjûṭî), gebürtig aus Siut in Ober-Ägypten, war ein Schüler von Muh. b. Abî'l-Fatḥ el-Ṣûfî (s. Art. 447), wird ca. 940 (1533/34) gestorben sein. Er schrieb: *Nuzhet el abṣâr* (die Unterhaltung der Augen oder Blicke), über die Verrichtungen des Tages und der Nacht, in Kairo (325). *El-ǵewâhir el-naijirât* (die glänzenden Perlen), über die Konstruktion der ebenen und geneigten Sonnenuhren; dieses Werk ist nicht mehr vorhanden, dagegen ein Auszug daraus, betitelt: *el-waḍʿ ʿalâ'l-ǵihât* (das (Zeichnungs-)Verfahren auf den Oberflächen) der ebenen und geneigten Sonnenuhren, von seinem Schüler ʿAlî el-Mâlaqî[a]) el-Andalusî, in Berlin (5715), Gotha (1381, 5⁰), Kairo (284 u. 329). Der Letztere schrieb noch eine Fortsetzung oder Erweiterung dieser Abhandlung, betitelt *nuzhet el-nâẓir* (die Unterhaltung des Beobachtenden), über die Zeichnung der Stundenlinien etc., in Berlin (5716).

460. Muh. b. Muh. Neǵm ed-dîn Abû'l-Fatḥ el-Miṣrî, vielleicht der Sohn von Nr. 447, schrieb: *Nihâjet el-rutbe* (die höchste Stufe), über den Gebrauch der Sexagesimaltafeln, ein Kompendium der *raqâ'iq el-ḥaqâ'iq* des Sibṭ el-Mâridînî (s. Art. 445), in Oxford (I. 1042, 3⁰). Astronomische und chronologische Tafeln, in Oxford (944 u. 995). *El-risâle el-ḥisâbîje fî'l-aʿmâl el-afaqîje* (die arithmetische Abhandlung über die Horizont-Operationen), in Mailand (Ambr. 277, a).[b])

461. Aḥmed b. Mûsâ b. ʿAbdelǵaffâr, Šaraf ed-dîn, schrieb: Kommentar zu den *lumaʿ* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), in Berlin (5989) unvollständig, Paris (2472, 1⁰), verfaſst i. J. 920 (1514) zu Mekka. *Silk el-durrain* (die Schnur der beiden Perlen), über die Erklärung der (Bewegungen der) beiden Lichter (d. i. Sonne und Mond), in Kairo (261, 277, 313).

462. Manṣûr b. Ṣadr ed-dîn Muh., Ǵijâṯ ed-dîn el-Ḥoseini el-Šîrâzî, ein Perser, gest. 949 (1542/43).[c]) Er beschäftigte sich hauptsächlich mit Philosophie, aber auch mit den mathematischen Wissenschaften und schrieb: *El-kifâje fî'l-ḥisâb* (das Genügende über die Rechenkunst), in Leiden (1037).

463. Seijid ʿAlî b. el-Ḥosein (auch el-Ḥoseinî) Kâtib-i Rûmî (oder auch Kâtib-i Rûm), bedeutender türkischer Admiral, Astronom und Dichter, gest. 970 (1562/63), schrieb: *Cholâṣat el-hei'a* (Essenz der Astronomie), im Vatican (Cod. pers. 19, 3⁰) türk.,[d]) vollendet in Aleppo i. J. 955 (1548), Konstant. (2591 u. 2615) türk. *Mirât-i kâ'inât* (der Spiegel alles Seienden), über Astronomie, in Konstant. (2674 u. 75) türk. Er verfaſste

---

[a]) d. h. aus Malaga gebürtig oder stammend.

[b]) In diesem Ms. und den beiden Oxforder Mss. 944 u. 945 steht allerdings die Kunje Abû ʿAbdallâh statt Abû'l-Fatḥ, doch halte ich beide für identisch.

[c]) Nach H. Ch. II. 201 u. 365.

[d]) Hier heiſst er: Seijid ʿAlî Ǵelebî el-Rûmî.

auch noch ein bedeutendes Werk über Nautik, betitelt *el-moḥîṭ*, in Wien (1277) türk.; die topographischen Kapitel desselben wurden herausgegeben von Bonelli (in d. Rendic. della cl. di sc. mor. della R. accad. dei Linc. 1894 u. 95) und ins Deutsche übersetzt von M. Bittner, mit einer Einleitung von W. Tomaschek, Wien, 1897.[92]

464. Muh. b. Ibrâhîm b. Jûsuf, Raḍî[a]) ed-dîn Abû ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn el-Ḥanbalî, geb. in Aleppo, daher auch el-Ḥalebî genannt, war ein vielseitiger Gelehrter, besonders in Rechtswissenschaft, Geschichte, Mathematik und Medizin bewandert. Er starb im Ǧumâdâ I. 971 (Ende 1563). (W. G. 528.) Er schrieb: *Taḏkira man nasija* (Erinnerung, Notiz für denjenigen, welcher vergessen hat), über die geometrischen Grundlagen, in Oxford (I. 967, 3⁰). *Machâ'il el-malâḥa* (Anzeichen der Schönheit, Güte), über Probleme der Ausmessungslehre, Kommentar zur *ġonjet el-ḥassâb* (das Genügen oder der Reichtum des Rechners) von Ǧemâl ed-dîn Aḥmed b. Ṯâbit (s. Art. 366), in Paris (2474). *ʿUdded el-ḥâsib* (das Rüstzeug des Rechners), Kommentar zur *nuzhet el-ḥossâb* (Unterhaltung der Rechner) des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423) in Berlin (5981). *Rafʿ el-ḥiǧâb* (das Wegheben des Schleiers) von den Grundlagen der Rechenkunst, nach H. Ch. III. 474.

465. Chalîl b. Aḥmed el-Naqîb, Ġars ed-dîn el-Ḥalebî,[b]) gest. 971 (1563/64) wahrscheinlich in Aleppo, schrieb: *Risâle fi'l-ʿamal bi-rubʿ el-ġaib* (Abhandlung über den Gebrauch des Sinusquadranten), in Berlin (5825), Leiden (1150), Vatican (318, 2⁰), Paris (2544, 1⁰ und 2547, 5⁰). *Risâle fi maʿrifet el-qible* (Abhandlung über die Kenntnis der Qible), in Kairo (250).

466. Aḥmed b. ʿAlî Zunbul el-Maḥallî, bekannt unter dem Namen Ibn Zunbul, der Wahrsager (el-Rammâl) und Astrolog, lebte in Ägypten und nahm an der Eroberung des Landes durch Sultan Selim I. und seinen Nachfolgern teil und wird wahrscheinlich in den Jahren 975—80 (1567—72)[c]) gestorben sein. Er schrieb: *El-qânûn fi'l-dunjâ* (der Kanon über die Welt), ein astron.-geogr.-astrologisches Werk, in Berlin (5889), unvollständig. *Tuḥfet el-mulûk* (das Geschenk der Könige), ein kosmographisches Werk, in Oxford (I. 892); überdies noch verschiedene Werke über Astrologie und Geomantie. (W. G. 523.)

467. Muh. b. Ṣalâḥ el-Lârî el-Anṣârî,[d]) Moṣliḥ ed-dîn, gest.

---

[a]) So Wüstenfeld und Ahlwardt, andere lesen Riḍâ ed-dîn.

[b]) Im Berliner Kat. heifst er: Ġars ed-dîn b. Ibrâhîm b. Aḥmed el-Ḥalebî, im Vatican: Ġars ed-dîn Aḥmed b. Šihâb ed-dîn el-Naqîb.

[c]) Nach dem Berliner Kat. V. p. 287.

[d]) H. Ch. hat im Index el-ʿAbbâdî.

979 (1571/72),[a]) ein eifriger Kommentator philosophischer, traditionistischer und anderer Werke, aus Lâr in Persien gebürtig, schrieb auch einen Kommentar zur *Fatḥije* des ʿAlî b. Muh. el-Qûšǵî (s. Art. 438), in Wien (1423), St. Petersburg (315, 1⁰), an beiden Orten pers.

468. Aḥmed b. Muh. b. Muh. el-Ġazzî, Šihâb ed-dîn, geb. 931 (1524/25), gest. 983 (1575/76),[b]) schrieb: Kommentar zur *nuzhet el nazzâr* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), in Berlin (5982), Oxford (I. 966, 4⁰).

469. ʿAlî b. Aḥmed b. Muh. el-Šarqî el-Ṣafâqisî (d. h. von Sfaks in Tûnis gebürtig oder stammend), verfaſste ein astron.-geographisches Werk mit Tafeln und Karten, die südlichen Mittelmeergegenden umfassend. De Slane (im Pariser Kat. p. 399) nennt es „un beau monument de la cartographie chez les arabes au XVI. siècle"; in Paris (2278), dat. vom J. 958 (1551) und vielleicht in Oxford (I. 935), dat. vom J. 979 (1571/72); ob dieses Werk, das hier nicht näher beschrieben, sondern nur „astron.-geographisches Werk mit Tafeln" genannt ist, mit dem Pariser Ms. identisch sei, können wir nicht entscheiden.

470. Aḥmed b. Aḥmed b. ʿAbdelḥaqq el-Sunbâṭî (od. Sanbâṭî), gest. 990 (1582),[c]) schrieb: Kommentar zu der Abhandlung über den Sinusquadranten von Sibṭ el-Mâridînî (s. Art. 445), in Berlin (5821), Brit. Mus. (407*, 2⁰), Wien (1420, 2⁰), Algier (1462), Kairo (262 u. 301).

471. Muh. b. Maʿrûf b. Aḥmed, Taqî ed-dîn, geb. 932 (1525/26) in Damaskus, gest. 993 (1585) wahrscheinlich in Konstantinopel, schrieb: *Charîdet el-durar we ǵarîdet el-fukar* (die ungebohrten Perlen und die Rolle (Blatt, Register) der Gedanken), ein astronomisches Werk über die notwendigen Kenntnisse zur Bestimmung der Gebetszeiten und Gebetsrichtung, in Berlin (5699); es ist dieses Werk deshalb interessant, weil in demselben, was bisher in keinem andern der Fall war, Tafeln der Sinus und Tangenten nach Dezimalteilung statt nach Sexagesimalteilung auftreten. *Raiḥânet el-rûḥ* (Wohlgeruch des Geistes), über die Sonnenuhren, in Oxford (I. 881, 1⁰ u. 927), im letztern Ms. mit Kommentar von ʿOmar b. Muh. el-Fâriskûrî (s. Art. 478), in Kairo (259). *Kitâb el-ṯimâr el-jâniʿa* (das Buch der reifen Früchte), über das umfassende Instrument (*el-âle el-ǵâmiʿa*), in Oxford (I. 881, 2⁰). *Kitâb el-nisab el-mutašâkale* (das Buch der übereinstimmenden oder zusammenpassenden Verhältnisse), über die Wissenschaft der Algebra, in Oxford (I. 881, 3⁰). *Raǵez*-Gedicht über den Dustûrquadranten, mit Kom. eines Ungenannten, in Berlin (5834), Kairo (262). *Fiʿilm el-binkâmât* (über

[a]) Nach H. Ch. III. 458 etc.
[b]) Nach dem Berliner Kat. V. 338.
[c]) So nach dem Kat. v. Kairo, nach dem Berliner Kat. 995.

die Uhrmacherkunst), in Paris (2478). *Kitâb nûr ḥadîqat el-abṣâr we nûr ḥadîqat el-anẓâr* (das Buch des Lichtes des Gartens der Augen oder Blicke), ein optisches Werk, in Oxford (I. 930). — Es wird ihm auch die Abhandlung *el-durr el-naẓîm* des ʿAbderraḥmân b. Muh. el-Ṣâliḥî (s. Art. 454) zugeschrieben. — H. Ch. führt von ihm noch folgende Abhandlungen an: II. 288, *dustûr el-tarǵîḥ fî qawâʿid el-tasṭîḥ* (das Muster der Vorzüglichkeit, über die Grundlagen der (Kugel-)Projektion); III. 401, *risâle fî'l-rubʿ el-šakkâzîje* (Abhandlung über den Šakkâzischen Quadranten); III. 587, *sidret muntahâ el-afkâr* (der Lotosbaum des siebenten Himmels der Gedanken, d. h. die höchste Stufe der Gedanken), über das Reich der rotierenden Sphäre; III. 376, Kommentar zur *risâlet el-teǵnîs fî'l-ḥisâb* (Abhandlung der Klassifizierung, über die Rechenkunst) von Seǵâwendî; II. 59, *biǵjet el-ṭullâb* (der Wunsch der Studierenden), über die Rechenkunst, ein arithm.-algebraisches Werk, aus 3 Teilen bestehend: 1. über das indische Rechnen, 2. über das astronomische Rechnen, 3. über die Algebra. Er soll nach H. Ch. I. 390 auch eine verbesserte Ausgabe (Rezension) der Sphärik des Theodosius verfaſst haben.

472. ʿAbdallâh b. Muh. el-Šanšûrî,[a]) Behâ ed-dîn el-Faraḍî, gest. 999 (1590/91) in Kairo, schrieb: Kommentar zur *muršidet el-ṭâlib* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), betitelt *biǵjet el râǵib* (der Wunsch des Begehrenden), in Gotha (1478), Kairo (178, Übers. 5). *Qorret el-ʿain fî misâḥat ẓarf el-qollatain* (der Augentrost, über die Ausmessung der beiden (zu den religiösen Waschungen notwendigen) Gefäſse), in Berlin (5951 und 52), Gotha (1078, 1⁰ und 1079). Kommentar zur *tuḥfet el-aḥbâb* des Sibṭ el-Mâridînî (s. Art. 445), in Gotha (1486).[b]) *Muršide* (richtige Leitung) zur Kunst des *Ġobâr*; ein Auszug daraus verfaſst von seinem Sohne, dessen Name nicht angegeben ist, befindet sich in Berlin (5996).

473. ʿAbdelmunʿim el-ʿÂmilî schrieb i. J. 970 (1562/63) eine Abhandlung über die astronomischen Instrumente, welche in Alexandria, Merâġa und Samarqand gebraucht worden sind, im Brit. Mus. P. (Add. 7702).

474. ʿAbdellaṭîf b. Ibrâhîm b. el-Qâsim el-Dimišqî, bekannt unter dem Namen Ibn el-Kaijâl (Sohn des Kornwägers), schrieb ums Jahr 970 Tafeln (*ǵedâwil*) für die Zeitrechnung und die Kalenderkenntnis für die Jahre über 1000 d. H. hinaus, gegründet auf diejenigen von Ibn el-Šâṭir (s. Art. 416) und Šems ed-dîn el-Tîzînî (s. Art. 450), in Berlin (5758—60), Brit. Mus. (1162, 7⁰).

---

[a]) Ahlwardt liest „Šinšaurî".

[b]) Hier und auch in Ms. 1478 heiſst der Verfasser Muh. b. ʿAbdallâh statt ʿAbdallâh b. Muh.

475. Muh. b. ʿOmar b. Ṣadîq el-Bekrî el-Fawânisî[a]) lebte in Ägypten und starb ums Jahr 1000 (1591/92). Er schrieb: *Netîǧet el-afkâr* (das Resultat der Gedanken), über die astronomischen Verrichtungen bei Tag und bei Nacht (d. h. über die Zeitbestimmung für die Gebetsstunden etc.), in Oxford (I. 1032), Paris (2545).

476. ʿAbdelqâdir b. ʿAlî el-Sachâwî, Moḥjî ed-dîn Abû'l-Ǧûd,[b]) wahrscheinlich etwas nach 1000 gestorben, schrieb: *Mochtaṣar fî ʿilm el-ḥisâb* (Auszug aus der Rechenkunst),[c]) in Berlin (6000 u. 6001), Paris (2463, 2°) mit Kom. von Ḥosein b. Muh. el-Maḥallî (gest. 1756), Gotha (1487 u. 88), Kairo (182, 187, 188, Übers. 8 u. 12). Diese Abhandlung wurde mit dem Kom. des Maḥallî im Druck herausgegeben in Kairo 1310 (1892/93).

477. Ibrâhîm b. Muh. b. Muh. el-Maġrebî el-Andalusî, gest. zwischen 989 u. 1010 (1581 u. 1601),[d]) schrieb: *Risâle fî ʿilm el-falak* (Abhandlung über die Wissenschaft der Sphäre), über die Kenntnis der Zeiten, vollendet i. J. 988 (1580), in Leiden (1147), Berlin (5717). *Ġarîb el-nâqilîn* (das Seltsame der Erzähler), über die Zustände der Lichter, worin über Finsternisse und über Folge von Tag und Nacht gehandelt wird, vollendet i. J. 989 (1581), in Leiden (1148).

478. ʿOmar b. Muh. el-Fâriskûrî el-Miṣrî Sirâǧ ed-dîn lebte in Ägypten und starb nach H. Ch. VI. 290 i. J. 1018 (1609/10). Er schrieb: Kommentar zur *raiḥânet el-rûḥ* des Taqî ed-dîn b. Maʿrûf (s. Art. 471), betitelt *asnâ el-futûḥ*[e]) (der herrlichste der Siege), vollendet i. J. 980 (1572/73), in Oxford (I. 927). H. Ch. (l. c.) hat noch: *Nâšiʾet el-leil* (die erste Stunde der Nacht), giebt aber nicht an, worüber die Schrift handle.

479. ʿAbdelqâdir b. Muh. el-Faijûmî el-Aufî,[f]) lebte in Kairo als Lehrer der Rechtswissenschaft, beschäftigte sich daneben aber auch mit Mathematik, Astronomie und Musik. Er starb i. J. 1022 (1613/14). (W. G. 574.) Er schrieb: Kommentar zur *nuzhet el-ḥossâb* des Ibn el-Hâʾim (s. Art. 423), in Gotha (1482), unvollständig. *Ǧedâwil maḥlûl el-maṭâliʿ el-falakîje* (Tafeln der Aufgänge der Sphäre), beginnend mit dem Anfang des Zeichens des Steinbocks, nach den Tafeln Ulûġ Begs von Minute zu Minute berechnet, in Kairo (239). *Ǧedâwil ichtilâf manẓar el-qamar* (Ta-

---

a) H. Ch. VI. 298 hat: Qawânisî.

b) Diese beiden Beinamen befinden sich nur im Berliner Ms. 6000.

c) Diese Schrift heifst auch: *el-risâle* (oder auch *el-moqaddame*) *el-sachâwîje* (die Sachâwische Abhandlung oder Einleitung).

d) Nach dem Leidener Ms. 1147.

e) H. Ch. hat *fatḥ el-futûḥ* (der Sieg der Siege).

f) Kat. v. Kairo hat Manûfî oder Munawwafî.

feln der Abweichung des Mondes) in Länge und Breite, nach den Tafeln Ulûġ Begs berechnet, in Kairo (235). *Raf' el-chilâf* (die Wegschaffung des Widerspruches), über das Verfahren mit den sehr geringen Abweichungen, in Kairo (258 u. 292), beendigt 980. *Naẓm el-ġewâhir we'l-jawâqît* (die Perlen- und Edelsteinschnur), über die Richtigstellung (od. Aufzeichnung) der Verrichtungen der Zeitbestimmung, in Kairo (326), beendigt 981 (1573/74).

480. Muh. b. el-Ḥosein, Behâ ed-dîn el-'Âmilî,[a]) wahrscheinlich ein Perser, geb. zu Ba'albek im D̲û'l-Ḥiġġe 953 (1547), gest. zu Ispahân im Šauwâl 1031 (1622), ist der letzte arabische Mathematiker und Astronom, den wir in unsere Arbeit aufzunehmen gedenken; seine Werke zeigen keinen Fortschritt mehr, sondern im Gegenteil einen Rückschritt, von Selbständigkeit oder Originalität ist bei ihm und seinen Nachfolgern keine Spur mehr zu finden, was freilich noch von einer grofsen Zahl der von uns der Aufnahme würdig Erachteten gelten wird. — Er schrieb: 1. *Cholâṣat el-ḥisâb* (Essenz der Rechenkunst), in Berlin (5998), München (851) mit Kommentar, und ebenda unter den pers. Mss. (346, 6⁰), aber doch in arabischer Sprache, Brit. Mus. (1345, 2⁰), Ind. Off. (758), Kairo (180, Übers. 7), Konstant. (2717 u. 26); in persischer Sprache befindet sich die Abhandlung im Brit. Mus. P. (Add. 23569, 5⁰). Ausgaben derselben: Arabisch, mit persischer Übersetzung und Kommentar, Calcutta 1812, ebenso in Konstant. 1268 (1851/52); arabisch und deutsch von Nesselmann, Berlin 1843; in französ. Übers. von A. Marre, Rom 1864. In Kairo existieren mehrere lithographierte Ausgaben dieses Buches. Das Werk wurde auch vielfach kommentiert, auf die Kommentare trete ich nicht weiter ein. 2. *Tašrîḥ el-aflâk* (Erklärung der Sphären), in Berlin (5703), in diesem Ms. steht eine Widmung an Abû'l-Moẓaffar Šâh Ismâ'îl el Ḥoseinî el-Ṣafawî; Brit. Mus. (1345, 1⁰) und ebenda unter den pers. Mss. (Add. 23569, 2⁰), aber in arabischer Sprache, im Ind. Off. (1043, 6⁰), in Cambridge (250) pers. 3. *El-ṣafîḥa*, über den Gebrauch des Astrolabiums, in Berlin (5801), Brit. Mus. (1346, 1⁰), St. Petersburg (130, 3⁰).

Damit schliefse ich die Reihe derjenigen Gelehrten, deren Lebenszeit nach den Quellen mehr oder weniger genau bestimmt werden konnte; es folgen nun noch eine Reihe von Autoren auf dem Gebiete der Mathematik und Astronomie, für deren Lebenszeit ich nur eine obere oder nur eine untere, oder beide dieser Grenzen anzugeben vermag.

[a]) O. Loth (Z. D. M. G. 29. Bd. p. 677) leitet dieses Wort von ġebel 'âmil, dem südlichen Ausläufer des Libanon her, wo der Sitz einer schi'itischen Bevölkerung gewesen sein soll; eine andere Lesart ist Âmulî, d. h. aus Âmul, einer Stadt in Ṭabaristân, die Abstammung ist also unsicher.

481. ʿAlî b. Ismâʿîl, Abû'l-Ḥasan ʿAlam ed-dîn el-Ǧauharî,[b]) bekannt unter dem Namen el-Rakkâb Sâlâr,[a]) aus Bagdad, ein bedeutender Gelehrter, ausgezeichnet und scharfsinnig in den mathematischen Wissenschaften, sowie auch in der Verfertigung und dem Gebrauche astronomischer Instrumente. Seine vorzüglichen Werke waren sehr verbreitet. (C. I. 412 n. Ibn el-Q.) Lebte vor 646 (1248), dem Todesjahr Ibn el-Qifṭîs.[b])

482. ʿAlî b. Faḍlallâh, Ḥosâm ed-dîn el-Sâlâr,[a]) wird nur von Naṣîr ed-dîn in einem *šakl el-qaṭṭâʿ* (p. 20 u. 27, Übers. 23 u. 30, vergl. Art. 368) erwähnt als Verfasser einer ausgezeichneten Schrift über denselben Gegenstand, die er für die seinige zur Grundlage genommen hat. Die Übereinstimmung des Vornamens (ʿAlî) und Beinamens (el-Sâlâr) und der Umstand, dafs ʿAlam ed-dîn und Ḥosâm ed-dîn leicht verwechselt werden können, machen es nicht unwahrscheinlich, dafs dieser Autor mit dem vorigen identisch ist.

483. Šâkir b. Halîl, Abû'l-Ḥasan, schrieb: *Kâmil el-ṣinâʿa el-nuǧûmîje* (das Vollkommene oder Ganze der astrologischen Kunst), der dritte Teil desselben befindet sich in München (872). Lebte vor 557 (1162), aus welchem Jahre die Handschrift datiert ist.

484. Aḥmed b. Zarîr (?) Abû Naṣr schrieb vor 610 (1213/14) eine Abhandlung über die verschiedenen Arten von Astrolabien und ihren Gebrauch, in Leiden (1075).

485. Muh. b. Muh. b. Ibrâhîm b. el-Chiḍr, Muhaḏḏab ed-dîn Abû Naṣr, bekannt unter dem Namen Ibn el-Burhân, aus Ṭabaristân gebürtig, in Aleppo wohnhaft, wird von Ibn Ch. (II. 255, Übers. IV. 138) als Rechner und Astrolog bezeichnet und als Verfasser einiger Verse zitiert. Er lebte vor 629 (1231/32).

486. ʿOmar b. Ḥossân[c]) b. ʿIjâḍ, Ǧemâl ed-dîn Abû Ḥafṣ, genannt Ibn el-Mîlî, schrieb: *Munqiḏ el-hâlik we ʿomdet el-sâlik* (der Retter des Untergehenden und die Stütze des Wanderers), ein Kompendium der Arithmetik und Geometrie, in Leiden (1028). Da er Abû Bekr el-Karchî (s. Art. 193) zitiert und der Codex, in welchem obige Abhandlung sich

---

[a]) el-rakkâb ist arabisch und heifst „der Reiter", sâlâr ist persich und bedeutet „der Kommandant, General", also vielleicht: der Reiterführer, Reitergeneral, Kavallerie-Kommandant; C. übersetzt: nobilis eques.

[b]) Der Beiname el-Ǧauharî könnte dazu verleiten, ihn für einen Sohn des Grammatikers und Lexikologen Abû Naṣr Ismâʿîl b. Ḥammâd el-Ǧauharî (gest. 393, 1002) zu halten, was nicht unmöglich wäre.

[c]) Der Kat. von Leiden hat „Hassân".

befindet, i. J. 653 (1255) geschrieben worden ist, so mufs er zwischen 420 (1029) und 653 gelebt haben.

487. Ahmed b. Jûsuf b. el-Kemâd,[a]) Abû'l-ʿAbbâs (?), aus Spanien[b]) oder Nordafrika, bekannt unter dem Namen Ibn el-Kemâd, soll der Verfasser von astronomischen Tafeln sein, die er nach den Beobachtungen des Zarqâlî zusammengestellt hatte (s. Art. 255) und zwar werden ihm drei verschiedene Tafeln zugeschrieben: 1. *el-kaur ʿalâ'l-daur* (die Kreisbewegung); 2. *el-amed ʿalâ'l-abed* (das endlose Ziel); 3. *el-moqtabas* (das (aus den beiden andern) Entlehnte). Die zweite Tafel wird von el-Hasan b. ʿAlî el-Marrâkošî (p. 135 der Übers. von Sédillot) zitiert und als sehr korrekt, besonders in Bezug auf die Sonnenörter, gerühmt. Auch Ibn Chaldûn nennt in seinen Prolegomena (Not. et extr. des mss. T. 21, p. 148, und arab. Text von Beirût, 1886, p. 427) den Ibn el-Kemâd als Verfasser von astronomischen Tafeln, giebt ihm aber keinen nähern Namen. H. Ch. (III. 556 u. 568—70) hat über diesen Autor eine grofse Verwirrung angerichtet, bald nennt er ihn Ibn Hammâd, bald Ibn el-Kemmâd, hier Ahmed b. ʿAlî b. Ishâq, dort Ahmed b. Jûsuf, hier mit dem Beinamen Abû'l-ʿAbbas, dort mit Abû Ǧaʿfar. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs H. Ch. zwei Persönlichkeiten mit einander verwechselt oder zu einer zusammenschmelzt, nämlich den in Art. 356 behandelten Ahmed b. ʿAlî b. Ishâq el-Temîmî und unsern Ahmed b. Jûsuf b. el-Kemâd. — Aufser diesen Tafeln, die verloren zu sein scheinen, schrieb er noch: *miftah el-asrâr* (Schlüssel der Geheimnisse), ein astrologisches Werk, im Escurial (934).[c]) Er lebte nach Zarqâlî (gest. ca. 480) und vor el-Hasan b. ʿAlî el-Marrâkošî (gest. ca. 660).

488. El-Hasan b. ʿObeidallâh, Abû Zeid, el-Fârisî, schrieb: *el-masâ'il el-hisâbije* (die arithmetischen Probleme), über die Grundoperationen, in Leiden (1022), dieses Ms. enthält nur die Addition und Subtraktion. Er lebte vor 615 (1218/19), dem Datum der Abschrift des Leidener Ms.

489. Muh. b. Ismâ'îl el-Tenûchî, der Astrolog, machte zur Vervollkommnung seiner Kenntnisse in dieser Disziplin grofse Reisen, unter anderm auch nach Indien, woher er seltsame Theorien mitgebracht haben soll, so z. B. die Lehre von der Trepidation der Fixsterne (wörtlich die

[a]) El-Hasan b. ʿAlî el-Marrâqošî hat in seinem Werke nach der Übers. Sédillots (p. 135) nur el-Kemâd, nicht b. el-Kemâd; neben Kemâd kommt auch Kemmâd, Hammâd und Ǧemmâd vor.

[b]) Ahlwardt (Berliner Kat. V. p. 219) nennt ihn el-Išbîlî (d. h. der Sevillaner) und giebt sein Todesjahr auf 591 (1195) an, nach welcher Quelle weifs ich nicht.

[c]) C. verwechselt ihn hier (I. 372) oder hält ihn identisch mit Ahmed b. Jûsuf el-Misrî (s. Art. 79).

Bewegung des Herankommens und des Zurückweichens). Lebte wahrscheinlich nach 400 (1009/10), da er im Fihr. nicht genannt ist, und vor 646 (1248/49), dem Todesjahre Ibn el-Q.'s. (C. I. 429—30 n. Ibn el-Q.)

490. Ǧemâl ed-dîn Abû'l-Qâsim b. Maḥfûẓ, der Astrolog aus Bagdad, verfaſste astronomische Tafeln (*zîǧ*), in Paris (2486); ferner *risâle fî 'amal el-asṭorlâb* (Abhandlung über den Gebrauch des Astrolabiums), im Brit. Mus. (1002, 24°), unvollständig. — Nach H. Ch. (III. 365 u. 559) soll er zur Zeit des Chalifen el-Moqtadir billâh (gest. 320, 932) gelebt haben, was aber etwas zweifelhaft ist, da er weder im Fihr. noch bei Ibn el-Q. erwähnt wird; jedenfalls aber hat er vor 684 (1285/86) gelebt, in welchem Jahre das Pariser Ms. seiner Tafeln geschrieben worden ist.

491. El-Ḥasan b. el-Ḥâriṯ el-Ḥabûbî (?)[a]) lebte vor 639 (1241/42), aus welchem Jahre die Abschrift seiner Abhandlung datiert ist, betitelt *kitâb el-istiqṣâ'* (das Buch der Ergründung), ein Kompendium über die Anwendung der Rechenkunst, Algebra und Regula falsi auf die Probleme der Testamentsrechnung, in Oxford (I. 986, 1°).

492. 'Alî b. Soleimân el-Hâšimî (vielleicht identisch mit Nr. 191) schrieb: *Kitâb 'ilal el-zîǧât* (das Buch der Fehler der Tafeln), in Oxford (I. 879, 4°). Er lebte vor 687 (1288), in welchem Jahre das Oxforder Ms. geschrieben worden ist.

493. Muh. b. 'Omar, Abû 'Abdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn Bedr, aus Sevilla, schrieb ein Kompendium (*ichtiṣâr*) der Algebra, im Escurial (931, 1°). Einen Kommentar dazu in Versen verfaſste i. J. 711 (1311/12) Muh. b. el-Qâsim el-Ġarnâṭî (d. h. aus Granada), im Escurial (931, 2°).

494. 'Abdallâh b. Muh. el-Chaddâm, 'Imâd ed-dîn el-Baġdâdî, schrieb vor 720 (1320), da sein Kommentator Muh. b. el-Ḥasan el-Fârisî (s. Art. 389) um diese Zeit gestorben ist: *el-fawâ'id el-behâ'îje fi'l-qawâ'id el-ḥisâbîje* (die Behâ'ischen[b]) Nützlichkeiten über die Grundlagen der Rechenkunst), die Arithmetik, Algebra, Flächen- und Körperberechnung und Erbteilung umfassend, in Berlin (5976),[c]) Ind. Off. (771, 2°).

495. Muh. b. 'Abdallâh b. 'Aijâš, Abû Zakarîjâ, bekannt unter dem Namen el-Ḥaṣṣâr (der Schilfmattenflechter), schrieb eine Abhandlung über Arithmetik, die sich ohne Titel in Gotha (1489) befindet und wahrscheinlich identisch ist mit der im Vatican sub Nr. 396 in hebräischer

---

[a]) H. Ch. I. 274 hat Ǧenûbî, Flügel bemerkt aber, daſs in verschiedenen Mss. auch die Lesart Ḥabûbî oder Ḥobûbî vorkomme.

[b]) So genannt, weil das Buch einem Behâ' ed-dîn Muh. b. Muh. gewidmet ist.

[c]) Die Notiz in diesem Ms., daſs die Schrift i. J. 736 verfaſst worden sei, ist jedenfalls unrichtig.

Übersetzung existierenden Abhandlung von Abû Bekr Muh. b. ʿAbdallâh el-Ḥaṣṣâr.[a]) Er lebte vor Ibn el-Bennâ (gest. gegen 740, 1339/40), da dessen *Talchiṣ* ein Auszug aus der Abhandlung unsers Autors sein soll (vergl. Art. 399 u. 202).[93]

496. Muh. b. Mesʿûd b. Muh. el-Zekî el-Ġaznawî (d. h. von Ġazna stammend), Ẓahîr ed-dîn Abû'l-Maḥâmid, schrieb: *Kifâjet el-taʿlîm* (das Genügende der Belehrung), über Astronomie und Astrologie, in Berlin (5891), Kairo (270). Das Werk war ursprünglich persisch verfaſst unter dem Titel: *Ǧihân-dâniš* (Welterkenntnis), in dieser Sprache ist es noch vorhanden in Berlin P. (328), Konstant. (2601 und 2699); Auszüge daraus in Leiden (1196, 9° u. 16°). — Er lebte vor 762 (1360/61), da er von dem Grammatiker Ibn Hišâm angeführt wird, der im genannten Jahre gestorben ist (vergl. H. Ch. II. 39).

497. El-Moẓaffar b. ʿAlî b. el-Moẓaffar, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn Abî Ṭâhir, schrieb: *el-mochtaṣar fî'l-qarânât* (Abriſs über die Konjunktionen), ein astrologisches Werk, im Brit. Mus. (426, 9°). Er lebte vor 639 (1241/42), in welchem Jahre das genannte Ms. geschrieben worden ist.

498. Abû'l-Meǧd b. ʿAṭija b. Abî'l-Meǧd el-Kâtib, lebte aus dem gleichen Grunde ebenfalls vor 639 und schrieb: Über die indische Multiplikation und Division ohne Auswischen (der Ziffern) und Umstellung (Versetzung), nach seiner eigenen Erfindung, im Brit. Mus. (426, 21°).

499. Muh. b. ʿAlî b. Jaḥjâ b. el-Naṭṭâḥ schrieb eine Abhandlung über den Gebrauch des Astrolabiums, im Brit. Mus. (405, 1°). Er lebte wahrscheinlich vor 800 (1398), da der Verfasser des Katalogs zu dem Codex bemerkt: exaratus saec. ut videtur XIV.

500. Muh. b. Aḥmed b. Maḥmûd, el-Ṣâliḥî el-Muršidî, schrieb: *el-lafẓ el-moṣarraḥ* (das klare Wort), über den Gebrauch des geflügelten (*muǧannaḥ*) Quadranten, in Kairo (271, Übers. 168), Abschrift vom J. 794 (1392).

501. Muh. b. Muh. b. ʿOmar, Abû ʿAbdallâh Zein ed-dîn el-Fenûchî (vielleicht el-Tenûchî), aus Nord-Afrika, schrieb: Liber de algebra cubicarum aequationum, sive de problematum solidorum resolutione, in 4 section. distrib., im Vatican (317, 2°). Liber detectionis velaminis de subducenda et invenienda rectitudine ex lineis, ibid. (317, 3°).[b]) Er lebte vor 800 (1397/98), da der Codex im 14. Jahrhundert geschrieben worden sein soll.

[a]) Vergl. M. Steinschneider in Abhandlgn. zur Gesch. d. Mathematik 3. Heft, Leipzig 1880, p. 109 und meine Notiz in der Biblioth. math. 13 (1899), p. 87.

[b]) Die Titel sind im Kat. des Vaticans nur in latein. Übers. gegeben.

501[a]. Sa'îd b. Chafîf, Abû'l-Fath el-Samarqandî,[a]) schrieb: Tafeln der Tangente, in Kairo (280, Übers. 169). Abhandlung über die Konstruktion und Anwendung der Sonnenuhren, in Paris (2506, 1⁰), dieses Ms. stammt aus dem 14. Jahrhundert.

502. Taqî ed-dîn b. 'Izz ed-dîn el-Ḥanbalî schrieb: *Ḥâwî el-lubâb min 'ilm el-ḥisâb* (das das Mark (Beste) der Rechenkunst enthaltende Buch), in Paris (2469). Carra de Vaux veröffentlichte in der Biblioth. math. 13 (1899) p. 35 eine Stelle aus dieser Schrift, die über die Rechnungsproben handelt, in franz. Übersetzung. Er lebte vor 812 (1409/10), in welchem Jahre das Pariser Ms. geschrieben wurde.

503. Muh. el-Išbîlî (d. h. der Sevillaner) Abû Zakarîjâ, verfafste einen Kommentar zum *Talchîṣ* des Ibn el-Bennâ (s. Art. 399), im Escurial (929), unvollständig. Er lebte vor 835 (1431/32), da das Ms. dieses Datum trägt und wahrscheinlich nach 740 (1339/40).

504. Jûsuf b. Aḥmed el-Nîsâbûrî, Abû'l-Ḥaǧǧâǧ, schrieb: *bulûǧ el-ṭilâb* (das Erreichen des Verlangens) nach den Wahrheiten der Rechenkunst, in Leiden (1033), Abschrift v. J. 843 (1439/40).

505. Muh. b. Fachr ed-dîn b. Qais el-'Orḍî, schrieb einen Kom. zur *nuzhe* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), betitelt *el-nubhe* (die Aufmerksamkeit), in Oxford (I. 966, 5⁰). Er lebte wahrscheinlich nach 815 (1412/13), dem Todesjahre Ibn el-Hâ'ims.

506. Muh. b. Muh. b. Abî Bekr el-Azharî, Ibn el-Bilbîsî,[b]) schrieb: *Ḥâšije* (Anhang) zur *ma'ûne* des Ibn el-Hâ'im, in Kairo (180, Übers. 7). Kommentar zur *wasîle* des Ibn el-Hâ'im, in Leipzig (Ref. 270). Von seiner Lebenszeit gilt was von der des vorhergehenden Autors.

507. Abû Manṣûr el-Ṭûsî schrieb: *Risâle fi'ilm el-ḥisâb* (Abhandlung über die Rechenkunst), in Florenz (Pal. 317); ebenso eine solche über die Algebra, ibid. Nach dem Kat. von Florenz lebte er im 9. Jahrh. d. H. (15. n. Chr.).

508. Aḥmed b. el-Sirâǧ (oder vielleicht Sarrâǧ),[c]) schrieb: *el-durr el-ġarîb* (die seltenen Perlen), über den Gebrauch des Sinusquadranten, dem Sultan Bâjezîd II. (?) (886—918, 1481—1512) gewidmet, in Leiden (1142). Abhandlung über den geflügelten (*muǧannaḥ*) Quadranten oder über die

---

[a]) H. Ch. hat IV. 113 einen Sa'îd el-Samarqandî als Verfasser eines Werkes, betitelt: *ṣaidîje*, über die Jagd, türk.

[b]) H. Ch. V. 640 hat „Belîsî"; im Katalog der Refâ'îje nur „el-Bilbîsî".

[c]) So im Kat. von Berlin. M. Cantor, Vorlesgn. I. 663 (1. Aufl.), 728 (2. Aufl.) hat als Kommentator des Fachrî von el-Karchî einen Aḥmed b. Abî Bekr b. 'Alî b. el-Sirâǧ el-Qalânisî, ob dieser mit dem unsrigen identisch sei, können wir nicht entscheiden, doch ist es wahrscheinlich.

Kenntnis des Sinus aus dem Bogen und des Bogens aus dem Sinus, in Kairo (274, Übers. 169). Über den Muqanṭarâtquadranten, in Berlin (5859). *Masâ'il handasîje* (geometrische Aufgaben), in Kairo (205, Übers. 23). — Seine Lebenszeit ist unsicher: nach der erstgenannten Abhandlung würde er um 900 (1495) gelebt haben, wenn nicht etwa die Widmung Bâjezîd I. gelten sollte, im Berliner Kat. (V. 264) steht „um 726 (1326) am Leben", und im Kat. von Kairo (p. 274) steht „beendigt 803 (1400/01)"; jedenfalls lebte er vor Muh. b. Abî'l-Fatḥ el-Ṣûfî (s. Art. 447), gest. ca. 900, der seine Abhandlung über den geflügelten Quadranten zu einer eigenen mit demselben Titel benutzt hat (vergl. Kat. von Berlin, V. p. 256).

509. Muh. b. Abî'l-Qâsim el-Andalusî, Abû 'Amr (oder auch Abû 'Abdallâh),[a]) schrieb ein Buch, betitelt: *bajân el-ṣowar* (Erklärung der Figuren) des Jahres, der Monate, der Mondstationen etc., ein astron.-astrologisches Werk, in Berlin (5714). H. Ch. II. 78 zitiert dieses Werk ebenfalls, daneben aber noch II. 79: *bajân el-qadr* (Erklärung des Einflusses), ungefähr mit demselben Inhalt wie das genannte, wahrscheinlich sind beide identisch. Er lebte vor 915 (1509/10), in welchem Jahre das Berliner Ms. geschrieben wurde.

510. Jûsuf b. Muh. b. Manṣûr, Abû Muh., el-Maḥallî el-Mesdî, schrieb: Kommentar zur *fatḥîje* des Sibṭ el-Mâridînî (s. Art. 445), in Kairo (263). Über die Konstruktion des abgeschnittenen (*maqṭû'*) Quadranten, in Gotha (1427). Lebte nach 900 (1494/95).

511. Muh. b. Abî'l-Chair el-Ḥosnî (oder el-Ḥasanî),[b]) lebte nach dem Kat. von Kairo im 10. Jahrh. d. H. (16. n. Chr.) und schrieb: Kommentar zum *kašf el-qinâ'* des Muh. b. Muh. b. el-'Aṭṭâr (s. Art. 431), betitelt *el-raij we'l-išbâ'* (das Löschen des Durstes und die Sättigung), in Kairo (260 und 310) und vielleicht auch in Berlin (5763), aber unvollständig. *Nuzhet el-châṭir* (die Unterhaltung des Geistes oder Gedankens), über die Festsetzung der Linien (wörtl. Grenzen, Bereiche) auf dem Instrument, genannt *zâd el-musâfir* (Proviant des Reisenden), in Kairo (288). *El-manhal el-sâkib* (die reichlich sich ergiefsende Tränke), über die Aufzeichnung der Sterne, in Kairo (319). *El-nuǵûm el-šâriqât* (die aufgehenden Gestirne), über die Kunstfertigkeiten, die in der Astronomie (zur Zeitbestimmung) notwendig sind, in Gotha (1413) und Kairo (325).

512. 'Abderraḥmân b. Muh. (auch 'Abdallâh) b. Aḥmed el-Ṭarâbulusî (d. h. von Tripolis) el-Tâǵûrî,[c]) schrieb: *Risâle fi'l-fuṣûl el-*

[a]) Vielleicht identisch mit dem in Art. 493 genannten Muh. b. el-Qâsim el-Garnâṭî.

[b]) Im Katalog von Kairo kommt an einer Stelle auch „el-Ḥoseinî" vor.

[c]) Im Berliner Ms. 5712 steht el-Nâḥûrî.

arba'a (Abhandlung über die vier Abschnitte), d. h. die vier Jahreszeiten, die Teile der Nacht, die Gebetsstunden etc., in Berlin (5712), Paris (4580, 5°), Vatican (318, 1°), Kairo (289 u. 318) und wahrscheinlich auch in Oxford (I. 971, 11°). Kommentar zu der Abhandlung des Sibṭ el-Mâridînî über den Sinusquadranten, in Berlin (5820), Brit. Mus. (408, 3°), Escurial (926, 1°), Algier (613, 9°). Abhandlung über den Muqanṭarâtquadranten, in Kairo (287 u. 288) und wahrscheinlich auch in Leipzig (Ref. 329). Über seine Lebenszeit bestehen verschiedene Angaben: Ahlwardt (Berl. Kat. V. p. 245) giebt sein Todesjahr auf ca. 960 an, H. Ch. VI. 78 giebt als Zeit der Abfassung seiner Abhandlung über die Jahreszeiten das J. 999 an; jedenfalls lebte er vor 981 (1573/74), in welchem Jahre das Ms. des Vaticans geschrieben wurde.

513. El-Zobeir b. Ǧa'far b. el-Zobeir, Abû Muh., schrieb: *Taḏkira ḏawî el-albâb* (Notiz der (für die) Besitzer von Geist oder von Herzen), über die erschöpfende Darstellung des Gebrauches des Astrolabiums, im Brit. Mus. (407, 1°), Algier (1466). Lebte vor 1008 (1600), aus welchem Jahre die Abschrift des Ms. des Brit. Mus. datiert ist.

514. Maḥmûd (auch Muh.) b. Aḥmed el-Aufî, schrieb: *Fî keifîjet istichrâǧ el-taqwîm* (über die Art und Weise der Herstellung des Kalenders), in Berlin (5778), Gotha (1430), Konstant. (2690). Lebte vor 1045 (1635/36), dem Jahre der Abschrift des Gothaer Ms.

515. 'Alî b. 'Alî el-Ḥoseinî, Ġijâṯ ed-dîn el-Iṣfahânî, ein Perser, schrieb ein pers. Buch, astronomisch-astrologisch-physikalischen Inhaltes, betitelt: *dâniš-nâme-i ǧihân* (des Erkenntnisbuch der Welt), in Berlin P. (353), Brit. Mus. P. (Add. 16829) und ibid. Kat. d. arab. Mss. (982, 1°), Cambridge (187). H. Ch. V. 609 schreibt einem 'Alî el-Ḥoseinî ein pers. Werk zu, betitelt: *Ma'âriǧ el-wuṣûl fi'l-hei'a* (die Stufen zum Erreichen, über die Astronomie); vielleicht ist diese Schrift von unserm Autor und enthalten im Ms. von Oxford (I. Pers. 86, 4°), das den Titel trägt: Libellus de orbium coelestium. Er lebte nach 600 (1204), da er den im J. 606 gestorbenen Fachr ed-dîn el-Râzî (s. Art. 328) zitiert und sehr wahrscheinlich vor 1000 (1591/92).[a])

Zum Schlusse führe ich noch einige Autoren an, von denen ich Schriften in den benutzten Katalogen gefunden habe, für deren Lebenszeit ich aber

---

[a]) Nachträglich finde ich bei Pertsch (Verz. d. pers. Mss. d. kgl. Bibl. zu Berlin, p. 373) die Angabe, 'Alî el-Hoseinî habe zur Zeit des Sultans Maḥmûd Gûrkân gelebt; es ist dies wahrscheinlich Maḥmûdchân, ein Nachkomme Ǧengizchâns, Titular-Chân der Čagatâi, der um 800 (1397) über Transoxanien geherrscht hat.

gar keine Angaben zu machen vermag, bei denen aber auch keine Gründe mich zwingen, dieselben in die Zeit nach 1600 n. Chr. zu versetzen.

516. Aḥmed b. el-Ḥasan, Abû Jûsuf, schrieb ein Buch über die Algebra, in Kairo (213, Übers. 46).

517. Muh. b. Muh. el-Baġdâdî schrieb: Tafeln des Sinus von Minute zu Minute, in Kairo (280, Übers. 169). Ist dies vielleicht der Bearbeiter des Euklidischen Buches „über die Teilung der Flächen"?[a]) Nach welcher Quelle Steinschneider (Z. D. M. G. 50. Bd. p. 172) diesen „Muh. Bagdadinus" ins 10. Jahrh. n. Chr. versetzt, weiſs ich nicht.

518. ʿAbdallâh b. Jûsuf b. ʿAbdallâh el-Ḥalebî, schrieb: *Tuḥfet el-achjâr* (das Geschenk der Guten), über die Rechenkunst (*ʿilm el-gobâr*), in Gotha (1492, 1⁰).

519. Muh. b. Muh. el-Lâḏiqî, Šems ed-dîn, schrieb: *Netîǵet el-afkâr* (das Resultat der Gedanken), über die astronomischen Verrichtungen bei Tag und bei Nacht, bestehend aus Tafeln mit Erläuterungen, in Berlin (5765 u. 66), Gotha (1399). *Biǵjet el-nafs* (der Wunsch der Seele), Tafeln über die Bewegung der Sonne, in Berlin (5764), Paris (2553), Kairo (230). Tafeln über die Kenntnis der koptischen und arabischen Jahre, über die Kalendereinrichtung nach dem Laufe der Sonne etc., in Kairo (239).

520. Muh. b. Aḥmed, ʿAbû ʿAbdallâh el-Ḥâzimî el-Saʿîdî, schrieb ein Kompendium des Almagestes, in Oxford (I. 920, 1⁰).

521. ʿOmar b. Muh. b. Ibrâhîm el-Wekîl el-Maġrebî, stammte aus Tunis und lebte in Alexandria, er schrieb: Über den Gebrauch des Sinusquadranten, in St. Petersburg (129, 1⁰). *Tuḥfet el-sâmiʿ* (das Geschenk des Hörenden), über das, was in Beziehung steht zu den Häusern des Tierkreises und den Aufgängen (der Gestirne), ibid. (129, 2⁰).

522. Zakarîjâ b. Jaḥjâ b. Zakarîjâ el-Telbîsî (?) schrieb: Abhandlung über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, in Berlin (5864).

523. Ibn Zakarîjâ el-Ausî schrieb: *Masâ'il fi'l-ǵebr we'l-moqâbale* (Probleme aus der Algebra), aus seinem Werke *biǵjet el-ṭâlib el-mustafîd we ʿomdet el-râǵib el-mustazîd* (der Wunsch des nach Vorteil Verlangenden etc.) ausgezogen, im Brit. Mus. (420, 2⁰).

524. ʿAbderraḥmân b. ʿAlî b. ʿOmar, Abû Zeid el-Dalâ'ilî (?) aus Cordova, schrieb: *Talchîṣ fi aʿmâl el-ḥisâb* (Kompendium der Rechnungsoperationen), im Escurial (930), mit Kommentar von Saʿîd b. Muh. el-ʿOqbânî, Abû ʿOṯmân, aus Granada.

[a]) Vergl. M. Cantor, Vorlesgn. I. 247 (1. Aufl.), 272 (2. Aufl.). H. Ch. V. 566 hat einen Muh. b. Muh. el-Wâsiṭî el-Baġdâdi Ibn el-ʿAqûli, gest. 797 (1394/95).

525. 'Abdel'azîz b. Abî Ǧum'a (oder Ǧâmi'?), Abû'l-Faḍl, aus Sevilla, verfaſste ein Gedicht über die Arithmetik, im Escurial (943, 4°).

526. Muh. b. Aḥmed el-Ḍachrî, aus Algier, schrieb eine Abhandlung über die Astrologie, in Paris (2568, 5°).

527. Muh. b. Muh. b. Soleimân el-Maġrebî el-Rûdânî schrieb: *Tuḥfet aulâ el-albâb* (das Geschenk des vorzüglichsten der Herzen), über Einrichtung und Gebrauch des Astrolabiums, in Gotha (1415).

528. 'Alî, Abû'l-Ḥasan, bekannt unter dem Namen Ibn el-Maġrebî, schrieb eine *Arǧûza* über das Finger- oder Handrechnen (*ḥisâb el-jed*), in Gotha (1495), mit Kommentar von Moḥjî ed-dîn 'Abdelqâdir b. 'Alî b. Ša'bân el-Ṣûfî.[a])

Wenn wir am Schlusse unserer Arbeit einen Rückblick werfen auf die wissenschaftliche Thätigkeit der Araber auf dem Gebiete der Mathematik und Astronomie in dem langen Zeitraum von 750—1600, so treten uns, wie dies naturgemäſs bei der geistigen Entwicklung jedes Volkes der Fall zu sein pflegt, drei Hauptperioden des wissenschaftlichen Lebens deutlich vor Augen, diejenigen des Aufschwungs, der Blüte und des Niedergangs. In der Kulturgeschichte jedes Volkes, und bei dem arabischen mehr als bei irgend einem andern, zeigt sich uns die Erscheinung, daſs das geistige Leben gewöhnlich mit der politischen Machtentfaltung parallel geht; wir werden sehen, daſs bei den Arabern in allen drei Perioden das wissenschaftliche Leben sich vor allem an den Höfen gewisser Herrscher-Geschlechter konzentriert hat, denen jeweilen die höchste Macht, die führende Rolle im Gesamtreiche oder in einzelnen Teilen desselben zukam. So ist also die arabische Wissenschaft und Kunst zum groſsen Teile eine höfische zu nennen; doch erfreuten sich keineswegs alle wissenschaftlichen und künstlerischen Disziplinen in gleichem Maſse der fürstlichen Gunst, diese erstreckte sich in erster Linie auf die Medizin, Astronomie (bezw. Astrologie), die Geschichtschreibung und die Dichtkunst; denn jeder Fürst hatte einen oder mehrere Leibärzte, einen Hofastrologen (sehr oft mit dem Arzt identisch), öfters auch einen Geschichtschreiber, der seine Thaten verherrlicht der Nachwelt überliefern muſste, und einen Dichter, der sein Lob zu singen hatte. Keineswegs aber konzentrierte sich alles wissenschaftliche Leben nur um die Höfe, mancher groſse Gelehrte der Araber hat unabhängig von fürstlicher Gunst, fern vom Leben des Hofes, wissenschaftlicher Arbeit sein Leben gewidmet.

Die erste der genannten Perioden, diejenige des Aufschwungs, ist die

[a]) Vielleicht identisch mit 'Abdelqâdir b. 'Alî el-Sachâwî (s. Art. 476).

Zeit der abbasidischen Chalifen el-Manṣûr, Hârûn el-Rašîd, el-Mâmûn und seiner nächsten Nachfolger, in welcher das erste Bekanntwerden mit den wissenschaftlichen Erzeugnissen der Griechen und Indier ein rasches und glänzendes Aufleben des arabischen Geistes bewirkt hat. Diese Periode, die man die Zeit der Übersetzerthätigkeit nennen kann und die naturgemäfs noch keine gröfsere Selbständigkeit der wissenschaftlichen Arbeit aufweist, reicht etwa von 750—900, von el-Fazârî bis auf Qosṭâ b. Lûqâ. Die zweite Periode, diejenige der Blüte der Wissenschaften, müssen wir für die Mathematik und Astronomie in die Jahre 900 bis ca. 1275 legen, allerdings zerfällt sie durch eine etwa hundert Jahre umfassende Ruhepause in zwei getrennte Teile, der erste reicht von 900 bis 1100, der zweite von ca. 1200 bis 1275. Sie ist diejenige des eigentlichen selbständigen Schaffens oder besser des intensiven Verarbeitens und der weitern Ausdehnung der in der ersten Periode gewonnenen Kenntnisse, es ist die klassische Zeit der arabischen Mathematik und Astronomie. Das geistige Leben konzentrierte sich im ersten Teile dieser Periode an verschiedenen Fürstenhöfen, die dem Chalifat von Bagdâd die Herrschaft streitig machten, so bei den persischen Samaniden in Transoxanien, wo Ibn Sînâ seine Studien machte; am Hofe des Türken Maḥmûd von Ġazna, wo el-Bîrûnî seine ausgezeichneten Werke schrieb; bei den persischen Bujiden, an deren Sternwarte in Bagdad die Astronomen el-Kûhî, Abû'l-Wefâ, el-Ṣâġânî etc. beobachteten, unter denen ferner die Mathematiker el-Siġzî, el-Choġendî, Abû'l-Ġûd, el-Nasawî, el-Karchî u. a. lebten; dieser Zeit gehören auch noch an: el-Battânî, el-Fârâbî, Abû Ǧaʿfar el-Châzin, ferner Sohn und Enkel Ṯâbit b. Qorras u. a.; dann bei den Fatimiden Ägyptens, unter denen Ibn Jûnis und Ibn el-Haiṯam als hervorragende Gelehrte unserer Richtung zu nennen sind; endlich bei den türkischen Seldschuken Alp Arslân und Melikšâh in Raj und Nîšâpûr, an deren Hof ʿOmar el-Chaijâmî gelebt hat. Der zweite Teil dieser Periode führt uns an den Hof Hôlâgûs, des Eroberers von Bagdad, wo Naṣîr ed-dîn seine ausgezeichnete Thätigkeit in verschiedenen Wissenschaften entfaltet hat; seine nächsten und bedeutendsten Vorgänger waren Aṯîr ed-dîn el-Abahrî und Kemâl ed-dîn ibn Jûnis. Aus dieser Periode stammen die Hauptwerke der Araber über Rechenkunst, Algebra, Geometrie, Trigonometrie und Astronomie; mit ʿOmar el-Chaijâmî hat die Algebra, mit Naṣîr ed-dîn Trigonometrie und Astronomie den Höhepunkt ihrer Entwicklung im Mittelalter erreicht, mit des letztern *šakl el-qaṭṭâʿ* und seinen îlchânischen Tafeln schliefst diese reiche und fruchtbare Zeit ab. Die dritte Periode von 1275—1600 und weiter hinab ist diejenige des Niedergangs der arabischen Mathematik und Astronomie; unter den fast unzählbaren Produkten auf dem Gebiete dieser Wissenschaften, deren grofse Mehrzahl sich auf die Beschreibung der Konstruktion und des Gebrauches der verschiedensten Arten von Astrolabien und Quadranten und auf die Ausarbeitung elementarer Rechenbücher erstrecken, findet sich nichts hervorragendes mehr; als einziger erfreulicher Punkt ragt aus dieser Verflachung des geistigen Lebens der Kreis der Astronomen Ulûġ Begs hervor, mit dem letzten der Betrachtung würdigen Erzeugnis der arabischen Astronomie, den Tafeln Ulûġ Begs.

Spanien und Nordafrika sind getrennt von dem Osten zu betrachten, sie nehmen eine besondere Stellung ein, ihre Blütezeit in Mathematik und Astronomie beginnt etwas später, sie bewahren aber auch etwas länger als der Osten eine gewisse Selbständigkeit und Originalität. In die Glanzzeit des Chalifats von Cordova unter ʿAbderraḥmân III., Ḥakem II. und Hišâm II., also ca. 900—1000, fällt zwar auch der Höhepunkt des geistigen Lebens in Spanien, aber weniger nach der Richtung der mathematischen und Naturwissenschaften hin, als nach derjenigen der sog. überlieferten Wissenschaften, der Koran-Exegese, Tradition und Geschichte und dann der Poesie. Es ist nämlich zu bemerken, dafs die oben genannten Herrscher trotz ihrer Vorliebe für Wissenschaft, Kunst und Prachtentfaltung in hohem Grade abhängig waren von der damals in Spanien sehr mächtigen Orthodoxie der Faqîhs, die jede freiere Richtung der wissenschaftlichen Forschung, wie vor allem aus den Einflufs der Moʿtaziliten, fernzuhalten wufsten (vergl. auch Art. 170). In diese Zeit fällt allerdings das Leben und Schaffen eines bedeutenden Mannes dieser Richtung unter den spanischen Arabern, des Maslama b. Aḥmed el-Maġrîṭî, allein ihm verdankt man eigentlich blofs die Einführung der im Osten schon längst bekannten mathematischen und astronomischen Kenntnisse in Spanien, er machte seine Landsleute mit den Schriften des Ptolemäus, Muh. b. Mûsâ el-Chowârezmî und el-Battânî bekannt. Bedeutendere und selbständige Leistungen trifft man in Spanien erst bei den Astronomen el-Zarqâlî und Ǧâbir b. Aflaḥ im 11. und 12. Jahrhundert, als das Chalifat von Cordova schon untergegangen war, dann bei den Maġrebinern el-Ḥasan b. ʿAlî el-Marrâkošî, Jaḥjâ b. Muh. b. Abî'l-Šukr und Ibn el-Bennâ im 13. und Anfang des 14. Jahrhunderts, und endlich bei el-Qalaṣâdî, dem letzten spanischen Gelehrten, im 15. Jahrhundert.

Es ist auch von Interesse, die Nationalität der behandelten Autoren etwas näher ins Auge zu fassen, wenn wir auch nicht gerade eine Statistik hierüber aufzustellen gewillt sind; eine solche wäre mit Schwierigkeiten verbunden, indem bei manchem Gelehrten die Abstammung nicht mit Sicherheit festzustellen ist. Immerhin ist schon längst bekannt und wird durch unsere Arbeit auch nach der mathematisch-astronomischen Richtung hin bestätigt, dafs die persische Nation zu den arabisch schreibenden Gelehrten ein grofses Kontingent gestellt hat; schon der zweite Muslim, von dem man weifs, dafs er sich mit Astronomie (bezw. Astrologie) beschäftigt hat, el-Nûbacht, war ein Perser, dann sein Sohn (Art. 7) und seine Enkel (Art. 27 u. 28), der Astronom Ḥabaš, hierauf die Gelehrten aus dem Geschlecht der Barmekiden, die Farruchâne aus Ṭabaristân, die meisten der Mathematiker und Astronomen unter den Bujiden, der in indischer Wissenschaft bewanderte, sehr gelehrte el-Bîrûnî, vor allem aber drei der hervorragendsten, ja vielleicht die drei gröfsten Mathematiker des Islams, nämlich Abû'l-Wefâ,[a]) ʿOmar el-Chaijâmî und Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî. Welchen Ursachen haben wir diese Erscheinung zuzuschreiben? Ich will keine Untersuchung anheben über die natürlichen Anlagen, die die eine oder andere dieser Nationen zu der oder jener Richtung der geistigen Thätigkeit zu prädestinieren geeignet sein konnten, ich will auch keine Vergleichung zwischen der geistigen Befähigung von Semiten und Ariern ziehen; ich suche vielmehr die Erklärung hauptsächlich, wenn auch keineswegs ausschliefslich, in der Verschiedenheit der Glaubensrichtung. Die Araber waren in der grofsen Mehrzahl Sunniten, d. h. sie hingen der orthodoxen Richtung an und ihre geistige Thätigkeit wandte sich daher mehr den sogen. überlieferten oder Glaubens-Wissenschaften zu; die Perser aber waren meistens Schiʿiten, oder, wenn sie sich auch äufserlich zur Rechtgläubigkeit bekannten, doch im Geheimen einer freigeistigeren Richtung zugeneigt, sie wandten sich daher mehr den vom Glauben mehr oder weniger unabhängigen Wissensgebieten, der Mathematik, Astronomie, Medizin etc. zu, so waren z. B. auch die zwei gröfsten Ärzte unter den Arabern, el-Râzî und Ibn Sînâ, Perser.

Aber auch Juden, Griechen und Türken finden wir unter den arabisch schreibenden Gelehrten unserer Richtung, die erstern in beträchtlicher Zahl, sehr oft allerdings zum Islam übergetreten, die Griechen seltener, meistens als Übersetzer der ältern Zeit, die Türken repräsentiert in hervorragender Weise der Philosoph el-Fârâbî.

Unter den spanischen und nordafrikanischen Gelehrten finden wir auch eine Anzahl von Berbern, welche Nation nach dem Untergang des Chalifats von Cordova die Herrschaft über einen grofsen Teil des arabischen Spaniens an sich gerissen hatte, im allgemeinen aber für geistige Bestrebungen keine grofsen Anlagen und kein grofses Interesse gezeigt hat. Endlich haben auch christliche Spanier arabisch geschrieben, besonders die arabische Dichtkunst gepflegt; der Bischof Alvaro von Cordova brach in

---

[a]) Bei diesem Gelehrten steht dies nicht ganz fest, ist aber sehr wahrscheinlich.

bittere Klage darüber aus, dafs seine Glaubensbrüder das Lateinische gänzlich vernachlässigten, dagegen in arabischer Sprache schrieben und dichteten.[a]) Einen solchen christlichen Spanier und sogar einen Bischof, haben wir in Art. 163 angeführt als Verfasser eines dem Chalifen Ḥakem II. gewidmeten astrologischen Werkes. — Auch in Sicilien mögen geborne Sicilianer ihren Beitrag zur arabischen Litteratur geleistet haben, wir können dies hier nicht mit Beispielen belegen, wir erinnern nur an die intimen Beziehungen, in denen die Hohenstaufen Friedrich II. und sein Sohn Manfred zu arabischer Sitte und Bildung gestanden sind.

Aus diesen wenigen Betrachtungen über die Entwicklung des wissenschaftlichen Lebens der Araber und die Beteiligung der einzelnen Nationalitäten an demselben mag man wohl den wunderbaren Einflufs erkennen, den der arabisch-islamitische Geist auf die verschiedensten, ja sogar in ihrer Naturanlage rohe Völker ausgeübt hat — eine Erscheinung, die dem denkenden Forscher auf dem Gebiete der Kulturgeschichte sich stets als eine interessante, des tiefern Studiums würdige aufdrängen mufs.

---

[a]) Vergl. meinen Vortrag „die Araber als Vermittler der Wissenschaften in ihrem Übergang vom Orient in den Occident“, Aarau 1897 (2. Aufl.).

Anmerkungen.

1. Dieser Ibrâhîm b. Ḥabîb el-Fazârî ist nicht zu verwechseln mit dem bei Ibn Qoteiba p. 257, Abû'l-Maḥâsin I. 529 und el-Ḏahabî I. 60 genannten Traditionisten Ibrâhîm b. Muh. b. el-Ḥâriṯ, Abû Isḥâq el-Fazârî, der 188 (804) gestorben ist. Unser Fazârî ist höchstwahrscheinlich identisch mit dem bei Ja'qûbî (Kitâb el-buldân, p. 13, edid. Juynboll, Leiden 1861) genannten, als Baumeister el-Manṣûrs beim Bau von Bagdad beteiligten Ibrâhîm b. Muḥ. el-Fazârî (s. auch Art. 'Omar b. el-Farruchân el-Ṭabarî). — **2.** Nicht zu verwechseln mit dem spanischen Astronomen Ǧâbir b. Aflaḥ, was oft geschehen ist und sogar noch Brockelmann (Gesch. d. arab. Litteratur, Weimar 1897, I. 241) passiert ist, der als 26. Werk des Alchymisten Ǧâbir anführt: Gebri astronomia, Norimb. 1534 (!). — **3.** Vielleicht ist dieser Autor ein Verwandter (Onkel?) des bedeutenden Sprachgelehrten Muḥ. b. Zijâd b. el-A'râbî aus Kûfa, der i. J. 231 gestorben ist (vergl. Ibn Ch. Übers. III. 23), deshalb habe ich ihn an dieser Stelle eingereiht; allerdings heifst es von diesem Sprachgelehrten nicht, dafs er zum Stamme „Šeibân" gehört habe; es wird diesem auch ein Buch über die helischen Untergänge der Mondstationen zugeschrieben. — **4.** Die beiden genannten Berliner Mss. haben 'Amr statt 'Omar und bezeichnen das Werk als einen Auszug aus dem Fragenwerk des Qaṣrânî (oder Qaiṣarânî, s. d. Art. Ja'qûb b. 'Alî el-Qaṣrânî), was ziemlich unwahrscheinlich ist, da in dem Buche Qaṣrânîs el-Kindî zitiert wird; in der That heifst es im Katalog von Kairo nur, das Werk des 'Omar b. el-Farruchân sei ein Auszug aus den Büchern der Gelehrten. — **5.** Hier hat der Übersetzer noch den Beinamen el-ḥâsib (der Rechner); neben ihm ist als Übersetzer noch genannt Serǧûn (Sergis?) b. Heliâ el-Rûmî. E. Meyer (Geschichte der Botanik, III. 34–37) hält diesen Sergius für identisch mit Serǧis el-Râsî, d. h. von Râs 'Ain, einer Stadt bei Ḥarrân, gebürtig, der nach Abulfar. im 6. Jahrh. n. Chr. gelebt hat. Nach der oben zitierten Angabe des Leidener Ms. kann man dieser Ansicht kaum beistimmen, es müfste denn jene Angabe so gemeint sein, dafs Sergius den Almagest früher (also im 6. Jahrh.) ins Syrische und dann Ḥaǧǧâǧ diesen syrischen Almagest ins Arabische übersetzt hätte. Als Jahr der Übersetzung wird 214 (829/30) angegeben, Steinschneider (Z. D. M. G. 50, p. 201) hat 212. — **5ª.** In neuerer Zeit ist der Orientalist Spitta Bey in den Besitz eines Ms. einer Schrift, betitelt *ṣûrat el-arḍ* (das Bild der Erde), gekommen, die dem Muḥ. b. Mûsâ el-Chowârezmî zugeschrieben wird und wahrscheinlich eine Bearbeitung einer ältern syrischen Übersetzung der Geographie des Ptolemäus ist. Vielleicht ist sie auch nur ein Auszug aus einer seiner Tafeln. — **5ᵇ.** Am 12. internationalen Orientalisten-Kongrefs machte C. A. Nallino in Neapel einige interessante Mitteilungen über das

Berliner Ms. der astronomischen Tafeln des Ḥabaš; nach diesem soll das Berliner Ms. die kleinsten der drei genannten Tafeln, also die Tafeln des Šâh (oder die königlichen) enthalten; auch ergiebt sich aus denselben die interessante Thatsache, dafs Ḥabaš schon die Tangente und Cotangente gekannt hat, diese also nicht erst von Abû'l-Wefâ in die Trigonometrie eingeführt worden sind. — 6. Über diese arabische Gradmessung existieren drei verschiedene Berichte: zwei derselben werden von Caussin (Notices et extraits VII. 94—96) aus Ibn Jûnis' ḥâkimitischen Tafeln angeführt; nach dem ersten, aus Sind b. ʿAlîs Schriften entnommen, wurde die Länge eines Grades zu gleicher Zeit von Sind b. ʿAlî und Châlid b. ʿAbdelmelik einerseits zwischen Wamia (Apamea?) und Tadmor, und von ʿAlî b. ʿÎsâ und ʿAlî b. el-Baḥtarî (?) andrerseits (vielleicht in der Ebene Sinǧâr?) gemessen. Die erste Messung ergab eine Länge von 57, die zweite eine solche von 56¼ arab. Meilen, die Meile zu 4000 sog. schwarzen Ellen gerechnet; man nahm nun aus beiden Messungen ungefähr das Mittel und setzte die Länge eines Grades zu 56⅔ Meilen an. Nach dem zweiten Bericht, aus Ḥabaš entnommen, sollen einfach die Verfasser der „erprobten" Tafeln (es sind keine Namen genannt) von el-Mâmûn beauftragt worden sein, die Gradmessung vorzunehmen, und diese sei dann in der Ebene Sinǧâr ausgeführt worden. Ein dritter Bericht befindet sich bei Ibn Ch. (Übers. III. 315) und nach ihm bei Abulfid. (II. 241), nach welchem die Gradmessung von den Söhnen Mûsâs zuerst in der Ebene Sinǧâr und nachher zur Kontrolle noch einmal bei Kûfa ausgeführt worden sein soll und zwar auf Befehl el-Mâmûns. Dieser Bericht ist jedenfalls unrichtig, denn der älteste der drei Brüder starb erst 259, el-Mâmûn aber schon 218. — 7. Abulfid. (II. 245) erwähnt unter dem Jahre 260 den Tod des el-Ḥasan b. el-Ṣabbâḥ el-Zaʿfarânî, eines šâfiʿitischen Juristen und Traditionisten, ebenso hat Ibn Ch. (Übers. I. 373) einen Artikel über diesen Gelehrten, nennt ihn aber el-Ḥasan b. Muh. b. el-Ṣabbâḥ. Abû'l-Maḥâsin (I. 764) giebt das Todesjahr eines el-Ḥasan b. Ṣabbâḥ el-Bazzâz (= der Tuchhändler) auf 249 an. Ob eine dieser Persönlichkeiten identisch sei mit unserm Astronomen und Geometer, kann ich nicht entscheiden. Ferner ist noch anzuführen, dafs Abulfid. (III. 333 u. 425) erwähnt, der bekannte ismaelitische Missionar el-Ḥasan b. el-Ṣabbâḥ (gest. 518), der Herr von Alamût, sei ein in Geometrie und Rechenkunst sehr gelehrter Mann gewesen. Dafs dieser nicht der im Fihrist genannte el-Ḥasan b. el-Ṣabbâḥ sein kann, ist klar, da der Fihrist i. J. 377 geschrieben wurde, dafs er aber mit dem bei Ibn el-Q. (C. I. 413) behandelten el-Ḥasan b. Miṣbâḥ identisch sein könnte, wäre möglich, zumal auch Elmacinus (= el-Makîn) in seiner Hist. saracen. edid. Erpenius, Lugd. Bat. 1625, p. 286 diesen Ismaeliten el-Ḥasan b. Miṣbâḥ nennt. Übrigens halte ich es für wahrscheinlich, dafs Abulfid. sich hier geirrt und die einem ältern Autor gleichen Namens zukommenden Eigenschaften dem Ismaeliten el-Ḥasan b. el-Ṣabbâḥ zugeschrieben hat, fügt er doch (p. 425) selbst die Worte Šahrastânîs an: „Er (el-Ḥasan) hielt die Menge von der Pflege der Wissenschaften ab und die Vornehmen (wohl Gelehrten, Gebildeten) vom Lesen der Werke der Alten." Und ein solcher Mann sollte eine grofse Gelehrsamkeit in den mathematischen Wissenschaften besessen haben? Es wäre denn, dafs er an sich selbst die Erfahrung gemacht hätte, die Beschäftigung mit solchen Dingen führe vom wahren Glauben ab. Allerdings war el-Ḥasan ein Jugendgefährte ʿOmar el-Chaijâmîs (vergl. Müller, der Islam im Morgen- und Abendland, Bd. II. p. 97 f.), und es wäre möglich, dafs er in seinen frühern Jahren sich mit Mathematik und Astronomie beschäftigt hätte, nachher, wie er sich den Ismaeliten in die Arme geworfen hatte, jedenfalls nicht mehr. — **8.** Dieser Ḥâriṯ ist wohl kaum identisch mit dem von Ibn Ch. I. 126, Übers. I. 365 und im Fihr. 184 behandelten Ṣûfiten und Asketen Abû 'Abdallâh Ḥâriṯ b. Asad, gest. 243 (857/60), vielleicht aber mit dem bei H. Ch. I. 382 unter den Kommentatoren des Euklides genannten Abû Ḥafṣ el-Ḥâriṯ el-Chorâsânî, über den ich keine weitern Angaben kenne. — Was meine irrtümliche Vermutung anbetrifft, der bei 'Alî b. Abî'l-Riġâl in seinem Werke de judiciis astrorum als Verfasser einer geographischen Tafel zitierte „Harix" sei mit unserm Ḥâriṯ identisch, so vergleiche man hierüber Biblioth. math. **13** (1899) p. 86 u. 118. — **9.** Der Fihr. und C. haben nur „el-Qaṣrânî" ohne jeden weitern Namen, letztere habe ich nur in den Katalogen von Berlin und Kairo gefunden. Qazwînî (Kosmographie, edid. Wüstenfeld, II. p. 295) sagt: „Von Qaṣrân, einem Städtchen im Gebiet von Raj, stammt el-Qaṣrânî der Geometer, ohne Gleichen zu seiner Zeit; er verfaſste berühmte Werke über die Geometrie. Es wäre möglich, daſs dieser Qaṣrânî ein anderer als der im Art. 58 behandelte Astrolog wäre und daſs der Verf. des Fihr., da er ihn unter seine Zeitgenossen eingereiht hat, diesen später (ca. 370) lebenden Qaṣrânî gemeint hätte. — **10.** Jaḥjâ b. Jaḥjâ el-Leiṯî, ein mâlikitischer Jurist und Traditionist, soll dem berberischen Stamme Maṣmûda angehört haben, machte Reisen nach dem Orient und starb 234 (848/49) zu Cordova (Maq. K. I. 327; Ibn Ch. II. 216, Übers. IV. 29). — **11.** Abû Merwân 'Abdelmelik b. Ḥabîb, geb. ca. 180 (796) in Ḥiṣn Wâṭ bei Granada, war ein bedeutender Grammatiker, Historiker und Jurist. Er starb 238 oder 239 (853/54) in Cordova (W. G. 56; Maq. K. I. 326; C. II. 107 hat als Todesjahr 289, was unrichtig ist). — **12.** Über diesen Autor habe ich keine Angaben gefunden, vielleicht ist es der bei H. Ch. I. 185 als Verfasser einer Geschichte der Omeijaden genannte Châlid b. Hišâm el-Omawî. — **13.** Es ist dies der bedeutende Historiker Aḥmed b. Muh. b. Mûsâ el-Râzî, gest. 325 (937), dessen Vater Muh. b. Mûsâ aus Raj in Chorâsân nach Spanien eingewandert war und 273 oder 275 in Cordova gestorben ist (W. 105ᵃ und Maq. K. II. 103). — **14.** Wahrscheinlich soll es heiſsen Aḥmed b. Muh. b. 'Abdrabboh (oder 'Abdrabbihi), ein namhafter Historiker und Sprachgelehrter aus Cordova (246—328). (W. G. 107 und Ibn Ch. I. 32, Übers. I. 92.) — **15.** Qâsim b. Aṣbaġ von Cordova war ein hervorragender Rechtsgelehrter, Grammatiker und Traditionist. Er schrieb auch eine Geschichte der spanischen Omeijaden. Nach de Slane (Übers. von Ibn Ch. III. 85) starb er 341 (952/53), nach Ibn 'Aḏârî (Histoire de l'Afrique et de l'Espagne, publ. par R. Dozy, I. Introd. p. 21) wurde er 247 geboren und starb in Cordova 340 (951/52). — **16.** Es ist dies entweder der eben genannte Aḥmed b. Muh. b. 'Abdrabboh, oder dann wahrscheinlicher der unter 13. genannte Historiker Aḥmed b. Muh. b. Mûsâ el-Râzî. — **17.** Vergl. H. Ch. I. 184: *Achbâr el-aṭibbâ'* (Geschichten der Ärzte) von Ibn Dâja. Ibn Abi U. hat I. 182: *Jûsuf b. Ibrâhîm fî achbârihi el-mutaqaddame* (in seinen vorangegangenen (= vorerwähnten) Erzählungen oder Geschichten); es ist also nicht ganz richtig, wenn Steinschneider (Bibl. math. 2 (1888), p. 50) sagt: „Oseibia führt Jûsuf mehr als 30 Male als Gewährsmann an, ohne auch nur ein einziges Mal den Titel einer Schrift desselben anzugeben." — **18.** Hiezu bemerkt Dozy: „Quia scilicet inter arithmeticos eandem celebritatem nactus erat atque el-Hârith ibn Obâd inter antiquos heroës." Worauf sich diese Erklärung Dozys stützt, weiſs ich nicht. — In der Bibl. math. 11 (1897) p. 84 hatte ich darauf aufmerksam gemacht, daſs dieser Ibn el-Ḥassâb vielleicht identisch sein könnte mit el-Ḥaṣṣâr, dem Verfasser des von Ibn Chaldûn in seinen Prolegomena gerühmten Buches über die Rechenkunst, mufste aber nach weitern Studien über diese Frage diese Ansicht widerrufen (vergl. Bibl. math. 13 (1899) p. 87). — **19.** Wahrscheinlich ein Fehler, es sollte heifsen: Ismâ'îl b. Muh. b. el-Ḥârit el-Chazraǧî aus Sevilla, gest. 421 (1030); dieser schrieb: *kitâb el-intiqâ'* (Buch der Auslese), eine Geschichte spanischer Gelehrter (W. G. 183 nach C. II. 141). — **20.** Soll wahrscheinlich heifsen Soleimân Abû Eijûb, mit vollem Namen: Soleimân b. Beiṭâr b. Soleimân, Abû Eijûb, aus Cordova, oder vielmehr Adamuz bei Cordova, welcher eine Bibliotheca Cordubensis in 8 Büchern geschrieben hat und 404 (1013/14) zu Malaga gestorben ist (C. II. 141). — **20ª.** In der Neu-Ausgabe der Tafeln durch C. A. Nallino steht, diese Fixsterntafeln seien für das Jahr 1191 der Seleukid. Ära (879 n. Chr., 266 d. H.) berechnet worden, dies könnte dafür sprechen, dafs das Ms. des Escurial die erste Ausgabe dieser Tafeln enthalten würde. — **21.** Es ist dies Abû Bekr Muh. b. el-Hasan b. 'Abdallâh el-Zobeidî el-Išbîlî, einer der ersten Grammatiker und Historiker Spaniens; er schrieb unter anderem das *„kitâb ṭabaqât el-naḥwîjîn we'l-loġawîjîn bi'l-mašriq we'l-andalus“* (das Buch der Klassen der Grammatiker und Lexikographen des Ostens und Spaniens). Er war Lehrer von Hišâm, dem Sohne Ḥakems II., in Sprache und Rechenkunst und ein Schüler von Qâsim b. Aṣbaġ und Sa'îd b. Fatḥûn (oder Faḥlûn, vergl. Art. 170) und And.; er stammte ursprünglich aus Emessa in Syrien und starb im Ǧumâdâ II. 379 (989) in Sevilla (Ibn Ch. I. 514, Übers. III. 83). — **22.** Ob Abû'l-Qâsim el-Balchî oder Abû Zeid el-Balchî ist zweifelhaft, doch eher der erstere. Beide waren Philosophen und Zeitgenossen, der letztere, Aḥmed b. Sahl el-Balchî Abû Zeid, schrieb unter anderm ein Buch „über die Vortrefflichkeit der mathematischen Wissenschaften“ und eines „über das Sichere in der Astrologie“. Er starb 322 (934). (Fihr. 138, und Flügel, grammat. Schulen d. Araber, p. 204.) — **23.** Aus diesen zwei Werken machen der Fihr. und C. nur eins: Einen Kommentar zu den schwierigen Partien des Euklidischen Buches über das Verhältnis. Ich kann mich mit Hammer (V. 308) und Steinschneider (Z. D. M. G. 50. p. 168) einverstanden erklären, dafs hier zwei verschiedene Werke gemeint seien, doch halte ich auch hier wieder die schon in meiner Fihristübersetzung (p. 60) und nachher in Z. D. M. G. 51. p. 427 aufgestellte Konjektur aufrecht, es könnte statt „nisbe“ zu lesen sein „qisme“, und dann das Buch der Teilung (der Figuren) des Euklides gemeint sein. — **24.** Dafs Pappus und nicht Vettius Valens, wie Woepcke vermutet hat, der Verfasser dieses Kommentars sei, kann kaum mehr bezweifelt werden, findet sich doch in dem von Woepcke selbst veröffentlichten arabischen Text desselben an mehreren Stellen geschrieben (vokalisiert) „babus“; allerdings ist das arab. „b“ etwas hoch, so dafs auch gelesen werden könnte „balus“, aus dem dann Woepcke ohne weitere thatsächliche Anhaltspunkte (vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 54, Anmerkung 92) „valens“ gemacht hat. — **25.** So hat Ibn Jûnis; C. n. Ibn el-Q. hat „el-Herawî“ (d. h. von Herat); das *„min aulâd el-farâǧine“*, das im Fihr. und bei C. nachher folgt, habe ich mit C. übersetzt durch „aus dem Stamme der Pharaonen“, das richtige aber wird sein, wie Caussin (Not. et extr. VII. 122 und 168) übersetzt: „zu den Bewohnern Farġânas (in Turkestân) gehörend“. — **26.** Über Nekûr haben drei Fürsten des Namens Ṣâliḥ regiert, es ist dies jedenfalls Ṣâliḥ III., der ums Jahr 305 (917) an der Regierung war. — **27.** Abû Muh. 'Alî b. Aḥmed b. Sa'îd b. Ḥazm el-Ẓâhirî, allgemein bekannt unter dem Namen Ibn Ḥazm, geb. 384 (994) in Cordova, war ein vielseitig gebildeter und freidenkender Gelehrter, besonders in Rechtswissenschaft und Geschichte hervorragend; er wurde später Wezir, dann von seinen orthodoxen Gegnern scharf verfolgt, und zog sich deshalb auf sein Landgut bei Niebla zurück, wo er im J. 456 (1064) starb (Ibn Ch. I. 340, Übers. II. 267). — **28.** Woher C., der nach der gleichen Quelle wie ich zitiert, diese Jahreszahl hat, weifs ich nicht, in der mir vorliegenden Ausgabe von B. III. befindet sie sich nicht; es ist zu bedauern, dafs wir über diesen, wie es scheint, bedeutenden spanischen Mathematiker keine weiteren Angaben haben: B. I. 19 hat einen Aḥmed b. Naṣr b. ʿAbdallâh el-Bekrî aus Cordova, kennt ihn aber nur als Traditionisten, nicht als Mathematiker; da er Schüler von Chalaf b. el-Qâsim, der in den Jahren 370—400 lehrte, war, so müfste er jedenfalls nach 400 gestorben sein, vielleicht ist bei C. 432 statt 332 zu lesen. — **29.** Woepcke (L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 118) hält diesen Autor für identisch mit einem Abû'l-Ḥasan el-Šemsî el-Herawî, von dem er (l. c.) eine Trisektion des Winkels, entnommen aus dem Leidener Ms. 996, zitiert; worauf sich diese Ansicht gründet, weifs ich nicht. Ich vermute, er könnte identisch sein mit dem bei Ibn Abi U. (I. 321) genannten Schüler el-Râzîs, mit Jûsuf b. Jaʿqûb, dem der Lehrer ein medizinisches Werk gewidmet hat, der aber nicht selbst Arzt war, wenigstens wird er von Ibn Abi U. nicht als solcher genannt. El-Râzi war auch ein Gegner der Astrologie und diese Eigenschaft mag vielleicht auf seinen Schüler übergegangen sein. — **30.** Was diese nur von Ibn el-Q. genannte *Arǵûza* anbetrifft, so bin ich der Ansicht, dafs hier ein Irrtum des Verfassers des *târîch el-ḥokamâ* vorliege. Der Verfasser der *Arǵûza* heifst nämlich in allen vier genannten Mss. Abû ʿAlî b. Abî'l-Ḥosein (Ḥasan) el-Ṣûfî. Man könnte nun an einen Sohn von ʿAbderraḥmân denken, allein im Ms. von Kairo steht, dafs er die *Arǵûza* für einen Fürsten seiner Zeit, nämlich für Šâhinšâh, verfafst habe. Nun ist dies entweder el-Melik el-Afḍal Šâhinšâh, der Wezir des Chalifen el-Âmir gest. 515 in Kairo, oder dann Nûr ed-daula Šâhinšâh, der älteste Bruder Saladdins, gest. 543. In beiden Fällen wäre es möglich, dafs dieser Abû ʿAlî b. Abî'l-Ḥosein identisch wäre mit dem ums Jahr 530 lebenden Abû ʿAlî el-Miṣrî, dem Geometer und Dichter (s. Art. 283). — **31.** Es wäre dies die erste Beobachtung eines Durchgangs der Venus vor der Sonnenscheibe, wenn nicht die Sache durch die beigefügte Bemerkung, der Flecken sei während 91 Tagen sichtbar gewesen, etwas zweifelhaft gemacht würde. Es kann aber dieser Zusatz wohl eine spätere Einschiebung sein, um diese Erscheinung mit dem um jene Zeit erfolgten Tode des Chalifen el-Moʿtaṣim in Einklang bringen zu können. — **32.** Wenn dieser Ibn el-ʿAmîd der Wezir Rukn ed-daulas, Abû'l-Faḍl b. el-ʿAmîd, ist, der in der Astronomie und den philosophischen Wissenschaften bewandert war und 359 oder 360 (971) in Raj od. Bagdad gestorben ist (s. Art. 125), so wäre die Lebenszeit dieses Autors ungefähr gegeben. — **33.** Da dieser Autor im Fihrist unmittelbar nach el-Iṣṭachrî (s. Art. 103) folgt, dem keine weiteren Namen beigegeben sind, und beiden genau das gleiche Werk zugeschrieben wird, so ist die Vermutung nicht unbegründet, dafs hier durch Abschreiber Fehler begangen worden seien und dafs Muh. b. Lurra und el-Iṣṭachrî eine und dieselbe Persönlichkeit sei. — **34.** Solche *libri anoë* (Kalender mit Witterungs-, landwirtschaftlichen und anderen Angaben) gab es bei den Arabern viele, so z. B. auch einen von ʿArîb b. Saʿd, dem Historiker und Sekretär Ḥakems II., den Dozy i. J. 1873 zu Leiden publiziert hat unter dem Titel: Le Calendrier de Cordoue de l'année 961.

texte arabe et ancienne traduction latine. — **35.** C. I. 434 n. Ibn el- Q. erzählt, er sei nach ʿIrâq gereist und habe dort Arithmetik und Geometrie bei Abû Jaḥjâ el-Bâwardî (sic) und Abû'l-ʿAlâ b. Karnîb studiert, nachher habe er selbst Vorlesungen über diese Disziplinen gehalten und unter seinen Zuhörern hätten sich seine beiden genannten Oheime befunden. Ich folge der Darstellung des Fihr. — **36.** Was diesen Kommentar anbetrifft, so verweise ich auf meine Übers. aus dem Fihr. (p. 54, Anmerkg. 97); ich glaube nicht, dafs es hier Hipparchus heifsen mufs, in der That hat auch Ibn el-Q. „Ibn Jaḥjâ"; ich vermute nun, dafs dieser Ibn Jaḥjâ der im Fihr. (p. 282, Übers. 38) genannte Muh. b. Jaḥjâ b. Akṯam sei (vergl. Art. 54), der ein Buch über Zahlenprobleme geschrieben hat. — **37.** Der Beiname dieses Mannes zeugt für seine Berühmtheit und läfst uns weitere Angaben über ihn nur ungern vermissen; vielleicht ist er der Sohn des von Ibn el-Faraḍî (B. VII. 62) hauptsächlich als Dichter genannten Ismâʿîl b. Bedr b. Ismâʿîl b. Zijâd, Freigelassenen der Benî Omeija, aus Cordova, der i. J. 351 (962) gestorben ist. — **38.** Diese Angabe stützt sich auf eine ihm in den Philos. Transactions v. J. 1684, p. 724 zugeschriebene astronomische Beobachtung aus d. J. 992, und auf folgende Stelle im 5. Kap. des 5. Buches des *šakl el-qaṭṭâʿ* von Naṣîr ed-dîn (Ausgabe von Caratheodory, Konstant. 1891, p. 108, Übers. 140): „Denn nach der Meinung des Abû Riḥân (el-Bîrûnî) hat er (nämlich Abû Naṣr b. ʿIrâq) zuerst diese Regel (den sphärischen Sinussatz) auf alle Fälle angewandt, wenn auch zwei andere Gelehrte, Abû'l-Wefâ el-Bûzǧânî und Abû Maḥmûd Ḥâmid b. el-Chiḍr el-Choǧendî Anspruch auf die Priorität hierin geltend machen." Und an einer andern Stelle (p. 125, Übers. 162) heifst es: „Abû Maḥmûd el-Choǧendî hat diesem Satze (sphär. Sinussatz) den Namen „Regel *(qânûn)* der Astronomie" gegeben. Hieraus folgt, dafs Abû'l-Wefâ und el-Choǧendî etwas älter sind oder wenigstens früher wissenschaftlich gearbeitet haben, als Abû Naṣr b. ʿIrâq (s. d. Art.) und dafs alle drei vor el-Bîrûnî wissenschaftlich thätig gewesen sind. Das Todesjahr 390 wird also nicht weit von der Wahrheit entfernt sein. — **39.** Wüstenfeld (die Übers. arab. Werke ins Latein. etc. p. 51) giebt den Art. aus Ibn Abi U. über Maslama b. Aḥmed vollständig und hat hier folgenden Schlufssatz, der nicht in der Müllerschen Ausgabe des Ibn Abi U. steht: „Ich (Ibn Abi U.) sage, dafs el-Maǧrîṭî (noch andere) vorzügliche Schriften verfafst hat, in denen er das von seinen Vorgängern gebrachte vermehrt und durch Verbesserung der Wahrheit näher gerückt hat, so z. B. das Buch der 10 Abhandlungen über die Lösung (der Schwierigkeiten) der vornehmsten Wissenschaften." — **40.** Wahrscheinlich ist dies der i. J. 433 in Sevilla gestorbene Dichter und Gelehrte Abû Ǧaʿfar Aḥmed b. Muh. el-Chaulânî, mit dem Zunamen Ibn el-Abbâr (Ibn Ch. I. 44, Übers. I. 125). — **41.** Dieser Autor ist oft verwechselt worden mit Abû'l-Qâsim Chalaf b. ʿAbbâs el-Zahrâwî, dem berühmten Arzt (lat. Albucasis), der 1106 gestorben sein soll, so von Mac Guckin de Slane (Traduction des prolégom. d'Ibn Khaldoun, l. c. p. 138) und wie es scheint auch von Ibn Baškuwâl (B. I. 406), aber mit einer dritten Persönlichkeit; denn er nennt ihn wohl el-ḥassâb (der Rechner), führt aber nur ein theologisches Werk von ihm an und bemerkt, dafs er Imâm an der grofsen Moschee zu Granada gewesen sei. — **42.** D'Herbelot (Biblioth. orient. p. 934) und nach ihm Sédillot (Prolégom. des tables astron. d'Oloug-Beg, introd. p. LXXIX) und nach letzterem H. VI. 428 erwähnen einen Aḥmed b. el-Mesîḥ, Abû'l-Qâsim el-Ǧarnâṭî (von Granada), bekannt unter dem Namen Ibn el-Mesîḥ, als Verfasser astronomischer Tafeln, gest. 476; ich vermute, dieser **Ibn el-Mesîḥ** möchte mit unserm **Ibn el-Samḥ** identisch sein. — **42a.** Einige Stellen aus dieser Schrift hat E. Wiedemann im Bullet. Boncomp., Aprilheft 1881 veröffentlicht; vergl. auch einen Aufsatz desselben Verf. über diesen Gegenstand in Z. D. M. G. Bd. 38, p. 145 ff. Ein Auszug aus derselben, betitelt *taḥrîr maqâlet el-ḍau'* (Redaktion der Abhandlung über das Licht) befindet sich in Leiden (1011, Cod. 201 Gol., ist im Katalog nicht angegeben) und wurde ebenfalls von E. Wiedemann übersetzt, in Annal. d. Phys. u. Chem. von Poggendorf und G. Wiedemann, N. F. 20. Bd. (1883) p. 337 f. — **43.** Gayangos erwähnt I. 385 die Werke, die für Alfons X. aus dem Arabischen ins Spanische übersetzt worden sind und deren Manuskripte sich in der Nationalbibliothek in Madrid befinden; unter diesen ist auch eine Abhandlung (L. 97. fol. 175 ff.) in fünf Kapiteln „über den Gebrauch eines astronomischen Instrumentes" von **'Alî b. Chalaf**, verfaſst für den König el-Mâmûn; es ist dies der Chalife Qâsim b. Ḥammûd, genannt el-Mâmûn, von Cordova, der um das Jahr 410 (1019/20) regiert hat und 'Alî b. Chalaf vielleicht mit unserm Autor identisch. — **44.** Woher C. II. 148 den Zusatz über die astronomischen Tafeln hat, die el-Ǧuhanî verfaſst haben soll, weiſs ich nicht, in dem mir vorliegenden Text des Ibn Baškuwâl steht nichts davon; doch liegt immerhin die Wahrscheinlichkeit nahe, daſs die unter den von Gerard von Cremona übersetzten Werken genannten „**tabulae Jahen**" (vergl. Wüstenfeld, die Übers. aus dem Arab. ins Latein. etc. p. 66) von diesem el-Ǧuhanî herstammen (vergl. auch Bibl. math. 11 (1897) p. 83 u. 84). — **45.** Die Etymologie des Wortes „**Bîrûnî**" ist zweifelhaft; die Einen wollen es ableiten von Bîrûn, einer Stadt in Sind (das Land am südlichen Indus), Andere vom persischen „bîrûn" = das äuſsere, auſserhalb, so daſs el-Bîrûnî heiſsen würde „der von auſserhalb (der Stadt) Stammende"; er soll nämlich in einer Vorstadt oder auf dem Landgebiete von Chowârezm (jetzt Chiwa) geboren sein. — **46.** Steinschneider (Vite di matematici arabi di Bernardino Baldi etc. p. 76) findet in den aus dem Texte der Abenragel'schen Astrologie angeführten Stellen einen Widerspruch darin, daſs der Fürst, dem Abenragel diente, also Mo'izz b. Bâdis (1016—1062), von ihm verlangt habe, er solle ihm die Regierungszeit des Emirs von Sicilien **Aḥmed b. el-Ḥasan b. Abi Hosein** (953—969) voraussagen; da läge nun allerdings in den Zeitverhältnissen ein Widerspruch, dieser löst sich aber sofort, wenn mit dem im Text genannten Hamech filius Abensuzeith gemeint ist der Kelbitische Fürst von Sicilien, **Aḥmed ben Abî'l-Futûḥ Jûsuf**, der von 1019—1037 (so nach A. Müller, der Islam etc. II. 624, nach Ibn Chaldûn, Hist. de l'Afrique et de la Sicile etc., trad. par N. des Vergers, p. 180, dagegen von 1019—1026) regiert hat, was also mit den $17\frac{1}{2}$ Jahren, die Abenragel vorausgesagt hat, nicht übel stimmt, und der auch in Palermo ermordet worden ist, während Aḥmed b. el-Ḥasan eines natürlichen Todes gestorben ist. — **47.** **Soleimân b. Hossân b. Ǧulǧul**, gewöhnlich **Ibn Ǧulǧul** genannt, war ein gelehrter Arzt unter Hišâm II. (976—1013), beschäftigte sich auch eifrig mit botanischen Studien, namentlich mit dem Werke des Dioskorides über die Arzneipflanzen. Er schrieb einen Kommentar über die Namen der einfachen Heilmittel, die im Buche des Dioskorides vorkommen, geschrieben i. J. 372 (982/83) in Cordova, ferner ein biographisches Werk, enthaltend die Lebensbeschreibungen berühmter Ärzte und Philosophen in Spanien u. a. (W. A. 111 n. Ibn Abi U.). — **48.** **Ibn Ḥaijân**, mit vollem Namen **Abû Merwân Ḥaijân b. Chalaf b. Hosein b. Ḥaijân**, einer der hervorragendsten und zuverlässigsten Historiker Spaniens, Nachkomme eines Freigelassenen des Emirs 'Abderraḥmân b. Mo'âwija b.

Hišâm, aus Cordova, schrieb: Das Buch desjenigen, der sich über die Geschichte von Andalusien unterrichten will, in zehn Bänden, u. a. Er wurde geboren 377 (987/88) und starb im Rabî' I. 469 (1076). (Ibn Ch. I. 168, Übers. I. 479.) — **49.** Gayangos I. 430 verwechselt diesen Gelehrten mit dem Sohne des in Anmerkung 10 genannten Juristen Jaḥjâ b. Jaḥjâ, mit Muh. b. Jaḥjâ el-Leiṯî, der ziemlich früher gelebt hat. — **50.** C. I. 424 giebt die Biographie des Alchymisten Ǧâbir b. Ḥaijân nach Ibn el-Q.; in dieser ist unser Muh. b. Sa'îd el-Saraqosṭî erwähnt und von ihm berichtet, er habe in Kairo ein Buch über den Gebrauch des Astrolabiums von jenem Ǧâbir gesehen, das über 1000 Probleme enthalten habe (vergl. Art. 3); in diesem Art. über Ǧâbir trägt er auch noch den Namen „el-Asṭorlâbî", er wird sich also hauptsächlich mit der Verfertigung solcher Instrumente befafst haben. Vielleicht ist er auch identisch mit dem bei C. I. 392 genannten Verfasser einer Abhandlung über das Astrolabium, das nach dem Sternbild des Krebses das Saraṭânische genannt wird, mit Muh. b. Naṣr b. Sa'îd, welcher seine Abhandlung i. J. 511 (1117/18) verfafst haben soll, nur könnte dann dieses Datum nicht richtig sein, das sich allerdings auch bei H. Ch. III. 366 vorfindet, vielleicht bezieht sich dasselbe auf die Zeit der Abschrift. — **51.** Jûsuf b. 'Abdallâh b. Muh., Abû 'Omar, bekannt unter dem Namen Ibn 'Abdelbarr, geb. 368 (978/79) zu Cordova, war ein berühmter Traditionist, Rechtsgelehrter und Historiker, war auch eine Zeitlang Qâḍî von Lisabon und Santarem und starb 463 (?) zu Játiva. — **52.** Es ist dies der Logiker aus Bagdad, Abû 'Alî el-Ḥasan b. el-Samḥ, der Kommentator der Physik des Aristoteles, ein Zeitgenosse des Ibn el-Haiṯam, wohl zu unterscheiden von dem Spanier Abû'l-Qâsim Aṣbaġ b. Muh. b. el-Samḥ (allerdings ein Zeitgenosse des ersteren), dem Verfasser der „Einleitung zum Euklides". Steinschneider vermengt beide zu einer Person und wundert sich, dafs im Index zu Ibn Abi U. aus dieser einen Person zwei gemacht sind. (Beiheft XII. zum Centralblatt f. Biblioth. p. 53 und Z. D. M. G. 50 p. 406 (Index).) — **53.** Muh. b. Muh. b. Ḥâmid, Abû 'Abdallâh, 'Imâd eddîn el-Kâtib el-Iṣfahânî, geb. 519 (1125), studierte in Bagdad das Recht, ferner Litteratur und Traditionen. Er trat später in die Dienste Saladdins ein und nahm hier bald eine hohe und ehrenvolle Stellung ein. Nach dem Tode des letztern zog er sich ins Privatleben zurück und starb zu Damaskus im Ramaḍân 597 (1201). Er schrieb verschiedene historische und geographische Werke, so die Geschichte der Kriegszüge Saladdins gegen die Kreuzfahrer, und Dichterbiographien. (Ibn Ch. II. 74, Übers. III. 300; W. G. 284.) — **54.** 'Alî b. Ǧa'far b. 'Alî, Abû'l-Qâsim, bekannt unter dem Namen Ibn el-Qaṭṭâ', war ein bedeutender Sprach- und Litteraturkenner und Dichter, wurde im Ṣafar 433 (1041) in Sicilien geboren aus der Familie der Aglabiden, studierte in Spanien, reiste ums Jahr 500 nach Ägypten, wo er im Ṣafar 515 (1121) starb. Er schrieb eine Geschichte Siciliens und eine Auswahl aus 170 Dichtern Siciliens, genannt „die köstliche Perle". (Ibn Ch. I. 339, Übers. II. 265; W. G. 228.) — **55.** Der Astronom el-Ḥasan b. 'Alî b. 'Omar von Marokko erwähnt in seinem von J. J. Sédillot übersetzten „Traité des instruments astronomiques des Arabes" p. 127, dafs Ibrâhîm b. Jaḥjâ el-Zarqâla (sic) im Jahre 453 (1061) in Toledo astronomische Beobachtungen gemacht habe. Auch in den Mss., die für Alfons X. aus dem Arabischen ins Spanische übersetzt worden sind (vergl. Anmerkg. 43), findet sich folgende Stelle über el-Zarqâli: „Wir gehen nun zur Abhandlung über die *Ṣafîḥa* über, welche der gelehrte Verfertiger von Astrolabien, el-Zarqâl (sic), ein Einwohner von Toledo, für den König el-Mâmûn (1038—75) gemacht hat und welche er daher *el-Mâmûnije* genannt hat. Später liefs er sich in Sevilla nieder, wo er eine andere, vollkommenere *Ṣafîha* konstruierte und über deren Einrichtung und Gebrauch eine Abhandlung schrieb, welche er *el-'Abbâdije* nannte zu Ehren des Muh. b. 'Abbâd (1069—91), des Königs von Sevilla.“ (Gayangos I. 385.) — Dafs er auch die berühmte Wasseruhr in Toledo konstruiert haben soll, die ihm Hammer, Gayangos u. a. zuschreiben, ist mehr als unwahrscheinlich, denn der arabische Schriftsteller, der allein ausführlich darüber berichtet hat, el-Maqqarî, nennt (Maq. K. I. 96) als Verfertiger derselben einen 'Abderraḥmân ohne weitern Zunamen. Merkwürdigerweise hat A. Wittstein (Z. f. M. Ph., 39. Jahrg. hist.-litt. Abtlg. p. 41 ff.), der, mit Unrecht oder Recht sei hier nicht untersucht, die Geschichte dieser Wasseruhr ins Gebiet der Märchen verweist, den richtigen Namen el-Zarqâlîs nicht erkannt und den letztern deshalb für den Verfertiger der Wasseruhr gehalten, er sagt p. 42: „Seine eigentlichen Namen anlangend, halte ich mich an das, was M. Steinschneider zu Recht erkannt hat, darnach hiefs er Abû'l-Qâsim Ibn 'Abderraḥmân ...“ M. Steinschneider aber sagt in seiner oben (Anmerkg. 46) zitierten Abhandlung p. 97: „Leggendo questa nota 'sospettai di qualche inesattezza o confusione dalla parte del Gayangos. Il nome Abû'l-Qâsim b. 'Abderraḥmân — onde l'Hammer non ha esitato di adottare una parte, omittendo il vero nome del Zarqâli (Abû Isḥâq Ibrâhîm b. Jaḥjâ), assicurato da tutti i fonti — era per me cosa assai strana.“ — **56.** Es ist dies ein spanischer Rechtsgelehrter und Historiker von Ruf, geb. 451 (1059) zu Tortosa, reiste nach dem Orient, studierte dort unter verschiedenen berühmten Lehrern und hielt später Vorlesungen in Damaskus und Alexandria; am letztern Orte starb er 520 (1126), nach Andern 525 (W. G. 229 nach Ibn Ch. I. 479, Übers. II. 665). Nach Ibn Ch. hatte er auch Vorlesungen über Rechenkunst gehört in seiner Vaterstadt, also jedenfalls bei 'Abdallâh b. Firah. — **57.** Abû'l-Ḥasan 'Alî b. Ismâ'îl (Maq. K. II. 234 hat „Aḥmed“), bekannt unter dem Namen Ibn Seijide, aus Murcia, war sehr bewandert in der Sprachwissenschaft, Poetik, Logik und andern Disziplinen und schrieb verschiedene bedeutende Werke; er starb ums Jahr 460 (1068) nach el-Ḥomeidî (B. I. 410); Ibn Ch. (I. 342, Übers. II. 272) giebt das Todesjahr auf 458 an und bemerkt, سيده sei auszusprechen „Sîdah“. Nach dem Index librorum des Abû Bekr Muh. b. Chair (IX. Bd. der Bibl. arab.-hispana p. 423) schrieb er auch eine *Arǵûza*, es ist aber nicht angegeben, worüber dieselbe handelte; immerhin ist es kaum zweifelhaft, dafs es dieselbe *Arǵûza* über die Rechenkunst sei, welcher 'Abderraḥîm el-Šamûqî (s. Art. 296) eine andere entgegengestellt hat. — **58.** Muh. b. Aġlab b. Abî'l-Daus, Abû Bekr, aus Murcia, bewandert in Sprachwissenschaft und Litteratur, starb in Marokko 511 (1117/18). (B. V. 147.) Es ist dies vielleicht der Abhabuchr, qui dicebatur Deus (oder Heus), dessen Liber de mensuratione terrarum Gerard von Cremona ins Lateinische übersetzt hat, welche Übersetzung noch in Paris (Anc. fonds lat. 7266, 3° u. 7377 A, 3°) vorhanden ist. (Vergl. Wüstenfeld, die Übers. arab. Werke ins Lat. etc. p. 79; Libri, hist. des sc. mathém. en Italie, I. 299, II. édit. und Bibl. math. 11 (1897), p. 84—85.) — **59.** Über 'Ijâḍ el-Qâḍî sagt Ibn Ch. (I. 392, Übers. II. 417): El-Qâḍî Abû'l-Faḍl 'Ijâḍ b. Mûsâ b. 'Ijâḍ el-Sebtî (von Ceuta) war einer der ersten Traditionisten seiner Zeit, ebenso bewandert in der Sprachwissenschaft; er kam aus seiner Vaterstadt nach Cordova, um dort zu studieren, war dann längere Zeit Qâḍî von Ceuta und starb in Marokko im Ǵumâdâ II. 544 (1149). (Vergl. auch W. G. 246.) — **60.** Muh. b. Jûsuf b. 'Ab-

dallâh, Abû 'Abdallâh, bekannt unter dem Namen Ibn 'Ijjâd aus Liria (Provinz Valencia), ein Schüler von Ibn Baškuwâl, war ein bedeutender Traditionist und Historiker, schrieb eine Sammlung von Biographien berühmter Männer, betitelt *„maǵmû'“* (Sammlung), eine Fortsetzung zur *mašicha* (Versammlung oder auch Würde der Scheiche) seines Vaters; er wurde geboren im Ša'bân 544 (1150) und starb 603 (1206/07). (B. V. 288.) Er wird von Wüstenfeld, die Geschichtschreiber der Araber etc., nicht erwähnt. — **61.** Über Ibn Seijid habe ich keine Angaben in den Quellen gefunden; es ist nicht wohl möglich, dafs es der in Art. 259 genannte Ibn Seijide sei, denn dieser starb schon 460 (s. Anmerkg. 57). — **62.** Der *Ṣaḥîḥ* (oder *el-ǵâmi' el-ṣaḥîḥ*) ist ein berühmtes Traditionswerk des Abû 'Abdallâh Muh. b. Ismâ'îl el-Bochârî (gest. 256), zu dem Abû 'Abdallâh Muh. b. Manṣûr el-Siǵilmâsî einen Kommentar geschrieben hat (vergl. H. Ch. II. 533 und W. G. 62). — **63.** Aḥmed b. Ibrâhîm b. el-Zobeir, Abû Ǵa'far, aus Granada, geb. 627 (1230), ein Sprach- und Traditionskenner, schrieb eine *ṣilet el-ṣile,* d. i. eine Ergänzung der Gelehrtengeschichte des Ibn Baškuwâl, wie auch Ibn el-Abbâr (s. Vorwort); er starb i. J. 708 (1308/09). (W. G. 380.) — **64.** Es ist dies der bekannte Astronom el-Zarqâlî (s. Art. 255); da ihn Ibn el-Abbâr hier erwähnt, so hat er wohl auch einen eigenen Artikel über ihn geschrieben, aber es fehlen in dem noch vorhandenen Ms. leider die Buchstaben ا bis ث. Die Stelle zeigt uns also, dafs el-Zarqâlî über mathematische Wissenschaften Vorlesungen gehalten hat. — **65.** M. Amari (Storia dei Musulmani di Sicilia, Vol. III. p. 689) versetzt den Muh. b. 'Îsâ an den Hof Rogers II. nach Palermo; woher er dies hat, weifs ich nicht, es ist wohl nur eine Vermutung, da Roger der Astrologie sehr zugethan war; immerhin hat er zur Zeit Rogers (gest. 1154) gelebt, da sein Vater 'Îsâ b. 'Abdelmun'im ein Zeitgenosse Abû'l-Ṣalts (gest. 1134) war. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs dieser Muh. b. 'Îsâ b. 'Abdelmun'im identisch ist mit dem von Ibn Chaldûn in den Prolegomena (Not. et extr. des mss. T. 21. p. 134) genannten Ibn el-Mun'im, dem Verfasser einer arithmetischen Abhandlung, betitelt *„fiqh el-ḥisâb“* (das Verständnis der Rechenkunst), (s. H. Ch. IV. 459), die von Ibn el-Bennâ zu seinem Kommentar zum *Talchîṣ* als Grundlage genommen wurde. Über den neben Ibn el-Mun'im von Ibn Chaldûn genannten el-Aḥdeb kann ich keine weitern Angaben bringen, H. Ch. V. 27 erwähnt nichts anderes als den Titel seines arithmetischen Werkes *„el-kâmil fî'l-ḥisâb“* (das Vollständige über die Rechenkunst), wahrscheinlich ist seine Quelle auch nur Ibn Chaldûn. (Vergl. auch Cantor, Vorlesgn. I. p. 689, II. Aufl. p. 756.) (Merkwürdigerweise fehlt diese Stelle über die beiden Abhandlungen des Ibn el-Mun'im und des el-Aḥdeb in der Beiruter Ausgabe der Proleg.) — **66.** C. II. 99 hat vielleicht richtiger *„bi'l-waǵh nâfich“* (der ins Gesicht Blasende); so wurden Leute jener Zeit genannt, die vorgaben, durch Anhauchen des Menschen Krankheiten, besonders die Hundswut, heilen zu können; im Spanischen hiefsen sie „Saludadores“. C. macht übrigens aus dieser Persönlichkeit zwei, p. 99 einen 'Abdallâh b. Sahl Abû Muh., bekannt unter dem Namen *bi'l-waǵh nâfich,* den er in Atalaya (?) i. J. 553 sterben läfst, und p. 128 einen 'Abdallâh b. Muh. b. Sahl el-Ḍara (?), den er zum Erzieher des Sohnes des Emirs Abû 'Abdallâh b. Sa'd macht und dem er das Todesjahr 571 beilegt. — **67.** Muh. b. 'Abdallâh b. Sa'îd b. el-Chaṭîb Lisân ed-dîn el-Qorṭubî, Abû 'Abdallâh, meistens bekannt unter dem Namen Ibn el-Chaṭîb, wurde in Granada 713 (1313/14) geboren, studierte besonders Rechtswissenschaft, Geschichte und Philosophie, beschäftigte sich aber auch mit Medizin und Mathematik. Er wurde von dem Fürsten von Granada, Abû'l-Ḥaǵǵâǵ Jûsuf (733—55) zum Wezir ernannt, dann aber von seinen Neidern der Verräterei angeklagt, ins Gefängnis geworfen und 776 (1374/75) umgebracht. Er ist der zweitletzte der hervorragenden arabischen Historiker Spaniens (der letzte ist Ibn Chaldûn) und hat eine grofse Zahl von Schriften verfafst, so die *Iḥâṭa fî târîch Ġarnâṭa* (eine Geschichte Granadas und seiner berühmten Männer), aus welcher C. eine Anzahl Biographien in Übersetzung veröffentlicht hat. (C. II. 71 ff.; Gayangos II. 363; Maq. K. III. u. IV. Bd., diese beiden Bände enthalten das Leben Lisân ed-dîns.) — **68.** S. Munk hat im Diction. des sciences philos. Paris 1852, VI. p. 907 Folgendes über Ibn Tofeil: C'est dans le même sens qu'Abou Ishâk el-Bitrôdjî parle de son maître Tofeil; dans l'introduction de son traité d'astronomie, où il cherche à substituer d'autres hypothèses à celles de Ptolémée, il s'exprime ainsi: „Tu sais, mon frère, que l'illustre Kâdhi Abou Bekr ibn Tofeil nous disait, qu'il avait trouvé un système astronomique et des principes pour ces différents mouvements, autres que les principes qu'a posés Ptolémée et sans admettre ni excentrique ni épicycle, et avec ce système, disait-il, tous ces mouvements sont avérés et il n'en résulte rien de faux." Il avait aussi promis d'écrire là-dessus, et son rang élevé dans la science est connu. — **69.** H. Ch. III. 63 hat über diese Rechnung der Drachmen und Dinare folgendes: „Ars drachmas et denarios computandi, qua ratio cognoscitur quantitates ignotas arithmeticas eliciendi, quarum numerus aequationes algebraicas excedit, et hujus quantitatis excedentis caussa illae quantitates ignotae Drachma, Denarius, Obolus (el-fals) et aliter cognominantur. Ejus utilitas eadem est quae reductionis per aequationem (h. e. algebrae), quatenus hic genera aequationis multiplicata sunt." Nach diesem wäre also diese Kunst die Auflösung der unbestimmten Gleichungen. — **70.** Vergl. M. Cantor, Vorlesgn. über Gesch. der Math. I. p. 636 (II. Aufl. p. 697) und Ibn Chaldûns Prolegom. in den Not. et extraits des mss. T. 21. p. 189, 194, 195 u. 198. Über den gleichen Stoff schrieben auch die spanischen Araber Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Mûsâ, bekannt unter dem Namen Ibn Arfaʿ Râs, gest. 500 (1106/07) nach H. Ch. (593 nach Kut.) und Moḥjî ed-dîn b. el-ʿArabî (genannt der gröfste Scheich), gest. 638 (1240/41). — **71.** Riḍwân erzählt in der Einleitung, sein Vater habe in Damaskus solche Uhren verfertigt, deren Schäden nach seinem Tode niemand, auch nicht Muhaḏḏab ed-dîn b. el-Naqqâš (vergl. Art. 312), der sich über dieselben absprechend geäufsert hatte, zu reparieren imstande gewesen sei. Er habe sie nun aber wieder hergestellt und Verbesserungen an denselben vorgenommen und sich entschlossen, seine Kunst in diesem Buche niederzulegen. — Das Buch enthält viele Zeichnungen, unter anderm auch eine ganze Uhr. — **72.** Hier ist bemerkt, dieses Buch sei verfafst worden für die Bibliothek des Sultans el-Melik el-Moẓaffar Jûsuf b. el-Melik el-Manṣûr, welch' letzterer i. J. 617 als Fürst von Ḥamât gestorben ist; H. Ch. III. 567 aber hat: el-Melik el-Moẓaffar Abû Manṣûr Jûsuf b. ʿOmar, Herr von Jemen, was unmöglich ist, da dieser ums Jahr 680 regiert hat (s. Art. 394). H. Ch. bemerkt auch, el-Fârisî stütze sich nach seiner eigenen Angabe in seinem Buche, dem H. Ch. blofs den Titel *„zîǵ"* (astron. Tafeln) giebt, hauptsächlich auf die Beobachtungen des Farîd ed-dîn Abû'l-Ḥasan ʿAlî b. ʿAbdelkerîm el-Širwânî, bekannt unter dem Namen el-Fehhâd, des Verfassers verschiedener Tafeln, dessen Beobachtungen sich ungefähr über die Jahre 540—570 erstreckt hätten; über diesen Astronomen habe ich keine weitern Angaben gefunden. — **73.** Mag auch an dieser Geschichte ein wahrer Kern sein, ihre Einkleidung zeigt doch deutlich, dafs sie zu dem Zwecke gemacht resp. ausgeschmückt worden ist, den ungläubigen Franken gegenüber die Überlegenheit der Gläubigen des Islams in den Wissenschaften recht deutlich hervortreten zu lassen. — **74.** L. A. Sédillot bestimmt in der Einleitung (p. 13—14) zu der veröffentlichten Übersetzung des Hauptwerkes des Ḥasan b. ʿAlî b. ʿOmar aus astronomischen Daten desselben die Zeit seiner Abfassung auf das Jahr 1229 oder 1230, allein diese Bestimmung ist nicht absolut sicher. — **75.** Brockelmann, Gesch. d. arab. Litteratur I. p. 464 hat 663 (1264) und bemerkt in einer Note, Barhebraeus (hist. dynast. p. 485) habe als Todesjahr 1262, was unrichtig ist, Barhebr. giebt gar kein Todesjahr an; das erstere Datum stammt wohl aus Casiri I. 188, wo der 19. Rabîʿ II. 663 als Todestag angegeben ist und unrichtig hinzugefügt ist: a. Chr. 1264, der 19. Rabîʿ II. 663 fiel in den Febr. d. J. 1265. H. Ch. hat nach seiner gewohnten Oberflächlichkeit in solchen Daten drei verschiedene Angaben: I. 502 steht: c. ann. 700, III. 538: post 660, IV. 473: c. 660. — **76.** H. Ch. führt IV. 259 ein Werk an, betitelt: *ʿomdet el-râʾiḍ we ʿuddet el-fâriḍ fiʾl-ḥisâb,* ein Buch über Rechenkunst und Erbteilung, von Ġemâl ed-dîn Abûʾl-ʿAbbâs Aḥmed b. ʿAlî b. Ṯamât Qâḍî el-Hemmâmîje, der vielleicht mit unserm Autor identisch ist. — **77.** Dieser von el-Maqqarî viel zitierte Ibn Saʿîd ist ein spanischer Historiker, dessen voller Name ʿAlî b. Mûsâ b. Muh. b. ʿAbdelmelik b. Saʿîd, Abûʾl-Ḥasan ist. Er wurde geboren in Granada aus vornehmer Familie im Šauwâl d. J. 610 (1214), nach andern 605. Er machte grofse Reisen, besuchte die Städte Kairo, Damaskus, Moṣul, Bagdad und Mekka und traf auch mit dem Eroberer Bagdads, Hôlâgû Chân, zusammen, dessen Gast er einige Zeit war. Er verfafste eine Reihe von historischen, biographischen und geographischen Werken, unter andern auch eine Bearbeitung der Geographie des Ptolemäus, in Oxford (I. 1015). Er starb nach den Einen in Damaskus 673 (1274/75), nach Andern in Tunis 685 (1286). (Maq. K. I. 446—502; W. G. 353.) — **78.** Jaḥjâ b. Abîʾl-Šukr bemerkt in der Vorrede zum Ms. 1101, er habe, nachdem er ein Kompendium (*cholâṣa*) des Almagestes verfafst hatte, noch einen Nachtrag oder Ergänzung dazu geschrieben, in welchem er mehr die neuern Beobachtungen, besonders die in Merâġa gemachten, zu Grunde gelegt habe. Am Schlusse der Vorrede sagt er, er habe dieses Buch nach seiner Vollendung der Bibliothek des Abûʾl-Ḥasan ʿAlî b. Muh. b. el-Ḥasan el-Ṭûsî zum Geschenk gemacht; es ist dies der Sohn Naṣîr ed-dîns, der ihm als Vorsteher der Sternwarte in Merâġa nach seinem Tode gefolgt ist (vergl. Art. 368). — **79.** Er schrieb für ihn eine Logik, betitelt: *el-imbarûrîje* (die kaiserliche). Die Darstellung, die Abulfid. von seinem Aufenthalt bei Manfred giebt, ist historisch und kulturhistorisch interessant. Ich verweise den Leser auf die latein. Übersetzung, die Reiske (l. c. p. 144—151) davon giebt. — **80.** Dieses Werk wurde nach Useners Ansicht i. J. 1323 durch einen unbekannten Gelehrten (wahrscheinlich Byzantiner) aus dem Persischen ins Griechische übersetzt, ein Exemplar dieser Übersetzung befindet sich in Florenz (Cod. Laurent. plutei XXVIII), die Eingangsworte desselben lauten: *ἀπὸ φωνῆς τοίνυν τοῦ Σὰμψ πουχαρῆς ἀνδρὸς τὸ γένος Πέρσου πᾶσαν λογικὴν παιδείαν εἰς ἄκρον ἐξησκημένου ταύτην ... τὴν διδασκαλίαν ἀκήκοα· ἣν καὶ εἰς μνήμην γραφῇ παραδέδωκα, ὡς ἂν μὴ τῷ χρόνῳ καὶ αὖθις ἡ θαυμασία ἐπιστήμη τοῖς τῆς λήθης βυθοῖς ἐναποκρυβῇ* etc. Ich kann diese Stelle nicht anders verstehen, als dafs der Schreiber des Buches diese Wissenschaft (d. h. die Astronomie) bei Šems ed-dîn el-Bochârî seiner Zeit gehört hatte und jetzt das Gehörte schriftlich in diesem Buche niedergelegt hat, damit es nicht in Vergessenheit ge-rate, sondern der Nachwelt überliefert werde. Es ist also nicht eine direkte Übersetzung eines persischen Buches, sondern wohl mehr eine Ausarbeitung und Übertragung eines persischen Kollegienheftes ins Griechische. Nehmen wir nun an, der Verfasser habe ca. 10 Jahre vor der Niederschrift dieses Buches bei Šems ed-dîn gehört, also i. J. 1313, so mag dieser damals ca. 30—40 Jahre alt gewesen sein, es ist also nicht notwendig, wie Usener und nach ihm M. Cantor (Vorlesgn. I. 430, 1. Aufl., 474, 2. Aufl.) es thun, auf Šems ed-dîn el-Samarqandî zurückzugreifen, der wohl i. J. 1313 kaum mehr am Leben war; immerhin war diese Persönlichkeit die gegebene, wenn man, wie Usener bemerkt, den Namen Šems eddîn el-Bochârî in der arabischen Litteraturgeschichte vergeblich gesucht hat; ich habe allerdings über sein Leben auch keine weitern Angaben gefunden. Es ist möglich oder sogar wahrscheinlich, dafs er der Sohn des ums Jahr 700 (1320) über Transoxanien geherrscht habenden Mubârakšâh war, der nach Deguignes (Hist. générale des Huns, des Turcs, des Mongols etc., Paris 1756, T. I. p. 285) ein Ururenkel Ǧengiz-Châns (Mubârakšâh b. Kara Hôlâgû*) b. Menouka b. Čagatâi b. Ǧengiz-Chân) gewesen sein soll. — Unter den etwas entstellten arab.-persischen Namen, die in einer von Usener (l. c. p. 13—14) mitgeteilten Stelle eines Werkes von Theodorus Meliteniotes, betitelt *ἀστρονομικὴ τρίβιβλος*, vorkommen, habe ich noch denjenigen identifizieren können, zu dem Usener hinzufügt: memoria prorsus obscura et vitii suspecta; *Χουσάμη σαλάρ* ist ʿAlî b. Fadlallâh Hosâm ed-dîn el-Sâlâr (vergl. Art. 482). — **81.** Der Biograph Ibn el-Bennâs, Ahmed Bâbâ el-Timbuktuwî (geb. 1556), giebt zwei Daten für seine Geburt an, 649 (1251) und 654 (1256) (vergl. Biographie d'Ibn el-Bennâ par Aristide Marre, l. c. p. 1 etc.), el-Qalasâdî in der Einleitung zu seinem Kommentar zum Talchîs (Gothaer Ms. 1477) giebt das Jahr 656 (1258) an. Da die Angaben so verschieden sind, so wäre ich versucht, noch eine spätere Zeit anzunehmen, da ich nach den jedenfalls zuverlässigern Angaben Ibn Chaldûns seinen Tod kaum oder nur wenig vor 740 annehmen darf, obgleich el-Qalasâdî in dem genannten Kommentar das Todesjahr auf 721 ansetzt. Es könnte ja allerdings möglich sein, dafs Ibn Chaldûn die Lebensdaten seines Lehrers el-Abbelî (s. Art. 414) nicht in der richtigen Reihenfolge aufgezählt hätte, so dafs dieser den Ibn el-Bennâ vor seiner Wallfahrt nach Mekka, die 735 stattfand, in Marokko gehört haben könnte; da aber Ahmed Bâbâ zwei und el-Qalasâdî anderthalb Jahrhunderte nach Ibn el-Bennâ gelebt hat, Ibn Chaldûn aber noch beinahe sein Zeitgenosse war, so verdienen des letztern Angaben das gröfsere Vertrauen und möchten mithin sowohl Geburt als Tod des Ibn el-Bennâ mit 654 resp. 721 zu früh angesetzt sein. — **82.** Es ist möglich, dafs dieser Abû Ishâq el-Ǧezûli der Verfasser des Kommentars zu der kleinern Bearbeitung der Euklidischen Elemente durch Nasîr ed-dîn ist, der in den Katalogen des Brit. Mus. und der Aja Sofia nur Abû Ishâq genannt ist (vergl. Art. 368). — **83.** M. Cantor sagt in seinen Vorlesungen (I. 689, 1. Aufl., 757, 2. Aufl.): „Auffallenderweise fehlt in diesem von einem Landsmanne Albannâs herrührenden Verzeichnisse die durch Ibn Chaldûn so hoch gestellte Aufhebung des Schleiers, fehlt in ihm auch der Auszug aus dem kleinen Sattel." Dies ist unrichtig, im Verzeichnis der Schriften Ibn el-Bennâs steht: „Der Talchîs der Rechenkunst und Kommentar dazu"; der Talchîs (d. h. der Auszug aus dem sog. kleinen Sattel, vergl. Art. 495) ist also erwähnt, und nach der Einleitung zum Kommentar des

*) Nicht zu verwechseln mit Hôlâgû-Chân, einem Enkel Ǧengiz-Châns.

Talchîṣ von el-Qalaṣâdî (Gothaer Ms. 1477) ist die Abhandlung, betitelt „das Aufheben des Schleiers“, eben jener Kommentar zum Talchîṣ; el-Qalaṣâdî sagt nämlich in jener Einleitung, wo er die Werke Ibn el-Bennâs anführt: „Das Aufheben des Schleiers, womit er einen Kommentar zu dem Werke, das wir hier behandeln (wörtlich: auf dessen Wege wir sind), zu geben beabsichtigt hat.“ Also ein Kommentar zum Talchîṣ und nicht zum „kleinen Sattel“ ist die Abhandlung „das Aufheben des Schleiers“. M. Cantor hat sich wahrscheinlich durch die von A. Marre beigefügte Note (3) irreführen lassen, die ungeschickt abgefafst ist. — Das Verzeichnis der Werke des Ibn el-Bennâ durch Aḥmed Bâbâ zeigt einige Abweichungen von demjenigen des Qalaṣâdî, das übrigens, wie er selbst bemerkt, nicht vollständig ist, in den vorhandenen Angaben aber wohl genauer als dasjenige des später lebenden Aḥmed Bâbâ sein wird; so zieht dieser die Abhandlungen 5), 7) und 8) in eine zusammen mit dem Titel: „Die vier Abhandlungen, die Regeln, die Prinzipien und die Einleitungen.“ Die Abhandlungen 10), 12 und 13) sind in keinem der beiden Verzeichnisse genannt. — **84.** Meine Quellen für dieses Datum sind folgende: 1. Im Brit. Mus. (1342, 2°) befindet sich ein Kommentar von Kemâl ed-dîn el-Turkomânî zu dem *Mulachchaṣ*, gewidmet dem Sulṭân b. Sulṭân Maḥmûd Ǧâni-Beg Châن, sehr wahrscheinlich der Chân der goldenen Horde von Kiptschak, Ǧâni-Beg, der Sohn Oesbegs, gest. i. J. 758 (1357). 2. In München (808, 3°) und in Gotha (1928 u. 29) befindet sich noch der *Qânûnče* (kleine Kanon) des Ǧaǵmînî; die Abschrift des erstern Ms. ist aus dem Jahre 741 datiert; in der Beschreibung des zweiten Ms. sagt Pertsch, Ǧaǵmînî sei nach einer Randbemerkung auf fol. 1ᵇ des Gothaer Ms. 1930, welches einen Kommentar zum *Qânûnče* enthält, i. J. 745 d. H. gestorben. Vergl. auch Z. D. M. G. 53. Bd. p. 539. — **85.** Ich glaube nicht, dafs hier *ẓilâl* mit „Tangenten“ zu übersetzen sei, denn das Werk handelt nach C.'s Angaben über die Sonnenuhren. Dieser Autor ist vielleicht trotz der Jahrzahl 762, auf die man sich bei C. nicht verlassen kann, identisch mit dem in Art. 388 behandelten Muh. b. Ibrâhîm b. Aḥmed Abû 'Abdallâh, zumal C. noch hinzufügt: plurima etiam exhibet sciotherica inventa demonstratque. Es ist allerdings zu bemerken, dafs man hier auf die Übereinstimmung der Namen nicht zu grofses Gewicht legen darf, denn der Name Muh., mit der Kunje Abû Abdallâh verbunden, kommt aufserordentlich häufig vor. — **85ᵃ.** Dem Fürsten Ulûǵ Beg habe ich keinen eigenen Artikel gewidmet, weil die Tafeln jedenfalls nicht von ihm, wie verschiedene Gelehrte zu glauben scheinen, sondern von den von ihm angestellten Astronomen (s. Art. 429, 430 und 438) verfafst worden sind; wahrscheinlich hat er nur das Vorwort zu den Prolegomena (in der franz. Übers. von L. A. Sédillot die Seiten 1—6) geschrieben. — **86.** Nach dem Gothaer Ms. 1391 wäre dieses Werk von einem Muh. Šems ed-dîn el-Karâdîsî verfafst, und Ḥasan b. Chalîl el-Ṭîbî (so steht es hier statt Ṭobnî) wäre nur der Abschreiber, der mit der Abschrift i. J. 1137 (1724/25) fertig geworden sei; nach dem Pariser Ms. 2543, das von der Hand des Autors Ḥasan b. Chalîl i. J. 882 selbst geschrieben wurde, kann dies aber nicht richtig sein. — **87.** Es ist dies eines der bedeutendsten Werke über die Erbteilung von Abû'l-Qâsim Aḥmed b. Muh. b. Chalaf el-Ḥaufî aus Sevilla, gest. 588 (1192). — **88.** Ein grofser Rechtsgelehrter und bedeutender Philosoph, Abû 'Abdallâh Muh. b. Jûsuf el-Senûsî, gest. in Maǵreb (Tlemsen?) 895 (1490), schrieb einen Kommentar zu dem Gedicht *biǵjet el-ṭullâb* (der Wunsch der Studierenden), über das Astrolabium, von Abû 'Abdallâh Muh. b. Aḥmed b. Ḥabbâk (s. Art. 435), in Algier (613, 8° und 1458, 2°). —

89. Abû'l-Fadl Ahmed b. 'Alî b. Muh. b. Hağar el-'Asqalânî, ein bedeutender Historiker und Traditionist, geb. 773 zu Askalon, gest. 852 zu Kairo, schrieb nach H. Ch. III. 419 ein arithmetisches Werk, betitelt: *el-risâle el-'izzîje fî'l-hisâb* (die 'Izz ed-dîn'sche Abhandlung über die Rechenkunst). (W. G. 487.) — **90.** Muh. b. 'Abderrahmân, Abû'l-Chair, Šems ed-dîn el-Sachâwî, ein trefflicher Historiker, Schüler des eben genannten Gelehrten, hielt um 897 Vorlesungen in Mekka und starb i. J. 902 (1496/97). (W. G. 504.) — **90a.** Brockelmann, Gesch. d. arab. Litt. II. p. 167, unterscheidet einen Sibt el-Mâridînî den Ältern von seinem Sohne Muh. dem Jüngern, der 934 (1527/28) gestorben sein soll. Dies ist unrichtig, die Verwechslungen von Arbeiten, von denen Brockelmann spricht, beziehen sich nicht auf Vater und Sohn, sondern auf Grofsvater und Enkel; 'Abdallâh b. Chalîl b. Jûsuf el-Mâridînî ist der Grofsvater mütterlicherseits von Bedr ed-dîn Sibt el-Mâridînî. Warum Brockelmann den Grofsvater unter die Astronomen und den Enkel unter die Mathematiker eingereiht hat, verstehen wir nicht, gehören doch die Hauptwerke des Enkels der Astronomie an; diese beiden Wissenschaften sind überhaupt bei den Arabern schwer zu trennen. — **91.** Wahrscheinlich veröffentlichte aus diesem Ms. Th. Hyde die Tafeln der Fixsterne von Muh. b. Abî Bekr el-Tîzînî, die er seinen in Oxford i. J. 1665 herausgegebenen Tabul. longit. ac. latit. stellar. fixar. Ulugh Beighi angefügt hat (vergl. Art. 438). Im Titel dieser Sterntafeln des Tîzînî heifst es, sie seien für das Jahr 940 (1533/34) aufgestellt worden, dies würde nicht gut mit dem im Texte angegebenen Datum 896 stimmen, wäre aber keineswegs absolut unmöglich; es ist übrigens noch daran zu erinnern, dafs es auch vorgekommen ist, dafs astronomische Tafeln für ein späteres Datum als dasjenige der Herausgabe berechnet worden sind. — **92.** Vergl. die Besprechung dieser Übersetzung von C. A. Nallino in der Rivista geografic. italiana, anno V, Fasc. IV. 1898; hier fügt C. A. Nallino noch die Notiz bei, dafs die Nautik des türkischen Admirals sich auf die Werke zweier arabischer Nautiker stütze, die im Pariser Ms. 2559 noch vorhanden sind, nämlich des Ahmed b. Mâgid b. Muh. el-Sa'dî (9. Jahrh. d. H.) und des Soleimân b. Ahmed b. Soleimân el-Mahrî (10. Jahrh. d. H.). — **93.** Bekanntlich wurde, bevor Steinschneider das genannte hebr. Ms. des Vaticans entdeckt hatte, die Stelle Ibn Chaldûns in seinen Prolegomena, wo er von einem vortrefflichen Buche über die Rechenkunst, betitelt *kitâb el-hassâr el-sagîr*, spricht, so verstanden, als habe dieses Buch den Titel *el-hasâr el-sagîr* (der kleine Sattel) gehabt; wenn nun aber *el-hassâr* (mit zwei s = der Schilfmattenflechter) der Beiname des Verfassers sein soll (was freilich nicht eher als sicher hingestellt werden darf, bevor das Ms. von Gotha genau geprüft worden ist), so mag wohl der Titel des Buches etwa *el-kitâb el-sagîr fî'l-hisâb* (das kleine Buch über die Rechenkunst) gelautet haben, denn es ist wohl nicht anzunehmen, dafs der Beiname des Verfassers *el-hassâr el-sagîr* (der kleine Schilfmattenflechter) gewesen sei (was freilich nicht unmöglich wäre); vielleicht hat derselbe noch ein gröfseres Werk über Arithmetik verfafst, wie dies ja bei sehr vielen Gelehrten der Fall gewesen ist.

Nachträge und Berichtigungen.

Zum Vorwort p. III: Von Brockelmanns Geschichte der arabischen Litteratur ist nun auch noch der 1. Teil des 2. Bds. erschienen.

Zu den Quellen p. VIII: Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Bd. (1. Aufl. 1880, 2. Aufl. 1894). — Hankel, H., Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. 1874. — M. Reinaud, Mémoire géogr., histor. et scientifique sur l'Inde, Paris, 1849.

Z. D. M. G. = Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Leipzig.

Z. f. M. Ph. = Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, gegenwärtig herausgegeben von R. Mehmke und M. Cantor. Leipzig.

Bibl. math. = Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von G. Eneström. Stockholm. Neue Folge.

Nach Art. 3 ist einzuschalten: **3ª.** Ṯâ'ûfîl b. Ṯûmâ, d. h. Theophilus, der Sohn des Thomas, ein maronitischer Christ aus Edessa gebürtig, das Haupt der Astrologen des Chalifen el-Mahdî (158—169, 775—785), sehr geschickt in seinen Prophezeiungen; er soll auch den Homer aus dem Griechischen ins Syrische übersetzt haben. Er starb beinahe 90 Jahre alt i. J. 169 (785). (Abulfar. 228, Übers. 148; Ibn el-Q. n. d. Münchener Ms. 440, fol. 44ᵇ.)

Nach Art. 16 ist einzuschalten: **16ª.** Salam (oder Salm oder Salmân) (wird von G. Flügel im Index zum Fihr. unterschieden von Sallâm el-Abraš, dem Übersetzer der Physik des Aristoteles) war mit Sahl b. Hârûn (gest. 245, 859 n. Ibn Ch. Übers. I. 511) zusammen Vorsteher der Bibliothek (beit el-ḥikme = Haus der Weisheit) el-Mâmûns; er verbesserte und kommentierte mit Abû Ḥossân zusammen die von andern gemachte Übersetzung des Almagestes des Ptolemäus; von einer eigenen Übersetzung dieser beiden Gelehrten spricht nämlich der Fihr. nicht, er nennt auch den Salam p. 120 nur als Übersetzer aus dem Persischen ins Arabische. (Fihr. 120, 243, 268 und 305, Übers. 20.)

Zu Art. 29: Nachträglich finde ich bei Mas'ûdî (Trad. par Barbier de Meynard, VII. 287) die Angabe, daſs Abû Zakarîjâ Jaḥjâ i. J. 233 (847/48) im Alter von 75 Jahren in Medina gestorben sei.

Zu Art. 39: Statt „Über die Berechnung der sieben Klimata, unvollständig", soll es heiſsen: Über die Kenntnis der Zeiten, während deren der Mond über oder unter der Erde sich befindet (nur 1 Blatt), und über die Berechnung (?) der sieben Klimata (ebenfalls nur 1 Blatt), ...

Zu Art. 53: p. 29, Z. 17 v. o. ist mit dem „Buch der Tausende" nicht das vorher (Z. 12) genannte „Buch der Tafeln *el-hazârât*" (die Tausende, oder Jahr-tausende) gemeint, sondern dasjenige, dessen arabischer Titel lautet: *kitâb el-ulûf*. Das Buch der Tafeln *el-hazârât* könnte vielleicht das von Athelard von Bath übersetzte Werk, betitelt: *zîğ Ğa'far* sein (vergl. Art. 19).

Zu Art. 55: Als Quelle ist aufser dem Fihr. noch hinzuzufügen: Münchener Ms. 440 des Ibn el-Q., fol. 88ᵃ; hier steht el-Dâbirânî (?) statt el-Dandânî.

Zu Art. 66: p. 37, Z. 17 v. u. haben wir als Schrift v. Ṯ. b. Q. angeführt: de horometria, Escurial (955, 7°); dies ist sehr wahrscheinlich seine Schrift „über die Sonnenuhren" (s. p. 35, Z. 15 v. u.), sie befindet sich auch in der von Köprîlizâdeh gegründeten Bibliothek zu Konstantinopel, unter dem Titel: *kitâb fi'l-rochâmât* (vergl. H. Ch. VII. 126).

Zu Art. 77: Die Sphärik des Theodosius in der Übers. des Q. b. L., gemacht für Abû'l-'Abbâs, den Sohn des Chalifen Mo'taṣim, befindet sich auch in Cambridge (13).

Zu Art. 96: Es ist hier zu verweisen auf Art. 422. Ferner ist als Quelle aufser dem Fihr. noch anzuführen: Münchener Ms. 440 des Ibn el-Q., fol. 161ᵇ.

Zu Art. 104: Nachträglich finde ich in Ibn Doreids genealog.-etymol. Handbuch (herausg. v. Wüstenfeld, Göttingen, 1854) p. 171 den Eigennamen „Nağabe", es wird also diese Lesart des Ibn el-Q. derjenigen des Fihr. „Nağîje" oder „Nağije" vorzuziehen sein.

Zu Art. 108: Der hier genannte Jûsuf el-Qass wird der Vater des in Art. 131 behandelten Jûḥannâ b. Jûsuf b. el-Ḥâriṯ el-Qass sein, denn dieser selbst kann es aus zeitlichen Gründen nicht sein; er hat also das Buch der Dreiecke des Archimedes ganz oder teilweise ins Arabische übersetzt; da dieses Buch an mehreren Stellen (s. auch den Art. „Archimedes" im Fihr. p. 266, Übers. 18 und 50) genannt wird, so mufs ein solches zu jener Zeit noch existiert haben.

Zu Art. 157ᵃ: Am Schlusse dieses Art. verweise ich auf die im Fihr. (p. 284 f., Übers. 41 f.) aufgezählten Instrumentenkünstler; darunter befindet sich ein Ğâbir b. Sinân el-Ḥarrânî, der möglicherweise der Vater von el-Battânî sein könnte.

Zu Art. 164: Dieser Autor ist der Neffe von Nr. 129.

Zu Art. 166: Das Münchener Ms. 440 des Ibn el-Q. fol. 151ᵇ hat b. el-Qalânisî statt b. el-Balensî.

Zu Art. 167: Abû Sa'îd (so nach dem Fihr. p. 283, Übers. 40, das Münchener Ms. 440, fol. 151ᵃ hat Abû'l-Ḥasan), der Onkel Abû'l-Wefâs, war sehr bewandert in den alten Wissenschaften, besonders auch in der Mathematik; er schrieb ein Buch mit c. 600 Blättern „über die Anfänge *(matâlî')* der Wissenschaften" für Schüler.

Zu Art. 169: Zeile 9 v. o. statt „Abî Ḥâkim" hat das Münchener Ms. 440, fol. 89ᵇ „Abî Ḥâtim".

Zu Art. 176: Über Konstruktion und Gebrauch des Astrolabiums ist auch in latein. Übers. des Joh. Hispalensis vorhanden zu Oxford (Coxe, P. I. Colleg Merton. Nr. 259, 3°) und Paris (7292, 14°).

Zu Art. 185: Zu der Schrift Nr. 1 ist zu bemerken: Diese Abhandlung hat Woepcke in franz. Übersetzung, aber etwas verkürzt, veröffentlicht in seinem Buche: L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, p. 117—124. — Zu Nr. 9 ist zu bemerken: Eine kurze Stelle aus dieser Schrift wurde in franz. Übersetzung veröffentlicht von Woepcke in seiner Abhandlung „Trois traités arabes sur le compas parfait“, p. 112—114 (in den Notices et extr. des mss. T. XXII. 1).

Zu Art. 186: Nach den *čahâr maqâle* (Vier Abhandlungen) von Niẓâmî-i ʿArûḍî-i Samarqandî, ins Englische übersetzt von E. G. Browne, M. A. (s. the Journal of the royal asiat. Soc. of Gr. Brit. and Irel. Oct. 1899, p. 824) war Abû Naṣr b. ʿIrâq (Browne transskribiert ʿArrâq) der Neffe von Mâmûn Chowârezmšâh, dem 387 (997) gestorbenen Beherrscher Chowârezmiens, dem Vater von Mâmûn b. Mâmûn (gest. 407, 1016/17) und ʿAlî b. Mâmûn Chowârezmšâh (vergl. p. 88 und 99).

Zu Art. 192 (Note d) und Art. 214: Der hier genannte Šaraf el-mulûk, Meğd ed-daulas Nachfolger, ist jedenfalls Maḥmûd v. Ġazna, der i. J. 420 (1029) Meğd ed-daula seines Thrones beraubte und sein Gebiet in Besitz nahm.

Zu Art. 196: Seine Abhandlung über den Gebrauch des Astrolabiums wurde von Plato von Tivoli ins Lateinische übersetzt und ist noch vorhanden im Vatican (Cod. Ottob. Nr. 309) unter dem Titel: Liber Abualcasin (Abû'l-Qâsim) in operibus astrolabii a Platone Tyburtino translatus ad amicum suum Johannem David (Joh. Hispalensis). (Nach Wüstenfeld, die Übers. aus d. Arab. ins Lat. p. 43.)

Zu Art. 197: In Note c) soll noch verwiesen werden auf Anmerkung 48.

Zu Art. 198: Zwei Stellen aus dem Kap. über Arithmetik des Buches *el-šifâ'* (die Heilung), die über die Teilbarkeit der Zahlen durch neun und die Neunerprobe handeln, hat Woepcke veröffentlicht und übersetzt im Journal asiatique, VI. Série, T. I (1863) p. 502—504. — Das *kitâb el-nağât* wurde im Druck herausgegeben in Rom 1593.

Zu Art. 218: Die Abhandlung el-Bîrûnîs „das Buch der Schlüssel zur Astronomie“ wird zitiert von Naṣîr ed-dîn in seinem *šakl el- qaṭṭâʿ* (Ausgabe von Caratheodory, p. 108, Übers. 140); die Übersetzung hat aber ungenau: Les clefs de la connaissance des figures superficielles sphériques et autres; nach dem arab. Text soll es heifsen: Die Schlüssel der Astronomie, (d. h.) das was sich ergiebt auf der Oberfläche der Kugel und and. Der Haupttitel ist also „die Schlüssel der Astronomie“, mit dem Nachsatz soll nur der Inhalt näher angedeutet werden. Es wäre nach meiner Ansicht von grofsem Interesse, wenn das Pariser Ms. 2497 eine nähere Prüfung erfahren würde.

Zu Art. 228: Von Mubaššir b. Fâtik existiert noch ein Werk in Leiden (1487), betitelt: *kitâb muchtâr el-ḥikam we maḥâsin el-kalim* (das Buch der Auswahl der Weisheiten und der Schönheiten der Aussprüche), welches Aussprüche weiser Männer, besonders griechischer Philosophen, worunter auch Ptolemäus sich befindet, enthält.

Zu Art. 266: In dem Buche *mîzân el-ḥikme,* das wir unten (s. zu Art. 293) anführen werden, ist die Kunje el-Chaijâmîs Abû Ḥafṣ statt Abû'l-Fatḥ. Note b) (p. 113) ist dahin richtigzustellen, dafs ich aus dem erst kürzlich erschienenen 10. Bd. des Berliner Kat. v. Ahlwardt, der die Register enthält, ersehen habe, dafs dieses Werk el-Chaijâmîs in den Kat. aufgenommen worden ist; es befindet sich im 2. Bd. (Nr. 2369 und 70) unter den dogmatischen (!) Werken, unter den philosophischen hatte ich es vergeblich gesucht.

Zu Art. 268: Moẓaffar el-Isfarledî war nach den oben genannten *čahâr maqâle* Zeitgenosse von ʿOmar el-Chaijâmî, und kam öfters mit ihm zusammen, er heifst aber daselbst der Imâm Moẓaffar el-Isfizârî; in dem eben genannten Buche *mîzân el-hikme* wird er als einer derjenigen Autoren, die sich mit der Bestimmung des spezifischen Gewichtes einfacher und zusammengesetzter Körper beschäftigt haben, genannt der Imâm Abû Hâtim el-Mozaffar b. Ismâ'îl el-Isfazârî; beide Nisbe-Namen sind aber nach Jâqût unrichtig, es soll heissen: el-Asfizârî, d. h. aus Asfizâr, einer Stadt in Siǵistân stammend. Er starb vor 515 (1121/22).

Zu Art. 293: El-Châzinî schrieb auch eine physikalische Abhandlung, betitelt *mîzân el-hikme* (Wage der Weisheit); dieselbe handelt über die hydrostatische Wage, d. h. hauptsächlich über die Bestimmung der spezifischen Gewichte einfacher und zusammengesetzter Körper; das Werk ist für die Geschichte der Physik von grofsem Interesse, es werden darin als Gelehrte, die sich mit diesen Fragen beschäftigt haben, genannt: Archimedes, Menelaus (vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 19 und 52; Wenrichs Übersetzung des Titels des Werkes des Menelaus, nämlich de cognitione quantitatis discretae corporum permixtorum, ist also richtig), Sind b. 'Alî (s. Art. 24), Jûhannâ b. Jûsuf (s. Art. 131), Ahmed b. el-Fadl el-Massâh (d. h. der Feldmesser), Muh. b. Zakarîjâ el-Râzî (s. Art. 93), und zwar handelt letzterer über diese Fragen im zweiten Buche seines Werkes „über die Beweise", das 12 Kapitel enthält (vergl. meine Übers. aus dem Fihr. p. 43), die hier in Frage kommende Wage nennt er „die physikalische Wage" *(el-mîzân el-tabî'î)*, Ibn el-'Amîd (s. Art. 125), Ibn Sînâ (s. Art. 198), el-Bîrûnî (s. Art. 218), el-Chaijâmî (s. Art. 266) und Mozaffar b. Ismâ'îl el-Asfizârî (s. Art. 268). Auch der Grieche Fûfus (= Pûpus, vielleicht Pappus) wird erwähnt als der Erfinder eines Aräometers, das in der Abhandlung ausführlich beschrieben und durch eine Zeichnung dargestellt wird. Ein Ms. dieses Werkes war früher im Besitz des russischen Konsuls in Tebrîz, N. Khanikoff, und befindet sich jetzt in der k. Bibliothek zu St. Petersburg (ich kenne die Nummer nicht, da es noch nicht in den 1852 erschienenen Kat. aufgenommen ist, in der Schrift: Die Sammlung von Handschriften, welche die k. Bibl. in St. Petersburg i. J. 1865 von H. v. Khanikoff erworben hat, v. B. Dorn, St. Petersburg 1865, trägt es die Nr. 117); das wesentlichste daraus ist arabisch mit englischer Übersetzung veröffentlicht im Journal of the Americ. Orient. Soc. Vol. VI. p. 1—128, von N. Khanikoff. Das Werk wurde i. J. 515 (1121/22) vollendet.

Zu Art. 309: Was das *„Châtûn"* anbetrifft, so war dies allerdings, wie ich in Note a) bemerkt habe, eine Moschee in Damaskus, allein ich glaube, die Nizâmîje befand sich nicht dort; es gab verschiedene Schulen dieses Namens, die berühmteste war diejenige in Bagdad; es ist aber wahrscheinlich, daſs der Chalife el-Nâsir noch eine gleichbenannte an einem andern Orte gestiftet hat, im arabischen Text des Ibn el-Q. (bei C. I. 429) heifst dieser Ort *el-ribât el-châtûnî el-selǵûqî* (die châtûnische seldschukische Grenzstation, Grenzfeste); was dies für ein Ort ist, habe ich nicht ausfindig machen können, ich vermute, der arabische Text sei verdorben.

Zu Art. 335: Der Name 'Abdelmelik steht nicht bei Ibn Abi U., ich fand ihn in der Gesch. der Almohaden von 'Abdelwâhid el-Marrâkošî (p. 171 der Ausgabe von R. Dozy, 1881).

Zu Art. 344: Dieses Werk befindet sich auch im Brit. Mus. (1661), betitelt *kitâb el-banâkîm*, ebenso in Konstant. (3606), betitelt: *el-kitâb el-ǵâmi' bein el-'ilm* *we'l-amal el-nâfi' fî sinâ'at el-hijal* (das die Theorie und die nützliche Praxis vereinigende Buch über die Kunst der Mechanik). Es wurde geschrieben für den Ortoqiden el-Melik el-Sâlih Mahmûd b. Muh. b. Qara Arslân (597—618, 1201—1221) in Âmid (im Gebiet von Dijâr-Bekr). Der zweite Teil dieses Werkes befindet sich auch in Paris (2477). Im Kat. des Brit. Mus. heifst der Verfasser Abû Bekr el-Mo'izz b. Ismâ'îl b. el-Razzâz.

Zu Art. 359: Er schrieb ferner: *Nisâb el-habr fî hisâb el-ǵabr* (der Beginn oder auch das richtige Mafs der Freude, über die Rechnung (Rechnungsart) der Algebra), in Berlin (5972).

Zu Art. 364: Im Brit. Mus. (395, 3°) befinden sich astronomische Tafeln, betitelt: *el-zîǵ el-šâmil* (die umfassenden Tafeln), von denen der Verfasser des Kat. vermutet, es könnten diejenigen des Atîr ed-dîn sein.

*Zu Art. 371**: Der Codex Leid. 965 (399, 1° Warn.), der die 6 ersten Bücher der Elemente des Euklides in der Übersetzung des Haǵǵâǵ b. Jûsuf b. Matar enthält, soll nach dem Kat. von de Jong und de Goeje III. 38 auch Glossen dazu von Sa'îd b. Mes'ûd b. el-Qass enthalten; dieser Sa'îd ist also wohl identisch mit unserm Ġars el-Na'ma, welcher nicht zu verwechseln ist mit Ġars el-Na'ma abû'l-Hasan Muh. b. Hilâl, dem Sohne des in Art. 126, 138 und 139 genannten Geschichtschreibers Hilâl b. el-Muhsin el-Sâbî (gest. 448, 1056). (Vergl. Ibn Ch. II. 202, Übers. III. 628.)

Zu Art. 384: *El-šarrât* heifst nach Dozy (Suppl. aux diction. arabes) „der Schröpfer", merkwürdigerweise aber auch „der Seiler".

Zu Art. 396: Ferner schrieb er nach Sédillot (Tables astron. d'Oloug-Beg, Introd. p. XCIX) einen Auszug aus den îlchânischen Tafeln, benannt *el-zîǵ el-šâhî,* in Paris (Fonds pers. Nr. 173).

Zu Art. 399: Oxford (II. 285, 4°) hat: Tabulae motuum variabilium solis, lunae et planetarum von Ibn el-Bennâ. Ob diese Schrift mit einem der genannten Werke Ibn el-Bennâs identisch (vielleicht mit Nr. 6), oder eine andere Abhandlung dieses Autors sei, kann ich nicht entscheiden. Es ist hier noch zu erwähnen, dafs im Oxforder Ms. I. 873, das diese Abhandlung 6 *(el-minhâǵ)* enthält, folgende Worte Ibn el-Bennâs stehen: „Diese Astronomie habe ich zusammengestellt nach der Methode (Beobachtungen) des sehr gelehrten Abû'l-'Abbâs Ahmed b. 'Alî b. Ishâq el-Tûnisî, des Beobachters in Marokko (vergl. Art. 356); nach dieser Stelle wäre also Ibn Ishâq aus Tunis gebürtig, hätte aber in Marokko seine astronomischen Beobachtungen gemacht.

Zu Art. 401: In gewissen Codices des Ibn Qutl. fehlt el-Ġûzǵânî und es steht dafür el-Mâridînî ibn el-Turkomânî, was ihn dann natürlich noch besser als Bruder von Nr. 405 erkennen läfst (Ibn Qutl. p. 92).

Zu Art. 406: Statt „Abhandlung über den gefalteten Quadranten" sollte es dem Wortlaut gemäfs eigentlich heifsen: Abhandlung über die gefalteten Muqantarâte; doch ist damit sehr wahrscheinlich ein Quadrant gemeint.

Zu Art. 422: Der hier genannte Chalife Mutawakkil ist entweder der Merinide 'Abdel'azîz, Sultan von Marokko (gest. 774, 1372/73), oder dann sein Sohn Abû Bekr el-Sa'îd, welchen beiden Abû Bekr b. Ġâzî als Wezir gedient hat. Die im Kat. des Brit. Mus. angegebene Regierungszeit el-Mutawakkils von Marokko, nämlich 763—785, ist also jedenfalls unrichtig, mag nun der

Vater oder der Sohn den Beinamen el-Mutawakkil getragen haben, was ich nicht zu entscheiden vermag.

Zu Art. 432: Ibn el-Meǧdî schrieb auch einen Kommentar zum Talchîṣ des Ibn el-Bennâ, der noch vorhanden ist im Brit. Mus. (417) (vergl. auch Art. 399); ein Auszug daraus wurde von Woepcke in franz. Übersetzung veröffentlicht (in Passages relat. à des sommat. de séries de cubes, Rome 1864).

Zu Art. 446 und 458: Der Katalog von Kairo hat wohl unrichtig „el-Zemeaî" statt „el-Zemzemî"; Zemzem ist der Name des Hâgar-Brunnens in Mekka.

Zu Art. 457: Mîram Čelebî verfaſste nach H. Ch. III. 401 auch eine Abhandlung über den Šakkâzischen Quadranten auf Befehl des Sultans Bâjezîd II, geschrieben i. J. 913 (1507/08).

Zu Art. 471: Muḥ. b. Ma'rûf war nach Hammer (Gesch. des Osmanischen Reiches, IV. 43) der Astrolog Murâds III. (gest. 1003, 1595); der von H. Ch. III. 401 angeführte Šakkâzische Quadrant ist sehr wahrscheinlich identisch mit der Šakârischen Ṣafîḥa, über welche Ibn el-Bennâ geschrieben hat (vergl. Art. 399).

Zu Art. 485: Dieser Autor wurde aus Versehen aufgenommen; man vergleiche, was ich über denselben p. 117, Art. 278 gesagt habe.

Zu Art. 494: Das genannte Werk befindet sich auch in Paris (2470), wo der Verfasser genannt ist: 'Abdallâh b. Muh. b. el-Chawwâm, und der Anfang des Titels des Buches lautet: *el-risâle el-šemsîje fî* etc.

Zu Art. 496: Dieser Autor lebte vor 'Alî-šâh b. Muh. el-Chowârezmî (s. Art. 396), gest. c. 720—730 (1320—30), denn dieser zitiert ihn in seinen *aḥkâm el-da'wâ* (vergl. Pertsch, Verz. d. pers. Handschriften der k. Bibl. zu Berlin, p. 364).

Zu Anmerkg. 1: Als beim Bau von Bagdad Beteiligte werden bei Ja'qûbî (p. 9 und 13) noch weiter genannt: die Astrologen el-Nûbacht (s. Art. 2), el-Ṭabarî (s. Art. 13), Mâšâllâh (s. Art. 8), und die Geometer 'Imrân b. el-Waḍḍâḥ, 'Abdallâh b. Moḥriz, Šihâb b. Keṯîr und Ḥaǧǧâǧ b. Jûsuf (s. Art. 16).

Zu Anmerkg. 28: B. VII. 47 hat: Aḥmed b. Naṣr b. Châlid, Abû 'Omar, aus Cordova, ursprünglich aus Toledo stammend, ein Schüler von Ahmed b. Châlid, Muh. b. 'Omar b. Lubâba, Qâsim b. Aṣbag u. a., war Polizei- und Marktaufseher und Richter in Jaen. Er starb im Raǧeb 370 (981) im Alter von 80 Jahren.

Zu Anmerkg. 29: Vielleicht ist dieser Abû'l-Ḥasan el-Šemsî el-Herawî derselbe wie der Verfasser einer in Leiden (994) befindlichen Abhandlung darüber, daſs die Elemente des Euklides in ihren Prämissen gegründet seien auf die logische Ordnung, und in ihrem ersten Teil (Buch ?) auf das Aufstellen von Beispielen hiezu (?) etc., welcher genannt ist 'Abdallâh b. Muh el-Herawî. Und noch einen vierten Herawî haben wir anzuführen, der die Sphärik des Menelaus vom 10. Satze des 2. Buches an, bis wohin die Verbesserung des Mâhânî geht, verbessert hat, er wird in der Naṣîr ed-dîn'schen Redaktion dieses Werkes (Ms. 5930, Berlin) genannt: Aḥmed b. Abî Sa'îd Abû'l-Faḍl el-Herawî; seine Verbesserung befindet sich in Leiden (988), welcher Codex i. J. 539 (1144/45) geschrieben worden ist.

Zu Anmerkg. 37: In der Z. D. M. G. Bd. 51, p. 429 habe ich darauf aufmerksam gemacht, daſs der von H. Ch. II. 496 erwähnte Kommentator des Centiloquiums des Ptolemäus, Abû Jûsuf el-Uqlîdisî, identisch sein möchte mit 'Abderraḥmân b. Ismâ'îl b. Bedr, genannt der Euklides von Andalusien.

Diesem ist beizufügen, dafs der Fihr. p. 156 unter den berühmten Schachspielern einen Abû Isḥâq Ibrâhîm b. Muh. b. Ṣâliḥ b. el-Uqlîdisî, und ebenso unter den Instrumentenkünstlern (p. 285, Übers. 42) einen ʿAlî b. Saʿîd el-Uqlîdisî erwähnt; dieser Beiname scheint also nicht so selten gewesen zu sein. Im Übrigen ist zu bemerken, dafs es zwei Orte gibt, Iqlîd und Uqlîš, der erste in Persien, der zweite in Spanien, von denen die Relativa el-Iqlîdî und el-Uqlîšî leicht mit el-Uqlîdisî verwechselt werden, bezw. in das letztere übergehen können.

Register.

(Der Artikel *el* und die Wörter *ibn* (*b.*), *abû, abî, beni* wurden bei der alphabetischen Anordnung unberücksichtigt gelassen und deshalb und der bessern Übersicht wegen mit kleinen Anfangsbuchstaben gedruckt; immerhin folgen die mit *abû* beginnenden Namen jeweilen nach denjenigen, die mit dem auf das *abû* folgenden Hauptnamen beginnen, so z. B. die *abû Muh.* nach den *Muh.* Diejenigen Namen, die man unter K nicht findet, suche man unter Q. Nur die wichtigsten Autoren findet man mehrfach im Register verzeichnet, nämlich unter dem Hauptnamen, der Kunje und der Nisbe, so z. B. *Abû'l-Wefâ* unter *Muh., abû'l-Wefâ* und *el-Bûzğânî*, wenn ich dies bei allen Autoren hätte durchführen wollen, so wäre das Register zu umfangreich geworden. Die Zahlen bezeichnen die Seitenzahl, die fett gedruckten jeweilen diejenige Seite, auf der dem betreffenden Autor ein eigener Artikel gewidmet ist.)

A.

B.

C.

D.

G.

H.

I.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

T.

U.

V.

W.

Corrigenda.

S. VI, Z. 2 v. o. lies Ṣâlḥânî statt Ṣâliḥânî.
S. 14, 26 und 28 lies ḥâkimitische Tafeln statt hakemitische.
S. 19, Z. 8 v. u. lies Chorzâḏ statt Chorzâd.
S. 20, Z. 12 v. u. lies Mechanik statt Mathematik.
S. 27, Z. 12 v. u. ist nach *el-ḥarâfât* hinzuzufügen: vergl. Fihr. Übers. p. 68, Anmerkg. 220.
S. 33, Z. 9 v. o. lies Ṭaijib statt Ṯaijib.
S. 46, Z. 20 v. o. lies 239 statt 229.
S. 46, Z. 21 v. o. lies ein Drittel statt die Hälfte.
S. 59, Z. 1 v. u. lies die Quellen statt Vorwort.
S. 60, Z. 5 v. o. lies Marzubân statt Marzûbân.
S. 70, Z. 3 v. u. lies 520 statt 20.
S. 72, Z. 5 v. u. ist hinzuzufügen: vergl. auch Carra de Vaux, ibid. Sér. VIII. T. XIX. p. 408 ff.
S. 79, Z. 4 v. u. lies 387 statt 406 oder 407.
S. 89, Z. 3 v. o. lies *kulli* statt *kullî*.
S. 94, Z. 17 v. o. ist nach epistola hinzuzufügen: vergl. auch Steinschneider im Bullet. Boncomp. T. XIV. (1881) p. 721 ff.
S. 94, Z. 19 v. o. ist nach (734, 20⁰) hinzuzufügen: vergl. auch E. Wiedemann in Sitzungsber. der phys.-med. Soc. in Erlangen, 24. Heft (1892) p. 83.
S. 94, Z. 2 v. u. lies *munâẓara* statt *munâẓira*.
S. 96, Z. 7 v. o. lies Riḍâ statt Raḍâ.
S. 127, Z. 20 v. u. ist nach „Šeibânî" einzuschalten: bekannt unter dem Namen Ibn Zabâda.
S. 136, Z. 6 v. o. lies Moḥjî statt Mhojî.
S. 160, Z. 5 v. u. lies *'ilm* statt *ilm*.
S. 166, Z. 20 v. u. lies *Ġedâwil* statt *Gedâwil*.
S. 182, Z. 3 u. u. ist nach (1423) hinzuzufügen: n. Kat. Kairo (p. 177).
S. 182, Z. 17 v. u. lies *naẓẓâr* statt *naẓẓar*.
S. 183, Z. 9 v. u. ist zu streichen: „wo die Abhandlung dem Grofsvater zugeschrieben wird."
S. 183, Z. 10 v. u. ist zu streichen: „ein Auszug daraus."
S. 187, Z. 10 v. u. lies II. 236 statt 236.
S. 187, Z. 9 v. u. füge nach 547 hinzu: u. a. a. O.
S. 196, Z. 17 v. o. lies 'Abbâs statt 'Abbas.
S. 198, Z. 19 v. o. lies 'Aṭîja statt 'Aṭija.
S. 218, Z. 10 v. o. lies Tofeil statt Tofeil.
S. 238, n. Z. 17 v. u. ist einzuschieben: ibn el-'Arabî s. Moḥjî ed-dîn b. el-'Arabî.

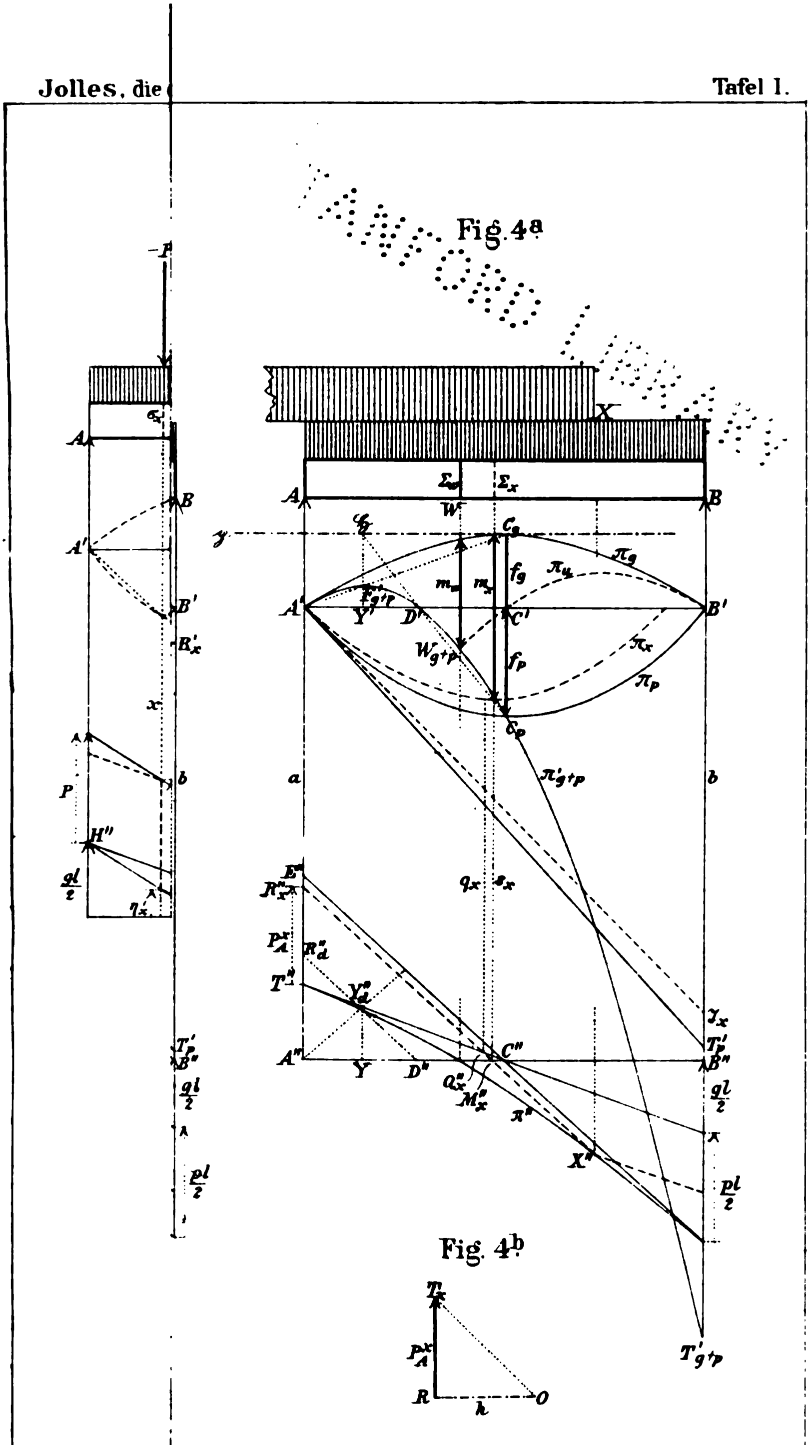
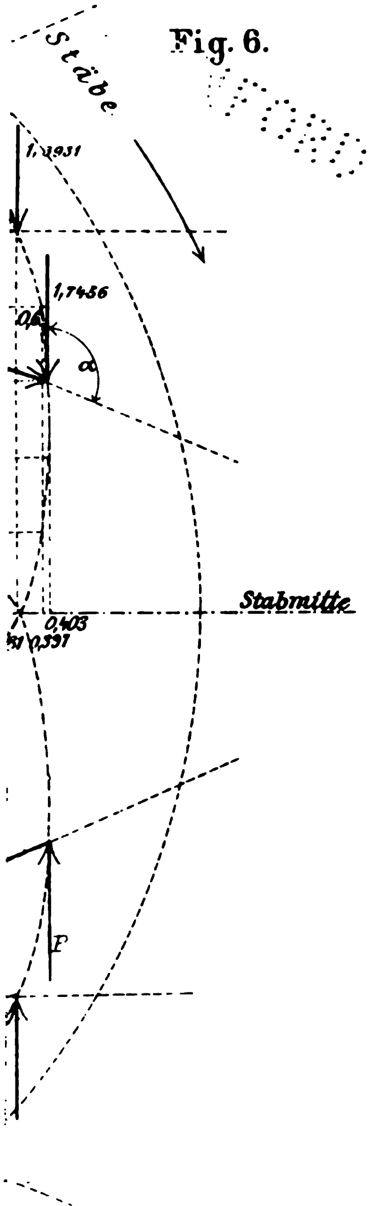


Fig. 4a

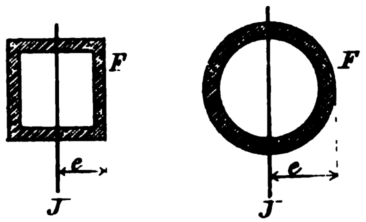
Fig. 4b

Lith.u Druck v Eschebach & Schaefer Leipzig

Fig. 6.

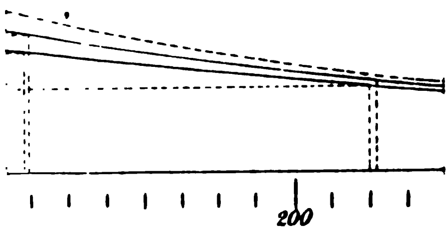


Ze Lith. u. Druck v. F. Eschebach & Schaefer, Leipzig.



$\frac{eN_z}{i} = \sim 2$ bis........ ....

ɔ.



fs - und Schweisseisen.