Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Siebenter Jahrgang.

Mit 2 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1862.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Seite

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Von Dr. A. ENNEPER 1
Ueber ein paar Ungleichungen und Grenzwerthe. Von Prof. O. FORT . . 46
Transformation einer endlichen Reihe. Von O. SCHLÖMILCH 49
Einige Bemerkungen über die Berechnung der sogenannten Mittel und deren Anwendung in den Erfahrungswissenschaften. Von Prof. Dr. E. SEGNITZ 65
Integration der Differentialgleichung $y'''=xy'-ny$ bei ganzen positiven n. Von Prof. S. SPITZER 113
Ueber eine Reductionsformel. Von Prof. S. SPITZER 123
Bemerkung über Gammafunctionen. Von Dr. A. ENNEPER 189
Ueber das Potential der Kugelschaale. Von O. SCHLÖMILCH 207
Vervielfachung und Theilung der elliptischen Integrale und damit in Zusammenhang stehende Eigenschaften confocaler Kegelschnitte. Von Oberlehrer C. KÜPPER 239
Ueber einige Integralformeln. Von O. SCHLÖMILCH 262
Note über die Integration der Differentialgleichung
$$(a_n+b_n x)\,y^{(n)}+\ldots+(a_1+b_1 x)\,y'+(a_0+b_0 x)\,y=0.$$
Von Prof. P. SPITZER 264
Ueber die bedingt convergirenden Reihen. Von O. SCHLÖMILCH 283
Ueber die Transformation der Reihen in Kettenbrüche. Von Dr. H. HANKEL 338
Integration der partiellen Differentialgleichung $x^{\frac{1}{2}n}\dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}=\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}$. Von Prof. S. SPITZER 343
Notizen über bestimmte Integrale. Von Dr. A. ENNEPER 346
Ueber das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^m x}{x^2}\,dx$. Von Dr. J. STEFAN . . . 356
Beiträge zu Weddle's Methode der Auflösung numerischer Gleichungen. Von J. POPPER. 384
Zwei Sätze über Determinanten. Von Dr. G. ZEHFUSS 436
Anwendungen einer besonderen Determinante. Von Dr. G. ZEHFUSS . . . 439
Einfache Ableitung zweier bestimmten Integrale. Von Dr. G. ZEHFUSS . . 445

Synthetische und analytische Geometrie.

Zur Theorie der Flächen. Von Dr. A. ENNEPER 1
Zur analytischen Behandlung der Oberflächen zweiten Grades; insbesondere über homofocale und conjugirte Flächen. Von Dr. W. FIEDLER 25
Fortsetzung der vorigen Abhandlung. 217
Fortsetzung und Schluss der vorigen Abhandlung 285
Ueber Leitlinien. Von Dr. M. CANTOR. 50
Analytisch-geometrische Notizen Von Dr. W. FIEDLER 53
Ueber Vielecke von gebrochener Seitenzahl. Von Stud. E. SCHRÖDER . . . 55
Ueber einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen. Von Dr. A. ENNEPER 75

Seite
Fortsetzung der vorigen Abhandlung 313
Fortsetzung und Schluss der vorigen Abhandlung 365
Notiz über Evoluten. Von Dr. A. Enneper 120
Ueber den Dualismus in den metrischen Relationen am vollständigen Viereck und Vierseit auf der Kugel und in der Ebene. Von Dr. Beez 129
Ueber ein Problem der ebenen Geometrie. Von Dr. A. Enneper 190
Ueber eine einhüllende Fläche. Von Dr. A. Enneper 198
Geometrisches Theorem. Von Dr. A. Enneper 200
Vervielfachung und Theilung der elliptischen Integrale und damit in Zusammenhang stehende Eigenschaften confocaler Kegelschnitte. Von Oberlehrer C. Küpper 239
Ueber einen geometrischen Satz von Mac Laurin. Von E. v. Hunyady . 268
Notiz nach M. A. Cayley. Von Dr. W. Fiedler 269
Ergänzung des Satzes über die Involution eines Kegelschnittbüschels. Von Dr. W. Fiedler 270
Ueber den Cubik- und Oberflächeninhalt sämmtlicher einfachen Formen des regelmässigen Krystallsystemes. Von Dr. F. Dellmann 270
Ueber die elliptische Kegelfläche. Von Dr. A. Enneper 354
Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Flächen. Von Lehrer M. Dietrich 398

Mechanik und barometrische Höhenmessungen.

Formeln und Tafeln zur Auflösung verschiedener hypsometrischer Aufgaben. Von Prof. Rogg 143
Ueber den Einfluss der Rotationen kugelförmiger Geschosse auf die Flugbahnen derselben. Von Generalleutnant W. v. Rouvroy 163
Ueber einige Formeln für das Trägheitsmoment ebener Vielecke. Von Dr. Zetzsche 202
Ueber das Potential der Kugelschaale. Von O. Schlömilch 207
Ueber die Abweichung des freien Falles der Körper von der Verticalen. Von Dr. L. Matthiessen 252
Ueber Hydrodiffusion. Von Dr. Beez 328
Ueber die Formeln für barometrische Höhenmessungen. Von C. M. Guldberg 359
Ueber die Bestimmung des absoluten und specifischen Gewichtes von in Flüssigkeiten suspendirten Niederschlägen. Von E. Kahl 456

Optik.

Nachweis eines wohlfeilen Apparates zu Spectralbeobachtungen. Von E Kahl 213
Ueber die Spectra chemisch verschiedener Körper. Von Dr. E. Mach . . . 214
Ueber die Vereinigungsweite der von einem Hohlspiegel reflectirten Strahlen. Von Dr. J. Stefan 359

Elektricität und Magnetismus.

Ueber die Messung kleiner Flugzeiten von Geschossen mittelst bewegter Elektricität. Von E. Kahl 93

Meteorologie.

Ueber die tägliche Variation des Barometers und die atmosphärische Lunafluth. Von Staatsrath Dr. E. Knorr 180
Meteorologische Studien. Von Dr. F. Dellmann 278
Ueber die Entstehung des Gewitters. Von Dr. F. Dellmann 447

Vermischtes.

Ueber die Verschiedenheit des Klanges. Nach Dr Brandt von E. Kahl. . 125
Baumgartner's Bedenken gegen Joule's Wärmeäquivalent. Von E. Kahl . . 127
Neues Vorkommen des Cäsiums und Rubidiums 283

I.

Zur Theorie der Flächen und partiellen Differential-gleichungen.

Von Dr. A. Enneper,
Docent an der Universität Göttingen.

I.

Bei analytischen Untersuchungen über die Theorie der Flächen und Linien auf denselben ist es bekanntlich vortheilhaft, die orthogonalen Coordinaten eines Punktes in Function zweier Variabeln darzustellen, oder mit andern Worten, einen Punkt der Fläche als Durchschnitt zweier Curven anzusehen, deren jede zu einem besonderen System gehört. Bestimmt man die Lage eines Punktes durch die Richtung seiner Normale, so erhält man ein System von Formeln, welches sehr geeignet zu sein scheint, Flächen zu finden, welche durch eine partielle Differentialgleichung gegeben sind. Die Darstellung des Integrals einer solchen Gleichung in Form einer Relation zwischen den Coordinaten gelingt nur in wenigen Fällen, und würde, wegen voraussichtlicher Complication der gesuchten Relation, ziemlich zwecklos sein, während es oft ausführbar ist, dieses Integral durch ein System von drei Gleichungen zwischen den Coordinaten und zwei Variabeln zu ersetzen.

Seien x, y, z die orthogonalen Coordinaten eines Punktes einer Fläche; den Winkel, welchen die Normale mit ihrer Projection auf die Ebene der x und y bildet, bezeichne man durch ϑ, und durch φ den Winkel, welchen die bemerkte Projection der Normale mit der Achse der x einschliesst. Setzt man

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

so sind ϑ und φ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{q}{p} = tang\, \varphi, \quad cot\, \vartheta = \sqrt{(p^2 + q^2)}$$

oder umgekehrt:

1) $$p = cot\, \vartheta\, cos\, \varphi, \quad q = cot\, \vartheta\, sin\, \varphi.$$

Bedient man sich der Euler'schen Bezeichnungen:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so geben die Gleichungen 1) nach φ und ϑ differentiirt:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = - \cot\vartheta \sin\varphi = r\frac{\partial x}{\partial \varphi} + s\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \cot\vartheta \cos\varphi = s\frac{\partial x}{\partial \varphi} + t\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta} = r\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + s\frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial q}{\partial \vartheta} = - \frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta} = s\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + t\frac{\partial y}{\partial \vartheta}.$$

Für r, s, t erhält man aus diesen Gleichungen folgende Werthe:

2)

$$r\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = - \cot\vartheta \sin\varphi \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$t\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = - \cot\vartheta \cos\varphi \frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

$$s\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = \cot\vartheta \sin\varphi \frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \cot\vartheta \cos\varphi \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Der doppelte Werth von s giebt die Relation:

$$3) \qquad \cos\varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \left(\sin\varphi \frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \cos\varphi \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Diese Gleichung findet also für jeden Punkt einer Fläche statt. Ist eine partielle Differentialgleichung zwischen p, q, r, s, t gegeben, so kann man dieselbe mit Hilfe der Gleichungen 2) und 3) durch ein System zweier partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen.

Für die beiden Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2 hat man bekanntlich die Gleichungen:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2} \sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt - s^2}.$$

Durch Substitution der Werthe von r, s, t aus 2) gehen diese Gleichungen über in:

$$4) \qquad -(\varrho_1 + \varrho_2) \sin\vartheta \cos\vartheta = \left(\sin\varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \cos\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \sin\vartheta + \left(\cos\varphi \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \sin\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \cos\vartheta.$$

$$5) \qquad \varrho_1 \varrho_2 \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cos\varphi\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\sin\varphi\right)$$
$$- \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\sin\varphi\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\cos\varphi\right).$$

Eliminirt man aus 5)

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \sin\varphi$$

mit Hilfe der Gleichungen 3) und 4), so folgt:

$$6) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \sin\varphi + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \sin\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cos\varphi\right)^2 \sin^2\vartheta$$
$$= \left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2 \sin^2\vartheta.$$

Bezeichnet man durch $\partial \Sigma$ ein Flächenelement, so ist:

$$\partial \Sigma = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}\, \partial x\, \partial y.$$

Führt man φ und ϑ statt x und y als unabhängige Veränderliche ein, so wird:

$$\partial \Sigma = \frac{1}{\sin\vartheta} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \partial\vartheta\, \partial\varphi = \varrho_1 \varrho_2 \cos\vartheta\, \partial\vartheta\, \partial\varphi.$$

Für eine Kugelfläche, deren Halbmesser zur Einheit genommen wird, hat man

$$\partial \Sigma' = \cos\vartheta\, \partial\vartheta\, \partial\varphi,$$

also

$$\frac{\partial \Sigma'}{\partial \Sigma} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2},$$

welche Gleichung die bekannte Definition für das Maass der Krümmung einer Fläche enthält. Setzt man in die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\partial x\, \partial q - \partial y\, \partial p + (p\, \partial q - q\, \partial p)\, \partial z = 0$$
$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \partial\varphi + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \partial\vartheta, \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \partial\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \partial\vartheta$$
$$\partial z = \cot\vartheta\, (\cos\varphi\, \partial x + \sin\varphi\, \partial y)$$
$$\partial p = -\cot\vartheta \sin\varphi\, \partial\varphi - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta} \partial\vartheta, \quad \partial q = \cot\vartheta \cos\varphi\, \partial\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta} \partial\vartheta,$$

so nimmt diese Differentialgleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cos\varphi - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \sin\varphi\right) (\partial\vartheta)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \sin\varphi\right) \cot\vartheta\, (\partial\varphi)^2$$
$$+ \left\{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos\varphi - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \sin\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \sin\varphi\right) \cot\vartheta\right\} \partial\varphi\, \partial\vartheta = 0$$

oder

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \sin\varphi$$

mittelst der Gleichung 3) eliminirt;

$$7) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cos\varphi\right) [\cos^2\vartheta\, (\partial\varphi)^2 - (\partial\vartheta)^2]$$
$$+ \left\{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos\varphi - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \sin\varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \sin\varphi + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cos\varphi\right) \cot\vartheta\right\} \partial\varphi\, \partial\vartheta = 0.$$

Sind x und y in Function von ϑ und φ bestimmt, so giebt die Integration der vorstehenden Differentialgleichung zwei Relationen zwischen φ und ϑ, d. h. die beiden *Systeme* von Krümmungslinien einer Fläche.

II.

Ein einfaches Beispiel zur Anwendung der obigen Formeln bieten die Rotationsflächen, deren partielle Differentialgleichung ist

$$qx - py = 0$$

oder

$$x \sin\varphi = y \cos\varphi.$$

Bezeichnet man durch u eine näher zu bestimmende Function von ϑ und φ, so kann man setzen:

$$x = u \cos\varphi,$$
$$y = u \sin\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$\cos\varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad \sin\varphi \frac{\partial x}{\partial \vartheta} - \cos\varphi \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = 0.$$

Die Gleichung 3) geht hierdurch über in:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

u ist also von φ unabhängig und enthält nur ϑ. Der Werth von z folgt mittelst der Gleichung:

$$\partial z = \cot\vartheta \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \sin\varphi\right) \partial\varphi + \cot\vartheta \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \sin\varphi\right) \partial\vartheta$$
$$= \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cot\vartheta \,.\, \partial\vartheta,$$

$$z = \int \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cot\vartheta \,.\, \partial\vartheta.$$

Für eine Rotationsfläche hat man demnach:

$$x = f(\vartheta)\cos\varphi, \quad y = f(\vartheta)\sin\varphi, \quad z = \int f'(\vartheta)\cot\vartheta\, \partial\vartheta\, ^{*}),$$

wo $f(\vartheta)$ eine beliebige Function von ϑ bedeutet.

Steigt die partielle Differentialgleichung der Fläche auf den zweiten Grad, eliminirt man r, s, t mit Hilfe der Gleichungen 2), so erhält man zwei Gleichungen zwischen

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen nach φ und ϑ, so lassen sich zwei partielle Differentialgleichungen für x und y herstellen, deren Integration mehr willkürliche Functionen involvirt, wie nöthig ist. Substituirt man die gefundenen Werthe von x und y in die beiden ursprünglichen Gleichungen, so erhält man zwei Relationen zwischen den arbiträren Functionen, durch welche ihre Zahl auf das gehörige Maass reducirt wird. Dieser

*) In den folgenden Entwickelungen sind alle willkürlichen Constanten, welche durch Integrationen von Differentialgleichungen hervorgerufen werden, weggelassen, sobald diese Constanten in geometrischer Beziehung nur eine parallele Verschiebung der Coordinatenachsen bedeuten.

Uebelstand, zwei partielle Differentialgleichungen zu integriren und nachher die willkürlichen Functionen auf ihre kleinste Anzahl zu reduciren, wird häufig dadurch aufgewogen, dass die Differentialgleichungen für x und y bedeutend einfacher sind, wie die ursprüngliche. Man kann die Bestimmung von x, y und z auch auf folgende Weise machen, indem man statt der abhängigen Veränderlichen z eine Function von x, y, z nimmt und die Winkel von φ und ϑ wieder als unabhängige Veränderliche nimmt.

Man setze mit Legendre (*Mém. de l'acad. pour l'année* 1787, oder auch Serret in *Liouville's Journal T. XI*)

$$V = px + qy - z \tag{8}$$

und sehe x, y, z als Functionen von p und q an. Da nun

$$\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y,$$
$$\partial V = x\,\partial p + y\,\partial q,$$

so folgt:

$$x = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial V}{\partial q}.$$

Aus den Gleichungen:

$$\partial p = r\,\partial x + s\,\partial y, \quad \partial q = s\,\partial x + t\,\partial y$$

erhält man

$$(rt - s^2)\,\partial x = t\,\partial p - s\,\partial q,$$
$$(rt - s^2)\,\partial y = -s\,\partial p + r\,\partial q,$$

folglich:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{t}{rt - s^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{r}{rt - s^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^2},\\ &\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{s}{rt - s^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q},\\ &(rt - s^2)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\right) = 1. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Statt p und q führe man wieder φ und ϑ als unabhängige Variabele ein. Die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \vartheta} \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} tang\,\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial V}{\partial p}\sin\varphi + \frac{\partial V}{\partial q}\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= -\frac{\partial V}{\partial p}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial q}\sin\varphi \end{aligned}$$

geben, mit Rücksicht darauf, dass $\frac{\partial V}{\partial p} = x$, $\frac{\partial V}{\partial q} = y$

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\sin^2\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cos\varphi - tang\,\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\sin\varphi,\\ y &= -\sin^2\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\sin\varphi + tang\,\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\varphi,\\ z &= px + qy - V = -\sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial \vartheta} - V. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die dritte der vorstehenden Gleichung, oder, was dasselbe ist, die Gleichung 8) folgt, wenn in $px + qy = cot\vartheta\,(x\cos\varphi + y\sin\vartheta)$ für x und y ihre Werthe aus den beiden ersten Gleichungen substituirt werden.

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\sin\varphi\cos\varphi = tang\,\vartheta\left(tang\,\vartheta\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - \sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\sin\varphi\cos\varphi = \sin^2\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\cos 2\varphi = \sin^2\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(tang\,\vartheta\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)$$

erhält man, wegen 9), für r, s und t folgende Gleichungen:

$$11)\quad\begin{cases}\dfrac{t}{rt-s^2} = tang\,\vartheta\left(tang\,\vartheta\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - \sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}\right).\sin^2\varphi \\ \qquad + \sin^2\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)\cos^2\varphi + 2\sin^2\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(tang\,\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\sin\varphi\cos\varphi, \\ \dfrac{r}{rt-s^2} = tang\,\vartheta\left(tang\,\vartheta\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - \sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}\right).\cos^2\varphi \\ \qquad + \sin^2\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)\sin^2\varphi - 2\sin^2\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(tang\,\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\sin\varphi\cos\varphi, \\ \dfrac{s}{rt-s^2} = tang\,\vartheta\left(tang\,\vartheta\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - \sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right).\sin\varphi\cos\varphi \\ \qquad - \sin^2\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(tang\,\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\cos 2\varphi.\end{cases}$$

Ist nun eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen p, q, r, s, t gegeben, so kann man dieselbe mittelst der vorstehenden Gleichungen in eine partielle Differentialgleichung von V nach φ und ϑ transformiren, ist dann V in Function von φ und ϑ gefunden, so geben die Gleichungen 10) x, y, z in Function derselben Variabeln.

Durch Einführung der Function V nehmen die Gleichungen 4) und 7) folgende Formen an:

$$12)\quad (\varrho_1 + \varrho_2)\cos\vartheta.\cot\vartheta = \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}\cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta\,(2\cot\vartheta - tang\,\vartheta)\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.$$

$$13)\quad [(\partial\varphi)^2\cos^2\vartheta - (\partial\vartheta^2)]\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(tang\,\vartheta\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)$$
$$- \left\{tang\,\vartheta\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) - \sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right\}\partial\varphi\,\partial\vartheta = 0.$$

Die vorstehenden Gleichungen sind in ihren Anwendungen viel brauchbarer, wie es, nach ihrer etwas complicirten Form, zuerst den Anschein haben könnte. Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass bei allen Untersuchungen über Flächen, in welchen die Variabeln φ und ϑ erscheinen, die developpabelen Flächen ausgeschlossen sind, da sie die einzigen Flächen sind, deren Punkte nicht in Function von φ und ϑ dargestellt werden können.

III.

Sind:

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen der Achse einer Rotationsfläche, so ist die Fläche durch die partielle Differentialgleichung bestimmt:

$$\cos\alpha\,(qz+y)-\cos\beta\,(pz+x)-\cos\gamma\,(qx-py)=0.$$

Setzt man hierin für x, y und z ihre Werthe aus 10) ein, so geht die vorstehende Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\sin\vartheta+V\cos\vartheta\right).\cos\vartheta\,(\cos\beta\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi)$$
$$+\sin\vartheta\,\{(\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi)\sin\vartheta+\cos\gamma\cos\vartheta)\}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0.$$

Setzt man

$$\cos\gamma\sin\vartheta-(\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi)\cos\vartheta=w,$$

so lässt sich die partielle Differentialgleichung für V einfacher schreiben:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\sin\vartheta+V\cos\vartheta\right)\frac{\partial w}{\partial\varphi}=\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\varphi}.\frac{\partial w}{\partial\vartheta}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,.\,V)\frac{\partial w}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\vartheta\,.\,V)\frac{\partial w}{\partial\varphi}.$$

Hieraus schliesst man unmittelbar:

$$\sin\vartheta\,.\,V=f(w),$$

wo $f(w)$ eine beliebige Function von w bezeichnet. Setzt man also in den Gleichungen 10)

$$\sin\vartheta\,.\,V=f\big(\cos\gamma\sin\vartheta-\cos\vartheta\,(\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi)\big),$$

so gehört der Punkt (x, y, z) einer Rotationsfläche an. Nimmt man die Achse der z zur Rotationsachse, so hat man $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$, also

$$V=\frac{f(\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$\cos\vartheta\,f(\sin\vartheta)-\sin\vartheta\cos\vartheta\,f'(\sin\vartheta)=u,$$

wo also u eine Function von ϑ allein bedeutet, so giebt die dritte der Gleichungen 10) durch Differentiation nach ϑ

$$\frac{\partial z}{\partial\vartheta}=\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\cot\vartheta$$

oder

$$z=\int\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\cot\vartheta\,.\,\partial\vartheta.$$

Man erhält so wieder die in II aufgestellten Gleichungen für eine Rotationsfläche. Die Rotationsflächen bilden einen besonderen Fall einer allgemeineren Art von Flächen, deren Krümmungslinien durch $\varphi=$ Const. und $\vartheta=$ Const. *bestimmt sind.* Setzt man in der Gleichung 7)

14) $$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cos\varphi = 0,$$

so geht diese Gleichung über in $\partial\varphi \,.\, \partial\vartheta = 0$, d. h. $\varphi =$ Const. und $\vartheta =$ Const. Die Gleichung einer Rotationsfläche um die Achse der z, nämlich $x \sin\varphi - y \cos\varphi = 0$, ist offenbar ein besonderer Fall der Gleichung 14), in welche sie durch Differentiation nach ϑ übergeht. Setzt man in 14) für x, y ihre Werthe aus 10) ein, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\tang\vartheta \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

also:

$$\tang\vartheta \frac{\partial V}{\partial \varphi} = f'(\varphi)$$

$$V = \cot\vartheta\, f(\varphi) + \psi(\vartheta) \,.\, \cot\vartheta,$$

wo $f(\varphi)$ und $\psi(\vartheta)$ beliebige Functionen, respective von φ und ϑ sind. Für den vorstehenden Werth von V geben die Gleichungen 10)

15) $$\begin{aligned} x &= f(\varphi) \cos\varphi - f'(\varphi) \sin\varphi + \{\psi(\vartheta) - \sin\vartheta \cos\vartheta\, \psi'(\vartheta)\} \cos\varphi, \\ y &= f(\varphi) \sin\varphi + f'(\varphi) \cos\varphi + \{\psi(\vartheta) - \sin\vartheta \cos\vartheta\, \psi'(\vartheta)\} \sin\varphi, \\ z &= -\psi'(\vartheta) \cos^2\vartheta. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich noch etwas vereinfachen, wenn man setzt:

$$\psi(\vartheta) - \sin\vartheta \cos\vartheta\, \psi'(\vartheta) = u,$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cot\vartheta, \quad z = \int \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cot\vartheta\, \partial\vartheta.$$

Substituirt man in 14) für φ, ϑ, $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial y}{\partial \vartheta}$ ihre Werthe in Function von p, q, r, s, t mittelst der Gleichung 1) und 2), so erhält man die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

14) $$p\,(qr - ps) = q\,(pt - qs).$$

Die Flächen, welche in dieser Gleichung enthalten sind, bilden eine Art von Canalflächen. Bewegt sich ein fester Punkt innerhalb oder ausserhalb einer Rotationsfläche auf einer ebenen Curve, deren Ebene zur Achse der Fläche senkrecht ist, und bleibt sich die Achse der Rotationsfläche immer parallel, so werden alle Rotationsflächen von einer Fläche eingehüllt, welche durch die Gleichung 14) charakterisirt ist, für den Fall, dass die Rotationsachse zur Achse der z genommen wird. Seien α und β Functionen eines Parameters λ, so dass durch Elimination von λ zwischen den Gleichungen $x = \alpha$, $y = \beta$ die Gleichung der Curve folgt, auf welcher sich der feste Punkt der Rotationsfläche bewegt. Nimmt man den festen Punkt zum Anfangspunkt der Meridiancurve, so ist die Gleichung der Rotationsfläche

16) $$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = F(z),$$

wo $F(z)$ eine beliebige Function von z bedeutet. Die Gleichung der einhüllenden Fläche folgt dann durch Elimination von λ zwischen der Gleichung 16) und der folgenden:

$$(x-\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}+(y-\beta)\frac{\partial \beta}{\partial \lambda}=0.$$

Wegen dieser Gleichung giebt die Gleichung 16) nach x und y differentirt:

$$x-\alpha=pF'(z),\quad y-\beta=qF'(z).$$

Substituirt man diese Werthe von $x-\alpha$ und $y-\beta$ in 16), so folgt:

$$p^2+q^2=\frac{F(z)}{F'(z)}.$$

Differentiirt man diese Gleichung wieder nach x und y, eliminirt

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{F(z)}{F'(z)},$$

so folgt:

$$\frac{pr+qs}{ps+qt}=\frac{p}{q}.$$

was die Gleichung 14) ist.

IV.

Die partielle Differentialgleichung der Conoidflächen ist:

$$z=\cos\gamma\frac{px+qy}{p\cos\alpha+q\cos\beta}=\cos\gamma\frac{x\cos\varphi+y\sin\varphi}{\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi},$$

wenn die Gleichungen der gradlinigen Directrix

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

sind. Durch Einführung der Werthe von x, y, z aus 10) nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$V+\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}=\cos\gamma\frac{\sin^2\vartheta\dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}}{\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi}$$

oder

$$\frac{\partial \log V}{\partial\vartheta}=\frac{\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi}{-(\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi)\cos\vartheta+\cos\gamma\sin\vartheta}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta},$$

$$=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\left\{\frac{\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi}{\cos\gamma}\cot\vartheta-1\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$V=\left\{\frac{\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\sin\varphi}{\cos\gamma}\cot\vartheta-1\right\}f(\varphi),$$

wo $f(\varphi)$ eine beliebige Function von φ ist. Ist die Achse der z die gradlinige Directrix, also $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$, so wird $V=f(\varphi)$, die Gleichungen 10) gehen dann:

$$17)\qquad\begin{cases}x=\tan\vartheta\, f'(\varphi)\sin\varphi,\\ y=-\tan\vartheta\, f'(\varphi)\cos\varphi,\\ z=f(\varphi).\end{cases}$$

Die Differentialgleichung 7) der Krümmungslinien wird im vorliegenden Falle

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2 \cos^2\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial\log f'(\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 1.$$

Diese Gleichung lässt sich in zwei besonderen Fällen leicht integriren, wenn nämlich $f'(\varphi) = a$ oder $\frac{\partial\log f'(\varphi)}{\partial\varphi} = 2a$ ist, wo a eine Constante bedeutet. Im ersten Falle hat man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \pm\frac{1}{\cos\vartheta}$$

oder integrirt:

$$\pm\, tang\,\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(e^{\varphi+\alpha} - e^{-(\varphi+\alpha)}\right).$$

Diese Doppelgleichung giebt die Krümmungslinien der Schraubenfläche. Wenn $\frac{\partial\log f'(\varphi)}{\partial\varphi} = 2a$, so hat man:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\right)^2 - 2a\sin\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta = 1,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta = a\sin\vartheta \pm \sqrt{(1 + a^2\sin^2\vartheta)}$$

oder integrirt:

$$\varphi - \alpha = -a\log\cos\vartheta \pm \tfrac{1}{2}\left\{-a\log\frac{\sqrt{(1+a^2\sin^2\vartheta)} + a\sin\vartheta}{\sqrt{(1+a^2\sin^2\vartheta)} - a\sin\vartheta}\right.$$
$$\left. + \sqrt{(1+a^2)}\log\frac{\sqrt{(1+a^2\sin^2\vartheta)} + \sin\vartheta\sqrt{(1+a^2)}}{\sqrt{(1+a^2\sin^2\vartheta)} - \sin\vartheta\sqrt{(1+a^2)}}\right\}.$$

Diese Doppelgleichung bestimmt die Krümmungslinien einer conischen Schraubenfläche, d. h. einer Conoidfläche, deren Directricen die Achse eines geraden Kreiskegels und eine Helix der Kegelfläche sind.

Aus den Gleichungen 17) folgt $x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0$. Diese Gleichung ist ein besonderer Fall der folgenden, welche aus ihr durch Differentiation nach ϑ folgt, nämlich:

$$18)\qquad \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi = 0.$$

Substituirt man hierin für $\cos\varphi$, $\sin\vartheta$, $\frac{\partial x}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial y}{\partial\vartheta}$ ihre Werthe in Function von p, q, r, s, t mittelst der Gleichungen 1) und 2), so folgt:

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$

was bekanntlich die partielle Differentialgleichung der windschiefen Flächen ist, deren Generatrix beständig einer festen Ebene parallel bleibt und sich auf zwei gegebene Curven stützt. Wegen der Gleichungen 10) lässt sich die Gleichung 18) auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) = 0,$$

also

$$V = -f(\varphi) + \cot\vartheta\,.\,\psi(\varphi),$$

wo $f(\varphi)$ und $\psi(\varphi)$ beliebige Functionen von φ sind. Für den vorstehenden Werth von V werden die Gleichungen 10):

$$19)\quad \begin{aligned} x &= f'(\varphi)\, tang\,\vartheta\, \sin\varphi + \psi(\varphi)\cos\varphi - \psi'(\varphi)\sin\varphi, \\ y &= -f'(\varphi)\, tang\,\vartheta\, \cos\varphi + \psi(\varphi)\sin\varphi + \psi'(\varphi)\cos\varphi, \\ z &= f(\varphi). \end{aligned}$$

V.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien nimmt eine sehr einfache Form an, wenn der Factor von $\partial\varphi\,.\,\partial\vartheta$ verschwindet. Aus der Gleichung 7) folgt dann:

$$20)\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\sin\varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi + \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\cot\vartheta = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2 \cos^2\vartheta = 1$$

oder integrirt:

$$\pm\, tang\,\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(e^{\varphi+\alpha} - e^{-(\varphi+\alpha)}\right),$$

wo α eine Constante bedeutet. Diese Gleichung giebt die Krümmungslinien aller Flächen, welche der Gleichung 20) genügen. Ist ∂s das Bogenelement einer beliebigen Curve einer Fläche, so hat man:

$$\begin{aligned} (\partial s)^2 &= (\partial x)^2 + (\partial y)^2 + (\partial z)^2 \\ 22)\quad &= \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)\partial\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\partial\vartheta\right\}^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)\partial\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi\right)\partial\vartheta\right\}^2 \frac{1}{\sin^2\vartheta}. \end{aligned}$$

Substituirt man hierin für

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial x}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cos\varphi$$

ihre Werthe aus 3) und 20), so wird:

$$\begin{aligned} \sin^2\vartheta\,.\,(\partial s)^2 = &\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi + \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\cos\vartheta\,.\,\partial\varphi \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\sin\vartheta\right\}^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi + \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\partial\vartheta \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial\varphi\right\}^2. \end{aligned}$$

Gehört dieses Bogenelement einer Krümmungslinie an, so ist: $\cos\vartheta\,.\,\partial\varphi = \pm\,\partial\vartheta$, folglich:

$$23)\quad (\partial s)^2 = \frac{2}{\sin^2\vartheta}\left\{\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi \pm \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\sin\vartheta\right\}^2 \partial\vartheta^2.$$

Ferner ist:

$$\partial z = cot\,\vartheta\,\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)\partial\varphi + cot\,\vartheta\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi\right)\partial\vartheta$$

$$= cot\,\vartheta\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi\right)\partial\vartheta + \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial\varphi\right\}.$$

Im Fall einer Krümmungslinie hat man also

$$\partial z = cot\,\vartheta\left\{\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi \pm \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\right)\sin\vartheta\right\}\partial\vartheta.$$

Durch Zusammstellung dieser Gleichung mit 23) folgt:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{2},\quad \frac{\partial z}{\partial s} = \pm\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus folgt, dass die Achse der z mit den Tangenten der Krümmungslinien gleiche Winkel bildet. Da die Tangenten der Krümmungslinien mit denen der beiden Hauptschnitte identisch sind, so erhält man folgende charakteristische Eigenschaft der durch die Gleichung 20) definirten Flächen: die Tangenten zu den Hauptschnitten bilden mit einer festen Richtung gleiche Winkel. Legt man durch eine Parallele zur Achse der z einen Normalschnitt, bezeichnet seinen Krümmungshalbmesser durch ϱ, so ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

oder in Worten, die obigen Flächen haben die Eigenschaft, dass der reciproke Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, der einer festen Geraden parallel ist, gleich der halben Summe der reciproken Hauptkrümmungshalbmesser ist.

Durch Substitution der Werthe von x, y und z aus 10) nimmt die Gleichung 20) folgende Form an:

$$24)\qquad cot\,\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) - tang\,\vartheta\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \sin^2\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = 0$$

oder $V = Q\,cot\,\vartheta$ gesetzt:

$$\cos^2\vartheta\,\frac{\partial^2 Q}{\partial\vartheta^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial Q}{\partial\vartheta} = \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} + Q.$$

Führt man in dieser Gleichung statt ϑ eine neue unabhängige Variabele ω mittelst der Gleichung

$$\omega = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}$$

ein, so folgt:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\omega^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} = Q.$$

Nimmt man noch $\omega = u + v$, $\varphi = u - v$, so geht die vorstehende Gleichung über in:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial v} = Q.$$

Das Integral dieser Gleichung lässt sich nur durch Ausdrücke darstellen, in welchen u und v als die variabeln Parameter bestimmter oder unbestimmter Integrale erscheinen, wie z. B.

$$Q = a\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{e^{2\sqrt{uv}\,.\,\sin^2 x} + e^{-2\sqrt{uv}\,.\,\sin^2 x}\}\,\partial x$$

$$+\int_0^u f(z)\,\partial z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\sqrt{v}\,(z-u)\,.\,\sin^2 x\right)\partial x$$

$$+\int_0^v \psi(z)\,\partial z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\sqrt{u}\,(z-v)\,.\,\sin^2 x\right)\partial x,$$

wo a eine beliebige Constante bedeutet, und $f(z)$, $\psi(z)$ arbiträre Functionen von z sind. Etwas einfachere Ausdrücke für Q erhält man aus den particulären Lösungen

$$e^{\pm\left(u\alpha+\frac{v}{\alpha}\right)}\,\cos\left(u\,\alpha-\frac{v}{\alpha}\right),$$

nämlich:

$$Q=\int e^{+\left(u\alpha+\frac{v}{\alpha}\right)} f(\alpha)\,\partial\alpha,\quad Q=\int \cos\left(u\,\alpha-\frac{v}{\alpha}\right)\psi(\alpha)\,\partial\alpha,$$

wo wieder $f(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ zwei beliebige Functionen von α sind. Da diese Lösungen wenig geeignet erscheinen, um Flächen darzustellen, deren Krümmungslinien durch die Gleichung 21) bestimmt sind, so wird es besser sein, sich auf solche particuläre Lösungen der Gleichung 24) zu beschränken, welche ziemlich einfache Resultate geben.

Nimmt man in 24) V unabhängig von ϑ, so erhält man eine Rotationsfläche, und zwar, wie man leicht findet, die Kugelfläche. Diese Lösung ist indessen zu verwerfen, da für eine Kugelfläche die Gleichung 7) identisch wird, und vorausgesetzt ist, dass

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi-\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi$$

nicht verschwindet. Setzt man in 24) $V=U\varphi$ oder $V=U+c\varphi$, wo U Function von ϑ allein ist und c eine Constante bedeutet, so erhält man für U die Differentialgleichung:

$$\cot\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\,\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\sin^2\vartheta\,\frac{\partial U}{\partial\vartheta}=0.$$

Hieraus findet man leicht

$$U=\frac{a}{\sin\vartheta}+b,$$

also

$$V=\frac{a+b\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\varphi,\quad V=\frac{a+b\sin\vartheta}{\sin\vartheta}+c\varphi,$$

wo a und b Constanten sind. Für die vorstehenden Werthe von V geben die Gleichungen 10)

$$25)\quad \begin{cases} x = a\varphi\cos\vartheta\cos\varphi - \dfrac{a+b\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi, \\ y = a\varphi\cos\vartheta\sin\varphi + \dfrac{a+b\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi, \\ z = -(a\sin\vartheta + b)\varphi, \end{cases}$$

$$26)\quad \begin{cases} x = a\cos\vartheta\cos\varphi - c\,\mathrm{tang}\,\vartheta\sin\varphi, \\ y = a\cos\vartheta\sin\varphi + c\,\mathrm{tang}\,\vartheta\cos\varphi, \\ z = -(a\sin\vartheta + b) + c\varphi. \end{cases}$$

Setzt man $V = U + c\varphi^2$, so wird die Gleichung 24)

$$\cot\vartheta\left(\sin^2\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \sin^2\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = 2c\,\mathrm{tang}\,\vartheta,$$

also

$$U = b - \frac{a}{\sin\vartheta} + \tfrac{1}{2}\frac{c}{\sin\vartheta}\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und 10) findet man:

$$x = -\left\{a\cos\vartheta + c\,\mathrm{tang}\,\vartheta - \tfrac{1}{2}c\cos\vartheta\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right\}\cos\varphi - 2c\varphi\,\mathrm{tang}\,\vartheta\sin\varphi,$$

$$y = -\left\{a\cos\vartheta + c\,\mathrm{tang}\,\vartheta - \tfrac{1}{2}c\cos\vartheta\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right\}\sin\varphi + 2c\varphi\,\mathrm{tang}\,\vartheta\cos\varphi,$$

$$z = -b - c + a\sin\vartheta + \tfrac{1}{2}c\sin\vartheta\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta} - c\varphi^2.$$

Es lassen sich noch leicht unendlich viele particuläre Lösungen der Gleichung 24) finden durch eine der Annahmen

$$V = U\cos n\varphi,\quad V = Ue^{\pm n\varphi},$$

deren erste indessen keine besonders einfachen Resultate giebt. Für die zweite Supposition giebt die bemerkte Gleichung:

$$\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \sin^2\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = n^2 U,$$

also

$$U = \left\{a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}} + b\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}}\right\}\cot\vartheta.$$

Setzt man einfach:

$$V = a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}}\cot\vartheta\; e^{n\varphi},$$

so geben die Gleichungen 10)

$$27)\quad \begin{cases} x = a\left(\dfrac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}} e^{n\varphi}\left\{\left(1-\sqrt{(n^2+1)}\sin\vartheta\right)\cos\varphi - n\sin\varphi\right\}, \\ y = a\left(\dfrac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}} e^{n\varphi}\left\{\left(1-\sqrt{(n^2+1)}\sin\vartheta\right)\sin\varphi + n\cos\varphi\right\}, \\ z = -a\left(\dfrac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}} e^{n\varphi}\cos\vartheta\sqrt{(n^2+1)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 26) repräsentiren eine Parallelfläche zur Schraubenfläche, wenn a die constante Distanz zweier correspondirenden Punkte beider Flächen bedeutet. Die Gleichungen 25) geben für die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser einen äusserst einfachen Ausdruck. Mittelst der Gleichung 4) folgt:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2a\varphi.$$

Die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser lässt sich also in diesem Falle durch einen Kreisbogen darstellen. Aus den Gleichungen 27) folgt:

$$\frac{px+qy-z}{\sqrt{(1+p^2+q^2)(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{\cos\vartheta}{2(\sqrt{(n^2+1)}-\sin\vartheta)\sqrt{(n^2+1)}} \cdot \frac{1}{a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}} e^{n\varphi}}$$

oder, wenn man durch ω den Winkel bezeichnet, welchen der Radius vector des Punktes (x, y, z) mit der Normale bildet,

$$a\sqrt{(n^2+1)}.\{\sqrt{(n^2+1)}-\sin\vartheta\}.\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}} e^{n\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\omega}\right)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}.$$

Mittelst der Gleichung 4) folgt aber, dass die linke Seite der vorstehenden Gleichung auch gleich $\frac{1}{2}(\varrho_1+\varrho_2)\cos\vartheta$ ist; hieraus folgt die elegante Relation:

$$(\varrho_1+\varrho_2)\cos\omega = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}.$$

Die Projection der Summe der Hauptkrümmungshalbmesser auf den Radius vector ist gleich dem Radius vector.

VI.

Verschwindet die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte einer Fläche, so giebt die Gleichung 4)

$$28)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)\sin\vartheta + \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\sin\varphi\right)\cos\vartheta = 0.$$

Eliminirt man successive x und y zwischen der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 3), so lassen sich leicht für x und y zwei sehr einfache partielle Differentialgleichungen ableiten. Es ist wohl nicht ohne Interesse, zuvor einige specielle Fälle zu betrachten, deren Ableitung sich fast von selbst darbietet.

Zerlegt man die Gleichung 3) in die beiden folgenden:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}\sin\varphi = -\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

so findet man leicht:

$$x = f(\cot\vartheta\,.\cos\varphi), \quad y = f_1(\cot\vartheta\,.\sin\varphi),$$

wo f und f_1 beliebige Functionszeichen sind. Setzt man zur Abkürzung $\cot\vartheta\,.\cos\varphi = p$, $\cot\vartheta\,.\sin\varphi = q$, so giebt die Substitution der obigen Werthe von x und y in die Gleichung 28):

$$(1+p^2)\,f'(p) = -(1+q^2)\,f'_1(q),$$

welche Gleichung offenbar nur dann bestehen kann, wenn jede ihrer Seiten gleich einer Constanten ist, d. h.

$$(1+p^2)\,f'(p) = \frac{1}{a},\quad (1+q^2)\,f'_1(q) = -\frac{1}{a}.$$

Hieraus folgt:

$$f(p) = \frac{1}{a}\,arctang\,p,\quad f_1(q) = -\frac{1}{a}\,arctang\,q,$$

also

$$p = cot\,\vartheta\,cos\,\varphi = tang\,a\,x,\quad q = cot\,\vartheta\,sin\,\varphi = -\,tang\,a\,y.$$

Es ist ferner

$$\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$$

oder

$$a\,\partial z = \left\{\frac{p}{1+p^2}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - \frac{q}{1+q^2}\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right\}\partial\varphi + \left\{\frac{p}{1+p^2}\frac{\partial p}{\partial\vartheta} - \frac{q}{1+q^2}\frac{\partial q}{\partial\vartheta}\right\}\partial\vartheta$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\partial\left(log\frac{1+p^2}{1+q^2}\right),$$

folglich:

$$a\,z = \tfrac{1}{2}\,log\,\frac{1+p^2}{1+q^2}.$$

Wegen $p = tang\,a\,x$, $q = tang\,a\,y$ geht die vorstehende Gleichung über in:

29) $$log\,\frac{cos\,a\,y}{cos\,a\,x} = a\,z,\quad \frac{cos\,a\,y}{cos\,a\,x} = e^{az}.$$

Diese Gleichung hat zuerst Scherk gegeben (Crelle's Journal XIII).

Die Gleichung 28) wird identisch für:

$$y = f(cos\,\vartheta\,cos\,\varphi),\quad z = f_1(cos\,\vartheta\,sin\,\varphi).$$

Diese Werthe von x und y in die Gleichung 3) substituirt geben:

$$(1 - cos^2\vartheta\,sin^2\varphi)\,f'_1(cos\,\vartheta\,sin\,\varphi) = (1 - cos^2\vartheta\,cos^2\varphi)\,f'(cos\,\vartheta\,cos\,\varphi),$$

eine Gleichung, die nur dann bestehen kann, wenn jede ihrer Seiten gleich einer Constanten $\frac{1}{a}$ gesetzt wird. Hierdurch findet man:

30) $$2\,a\,x = log\,\frac{1 + cos\,\vartheta\,sin\,\varphi}{1 - cos\,\vartheta\,sin\,\varphi},\quad 2\,a\,y = log\,\frac{1 + cos\,\vartheta\,cos\,\varphi}{1 - cos\,\vartheta\,cos\,\varphi}.$$

Mit Hilfe dieser Werthe von x und y geht die Gleichung:

$$\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$$

über in:

$$-\,a\,z = \frac{sin\,\vartheta}{1 + tang^2\varphi\,.\,sin^2\vartheta}\,\frac{\partial\varphi}{cos^2\varphi} + \frac{cos\,\vartheta\,tang\,\varphi}{1 + tang^2\varphi\,.\,sin^2\vartheta}\,\partial\vartheta$$
$$+ \frac{sin\,\vartheta}{1 + cot^2\varphi\,.\,sin^2\vartheta}\,\frac{\partial\varphi}{sin^2\varphi} + \frac{cos\,\vartheta\,cot\,\varphi}{1 + cot^2\varphi\,.\,sin^2\vartheta}\,\partial\vartheta$$
$$= \partial.\,arctang\,(tang\,\varphi\,.\,sin\,\vartheta) + \partial.\,arctang\,(cot\,\varphi\,.\,sin\,\vartheta).$$

Durch Integration folgt:

$$-\,a\,z = arctang\,(tang\,\varphi\,sin\,\vartheta) + arctang\,(cot\,\varphi\,.\,sin\,\vartheta) = arctang\,\frac{sin\,\vartheta}{cos^2\vartheta\,.\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi}$$

oder

$$tang\, az = -\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi}, \quad \cos az = \frac{\cos^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1-\cos^2\vartheta \sin^2\varphi)}\sqrt{(1-\cos^2\vartheta\cos^2\varphi)}}.$$

Die Gleichungen 30) geben:

$$\cos\vartheta \sin\varphi = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}, \quad \cos\vartheta\cos\varphi = \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{e^{ay} + e^{-ay}}.$$

Diese Werthe von $\cos\vartheta \sin\varphi$, $\cos\vartheta\cos\varphi$ transformiren die Gleichung für $\cos az$ in:

31) $$\cos az = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \cdot \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}.$$

Setzt man $\frac{\pi}{2a} - z$ statt z, so nimmt die vorstehende Gleichung die Form an, in welcher sie zuerst von Scherk aufgestellt wurde.

Die Gleichung 29) ist ein besonderer Fall der allgemeinen $z = f(x) + \psi(y)$. Nimmt man in zwei orthogonalen Ebenen, z. B. den Ebenen der x, z und y, z, zwei beliebige Curven C und C' an, welche einen Punkt P mit einander gemein haben, bewegt sich dann die Ebene der Curve C' parallel mit sich selbst fort, so dass der Punkt P die Curve C durchläuft, so beschreibt die Curve C' eine Fläche, deren allgemeine Gleichung $z - c = f(x) + \psi(y)$ ist, wo c eine Constante bedeutet. Statt der Ebene der Curve C' kann man auch die der Curve C nehmen, wobei dann der Punkt P die Curve C' durchläuft.

Differentiirt man die Gleichung 31) zwei Mal nach x und y, so folgt:

$$a(1+p^2)\cos az = -r \sin az, \quad a(1+q^2)\cos az = -t\sin az,$$

also

$$t(1+p^2) = r(1+q^2).$$

Wegen:

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0$$

folgt

$$t(1+p^2) = r(1+q^2) = pqs,$$

d. h. projicirt man die Tangenten zu den beiden Hauptschnitten eines Punktes der Fläche 31) auf die Ebene der x und y, so werden die Winkel, welche diese Projectionen mit einander bilden, von den Achsen der x und y halbirt.

Für die beiden Flächen 29) und 31) lässt sich die Differentialgleichung der Krümmungslinien leicht integriren. Für

$$ax = arctang\,(\cot\vartheta\cos\varphi), \quad ay = -arctang\,(\cot\vartheta\sin\varphi)$$

giebt die Gleichung 7)

$$\left(\sin 2\varphi\cos\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + 2\cos 2\varphi\frac{\sin\vartheta}{1+\sin^2\vartheta}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi}{1+\sin^2\vartheta}\right)^2$$

oder

$$\cos 2\varphi = \frac{1+\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\, w$$

gesetzt,

$$\frac{\partial w}{\sqrt{(1-w^2)}} = \pm \frac{2\cos\vartheta}{1+\sin^2\vartheta}\partial\vartheta.$$

Berücksichtigt man, dass

$$arcsin\, w = arctang\frac{w}{\sqrt{(1-w^2)}},\quad 2\, arctang\, \sin\vartheta = arctang\frac{2\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

so lässt sich die obige Differentialgleichung auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{arctang\frac{w}{\sqrt{(1-w^2)}} \pm arctang\frac{2\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\, arctang\left\{\frac{\frac{w}{\sqrt{(1-w^2)}} \mp \frac{2\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}{1 \pm \frac{w}{\sqrt{(1-w^2)}}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}\right\} = 0.$$

Bezeichnet b eine Constante, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

$$w = \frac{\sin b \pm \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\cos b}{\sqrt{\left(1+\frac{4\sin^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\right)}} = \frac{\cos^2\vartheta}{1+\sin^2\vartheta}\left(\sin b \pm \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\cos b\right)$$

oder, wegen des obigen Werthes von w,

$$\cos 2\varphi = \sin b \pm \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\cos b.$$

Für die Fläche 31) hat man in der Gleichung 7)

$$2ax = \log\frac{1+\cos\vartheta\sin\varphi}{1-\cos\vartheta\sin\varphi},\quad 2ay = \log\frac{1+\cos\vartheta\cos\varphi}{1-\cos\vartheta\cos\varphi}$$

zu setzen, man erhält dann:

$$\left(\cos\vartheta\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\frac{1+\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sin 2\varphi\cos^2\vartheta}{2\sin\vartheta}\right)^2$$

oder

$$\sin 2\varphi = w\frac{2\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

gesetzt,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\vartheta}\cdot tang\,\vartheta\right)^2 = 1 + w^2,$$

also

$$\pm w = \tfrac{1}{2}\left(b\sin\vartheta - \frac{1}{b\sin\vartheta}\right),$$

d. h.

$$\pm\sin 2\varphi = \frac{1}{\cos^2\vartheta}\left(b\sin^2\vartheta - \frac{1}{b}\right).$$

Um die Werthe von x und y zu finden, welche der Gleichung 28) genügen, eliminire man zwischen dieser Gleichung und 3) successive $\frac{\partial y}{\partial\varphi}$ und $\frac{\partial y}{\partial\vartheta}$, hierdurh findet man:

$$-\frac{\partial y}{\partial \vartheta}=\frac{\operatorname{tang}\vartheta:\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\vartheta}{1-\cos^2\vartheta\cos^2\varphi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\vartheta}{1-\cos^2\vartheta\cos^2\varphi}.$$

Differentiirt man die erste der vorstehenden Gleichungen nach φ, die zweite nach ϑ, addirt die so erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\cos^2\vartheta\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}-\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial x}{\partial \vartheta}=0$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}=\omega$$

gesetzt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}=0.$$

Durch das obige Verfahren erhält man für y genau dieselbe partielle Differentialgleichung. Obgleich diese Differentialgleichungen für x und y äusserst leicht zu integriren sind, ist es doch besser, statt φ und ϑ andere Variabele einzuführen, welche leichter gestatten, die arbiträren Functionen auf ihre kleinste Zahl zu reduciren. Setzt man:

32) $$u=\frac{i\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi}{i\sin\varphi-\sin\vartheta\cos\varphi},\quad v=\frac{i\cos\varphi-\sin\vartheta\sin\varphi}{i\sin\varphi+\sin\vartheta\cos\varphi}\quad (i=\sqrt{-1}),$$

so folgt:

33) $$\sqrt{(1+u^2)}=\frac{i\cos\vartheta}{i\sin\varphi-\sin\vartheta\cos\varphi},\quad \sqrt{(1+v^2)}=\frac{i\cos\vartheta}{i\sin\varphi+\sin\vartheta\cos\varphi},$$

wo die Vorzeichen der beiden Wurzeln beliebig genommen werden können, der Einfachheit halber nehme man sie beide positiv. Ist M eine Function von φ und ϑ, so hat man:

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi}=\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial M}{\partial \vartheta}=\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}+\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{i\cos\vartheta}=\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{\cos^2\vartheta}=\frac{1}{(i\sin\varphi-\sin\vartheta\cos\varphi)^2}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\frac{1}{i\cos\vartheta}=\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{1}{\cos^2\vartheta}=\frac{1}{(i\sin\varphi+\sin\vartheta\cos\varphi)^2}.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen und die Gleichungen 33) findet man, dass die Gleichungen 3) und 28) in folgende übergehen:

$$u\sqrt{(1+u^2)}\frac{\partial x}{\partial u}+v\sqrt{(1+v^2)}\frac{\partial x}{\partial v}+\sqrt{(1+u^2)}\frac{\partial y}{\partial u}+\sqrt{(1+v^2)}\frac{\partial y}{\partial v}=0,$$

$$u\sqrt{(1+u^2)}\frac{\partial x}{\partial u}-v\sqrt{(1+v^2)}\frac{\partial x}{\partial v}+\sqrt{(1+u^2)}\frac{\partial y}{\partial u}-\sqrt{(1+v^2)}\frac{\partial y}{\partial v}=0.$$

Die vorstehenden Gleichungen addirt und subtrahirt geben:

$$u\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}=0,\quad v\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}=0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Es ist ferner

$$p-qu=i\sqrt{(1+u^2)},\quad p-qv=-i\sqrt{(1+v^2)},$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}=(p-qu)\frac{\partial x}{\partial u}=i\sqrt{(1+u^2)}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}=(p-qv)\frac{\partial y}{\partial v}=-i\sqrt{(1+v^2)}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Diese Gleichungen geben, wegen $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ auch $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$. Für die Variabeln u und v hat man also:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Setzt man nun

$$x=f'(u)+\psi'(v),$$

so folgt

$$\begin{aligned} y&=-\int u f''(u)\,\partial u-\int v\,\psi''(v)\,\partial v\\ &=f(u)-uf'(u)+\psi(v)-v\,\psi'(v),\\ z&=i\int\sqrt{(1+u^2)}\,f''(u)\,\partial u-i\int\sqrt{(1+v^2)}\,\psi''(v)\,\partial v. \end{aligned}$$

Diese Werthe von x, y, z in Function von u und v hat zuerst Monge gegeben. So einfach es scheint, durch besondere Annahmen für die Functionen $f(u)$ und $\psi(v)$ Flächen zu finden, welche der Differentialgleichung 28) genügen, so werden die Rechnungen doch meist sehr complicirt, wovon man sich durch Scherk's Abhandlung über diesen Gegenstand in Crelle's Journal (T. XIII) überzeugen kann.

Führt man in der Gleichung 28) für x, y, z ihre Werthe aus 10) ein, so erhält man für V folgende partielle Differentialgleichung:

$$34)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}\cos^2\vartheta+\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\cos^2\vartheta\,(2\cot\vartheta-\tang\vartheta)=0.$$

Durch passende Annahmen für V lassen sich mit Hilfe dieser Gleichung sehr merkwürdige Flächen finden. Setzt man $V=a\varphi+U$, wo a eine Constante ist und U nur ϑ enthält, so wird die Gleichung 34)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log(\cos\vartheta\sin^2\vartheta)=0,$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta=\frac{b}{\cos\vartheta},\quad U=-\frac{b}{\sin\vartheta}+\tfrac{1}{2}b\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}.$$

Für diesen Werth von V werden die Gleichungen 10)

$$x \cos\vartheta = -b\cos\varphi - a\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$y\cos\vartheta = -b\sin\varphi - a\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z = -a\varphi - \tfrac{1}{2}b\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}.$$

Durch Elimination von φ und ϑ findet man leicht:

$$-z = a\,\operatorname{arctang}\frac{by\sqrt{(x^2+y^2+a^2)}+ax\sqrt{(x^2+y^2+b^2)}}{bx\sqrt{(x^2+y^2+a^2)}-ay\sqrt{(x^2+y^2+b^2)}}$$
$$+\tfrac{1}{2}b\log\frac{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)}+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2)}+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}.$$

Je nachdem man $b=0$ oder $a=0$ setzt, erhält man die Schraubenfläche oder die Rotationsfläche der Kettenlinie. Nimmt man in 34) $V = U\cos n(\varphi+\alpha)$, wo wieder U blosse Function von ϑ ist, so folgt:

$$35)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}\cos^2\vartheta + \frac{\partial U}{\partial\vartheta}\cos^2\vartheta\,(2\cot\vartheta - \operatorname{tang}\vartheta) = n^2 U$$

oder

$$U = \frac{W}{\sin\vartheta}(\cos\vartheta)^n$$

gesetzt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\vartheta^2}\cos\vartheta - (2n+1)\sin\vartheta\frac{\partial W}{\partial\vartheta} - (n-1)(n+2)\,W = 0.$$

Für $\sin\vartheta = w$ wird die vorstehende Gleichung:

$$(1-w^2)\frac{\partial^2 W}{\partial w^2} - 2(n+1)\,w\frac{\partial W}{\partial w} - (n-1)(n+2)\,W = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, nehme man:

$$W = \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r w^r.$$

Zwischen den Coefficienten dieser Reihe finden dann die Relationen statt:

$$a_{2r} = \frac{n-1}{n+2r-1}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2r)}{1.2\ldots 2r}\,a_0,$$
$$a_{2r+1} = \frac{n}{n+2r}\,\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+2r-1)}{1.2\ldots(2r+1)}\,a_1.$$

Da nun:

$$\int_0^1 u^{n+2r-2}\partial u = \frac{1}{n+2r-1},\quad \int_0^1 u^{n+2r-1}\partial u = \frac{1}{n+2r},$$

so lässt sich der Ausdruck für W auch schreiben:

$$2W = (n-1)\,a_0\int_0^1\left\{\frac{1}{(1-wu)^{n+1}} + \frac{1}{(1+wu)^{n+1}}\right\}u^{n-2}\partial u$$
$$+\frac{n}{n+1}\,a_1\int_0^1\left\{\frac{1}{(1-wu)^{n+1}} - \frac{1}{(1+wu)^{n+1}}\right\}u^{n-2}\partial u.$$

Für

$$v = \frac{u}{1 \pm wu}$$

folgt:

$$\int_0^1 \frac{u^{n-2}}{(1 \pm wu)^{n+1}} \partial u = \int_0^{\frac{1}{1 \pm w}} (1 \mp wv)\, v^{n-2}\, \partial v = \frac{n \pm w}{n(n-1)(1 \pm w)^n}.$$

Hierdurch erhält man für $2W$ folgende Gleichung:

$$2W = \frac{a_0}{n}\left\{\frac{n-w}{(1-w)^n} + \frac{n+w}{(1+w)^n}\right\} + \frac{a_1}{(n+1)(n-1)}\left\{\frac{n-w}{(1-w)^n} - \frac{n+w}{(1+w)^n}\right\},$$

wo a_0, a_1, die durch die Integration introducirten willkürlichen Constanten sind. Da nun $U \sin\vartheta = W(\cos\vartheta)^n$ und $w = \sin\vartheta$, so ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung 35):

$$U = \frac{a_0}{2n}\left\{\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{\sin\vartheta} - 1\right) + \left(\frac{1-\sin\vartheta}{1+\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{\sin\vartheta} + 1\right)\right\}$$
$$+ \frac{a_1}{(n+1)(n-1)}\left\{\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{\sin\vartheta} - 1\right) + \left(\frac{1-\sin\vartheta}{1+\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{\sin\vartheta} - 1\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas vereinfachen. Schliesst man die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ aus, so ist

36) $$U = A\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\sin\vartheta} - \frac{1}{n}\right) + B\left(\frac{1-\sin\vartheta}{1+\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\sin\vartheta} + \frac{1}{n}\right)$$

das allgemeine Integral der Gleichung 35), wenn A und B beliebige Constanten sind. Für $n = 0$ ist $V = U$, also V unabhängig von φ, dieser Fall giebt die bekannte Rotationsfläche der Kettenlinie. Für $n = 1$ giebt die Gleichung 35)

$$U = a \cot\vartheta + b\left(\frac{1}{\cos\vartheta} + \tfrac{1}{2}\cot\vartheta \,.\, \log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right).$$

Für den Fall, dass n eine ganze Zahl ist, positiv oder negativ, aber ihrem absoluten Werthe nach $\overline{\gt} 2$, ist

37) $$V = a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\sin\vartheta} - \frac{1}{n}\right)\cos n(\varphi + \alpha)$$

eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung 34), welche algebraische Flächen liefert, für welche die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwindet.

Nimmt man in 57) $\alpha = 0$, substituirt dann V in die Gleichungen 10), so folgt:

38)

$$x\cos\vartheta = a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\{(1 - n\sin\vartheta)\cos\varphi\cos n\varphi + (n - \sin\vartheta)\sin\varphi\sin n\varphi\},$$

$$y\cos\vartheta = a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\{(1 - n\sin\vartheta)\sin\varphi\cos n\varphi - (n - \sin\vartheta)\cos\varphi\sin n\varphi\},$$

$$z = -a\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{n^2-1}{n}\cos n\varphi.$$

Durch Elimination von φ und ϑ erhält man für ein ganzzahliges n offenbar eine algebraische Fläche. Für $n = 2$ hat man:

$$x\cos\vartheta = a\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}[(1-2\sin\vartheta)\cos\varphi\cos 2\varphi + (2-\sin\vartheta)\sin\varphi\sin 2\varphi],$$

$$y\cos\vartheta = a\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}[(1-2\sin\vartheta)\sin\varphi\cos 2\varphi - (2-\sin\vartheta)\cos\varphi\sin 2\varphi],$$

$$z = -a\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\cdot\tfrac{3}{2}\cos 2\varphi.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$39)\qquad x^2+y^2+\tfrac{4}{3}z^2 = a^2\frac{(2-\sin\vartheta)^2}{\cos^2\vartheta}\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^2.$$

Es ist ferner

$$\frac{x^2-y^2}{a^2} = \left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\cos 2\varphi\right)^2 - \frac{3(2-\sin\vartheta)}{(1-\sin\vartheta)^2}\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\cos 2\varphi\,.\sin\vartheta$$

$$= -\tfrac{8}{27}\frac{z^3}{a^3} + \frac{2z}{a}\left(\frac{2-\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)\frac{\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}$$

oder

$$40)\qquad \left(x^2-y^2+\frac{8z^3}{27a}\right)\frac{1}{2az} = \frac{2-\sin\vartheta}{(1-\sin\vartheta)^2}\sin\vartheta.$$

Dividirt man die Gleichung 39) durch das Quadrat der vorstehenden Gleichung, so folgt:

$$4z^2\frac{x^2+y^2+\frac{4}{3}z^2}{\left(x^2-y^2+\frac{8z^3}{27a}\right)^2} = \frac{1-\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}.$$

Eliminirt man $\sin\vartheta$ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 40), so folgt:

$$a\left\{x^2-y^2+\frac{8z^2}{27a}+2az\right\}^3 = 2z\left\{(x^2+y^2+\tfrac{4}{3}z^2)z-2a^2z-\tfrac{3}{2}a\left(x^2+y^2+\frac{8z^3}{27a}\right)\right\}^2.$$

Für ein mässig grosses n führt die Elimination von ϑ und φ zwischen den Gleichungen 38) zu so complicirten Rechnungen, dass es wohl nicht der Mühe verlohnen möchte, die Gleichungen weiterer Flächen wirklich darzustellen und das obige einfache System von Gleichungen durch Relationen zwischen den orthogonalen Coordinaten x, y und z zu ersetzen.

Für die Gleichungen 38) nimmt die Differentialgleichung 7) der Krümmungslinien folgende Form an:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\right)^2 - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\right)\cot n\varphi = 1.$$

Bezeichnet h eine Constante, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

$$\left\{\cos\frac{n}{2}\varphi\,.\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{4}} - h\right\}\left\{\sin\frac{n}{2}\varphi\,.\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{4}} - h\right\} = 0.$$

Jeder der Factoren dieser Gleichung gleich Null gesetzt giebt zwischen den Winkeln φ und ϑ eine algebraische Relation. Hieraus folgt, dass die Krümmungslinien der Flächen, bestimmt durch die Gleichungen 38), algebraische Curven sind.

Die Gleichung für das Bogenelement einer Curve auf einer Fläche, bestimmt durch die Gleichung 28), lässt sich auf eine sehr einfache Form bringen. Wegen der Gleichungen 3) und 28) geht die Gleichung 22) über in:

$$(\partial s)^2 = \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \sin\varphi\right)^2 \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cos\varphi\right)^2 \right\}$$
$$\{(\partial\vartheta)^2 + \cos^2\vartheta\,(\partial\varphi)^2\}.$$

Mit Hilfe der bemerkten Gleichungen wird die Gleichung 5)

$$-\varrho_1\varrho_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \sin\varphi\right)^2 \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \sin\varphi - \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cos\varphi\right)^2.$$

Bezeichnet man den absoluten Werth eines der Krümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2 durch ϱ, so ist $-\varrho_1\varrho_2 = \varrho^2$, folglich:

$$(\partial s)^2 = \varrho^2\,[\cos^2\vartheta\,(\partial\varphi)^2 + (\partial\vartheta)^2].$$

Mittelst der vorstehenden Gleichung nimmt die Differentialgleichung einer geodätischen Linie folgende einfache Form an:

$$41)\quad \frac{\dfrac{\partial\varrho}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left\{1+\cos^2\vartheta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2\right\}}} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\frac{\varrho\cos^2\vartheta\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}}{\sqrt{\left\{1+\cos^2\vartheta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2\right\}}}\right\},$$

wenn φ als Function von ϑ angesehen wird. Für die Gleichungen 28) findet man:

$$\varrho = (n^2-1)\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\cos^2\vartheta},$$

d. h. ϱ ist unabhängig von φ. Die Gleichung 41) giebt in diesem Falle integrirt:

$$\varphi = \int \frac{a\,\partial\vartheta}{\sqrt{\left\{\left(\dfrac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^n - a^2\cos^2\vartheta\right\}}},$$

wo a eine Constante bezeichnet.

II.

Zur analytischen Behandlung der Oberflächen zweiten Grades; insbesondere über homofocale und conjugirte Oberflächen zweiten Grades.

Von Dr. Wilh. Fiedler,

Lehrer der darstellenden Geometrie an der Gewerbeschule zu Chemnitz.

I. Grundlegung.

1. Durch Anwendung einer einfachen Symbolik lassen sich in der Theorie der krummen Oberflächen nicht minder als in der der ebenen Curven zahlreiche Sätze in der kürzesten Form entwickeln. Es sei mir erlaubt, für die Handhabung einer solchen Symbolik innerhalb der Theorie der ebenen Formen des ersten und zweiten Grades auf meine Bearbeitung von Rev. G. Salmon's Werk: „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" (Leipzig 1860, Teubner) zu verweisen (vergl. besonders die Art. 52—72, 275—327), weil in dem genannten Werke der Zusammenhang dieser Symbolik mit dem Ganzen der analytisch-geometrischen Methoden umfassend dargelegt ist. In solchem Zusammenhange wird man die Entwickelungen „über Dreiecke und Tetraeder, welche in Bezug auf Curven und Oberflächen zweiter Ordnung sich selbst conjugirt sind" im VI. Bande dieser Zeitschrift (p. 140), und die Abhandlung „das Problem des Pappus und die Gesetze der Doppelschnittsverhältnisse etc." im V. Bande derselben (p. 377) auf demselben Gebiete orientiren.

Die nachfolgenden Entwickelungen werden die grosse Fruchtbarkeit einer solchen Symbolik für die Theorie der Oberflächen zweiten Grades genügend darthun; man wird vielleicht mit besonderem Interesse ein neuerlichst erfolgreich erweitertes Gebiet der geometrischen Forschung an der Hand derselben durchmessen finden.

2. Ueberall in dem Folgenden sollen durch

$$S=0,\quad S_1=0,\quad \Sigma=0 \text{ etc.}$$

die Gleichungen von Oberflächen zweiten Grades, durch

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0 \text{ etc.}$$

die Gleichungen von Ebenen und durch

$\varkappa$, λ etc.

Constanten bezeichnet werden.

Alsdann ist die lineare Verbindung der Gleichungen zweier Oberflächen zweiten Grades

$$S + \varkappa S_1 = 0$$

die Gleichung aller derjenigen Oberflächen zweiten Grades, welche die Durchschnittscurve der beiden gegebenen Oberflächen

$$S = 0, \quad S_1 = 0$$

enthalten.

Wenn eine der beiden Flächen zweiter Ordnung in die Verbindung zweier Ebenen degenerirt, so wird

$$S + \varkappa \,.\, A_1 B_1 = 0$$

die Gleichung aller der Flächen zweiten Grades, welche mit der Fläche $S = 0$ die nämlichen ebenen Durchschnittscurven besitzen, und

$$AB + \varkappa \,.\, A_1 B_1 = 0$$

die Gleichung aller derjenigen Regelflächen zweiten Grades, welche durch die vier geraden Linien (A, A_1), (A, B_1), (B, A_1), (B, B_1) hindurchgehen. Man erkennt aus dieser letzteren Gleichung in der Form

$$\varkappa = -\frac{AB}{A_1 B_1},$$

dass jede solche Oberfläche der Ort eines Punktes ist, für welchen das Product seiner senkrechten Abstände von zwei festen Ebenen $A = 0$, $B = 0$ zu dem Producte seiner Entfernungen von zwei anderen festen Ebenen $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ in einem bestimmten unveränderlichen Verhältnisse ist — und findet sich damit auf dem Wege zur Ableitung der auf das Doppelschnittverhältniss bezüglichen Eigenschaften der Regelflächen zweiten Grades. (Vergl. diese Zeitschrift, Bd. V, p. 379.)

Dem Zusammenfallen der beiden Ebenen, welche die eine Oberfläche zweiten Grades vertreten, entspricht insbesondere die Gleichung

$$S + \varkappa A^2 = 0,$$

die Gleichung aller derjenigen Oberflächen zweiten Grades, welche mit der Oberfläche $S = 0$ längs der Curve eine Berührung haben, in der sie von der Ebene $A = 0$ geschnitten wird.

3. Weil bekanntlich der analytische Ausdruck einer Ebene sich auf das constante Glied reducirt, wenn man dieselbe als unendlich entfernt, oder, bestimmter gesagt, als mit der unendlich entfernten Ebene zusammenfallend, voraussetzt, so ist ferner

$$S + \varkappa A = 0$$

der Ausdruck aller der Oberflächen zweiten Grades, welche mit der Oberfläche zweiten Grades $S=0$ die durch die Ebene $A=0$ in derselben bestimmte Durchschnittscurve und die andere Curve gemein haben, welche die unendlich entfernten Punkte dieser Oberfläche bilden *).

Solche Oberflächen sind der gegebenen Fläche $S=0$ ähnlich und ähnlich gelegen, und man sieht sofort, dass die Coefficienten der symbolisch repräsentirten Gleichungen den bekannten analytischen Bedingungen der Aehnlichkeit und ähnlichen Lage für Oberflächen zweiten Grades genügen. In anderen Worten also: Aehnliche und ähnlich gelegene Oberflächen zweiten Grades schneiden sich in einer ebenen Curve; ihr zweiter Durchschnitt ist eine unendlich entfernte Curve, der unendlich entfernte Theil der Durchschnittscurve ihrer parallelen Asymptotenkegel.

Weil je zwei Kugeln ähnliche und ähnlich gelegene Oberflächen zweiten Grades sind, so können sie einander nur in einem Kreise durchschneiden.

Endlich entsprechen der symbolischen Form

$$S+x^2=0$$

alle diejenigen Oberflächen zweiten Grades, welche einer gegebenen Oberfläche zweiten Grades $S=0$ nach der unendlich entfernten Curve derselben umschrieben sind, d. h. mit ihr den nämlichen Asymptotenkegel besitzen. Solche Oberflächen sind nicht nur ähnlich und ähnlich gelegen, sondern auch concentrisch. Wie bekannt, enthalten die Coordinaten des Centrums einer Oberfläche zweiten Grades das constante Glied ihrer Gleichung nicht, und nur dies ist in den durch die Symbolgleichung dargestellten Formen unbestimmt.

Aehnliche und ähnlich gelegene concentrische Oberflächen zweiten Grades berühren somit einander nach ihrer unendlich entfernten Curve; dies ist der Grund, weshalb sie keine endlich angebbaren Schnittpunkte erzeugen können.

Concentrische Kugeln berühren sich in einem der Ebene des Unendlichen angehörigen imaginären Kreise, welcher der Ort ist aller jener in der Theorie der Brennpunkte der algebraischen ebenen Curven so wichtigen imaginären Kreispunkte **); jede Ebene bestimmt die ihr zugehörigen Punkte dieser Art durch ihren Durchschnitt mit dem bezeichneten imaginären Kreise.

4. Jede der hier vorgeführten Symbolgleichungen erlaubt sehr ein-

*) Man sieht daraus, dass diese Curve als eine ebene Curve betrachtet werden muss, was auch aus elementaren Betrachtungen sich ergiebt.

**) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte", Art. 282, 305, 325, 400 (Aufg. 5), 447.

fache beachtenswerthe Folgerungen. Es sei gestattet, mit den beiden letzten den Anfang zu machen, um dann nicht noch einmal auf sie zurückzukommen.

Paraboloide berühren bekanntlich die unendlich entfernte Ebene, und ähnliche ähnlich gelegene Paraboloide berühren in Folge dessen einander. Ist daher insbesondere $S=0$ die Gleichung eines Paraboloides, so hat jedes der durch

$$S+x^2=0$$

repräsentirten Paraboloide mit demselben eine Berührung der dritten Ordnung in unendlicher Entfernung; es sind die dem gegeben gleichen ähnlich gelegenen Paraboloide.

Die vier Gleichungen

$$S+A=0,\quad S+B=0,\quad S+C=0,\quad S+D=0,$$

in denen die Constanten den Polynomen ersten Grades eingerechnet sind, liefern durch Subtraction die sechs Gleichungen

$$A-B=0,\quad A-C=0,\quad A-D=0,$$
$$B-C=0,\quad B-D=0,\quad C-D=0;$$

man bemerkt, dass die drei Gleichungen der zweiten Gruppe aus denen der ersten hervorgehen, und schliesst daraus, dass die von ihnen repräsentirten Ebenen mit den Ebenen der ersten Gruppe durch denselben Punkt gehen. Daraus ergiebt sich als Interpretation des Systems der Satz: Die Ebenen der sechs Durchschnittscurven, welche von vier ähnlichen und ähnlich gelegenen Oberflächen zweiten Grades gebildet werden, gehen sämmtlich durch denselben Punkt.

5. Ich schliesse daran zunächst einige Folgerungen aus der Symbolgleichung $S+AB=0$.

Die Gleichungen

$$S+AB=0,\quad S+AC=0$$

liefern durch Subtraction

$$A(B-C)=0.$$

Die Interpretation lehrt, dass hier zwei Oberflächen zweiten Grades betrachtet sind, die mit der Oberfläche $S=0$ eine und dieselbe Durchschnittscurve in der Ebene $A=0$ haben; die Ebenen ihrer beiden übrigen Durchschnittscurven mit der gegebenen Oberfläche und die Ebene der Durchschnittscurve, die sie mit einander bilden, schneiden sich in einer und derselben geraden Linie. Oder mit anderen Worten: Wenn drei Oberflächen zweiten Grades eine ebene Schnittcurve gemein haben, so schneiden sich die Ebenen ihrer drei übrigen Schnittcurven in einer geraden Linie.

Das System der Gleichungen

$$S+AB=0,\quad S+BC=0,\quad S+CA=0$$

liefert die Gruppe

$$A(B-C)=0,\quad B(C-A)=0,\quad C(A-B)=0,$$

und man hat wegen der Identität

$$(B-C)+(C-A)+(A-B)=0$$

den Satz: Irgend drei Oberflächen zweiten Grades, die durch je zwei von drei ebenen Schnittcurven einer und derselben Oberfläche zweiten Grades gelegt sind, haben ihre zweiten Schnittcurven in drei Ebenen, welche dieselbe gerade Linie enthalten.

6. Es ist im Anfange bemerkt worden, dass bei den Regelflächen zweiten Grades die vollständige Zerlegung in Factoren des ersten Grades möglich ist; und in der That führen die gebräuchlichen einfachsten Formen der Gleichungen dieser Flächen sofort auf die Existenz und die gegenseitigen Beziehungen der geradlinigen Erzeugenden dieser Flächen.

Denn die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids in der Gestalt

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=z$$

ist das Product der linearen Factoren

$$\frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{y}{b^{\frac{1}{2}}}=\lambda,\quad \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{b^{\frac{1}{2}}}=\frac{z}{\lambda};$$

und ebenso auch das der anderen

$$\frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{b^{\frac{1}{2}}}=\lambda,\quad \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{y}{b^{\frac{1}{2}}}=\frac{z}{\lambda}.$$

Somit existiren für jeden Werth von λ zwei gerade Linien, welche ganz in der Fläche liegen, und die unendliche Reihe der möglichen Werthe dieser Constanten liefert die beiden Systeme geradliniger Erzeugenden, die das hyperbolische Paraboloid besitzt. Man sieht, dass je zwei Erzeugende sich schneiden, von denen die eine dem ersten, die andere dem zweiten System der Zerlegung entspricht, sowie dass das System der einen der festen Ebene

$$\frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{y}{b^{\frac{1}{2}}}=0,$$

das System der anderen der festen Ebene

$$\frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{b^{\frac{1}{2}}}=0$$

parallel ist; diese beiden Ebenen selbst bilden endlich mit den beiden Ebenen des Aufrisses und des Seitenrisses ein harmonisches System.

Für das einfache Hyperboloid ist

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}.$$

Diese Gleichung zerfällt in die Factoren

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

oder in die anderen

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Wieder entsprechen jedem Werthe von λ zwei sich schneidende Gerade auf der Oberfläche und man erkennt, dass das einfache Hyperboloid auf doppelte Weise durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann; weitere Entwickelungen über diese Systeme lassen sich leicht anschliessen.

7. Die Symbolgleichung

$$S+A^2=0$$

giebt Anlass zu Entwickelungen, die denen in der Theorie der Kegelschnitte analog sind, welche zu den Sätzen von **Pascal** und **Brianchon** führen.

Aus dem System der Gleichungen

$$S+A^2=0,\quad S+B^2=0,$$

den Repräsentanten zweier Oberflächen zweiten Grades, welche die nämliche Oberfläche zweiten Grades $S=0$ nach ebenen Curven berühren oder ihr umschrieben sind, folgt die Gruppe

$$A^2-B^2=0$$

oder

$$(A+B)(A-B)=0,$$

d. h.: *Wenn zwei Oberflächen zweiten Grades einer und derselben dritten Oberfläche zweiten Grades umschrieben sind, so schneiden sie sich in ebenen Curven und die Ebenen dieser Schnittcurven bilden mit den Ebenen der Berührungscurven ein hamonisches Büschel.* Denn vier Ebenen

$$A=0,\quad B=0,\quad A+B=0,\quad A-B=0$$

bilden ein harmonisches Büschel, für welches die Durchschnittslinie der Ebenen $A=0$, $B=0$ die Scheitelkante ist.

8. Das System der auf drei Oberflächen zweiten Grades, die derselben vierten umschrieben sind, bezüglichen Gleichungen

$$S+A^2=0,\quad S+B^2=0,\quad S+C^2=0,$$

somit

$$(A+B)(A-B)=0,\quad (B+C)(B-C)=0,\quad (C+A)(C-A)=0$$

erfordert zu seiner Interpretation die Beachtung der stattfindenden Identitäten

$$\begin{aligned}(A-B)+(B-C)+(C-A)&=0,\\(A-B)+(B+C)-(C+A)&=0,\\(A+B)-(B-C)-(C+A)&=0,\\(A+B)-(B+C)+(C-A)&=0,\end{aligned}$$

und die Bemerkung, dass der Gruppe seiner Formeln durch die gleichzeitige Erfüllung von

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0$$

genügt wird; dann liefert das betrachtete System den Satz: *Wenn drei Oberflächen zweiten Grades einer und derselben vierten* umschrieben sind, so gehen die Ebenen ihrer Durchschnittscurven sämmtlich durch den Durchschnittspunkt der Ebenen ihrer drei Berührungscurven mit der gemeinschaftlichen eingeschriebenen Fläche und schneiden sich überdies zu je dreien in einer und derselben geraden Linie.

Man erkennt in demselben das Analogon des Satzes von Brianchon über das einem Kegelschnitt umschriebene Sechseck; bekanntlich ist derselbe nur ein specieller Fall des folgenden Satzes: Wenn drei Kegelschnitte mit einem und demselben vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so gehen ihre sechs Durchschnittssehnen vier Mal zu je dreien durch einen Punkt*) — denn er kann in der Form ausgesprochen werden: Wenn drei Winkel einem und demselben Kegelschnitt umschrieben sind, so durchschneiden sich die Diagonalen der aus je zweien derselben entspringenden umschriebenen Vierseite vier Mal zu je dreien in einem Punkt.**)

Wenn speciell die umschriebenen Oberflächen zweiten Grades Kegelflächen sind, so erhält man aus dem vorigen Satze den folgenden: Drei derselben Oberfläche zweiten Grades umschriebene Kegelflächen bestimmen durch ihren Durchschnitt mit einander sechs Ebenen, welche vier Mal zu je dreien eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie besitzen und überdies alle durch den Durchschnittspunkt der drei Ebenen gehen, welche durch die Berührungscurven der Kegel mit der Oberfläche zweiten Grades bestimmt sind.

9. Man kann endlich diesen Satz nach den Gesetzen der Reciprocität behandeln und erhält als Analogon des Pascal'schen Satzes bei Oberflächen zweiten Grades den folgenden: Wenn man in einer Oberfläche zweiten Grades drei ebene Schnittcurven bestimmt, so lassen sich durch je zwei derselben zwei Kegelflächen legen; die Scheitel der so erhaltenen sechs Kegel liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines vollständigen Vierecks, oder je drei von ihnen liegen in einer geraden Linie.***)

Auch andere der hier mitgetheilten Sätze gestatten nach den Gesetzen der Reciprocität die Bildung entsprechender neuer Sätze; beispielsweise entspricht dem System

$$S+AB=0,\quad S+AC=0$$

hiernach der Satz: Wenn drei Oberflächen zweiten Grades einen und denselben gemeinschaftlichen Berührungskegel haben, so liegen die drei Scheitel der zweiten Berührungs-

*) Vergl. „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 288.

**) Ueber die constructive Bedeutung derselben vergleiche man die Note des Verfassers im VI. Bande dieser Zeitschrift, p. 415.

***) Vergl. G. Salmon im XXIV. Bde. des *Philosophical Magazine*, p. 49.

kegel, welche je zweien von ihnen gemeinschaftlich sind, in einer geraden Linie. Man erkennt leicht, dass es zur Entwickelung solcher Sätze aus den gegebenen Symbolgleichungen nicht gerade des Gesetzes der Reciprocität bedarf, dass vielmehr die erneuerte Interpretation derselben nach einem Systeme räumlicher Ebenencoordinaten ganz zu demselben Ziele führt; man weiss aber auch, dass die Verschiedenheit beider Wege nur in der Form liegt.

Das Vorstehende scheint hinreichend, die Art und Weise des Gebrauchs und die Nützlichkeit der symbolischen Gleichungen in der Theorie der Oberflächen zweiten Grades anschaulich zu machen; man kann jedoch bemerken, dass gerade die allgemeinste Symbolgleichung

$$S + kS_1 = 0$$

weder in der einen, noch in der anderen Interpretation eine Anwendung erfahren hat. Dafür wird alles Folgende der Interpretation gewisser specieller Formen dieser allgemeinen Gleichung in beiden Richtungen gewidmet sein. Man kann alle die der Gleichung

$$S + kS_1 = 0$$

entsprechenden Oberflächen als ein einfaches System von Flächen zweiten Grades bezeichnen und demselben ein anderes einfaches System von Flächen zweiten Grades nach gleichem Doppelschnittverhältniss entsprechen lassen; alsdann beschreibt die Durchschnittscurve der einander entsprechenden Flächen beider Systeme eine Oberfläche vierter Ordnung. Wenn aber das zweite einfache System auf ein Ebenenbüschel reducirt ist, so beschreibt die Durchschnittscurve der entsprechenden Flächen eine Oberfläche dritter Ordnung. Man kann in derselben Weise fortfahrend zu höheren Formen vorschreiten. Aber ich will an dieser Stelle einer anderen Richtung nachgehen, in der die allgemeine Symbolgleichung ein höchst dankbares Object der Betrachtung ist.

10. Es ist nicht schwierig, nachzuweisen, dass die schönen neueren Untersuchungen von M. Chasles: „*Résumé d'une théorie des coniques sphèriques homofocales*“ (*Comptes rendus*, *t. L*, *p.* 623) und die späteren Entwickelungen desselben berühmten Geometers: „*Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales*“ (*Comptes rendus*, *t. L*, *p.* 1055 *et* 1110), sowie die daran sich schliessenden in der Abhandlung: „*Sulle coniche e sulle superficie di second' ordine congiunte*“ von M. Cremona (*Annali di Matematica pura ed applicata p. da B. Tortolini*, *t. III*, *p.* 257) sämmtlich auf die hier betrachteten Symbolgleichungen — und zwar insbesondere auf die allgemeinste derselben

$$S + kS_1 = 0$$

— zurückgehen, wenn man nur mit denselben die analytischen Gesichtspunkte verbindet, die ich in meiner Note „über Dreiecke und Tetraeder, welche in Bezug auf Curven und Oberflächen zweiter Ordnung sich selbst conjugirt sind" (Zeitschrift Bd. VI, p. 140) dargelegt habe. Ich glaube mir den Dank deutscher Leser zu verdienen, wenn ich die wichtigsten Resultate jener bedeutenden Arbeiten unter diesem Gesichtspunkte hier vereinige; unter einem Gesichtspunkte, der denselben so wenig fremd ist, dass er vielmehr aus den ersten Zeilen der beiden Abhandlungen von Chasles sofort entgegenspringt, und der ein neues Zeugniss dafür geben kann, wie einfach die analytischen Parallelen zu Untersuchungen im Geiste der „neueren Geometrie" zu ziehen sind. Ich schöpfte die Anregung dazu aus der Vergleichung dieser neuesten Veröffentlichungen des ehrwürdigen Geometers*) mit dem reichen Inhalte der Note XXXI des „*Aperçu historique*" (Uebersetzung von Sohncke, wo sie übrigens als Note XXVI irrthümlich bezeichnet ist, p. 413—436: „Neue Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades, welche denen der Brennpunkte analog sind"), darf aber nicht verschweigen, dass die Abhandlung von M. Cremona auf denselben Grundgedanken beruht, obwohl sie einer anderen und allgemeineren Betrachtung sich zuwendet.

11. Die Abhandlung von Chasles über die sphärischen homofocalen Kegelschnitte beginnt mit den folgenden Sätzen: Wenn in einer Ebene ein Kegelschnitt und ein imaginärer Kreis gegeben sind, so existiren 1) drei stets reelle Punkte, deren jedem im Kegelschnitt und im Kreis die nämliche Polare entspricht; sie ist für jeden dieser Punkte die Verbindungslinie der beiden anderen Punkte derselben Art. Diese Punkte und Linien bilden somit das sich selbst conjugirte Dreieck in Bezug auf den Kegelschnitt und den Kreis, von dessen Existenz und Bestimmung unter Anderem die Artikel 354, 370 und 400 (Aufg. 4) der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" handeln. — Es existiren 2) zwei stets reelle Punkte von solcher Lage, dass zwei beliebige, durch den einen derselben gezogene gerade Linien, die in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, d. h. deren eine den Pol der anderen in Bezug auf den Kegelschnitt enthält, auch in Bezug auf den imaginären Kreis conjugirt erscheinen. Sie sind die Durchschnittspunkte der dem imaginären Kreis und dem Kegelschnitt gemeinschaftlichen imaginären Tangenten, oder die reellen Ecken des imaginären Vierseits, welches dem Kreise und dem Kegelschnitt gemeinsam umschrieben ist. — Es existiren 3) zwei stets reelle gerade Linien von solcher Lage, dass zwei auf einer derselben gewählte Punkte, welche in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, d. h. von denen jeder in der Polare des anderen liegt, auch in Bezug auf den imaginären Kreis conjugirt sind.

*) M. Chasles veröffentlichte bereits im Jahre 1813 den von ihm entdeckten Satz, nach welchem vier Gerade des einen Systems von Erzeugenden des einfachen Hyperboloides eine beliebige Gerade des anderen Systems in Punkten von unveränderlichem Doppelschnitts*verhältniss schneiden.*

Sie sind die Sehnen, welche dem Kreis und dem Kegelschnitt gemeinschaftlich sind oder die reellen Seiten des imaginären Vierecks, welches dem Kreise und dem Kegelschnitt gemeinsam eingeschrieben ist.

Diese Sätze gelten nicht minder auf der Kugeloberfläche, als auf der Ebene; es existiren auf der Kugel drei Paare*) von Punkten — jedes Paar an den Endpunkten eines und desselben Kugeldurchmessers — welche in Bezug auf einen gegebenen sphärischen Kegelschnitt und den unendlich entfernten imaginären Kreis dieselben Polarbogen haben, nämlich ein jeder den durch die jedesmaligen beiden anderen Punkte gehenden grössten Kreis; M. Chasles nennt sie die Centra des sphärischen Kegelschnitts. Es existiren ferner zwei stets reelle Bogen grösster Kreise, welche die imaginären Durchschnittspunkte des sphärischen Kegelschnitts mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise enthalten, mit anderen Worten: die reellen Seiten des beiden Curven gemeinsam eingeschrieben imaginären Vierecks; M. Chasles nennt sie die cyclischen Bogen des Kegelschnitts. Endlich existiren zwei stets reelle Punkte, in denen die imaginären gemeinschaftlichen Tangentialbogen des Kegelschnitts und jenes Kreises sich schneiden, mit anderen Worten: die reellen Ecken des den beiden Curven gemeinschaftlich umschriebenen Vierseits; M. Chasles nennt sie die Brennpunkte des Kegelschnitts, wie man sieht, in directer Uebertragung der in der analytischen Geometrie gefundenen allgemeinen Definition. In Folge dessen heissen homofocale Kegelschnitte die mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise einem und demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte, und alle Eigenschaften der demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte lassen sich auf homofocale Kegelschnitte übertragen. (Man vergl. „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 305, 311, 400, Aufg. 5.)

Dagegen heissen alle Kegelschnitte, deren gemeinschaftlich eingeschriebenes Viereck auch dem unendlich entfernten imaginären Kreise eingeschrieben ist, homocyclische Kegelschnitte, und alle Eigenschaften der demselben Viereck umschriebenen Kegelschnitte lassen sich auf dieselben übertragen.

12. In der symbolischen Formel

$$S + kS_1 = 0,$$

wo

$$S = 0 \text{ und } S_1 = 0$$

die Gleichungen von Kegelschnitten vorstellen, sind aber alle demselben Viereck umschriebenen und alle demselben Vierseit

*) Auch die drei Punkte der Ebene sind als doppelt zu betrachten, das sich selbst conjugirte Dreieck ist die specielle Form einer Curve dritter Ordnung, welche eine Covariante der gegebenen Kegelschnitte ist. Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 353—359.

eingeschriebenen Kegelschnitte enthalten, je nachdem dieselbe in Punktcoordinaten oder in Liniencoordinaten interpretirt wird.

Die Discriminante dieser Gleichung liefert mit Null verglichen eine Gleichung, die in Bezug auf k vom dritten Grade ist und deren Wurzeln k_1, k_2, k_3 diejenigen Werthe von k sind, für welche der Kegelschnitt

$$S + kS_1 = 0$$

in die Verbindung zweier Formen des ersten Grades, d. h. in zwei gerade Linien als eine Curve zweiter Ordnung oder in zwei Punkte als eine Enveloppe zweiter Classe, degenerirt. Diese geraden Linien sind die Paare der Gegenseiten und die Diagonalen des gemeinschaftlich eingeschriebenen Vierecks, diese Punkte die Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare und der Diagonalen des gemeinschaftlich umschriebenen Vierseits; ihre drei Durchschnittspunkte oder ihre Verbindungslinien bilden in dem einen wie im anderen Falle das gemeinschaftliche, sich selbst conjugirte Dreieck oder Dreiseit dieser Kegelschnitte. Man ist damit auf demselben Punkte angekommen, von welchem in der Entwickelung im VI. Bande dieser Zeitschrift p. 140 ausgegangen wurde. Die specielle Voraussetzung, dass an Stelle des Kegelschnitts $S_1 = 0$ die Gleichung eines imaginären Kreises $K = 0$ trete, führt von da sofort auf die Theorie der homofocalen und homocyclischen Kegelschnitte hinüber.

13. Andererseits beginnt die Abhandlung von M. Chasles über die Theorie der homofocalen Flächen zweiten Grades mit der Bemerkung, dass durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiten Grades unendlich viele Oberflächen desselben Grades gelegt werden können und dass unter ihnen vier Kegelflächen sind, deren Scheitel die Eigenschaft haben, dass die Ebene von irgend dreien unter ihnen in Bezug auf alle jene Flächen den vierten zum Pol hat. Es sind die Ecken des den beiden gegebenen und allen anderen Oberflächen des Systems gemeinschaftlichen, sich selbst conjugirten Tetraeders.

Wenn $S = 0$, $S_1 = 0$ zwei Oberflächen zweiter Ordnung sind, so werden alle Oberflächen derselben Ordnung, welche mit ihnen die nämliche Durchschnittscurve gemein haben, durch die Gleichung

$$S + kS_1 = 0$$

repräsentirt, und jene vier Kegelflächen unter denselben entsprechen denjenigen vier Werthen von k, durch welche die Discriminante dieser Gleichung auf Null reducirt wird.

Die Interpretation dieser nämlichen Entwickelung nach einem System räumlicher Ebenencoordinaten statt der gewöhnlichen Punktcoordinaten *)

*) Man vergleiche in Plücker's „System der Geometrie des Raumes" §. 14, besonders Art. 261.

führt zu dem schon im IV. Bande des Crelle'schen Journals auf Grund de Theorie der „*Polaires reciproques*" von M. Poncelet ausgesprochenen Er gebniss: Die zweien Oberflächen zweiter Ordnung gemein schaftlich umschriebene developpable Oberfläche besitz vier ebene Schnittcurven zweiten Grades (von den französische Autoren als „*lignes de striction*" bezeichnet) in den Ebenen, welch zu dreien die Scheitel jener Kegelflächen enthalten.

Seitdem hat im *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* für 185 (Bd. V) M. Cayley die Gleichung dieser developpabeln Oberfläche ge geben — eine Entwickelung, auf die ich vielleicht bei anderer Gelegen heit zurückkomme — und gezeigt, dass sie im Allgemeinen von der ach ten Ordnung ist, dass sich diese ihre Ordnung in dem Falle einer ein fachen Berührung beider Oberflächen zweiter Ordnung, als bei welche zwei jener vier Punkte in den Berührungspunkt und zwei jener vie Ebenen in die ihm entsprechende Berührungsebene zusammenfallen, au sechs, und in dem Falle einer singulären Berührung, als bei welcher dre jener Punkte im Berührungspunkt und drei jener Ebenen in der entspre chenden Berührungsebene sich decken, auf fünf reducirt. Jene vier ebene Schnittcurven zweiten Grades gehören ihr als vielfache Curven an.

Der nämlichen umschriebenen developpabeln Oberfläche können ausse den gegebenen unendlich viele andere Oberflächen zweiter Ordnung ein geschrieben werden, und unter diesen treten jene drei Kegelschnittsfläche als die einzigen hervor, bei denen eine Hauptachse Null geworden is Wenn man eine dieser Curven selbst als eine Oberfläche zweiter Ordnun betrachtet, die mit einer zweiten eigentlichen Oberfläche dieser Art di developpable Fläche bestimmt, so gehört jene Curve dieser Fläche al vielfache Curve an und der Pol ihrer Ebene ist der Scheitel eines jene Kegel zweiten Grades, welche durch die Durchschnittscurve der beide und überhaupt aller zu dem System gehörigen Oberflächen gelegt werde können. Wird speciell jener Kegelschnitt in der unendlich entfernte Ebene gedacht, so ist der zugehörige Pol das gemeinschaftliche Centru aller der Oberflächen zweiten Grades, welche der betrachteten developpa beln Fläche eingeschrieben sind.

14. Unter der Anwendung Plücker'scher Tangentialcoordinaten d. h. der Bestimmung einer Ebene durch die Verhältnisse

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta$$

der Abschnitte, welche sie in drei festen von einem gemeinsamen Anfangs punkte ausgehenden Achsen bestimmt, und bei der Voraussetzung, das die Ebenen dieser Achsen die drei in endlicher Entfernung gelegene Kegelschnitte der developpabeln Fläche selbst enthalten, während di Ebene des vierten Kegelschnitts unendlich entfernt ist, erhält man fü eine beliebige Oberfläche des eingeschriebenen System eine Gleichung von der Form

$$(b-c+kl)\,\alpha^2+(c-a+km)\,\beta^2+(a-b+kn)\,\gamma^2+(l+m+n)\,\delta^2=0,$$

wenn k den von einer Oberfläche zur anderen veränderlichen individualisirenden Parameter bezeichnet und a, b, c, l, m, n Constanten sind, welche der Relation

$$al+bm+cn=0$$

genügen.

Alle Oberflächen des Systems haben den Anfangspunkt der Coordinaten zum gemeinschaftlichen Centrum und die Coordinatenebenen bilden für jede derselben ein System conjugirter Diametralebenen. Die vier unendlich abgeplatteten Oberflächen des Systems, die Kegelschnittslinien der developpabeln Oberfläche, entsprechen den speciellen Werthen des Parameters

$$k=\infty,\quad k=\frac{c-b}{l},\quad k=\frac{a-c}{m},\quad k=\frac{b-a}{n}.$$

Sie sind demnach repräsentirt durch die Gleichungen

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=0,$$

die ganz in unendlicher Entfernung gelegene, welche für gleiche Vorzeichen der Constanten l, m, n imaginär wird, während sie für verschiedene Vorzeichen reell bleibt,

$$c\beta^2-b\gamma^2-l\delta^2=0,$$
$$a\gamma^2-c\alpha^2+m\delta^2=0,$$
$$b\alpha^2-a\beta^2+n\delta^2=0;$$

von denen unter der Voraussetzung gleicher Zeichen für l, m, n, weil a, b, c wegen ihrer Verbindung mit diesen nicht gleichzeitig positiv oder negativ sein können, ein imaginärer Kegelschnitt sein wird, während die beiden anderen reelle Curven, die eine von elliptischer, die andere von hyperbolischer Art sein müssen.

15. Es ist die natürliche Erweiterung des Begriffs homofocaler Curven und zugleich ihre nothwendige Consequenz, wenn als homofocale Oberflächen zweiten Grades diejenigen bezeichnet werden, deren gemeinschaftlich umschriebene developpable Fläche einen unendlich entfernten imaginären Kreis zu einem ihrer ebenen Durchschnitte hat. Man erkennt sofort und die vorige Analyse bestätigt es, dass noch eine zweite von diesen Schnittcurven zweiter Ordnung in der developpablen Fläche imaginär sein muss; und es ist nicht schwer zu sehen, dass die beiden übrigen ebenen Schnittcurven zweiten Grades jene Focalellipse und jene Hyperbel der Kreispunkte sind, welche als Grenzfälle der Familie der homofocalen Oberflächen angehören. (Man vergleiche meine Anzeige von Gabriel Lamé's: „*Leçons sur les coordonnés curvilignes etc.*“ in der Literaturzeitung dieser Zeitschrift, Bd. VI, p. 18—21.) Nach den dort gewählten Bezeichnungen gehört der erwähnte zweite imaginäre Kegelschnitt der Hauptebene der yz für die betrachtete Flächenfamilie an.

Die vorigen Gleichungen führen ohne Weiteres dazu über, wenn man sie durch die Bedingung specialisirt, dass der unendlich entfernte imaginäre Kegelschnitt der developpablen Fläche ein Kreis werde, dass also die Gleichung

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 = 0$$

einen Kreis ausdrücke.

Um diese Bedingung zu erhalten, betrachtet man die Gleichung der um den Anfangspunkt der Coordinaten mit einem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebenen Kugel, denn man erhält aus derselben die Gleichung des imaginären unendlich entfernten Kreises, mit welcher dann die vorige Gleichung identisch sein muss, als Gleichung ihrer Durchschnittscurve mit der unendlich entfernten Ebene oder durch die Substitution $\delta = 0$.

Jene Gleichung ist unter der Voraussetzung, dass φ, ψ, $\varkappa$ die von den Coordinatenachsen gebildeten Winkel ausdrücken:

$$\alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \sin^2\psi + \gamma^2 \sin^2\varkappa - 2\beta\gamma(\cos\varphi - \cos\varphi\cos\varkappa)$$
$$-2\gamma\alpha(\cos\psi - \cos\varkappa\cos\varphi) - 2\alpha\beta(\cos\varkappa - \cos\varphi\cos\psi)$$
$$= \delta^2(1 - \cos^2\varphi - \cos^2\psi - \cos^2\varkappa + 2\cos\varphi\cos\psi\cos\varkappa),$$

und wird daher durch die Substitution $\delta = 0$ nur dann mit der Gleichung des obigen imaginären Kegelschnitts identisch, wenn zugleich

$$\cos\varphi = \cos\psi = \cos\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad l = m = n$$

ist.

Die erstere Bedingung fordert ein rechtwinkliges Coordinatensystem, d. h. dass die allen Oberflächen des Systems gemeinschaftlichen Diametralebenen die Hauptebenen des Systems sein müssen.

Die zweite, welche zugleich

$$a + b + c = 0$$

einschliesst, gestattet

$$l = m = n = 1$$

zu setzen und die allgemeine Gleichung aller Oberflächen des Systems in die Form

$$(b - c + k)\alpha^2 + (c - a + k)\beta^2 + (a - b + k)\gamma^2 + 3\delta^2 = 0$$

zu bringen.

Für

$$k = \infty,\ k = c - b,\ k = a - c,\ k = b - a$$

ergeben sich die Gleichungen der Kegelschnitte der developpablen Fläche die allen Oberflächen des Systems gemeinsam umschrieben ist, respective

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

der unendlich entfernte imaginäre Kreis, und

$$-(a + b - 2c)\beta^2 + (a + c - 2b)\gamma^2 + 3\delta^2 = 0,$$
$$-(b + c - 2a)\gamma^2 + 3\delta^2 + (a + b - 2c)\alpha^2 = 0,$$
$$3\delta^2 - (a + c - 2b)\alpha^2 + (b + c - 2a)\beta^2 = 0,$$

drei in den Hauptebenen gelegene concentrische Kegel schnitte*), deren Achsen mit den Hauptachsen des Systems zusammenfallen; von denen der eine nothwendig imaginär ist, während die beiden anderen von verschiedener Art sind; für welche endlich die Quadrate der Hauptachsen die in

$$(a+b-2c):(b+c-2a):(c+a-2b)$$

enthaltenen Verhältnisse haben. Die allgemeine Gleichung der Oberflächen des Systems zeigt, dass für jede individuelle demselben angehörige Fläche die Quadrate der Hauptachsen den Werthen

$$\frac{c-b-k}{3},\ \frac{a-c-k}{3},\ \frac{b-a-k}{3}$$

respective entsprechen, dass somit dieselben in dem bekannten und besprochenen Sinne homofocal sind.

Wenn daher

$$S=0$$

eine beliebige Oberfläche zweiten Grades und

$$K=0$$

den unendlich entfernten imaginären Kreis repräsentirt, so dass nach dem Vorhergehenden

$$K=\alpha^2 \sin^2\varphi+\beta^2 \sin^2\psi+\gamma^2 \sin^2\varkappa-2\beta\gamma(\cos\varphi-\cos\psi\cos\varkappa)$$
$$-2\gamma\alpha(\cos\psi-\cos\varkappa\cos\varphi)-2\alpha\beta(\cos\varkappa-\cos\varphi\cos\psi)$$

ist, so ist die Gleichung

$$S+kK=0$$

(immer in den bezeichneten Tangentialcoordinaten), in welcher k einen veränderlichen Parameter bedeutet, der analytische Ausdruck aller der Oberflächen zweiten Grades, welche mit der gegebenen homofocal sind.

16. So führt die Betrachtung der derselben developpablen Fläche eingeschriebenen Oberflächen zweiten Grades zur Theorie der homofocalen Flächen.

Es ergeben sich von dem so eröffneten allgemeinen Gesichtspunkte aus sofort die Fundamentalsätze der schönen Abhandlungen von M. Chasles als die einfachsten Folgerungen aus der allgemeinen Symbolgleichung

$$S+kK=0;$$

---

*) Sie sind bei vielen anderen geometrischen Untersuchungen wichtig gefunden worden; man vergleiche die Mittheilungen darüber in der citirten Note des „*Aperçu historique*" (Uebersetzung von Sohncke, p. 422). Am bekanntesten ist wohl die von Quetelet entdeckte Eigenschaft der Focalcurven, dass jede von ihnen der Ort der Scheitel aller der Rotationskegel ist, welche durch die andere gelegt werden können. Steiner und Bobillier haben später gezeigt, dass auch in dieser Beziehung die Focalcurven nur die Grenzfälle des homofocalen Flächensystems sind, indem sie die Orte der Scheitel aller Rotationskegel sind, die den entsprechenden Oberflächen selbst umschrieben werden können; dem zunächst steht wohl die Bemerkung von Dupin, dass die Focalcurven den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Kugeln bilden, welche drei gegebene berühren.

und mit derselben Leichtigkeit fliessen daraus die zahlreichen speciellen Sätze hervor, welche der berühmte Autor hinzugefügt hat.

Allein dieselbe Betrachtungsweise eröffnet noch weitere Gesichtspunkte. M. Cremona hat an die Entwickelungen erinnert, welche im dritten Bande von Liouville's Journal von M. Terquem und M. Chasles über conjugirte Linien eines Kegelschnitts vom analytischen und vom rein geometrischen Standpunkte aus vorgelegt worden sind. Als conjugirte Linien wurden diejenigen bezeichnet, welche mit dem Kegelschnitt vier reelle oder imaginäre Punkte gemein haben, die einer Kreisperipherie angehören. M. Chasles hat auch bereits in aller Kürze von den in Bezug auf eine Oberfläche zweiten Grades conjugirten Kegelflächen als von solchen gesprochen, welche mit derselben eine auf der Oberfläche einer Kugel gelegene Durchschnittscurve bestimmen.

Sind x, y, z rectanguläre Punktcoordinaten, so dass

$$S=0, \text{ d. i. } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

eine auf ihre Hauptebenen bezogene Oberfläche zweiter Ordnung repräsentirt, während

$$K=0, \quad \text{oder} \quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=0$$

eine Kugel vom Halbmesser Null aus dem Mittelpunkte (x_1, y_1, z_1) oder einen über dem imaginären unendlich entfernten Kreise stehenden imaginären Kegel ausdrückt, der diesen Punkt zur Spitze hat, so werden alle Oberflächen zweiter Ordnung, die mit den gedachten beiden Flächen dieselbe ideale Durchschnittscurve gemein haben, durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\}=0$$

oder

$$S+kK=0$$

dargestellt.

Unter der Schaar dieser Oberflächen sind vier Kegel, welche, wie vorher, denjenigen Werthen des individualisirenden Parameters k entsprechen, durch die der Werth der Discriminante dieser Gleichung auf Null reducirt wird. Die Spitzen dieser Kegel gehören, als Mittelpunkte betrachtet, nothwendig der Curve an, welche von den Mittelpunkten aller Oberflächen des Systems gebildet wird; man erhält ihre Gleichungen leicht durch die mit Null verglichenen partiellen Differentiale der allgemeinen Gleichung. (Man vergl. „Analyt. Geom. d. K.", Art. 330, 331, Aufg. 8); sie sind

$$x\left(\frac{1}{a^2}+k\right)-kx,$$

$$y\left(\frac{1}{b^2}+k\right)-ky,$$

$$z\left(\frac{1}{c^2}+k\right)-kz,$$

und liefern

$$x = \frac{a^2 k x_1}{1 + a^2 k}, \quad y = \frac{b^2 k y_1}{1 + b^2 k}, \quad z = \frac{c^2 k z_1}{1 + c^2 k}.$$

Jeder Punkt, dessen Coordinaten durch diese Relationen aus a, b, c, x_1, y_1, z_1 und dem alle Werthe durchlaufenden Parameter k berechnet werden, gehört der fraglichen Curve an; ihr analytischer Ausdruck selbst wäre durch einen einfachen Eliminationsprocess zu gewinnen. Man erkennt sofort, dass sie von der dritten Ordnung ist, weil die Einführung dieser Werthe in die Gleichung einer Ebene zur Bestimmung von k eine Gleichung dritten Grades liefert. Die Scheitel der fraglichen Kegel sind diejenigen vier Punkte, die sie mit der Durchschnittscurve aller Oberflächen des Systems oder mit allen diesen selbst gemeinsam hat; einer derselben, der dem Werthe $k = \infty$ entspricht, ist der Punkt (x_1, y_1, z_1) selbst, und der imaginäre Kegel

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = 0$$

ist selbst einer der vier Kegel. Diese Kegel heissen die der Oberfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

bezüglich des Punktes (x_1, y_1, z_1) conjugirten Kegel; alle in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + k\,\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\} = 0$$

enthaltenen Oberflächen zweiten Grades können ferner bezüglich dieses Punktes conjugirt genannt werden.

17. Die Vergleichung mit dem Früheren lehrt schon die enge Beziehung der so bezeichneten Oberflächen mit den homofocalen Oberflächen zweiten Grades. Sie sind derselben Durchschnittscurve umschrieben, sowie jene derselben developpablen Oberfläche eingeschrieben sind. Diese Curve hat vier Punkte, von denen als Scheitel ihr Kegel zweiter Ordnung umschrieben werden können, sowie jene developpable Fläche vier ebene Schnitte besitzt, welche Kegelschnitte sind*); wenn einer jener Schnitte der unendlich entfernte imaginäre Kreis ist, so sind alle die der fraglichen developpablen Fläche eingeschriebenen Oberflächen zweiten Grades homofocal, und wenn einer dieser Kegel ein über dem unendlich entfernten imaginären Kreise stehender Kegel, d. h. der

*) Seit der Vollendung dieser Arbeit hat die deutsche mathematische Literatur eine wahrhaft bedeutende Bereicherung erfahren durch das Erscheinen des Werkes: „Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, von Dr. Otto Hesse, ordentlicher Professor an der Universität Heidelberg.“ Leipzig, Teubner. Dasselbe bietet auch über die Kernpunkte dieser Abhandlung die eingehendsten und interessantesten Entwickelungen; es ist hier vor Allem auf die Vorlesungen XV—XVII (p. 130—183), XXII (p. 251—274) und XXIV (p. 287—301) zu *verweisen.*

Asymptotenkegel einer Kugel ist, so sind alle die der gedachten Durchschnittscurve umschriebenen Oberflächen zweiter Ordnung conjugirt. Beide Theorien, die der homofocalen und homocyclischen und die der conjugirten Oberflächenfamilien, sind als auf der Symbolgleichung

$$S + kK = 0$$

fussend erkannt.

Aber der Zusammenhang kann noch weiter verfolgt werden. Wenn man nämlich den Punkt, bezüglich dessen die einzelnen Oberflächen der Familie der gegebenen Fläche zweiten Grades $S = 0$ und einander conjugirt sind, mit dem Mittelpunkt dieser Oberfläche zusammenfallen lässt, so reducirt sich die Gleichung des imaginären Kegels, welcher der einzige direct gegebene unter den conjugirten Kegeln der Oberfläche ist, auf

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

und die allgemeine Gleichung der Familie der conjugirten Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + k(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

kann in der Form

$$\frac{x^2}{a^2}(1 + a^2 k) + \frac{y^2}{b^2}(1 + b^2 k) + \frac{z^2}{c^2}(1 + c^2 k) - 1 = 0$$

geschrieben werden, aus welcher man sofort ersieht, dass alle eigentlichen Oberflächen der Familie concentrisch sind und die nämlichen Hauptebenen haben. Wenn man aber die Discriminante dieser allgemeinen Gleichung mit Null vergleicht, so erhält man für den Parameter k die den vier Kegelflächen des Systems entsprechenden Werthe

$$k = \infty,\quad k = -\frac{1}{a^2},\quad k = -\frac{1}{b^2},\quad k = -\frac{1}{c^2},$$

und somit für die vier conjugirten Kegelflächen des Systems selbst die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$\frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - 1 = 0,$$
$$\frac{z^2}{c^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) + \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) - 1 = 0,$$

d. h. man erkennt als solche einen imaginären Kegel und drei der Hauptachsen der gegebenen Oberfläche parallele Cylinder. In der That gehören auch die unendlich entfernten Punkte der Hauptachsen der vorher besprochenen Curve der Mittelpunkte aller Oberflächen der Familie an, wie die Gleichungen derselben augenscheinlich darthun; aber diese vier Punkte, der Anfangspunkt der Coordinaten, der gemeinsame Mittelpunkt der unendlich vielen Flächen der Familie, und die drei unendlich entfernten Punkte der Coordinatenachsen, sind auch die einzigen bestimmten Punkte derselben.

Wenn man die Gleichungen der Cylinderflächen in der Form

$$c^2(a^2-b^2)y^2+b^2(a^2-c^2)z^2=a^2b^2c^2,$$
$$a^2(b^2-c^2)z^2+c^2(b^2-a^2)x^2=a^2b^2c^2,$$
$$b^2(c^2-a^2)x^2+a^2(c^2-b^2)y^2=a^2b^2c^2$$

schreibt, so erhellt auch, dass nur zwei von ihnen reell sein können, während die dritte imaginär ist, sowie dass die beiden reellen Cylinder von verschiedener Art sind, nämlich der eine elliptisch, der andere hyperbolisch.

Man sieht dadurch die Analogie mit dem System der homofocalen Oberflächen vervollständigt; wie dort zwei der Kegelschnitte der gemeinschaftlich umschriebenen developpablen Fläche imaginär wurden, so werden hier zwei der conjugirten Kegelflächen imaginär; und specieller, wie dort die eine jener Curven zum unendlich entfernten imaginären Kreis und die andere zum imaginären Kegelschnitt in einer Hauptebene wird, so dass diese ganze Hauptebene dem homofocalen System als eine Grenzfläche angehört, so wird hier die eine der conjugirten Flächen zu dem imaginären Kegel, der den unendlich entfernten imaginären Kreis zur Basis hat, die andere aber zu dem einer Hauptachse parallelen imaginären Cylinder. Den beiden reellen Focalcurven*) in den Hauptebenen der homofocalen Oberflächen entsprechen vollkommen die beiden reellen conjugirten Cylinder der conjugirten Flächenfamilie.

18. Es sei erlaubt, hier die Entwickelung zu unterbrechen und die Darlegung der Resultate, welche aus den so gewonnenen Fundamentalsätzen hervorgehen, dem nächsten Hefte dieser Zeitschrift vorzubehalten; sie kann nunmehr auf Grund der symbolischen Gleichung

$$S+kK=0$$

und nach den im Eingang dieser Abhandlung vielfach benutzten Eigenschaften derselben im genauesten Anschluss an die Veröffentlichungen von M. Chasles und die erwähnte Abhandlung von M. Cremona gegeben werden.

Nur das sei als mit dieser Grundlegung gleichartig noch hier erwähnt, dass die Gleichung

$$S+kK=0$$

unter speciellen Voraussetzungen über die Natur der quadratischen Form S folgende besondere Bedeutungen gewinnt. Zuerst: Wenn $S=0$ das System zweier Ebenen darstellt oder zum Product zweier linearen Factoren $A=0$, $B=0$ wird, so werden durch die Gleichung

---

*) M. Chasles bezeichnet diese Focalcurven in der erwähnten Note XXXI des „*Aperçu historique*“ als „excentrische Kegelschnitte der Oberflächen zweiten Grades“, weil er den von M. Quetelet für eine Curve dritten Grades angewendeten Ausdruck „Focale“ *vermeiden will.*

$$AB + kK = 0$$

Oberflächen zweiten Grades repräsentirt, welche die Spitze des imaginären Kegels $K = 0$ zum Focalpunkt und die Ebenen $A = 0$, $B = 0$ zu bezüglichen Directionsebenen haben.

Wenn speciell diese Ebenen die Spitze, d. i. den Punkt (x_1, y_1, z_1) selbst enthalten, so dass er ihrer Durchschnittslinie angehört, so sind die Oberflächen

$$AB + kK = 0$$

Kegelfächen vom Scheitel (x_1, y_1, z_1) und die beiden Ebenen sind ihre cyclischen, d. h. die ihren Kreisschnitten parallelen Ebenen.

Sodann: Wenn $S = 0$ zwei zusammenfallende Ebenen repräsentirt oder, wenn S das Quadrat eines linearen Factors A ist, so werden durch die Gleichung

$$A^2 + kK = 0$$

Rotationsflächen zweiten Grades dargestellt, für welche der Punkt (x_1, y_1, z_1) ein Brennpunkt und $A = 0$ die bezügliche Directionsebene ist. Enthält aber endlich jene Ebene den Punkt (x_1, y_1, z_1) selbst, so sind die dargestellten Flächen Rotationskegel zweiten Grades, die diesen Punkt zur Spitze haben und deren Achse zur Ebene $A = 0$ senkrecht ist.

Man ist damit vollständig auf die Grundgedanken und in die Anfänge dieser Abhandlung zurückgeführt.

Ich erinnere endlich in aller Kürze an die entsprechenden Betrachtungen der analytischen Geometrie der Ebene, weil es in mancher Beziehung lehrreich ist, sich hier rückblickend zu orientiren.

Wenn sich die betrachtete Oberfläche zweiten Grades, welche mit der ihr und dem unendlich entfernten imaginären Kreise umschriebenen developpablen Fläche dem System der homofocalen Flächen zweiten Grades Ursprung giebt, auf eine Curve des zweiten Grades reducirt, so treten an Stelle der vier ebenen Schnittcurven des zweiten Grades, welche das System charakterisiren und von denen zwei reell und zwei imaginär sind, drei Punktepaare, von denen zwei imaginär sind; das homofocale Flächensystem hat vier ebene Focalcurven, von denen zwei imaginär sind, das System confocaler Curven hat drei Paare von Brennpunkten, von denen zwei imaginär sind; sowie unter jenen der unendlich entfernte imaginäre Kreis, so ist unter diesen das Paar der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, welche dieser Ebene angehören.

Wenn man aber das System der conjugirten Linien in Bezug auf den Mittelpunkt eines Kegelschnitts betrachtet, so erscheinen als solche zwei Paare den Hauptachsen parallele und von ihnen gleich weit abstehende Gerade, von denen das eine reell und das andere imaginär ist, und die den Mittelpunkt der Curve mit den unendlich entfernten imaginären Kreispunkten verbindenden Geraden. Wie jene sechs Punkte die Ecken eines umschriebenen Vierseits, so bilden diese sechs Geraden die Seiten und Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks.

Die Zwischenstufe zwischen den Betrachtungen der Ebene und des Raumes wird von den Familien homofocaler und conjugirter Kegelflächen und homofocaler und conjugirter sphärischer Kegelschnitte gebildet; die letzteren entstehen als die Durchschnitte der Kegel mit irgend einer aus ihrer gemeinschaftlichen Spitze als Centrum beschriebenen Kugel. Die Focalcurven der allgemeinen Oberflächen zweiten Grades reduciren sich bei den Kegelflächen auf die Focallinien, gerade Linien durch die Spitze, welche in jeder zu einer von ihnen normalen Schnittebene einen Brennpunkt der Schnittcurve*) bestimmen; die Polarebenen dieser Focallinien sind die Directionsebenen des Kegels. Die cyclischen Ebenen stehen zu ihnen in einer polaren Beziehung; wenn man als den Ergänzungskegel des gegebenen den concentrischen Kegel bezeichnet, welcher von den Normalen zu den Tangentialebenen jenes ersteren gebildet wird, so sind die cyclischen Ebenen des Ergänzungskegels zu den Focallinien des gegebenen senkrecht. Die Focallinien der Kegel treffen die aus ihrer Spitze beschriebene Kugel in den Brennpunkten der sphärischen Kegelschnitte, welche diese selbst auf ihr bestimmen; die Directionsebenen schneiden sie in den Directionsachsen und die cyclischen Ebenen in den cyclischen Bögen derselben. Man kann diese Zusammenhänge leicht des Weiteren ausführen.

*) Dieselbe Eigenschaft charakterisirt auch die Focalcurven der allgemeinen Oberfläche: Jede Normalebene in einem Punkte der Focalcurve schneidet die Oberfläche in einem Kegelschnitt, der einen seiner Brennpunkte in diesem Punkte selbst hat. Es wird darauf später noch zurück zu kommen sein.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber ein paar Ungleichungen und Grenzwerthe. Von Prof. O. Fort.

Aus den für ganze positive m geltenden Divisionsresultate

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

ergiebt sich bekanntlich in einfacher Weise für $a > b > 0$ die Richtigkeit der Ungleichung

$$m a^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > m b^{m-1}.$$

Dass dieselbe für jede reelle Zahl m, wenn sie nur grösser ist als 1, Geltung behält, kann zwar auf verschiedene Art nachgewiesen werden; die folgende Ableitung dürfte sich jedoch vielleicht dadurch vor anderen empfehlen, dass sie nur das obige Divisionsresultat voraussetzt.

Sind p und q zwei positive ganze Zahlen, von denen $p > q$, so folgt aus den für jeden positiven ächten Bruch x geltenden $p - q$ Ungleichungen

$$\begin{aligned}
1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1} &> q x^q \\
1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1} &> q x^{q+1} \\
1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1} &> q x^{q+2} \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1} &> q x^{p-1},
\end{aligned}$$

wenn man dieselben durch Addition vereinigt,

$$(p-q)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1}) > q(x^q + x^{q+1} + x^{q+2} + \ldots + x^{p-1}),$$

also auch

$$\begin{aligned}
&p(1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1}) \\
&> q(1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1} + x^q + x^{q+1} + x^{q+2} + \ldots + x^{p-1}),
\end{aligned}$$

und hieraus

$$1) \qquad \frac{p}{q} > \frac{1 - x^p}{1 - x^q}, \quad \text{wenn } 0 < x < 1.$$

Für Werthe von x, welche grösser sind als 1, müssen beide Seiten dieser Ungleichungen vertauscht werden; man erhält dann in ganz gleicher Weise

$$2) \qquad \frac{x^p - 1}{x^q - 1} > \frac{p}{q}, \quad \text{wenn } x > 1.$$

Den für die Richtigkeit der Ungleichungen 1) und 2) gestellten Bedingungen wird genügt, sobald man in der ersten $x=\sqrt[q]{\frac{b}{a}}$ und in der zweiten $x=\sqrt[q]{\frac{a}{b}}$ substituirt, wenn $a>b>0$. Setzt man hierbei $\frac{p}{q}=m$, und multiplicirt in No. 1) beiderseitig mit a^{m-1}, in 2) mit b^{m-1}, so folgt:

$$3)\qquad m a^{m-1} > \frac{a^m-b^m}{a-b} > m b^{m-1},$$

und es gilt jetzt diese Ungleichung für alle rationalen Werthe von m, welche grösser sind als 1. Durch Einschliessung irrationaler Werthe in rationale Grenzen lässt sich dann auf bekannte Art beweisen, dass dasselbe Resultat auch noch für irrationale m richtig bleiben muss, wenn sie nur grösser sind als die Einheit.

Von den mancherlei Folgerungen, welche die algebraische Analysis aus diesem Resultate zieht, möge hier nur ein einfacher Beweis für die Richtigkeit des bekannten Grenzwerthes

$$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e$$

Platz finden, worin ω eine unendlich werdende reelle Zahl und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Bringt man zunächst die Ungleichung 3) auf die Form

$$4)\qquad m a^{m-1}(a-b) > a^m-b^m > m b^{m-1}(a-b)$$

und setzt dann $a=\frac{k+1}{k}$, $b=1$ und $m=\frac{k}{n}$, wobei $k>n>1$ sein soll, so folgt:

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{k}{n}}-1>\frac{1}{n},$$

also auch:

$$5)\qquad \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}.$$

Wird ferner mit Beibehaltung der für m gemachten Substitution ein anderes Mal $a=1$ und $b=\frac{k-1}{k}$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{n}>1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$$

und hieraus

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n},$$

oder auch:

$$6)\qquad \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}.$$

Die Ungleichungen 5) und 6) zeigen, dass, wenn man n zwischen den Grenzen 1 und ∞ beliebig wachsen lässt, der Werth der Function $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ fortwährend zunimmt, während dagegen $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ fortwährend abnehmen muss. Dabei kann aber weder die erste dieser beiden Functionen in das Unendliche wachsen, noch die zweite bis zum Verschwinden klein werden, weil immer

$$\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n-1},$$

also auch

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

bleibt. Beide Functionen müssen sich folglich endlichen Grenzen nähern, für welche z. B. aus der Substitution $n=2$ abgeleitet werden kann, dass sie zwischen den Zahlen $2\frac{1}{4}$ und 4 gelegen sind.

Bestimmt man nun nach der Ungleichung 4) die Grenzen der Differenz

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

so erhält man als obere Grenze

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

und als untere

$$\frac{n}{n^2-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;$$

es ist also

$$7)\qquad \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n}{n-1}\right)^n-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Da in beiden Grenzen bei unendlich werdenden n die Factoren $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ und $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ endlich bleiben, während der Factor $\frac{1}{n}$ gegen die Null convergirt, so gehen beide Grenzen selbst in Null über, und es geschieht dasselbe mit der Differenz der beiden in Rede stehenden Functionen. Beide Functionen convergiren also gegen eine gemeinschaftliche Grenze, für welche, wenn man sie mit e bezeichnet, Näherungswerthe aus der Ungleichung

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

abgeleitet werden können.

Beachtet man endlich, dass der Ausdruck $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ auch in der Form $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ geschrieben werden kann, so lässt sich, wenn man ω an die

Stelle eines unendlich werdenden positiven oder negativen n setzt, das Resultat der vorhergehenden Betrachtungen in der Gleichung

$$8)\qquad Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e$$

zusammenfassen.

II. Transformation einer endlichen Reihe. — Bezeichnen $(\mu)_0$, $(\mu)_1$, $(\mu)_2$ etc. die zum Exponenten μ gehörigen Binomialcoefficienten, so ist für beliebige p und q, sowie für ein ganzes positives n

$$(p+q)_n=(p)_n(q)_0+(p)_{n-1}(q)_1+(p)_{n-2}(q)_2+\ldots$$

Im Falle $q=-k$, $n=p-k$, wo k und p ganze positive Zahlen bedeuten mögen, wird hieraus

$$1=(p)_{p-k}(-k)_0+(p)_{p-k-1}(-k)_1+(p)_{p-k-2}(-k)_2+\ldots$$

oder

$$1=(p)_k-(k)_1(p)_{k+1}+(k+1)_2(p)_{k+2}-\ldots$$

Wendet man diese Gleichung der Reihe nach für $k=1,2,3,\ldots p$ an, multiplicirt die erste Gleichung mit 1^m, die zweite mit 2^m, die dritte mit 3^m u. s. w., so erhält man durch Addition

$$\begin{aligned}&1^m+2^m+3^m+\ldots+p^m\\=\;&1^m[(p)_1-(1)_1(p)_2+(2)_2(p)_3-(3)_3(p)_4+\ldots]\\&+2^m[(p)_2-(2)_1(p)_3+(3)_2(p)_4-(4)_3(p)_5+\ldots]\\&+3^m[(p)_3-(3)_1(p)_4+(4)_2(p)_5-(5)_3(p)_6+\ldots]\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Nach den Binomialcoefficienten $(p)_1$, $(p)_2$ etc. geordnet, giebt dies

$$\begin{aligned}&1^m+2^m+3^m+\ldots+p^m\\=\;&1^m(p)_1+[2^m-(1)_1 1^m](p)_2+[3^m-(2)_1 2^m+(2)_2 1^m](p)_3+\ldots;\end{aligned}$$

zur Abkürzung sei

$$a_k=k^m-(k-1)_1(k-1)^m+(k-1)_2(k-2)^m-\ldots,$$

es ist dann

$$\begin{aligned}&1^m+2^m+3^m+\ldots+p^m\\=\;&a_1(p)_1+a_2(p)_2+a_3(p)_3+\ldots+a_p(p)_p.\end{aligned}$$

Der Werth von a_k kann unter folgender Form dargestellt werden

$$a_k=\frac{(k)_0 k^{m+1}-(k)_1(k-1)^{m+1}+(k)_2(k-2)^{m+1}-\ldots}{k},$$

und nach einem bekannten, auch elementar leicht beweisbaren Satze verschwindet der Zähler, sobald $k>m+1$ ist; daher vereinfacht sich die gefundene Transformation und giebt

$$\begin{aligned}&1^m+2^m+3^m+\ldots+p^m\\=\;&a_1(p)_1+a_2(p)_2+\ldots+a_{m+1}(p)_{m+1}.\end{aligned}$$

So ist z. B. für $m=2$

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_3=2,$$

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\ldots+p^2\\=\;&(p)_1+3(p)_2+2(p)_3=\tfrac{1}{6}p(p+1)(2p+1),\end{aligned}$$

und für $m=3$

$$a_1=1,\quad a_2=7,\quad a_3=12,\quad a_4=6,$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+p^3$$
$$=(p)_1+7(p)_2+12(p)_3+6(p)_4=\tfrac{1}{4}p^2(p+1)^2.$$

SCHLÖMILCH.

III. Ueber Leitlinien. — Professor Raabe hat im zweiten Bande des Crelle'schen Journals einen Aufsatz über Leitlinien veröffentlicht, in welchem er die Definition aufstellt: Leitlinie einer gegebenen krummen Linie ist diejenige Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Normale, welche von irgend einem Punkte jener Curve auf sie gefällt wird, gleich der Entfernung jenes Punktes von einem gegebenen festen Punkte der Ebene ist. Der Unterzeichnete hat dann im zwanzigsten Bande von Grunert's Archiv den Gegenstand aufgenommen und einige nicht uninteressante Beispiele angeführt. Später hat Raabe selbst im 48. und 50. Bande von Crelle's Journal Weiteres bekannt gemacht, besonders einen Satz, der den Zusammenhang der Leitlinien mit den Fusspunktscurven betrifft. Da indessen sowohl die Ableitung jenes Satzes bei Raabe etwas unklar ist, als derselbe auch in anderer Weise ausgesprochen werden kann, und als endlich der wirkliche analytische Zusammenhang der in der Untersuchung vorkommenden Gleichungen noch nicht bekannt zu sein scheint, so dürfte auch jetzt noch die Veröffentlichung nachfolgender Resultate gerechtfertigt sein.

Benutzen wir wieder unsere frühere Bezeichnungsweise und unterscheiden die Curve von der Leitlinie dadurch, dass wir bei jener lateinische, bei dieser griechische Buchstaben anwenden. Nennen wir also m einen Punkt der Curve, μ einen Punkt der Leitlinie, und zwar den m entsprechenden Punkt der Leitlinie, wenn die $m\mu$ zur Leitlinie normal ist. Der gegebene feste Punkt möge o heissen und als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems dienen, auf welches Alles bezogen werden soll. Die Definitionsgleichung der Leitlinie heisst demnach:

$$om=m\mu$$

oder in Anbetracht der Coordinaten der drei Punkte o, m, μ

1) $$\xi^2+\eta^2=2x\xi+2y\eta.$$

Die Gleichungen der Curve und der Leitlinie heissen:

2) $f(x,y)=0,$ 3) $\varphi(\xi,\eta)=0.$

Endlich wird die Bedingung noch existiren, dass die $m\mu$ zur Leitlinie normal, d. h. wenn die Differentialquotienten von η nach ξ durch Striche angedeutet werden, es wird sein:

4) $$(y-\eta)\,\eta'+(x-\xi)=0.$$

Differentiiren wir nun die Gleichungen 1) und 4) in Bezug auf ξ, so ist

$$5)\qquad \xi+\eta\eta'=x+\xi\frac{dx}{d\xi}+y\eta'+\eta\frac{dy}{d\xi},$$

$$6)\qquad \eta'\frac{dy}{d\xi}-\eta'^2+(y-\eta)\eta''+\frac{dx}{d\xi}-1=0.$$

Daraus die Werthe:

$$7)\quad (\xi\eta'-\eta)\frac{dy}{d\xi}=x+y\eta'-y\xi\eta''+\xi\eta'^2-\eta\eta'+\xi\eta\eta'',$$

$$8)\quad (\xi\eta'-\eta)\frac{dx}{d\xi}=-x\eta'+y\eta\eta''-y\eta'^2-\eta-\eta^2\eta''+\xi\eta'.$$

Werden nun noch 7) und 8) mit Hilfe von 4) umgeformt, indem man $x+y\eta'=\eta\eta'+\xi$ und $-x\eta'=(y-\eta)\eta'^2-\xi\eta'$ substituirt, so ergiebt eine einfache Division

$$9)\qquad \frac{dy}{dx}=y'=-\frac{\xi}{\eta}.$$

Darin ist aber der schon von Raabe gefundene Satz enthalten. Der geometrische Sinn der Gleichung 9) heisst nämlich so:

„Wird die gerade Linie $o\mu$ im Punkte d halbirt und dm gezogen, so ist diese Gerade einestheils senkrecht zu $o\mu$ (weil $om=m\mu$ sein muss), anderentheils ist sie Berührungslinie an die Curve in dem Punkte m."

Der Beweis dieser Deutung ergiebt sich unmittelbar, sowie man nur die vorgeschriebene Construction ausführt. Eben so leicht ergiebt sich aber alsdann folgender weitere Satz. Wenn auch an die Leitlinie im Punkte μ eine Berührungslinie gezogen wird, welche die verlängerte md im Punkte t trifft, so ist immer

$$\Delta\, mt\mu=mo\mu.$$

„Der Winkel, den die Berührungslinien an zwei einander entsprechende Punkte der Curve und der Leitlinie mit einander bilden, ist gleich dem Winkel der beiden Leitstrahlen, welche von dem festen Punkte o an jene Punkte m und μ gezogen werden."

Bei Anwendung von Polarcoordinaten erweisen sich diese Sätze noch leichter. In der citirten Abhandlung haben wir abgeleitet, dass, wenn auf o als Pol bezogen

$$F(r,t)=0,\qquad\qquad \Phi(\varrho,\vartheta)=0$$

die Gleichungen der Curve und der Leitlinie sind, die Gleichungen, welche die Bedingungen der Untersuchung enthalten, nach leichter Umformung so geschrieben werden können:

$$\varrho=2r\,.\cos(t-\vartheta),\qquad\qquad \varrho'=2r\,.\sin(t-\vartheta).$$

Differentiirt man die erstere der beiden Gleichungen nach ϑ, und schreibt für ϱ' den durch die zweite gebotenen Werth, so wird

$$o=-2r\sin(t-\vartheta)\,.\frac{dt}{d\vartheta}+2\cos(t-\vartheta)\,.\frac{dr}{d\vartheta}.$$

Daraus folgt

$$\frac{dr}{dt} = r' = - r \tan g\,(t - \vartheta)$$

oder endlich

$$\frac{r'}{r} + \frac{\varrho'}{\varrho} = 0.$$

Das ist aber nach der bekannten Bedeutung des ersten Differentialquotienten bei Polarcoordinaten nichts anderes, als unsere zweite Darstellungsweise des Satzes, aus welcher sich dann rückwärts die erste ergiebt.

Denken wir uns nun einmal die Gleichungen 1), 2), 4), das andere Mal die 1), 3), 9) gegeben, so lassen sich folgende Werthpaare entwickeln:

$$10)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{(\eta^2 - \xi^2)\,\eta' + 2\xi\eta}{2(\eta - \xi\eta')}, \\ y &= \frac{(\eta^2 - \xi^2) - 2\xi\eta\eta'}{2(\eta - \xi\eta')}, \end{aligned}\right. \qquad 11)\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{2(xy'^2 - yy')}{1 + y'^2}, \\ \eta &= \frac{2(y - xy')}{1 + y'^2}, \end{aligned}\right.$$

und die Substitution von 10) in 2) liefert die Differentialgleichung der Leitlinie zu einer gegebenen Curve, ebenso wie die Substitution von 11) in 3) die Differentialgleichung der Curve zu einer gegebenen Leitlinie darstellt.

Es scheint nun von eigenthümlichem Interesse, dass diese beiden so allgemeinen Differentialgleichungen der wirklichen Integration fähig sind, indem die frühere Gleichung 1) ein particuläres Integral derselben ist, je nachdem man die x, y durch die Constanten α, β oder die ξ, η durch die Constanten a, b ersetzt, wobei das eine Mal $f(\alpha, \beta) = 0$, das andere Mal $\varphi(a, b) = 0$.

Dieser analytische Zusammenhang verificirt sich ohne Mühe. Eine directe Ableitung aus den betreffenden Differentialgleichungen etwa durch Trennung der Veränderlichen ist bisher noch nicht gelungen.

Um so einfacher war die geometrische Ableitung desselben. In der That sieht man leicht ein, dass sowohl die Curve als die Leitlinie als einhüllende Linien zu betrachten sind, dass also die Gleichungen 2) und 3) singuläre Integrale der betreffenden Differentialgleichungen sein müssen. Die von der Curve eingehüllten Linien sind jene geraden Berührungslinien dm; die von der Leitlinie eingehüllten sind Kreise, deren Mittelpunkt in m und deren Halbmesser mo. Die Gleichungen jener geraden Linien, sowie jenes Kreises sind demnach die gesuchten particulären Integrale und aus ihrer geometrischen Definition ermitteln sie sich leicht in der vorgenannten Gestalt:

$$a^2 + b^2 = 2ax + 2by, \quad \text{wo } \varphi(a, b) = 0,$$

und

$$\xi^2 + \eta^2 = 2\alpha\xi + 2\beta\eta, \quad \text{wo } f(\alpha, \beta) = 0,$$

CANTOR.

IV. Analytisch-geometrische Notizen. Von Dr. WILH. FIEDLER. — In meiner Bearbeitung von Rev. Salmon's „*Treatise on Conic Sections*“, „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ ist im Art. 363 der Nachweis geliefert, dass für zwei Kegelschnitte $S=0$, $S_1=0$ ein Dreieck existirt, welches gleichzeitig dem ersten eingeschrieben und dem zweiten umschrieben ist, sobald die Relation

$$\Theta_1^2 = 4\Theta\Delta_1$$

erfüllt ist, in welcher die Symbole Θ_1, Θ und Δ_1 die Bedeutungen haben, welche ihnen an der angeführten Stelle oder in meinem Aufsatze im VI. Bande dieser Zeitschrift, p. 140, beigelegt sind. Diese Relation liefert auf zwei Kreise bezogen ein beachtenswerthes Resultat von grosser Einfachheit.

Sind

$$x^2+y^2=\varrho^2 \text{ und } (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

die Gleichungen der Kreise, deren erster als der eingeschriebene, der andere als der umschriebene betrachtet werden mag, so erhält man

$$\Theta = \frac{\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2-2r^2)}{\varrho^2},$$

$$\Theta_1 = \frac{2\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2-r^2)}{\varrho^4},$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{\varrho^4},$$

und hat somit die fragliche Bedingung in der Form

$$[2\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2-r^2)]^2 = 4\varrho^4-4\varrho^2(\alpha^2+\beta^2-2r^2),$$

d. i.

$$\alpha^2+\beta^2-r^2 = \pm 2r\varrho.$$

Man kann nach dieser Relation entweder aus dem Halbmesser r des umschriebenen Kreises und den Mittelpunktscoordinaten α, β des eingeschriebenen Kreises den Halbmesser des letzteren berechnen

$$\varrho = \pm\frac{\alpha^2+\beta^2-r^2}{2r};$$

die vom Centrum des eingeschriebenen Kreises an den umschriebenen Kreis gezogene Tangente ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Halbmesser des eingeschriebenen und dem Durchmesser des umschriebenen Kreises. Man sieht, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises wird Null, wenn sein Mittelpunkt in der Peripherie des umschriebenen Kreises liegen soll; die letztere Forderung ist somit durch kein Dreieck zu erfüllen. Oder man berechnet für gegebene Halbmesser beider Kreise die Mittelpunktscoordinaten des umschriebenen Kreises; dazu die Relation

$$\alpha^2+\beta^2 = r(r\pm 2\varrho);$$

d. i.: Die Centra aller Kreise von gegebenem Halbmesser r, welche für einen *festen* eingeschriebenen Kreis vom Halbmesser ϱ die Eigenschaft haben, denselben Dreiecken umschrieben zu sein, liegen auf der Peripherie eines mit dem letzteren concentrischen Kreises, der die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Halbmesser des ersten und der algebraischen Summe aus diesem und dem Durchmesser des zweiten zum Halbmesser hat.

Man sieht, der Halbmesser jenes Kreises kann nur Null, d. h. der ein- und umgeschriebene Kreis können nur concentrisch werden für $r = 2\varrho$ im Fall des unteren Vorzeichens; so geschieht es im Fall des gleichseitigen Dreiecks.*)

Bekanntlich lassen sich für jedes Paar solcher Kreise unzählig viele Dreiecke zugleich ein- und umschreiben; für alle solche Dreiecke lässt sich leicht beweisen, dass der Ort der Durchschnittspunkt ihrer Höhen ein Kreis ist, welcher die algebraische Summe vom Durchmesser des umschriebenen und dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zum Halbmesser hat.

Es liegt auf der Hand, dass die allgemeine Grundlage, von der hier ausgegangen ward, zahlreiche andere Entwickelungen in ähnlicher Richtung zulässt. Es galt mir hier nur, sie anzudeuten.

Aber der allgemeinen Aufgabe über zwei Kegelschnitte, welche hier vorausgesetzt ist, steht eine ähnliche Aufgabe in der Geometrie der Oberflächen zweiten Grades zur Seite. Sie lautet: Welche Bedingung müssen die Gleichungen zweier Oberflächen zweiten Grades erfüllen, wenn die eine zwei Gegenkanten eines Tetraeders enthalten, die andere aber von den Flächen desselben Tetraeders berührt werden soll?

Ich gebe die Antwort in den Bezeichnungen der Abhandlung „über Dreiecke und Tetraeder etc.“ (Bd. VI dieser Zeitschrift, p. 140) durch die Formel

$$4\Omega\Delta_1\Theta_1 = \Theta_1^3 + 8\Delta_1^2\Theta,$$

wie sie sich mir nach Rev. Salmon's Anregungen ergeben hat.

Ich benutze endlich die Gelegenheit, um zu bemerken, welches die Bedeutung der Relation

$$\Omega = 0$$

ist, wenn Ω den in der Formel

$$k^4 . \Delta + k^3 . \Theta + k^2 . \Omega + k . \Theta_1 + \Delta_1 = 0$$

(am angeführten Orte, p. 144) vorausgesetzten Werth hat.

---

*) Man kann endlich auch nach dem Halbmesser r des umschriebenen Kreises bei gegebenem Centrum (α, β) und bei gegebenem eingeschriebenen Kreise fragen, und findet

$$r^2 \pm 2r\varrho = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$r = \mp\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 + \alpha^2 + \beta^2},$$

ches nicht minder, wie alles Frühere leicht construirt werden kann.

Die Relation $\Omega = 0$ findet statt, wenn die Kanten eine, in Bezug auf die erste Oberfläche zweiten Grades sich selbst conjugirten Tetraeders die zweite Oberfläche sämmtlich tangiren.

Ist die erste Oberfläche ein dreiachsiges Ellipsoid und die zweite eine Kugel, so nimmt jene Relation die entwickelte Form an:

$$a^2(\beta^2+\gamma^2)+b^2(\gamma^2+\alpha^2)+c^2(\alpha^2+\beta^2)=(a^2+b^2+c^2)r^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Sind beide Oberflächen Kugeln und setzt man $a=b=c=\varrho$, so wird

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\tfrac{3}{2}(r^2+\varrho^2).$$

Und man kann andere Relationen derselben Art durch ähnliche Specialisirungen erhalten.

V. Ueber die Vielecke von gebrochener Seitenzahl, oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie. Von Ernst Schröder, stud. math. et phys. in Heidelberg.

Ueberall, wo wir die Reihe der ganzen Zahlen auftreten sehen an Gebilden, welche aus Elementen zusammengesetzt sind, kann es gelingen, auch den gebrochenen Zahlen einen vernünftigen Sinn unterzulegen, d. h. neue Gebilde, welche ursprünglich nicht zur Kategorie jener als ganzzahlig definirten Gebilde gehörten, mit zu denselben zu zählen, indem man sie betrachtet als zusammengesetzt aus einer gebrochenen Anzahl der nämlichen Elemente.

Der Vortheil eines solchen Verfahrens liegt auf der Hand; er besteht in einer Erweiterung des Begriffes jener Grössen, welche ursprünglich nur aus einer ganzen Anzahl Elemente zusammengesetzt sein durften, und er besteht in der Ausdehnung der von letzteren Grössen bekannten Sätze auf neue, eben die gebrochenzahligen Gebilde; beides ist, wie jede Generalisation, das Ziel der Wissenschaft. Zugleich wird durch das Verfahren eine zweckmässige Ersparniss erzielt, indem jeder Satz, der für die ganzzahlig zusammengesetzten und für die gebrochenzahlig zusammengesetzten Gebilde sonst doppelt entwickelt werden müsste, nun zu einem einzigen Satze zusammengefasst oder abgekürzt wird.

An sich zwar giebt es nur ganze positive Zahlen. Ich kann A als Element eines Gebildes entweder nicht setzen — dann habe ich Null mal A oder 0, oder ich kann es 1 Mal, 2, 3 ... n Mal setzen, wo n eine positive ganze Zahl ist. Man kann sich aber kein Gebilde vorstellen, das aus $-n$ oder aus $\frac{p}{q}$ Elementen zusammengesetzt ist. — Die Einführung des Begriffs der negativen Zahlen in die Algebra — um bekannte Beispiele zu wählen — gewährt aber den Vortheil, dass die Rechnung mit Summen und die mit Differenzen unter gemeinsame Regeln gebracht wird. Die Einführung des Begriffs der gebrochenen Zahlen gewährt den Vortheil, dass man solche

Grössen durch die Einheit ausdrücken kann, die überhaupt keine Summen aus solchen Einheiten sind, und die Betrachtung der gebrochenen Potenzen den Nutzen, dass man solche Ausdrücke als Potenzen von A ansehen kann, die überhaupt im strengen Sinne des Worts keine Potenzen, d. i. Producte aus gleichen Factoren A wären.

Wenn nun in der Algebra die Erweiterung des Begriffs ganzzahliger Gebilde auf gebrochenzahlig zusammengesetzte von so grossem Nutzen ist, so liegt der Gedanke nahe, dies auch in der Geometrie bei Gelegenheit zu versuchen, und es wird dies um so leichter zu bewerkstelligen sein, als die Geometrie meist nur mit continuirlichen Grössen zu thun hat.

In der Reihe der Polygone sehen wir alle ganzen Zahlen von $3, 4 \ldots n$ bis ∞ als Seitenzahl auftreten, und wir wollen versuchen, die Eigenschaften der Polygone von gebrochener Seiten- oder Eckenzahl $\frac{p}{q}$ kennen zu lernen.

Unter einem Polygon wollen wir hier nicht etwa eine von geraden Linien begrenzte ebene Fläche, sondern, wie dies unzweideutiger ist, ein ebenes System von begrenzten Geraden verstehen, die je zu zweien einen Endpunkt gemeinsam haben, das Eck. Die übrigen Durchschnittspunkte der begrenzten Geraden (Seiten), die nicht zugleich Begrenzungspunkte derselben sind, mögen zufällige Ecken oder Kreuzungspunkte heissen.

Endlich wollen wir der leichteren Darstellung halber zunächst nur die regulären Vielseite betrachten und die von ihnen geltenden Sätze erst später auf die irregulären Vielseite ausdehnen.

Unter einem regulären Polygon verstehen wir ein solches, dessen Seiten einander sämmtlich gleich und dessen Umfangswinkel (die Winkel, welche die Seiten an den Ecken bilden) einander ebenfalls gleich sind.

Hier haben wir noch näher zu bestimmen, welche von den $2n$ Winkeln, die von den Seiten eines n Seits an den n Ecken gebildet werden und die sich zu $n \cdot 360^\circ = n \cdot 2\pi$ ergänzen, wir als Umfangswinkel nehmen wollen. — Die $2n$ Winkel, von welchen immer zwei sich zu $360^\circ = 2\pi$ ergänzen, scheiden sich naturgemäss in zwei Gruppen von je n Winkeln derart, dass, wenn man sich das Polygon in einer Richtung von einem Punkte durchlaufen denkt, die n Winkel der einen Gruppe immer auf der einen (linken), die der zweiten Gruppe immer auf der anderen (rechten) Seite der Bewegungsrichtung des Punktes in der Ebene bleiben. Von diesen zwei Gruppen von je n Winkeln betrachten wir immer nur die eine, und zwar im Allgemeinen die von der kleineren Winkelsumme, als zum Polygon gehöriges Umfangswinkelsystem.

Nach diesen Feststellungen schreiten wir zur Verallgemeinerung der von den ganzzahligen oder n Ecken bekannten Sätze über die gebrochenzahligen Vielecke oder $\frac{p}{q}$tel Ecke, und sodann zur geometrischen Deutung dieser letzteren.

1) Von den regulären Polygonen mit ganzer Seitenzahl n gilt der Satz, dass sie in und um einen Kreis beschrieben werden können. Da der Beweis dieses Satzes von der Voraussetzung unabhängig ist, dass das Polygon ein geschlossenes sei, indem man, um z. B. den ersten Theil des Satzes zu beweisen, durch drei benachbarte Ecken einen Kreis zieht und von jedem folgenden Eck nachweist, dass es ebenfalls vom Mittelpunkt des Kreises um seinen Radius R entfernt sei, so können wir auch von den keinenfalls geschlossenen $\frac{p}{q}$ Ecken sagen:

In und um jedes reguläre Polygon von der Seitenzahl $\frac{p}{q}$ kann ein Kreis beschrieben werden.

2) Die Summe der Centriwinkel des nEcks der gewöhnlichen Art beträgt 2π. Da dieser Werth von der Seitenzahl n unabhängig und constant ist, so soll auch die Summe der Centriwinkel des $\frac{p}{q}$ Ecks 2π betragen.

3) Alle Centriwinkel des regulären nEcks sind einander gleich, und beträgt ein jeder $\frac{2\pi}{n}$. Ebenso sind die Centriwinkel des regulären $\frac{p}{q}$ Ecks einander gleich und beträgt jeder $\frac{2\pi}{\frac{p}{q}} = \frac{2q\pi}{p}$.

4) Die Summe der Umfangswinkel des nEcks ist $(n-2)\pi$. Setzen wir darin $\frac{p}{q}$ statt n, so erhalten wir die Summe der Umfangswinkel des $\frac{p}{q}$ Ecks:

$$\left(\frac{p}{q}-2\right)\pi = \frac{p-2q}{q}\pi.$$

5) Jeder Umfangswinkel des nEcks beträgt $\frac{n-2}{n}\pi$; jeder Umfangswinkel des $\frac{p}{q}$ Ecks: $\frac{\frac{p-2q}{q}}{\frac{p}{q}}\pi = \frac{p-2q}{p}\pi$.

6) In jedem convexen Vielseit, auch wenn es irregulär ist, beträgt die Summe der Aussenwinkel von gleicher Richtung 360^0 oder 2π.

Da dieser Satz, welcher von Krause herrührt, nicht allgemein bekannt sein dürfte, so geben wir hier den Beweis desselben, welcher sehr kurz ist:

Denkt man sich nämlich eine Gerade, die sich um das Polygon herumschmiegt, indem sie sich successive an die Seiten desselben anlegt, so dreht sie sich dabei um die Aussenwinkel desselben, welche entstehen, wenn man alle Seiten im nämlichen Sinne verlängert. Da die Gerade nach vollendeter Drehung wieder in ihre ursprüngliche Lage und Richtung kommt, so ist die Summe der Aussenwinkel 2π.

Der Satz gilt auch von Polygonen mit einspringenden Winkeln, wenn man die einspringenden Aussenwinkel negativ nimmt. Er gelte auch von den $\frac{p}{q}$ Ecken, weil er bei den nEcken von der Seitenzahl n unabhängig ist.

Aus der Vergleichung dieses Satzes mit No. 2) geht hervor, dass die Summe der Aussenwinkel der Summe der Centriwinkel gleich ist; und in der That ist beim regulären Polygon jeder Aussenwinkel auch einzeln dem Centriwinkel gleich.

7) Die Seite S des in den Kreis vom Halbmesser R eingeschriebenen regulären nEcks berechnet sich aus dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{n}$ nach bekannten trigonometrischen Formeln, wie folgt:

$$S = \pm\sqrt{R^2 + R^2 - 2R \,.\, R\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \pm\, 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

oder, wenn wir den Durchmesser mit D bezeichnen:

$$S = \pm\, D\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ferner berechnet sich die Seite Σ des um den Kreis vom Radius P beschriebenen regulären n Seits:

$$\Sigma = \pm\, 2P\,tang\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

oder durch den Diameter Δ ausgedrückt:

$$\Sigma = \pm\, \Delta\,tang\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Für das $\frac{p}{q}$ Eck hat man daher die beiden Formeln:

$$S = \pm\, D\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right) \text{ und } \Sigma = \pm\, \Delta\,tang\left(\frac{q\pi}{p}\right).$$

Die bisherigen Formeln haben wenig Interesse für uns, wenn es nicht gelingt, die $\frac{p}{q}$ Seite geometrisch zu interpretiren. Nun ist aber offenbar ein Polygon, welches $\frac{p}{q}$ Seiten oder Ecken hat, ein widersinniger Begriff.

Fügt man aber q Polygone von $\frac{p}{q}$ Seiten und Ecken so zusammen, dass die Bruchtheile der Seiten sich zu Ganzen ergänzen, so müssen wir eine Figur von p Seiten und Ecken

erhalten, und es liegt nichts im Wege, dass wir uns diese Figur geometrisch darstellen.

In diesem Satze liegt die Definition der $\frac{p}{q}$ Ecke ebenso wie die einer gebrochenen Potenz in der Gleichung:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p.\text{*)}$$

Diese Figur, welche aus q regulären $\frac{p}{q}$ Ecken zusammengesetzt ist und selbst p ganze Seiten und Ecken hat, muss nun zum Ersten den Sätzen 1), 3), 5), 7) genügen, dann aber auch noch den Sätzen 2), 4), 6), welche durch die Multiplication des $\frac{p}{q}$ Ecks mit q, wie folgt, modificirt werden:

Die Figur, zu welcher q reguläre $\frac{p}{q}$ Ecke gruppirt sind, hat folgende Eigenschaften:

2*) Die Summe ihrer Centriwinkel beträgt $q \cdot 2\pi$

4*) Die Summe ihrer Umfangswinkel ist $q \cdot \frac{p-2q}{q} \pi = (p-2q)\pi$.

6*) Die Summe ihrer Aussenwinkel ist $2q\pi$.

Aus diesen Bedingungen, welche von der Figur erfüllt werden müssen, geht hervor, dass diese Figur identisch ist mit dem Sternpolygon, welches man erhält, wenn man im regulären pEcke jeden Eckpunkt immer mit dem $q$ten folgenden verbindet; denn der Centriwinkel dieses Sternpolygons beträgt $q \cdot \frac{2\pi}{p}$, und aus ihm berechnen sich die übrigen Stücke des Sternpolygons ganz gleich denen der fraglichen Figur von No. 1) bis 7).

Die französischen Mathematiker (Poinsot, Terquem) nennen ein solches Sternpolygon „ein gesterntes Polygon von der Seitenzahl p und der Art q," und man kann dasselbe auch nach Krause's Vorschlag den „Asterisk von p Seiten und $q$ter Ordnung" nennen.

Nach der neuen Auffassung, die wir nun gewonnen haben, ist also ein solches Sternpolygon nichts anderes, als der Complex von q Polygonen gebrochener Seitenzahl $\frac{p}{q}$.

---

*) Diese letztere Definition ist jedoch eine vollständige, da a^p für ein ganzzahliges p eine ganz bestimmte Grösse ist, während in unserem Falle die Natur der geschlossenen $p$seitigen Figur noch nicht näher charakterisirt ist. Die Definition dieser Figur und resp. der $\frac{p}{q}$ Seite bedarf daher noch einer Vervollständigung, und diese ist gegeben durch die Bestimmung, welche in dem nachfolgenden Satze getroffen wird.

Das ganzzahlige n Eck erscheint als Polygon **erster** Ordnung, und jeder Asterisk der $q$ten Ordnung überdeckt q mal den ganzen Kreisumfang. — Es ist uns jetzt auch erlaubt, folgende zwei Sätze, die bisher nur Giltigkeit hatten, wenn p durch q ganzzahlig theilbar ist, allgemein auszusprechen:

8) Wenn man ein reguläres p Seit verlängert, bis jede Seite die $q$te folgende schneidet, so erhält man q reguläre $\frac{p}{q}$ Seite, welche alle demselben Kreise umschrieben sind.

Wenn man im regulären p Eck jedes Eck mit dem als $q$tes auf ihn folgenden verbindet, so erhält man q reguläre $\frac{p}{q}$ Ecke, welche alle demselben Kreise einbeschrieben sind.

Als Beispiel zu diesen beiden Sätzen betrachte man das reguläre, in und um einen Kreis beschriebene 12 Eck oder 12 Seit. Man erhält durch das vorgeschriebene Verfahren, indem man dem q alle Werthe von 1 bis 11 ertheilt, erst das convexe 12 Eck, dann 2 reguläre $\frac{12}{2} = 6$ Ecke, 3 reguläre $\frac{12}{3} = 4$ Ecke, 4 reguläre $\frac{12}{4} = 3$ Ecke, endlich 5 reguläre $\frac{12}{5}$ Ecke, und diese letztere Figur ist ein in sich geschlossenes Sternpolygon; setzt man $q = 6$, so erhält man 6 reguläre $\frac{12}{6} = 2$ Ecke, und hieraus geht die Bedeutung des **Zweiecks** hervor: Das in den Kreis eingeschriebene Zweieck ist ein Durchmesser; das dem Kreis umschriebene unendliche Zweiseit ist ein System von 2 parallelen Berührungslinien. — Fährt man nach dem **zweiten** der beiden Sätze 8) noch weiter fort, indem man das 7te, 8te u. s. w. bis 11te folgende Eck mit jedem Eck verbindet, so kommt man wieder auf dieselben Figuren, nur in umgekehrter Ordnung, und allgemein ist unmittelbar anschaulich, dass für eine gerade Zahl p man auf die nämlichen Sternpolygone stösst, wenn q von 0 bis $\frac{p}{2}$, als wenn es von $\frac{p}{2}$ bis p wächst, nur in umgekehrter Aufeinanderfolge, und dass bei einem ungeraden p dasselbe gilt für q zwischen den Grenzen 0 bis $\frac{p-1}{2}$ und den Grenzen $\frac{p+1}{2}$ bis p. Dabei bleibt der Centriwinkel des Polygons kleiner als π, so lange $q < \frac{p}{2}$ ist, und er wird grösser als π, wenn $q > \frac{p}{2}$ ist. — Was aber die Verlängerung der Seiten betrifft, so scheint die Giltigkeit des **ersten** der beiden Sätze 8) dann aufzuhören, wenn man die Seiten bis in die Unendlichkeit verlängert hat, da man sie darüber hinaus nicht mehr verlängern kann. Eine Linie nach der einen Seite hin über die Unendlichkeit hinaus verlängern, heisst jedoch eben nichts anderes, als sie auf der anderen Seite von der Unendlichkeit herein verkürzen, ebenso, *wie einen* Winkel über die Grenze π der Winkel hinaus vergrössern, heisst, ihn nach der entgegengesetzten Seite verkleinern; und bei dieser Auffassung kommt man dann auch nach dem ersten der Sätze 8) in umgekehrter Ordnung wieder auf die nämlichen Polygone, wenn man q grösser als $\frac{p}{2}$ werden lässt.

Die Bemerkung, welche wir bei den letzten Betrachtungen machten, nämlich dass es auch gewisse Polygone von verschiedenen Ordnungen giebt, welche gemeinsame Seiten und Ecken haben und sich nur durch die Auffassung der Umfangswinkel unterscheiden, bleibt uns noch allgemein auszuführen. Da nämlich im p Eck das auf einen Punkt in einer Richtung als $q$tes folgende Eck identisch ist mit dem als $(p+q)$tes folgenden und allgemein mit dem als $(mp+q)$tes folgenden; da es ferner identisch ist mit dem in umgekehrter Richtung als $(p-q)$tes folgenden und allgemein dem als $(mp-q)$tes folgenden, so muss das Sternpolygon von p Ecken und $q$ter Ordnung seinen Ecken und Seiten nach identisch sein mit dem Polygon von p Seiten und $(mp \pm q)$ter Ordnung, wo m irgend eine ganze Zahl von ± 0 bis $\pm \infty$ bedeutet; und das Gleiche geht auch hervor aus der Betrachtung der Aufeinanderfolge der Seiten.

Es folgt übrigens auch aus den Formeln zur Seitenberechnung des Sternpolygons in 7):

$$S = \pm D \sin\left(\frac{q \cdot \pi}{p}\right) \text{ und } \Sigma = \pm \Delta \operatorname{tang}\left(\frac{q \cdot \pi}{p}\right),$$

da sowohl $\sin \alpha = \pm \sin (m\pi \pm \alpha)$, als $\operatorname{tang} \alpha = \pm \operatorname{tang} (m\pi \pm \alpha)$, und folglich auch

$$S = \pm D \sin\left(m\pi \pm q\frac{\pi}{p}\right) = \pm D \sin\left(\frac{mp \pm q}{p}\pi\right)$$

und

$$\Sigma = \pm \Delta \operatorname{tang}\left(\frac{mp \pm q}{p}\pi\right)$$

ist.

Der Centriwinkel und der Umfangswinkel des Sternpolygons von p Seiten und $(mp \pm q)$ter Ordnung wird jedoch abhängig von m, indem der Centriwinkel gleich wird:

$$\frac{2(mp \pm q)\pi}{p} = 2m\pi \pm \frac{2q\pi}{p}$$

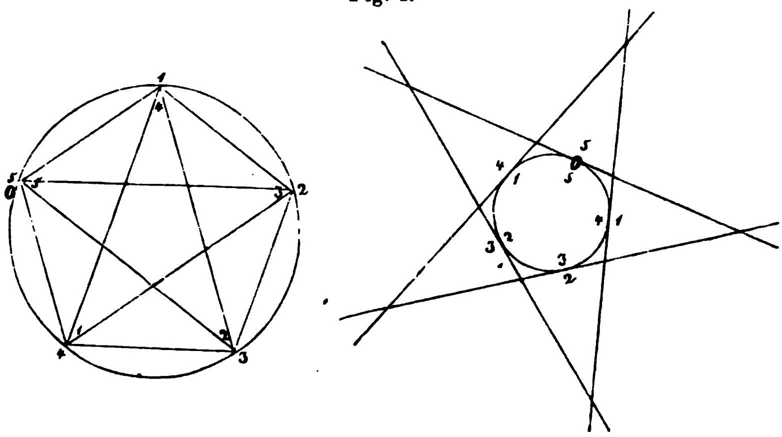
und der Umfangswinkel gleich wird:

$$\frac{p - 2(mp \pm q)}{p}\pi = -2m\pi + \frac{p \mp 2q}{p}\pi;$$

hieraus geht durch Vergleichung mit den Formeln 3) und 5) hervor, dass die Centriwinkel und Umfangswinkel des letzteren Polygons von denen des Sternecks der $q$ten Ordnung nur durch ein ganzzahliges Multiplum von π und durch ihr Vorzeichen sich unterscheiden. Wir können deshalb das Sternpolygon von der Ordnung q und das von der Ordnung $(mp \pm q)$

überhaupt als identisch betrachten. So ist z. B. das fünfseitige Sternpolygon der 2ten Ordnung identisch mit dem fünfseitigen Sternpolygon von der Ordnung $3 = 5 - 2$ (siehe Fig. 1).

Fig. 1.



Eine Gruppe von q regulären $\frac{p}{q}$ Ecken bildet immer dann ein Sternpolygon, wenn q und p relative Primzahlen sind; und stellen wir die Frage auf, wie vielerlei p seitige Sternpolygone es überhaupt gebe, so muss nach dem Bisherigen die Antwort lauten: so viele, als es relative Primzahlen zu p giebt, die kleiner sind, als $\frac{p}{2}$. — Die Figur, die aus q regulären $\frac{p}{q}$ Seiten zusammengesetzt ist, bildet eine Gruppe von r Sternpolygonen der Seitenzahl $\frac{p}{r}$ und der Ordnung $\frac{q}{r}$, wenn r der grösste gemeinschaftliche Divisor von p und q ist; jene Figur bildet endlich convexe Vielecke, wenn $q = 1$ oder in p theilbar ist. Soll der Werth des Bruches $\frac{p}{q}$ ein irrationaler sein, so müssen die ganzen Zahlen p und q unendlich gross genommen werden; dann liegt ein Sternpolygon vor von unendlicher Seitenzahl p und unendlicher Ordnung q; seine Ecken füllen die Peripherie des umschriebenen Kreises aus; der geometrische Ort seiner Seitenmitten ist der eingeschriebene Kreis, und diese Seiten selbst füllen den Flächenraum des concentrischen Ringes aus, den beide Kreise bilden, oder mit anderen Worten: Das Polygon schliesst sich nie, wenn man seine Seite in oder um den Kreis herum aufträgt.

Wir dürfen es nicht unterlassen, die beiden Sätze 8), welche zu einander reciprok sind, noch wie folgt zu verallgemeinern:

9) Wenn man im Sternpolygon von p Seiten und q ter Ordnung die Seiten verlängert bis zum Schnittpunkt mit jeder m ten folgenden, so erhält man das Sternpolygon von p Seiten und $(q \cdot m)$ ter Ordnung.

Wenn man im Sternpolygon von p Ecken und q ter Ordnung jedes Eck verbindet mit jedem m ten folgenden, so erhält man das Sterneck von p Ecken und $(q \cdot m)$ ter Ordnung.

Dabei sind unter benachbarten oder aufeinander folgenden Seiten, resp. Ecken immer diejenigen Seiten zu verstehen, die ein Eck gemeinsam haben, und diejenigen Ecken, die an derselben Seite liegen.

Was nun die Erweiterung der bisherigen Sätze auf die unregelmässigen Polygone betrifft, so kann dabei von Seitenberechnungen und von Verallgemeinerung der Sätze 1), 2), 3), 5), 7) natürlich keine Rede sein, und wir können uns nur die Aufgabe stellen, gewisse constante Winkelsummen oder Differenzen, welche dabei auftreten, zu berechnen. — Wenn also irgend ein unregelmässiges, sternförmiges Polygon von p Seiten vorliegt, so handelt es sich, zu ermitteln, welcher Ordnung es zuzuzählen sei, d. h. es zu classificiren, und dann handelt es sich darum, festzustellen, wie aus seiner Seitenzahl p und Ordnung q die constanten Winkelgrössen, die sich an ihm vorfinden, abgeleitet werden können.

Man lasse eine Gerade, indem man sie immer in demselben Sinne dreht, um das Polygon sich herumlegen, bis sie wieder in ihrer ursprünglichen Lage angelangt ist. Dadurch findet man die Summe seiner Aussenwinkel gleich einer ganzen Anzahl, die wir q nennen wollen, mal 2π, und nun berechne man die Umfangswinkelsumme des Polygons nach der nämlichen Formel 4*), wie die Winkelsumme des regulären Asterisken von p Seiten und q ter Ordnung. — Denn bezeichnet Σa die Summe der Aussenwinkel und Σu die Summe der Umfangswinkel, so ist:

$$\Sigma a = 2 q \pi.$$

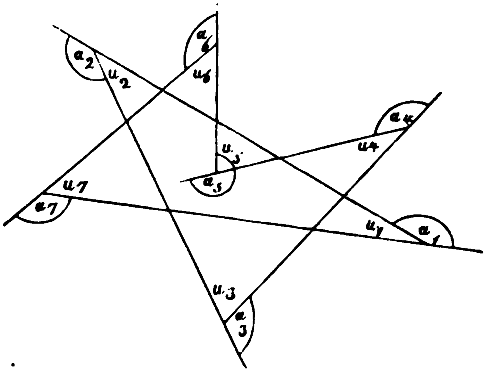
Nun beträgt aber jeder Aussenwinkel mit seinem Umfangswinkel als Nebenwinkel $180^\circ = \pi$, und dies ist auch für einspringende Umfangswinkel der Fall, wenn man dieselben negativ, die Aussenwinkel aber alle positiv nimmt, daher ist:

$$\Sigma a + \Sigma u = p \cdot \pi;$$

zieht man von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so wird:

$$\Sigma u = (p - 2q)\, \pi, \quad q.\ e.\ d.$$

Fig. 2.



Z. B. die vorliegende Figur (Fig. 2) ist ein 7seitiges Sterneck der 3ten Ordnung und kann betrachtet und berechnet werden als ein Complex von 3 unregelmässigen $\frac{7}{3}$Ecken; indem die Aussenwinkelsumme $= 3 . 2\pi$ ist. Die Umfangswinkelsumme, in welcher der einspringende Winkel u_5 negatives Glied ist, muss daher sein:

$$\Sigma u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_5 + u_6 + u_7 = (7 - 3 . 2)\,\pi = \pi.$$

Auch die Anwendung unserer Anschauungsweise auf das Eck oder die Pyramide im Raume bietet keine Schwierigkeit.

n von je zwei Geraden begrenzte Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden und je zu zweien ihre Begrenzungslinien gemeinsam haben, zusammen also auch n Kanten bilden, sind eine Figur, die auf ganz reciproke Weise zusammengesetzt ist, wie das Polygon oder System von n in je zwei Punkten begrenzten Geraden, die in einer Ebene liegen und je zu zweien einen Grenzpunkt gemein haben, daher auch n Ecken bilden. Verbindet man also alle Punkte eines ebenen Sternpolygons von p Seiten und $q$ter Ordnung mit irgend einem Punkt im Raume durch Ebenen und gerade Linien, so liegt nichts im Wege, die dadurch entstehende sternförmige Pyramide von p Seitenflächen auch zur $q$ten Ordnung zu zählen, d. h. als Complex von q Pyramiden der Seitenzahl $\frac{p}{q}$ zu betrachten. Es wird also eine solche Pyramide von jeder Ebene in einem Polygon geschnitten, dessen Winkelsumme $(p - 2q)\pi$ ist, und es lassen sich, zumal für die reguläre Pyramide, Sätze aufstellen, welche den vier Sätzen 8) und 9) analog sind, und Anderes mehr.

Grössere Schwierigkeiten bietet die Anwendung des dargelegten Princips auf die Polyëder überhaupt; es ist jedoch nicht unsere Absicht, hier näher darauf einzugehen.

III.

Einige Bemerkungen über die Berechnung der sogenannten Mittel und deren Anwendung in den Erfahrungswissenschaften.

Von Dr. E. Segnitz,
Professor an der landwirthschaftlichen Akademie zu Eldena.

In der reinen Mathematik ist häufig von Mittelwerthen die Rede, welche insoweit unbestimmt bleiben, als es entweder für den gerade vorliegenden Zweck ausreicht, oder man sich gewisser Schwierigkeiten wegen begnügen muss, deren Grenzen festzustellen; in der Statistik, Meteorologie und anderen Erfahrungswissenschaften dagegen verlangt man und versteht unter „Mittel" einen numerisch bestimmten Werth, welchen man als das Resultat der betreffenden Untersuchung ansieht und welcher weiteren Forschungen als Ausgangspunkt zu dienen geeignet ist. Zur Berechnung solcher Mittel können verschiedene Wege eingeschlagen werden, deren Wahl jedoch keineswegs gleichgiltig ist. Meiner Ansicht nach wird hierbei — namentlich von Seiten der Statistiker — gewöhnlich der Fehler begangen, dass man sich viel zu sehr auf das sogenannte arithmetische Mittel beschränkt, welches doch nur für eine besondere Art der fraglichen Gattung von Grössen gelten kann. Selbst Quetelet ist von diesem Vorwurf nicht ganz freizusprechen; derselbe macht zwar*) einen Unterschied zwischen „*moyenne proprement dite*" und „*moyenne arithmétique*"; vom analytischen Standpunkte betrachtet, kommen jedoch beide scheinbar verschiedene Arten auf Eins hinaus. Er sagt nämlich geradezu: „*la moyenne d'une série d'observations s'obtient en divisant la somme des valeurs observées par le nombre des observations*": den Ausdruck *moyenne arithmétique* aber braucht er von dem Durchschnittswerth verschiedener wirklich existirender Grössen gleicher Art, und bemerkt dazu, dass diesem Durchschnittswerthe kein physischer Gegenstand genau zu entsprechen brauche. Ich

---

*) *Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques; Bruxelles* 1846; *pag.* 59 *et suiv.*

glaube, dass der Begriff, mit welchem wir es hier zu thun haben, viel allgemeiner aufgestellt werden muss; die folgende, ziemlich naheliegende Definition ist vielleicht schon mehrfach ausgesprochen worden; es kann indess keinenfalls schaden, wenn dieselbe wiederholt in Erinnerung gebracht wird.

Mittel ist diejenige constante Grösse, welche statt einer veränderlichen Grösse in die Rechnung eingeführt, das Resultat der letzteren nicht abändern würde.

Aus dieser Definition, welche sowohl auf stetig als auch auf discontinuirlich veränderliche Grössen passt, geht hervor, dass das gesuchte Mittel keineswegs in allen Fällen durch eine und dieselbe Rechnungsoperation gefunden werden kann, dass vielmehr das zu diesem Behufe anzuwendende Verfahren ganz von den Beziehungen abhängt, in welchen die fragliche Veränderliche zu den übrigen in der Rechnung vorkommenden Grössen steht.

Eines der einfachsten und bekanntesten Beispiele eines solchen Mittelwerthes bietet sich in dem Mittelpreise des Kornes dar. Der Preis eines Scheffels Roggen unterliegt im Laufe der Zeit und von einem Orte zum anderen vielfachen Schwankungen; wenn nun diese Schwankungen nicht vorgekommen wären, innerhalb des betreffenden Zeitraumes und Bezirkes aber im Ganzen dieselbe Summe für Roggen verausgabt und die gleiche Scheffelzahl zum Verkauf gekommen wäre, als dies wirklich der Fall gewesen ist — wie viel hätte unter diesen Voraussetzungen für einen Scheffel Roggen gezahlt werden müssen? Sind $p, p', p'', p''', \ldots$ die Preise, zu welchen beziehentlich die Quantitäten $q, q', q'', q''', \ldots$ verkauft werden, so hat man für den gesuchten Mittelpreis offenbar

$$1) \qquad P = \frac{pq + p'q' + p''q'' + p'''q''' + \ldots}{q + q' + q'' + q''' + \ldots}.$$

Gewöhnlich wird das Jahresmittel auf die Weise festgestellt, dass man, ohne Rücksicht auf die verkauften Quantitäten, aus den an den einzelnen Markttagen notirten Preisen den Durchschnitt zieht; es ist jedoch anzunehmen, dass zu Zeiten, wo die Landwirthe viel Getreide zu Markte bringen, der Preis desselben herabgedrückt wird; während derselbe steigt, wenn die Vorräthe nahezu aufgezehrt sind, wenn die Landleute aus diesem oder jenem anderen Grunde nur in geringer Zahl auf den Markt kommen. Es werden in der Regel grössere Getreidemengen zu den niedrigeren, als zu den höheren Preisen abgesetzt; das übliche Verfahren wird daher voraussichtlich einen zu hohen Durchschnitt liefern.

Ein anderes hierher gehöriges Beispiel kann die mittlere Bevölkerungszunahme abgeben. Moreau de Jonnès, welcher von einem seiner Fachgenossen zu den bedeutendsten Vertretern der mathematischen Schule in der Statistik gezählt wird, berechnet dieselbe in der Weise, dass er die absolute Zunahme der Einwohnerzahl durch das Product aus der

Anzahl Jahre, welche die betreffende Periode umfasst, und dem arithmetischen Mittel der Bevölkerung am Anfang und Ende der Periode dividirt*). So betrug z. B. im Jahre 549 nach Erbauung der Stadt Rom die Anzahl der römischen Bürger und ihrer Angehörigen (mit Ausschluss der Sclaven) nach seiner Angabe 1,070,000; 10 Jahre später belief sich dieselbe auf 1,218,000; dies war eine Vermehrung um 148,000 Seelen bei einer mittleren Bevölkerung von 1,144,000; der genannte Schriftsteller findet demnach bei seiner Berechnungsweise die jährliche relative Zunahme

$$\frac{148000}{10 \,.\, 1144000} = \tfrac{1}{77} \text{ nahezu.}$$

Nennen wir p_0 die anfängliche Bevölkerung, z_1 das Verhältniss der im ersten Jahre eingetretenen Vermehrung zur anfänglichen Bevölkerung, z_2 das Verhältniss der im zweiten Jahre erfolgten Zunahme zur Bevölkerungszahl am Anfange des zweiten Jahres u. s. w., endlich p_i die Bevölkerung zu Ende der i Jahre umfassenden Periode, so ist

$$p_0 (1 + z_1)(1 + z_2) \ldots (1 + z_i) = p_i.$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung, der obigen Definition entsprechend,

$$z_1 = z_2 \ldots z_i = z,$$

so erhalten wir

$$p_0 (1 + z)^i = p_i$$

und hieraus:

$$\text{2)} \qquad log\,(1 + z) = \frac{1}{i}\, log \frac{p_i}{p_0}.$$

Diese Formel, welche natürlich für jedes beliebige logarithmische System gilt, ist zur Berechnung der mittleren Bevölkerungszunahme z so bequem und so einfach, dass es eigentlich keinen praktischen Zweck hat, sich noch nach einem approximativen Verfahren umzusehen, bei welchem wir an Genauigkeit verlieren würden, ohne in Bezug auf Kürze der Rechnung irgend etwas zu gewinnen. Sehen wir indess zu, ob sich die von Moreau de Jonnès angewendete Berechnungsweise vielleicht von diesem Gesichtspunkte aus rechtfertigen lässt!

Abgesehen von denjenigen Fällen, wo bedeutende Einwanderungen stattgefunden haben, ist z immer ein kleiner, nur wenige Procente betragender Bruch; wir können mithin zuvörderst näherungsweise setzen

$$log\,(1 + z) = z,$$

indem wir nämlich unter den Logarithmen in Gleichung 2) natürliche verstehen und von der bekannten Reihe nur das erste Glied beibehalten. Ist nun die gesammte Bevölkerungszunahme während der betrachteten Periode im Vergleich zur anfänglichen Einwohnerzahl ebenfalls nur klein, so lässt sich dieselbe Abkürzung auch auf

---

*) Man sehe dessen *Statistique des peuples de l'antiquité;* *Paris* 1851; vol. II; pag. 363—367, und *an verschiedenen* anderen Stellen.

$$log \frac{p_i}{p_0} = log \left(1 + \frac{p_i - p_0}{p_0}\right)$$

anwenden, und wir erhalten somit die Näherungsformel

$$3) \qquad z = \frac{p_i - p_0}{i \cdot p_0}.$$

Eines anderweiten genäherten Ausdrucks für den natürlichen Logarithmus eines Quotienten bedient sich Poncelet in seiner angewandten Mechanik*); er gelangt zu demselben, indem er das Integral

$$\int_{p_i}^{p_0} \frac{dp}{p} = log \frac{p_i}{p_0}$$

durch eine mit Hilfe der Simpson'schen Regel ausgeführte Quadratur ersetzt. Auf solche Weise ergiebt sich für den vorliegenden Fall

$$4) \qquad z = \frac{1}{i} \left\{ \tfrac{1}{6} \frac{p_i}{p_0} + \tfrac{4}{3} \frac{p_i - p_0}{p_i + p_0} - \tfrac{1}{6} \frac{p_0}{p_i} \right\}.$$

Babinet benutzt**) eine dritte hierher gehörige Näherungsformel, um kleine Höhenunterschiede aus angestellten Barometerbeobachtungen zu berechnen. Entwickelt man nämlich, von der identischen Gleichung

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{1 + \dfrac{p_i - p_0}{p_i + p_0}}{1 - \dfrac{p_i - p_0}{p_i + p_0}}$$

ausgehend, die Logarithmen des Zählers und Nenners, welche den gebrochenen Ausdruck auf der rechten Seite bilden, in unendliche Reihen und zieht beide von einander ab, so bleibt

$$log\ nat \frac{p_i}{p_0} = 2 \left\{ \frac{p_i - p_0}{p_i + p_0} + \tfrac{1}{3} \left(\frac{p_i - p_0}{p_i + p_0}\right)^3 + \tfrac{1}{5} \left(\frac{p_i - p_0}{p_i + p_0}\right)^5 + \ldots \right\}.$$

Ist nun die Differenz der Grössen p_i und p_0 im Vergleich zu ihrer Summe klein genug, um bei dem ersten Gliede der Reihe stehen bleiben zu können, so wird näherungsweise

$$5) \qquad z = \frac{2}{i} \frac{p_i - p_0}{p_i + p_0},$$

d. i. nichts anderes, als die von dem Verfasser der *Statistiques des peuples de l'antiquité* angewendeten Methode in Form einer algebraischen Gleichung dargestellt.

Finden die Volkszählungen, wie in Preussen, alle drei Jahre statt, so wird man keinen erheblichen Fehler begehen, wenn man, um die einer solchen Periode entsprechende jährliche Bevölkerungszunahme zu finden, anstatt der streng richtigen Gleichung 2) eine der vorstehenden Näherungs-

---

*) Seite 16 des II. Bandes in der deutschen Uebersetzung von Dr. Schnuse.

**) Siehe *Comptes rendus T. LII.* No. 6 (11. *Février* 1861), *pag.* 221, oder die von *Babinet und Housel* herausgegebenen „*Calculs pratiques*“ *pug.* 175.

formeln 3), 4) oder 5) benutzt; Moreau de Jonnès hat aber auch einen Fall behandelt, wo dies völlig unzulässig war.

Nach seiner Angabe*) wanderten die Juden als eine 70 Köpfe starke Familie in Aegypten ein, welche hier in Zeit von 430 Jahren zu einem Volk von anderthalb Million Individuen anwuchs. Die anfängliche Bevölkerung (p_o) ist in diesem Falle, gegen die schiessliche (p_i) gehalten, verschwindend klein, und die Gleichung 5) würde sich somit in

$$z = \frac{2}{i},$$

d. i. in eine Formel verwandeln, aus welcher die Volkszahl am Ende der betrachteten Periode gänzlich verschwunden ist. Der Verfasser berechnet zwar in diesem extremen Falle die jährliche mittlere Bevölkerungszunahme in etwas anderer Weise als sonst, die Modification aber, welche er zu diesem Behufe anbringt, zeigt, dass er die obigen, zur Rechtfertigung der Formel 5) dienenden Betrachtungen kaum angestellt haben kann. Um die absolute Vermehrung während des ganzen Zeitraumes zu finden, zieht er von der schliesslichen Volkszahl diesmal nicht die anfängliche, sondern die mittlere Bevölkerung (d. h. die Hälfte jener Volkszahl) ab. Er sagt nämlich: Während einer Periode von 430 Jahren wuchs die Familie Jacob's auf anderthalb Million Individuen an; der mittlere Betrag der Bevölkerung während dieser Zeit war also ungefähr 750,000 Personen, und die jährliche Zunahme betrug 1745 oder $\frac{1}{430}$ der mittleren Bevölkerungszahl. Ohne zu bemerken, dass, zu welcher Höhe auch die Zahl der Juden in Aegypten angewachsen sein mochte, seine Rechnung stets zu dem Resultat

$$z = \frac{1}{i}$$

führen musste, fügt Moreau de Jonnès weiter hinzu: „*C'est un terme, dont la connaissance est fort importante à l'étude de la race humaine; car il prouve que le choses se passaient alors comme actuellement et qu'une effrayante accumulation de* 3978 *ans n'y a rien changé absolument.*“

Die nach richtiger Methode angestellte Rechnung führt jedoch zu einem ganz anderen Ergebniss. Mit Rücksicht auf die vorstehenden Zahlenangaben hat man nämlich nach Gleichung 12)

$$\log(1 + z) = \tfrac{1}{430}(\log 150000 - \log 70)$$

und hieraus:

$$z = 0{,}02346 = \frac{1}{52{,}626}.$$

Die mittlere jährliche Bevölkerungszunahme der Hebräer in Aegypten war mithin reichlich zehn Mal so gross, als die von dem genannten Statistiker berechnete.

*) *L. c. T. I. p.* 107.

Nehmen wir die gegenwärtige Bevölkerung der ganzen Erde zu 1200 Millionen an, und gehen von der Voraussetzung aus, dass dieselbe von einem einzigen Paare abstammt, welches vor 6000 Jahren gelebt hat, so ergiebt sich aus der Relation

$$log\,(1+z) = \frac{log\,600\,000\,000}{600}$$

die mittlere jährliche Bevölkerungszunahme für das gesammte Menschengeschlecht

$$z = 0{,}0033744 = \frac{1}{296{,}35},$$

d. i. etwas mehr als $\frac{1}{3}$ Procent, während Moreau de Jonnès $\frac{1}{5000}$ gefunden haben würde. Die entsprechende Periode der Verdoppelung aber, welche bei den Statistikern eine wichtige Rolle spielt, erhält man nach der Formel

$$6) \qquad z = \frac{log\,2}{log\,(1+z)}$$

gleich $205\frac{3}{4}$ Jahre; bei den alten Juden betrug dieselbe während ihres Aufenthaltes in Aegypten durchschnittlich beinahe 30 Jahre.

Wenden wir uns jetzt zu einem dritten, der Meteorologie entlehnten Beispiele von der Berechnung und Anwendung eines Mittelwerthes!

Man ist in neuerer Zeit vielfach bemüht gewesen, die sich der oberflächlichsten Beobachtung aufdrängenden Beziehungen zwischen der Temperatur und der Entwickelung der Pflanzen auf ein genauer formulirtes Gesetz zurückzuführen. Es liegt auf der Hand, dass ausser der herrschenden Temperatur noch mancherlei andere Momente hierbei in Betracht kommen; es muss daher, wenn die angeregte Frage überhaupt einer Beantwortung fähig sein soll, jedenfalls vorausgesetzt werden, dass die übrigen Bedingungen zu einer normalen Entwickelung der Pflanze in nahezu gleichem Grade vorhanden sind. Es haben sich in dieser Beziehung namentlich zwei von einander abweichende Ansichten geltend gemacht. Nach der einen von Boussingault vertretenen Hypothese soll die Summe der täglichen Wärmemittel, vom Beginn der Vegetation im Frühling gerechnet und bis zu der fraglichen Entwickelungsstufe (Blüthe, Reife) fortgeführt, für jede Pflanzenart eine constante Grösse sein, während Quetelet dasselbe von der Summe der Quadrate jener Wärmemittel behauptet. Es kann nicht meine Absicht sein, auf diesen in physiologischer, pflanzengeographischer und landwirthschaftlicher Hinsicht äusserst interessanten Gegenstand hier näher einzugehen, aber eine das analytische Verfahren betreffende Bemerkung kann ich nicht unterdrücken.

Theilt man die Ansicht von Quetelet, so scheint es streng genommen nicht consequent, wenn man sich zu Anstellung einer hierauf bezüglichen Rechnung der auf die gewöhnliche Weise festgestellten mittleren täglichen

Temperaturen bedient. Geht man nämlich von der Voraussetzung aus, dass die Entwickelung der Vegetation nicht den einfachen Temperaturen, sondern ihren Quadraten proportional fortschreitet, so ist dasselbe Gesetz auch für jedes noch so kleine Zeitintervall anzunehmen. Stellt man demungeachtet den täglichen Gang der Wärme durch Ordinaten dar, welche man rechtwinklig auf die der Zeit proportionalen Abscissen aufträgt, so erhält man durch Quadratur der auf solche Weise entstandenen Temperaturcurve eine Fläche, welche die tägliche Wärmesumme ausdrückt, und daher allerdings nach der Theorie von Boussingault, aber nicht nach der von Quetelet als das Maass der diesem Zeitintervall entsprechenden Entwickelung der Pflanzen angesehen werden kann. Die mittlere Temperatur im gewöhnlichen Sinne ist bekanntlich die Höhe eines Rechteckes, welches die Zeit zur Basis und mit jener, von der Temperaturcurve begrenzten Figur gleichen Flächeninhalt hat. Ist die Ansicht von Quetelet begründet, so werden die Fortschritte der Vegetation keineswegs gleich ausfallen für alle Tage, an welchen sich dieselbe mittlere Temperatur in obigem Sinne ergiebt. So lange das Minimum der an einem Tage vorgekommenen Temperaturen nicht unter eine gewisse Grenze sinkt, bei welcher die Pflanze geradezu leidet und bereits gebildete Organe wieder zerstört werden, wird dem Princip des Letzteren zu Folge eine um so raschere Entwickelung zu erwarten sein, je weiter das Minimum und Maximum jener Temperaturen auseinander liegen. Wenn mich mein Gedächtniss nicht trügt, findet sich in der That in einem der Berichte über die zu Brüssel angestellten meteorologischen Beobachtungen eine dahin deutende Bemerkung. Es lässt sich aber dem von Quetelet aufgestellten Gesetz auch für ein unendlich kleines Zeitintervall in aller Strenge Rechnung tragen, indem man die zur Darstellung des täglichen Wärmeganges gewöhnlich benutzten rechtwinkligen Parallelcoordinaten durch **Polarcoordinaten** ersetzt. Drücken wir die Zeit durch einen Winkel φ aus, welcher nach 24 Stunden den Werth 2π erreicht, und die augenblickliche Temperatur durch den Radius-Vector ϱ, so besteht zwischen diesen Grössen und dem der Quetelet'schen Theorie entsprechenden täglichen Wärmemittel r die Relation:

$$7)\qquad \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\varrho^2\, d\varphi = \pi r^2,$$

d. h. **das gesuchte Mittel ist gleich nach dem Radius eines Kreises, welcher mit der von der Temperaturcurve eingeschlossenen Fläche gleichen Inhalt besitzt.** Das Flächenelement ist hierbei, wie es sein soll, dem Quadrat der jedesmaligen Temperatur proportional, und der Ausdruck auf der rechten Seite ergiebt sich sofort, indem wir der Definition entsprechend, welche wir weiter oben von dem Mittel überhaupt aufgestellt haben, die Veränderliche ϱ unter dem Integralzeichen durch eine Constante r ersetzen. Es lässt sich ohne Schwierigkeit erkennen, dass der Mittelwerth, um welchen es sich hier handelt, stets grösser ausfallen muss, als das sonst übliche arithmetische Mittel.

Nehmen wir mit Kämtz*) die den täglichen Gang der Wärme darstellende Gleichung von der Form

$$8)\qquad \varrho = \vartheta + u_1 \sin(\varphi + v_1) + u_2 \sin(2\varphi + v_2) + u_3 \sin(3\varphi + v_3)$$

an, so ist

$$9)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varrho\, d\varphi = \vartheta$$

die mittlere Temperatur des Tages im gewöhnlichen Sinne, dasjenige Wärmemittel aber, von welchen Gebrauch zu machen ist, wenn man Quetelet's Hypothese adoptirt,

$$9)\qquad r = \sqrt{\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots)},$$

wie man unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(n\varphi + v_n)\, d\varphi = \frac{1}{2n\pi}\int_{v_n}^{2n\pi + v_n} \sin^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2m+1}(n\varphi + v_n)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^{2m+1}(n\varphi + v_n)\, d\varphi = 0$$

$$2\sin(m\varphi + v_m)\sin(n\varphi + v_n) = \cos\{(m-n)\varphi + v_m - v_n\} - \cos\{(m+n)\varphi + v_m + v_n\}$$

leicht findet. Der Unterschied zwischen beiden Mittelwerthen würde nur dann zu vernachlässigen sein, wenn im Laufe des Tages zufällig keine merklichen Temperaturschwankungen vorgekommen wären. Es ist einleuchtend, dass unter solchen Umständen auch eine an sich sehr wenig Genauigkeit darbietende Methode — gleichviel welcher Art das festzustellende Mittel sein mag — Resultate liefern wird, die sich nur wenig von der Wahrheit entfernen können. Es will daher nicht viel sagen, wenn Meyen**) zu Gunsten des Verfahrens, nach welchem man das arithmetische Mittel der höchsten und niedrigsten Temperatur als die mittlere Temperatur des Tages ansieht, die Uebereinstimmung des so erhaltenen Resultats mit dem aus stündlichen Aufzeichnungen abgeleiteten geltend macht, da die höchste von ihm beobachtete Temperatur 22,3 und die niedrigste 21,1 Grad Réaumur, der Unterschied also nicht viel mehr als einen Grad betrug.

---

*) Grundriss der Pflanzengeographie, S. 14.

**) Lehrbuch der Meteorologie, Bd. I. S. 66.

Es dürfte nicht schwer sein, einen Apparat zu construiren, welcher die oben erwähnte, auf Polarcoordinaten basirte Temperaturcurve selbst zeichnet; durch eines der unter dem Namen Planimeter bekannten Instrumente könnte dann der eingeschlossene Flächenraum leicht gefunden und daraus das fragliche Wärmemittel leicht gefunden werden. Bekanntlich begnügt man sich in der Regel, das Thermometer zu gewissen Tagesstunden zu beobachten und daraus mit Hilfe einer empirischen Formel das tägliche Wärmemittel abzuleiten. Denken wir uns nun den Ursprung der gewählten Polarcoordinaten als Mittelpunkt, mit den Radien r und ϑ zwei concentrische Kreise umschrieben, so liegt auf der Hand, dass wegen

$$r > \vartheta$$

der erstere Kreis die Temperaturcurve in zwei Punkten schneiden wird, welche dem Maximum der täglichen Temperaturen näher liegen, als die Durchschnittspunkte derselben Temperaturcurve und des dem gewöhnlichen arithmetischen Mittel entsprechenden zweiten Kreises. Es scheint das Einfachste zu sein, dass man sich täglich auf zwei Beobachtungen beschränkt und dieselben zu denjenigen Zeitpunkten anstellt, wo durchschnittlich die augenblickliche Temperatur mit dem gesuchten Wärmemittel übereinstimmt; zu diesem Behufe würden die beiden entsprechenden Werthe von φ aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\vartheta + u_1 \sin(\varphi + v_1) + u_2 \sin(2\varphi + v_2) + \dots \\ = \sqrt{\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \dots)}\end{aligned}$$

zu bestimmen sein. Gewöhnlich verfährt man indess nicht in dieser Weise, weil die Constanten $u_1, u_2, \dots v_1, v_2, \dots$ mit den Jahreszeiten veränderlich sind und sich daher wechselnden Beobachtungsstunden ergeben würden; jedenfalls aber darf der hervorgehobene Umstand bei der Wahl dieser Beobachtungsstunden nicht unberücksichtigt bleiben, wenn wir zur Prüfung der Quetelet'schen Hypothesen Thermometerbeobachtungen anstellen und dabei die grösstmögliche Genauigkeit erzielen wollen.

Sehr häufig wird die Berechnung eines Mittels angestellt, um einen ungefähren Anhaltspunkt zur Schätzung desjenigen numerischen Werthes zu gewinnen, welcher eine gewisse veränderliche Grösse in Zukunft wahrscheinlich annehmen wird. Hierbei ist die Wahl der verflossenen Periode von Wichtigkeit. Ein derartiger Schluss von der Vergangenheit auf die Zukunft ist offenbar nur dann gerechtfertigt, wenn sich die auf die fragliche Grösse einfliessenden Momente in der Zwischenzeit nicht wesentlich geändert haben. Diese Bedingung wird selten erfüllt sein, wenn wir sehr weit in die Vergangenheit zurückgreifen; so ist z. B. wenig Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden, dass die Bevölkerung der Erde in 206 Jahren auf 2400 Millionen angewachsen sein werde, wie aus der weiter oben gefundenen Periode der Verdoppelung allerdings folgen würde. Bei der Wahl eines zu kurzen Zeitraumes dagegen können wir nicht darauf rechnen, dass sich vorübergehende zufällige Erscheinungen gegenseitig aufheben und das gesuchte Mittel deutlich genug hervortreten lassen. Der erwähnte Gebrauch der Mittelwerthe ist ferner überall unstatthaft, wo sich in den Variationen der fraglichen Grösse eine fortschreitende Bewegung kund giebt.

Handelt es sich um die Constanten einer sogenannten empirischen Formel, so können ihre der Erfahrung entlehnten Mittelwerthe nur innerhalb der Grenzen dieser Erfahrung mit einiger Sicherheit angewendet werden. Es ist daher sehr wenig gerechtfertigt, wenn man aus dem Umstande, dass die Temperatur des Bodens — so weit unsere Beobachtungen reichen — nahezu der Tiefe proportional wächst, einen Schluss auf die weiter im Inneren oder wohl gar im Mittelpunkt der Erdkugel herrschende Temperatur zu ziehen wagt. Bezeichnen wir die veränderliche Tiefe unter der Oberfläche durch x, so wird die entsprechende Temperatur T allerdings eine Function von x sein, und wir haben, die Anwendung des Maclaurin'schen Satzes auf diesen Fall vorausgesetzt,

$$T = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0) + \dots$$

In sehr wenigen Fällen ist bei derartigen Beobachtungen eine Tiefe von 2000 Fuss erreicht worden; meistentheils war, wenn wir den Erdhalbmesser als Längeneinheit wählen,

$$x < \frac{1}{10000}, \quad x^2 < \frac{1}{100'000000}, \quad x^3 < \frac{1}{1''000000'000000} \quad \text{u. s. f.}$$

Unter solchen Umständen kann es nicht Wunder nehmen, dass bei den bisherigen, auf diesen Gegenstand gerichteten Untersuchungen das dritte und die späteren Glieder der obigen Reihe nicht merklich hervorgetreten sind; es folgt aber hieraus in keiner Weise, dass dasselbe auch noch für $x = 1$ stattfinden werde. Die Beobachtung lehrt uns eben nur die ungefähren Zahlenwerthe kennen, welche die Grössen $f(0)$ und $f'(0)$ bei den zu Grunde gelegten Einheiten annehmen; im Uebrigen bleibt uns die Form der fraglichen Function völlig unbekannt, und die Temperatur im Mittelpunkt der Erde kann noch jede beliebige sein.

IV.

Ueber einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen.

Von Dr. A. Enneper,
Docent an der Universität Göttingen.

Sind x, y, z die orthogonalen Coordinaten eines Punktes einer Fläche, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist, so kann diese Gleichung als Resultat der Elimination von u und v zwischen den Gleichungen:

$$1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \varphi_1(u, v), \quad z = \varphi_2(u, v)$$

angesehen werden. Legt man v in den Gleichungen 1) einen bestimmten Werth bei, so repräsentiren diese Gleichungen eine Curve. Nimmt man in den Gleichungen 1) v als einen variabeln Parameter, so entspricht jedem bestimmten Werthe von v eine Curve, lässt man v variiren, so erhält man ein System von Curven, die sämmtlich auf der Fläche $F(x, y, z) = 0$ liegen. Ebenso erhält man ein zweites Curvensystem auf der Fläche, wenn in den Gleichungen 1) zuerst u als variabeler Parameter genommen wird. Mittelst der Gleichungen 1) wird also ein Punkt einer Fläche als Durchschnitt zweier Curven definirt, die auf der Fläche liegen und welche zwei Systemen angehören, die durch $v =$ Const. und $u =$ Const. gegeben sind.

Ist ∂s der allgemeine Ausdruck des Bogenelements einer Curve auf einer Fläche, so hat man:

$$\partial s^2 = E\,\partial u^2 + 2F\,\partial u\,\partial v + G\,\partial v^2,$$

wo:

$$2) \qquad \begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Von den drei Quantitäten E, G, F sind die beiden ersten immer positiv, während F, durch passende Wahl der beiden unabhängigen Veränderlichen u und v, verschwinden kann, was offenbar stattfindet, wenn die beiden Curvensysteme $u = $ Const. und $v = $ Const. sich in jedem Punkte der Fläche orthogonal schneiden.

Für die Cosinus der Winkel a, b, c, welche die Normale im Punkte (x, y, z) mit den Achsen der x, y und z bildet, hat man folgende Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} \cos a = \dfrac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} = \dfrac{X}{\sqrt{(EG-F^2)}}, \\ \cos b = \dfrac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} = \dfrac{Y}{\sqrt{(EG-F^2)}}, \\ \cos c = \dfrac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} = \dfrac{Z}{\sqrt{(EG-F^2)}}, \end{cases}$$

wo X, Y und Z folgende Bedeutung haben:

$$4)\quad X = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},\quad Y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},\quad Z = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Mit Rücksicht auf die vorstehenden Werthe von X, Y und Z geben die Gleichungen 3)

$$5)\quad \begin{cases} \cos a \dfrac{\partial x}{\partial u} + \cos b \dfrac{\partial y}{\partial u} + \cos c \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ \cos a \dfrac{\partial x}{\partial v} + \cos b \dfrac{\partial y}{\partial v} + \cos c \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der folgenden Entwickelungen werde gesetzt:

$$6)\quad \begin{cases} A = X\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ B = X\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} + Y\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + Z\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ C = X\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + Y\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + Z\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Durch Differentiation der Gleichungen 4) nach u und v folgt:

$$
6')\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \cos a}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \cos b}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \cos c}{\partial u}=-A(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}},\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \cos a}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \cos b}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \cos c}{\partial u}=-C(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}},\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \cos a}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \cos b}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \cos c}{\partial v}=-C(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}},\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \cos a}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \cos b}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \cos c}{\partial v}=-B(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit:

$$
\cos a\frac{\partial \cos a}{\partial u}+\cos b\frac{\partial \cos b}{\partial u}+\cos c\frac{\partial \cos c}{\partial u}=0,
$$

$$
\cos a\frac{\partial \cos a}{\partial v}+\cos b\frac{\partial \cos b}{\partial v}+\cos c\frac{\partial \cos c}{\partial v}=0
$$

geben:

$$
7)\left\{\begin{aligned}
&(EG-F^2)\frac{\partial \cos a}{\partial u}=A\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial v}-\cos c\frac{\partial y}{\partial v}\right)-C\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial u}-\cos c\frac{\partial y}{\partial u}\right),\\
&(EG-F^2)\frac{\partial \cos b}{\partial u}=A\left(\cos c\frac{\partial x}{\partial v}-\cos a\frac{\partial z}{\partial v}\right)-C\left(\cos c\frac{\partial x}{\partial u}-\cos a\frac{\partial z}{\partial u}\right),\\
&(EG-F^2)\frac{\partial \cos c}{\partial u}=A\left(\cos a\frac{\partial y}{\partial v}-\cos b\frac{\partial x}{\partial v}\right)-C\left(\cos a\frac{\partial y}{\partial u}-\cos b\frac{\partial x}{\partial u}\right),\\
&(EG-F^2)\frac{\partial \cos a}{\partial v}=C\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial v}-\cos c\frac{\partial y}{\partial v}\right)-B\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial u}-\cos c\frac{\partial y}{\partial u}\right),\\
&(EG-F^2)\frac{\partial \cos b}{\partial v}=C\left(\cos c\frac{\partial x}{\partial v}-\cos a\frac{\partial z}{\partial v}\right)-B\left(\cos c\frac{\partial x}{\partial u}-\cos a\frac{\partial z}{\partial u}\right),\\
&(EG-F^2)\frac{\partial \cos c}{\partial v}=C\left(\cos a\frac{\partial y}{\partial v}-\cos b\frac{\partial x}{\partial v}\right)-B\left(\cos a\frac{\partial y}{\partial u}-\cos b\frac{\partial x}{\partial u}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Diese Gleichungen lassen sich durch Einführung der Hauptkrümmungshalbmesser und der Winkel, welche die Tangenten zu den beiden Hauptschnitten mit den Coordinatenachsen bilden, noch bedeutend vereinfachen, wie weiter unten gezeigt werden soll.

Aus den Gleichungen 7) leitet man leicht die drei folgenden ab:

$$
8)\quad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \cos a}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \cos b}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \cos c}{\partial u}\right)^2=\frac{A^2G+C^2E-2ACF}{(EG-F^2)^2},\\
&\left(\frac{\partial \cos a}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial \cos b}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial \cos c}{\partial v}\right)^2=\frac{B^2E+C^2G-2BCF}{(EG-F^2)^2},\\
&\frac{\partial \cos a}{\partial u}\frac{\partial \cos a}{\partial v}+\frac{\partial \cos b}{\partial u}\frac{\partial \cos b}{\partial v}+\frac{\partial \cos c}{\partial u}\frac{\partial \cos c}{\partial v}=\frac{C(AG+BE)-(AB+C^2)F}{(EG-F^2)^2}.
\end{aligned}
$$

II.

Geht die Ebene

$$
(\xi-x)\cos\alpha+(\eta-y)\cos\beta+(\zeta-z)\cos\gamma=0
$$

durch die Normale:

$$\frac{\xi - x}{\cos a} = \frac{\eta - y}{\cos b} = \frac{\zeta - z}{\cos c},$$

so ist:

$$10)\ \begin{cases} \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma = 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial u}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial u}\cos\gamma\right)\partial u \\ \qquad + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial v}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial v}\cos\gamma\right)\partial v = 0. \end{cases}$$

Ist ϱ der Krümmungshalbmesser einer Curve doppelter Krümmung im Punkte (x, y, z), so hat man:

$$11)\ \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} - \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 z}{\partial w^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}\right)^2}{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right\}^3},$$

wenn x, y und z als Functionen einer Variabeln w angesehen werden. Um den Krümmungshalbmesser der Schnittcurve der Ebene 9) mit einer Fläche im Punkte (x, y, z) zu finden, kann man eine der Variabeln u und v als Function der anderen, oder besser, beide als Functionen einer dritten Variabeln w ansehen. In der letzeren Voraussetzung giebt die zweite der Gleichungen 10)

$$\frac{\partial u}{\partial w} = -g\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial v}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial v}\cos\gamma\right\},$$
$$\frac{\partial v}{\partial w} = g\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial u}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial u}\cos\gamma\right\},$$

oder

$$12)\qquad \frac{\partial u}{\partial w} = -gQ,\ \frac{\partial v}{\partial w} = gP,$$

wo g eine Unbestimmte bedeutet, und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$13)\ \begin{cases} P = \frac{\partial x}{\partial u}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial u}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial u}\cos\gamma, \\ Q = \frac{\partial x}{\partial v}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial v}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial v}\cos\gamma. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 12) folgt nun:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} = g\left(P\frac{\partial x}{\partial v} - Q\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

oder für P und Q ihre Werthe eingesetzt, mit Beachtung der Gleichungen 3) und 4):

$$\frac{\partial x}{\partial w} = g(\cos b \cos\gamma - \cos c \cos\beta)\sqrt{(EG - F^2)}.$$

Auf diese Art findet man die Gleichungen:

$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial w} = g\,(\cos b \cos\gamma - \cos c \cos\beta)\sqrt{(EG-F^2)}, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v} = g\,(\cos c \cos\alpha - \cos a \cos\gamma)\sqrt{(EG-F^2)}, \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial w} = g\,(\cos a \cos\beta - \cos b \cos\alpha)\sqrt{(EG-F^2)}, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 = g^2\,(EG-F^2).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial^2 z}{\partial w^2} - \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2}}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial^2 x}{\partial w^2} - \dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial^2 z}{\partial w^2}}{\cos\beta} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} - \dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial^2 x}{\partial w^2}}{\cos\gamma}$$

$$= g^2\,(EG-F^2)\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \cos a}{\partial w} & \dfrac{\partial \cos b}{\partial w} & \dfrac{\partial \cos c}{\partial w} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung 11) geht hierdurch über in:

$$\frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{\varrho} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} \dfrac{d \cos a}{\partial w} & \dfrac{\partial \cos b}{\partial w} & \dfrac{\partial \cos c}{\partial w} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} P\dfrac{\partial \cos a}{\partial v} - Q\dfrac{\partial \cos a}{\partial u}, & P\dfrac{\partial \cos b}{\partial v} - Q\dfrac{\partial \cos b}{\partial u}, & P\dfrac{\partial \cos c}{\partial v} - Q\dfrac{\partial \cos c}{\partial u} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\sqrt{(EG-F^2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix},$$

so folgt, wegen der Gleichungen 6')

$$\frac{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho} = \begin{vmatrix} -PC+QA & -PB+QC & 0 \\ P & Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

oder

$$15)\qquad \varrho = \frac{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}{AQ^2 - 2CPQ + BP^2}.$$

Aus den Gleichungen:

$$\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma = 0,$$
$$\cos a \frac{\partial x}{\partial u} + \cos b \frac{\partial y}{\partial u} + \cos c \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$\cos a \frac{\partial x}{\partial v} + \cos b \frac{\partial y}{\partial v} + \cos c \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

folgt:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung quadrirt, giebt:

$$\begin{vmatrix} 1 & P & Q \\ P & E & F \\ Q & F & G \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

16) $$EG - F^2 = GP^2 + EQ^2 - 2FPQ.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und $\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma = 0$ kann man zwei der Quantitäten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die dritte ausdrücken, so dass in ϱ nur noch ein arbiträrer Winkel enthalten ist. Um die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ zu finden, für welche ϱ ein Maximum oder Minimum wird, kann man in den Gleichungen 15) und 16) P und Q statt der Winkel α, β, γ als Variabele nehmen. Differentiirt man unter dieser Voraussetzung die bemerkten Gleichungen und setzt $\partial \varrho = 0$, so folgt:

$$(AQ - CP)\,\partial Q + (BP - CQ)\,\partial P = 0,$$
$$(EQ - FP)\,\partial Q + (GP - FQ)\,\partial P = 0,$$

also:

17) $$\frac{AQ - CP}{EQ - FP} = \frac{BP - CQ}{GP - FQ}$$

oder, wenn g eine Unbestimmte bedeutet:

18) $$\begin{cases} AQ - CP = g\,(EQ - FP), \\ BP - CQ = g\,(GP - FQ), \end{cases}$$

Diese Gleichungen, respective mit Q, P multiplicirt und addirt, geben:

$$AQ^2 - 2CPQ + BP^2 = g\,(GP^2 - 2FPQ + EQ^2)$$

oder wegen 15) und 16)

$$\frac{\sqrt{(EG - F^2)}}{\varrho} = g.$$

Substituirt man diesen Werth von g in die Gleichungen 18), so folgt durch Elimination von P und Q

$$\varrho^2 (AB - C^2) + \varrho\,(AG + BE - 2CF)\sqrt{(EG - F^2)} + (EG - F^2)^2 = 0.$$

Durch diese Gleichung ist das Maximum und Minimum des Krümmungshalbmessers einer Fläche im Punkte (x, y, z) bestimmt, oder, nach der gewöhnlichen Redeweise, die beiden Hauptkrümmungshalbmesser.

Bezeichnet man ihre Werthe durch r' und r'', so hat man für dieselben die Gleichungen:

$$19)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{r''}=\dfrac{AG+BE-2CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{1}{r'r''}=\dfrac{AB-C^2}{(EG-F^2)^2}. \end{cases}$$

III.

Das System der Gleichungen 16), 17) und $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ giebt für jede der Quantitäten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die Richtungen der Tangenten zweier Normalschnitte, der sogenannten Hauptschnitte, im Punkte (x, y, z) einer Fläche bestimmen. Die Krümmungshalbmesser dieser Hauptschnitte sind r' und r''. Seien nun $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$ die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, welche dem Normalschnitt mit dem Krümmungshalbmesser r' entsprechen, und $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$ die analogen Werthe für r''.

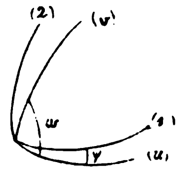
Man setze, analog wie in 13).

$$20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cos a'+\frac{\partial y}{\partial u}\cos b'+\frac{\partial z}{\partial u}\cos c'=P',\quad \frac{\partial x}{\partial u}\cos a''+\frac{\partial y}{\partial u}\cos b''+\frac{\partial z}{\partial u}\cos c''=P'',$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\cos a'+\frac{\partial y}{\partial v}\cos b'+\frac{\partial z}{\partial v}\cos c'=Q',\quad \frac{\partial x}{\partial v}\cos a''+\frac{\partial y}{\partial v}\cos b''+\frac{\partial z}{\partial v}\cos c''=Q''.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte (x, y, z) der Fläche zur Curve (u) mit den Achsen bildet, sind:



$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Für die Curve (v) hat man die entsprechenden Grössen:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Bezeichnet man durch ω den Winkel, welchen die Curven (u) und (v) mit einander bilden, so ist:

$$21)\qquad \cos\omega=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Ist ferner ψ der Winkel, welchen die Curve (u) und der Hauptschnitt mit dem Krümmungshalbmesser r' mit einander bilden, so folgt:

$$\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\cos a'\frac{\partial x}{\partial u}+\cos b'\frac{\partial y}{\partial u}+\cos c'\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{P'}{\sqrt{E}}.$$

Für P', P'', Q' und Q'' ergeben sich die folgenden einfachen Werthe:

$$22)\qquad \begin{cases} P'=\cos\psi\sqrt{E}, & Q'=\cos(\omega-\psi)\sqrt{G}, \\ P''=-\sin\psi\sqrt{E}, & Q''=\sin(\omega-\varphi)\sqrt{G}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$23)\quad E = P'^2 + P''^2,\quad G = Q'^2 + Q''^2,\quad F = P'Q' + P''Q''.$$

Statt der ersten der Gleichungen 10) hat man die beiden folgenden:

$$\cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c' = 0,$$
$$\cos a \cos a'' + \cos b \cos b'' + \cos c \cos c'' = 0.$$

Diese Gleichungen mit

$$\cos a \frac{\partial x}{\partial u} + \cos b \frac{\partial y}{\partial u} + \cos c \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$\cos a \frac{\partial x}{\partial v} + \cos b \frac{\partial y}{\partial v} + \cos c \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

geben:

$$\begin{vmatrix} \cos a' & \cos b' & \cos c' \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} \cos a'' & \cos b'' & \cos c'' \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man das Product der vorstehenden Gleichungen bildet:

$$\begin{vmatrix} \cos a' \cos a'' + \cos b' \cos b'' + \cos c' \cos c'' & P' & Q' \\ P'' & E & F \\ Q'' & F & G \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun wegen der Gleichungen 22)

$$E Q' Q'' + G P' P'' - F(P'Q'' + P''Q') = 0,$$

so folgt:

$$\cos a' \cos a'' + \cos b' \cos b'' + \cos c' \cos c'' = 0.$$

Die Determinanten A, B, und C, bestimmt durch die Gleichungen 6), lassen sich sehr einfach in Function von r', r'', P', P'', Q' und Q'' darstellen. Setzt man in den Gleichungen 18) successive

$$\frac{\sqrt{(EG - F^2)}}{r'}\ \frac{\sqrt{(EG - F^2)}}{r''}$$

statt g und P', Q'; P'', Q'' statt P, Q, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$AQ' - CP' = \frac{1}{r'}(EQ' - FP')\sqrt{(EG - F^2)},\quad BP' - CQ' = \frac{1}{r'}(GP' - FP')\sqrt{(EG - F^2)},$$
$$AQ'' - CP'' = \frac{1}{r''}(EQ'' - FP'')\sqrt{(EG - F^2)},\quad BP'' - CQ'' = \frac{1}{r''}(GP'' - FP'')\sqrt{(EG - F^2)},$$

oder wegen der Gleichungen 23):

$$\frac{AQ' - CP'}{P'Q'' - P''Q'} = -\frac{P''}{r'}\sqrt{(EG - F^2)},\qquad \frac{BP' - CQ'}{P'Q'' - P''Q'} = \frac{Q''}{r'}\sqrt{(EG - F^2)},$$
$$\frac{AQ'' - CP''}{P'Q'' - P''Q'} = \frac{P'}{r''}\sqrt{(EG - F^2)},\qquad \frac{BP'' - CQ''}{P'Q'' - P''Q'} = -\frac{Q'}{r''}\sqrt{(EG - F^2)}.$$

Hieraus ergeben sich für A, B, C folgende Werthe:

$$
24)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{A}{\sqrt{(EG-F^2)}} &= \frac{P'^2}{r''} + \frac{P''^2}{r'},\\
\frac{B}{\sqrt{(EG-F^2)}} &= \frac{Q'^2}{r''} + \frac{Q''^2}{r'},\\
\frac{C}{\sqrt{(EG-F^2)}} &= \frac{P'Q'}{r''} + \frac{P''Q''}{r'}.
\end{aligned}\right.
$$

IV.

Aus den Gleichungen:

$$
\begin{gathered}
\cos a'\frac{\partial x}{\partial u} + \cos b'\frac{\partial y}{\partial u} + \cos c'\frac{\partial z}{\partial u} = P',\\
\cos a'\frac{\partial x}{\partial v} + \cos b'\frac{\partial y}{\partial v} + \cos c'\frac{\partial z}{\partial v} = Q',\\
\cos a' \cos a + \cos b' \cos b + \cos c' \cos c = 0,\\
\cos a''\frac{\partial x}{\partial u} + \cos b''\frac{\partial y}{\partial u} + \cos c''\frac{\partial z}{\partial u} = P'',\\
\cos a''\frac{\partial x}{\partial v} + \cos b''\frac{\partial y}{\partial v} + \cos c''\frac{\partial z}{\partial v} = Q'',\\
\cos a'' \cos a + \cos b'' \cos b + \cos c'' \cos c = 0
\end{gathered}
$$

findet man für $\cos a'$ und $\cos a''$ folgende Werthe:

$$
25)\qquad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{(EG-F^2)}\cos a' &= -P'\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial v} - \cos c\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\
&\quad + Q'\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial u} - \cos c\frac{\partial y}{\partial u}\right),\\
\sqrt{(EG-F^2)}\cos a'' &= -P''\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial v} - \cos c\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\
&\quad + Q''\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial u} - \cos c\frac{\partial y}{\partial u}\right),
\end{aligned}\right.
$$

Durch Substitution der Werthe von A, B, C aus 24) nimmt die erste der Gleichungen 10) folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(EG-F^2)}\frac{\partial \cos a}{\partial u} = \frac{P'}{r''}\Big\{ & P'\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial v} - \cos c\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\
& - Q'\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial u} - \cos c\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Big\},\\
+ \frac{P''}{r'}\Big\{ & P''\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial v} - \cos c\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\
& - Q''\left(\cos b\frac{\partial z}{\partial u} - \cos c\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Big\},
\end{aligned}
$$

oder wegen 25):

$$
\frac{\partial \cos a}{\partial u} = -\frac{P'}{r''}\cos a' - \frac{P''}{r'}\cos a''.
$$

Analog wie die vorstehende Gleichung erhält man statt der Gleichungen 7) das folgende einfache System:

$$26)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \cos a}{\partial u} &= -\frac{P'}{r''}\cos a' - \frac{P''}{r'}\cos a'', & \frac{\partial \cos a}{\partial v} &= -\frac{Q'}{r''}\cos a' - \frac{Q''}{r'}\cos a'',\\
\frac{\partial \cos b}{\partial u} &= -\frac{P'}{r''}\cos b' - \frac{P''}{r'}\cos b'', & \frac{\partial \cos b}{\partial v} &= -\frac{Q'}{r''}\cos b' - \frac{Q''}{r'}\cos b'',\\
\frac{\partial \cos c}{\partial u} &= -\frac{P'}{r''}\cos c' - \frac{P''}{r'}\cos c'', & \frac{\partial \cos c}{\partial v} &= -\frac{Q'}{r''}\cos c' - \frac{Q''}{r'}\cos c''.
\end{aligned}\right.$$

Um die Differentialquotienten von $\cos a'$, $\cos a''$ ... nach u und v zu finden, setze man:

$$27)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos a''\frac{\partial \cos a'}{\partial u} + \cos b''\frac{\partial \cos b'}{\partial u} + \cos c''\frac{\partial \cos c'}{\partial u} &= M,\\
\cos a'\frac{\partial \cos a''}{\partial v} + \cos b'\frac{\partial \cos b''}{\partial v} + \cos c'\frac{\partial \cos c''}{\partial v} &= N.
\end{aligned}\right.$$

Differentiirt man die Gleichungen:

$$28)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c' &= 1,\\
\cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c' &= 0,\\
\cos a'' \cos a' + \cos b'' \cos b' + \cos c'' \cos c' &= 0,\\
\cos^2 a'' + \cos^2 b'' + \cos^2 c'' &= 1,\\
\cos a \cos a'' + \cos b \cos b'' + \cos c \cos c'' &= 0,\\
\cos a' \cos a'' + \cos b' \cos b'' + \cos c' \cos c'' &= 0
\end{aligned}\right.$$

nach u und v, so findet man mit Hilfe der Gleichungen 26) und 27):

$$29)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos a'\frac{\partial \cos a'}{\partial u} + \cos b'\frac{\partial \cos b'}{\partial u} + \cos c'\frac{\partial \cos c'}{\partial u} &= 0,\\
\cos a\frac{\partial \cos a'}{\partial u} + \cos b\frac{\partial \cos b'}{\partial u} + \cos c\frac{\partial \cos c'}{\partial u} &= \frac{P'}{r''},\\
\cos a''\frac{\partial \cos a'}{\partial u} + \cos b''\frac{\partial \cos b'}{\partial u} + \cos c''\frac{\partial \cos c'}{\partial u} &= M,\\
\cos a''\frac{\partial \cos a''}{\partial u} + \cos b''\frac{\partial \cos b''}{\partial u} + \cos c''\frac{\partial \cos c''}{\partial u} &= 0,\\
\cos a\frac{\partial \cos a''}{\partial u} + \cos b\frac{\partial \cos b''}{\partial u} + \cos c\frac{\partial \cos c''}{\partial u} &= \frac{P''}{r'},\\
\cos a'\frac{\partial \cos a''}{\partial u} + \cos b'\frac{\partial \cos b''}{\partial u} + \cos c'\frac{\partial \cos c''}{\partial u} &= -M,\\
\cos a'\frac{\partial \cos a'}{\partial v} + \cos b'\frac{\partial \cos b'}{\partial v} + \cos c'\frac{\partial \cos c'}{\partial v} &= 0,\\
\cos a\frac{\partial \cos a'}{\partial v} + \cos b\frac{\partial \cos b'}{\partial v} + \cos c\frac{\partial \cos c'}{\partial v} &= \frac{Q'}{r''},\\
\cos a''\frac{\partial \cos a'}{\partial v} + \cos b''\frac{\partial \cos b'}{\partial v} + \cos c''\frac{\partial \cos c'}{\partial v} &= -N,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\cos a''\frac{\partial\cos a''}{\partial v}+\cos b''\frac{\partial\cos b''}{\partial v}+\cos c''\frac{\partial\cos c''}{\partial v}=0,\\
&\cos a\frac{\partial\cos a''}{\partial v}+\cos b\frac{\partial\cos b''}{\partial v}+\cos c\frac{\partial\cos c''}{\partial v}=\frac{Q''}{r'},\\
&\cos a'\frac{\partial\cos a''}{\partial v}+\cos b'\frac{\partial\cos b''}{\partial v}+\cos c'\frac{\partial\cos c''}{\partial v}=N.
\end{aligned}\right.$$

Da $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1$, so geben die Gleichungen 28) bekanntlich die folgenden:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 a+\cos^2 a'+\cos^2 a''=1, &&\cos a\cos b+\cos a'\cos b'+\cos a''\cos b''=0,\\
&\cos^2 b+\cos^2 b'+\cos^2 b''=1, &&\cos a\cos c+\cos a'\cos c'+\cos a''\cos c''=0,\\
&\cos^2 c+\cos^2 c'+\cos^2 c''=1, &&\cos b\cos c+\cos b'\cos c'+\cos b''\cos c''=0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gestatten aus 29) unmittelbar die Werthe der Differentialquotienten von $\cos a'$, $\cos a''$ ... nach u und v zu finden, nämlich:

$$30)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\cos a'}{\partial u}=\frac{P'}{r''}\cos a+M\cos a'', &&\frac{\partial\cos a'}{\partial v}=\frac{Q'}{r''}\cos a-N\cos a'',\\
&\frac{\partial\cos b'}{\partial u}=\frac{P'}{r''}\cos b+M\cos b'', &&\frac{\partial\cos b'}{\partial v}=\frac{Q'}{r''}\cos b-N\cos b'',\\
&\frac{\partial\cos c'}{\partial n}=\frac{P'}{r''}\cos c+M\cos c'', &&\frac{\partial\cos c'}{\partial v}=\frac{Q'}{r''}\cos c-N\cos c'',\\
&\frac{\partial\cos a''}{\partial u}=\frac{P''}{r'}\cos a-M\cos a', &&\frac{\partial\cos a''}{\partial v}=\frac{Q''}{r'}\cos a+N\cos a',\\
&\frac{\partial\cos b''}{\partial u}=\frac{P''}{r'}\cos b-M\cos b', &&\frac{\partial\cos b''}{\partial v}=\frac{Q''}{r'}\cos b+N\cos b',\\
&\frac{\partial\cos c''}{\partial u}=\frac{P''}{r'}\cos c-M\cos c', &&\frac{\partial\cos c''}{\partial v}=\frac{Q''}{r'}\cos c+N\cos c'.
\end{aligned}\right.$$

Differentiirt man in den Gleichungen 20) P' und P'' nach v, Q' und Q'' nach u, so folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q'}{\partial u}-\frac{\partial P'}{\partial v}&=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\cos a'}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial\cos b'}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\cos c'}{\partial u}\\
&-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\cos a'}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial\cos b'}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\cos c'}{\partial v}\right),\\
\frac{\partial Q''}{\partial u}-\frac{\partial P''}{\partial v}&=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\cos a''}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial\cos b''}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\cos c''}{\partial u}\\
&-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\cos a''}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial\cos b''}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\cos c''}{\partial v}\right)
\end{aligned}$$

oder, wegen der Gleichungen 30):

$$31)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial Q'}{\partial u}-\frac{\partial P'}{\partial v}=MQ''+NP'',\\
&\frac{\partial Q''}{\partial u}-\frac{\partial P''}{\partial v}=-MQ'-NP'.
\end{aligned}\right.$$

Durch diese Gleichungen sind M und N bestimmt. Aus den Gleichungen 26) und 30) folgt:

$$\frac{\partial^2 \cos a}{\partial u \partial v} = \left(\frac{P'Q'}{r''^2} + \frac{P''Q''}{r'^2}\right)\cos a + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{P'}{r''} + \frac{P''}{r'}N\right)\cos a' + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{P''}{r'} - \frac{P'}{r''}N\right)\cos a''$$
$$= \left(\frac{P'Q'}{r''^2} + \frac{P''Q''}{r'^2}\right)\cos a + \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q'}{r''} - \frac{Q''}{r'}M\right)\cos a' + \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q''}{r'} + \frac{Q'}{r''}M\right)\cos a''.$$

Da die Factoren von $\cos a$, $\cos a'$, $\cos a''$ in den vorstehenden Gleichungen einander gleich sein müssen, so hat man:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q'}{r''} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{P'}{r''} = \frac{1}{r'}(Q''M + P''N),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q''}{r'} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{P''}{r'} = \frac{1}{r''}(Q'M + P'N),$$

oder nach 31)

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q'}{r''} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{P'}{r''} = \frac{1}{r'}\left(\frac{\partial Q'}{\partial u} - \frac{\partial P'}{\partial v}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q''}{r'} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{P''}{r'} = \frac{1}{r''}\left(\frac{\partial Q''}{\partial u} - \frac{\partial P''}{\partial v}\right),$$

d. h.

$$32)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right)\left(\frac{\partial Q'}{\partial u} - \frac{\partial P'}{\partial v}\right) = \frac{1}{r''^2}\left(Q'\frac{\partial r''}{\partial u} - P'\frac{\partial r''}{\partial v}\right),\\ &\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\left(\frac{\partial Q''}{\partial u} - \frac{\partial P''}{\partial v}\right) = \frac{1}{r'^2}\left(Q''\frac{\partial r'}{\partial u} - P''\frac{\partial r'}{\partial v}\right).\end{aligned}\right.$$

Aus den Gleichungen 30) folgt:

$$\frac{\partial^2 \cos a'}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{P'}{r''} + \frac{MQ''}{r'}\right)\cos a + \left(MN - \frac{P'Q'}{r''^2}\right)\cos a' + \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{P'Q''}{r'r''}\right)\cos a'',$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q'}{r''} + \frac{NP''}{r'}\right)\cos a + \left(MN - \frac{P'Q'}{r''^2}\right)\cos a' - \left(\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{P''Q'}{r'r''}\right)\cos a'',$$

also

$$33)\quad \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{P'Q'' - P''Q'}{r'r''}.$$

Diese Gleichung enthält, in etwas verschiedener Form, den von **Gauss** gegebenen Ausdruck von $r'r''$ in Function der Differentialquotienten von E, F, G nach u und v. Aus den Gleichungen 31) findet man nämlich:

$$M(P'Q'' - P''Q') = P'\frac{\partial Q'}{\partial u} + P''\frac{\partial Q''}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(P'^2 + P''^2),$$
$$N(P'Q'' - P''Q') = Q'\frac{\partial P'}{\partial v} + Q''\frac{\partial P''}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(Q'^2 + Q''^2).$$

Mittelst der Gleichungen 22) gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$M\sqrt{(EG-F^2)}=-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.\cos w-\sqrt{EG}.\sin w\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\right),$$

$$N\sqrt{(EG-F^2)}=-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.\cos w-\sqrt{EG}.\sin w\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

oder da:

$$\cos w=\frac{F}{\sqrt{EG}},\quad \sin w.\sqrt{EG}=\sqrt{(EG-F^2)},$$

$$M=\tfrac{1}{2}\frac{F\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial v}}{G\sqrt{(EG-F^2)}}+\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{EG}}+\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$N=\tfrac{1}{2}\frac{F\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial u}}{E\sqrt{(EG-F^2)}}-\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Die Gleichung 33) wird hierdurch:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{F\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial v}}{G\sqrt{(EG-F^2)}}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{F\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial u}}{E\sqrt{(EG-F^2)}}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{(EG-F^2)}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{r'r''}.$$

Durch Entwickelung erhält man hieraus die von Gauss aufgestellte Gleichung.

V.

Nimmt man auf einer Fläche ein besonderes System von Curven an, so wird eine der Variabeln u und v Function der anderen sein, oder man kann dieselben als Functionen einer dritten Variabeln w ansehen. Setzt man:

$$\frac{\partial u}{\partial w}=u',\quad \frac{\partial v}{\partial w}=v',$$

so ist die Bedingung, dass zwei successive Normalen in einer Ebene liegen:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial v}v' & \frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v}v' & \frac{\partial z}{\partial u}u'+\frac{\partial z}{\partial v}v'\\ X & Y & Z\\ \frac{\partial X}{\partial u}u'+\frac{\partial X}{\partial v}v' & \frac{\partial Y}{\partial u}u'+\frac{\partial Y}{\partial v}v' & \frac{\partial Z}{\partial u}u'+\frac{\partial Z}{\partial v}v'\end{vmatrix}=0,$$

wo X, Y, Z durch die Gleichungen 4) bestimmt sind. Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\sqrt{(EG-F^2)},$$

so folgt:

$$\left|\begin{array}{ccc} Eu'+Fv' & Fu'+Gv' & 0 \\ 0 & 0 & EG-F^2 \\ -Au'-Cv' & -Cu'-Bv' & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(EG-F^2)u'+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(EG-F^2)v' \end{array}\right| = 0,$$

d. h.

$$34)\qquad (Eu'+Fv')(Cu'+Bv') = (Fu'+Gv')(Au'+Cv').$$

Man findet dieses Resultat leicht, wenn man

$$\frac{\partial x}{\partial u}X+\frac{\partial y}{\partial u}Y+\frac{\partial z}{\partial u}Z=0$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial v}X+\frac{\partial y}{\partial v}Y+\frac{\partial z}{\partial v}Z=0$$

nach u und v differentiirt. Hierdurch erhält man:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u}=-\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)= \quad A,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}=-\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=-B,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}=-\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)=-C,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}=-\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)=-C.$$

Substituirt man in die Gleichung 34) für E, F, G, A, B, C ihre Werthe aus 23) und 24), so nimmt diese Gleichung folgende einfache Form an:

$$\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)(P'Q''-P''Q'\,\{P'P''u'^2+Q'Q''v'^2+(P'Q''+P''Q')u'v'\}=0$$

oder

$$P'P''u'^2+Q'Q''v'^2+(P'Q''+P''Q')u'v'=(P'u'+Q'v')(P''u'+Q''v')=0.$$

Damit also zwei successive Normalen in einer Ebene liegen, hat man die Bedingungen:

$$35)\qquad \left\{\begin{array}{l} P'u'+Q'v'=0,\\ P''u'+Q''v'=0, \end{array}\right.$$

d. h. zwei Differentialgleichungen, deren Integration die bekannten Krümmungslinien giebt. Nimmt man diese Krümmungslinien zu Systemen der Curven (u) und (v), so muss die Integration der Gleichungen 35) $u=$ Const. und $v=$ Const. geben, was offenbar nur dann stattfinden kann, wenn $P'=0$, $Q''=0$ oder $Q'=0$, $P''=0$. Eine dieser Annahmen folgt aus der anderen durch Vertauschung von u und v. Setzt man also $Q'=0$, $P''=0$ und einfach P, Q statt P', Q'', so hat man folgende Gleichungen:

36)

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cos a'+\frac{\partial y}{\partial u}\cos b'+\frac{\partial z}{\partial u}\cos c'=P,\quad \frac{\partial x}{\partial v}\cos a'+\frac{\partial y}{\partial v}\cos b'+\frac{\partial z}{\partial v}\cos c'=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cos a''+\frac{\partial y}{\partial u}\cos b''+\frac{\partial z}{\partial u}\cos c''=0,\quad \frac{\partial x}{\partial v}\cos a''+\frac{\partial y}{\partial v}\cos b''+\frac{\partial z}{\partial v}\cos c''=Q.$$

$$P^2 = E, \quad Q^2 = G, \quad F = 0,$$

$$37)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \cos a}{\partial u} = -\frac{P}{r''}\cos a', && \frac{\partial \cos a}{\partial v} = -\frac{Q}{r'}\cos a'', \\
&\frac{\partial \cos b}{\partial u} = -\frac{Q}{r''}\cos b', && \frac{\partial \cos b}{\partial v} = -\frac{Q}{r'}\cos b'', \\
&\frac{\partial \cos c}{\partial u} = -\frac{P}{r''}\cos b', && \frac{\partial \cos c}{\partial v} = -\frac{Q}{r'}\cos c''. \\
&\frac{\partial \cos a'}{\partial u} = \frac{P}{r''}\cos a + M\cos a'', && \frac{\partial \cos a'}{\partial v} = -N\cos a'', \\
&\frac{\partial \cos b'}{\partial u} = \frac{P}{r''}\cos b + M\cos b'', && \frac{\partial \cos b'}{\partial v} = -N\cos b'', \\
&\frac{\partial \cos c'}{\partial u} = \frac{P}{r''}\cos c + M\cos c'', && \frac{\partial \cos c'}{\partial v} = -N\cos c''. \\
&\frac{\partial \cos a''}{\partial u} = -M\cos a', && \frac{\partial \cos a''}{\partial v} = \frac{Q}{r'}\cos a + N\cos a', \\
&\frac{\partial \cos b''}{\partial u} = -M\cos b', && \frac{\partial \cos b''}{\partial v} = \frac{Q}{r'}\cos b + N\cos b', \\
&\frac{\partial \cos c''}{\partial u} = -M\cos c' && \frac{\partial \cos c''}{\partial v} = \frac{Q}{r'}\cos c + N\cos c'.
\end{aligned}\right.$$

$$38)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{P}{r''^2}\frac{\partial r''}{\partial v}, && \left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{Q}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial u}, \\
&\frac{\partial P}{\partial v} = -QM, && \frac{\partial Q}{\partial u} = -PN.
\end{aligned}\right.$$

$$39)\quad \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{PQ}{r'r''}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \frac{2\sqrt{EG}}{r'r''} = 0.$$

Aus den Gleichungen 36) und

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cos a + \frac{\partial y}{\partial u}\cos b + \frac{\partial z}{\partial u}\cos c = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v}\cos a + \frac{\partial y}{\partial v}\cos b + \frac{\partial z}{\partial v}\cos c = 0$$

erhält man

$$40)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = P\cos a', && \frac{\partial x}{\partial v} = Q\cos a'', \\
&\frac{\partial z}{\partial u} = P\cos b', && \frac{\partial y}{\partial u} = Q\cos b'', \\
&\frac{\partial z}{\partial u} = P\cos c', && \frac{\partial z}{\partial v} = Q\cos c'',
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichung 39) lässt sich durch Einführung der Bogenelemente der Krümmungslinien in eine sehr elegante Form bringen. Bezeichnet man die Bogenelemente der Krümmungslinien (u) und (v) respective durch $\partial s'$ und $\partial s''$, so hat man:

$$\partial s' = \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}} = \sqrt{E}\,\partial u = P\,\partial u,$$

$$\partial s'' = \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right\}} = \sqrt{G}\,\partial u = Q\,\partial v.$$

Die Gleichungen 38) werden hierdurch:

$$M = -\frac{\partial P}{\partial s''},\quad N = -\frac{\partial Q}{\partial s'},$$

$$\left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right)\frac{\partial \log P}{\partial s''} = -\frac{\partial}{\partial s''}\frac{1}{r''}\quad \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\frac{\partial \log Q}{\partial s'} = -\frac{\partial}{\partial s'}\frac{1}{r'}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial M}{\partial v} = Q\frac{\partial M}{\partial s''} = -Q\frac{\partial^2 P}{\partial s''^2} = -PQ\left\{\frac{\partial^2 \log P}{\partial s''^2} + \left(\frac{\partial \log P}{\partial s''}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = P\frac{\partial N}{\partial s'} = -P\frac{\partial^2 Q}{\partial s'^2} = -PQ\left\{\frac{\partial^2 \log Q}{\partial s'^2} + \left(\frac{\partial \log Q}{\partial s'}\right)^2\right\}.$$

Die Gleichung 39) geht hierdurch über in:

$$-\frac{\partial}{\partial s''}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial s''}\frac{1}{r''}}{\frac{1}{r''} - \frac{1}{r''}}\right\} + \frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial s'}\frac{1}{r'}}{\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}}\right\} + \left\{\frac{\frac{\partial}{\partial s''}\frac{1}{r'}}{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}}\right\}^2 + \left\{\frac{\frac{\partial}{\partial s'}\frac{1}{r'}}{\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}}\right\}^2 + \frac{1}{r'r''} = 0.$$

VI.

Denkt man sich von jedem Punkte einer Fläche aus einen der Hauptkrümmungshalbmesser auf der Normale abgetragen, so liegen die Endpunkte dieser Segmente auf zwei Flächen. Sind (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) die Punkte beider Flächen, welche dem Punkte (x, y, z) entsprechen, so sind diese Punkte durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$41)\qquad \begin{cases} x_1 = x + r' \cos a, & x_2 = x + r'' \cos a, \\ y_1 = y + r' \cos b, & y_2 = y + r'' \cos b, \\ z_1 = z + r' \cos c, & z_2 = z + r'' \cos c. \end{cases}$$

Haben u und v wieder dieselbe Bedeutung, wie in V., so ergeben sich mittelst der Gleichungen 37) leicht folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = P\left(1 - \frac{r'}{r''}\right)\cos a' + \frac{\partial r'}{\partial u}\cos a,\qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial r'}{\partial v}\cos a,$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u} = \left\{\frac{P}{r''}\left(1 - \frac{r'}{r''}\right) + \frac{\partial^2 r'}{\partial u^2}\right\} cs\, a + \left\{\frac{\partial}{\partial u}P\left(1 - \frac{r'}{r''}\right) - \frac{P}{r''}\frac{\partial r'}{\partial u}\right\} cs\, a' + PM\left(1 - \frac{r'}{r''}\right) cs\, a''$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = \qquad \frac{\partial^2 r'}{\partial v^2}\cos a \qquad\qquad - \frac{Q}{r'}\frac{\partial r'}{\partial v}\cos a''$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = \qquad \frac{\partial^2 r'}{\partial u\,\partial v}\cos a + \frac{P}{r''}\frac{\partial r'}{\partial v}\cos a'$$

Für $\frac{\partial y_1}{\partial u}$ .... erhält man durch Vertauschung von a mit b, c ganz analoge Gleichungen. Man setze:

$$A_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}\quad B_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial v}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}\quad C_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z_2}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Um die Werthe von A_1, B_1, C_1 auf einfache Art zu erhalten, multiplicire man dieselben mit

$$\varepsilon=\begin{vmatrix}\cos a & \cos b & \cos c\\ \cos a' & \cos b' & \cos c'\\ \cos a'' & \cos b'' & \cos c''\end{vmatrix},$$

wo $\varepsilon^2=1$, also $\varepsilon=\pm 1$. Man findet:

$$\varepsilon A_1=\begin{vmatrix}\frac{P}{r''}\left(1-\frac{r'}{r''}\right)+\frac{\partial^2 r'}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u}P\left(1-\frac{r'}{r''}\right)-\frac{P}{r''}\frac{\partial r'}{\partial u} & PM\left(1-\frac{r'}{r''}\right)\\ \frac{\partial r'}{\partial u} & P\left(1-\frac{r'}{r''}\right) & 0\\ \frac{\partial r'}{\partial v} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-P^2\left(1-\frac{r'}{r''}\right)^2 M\frac{\partial r'}{\partial v},$$

$$\varepsilon B_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 r'}{\partial v^2} & 0 & -\frac{Q}{r'}\frac{\partial r'}{\partial v}\\ \frac{\partial r'}{\partial u} & P\left(1-\frac{r'}{r''}\right) & 0\\ \frac{\partial r'}{\partial v} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{PQ}{r'}\left(1-\frac{r'}{r''}\right)\left(\frac{\partial r'}{\partial v}\right)^2,$$

$$C_1=0.$$

Substituirt man in A_1 für M seinen Werth aus 38), so ist

$$\varepsilon A_1=-\frac{P^2}{Q}\left(1-\frac{r'}{r''}\right)\frac{r'}{r''^2}\frac{\partial r'}{\partial v}\frac{\partial r''}{\partial v}.$$

Setzt man

$$E_1=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right),\quad G_1=\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2,$$

$$F_1=\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v},$$

so findet man leicht:

$$E_1=P^2\left(1-\frac{r'}{r''}\right)^2+\left(\frac{\partial r'}{\partial u}\right)^2,\quad G_1=\left(\frac{\partial r'}{\partial v}\right)^2,\quad F_1=\frac{\partial r'}{\partial u}\frac{\partial r'}{\partial v},$$

$$E_1G_1-F_1^2=P^2\left(1-\frac{r'}{r''}\right)^2\left(\frac{\partial r'}{\partial v}\right)^2.$$

Mit Hilfe der obigen Werthe von A_1, B_1, C_1 folgt nun:

$$\frac{(E_1 G_1 - F_1^2)^2}{A_1 B_1 - C_1^2} = -(r' - r'')^2 \frac{\frac{\partial r'}{\partial v}}{\frac{\partial r''}{\partial v}}.$$

Gehen A_1, B_1, C_1, E_1, F_1, G_1 durch Vertauschung von $x_1\, y_1\, z_1$ mit $x_2\, y_2\, z_2$ über in A_2, $B_2\ldots$, so findet man:

$$\frac{(E_2 G_2 - F_2^2)^2}{A_2 B_2 - C_2^2} = -(r' - r'')^2 \frac{\frac{\partial r''}{\partial u}}{\frac{\partial r'}{\partial u}}.$$

Für den Fall, dass $r' - r'' = k$ ist, wo k eine Constante bedeutet, gehen die beiden letzten Gleichungen über in:

$$\frac{(E_1 G_1 - F_1^2)^2}{A_1 B_1 - C_1^2} = \frac{(E_2 G_2 - F_2^2)^2}{A_2 B_2 - C_2^2} = -k^2.$$

Bezeichnet man die beiden Flächen, definirt durch die Gleichungen 41), als die Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Fläche, so hat man folgendes Theorem:

Ist die Differenz der Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte einer Fläche constant, so haben die beiden Flächen ihrer Krümmungsmittelpunkte überall constantes, negatives Krümmungsmaass.

V.

Ueber die Messung kleiner Flugzeiten von Geschossen mittelst bewegter Elektricität.

Von Dr. Emil Kahl.

Die Bewegung von Geschossen geschieht sowohl im Rohre, als auch, nachdem dieselben das Rohr verlassen haben, in der Luft, so schnell, dass die Beobachtung der Zeitmomente, in welchen die Geschosse bestimmte Punkte ihrer Bahn passiren, mit den für Zeitbeobachtungen gewöhnlich angewendeten Instrumenten nicht ausgeführt werden kann. Es ist nun für die Artillerie ein dringendes Bedürfniss, eine Zeitbeobachtungsmethode zu besitzen, welche mit der grössten Genauigkeit die Zeitmomente zu beobachten gestattet, in welchen ein Geschoss durch bestimmte Stellen seiner Bahn hindurchgeht; denn von einer guten Zeitbeobachtungsmethode hängt die experimentelle Prüfung jeder Luftwiderstandshypothese ab und eine genaue Methode der Zeitbeobachtung ist für viele artillerie-technische Versuche zu wünschen, welche zur Kenntniss der Anfangsgeschwindigkeit und der Flugzeit von Geschossen im Geschützrohre führen sollen. Seit einiger Zeit haben sich Physiker, Mechaniker und Artilleristen damit beschäftigt, Methoden zur Messung kleiner Zeiten auf die ausserordentlich grosse Geschwindigkeit des elektrischen Stromes zu gründen; die Literatur über diese Versuche befindet sich grösstentheils in dem vor einigen Jahren eingegangenen „*Journal des armes spéciales*," in dem „Archiv für die Officiere des königlich preussischen Artillerie- und Ingenieurcorps" und in einigen anderen militärischen Schriften. Da mir der Gegenstand von allgemeinerem Interesse zu sein scheint und die oben genannten Journale der Mehrzahl der Leser der Zeitschrift nicht zur Hand gewesen sein dürften, so unternehme ich es, hier eine Zusammenstellung der wichtigsten Versuche zu geben, auf die Eigenschaften des elektrischen Stromes eine genaue Zeitmessungsmethode zu gründen.

Der erste Apparat zur Messung kleiner Zeiten, dessen Construction sich auf die Eigenschaften des elektrischen Stromes gründet, ist im Jahre 1840 von Wheatstone hergestellt worden, hierauf haben sich die Herren

Konstantinoff, Bréguet, Martin de Brettes, Siemens, Hartmann, Hofmann, Leonhard, Navez u. s. w. mit dieser Anwendung der elektrischen Ströme beschäftigt, und es gebührt unter ihnen Narvez das Verdienst, einen Apparat geliefert zu haben, der bei verhältnissmässig leichter Handhabung sehr genaue Resultate liefert, so dass er bereits bei der Artillerie mehrerer Staaten eingeführt worden ist. Die Literatur, aus der ich geschöpft habe, besteht allerdings nicht lediglich aus Originalberichten, hat aber den Vorzug, dass sie die Originalberichte meist mit wörtlichem Abdruck wiedergiebt; sie ist demnach als eine hinreichende Quellensammlung zu betrachten; ich vermisste nur eine Nachricht über einen amerikanischen elektrischen Zeitmessungsapparat, dessen Beschreibung in einem amerikanischen Journal zu finden ist. Dieses Journal konnten sich weder die Herren Majore Navez und Martin de Brettes verschaffen, deren Schriften ich benutzt habe, noch habe ich bis jetzt zu dessen Einsicht gelangen können. Die in meinen Händen gewesene Literatur besteht aber in folgenden Schriften:

1) *Mémoire sur un projet de chronographe électro-magnétique et son emploi dans les expériences d'artillerie, par Martin de Brettes, capitaine d'artillerie* (*Journal des armes spéciales* 1849_a, *p.* 140).

2) *Expériences faites à Liège en* 1850, *au moyen d'un appareil électro-ballistique, pour rechercher l'influeuce exercée par différents modes de chargement sur les vitesses initiales, par Martin de Brettes, capitaine commandant au* 3^e^ *régiment d'artillerie* (*Journal des armes spéciales* 1852_a, *p.* 333; ein Bericht über diese Schiessversuche befindet sich auch im Archiv für preussische Artillerie- und Ingenieurofficiere, Bd. 30, S. 126).

3) Elektro-magnetische Apparate zu artilleristischen Versuchen (Archiv für preussische Artillerie- und Ingenieurofficiere, Bd. 30, S. 145).

4) Schreiben des Capitän Navez aus Lüttich über die Einrichtung seiner elektro-ballistischen Vorrichtung zur Messung der Flugzeiten (Archiv für preussische Artillerie- und Ingenieurofficiere, Bd. 31, S. 152).

5) *Appareil électro-ballistique, lettre de M. le capitaine Navez* (*Journal des armes spéciales* 1852_a, *p.* 421).

6) *Nouveaux appareils électro-magnétiques par Martin de Brettes, capitaine commandant au 3e régiment d'artillerie* (*Journal des armes spéciales* 1852_a, *p.* 145).

7) *Application de l'électricité à la mesure de la vitesse des projectiles, par Navez capitaine commandant à l'état major de l'artillerie belge* (*Journal des armes speciales* 1852_b, 289, 408, 433; 1853_a, 5, 65, 145).

8) *Etudes sur les appareils électro-magnétiques destinés aux expériences de l'artillerie en Angleterre, en Russie, en France, en Prusse, en Belgique, en Suède etc. etc. par Martin de Brettes, capitaine commandant au 3e régiment d'artillerie* (*Journal des armes spéciales* 1852_b, 467; 1853_a, 31, 95; 1853_b, 5, 80, 177, 505; 1854_a, 158, 278, 414).

9) Ballistische Versuche mit dem elektromagnetischen Apparat des Hauptmann Navez (Archiv für preuss. Artillerie- und Ingenieurofficiere, Bd. 32, S. 176).

Dieses Literaturverzeichniss enthält Alles, was ich zu Anfange des Jahres 1861 über Elektroballistik in militärischen Journalen vorgefunden habe; in anderen als militärischen Journalen fand ich den Gegenstand gar nicht erwähnt. Die oben genannte Literatur enthält nun:

1) Vorschläge zur Messung der kleinen Zeiten, welche ein Geschoss braucht, um von einem Punkte seiner Bahn zu einem anderen Punkte seiner Bahn zu gelangen.

2) Urtheile über die Brauchbarkeit der vorgeschlagenen Apparate auf Grund elektrischer Erfahrungen oder auf Grund von Prüfungen eines ausgeführten Apparates durch Versuche ausgesprochen.

3) Nachrichten über Schiessversuche, bei denen die Anfangsgeschwindigkeiten der Geschosse mit Hilfe der Navez'schen elektroballistischen Vorrichtung ermittelt worden sind.

Die Arten, wie Diejenigen, die sich mit der Messung sehr kleiner Zeitintervalle auf elektrischem Wege beschäftigt haben, die Aufgabe gelöst haben, mögen zunächst, von einer einzelnen Idee ausgehend, geschildert werden. Man denke sich einen Cylinder, der sich gleichförmig sehr schnell um eine horizontale Achse dreht und über dem ein Stift vertical beweglich angebracht ist. Wird der Stift in dauernde Berührung mit der Cylinderoberfläche gebracht, so verzeichnet er auf dem Umfange des Cylinders fortwährend einen und denselben vollen Kreisbogen. Wenn aber der Stift erst in dem Momente mit der Cylinderoberfläche in Berührung gebracht wird, wo das Geschoss einen Punkt A seiner Bahn passirt und wieder genau in dem Momente von der Cylinderoberfläche abgezogen wird, wo das Geschoss einen zweiten Punkt B seiner Bahn passirt, so beschreibt der Stift bei entsprechend rascher Umdrehung des Cylinders nur einen spitzen Kreisbogen auf der Cylinderoberfläche. Ist die Länge dieses spitzen Kreisbogens α und macht der Cylinder in einer Secunde n Umdrehungen, so ist die Umfangsgeschwindigkeit des Cylinders $d\pi n$, wenn d der Durchmesser des Cylinders ist und die Zeit, während welcher der Stift den Kreisbogen berührte, ist $\frac{\alpha}{d\pi n}$. Das Geschoss brauchte demnach $\frac{\alpha}{d\pi n}$ Secunden, um vom Punkte A der Flugbahn zum Punkte B derselben zu gelangen. Die Ausführung dieser und ähnlicher Ideen erfordert nur, ein Mittel zu finden, wodurch der Stift genau in demselben Momente zur Berührung mit der Cylinderoberfläche gebracht wird, in welchem das Geschoss den Punkt A der Flugbahn passirt und wodurch der Stift wieder genau in dem Momente vom Cylinder abgezogen wird, in welchem das Geschoss den Punkt B seiner Flugbahn passirt. Auch ein solches Uebertragungsmittel müsste noch vollkommen Genüge leisten, welches den Stift um eine genau bekannte Zeit später, als das Geschoss durch den Punkt A geht, mit dem rotirenden Cylinder in Berührung bringt und um eine genau zu bestimmende Zeit später wieder von der Cylinderoberfläche abzieht, als das Geschoss durch den Punkt B geht. Die verschiedenen Bearbeiter des Problems haben nun geglaubt, auf die grosse Geschwindigkeit des elektrischen Stromes das Mittel der Uebertragung gründen zu müssen. Anstatt eines Cylinders sind auch andere Apparate benutzt und vorgeschlagen worden, die sich in bekannter Bewegung befinden und die ich mit dem Namen *Bewegungsapparate* bezeichnen werde, und die Elektricitätsströmung ist in sehr verschiedener Weise zur Uebertragung vorgeschlagen worden. Welche Methoden vorgeschlagen oder ausgeführt worden sind, zeigen die folgenden Paragraphen.

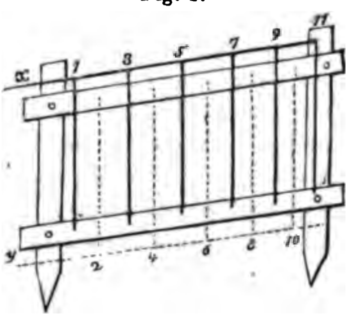
§. 1. Uebertragungsapparate.

Die Uebertragung hat man immer dadurch zu bewerkstelligen gesucht, dass in den Augenblicken, wo das Geschoss die Punkte A und B seiner Bahn passirt, durch dasselbe selbst ein elektrischer Strom hergestellt, oder unterbrochen, oder umgekehrt wird. Die Vorschläge beziehen sich zunächst:

A. auf die Anwendung eines Entladungsstromes der Leydner Flasche.

Diesen hat *Siemens* vorgeschlagen und beabsichtigt die Entladung einer Leydner Flasche auf folgende Weise durch ein Projectil vollziehen zu lassen. Fig. 1 stellt ein Drahtgitter vor, der Draht x geht z. B. vom inneren Belege einer Leydner Flasche aus und ist oben an einem viereckigen hölzernen Rahmen isolirt befestigt, er verzweigt sich in die isolirten Drahtstücke 1, 3, 5, 7, 9, 11. Der Draht y ist mit dem äusseren Belege derselben Leydner Flasche verbunden und verzweigt sich in die Drahtstücken 2, 4, 6, 8, 10. Die Abstände zweier benachbarter Drahtstäbe sind geringer, als der kleinste Durchmesser des Geschosses. Sobald das Geschoss das Gitter durchbricht, berührt es die Ausläufer des inneren und äusseren Beleges und bewirkt durch eine metallische Berührung die Entladung der Flasche. Hat man nun an jedem der Punkte A und B ein solches Drahtgitter aufgestellt und die Enden von jedem mit einer Leydner Batterie verbunden, so werden in den Augenblicken, wo das Geschoss durch A und durch B geht, die mit den Gittern zusammenhängenden Leydner Batterien geschlossen. So vie

Fig. 1.



mir bekannt ist, ist nie ein Siemens'sches Gitter ausgeführt worden, so dass die Erfahrung sich darüber nicht hat aussprechen können; es lässt sich jedoch im Voraus erwarten, dass die beabsichtigte Wirkung desselben ausbleibt, sobald das Projectil keine metallisch reine Oberfläche besitzt; auch dürfte es schwer sein, bei feuchter Witterung eine hinreichende Isolirung der Drähte herbeizuführen.

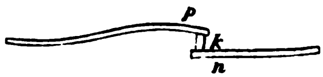
Die Vorschläge beziehen sich

B. auf die Anwendung des continuirlichen Entladungsstromes der galvanischen Batterie.

a. Wheatstone hat anfänglich, sowie auch der schwedische General Wrede die mechanische Erschütterung zur Herstellung des galvanischen Stromes benutzt. Wheatstone, der dieses System bald mit einem besseren vertauscht hat, hat sein früheres System nicht genau beschrieben. Das des General Wrede besteht in Folgendem:

Am Punkte *A* der Flugbahn befindet sich eine Bretblende, an welche oben ein Leitungsdraht befestigt ist, der daselbst eine Unterbrechungsstelle (Fig. 2) hat. Das eine Ende *p* des Drahtes ist durch Elasticität gespannt und würde das andere Ende *n* metallisch berühren, wenn beide nicht durch ein zwischengeklemmtes Stück *k* eines Isolators getrennt erhalten würden. Sobald das Geschoss in die Bretblende einschlägt, wird durch die mechanische Erschütterung der Isolator *k* zur Seite geschleudert und die Metallfeder *p* kommt alsbald in metallische Berührung mit *n*, wodurch der Strom geschlossen wird.

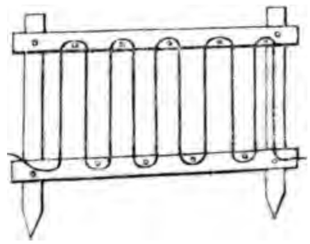
Fig. 2.



Auf ähnliche Weise bewirkt General Wrede die Umkehrung eines Stromes. Auf einer Blende ist ein Commutator befestigt; es sind elastische Federn an demselben so angebracht, dass sie dem Commutator diejenige Stellung ertheilen würden, in welcher er den Strom umkehrt, wenn dies ein an die Federn angeklemmtes Stück Isolator zuliesse. Sobald das Geschoss durch die Blende geht, wird das Stück Isolator durch die mechanische Erschütterung herausgeschleudert; die Federn wirken somit auf die Stellung des Commutators und der Strom wird umgekehrt. Diese Schliessungs- resp. Umkehrungsmethode ist zwar im Jahre 1849 wirklich in Schweden angewendet worden, allein, da sie nur gedient hat, die Zeiten zu messen, welche ein Geschoss braucht, um sehr grosse Bogen seiner Trajectorie zu messen, so lässt sich von den erhaltenen Resultaten kein Schluss ziehen auf die Messung äusserst kleiner Zeiten, vielmehr muss sie aus dem Grunde zurückgewiesen werden, weil wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stoffes und wegen der Dauer der elastischen Wirkung der Federn der Eintritt resp. die Umkehrung des Stromes erst kurze Zeit nach *Durchbrechung* der Blende durch die Geschosse erfolgen und weil man weder ein theoretisches, noch ein praktisches Hilfsmittel hat, diese Verzögerung zu bestimmen.

b. (Das Wheatstone'sche Drahtgitter zur momentanen Unterbrechung oder Herstellung eines galvanischen Stromes.) — Wheatstone hat zuerst ein Drahtgitter (Fig. 3) vorgeschlagen, welches aus hin- und hergewundenem dünnen Draht besteht, dessen Windungen einen geringeren Abstand haben, als der kleinste Geschossdurchmesser, so dass das Geschoss einen Draht sicher zerreisst, wenn es durch das Gitter hindurchgeht. Die Enden des Leitungsdrahtes vom Netze sind mit den Polen der Säule durch Drähte verknüpft, der Strom hört im Augenblicke auf, wo das Geschoss durch das Gitter geht. Es sind dergleichen Drahtgitter bei den belgischen Versuchen zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit von Geschossen angewendet worden, wobei sie sich vollkommen bewährt haben.

Fig. 3.



Wheatstone hat auch die Herstellung einer elektromagnetischen Stromwirkung durch das Geschoss in folgender Weise vorgeschlagen: Durch zwei um ein Hufeisen in entgegengesetzter Richtung gewundene Kupferdrähte gehen zwei gleich starke Ströme in entgegengesetzter Richtung, deren Wirkung auf das Eisen in Summa Null ist, so dass dasselbe unmagnetisch erscheint. Die eine Leitung ist mit einem Drahtgitter verbunden, welches sich in der Schusslinie befindet; geht das Geschoss durch dieses Drahtgitter, so wird der eine Strom vernichtet und der andere tritt allein in Erscheinung und macht nun das Hufeisen magnetisch. Ist am Ziel ein zweites Drahtgitter aufgestellt, durch welches der bei der Aufhebung des ersten Stromes übrig bleibende zweite Strom hindurchgeht, so wird beim Einschlagen des Geschosses ins Ziel das Hufeisen wieder unmagnetisch. Der Major Navez hat diesen Vorschlag Wheatstone's ausgeführt und ist bei seinen deshalb angestellten Versuchen zu der Ansicht gekommen, dass die Regulirung der beiden Ströme, deren elektromagnetische Kraft sich equilibriren soll, mindestens unbequem ist und solche physikalische Kenntnisse und Experimentirkunst erfordert, dass das Princip der Equilibrirung der magnetischen Stromkraft wohl an einem Apparate angewendet werden darf, der zu rein wissenschaftlichen Versuchen von einem Physiker gehandhabt wird, jedoch nicht geeignet ist, in den Gang eines rein technischen Instrumentes aufgenommen zu werden.

In besonderen Fällen ist statt des beschriebenen Uebertragungsapparates ein dergleichen einfacherer angewendet worden; so z. B. genügte es Wheatstone, bei Messungen der Anfangsgeschwindigkeit eines Geschosses *das erste Netz durch* einen quer vor der Mündung vorbeiführenden Draht zu ersetzen. Pouillet hielt einen Strom so lange geschlossen, als die Bewegung einer Kugel in einem Gewehre dauerte. Der Hahn des Percussionsschlosses war isolirt aufgeschraubt, die Enden des dünnen Leitungsdrahtes einer galvanischen Batterie waren das eine mit dem Hahn, das andere mit dem Piston verbunden. Beim Abschiessen des Gewehres wurde somit die Leitung geschlossen; der Leitungsdraht der galvanischen Batterie war an der Mündung des Gewehres vorbeigeführt, so dass der Strom wieder unterbrochen wurde, wenn die Kugel die Mündung passirte.

§. 2. Benutzte und vorgeschlagene Wirkungen der Uebertragungsströme.

Wenn es gelungen ist, in dem Momente einen Strom herzustellen oder zu unterbrechen, in welchem das Geschoss einen bestimmten Punkt A oder B seiner Trajectorie passirt, so ist ferner dafür Sorge zu tragen, dass die hervorgebrachte elektrodynamische Reaction sichtbare Zeichen an einem Bewegungsapparate hervorbringe oder auch so auf Körper einwirke, dass man nachträglich aus ihrer Lage in einem späteren Zeitmomente die Zeit bestimmen kann, welche das Geschoss verwendete, um vom Punkte A seiner Trajectorie zu dem Punkte B derselben zu gelangen. Dergleichen Wirkungen müssen nun folgenden zwei Bedingungen Genüge leisten:

1) Die Markirung muss entweder gleichzeitig mit der elektrodynamischen Wirkung geschehen, welche das Geschoss beim Durchreissen der Gitter durch Vernichtung oder Herstellung eines Stromes in den Drähten äussert, oder
2) die Markirung geschieht eine kurze Zeit nach der Durchreissung der Gitter durch das Geschoss; in diesem Falle muss aber die Verzögerung der Markirung auf dem Versuchswege ermittelt werden können, so dass sie sich aus den Beobachtungsresultaten eliminiren lässt.

Es sind nun folgende Stromwirkungen von einzelnen Autoren theils nur vorgeschlagen, theils wirklich ausgeführt worden, über welche die Erfahrung bereits zum Theil ihr Urtheil gesprochen hat.

a. Siemens hat die Priestley'schen Flecken vorgeschlagen. Priestley hat bekanntlich zuerst gezeigt, dass, wenn man den Entladungsfunken einer Leydner Flasche von einer feinen Spitze aus auf eine blank polirte Metallplatte überschlagen lässt, concentrische farbige Ringe entstehen, welche die Projection der Spitze auf die Metallplatte umgeben. Der Versuch gelingt um so besser, je kleiner die Entfernung der Spitze von der Metallplatte ist. Bei einer einzigen elektrischen Entladung zeigt sich nur ein je nach der Natur des Metalles der Platte verschieden gefärbter Fleck um die Projection der Spitze herum, welcher beim Behauchen der Platte metallglänzend bleibt. Siemens hatte vorgeschlagen, einen Metallcylinder als Bewegungsapparat anzuwenden, welcher rasch um seine geometrische

Achse rotirt; im Allgemeinen könnte man aber jede in bekannter Bewegung befindliche Metallplatte anwenden, wenn nur das Arrangement getroffen ist, dass das Geschoss durch Zerreissung des Siemens'schen Gitters bei *A* das Ueberschlagen eines Flaschenfunkens von einer der Metallplatte gegenüber stehenden Spitze auf die Platte veranlasst und dass ebenso ein zweiter Flaschenfunke von derselben Spitze auf die Metallplatte überschlägt, wenn das Geschoss das zweite Drahtgitter bei *B* durchschlägt. Siemens hat dies mit Hilfe des in §. 1*a* beschriebenen Gitters zu erreichen gesucht; es ist dort gezeigt worden, wie durch die Kugel selbst, während sie durch ein Siemens'sches Gitter geht, eine Leydner Batterie geschlossen wird; er schlägt vor, die Drahtleitung, durch welche der Entladungsschlag der Batterie hindurchgehen muss, an einer Stelle zu unterbrechen, das eine Ende des Drahtes mit der Achse seines rasch rotirenden Cylinders, das andere Ende mit einer dem Metallcylinder gegenüber stehenden Metallspitze zu verbinden. Wenn nun Spitze und Cylinder in derselben Weise mit einer geladenen Batterie und einem Siemens'schen Gitter am Punkte *B* verbunden sind, wie sie mit den genannten Apparaten und dem bei *A* aufgestellten Gitter in Verbindung stehen, so schlägt ein Funke von der Spitze auf den Cylinder in dem Momente über, wo das Geschoss durch das Gitter bei *A* geht und ein zweiter Funke in dem Augenblicke, wo das Geschoss das Gitter bei *B* durchbricht. Aus dem Bogenabstande der beiden Priestley'schen Flecken und aus der bekannten Rotationsgeschwindigkeit des Cylinders kann man nun die Zeit berechnen, in welcher das Geschoss das Stück *AB* seiner Trajectorie durchlief.

Der Ausführung von Siemens' geistreichem Vorschlage steht die nur mangelhaft mögliche Isolation für Reibungselektricität entgegen, ferner der Umstand, dass nicht ein Punkt, sondern ein Fleck von einiger Ausdehnung entsteht, so dass es schwer ist, die Distanz der Mittelpunkte der Flecken ohne Fehler zu bestimmen; man wird daher mit Navez der Meinung sein, dass ein nach Siemens' Idee ausgeführter Apparat nur in sehr geschickten Händen zu guten Resultaten führen kann und dass sich ein solcher Apparat weniger zu technischen Untersuchungen eignen dürfte.

b. Die Mehrzahl Derjenigen, welche sich mit der Messung kleiner Zeiten zu artilleristischen Zwecken beschäftigt haben, hat die elektromagnetischen Wirkungen des galvanischen Stromes zur Markirung auf einem Bewegungsapparate vorgeschlagen oder benutzt. Wenn ein Wheatstone'sches Gitter mit einem Elektromagneten und einer galvanischen Batterie verbunden ist, so wird das Eisen des Elektromagneten unmagnetisch, sobald ein Geschoss das Wheatstone'sche Gitter zerreisst, der Anker fällt vom Elektromagneten ab und kann, indem er einen Stift an den Bewegungsapparat ausdrückt, eine Marke an letzterem machen. Von dem Zerreissen des Gitters an bis zum Andrücken des Stiftes durch den herabgefallenen Anker vergeht jedoch eine kleine Zeit, welche nach allen Erfahrungen zu gross ist, um bei den hier besprochenen Zeitmessungsmethoden vernachlässigt werden zu können. Navez, welcher sich sehr viel mit Apparaten zur Messung kleiner Zeiten experimentell beschäftigt hat, hat sich, zum Theil auf seine eigenen Erfahrungen gestützt, dahin ausgesprochen, dass der Anwendung der elektromagnetischen Wirkungen folgende Umstände hindernd entgegentreten:

1) Die Zeit der Magnetisirung beim Beginn des Stromes ist kleiner, als die Entmagnetisirungszeit beim Aufhören des Stromes, so dass sich beide nicht compensiren.

2) Wie Wheatstone, erhielt auch Navez durch Anwendung starker Ströme eine kürzere Magnetisirungszeit und durch Anwendung sehr schwacher Ströme eine kürzere Entmagnetisirungszeit; allein diese Zeiten waren immer noch zu beträchtlich, um sie bei der Messung kleiner Zeiten vernachlässigen zu können.

3) Leitet man einen starken Strom durch eine Elektromagnetenspirale und ihm entgegen einen schwachen Strom, so sollte man erwarten, dass diese von Navez aufgestellte Combination den Erfolg haben müsse, beim Unterbrechen des starken Stromes durch das Geschoss eine augenblickliche Zerstörung des Magnetismus im Eisen hervorzubringen, weil der in Erscheinung tretende schwache Strom sofort den Rückstand von Magnetismus zerstört, welcher beim Aufhören des starken Stromes zurückbleibt. Navez hat diese Idee deswegen nicht durch viele Versuche geprüft, weil er bei seinen Versuchen, einen Apparat zur Messung kleiner Zeiten zu construiren, auf eine andere Idee kam, die ihm fruchtbarer zu sein schien. Die Herren Hartmann, Hofmann und der verstorbene Uhrmacher Leonhard in Berlin haben die Compensationsidee, die Navez aufstellte, unabhängig von diesem gehabt und angewendet, allein es ist mir nicht bekannt geworden, zu welchen Resultaten sie gekommen sind. Nach dem Urtheil von Navez würde die Regulirung der Stromstärken hierbei so viel Mühe machen, dass ein expeditiv arbeitender Apparat auf diesem Wege nicht zu erhalten ist.

4) Das von Martin de Brettes vorgeschlagene Mittel, sowohl die Magnetisirungs-, als auch die Entmagnetisirungszeit für verschiedene Stromstärken durch besondere Versuche zu bestimmen, um an elektromagnetischen Zeitmessungsapparaten die erforderlichen Correctionen anzubringen, hält Navez, der sich sehr viel experimentell mit dem vorliegenden Gegenstand beschäftigt hat, wegen des von Martin de Brettes angegebenen Weges zur Ausmittelung der Correctionen für unpraktisch.

5) Der Major Navez hat die Idee gehabt, einen Apparat zu construiren, bei dem der Fehler, mit welchem wegen der endlichen Magnetisirungs- und Entmagnetisirungszeit die beobachtete Flugzeit des Geschosses behaftet ist, durch einen sehr einfachen Berichtigungsversuch leicht ermittelt und somit das Beobachtungsresultat vom Fehler befreit werden

kann. Dieser Apparat ist das wirklich bei artilleristischen Versuchen verwendete elektroballistische Pendel vom Major Navez.

c. Pouillet hat bei seinen Versuchen, die Zeit zu bestimmen, welche eine Kugel braucht, um von der Entzündung der Ladung an das Rohr zu durchlaufen, die stromablenkende Kraft der Nadel benutzt. Er hatte, wie schon früher erwähnt wurde, den Hahn eines Gewehres isolirt aufgeschraubt und Hahn und Piston, jeden für sich mit den Enden eines Multiplicators und einer Säule durch Kupferdrähte verbunden, von denen der eine auch quer vor der Mündung des Gewehrs vorbeigeführt war. Beim Abfeuern schloss der auf den Piston aufschlagende Hahn den elektrischen Strom, der wieder unterbrochen wurde, sobald die Kugel die Mündung passirte. Der Strom konnte daher nur so lange auf die Multiplicatornadel wirken, als die Kugel Zeit brauchte, um den Gewehrlauf zu durcheilen. Es lässt sich aus der Totalablenkung der Nadel und deren magnetischen Momente die Anfangsgeschwindigkeit berechnen, welche der Nadel durch den Strom ertheilt wurde und aus dieser und der stromablenkenden Kraft die Zeit, während welcher der Strom geschlossen war. Man erkennt sofort, dass dieses Verfahren, wenn es (in welcher Weise, hat Martin de Brettes gezeigt) zur Messung kleiner Flugzeiten der Geschosse angewendet wird, nur sehr langsam zum Ziele führt und dass es einen Apparat und eine Experimentirkunst erfordert, die seine Anwendung zu technischen Zwecken bedenklich erscheinen lassen.

d. Navez bespricht auch die Anwendung chemischer Wirkungen, wie sie beim elektrochemischen Telegraphen von Bain versucht worden sind. Denkt man sich beispielsweise einen Metallcylinder mit dem empfindlichen Papiere des Bain'schen Telegraphen überzogen, den Cylinder in rascher Rotation um seine geometrische Achse versetzt, wobei zwei Metallstifte denselben an einer Stelle der Oberfläche berühren; die Metallstifte einerseits und die Achse des Cylinders andererseits seien mit den Enden von zwei Drahtleitungen verbunden, von denen die eine eine Säule mit dem einen Stifte und mit einem Wheatstone'schen Gitter am Punkte A verbindet, während die andere ebenfalls eine Säule mit dem Wheatstone'schen Gitter bei B, dem anderen Metallstifte und dem rotirenden Cylinder in Verbindung setzt. Geht das Geschoss durch A, so hört der Strom in der ersten; durchbricht es B, so hört derselbe in der zweiten Leitung auf. Sobald ein Strom durch den rotirenden Cylinder und durch einen Stift hindurchgeht, beschreibt letzterer einen blauen Bogen auf der Cylinderoberfläche. Die Bogenlänge zwischen dem Ende des einen und des anderen blauen Bogens auf dem Cylinder giebt nun bei bekannter Winkelgeschwindigkeit des Cylinders die Zeit an, welche das Geschoss brauchte, um die Strecke AB der Flugbahn zu durchlaufen. Solchen und ähnlichen Projecten stehen nun die Erfahrungen entgegen, welche bei Versuchen mit dem Instrumente von Bain 1851 zwischen Paris und Tours gemacht worden sind; es zeigte sich damals, dass bei grossen Entfernungen die Punkte und Striche sich so verlängerten, dass die Schrift beinahe unleserlich wurde. Fizeau erklärt dies dadurch, dass beim Eintreten des Stromes nicht momentan elektrochemische Wirkung erfolgt und dass dieselbe noch kurze Zeit nach dem Unterbrechen des Stromes fortdauert, Aus einem ähnlichen Grunde lässt sich das Princip des Bakewell'schen Telegraphen nicht anwenden.

§. 3. Bewegungsapparate.

Es sind folgende Bewegungsarten theils nur vorgeschlagen, theils auch wirklich angewendet worden:

1) Die Bewegung des freien Falles.
2) Die Bewegung auf der schiefen Ebene.
3) Die Bewegung von Pendeln.
4) Die gleichförmige Bewegung eines Cylinders.
5) Die sprungweise Bewegung der Zeiger eines rasch gehenden Uhrwerkes.
6) Die Bewegung einer Magnetnadel.

1. Bewegung des freien Falles.

Die Bewegung des freien Falles ist bei der vom Artillerieoberst Debooz gegen Ende der dreissiger Jahre vorgeschlagenen Vorrichtung zur Messung der Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse angewendet worden; den Gang dieser Vorrichtung suchte Navez zu Anfange seiner Versuche auf galvanische Ströme zu gründen. Der ursprüngliche Apparat von Debooz bestand aus einer 50^m vor der Geschützmündung aufgestellten festen Scheibe, vor der eine bewegliche Scheibe in der Weise aufgehangen wurde, dass eine oben an der beweglichen Scheibe befestigte Schnur, welche über zwei Rollen bis dicht vor die Geschützmündung geleitet war, vor derselben herabhing und durch ein Gewicht gespannt wurde, welches die bewegliche Scheibe equilibrirte. Beim Abfeuern sollte die Kugel die Schnur zerschneiden und hierauf beide Scheiben durchdringen. Die bewegliche Scheibe, so glaubte Debooz, sollte in dem Momente anfangen zu fallen, in welchem die Kugel ihre Schnur durchschnitt; aus dem Abstande der Kugellöcher von einander (nach wiedererfolgtem Uebereinanderlegen beider Scheiben) wurde die Fallzeit berechnet, welche nach Debooz's Annahme gleich der Flugzeit der Kugel sein sollte; aus dem Abstand der Scheiben von der Mündung und der Flugzeit berechnete Debooz die Anfangsgeschwindigkeit. Navez experimentirte mit diesem Apparate und fand (bei Annahme des Didion'schen Luftwiderstandsgesetzes) die Anfangsgeschwindigkeit viel grösser, als er erwarten konnte. Er erklärte dies durch die Trägheit der Schnur und durch die Reibung an den Rollen; beide Ursachen mussten bewirken, dass die bewegliche Scheibe erst kurze Zeit später zu fallen anfing, nachdem die Schnur von der Kugel zerrissen worden war.

Navez versah die bewegliche Scheibe oben mit einem Stück weichem Eisen, welches als Anker eines Elektromagneten dienend die bewegliche Scheibe vor der festen Scheibe festhielt. Der Elektromagnet wurde durch einen Strom in Bewegung gesetzt, dessen Leitung an der Geschützmündung vorbeiführte und beim Abfeuern durch das Geschoss zerrissen wurde. Eigentlich hätte gleichzeitig mit dem Zerreissen der Leitung der Fall der beweglichen Scheibe beginnen sollen, allein Navez bemerkte, dass die Entmagnetisirungszeit je nach der Beschaffenheit des Eisens und Stärke des Stromes ungleich gross war und dass die Entmagnetisirung in beiden Schenkeln des Hufeisens ungleichmässig erfolgte, so dass die Scheibe während des Fallens ihrer Anfangslage nicht parallel blieb.

2. Bewegung auf der schiefen Ebene.

Einige Zeit, nachdem die versuchte Verbesserung des Apparates von Debooz kein günstiges Resultat geliefert hatte, versuchte Navez die schiefe Ebene als Bewegungsapparat. Am oberen Ende der schiefen Ebene wurde ein kleiner, auf Metallschienen beweglicher Wagen mit Hilfe eines an ihm befestigten Stückes weichen Eisens festgehalten, welches durch einen in Thätigkeit gesetzten Elektromagneten angezogen wurde, dessen Leitungsdraht an der Mündung vorbeigeführt war. Sobald das Geschoss den Draht an der Mündung zerriss, liess der Elektromagnet den Wagen los, welcher anfing, sich abwärts zu bewegen. Der Wagen sollte durch eine elektromagnetische Vorrichtung in dem Momente gebremst werden, in welchem das Geschoss das Wheatstone'sche Gitter am Ziele zerriss. Dieses Gitter war mit den Polen einer galvanischen Batterie verbunden, deren Strom durch die eine Schiene auf der schiefen Ebene geleitet war, von wo er durch das eine Wagenrad in den Wagen hinein, durch das andere Rad in die andere Schiene und von da wieder zum Batteriepol geleitet wurde. Auf dem Wagen befand sich ein Elektromagnet, der durch den Strom activirt wurde und dessen Anker eine Bremse arretirte, die nur in dem Momente in Thätigkeit gesetzt werden sollte, wo der Strom am Ziele durch das Geschoss coupirt wurde. Obwohl Navez bei diesem Apparate ausserordentliche Sorgfalt angewendet hatte, um durch Gleichheit der Entmagnetisirungszeit des ersten Magneten mit der des zweiten Magneten eine Elimination des Fehlers beim Versuche selbst zu bewerkstelligen, so erhielt er doch mit diesem Apparate kein günstiges Resultat, weil die Bewegung auf der schiefen Ebene zu langsam geschieht, als dass sich aus der durchlaufenen Strecke des Wagens die Zeit mit Ge-'gkeit berechnen liesse.

3. Die Bewegung von Pendeln.

A. Wheatstone's Doppelpendel. Zwei Pendel, deren eines halbe Secunden schlägt und von denen das andere eine etwas grössere Schwingungsdauer hat, werden beide an den oberen Endpunkten ihrer Stangen durch Elektromagneten festgehalten. Wenn das Geschoss die Mündung passirt, wird das eine Pendel von seinem Elektromagneten losgelassen, und wenn das Geschoss das Wheatstone'sche Gitter am Ziele durchbricht, fängt das andere Pendel an, sich zu bewegen. (Nach dem früher Vorhergehenden ist es leicht, zu verstehen, wie dies auf elektromagnetischem Wege erreicht wird.) Man beobachtet nun an einem der Pendel, wie viel Schwingungen vom Anfang an bis zur Coincidenz der Pendel erfolgen. Hieraus berechnet man mit Leichtigkeit die Flugzeit des Geschosses.

Das Doppelpendel ist von Wheatstone nur vorgeschlagen, von Navez aber ausgeführt und geprüft worden, und es hat hierbei sehr unregelmässige Resultate gegeben. Navez schreibt dies ausser dem Einfluss der Elektromagneten, den unvermeidlichen Fehlern bei der Beobachtung der Coincidenszeit zu.

B. Electroballistisches Pendel von Martin de Brettes. Ein Pendel wird elevirt erhalten durch einen Hebel, welcher mit einem Elektromagneten in Verbindung steht, dessen Anker ablässt vom Hebel, sobald das Geschoss den Draht an der Mündung zerreisst, worauf das Pendel anfängt, sich abwärts zu bewegen. Ein anderer Hebel wird durch einen Elektromagneten verhindert, die Hebelstange zu arretiren, dieser Elektromagnet wird unthätig, sobald das Geschoss das Gitter am Ziele durchbricht, der Anker des Elektromagneten giebt den Arretirhebel frei, welcher augenblicklich das Pendel festhält. Aus dem Bogen, den das Pendel beschreibt, wird die Flugzeit berechnet.

Der Major Navez hat ein dem Brettes'schen sehr ähnliches Pendel ausgeführt und geprüft; er fand dabei, das dasselbe sehr ungenaue Resultate lieferte, wahrscheinlich wegen des heftigen Stosses, wodurch der Arretirhebel das Pendel arretirt.

C. Elektroballistisches Pendel von Navez. Ohne dass Navez durch Martin de Brettes' theoretische Untersuchungen erst auf den richtigen Weg geführt worden wäre, war er von selbst auf die Idee gekommen, das Pendel zur Zeitmessung zu benutzen. Er versuchte es zunächst, die Linse eines Pendels durch einen Elektromagneten so festzuhalten, dass die Pendelstange ungefähr 60 Grad elevirt war. Das Zerreissen des Drahtes vor der Mündung durch das Geschoss sollte den Elektromagneten unthätig machen, welcher die mit einem eisernen Kern versehene Pendellinse festhielt. Das Pendel beginnt kurze Zeit nach dem Momente zu fallen, in welchem das Geschoss die Mündung passirt. Mit dem Pendel war eine eiserne Scheibe fest verbunden, welche beim Schwingen des Pendels dicht an dem einen Pole eines zweiten Elektromagneten vorbei bewegt wurde, der in dem Momente activirt werden sollte, in welchem das Geschoss das Wheatstone'sche Gitter am Ziele durchbrach. Navez beabsichtigte, aus dem vom Pendel während des Laufes vom Geschosse zwischen zwei Punkten A und B seiner Flugbahn durchlaufenen Schwingungsbogen die Zeit zu berechnen, welche das Geschoss gebrauchte, um die Strecke AB seiner Trajectorie zurückzulegen, und gedachte durch einen sehr einfachen Berichtigungsversuch die Fehler zu eliminiren, welche dem Beobachtungsresultat wegen der Entmagnetisirungszeit etc. anhaften mussten. Bei seinen Versuchen wurde er zunächst auf einen Fehler seines Apparates aufmerksam, der durch die lebendige Kraft veranlasst wurde, welche das Pendel beim Herabschwingen von einem so bedeutenden Elevationswinkel, als er gewählt hatte, erlangte. Es kam nämlich oft vor, dass die eiserne Scheibe, welche durch Activirung des zweiten Elektromagneten von diesem momentan angezogen werden sollte, wegen der grossen lebendigen Kraft des Pendels ein Stück an den Polen hinschleifte, ehe das Festhalten wirklich erfolgte. Er begegnete diesem Uebelstande auf wirksame Weise durch eine veränderte Einrichtung des Pendels. Er brachte an dem Pendel einen Zeiger an, dessen eines Ende ein Muff von weichem Eisen bildete, welcher auf die cylindrische Schwingungsachse des Pendels aufgesteckt wurde und von dieser beim Schwingen des Pendels durch leichte Reibung mit fortgenommen wurde. Dieser Muff von weichem Eisen überragt die Achse auf der einen Seite in Gestalt einer dünnen cylindrischen Scheibe, die sich beim Schwingen des Pendels vor dem Pole eines Elektromagneten in sich selbst dreht. Wird nun der Elektromagnet in dem Momente activirt, in welchem das Geschoss durch das Wheatstone'sche Gitter am Ziele hindurchgeht, so wird der eiserne Muff und der von ihm getragene leichte Index plötzlich festgehalten, während das Pendel weiter schwingt. Da Navez die Aussicht hatte, die Fehler, welche durch die nicht momentane Wirkung der elektromagnetischen Theile etc. seines Apparates am Resultate haften müssen, durch einen einfachen Berichtigungsversuch eliminiren zu können, so konnte er nun auch den Apparat, der die Activirung des zweiten Elektromagneten besorgen sollte und den er Schliesser (*conjoncteur*) nennt, unbedenklich etwas langsamer wirken lassen, als wenn er nur ein Minimum der Fehler beabsichtigt hätte. Der Activirungsstrom ist an einer Stelle unterbrochen, das eine Drahtende wird durch seine Federkraft etwas über dem anderen emporgehalten, über dieser Unterbrechungsstelle wird durch einen (von einem anderen Strome in Thätigkeit gesetzten) Elektromagnetenpol ein Stück weiches Eisen festgehalten, wobei der Strom des Elektromagnetenpoles durch das Wheatstone'sche Gitter am Ziele führt. Schlägt das Geschoss in das Wheatstone'sche Gitter am Ziele ein, so wird der Schliesserstrom unterbrochen, der Anker fällt vom Pole ab und bringt durch seinen Fall die Drahtenden des Activirungsstromes an der Unterbrechungsstelle in Contact, der Activirungsstrom wirkt auf den Elektromagnetenpol am Muffe des Zeigers und hält den Muff und somit auch den Zeiger fest. Die Zeit, während welcher das Geschoss den Weg zwischen dem ersten und zweiten Wheatstone'schen Netze macht, wird nur erst dann aus dem vom Pendel vom Anfange an bis zur Arretirungsstelle des Zeigers durchlaufenen Bogen richtig hervorgehen, wenn durch den Berichtigungsversuch mit dem Pendel von Navez die Summe folgender Fehler ermittelt worden ist: die Entmagnetisirungszeit des ersten Elektromagneten, die Fallzeit des Ankers am Schliesser, die Magnetisirungszeit des zweiten Elektromagneten. Mit den bisher beschriebenen Theilen des Apparates von Navez könnte dies nur in der Weise geschehen, dass man die beiden Wheatstone'schen Netze dicht hinter einander aufstellt. Da die Flugzeit des Geschosses in diesem Falle Null ist, so erhält man aus dem vom Pendel durchlaufenen Bogen nur die Summe aller Zeitfehler. Um den zur Fehlerbestimmung erforderlichen besonderen Schiessversuch zu ersparen, hat Navez einen Apparat ersonnen, den er den Stromaufheber (*disjoncteur*) nennt und dessen Princip wesentlich in Folgendem besteht: Durch zwei in gerader Linie liegende, an einem Ende aneinander stossende Metallstäbe, von denen jeder mit seinem anderen Ende in einem festen Rahmen eingesetzt ist, wird sowohl der Strom geleitet, welcher die Pendellinse in elevirter Lage festhält, als auch der Strom des Elektromagneten vom Schliesser. Gegen die Zusammenstossstelle beider Metallstäbe lässt Navez plötzlich einen Bolzen schlagen, der seine Stosskraft durch eine starke elastische Feder erhält, welche beim Aufziehen des Bolzens zusammengedrückt wird. Die Feder drückt nach beendigtem Aufziehen den Bolzen gegen einen Vorstoss; wird der Bolzen durch den Abdrücker des Instrumentes, auf den man mit der Hand aufdrückt, vom Vorstoss weggeschoben, so wirkt die Feder nunmehr bewegend und treibt den mit ihrem Ende fest verbundenen Bolzen an die Zusammenstossstelle beider Metallstäbe, welche hierdurch ausser metallische Berührung gesetzt werden, wodurch gleichzeitig die beiden durch die Stäbe geleiteten Ströme aufgehoben werden. Die Aufhebung des ersten Stromes bewirkt die Losreissung des Pendels, die des zweiten Stromes den Fall des Gewichtes vom Schliesser, worauf die Arretirung des Zeigers durch den Activirungsstrom des zweiten Elektromagneten erfolgt. Man erhält also durch Anwendung des Stromaufhebers die Summe aller Fehler ebenso, wie durch einen besonderen Schiessversuch.

Eine ausführlichere Beschreibung des Apparates, sowie Abbildungen desselben finden sich im *Journal des armes spéciales* 1853_a, *p.* 145.

Der Apparat von Navez hat allen Anforderungen entsprochen, welche man an einen Apparat zur Messung kleiner Flugzeiten der Geschosse machen kann, so dass derselbe in Folge der Prüfung von einer Commission, die aus höheren Offizieren und Technikern zusammengesetzt war, in der belgischen Artillerie Eingang fand. Bei einem Versuche, welcher angestellt wurde, um die Genauigkeit des Apparates zu prüfen, fand man (jede Zahl ist das Mittel aus zwei Versuchen)

Zeit, welche die Kugel braucht, um von der Mündung aus $16^m,54$ zurückzulegen	$0'',0509316$
Zeit, welche die Kugel braucht, um von $16^m,54$ vor der Mündung bis $30^m,54$ zu kommen	$0'',0450511$
Summe	$0'',0959827.$

Als man nun die Zeit direct mass, welche die Kugel brauchte, um von der Mündung aus $30^m,54$ zurückzulegen, erhielt man $0'',0959991$. Es wurde ferner das Verhältniss experimentell ausgemittelt, in welchem die durch das Robins'sche ballistische Pendel ermittelte Anfangsgeschwindigkeit zu derjenigen steht, welche mit Navez' elektroballistischem Pendel unter Zugrundelegung des Didion'schen Luftwiderstandsgesetzes ermittelt wurde. Man fand bei Anwendung des ersten $340^m,11$, bei Anwendung des zweiten Instrumentes $343^m,83$, welche Zahlen in dem Verhältnisse $1:1,01$ stehen. Das ballistische Pendel muss jedenfalls einen zu kleinen Werth liefern, weil der Elevationsbogen desselben zu klein ausfällt, indem ein Theil der lebendigen Kraft des Geschosses bei dessen Deformation in Wärme verwandelt wird. Das elektroballistische Pendel liefert dagegen die Geschwindigkeit etwas grösser, wegen Reibung an der Achse des Pendels und wegen des Luftwiderstandes. Die wahre Geschwindigkeit v hat daher bei dem angegebenen Versuche jedenfalls zwischen den Grenzen:

$$343^m,83 > v > 340^m,11$$

gelegen, welche sich so wenig unterscheiden, dass hiernach das elektroballistische Pendel für sich einen Werth giebt, welcher dem wahren Werthe so nahe liegt, als man nur wünschen kann.

Das elektroballistische Pendel empfiehlt sich auch um deswillen zur Anwendung, weil es mit allem Zubehör von Drähten, Gittern etc. nur etwas mehr als 800 Francs kostet, während ein gutes, für starke Caliber construirtes Robins'sches Pendel 10000 bis 20000 Francs zu stehen kommt.

4. Die gleichförmige Bewegung eines Cylinders.

A. Der Wheatstone'sche Apparat. Ein Cylinder rotirt gleichförmig um eine Schraube, deren Achse mit der seinigen zusammenfällt, so dass er bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ Zoll avancirt, ein Stift ist mit der Oberfläche des Cylinders in Berührung, er beschreibt eine Schraubenlinie auf derselben, die jedes Mal unterbrochen wird, sobald ein Strom aufhört, der einen Elektromagneten bildet, dessen Anker den Stift an den Cylindermantel andrückt. Vor Anstellung des Versuches werden zwei gleichstarke elektrische Ströme in entgegengesetzter Richtung durch die Spirale des Stiftelektromagneten geleitet, wovon der eine Strom zugleich durch das erste Wheatstone'sche Gitter, der andere Strom zugleich durch das zweite Wheatstone'sche Gitter am Ziele geführt ist. Beim Durchgange des Geschosses durch das erste Gitter wird natürlich der Schreibstift an die Metallfläche des Cylinders angedrückt, beim Durchgange des Geschosses durch das zweite Netz hört der Elektromagnet auf, eine Spiralfeder zu hemmen, welche nun den Stift wieder von der Metallfläche des Cylinders abhebt. Wheatstone hat auch angegeben, wie man seinen Apparat zur Messung der einzelnen Zeiten verwenden kann, welche das Geschoss braucht, um einzelne auf einander folgende Trajectorienbögen zurückzulegen. Wie man leicht findet, beschreibt hierbei der Schreibstift Stücken von Schraubenlinien auf der Cylinderoberfläche, wobei der Bogenabstand ihrer Anfänge von einander zur Berechnung der Zeiten dient.

Dieser Apparat ist nie ausgeführt worden, es ist auch zu bezweifeln, dass er gute Resultate geliefert haben würde, da sich eine gleichförmige Schraubenbewegung eines Cylinders sehr schwer herstellen lässt und da bei diesem Apparate keine Vorkehrung getroffen worden ist, um die bei Anwendung von Elektromagnetismus unvermeidlichen Fehler zu eliminiren.

B. Apparat von Breguet und Konstantinoff. Konstantinoff hatte bei Ansicht eines Wheatstone'schen Chronoskopes die Idee gefasst, durch Breguet ein Chronoskop construiren zu lassen, welches sich hinsichtlich seiner Construction dem unter A. beschriebenen Wheatstone'schen anschliessen sollte; er hoffte, einen noch zweckmässigeren Apparat zu erhalten, indem er den Metallcylinder gleichförmig um seine Achse rotiren liess, die Verzeichnung der Schraubenlinien erreicht er aber auf die Weise, dass über den um seine horizontale Achse rotirenden Cylinder zwei kleine Wagen auf Schienen gleichförmig und parallel zur Cylinderachse verschoben wurden, von denen Schreibstifte bis auf die Cylinderoberfläche herabhingen. Die Schreibstifte waren von einander unabhängig, hingen aber mit den Wheatstone'schen Gittern auf der Flugbahn in der Weise elektromagnetisch zusammen, dass die Anfänge der Schraubenlinienstücken, welche die Schreibstifte auf den Cylindermantel beschrieben, mit den Durchbohrungszeiten der Netze durch das Geschoss correspondirten.

Obwohl dieser Apparat von Breguet wirklich ausgeführt worden ist, so ist doch nichts weiter von demselben bekannt geworden, als dass Konstantinoff später Anstrengungen gemacht hat, ihn zu verbessern; von Resultaten, die mittelst desselben erhalten worden wären, hat man nie etwas vernommen.

Martin de Brettes hat den Apparat Breguet-Konstantinoff dadurch zu vereinfachen gesucht, dass er die Bewegung parallel zur Cylinderachse fortliess, so dass die Schreibstifte nur Kreisbögen auf dem rotirenden Cylinder verzeichnen konnten. Er zeigte auch, wie man an einem besonderen Apparate die Magnetisirungs- und Entmagnetisirungszeit von Elektromagneten messen könne, so dass man in den Stand gesetzt wäre, die Correctionen am Endresultat auszuführen, welche die Anwendung des Elektromagnetismus erfordert. Der Vorschlag von Martin de Brettes ist nicht in die Praxis übergegangen, wahrscheinlich würde sich dabei herausgestellt haben, dass die Handhabung des von ihm projectirten Apparates sehr umständlich gewesen wäre.

5. Die sprungweise Bewegung der Zeiger eines rasch gehenden Uhrwerkes.

A. Das Wheatstone'sche Chronoskop, erfunden im Jahre 1840, besteht aus einem Uhrwerk, welches einen Zeiger rasch vor einer Scheibe herumbewegt. Der Zeiger fängt seine Bewegung an oder er steht wieder still, je nachdem ein Elektromagnet (der mit einer Arretirvorrichtung am Uhrwerk zusammenhängt) unthätig gemacht oder activirt wird. Der Strom dessen Aufhebung den Zeiger in Bewegung setzen sollte, geht vor der Geschützmündung vorüber, die Kugel zerreisst den Draht, der Elektromagnet im Uhrwerk wird unthätig, der Zeiger beginnt zu rotiren. Die Kugel bringt durch ihre mechanische Erschütterung am Ziele (s. §. 1. B. a) den Schluss eines Stromes zu Stande, dessen Leitung durch den Elektromagneten im Uhrwerk geht; derselbe wird also reactivirt, der Zeiger steht wieder still. Dieser Apparat, bei welchem durch die Sprungweite des Zeigers die Flugzeit direct angegeben wird, ist zwar ausgeführt und zu einigen Experimenten in Woolwich verwendet worden, allein Wheatstone hat darüber nur die Mittheilung gemacht, dass der Apparat zur Messung kleiner Zeiten anwendbar sei. Wheatstone hat hierauf einen ähnlichen Apparat construiren lassen; allein er hat weder eine deutliche Beschreibung desselben, noch die mit demselben angestellten Versuche gegeben, welche nach seiner Aussage sehr für den Apparat sprechen sollen.

Hill hat das Uhrwerk des Wheatstone'schen Chronoskopes verbessert, indem er Sorge trug, dass die Arretirung des Uhrwerkes, bei welchem der eine Zeiger direct Zehntelsecunden, der andere Tausendtheilsecunden anzeigte, recht leicht durch den Strom bewerkstelligt wurde; allein da der Gang dieses Apparates ebenso, wie der des Wheatstone'schen nicht unabhängig von der Magnetisirungs- und Entmagnetisirungszeit gemacht worden ist, so dürfte man gute Resultate bei Anwendung desselben wohl bezweifeln. Martin de Brettes hat den Hill'schen Apparat für artilleristische Zwecke anwendbar zu machen gesucht; seine Bestrebungen sind nur Project geblieben.

Wenn nun aus dem Vorhergehenden schon kein günstiges Urtheil für die chronoskopischen Apparate gewonnen werden konnte, so werfen die Resultate preussischer Versuche geradezu ein ungünstiges Licht auf dieselben. Die preussische Artillerie hat sich 1843 mit der Aufsuchung der

Mittel beschäftigt, die Elektricität zur Messung der Geschwindigkeit der Geschosse anzuwenden. Anerkannt wissenschaftliche Männer, wie die Herren Hartmann und Hofmann, sowie der verstorbene geschickte Uhrmacher Leonhard in Berlin haben hauptsächlich mit einem auf folgende Weise construirten Apparate gearbeitet. Ein Zeiger an einem Chronometer machte in 2 Secunden einen Umlauf vor einem Zifferblatte, welches in 1000 Theile getheilt war. Der Zeiger wurde auf elektromagnetischem Wege in Bewegung gesetzt, indem die Kugel durch ein erstes Wheatstone'sches Gitter auf der Flugbahn hindurchging und auf ähnliche Weise arretirt, wenn die Kugel das zweite Gitter passirte; allein hierbei differirten die beobachteten Zeiten von $0'',09$ oft um $0'',03$ unter einander. Hiernach ist es sehr unwahrscheinlich, dass man überhaupt ein Chronoskop zu genauen Beobachtungen sehr kleiner Flugzeiten von Geschossen einrichten könne.

Martin de Brettes hat auch versucht, die von Breguet 1843 erfundene Terzienuhr (*compteur à pointage*) zu ballistischen Zwecken zu benutzen; allein da bei dieser nur eine Genauigkeit von $\frac{1}{10}''$ zu erreichen ist, dürfte sie wohl weniger zur Lösung der hier besprochenen Aufgaben dienen können.

6. Die Bewegung der Magnetnadel.

Diese Bewegung ist, wie §. 2 c gezeigt wurde, von Pouillet angewendet worden; sie ist an dem angegebenen Orte so ausführlich behandelt worden, dass wir auf denselben zurückweisen müssen.

§. 4. Ueber die Anwendung des elektroballistischen Pendels von Navez.

Weder das Newton'sche Luftwiderstandsgesetz (Widerstand proportional av^2, a eine Constante, v die Geschwindigkeit), noch das von Didion vorgeschlagene (Widerstand proportional $Av^2 + Bv^4$, A und B Constanten) genügen für die grossen Geschwindigkeiten der Ballistik. Dies zeigte z. B. der preussische Oberst Otto (Ueber den Luftwiderstand, Archiv für preuss. Art.- u. Ing.-Offiziere, Bd. 30, S. 75), indem er Folgendes nachwies. Wenn man bei sehr flachen Bahnen zwei Schlussweiten und dazu gehörige Flugzeigten misst und aus diesen die Anfangsgeschwindigkeiten und die Constante des Newton'schen oder die Constanten des Didion'schen Luftwiderstandsgesetzes berechnet, so stellt sich ein sehr erhebliches Steigen der Anfangsgeschwindigkeiten mit dem Elevationswinkel heraus. Beide Luftwiderstandsgesetze genügen somit für die grossen Geschwindigkeiten der Ballistik nicht. Soll nun irgend ein anderes hypothetisches Luftwiderstandsgesetz geprüft werden, so müssen zunächst Beobachtungswerthe über die Flugbahnen gewonnen werden. Ausser den Coordinaten der Trajectorien können jetzt aber auch noch die Zeiten ermittelt werden, welche ein Geschoss braucht, um einzelne Trajectorienbögen zu durchlaufen. Die ballistischen Beobachtungen können demnach durch das elektroballistische Pendel von Navez so vervollständigt werden, dass von ihnen mit Recht Aufschluss über das wahre Luftwiderstandsgesetz gehofft werden darf.

Das elektroballistische Pendel von Navez ist noch zu neu, als dass bereits viele Beobachtungen mittelst desselben gemacht worden sein könnten; seine Anwendung hat sich bis jetzt nur auf technische Zwecke erstreckt und zwar auf folgende Versuchsreihen beschränkt:

1) Versuche, welche im Jahre 1850 in Lüttich angestellt worden sind, um den Einfluss verschiedener Lademethoden auf die Anfangsgeschwindigkeiten der Geschosse zu ermitteln (Archiv f. preuss. Art.- u. Ing.-Offiziere, Bd. 30, S. 162). Bei diesen Versuchen wurde die Zeit ermittelt, in welcher die Kugel von der Mündung an entweder einen Raum von $27^m,16$ oder $35^m,36$ durchlief und aus den Beobachtungsresultaten die Anfangsgeschwindigkeiten unter Zugrundelegung des Newton'schen Luftwiderstandsgesetzes berechnet.

2) Versuche, welche angestellt wurden, um den Einfluss des Elevationswinkels des Geschützes und des Gewichtes des Geschosses auf die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses zu untersuchen (Archiv für preuss. Art.- u. Ing.-Offiziere, Bd. 32, S. 176). Bei diesen Versuchen ist die Zeit gemessen worden, welche das Geschoss brauchte, um von der Mündung des Rohres an 30^m zurückzulegen; bei der Berechnung ist aber das Didion'sche Luftwiderstandsgesetz zu Grunde gelegt worden.

Da ich mir zur Berichterstattung über vorliegenden Gegenstand nicht überall die Originalberichte verschaffen konnte, und da mir auch ungeachtet meiner Bemühungen Einzelnes gänzlich unbekannt geblieben sein kann, so bitte ich hier am Schlusse meiner Arbeit alle Diejenigen, welche dieselbe zu berichtigen oder zu ergänzen vermögen, mich freundlichst durch Ihre Mittheilungen unterstützen zu wollen.

Kleinere Mittheilungen.

VI. Integration der linearen Differentialgleichung

1) $$y''' = xy' - ny$$

mittelst bestimmter Integrale, unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Von Simon Spitzer, Professor des Merkantilrechnens an der Wiener Handelsakademie.

Nach den bis jetzt bekannten Methoden lässt sich das Integrale der Gleichung 1) nicht bestimmen, es muss daher ein neuer Weg eingeschlagen werden, um zu dem Integrale der Gleichung 1) zu gelangen. Differentiirt man nämlich die Gleichung 1) n Mal nach x, so erhält man:

2) $$y^{(n+3)} = x\, y^{(n+1)}$$

und hieraus ergiebt sich nach der Laplace'schen Methode*) folgender Werth für $y^{(n+1)}$:

3) $$y^{(n+1)} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} (C_1\, e^{\mu_1 ux} + C_2\, e^{\mu_2 ux} + C_3\, e^{\mu_3 ux})\, du,$$

in welchem C_1, C_2, C_3 willkürliche, blos an die Gleichung

4) $$\frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_3}{\mu_3} = 0$$

gebundene Constante bedeuten, und μ_1, μ_2, μ_3 die drei Wurzeln der Einheit sind. — Wir wollen nun den Ausdruck 3) so schreiben:

5) $$y^{(n+1)} = SC \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \,.\, e^{\mu ux}\, du$$

und integriren sodann denselben $n+1$ Mal nach x, hierdurch erhalten wir:

6) $$y = SC \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu ux} - 1 - \mu ux - \frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!} - \ldots - \frac{\mu^n u^n x^n}{n!}}{\mu^{n+1}\, u^{n+1}} \right.$$
$$\left. + \varphi_1(u) + x\varphi_2(u) + x^2 \varphi_3(u) + \ldots + x^n \varphi_{n+1}(u) \right] du.$$

---

*) Scherk, Jacobi, Lobatto und Petzval beschäftigten sich mit der Integration der Gleichung $y^{(n)} = xy$.

Denn dieser Ausdruck führt, $n+1$ Mal differentiirt, wieder auf die Gleichung 5) zurück, aus der er durch Integration hervorging. $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u) \ldots \varphi_{n+1}(u)$ sind willkürliche Functionen von u.

Der in 6) gewonnene Ausdruck für y soll aber nicht blos der Gleichung 5) genügen, sondern auch der Gleichung 1); dies beschränkt die Willkürlichkeit der mit $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u) \ldots \varphi_{n+1}(u)$ bezeichneten Functionen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Substituirt man nämlich den in 6) stehenden Werth von y in die Gleichung 1), so erhält man, da

$$y' = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2u^2x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-1}u^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}}{\mu^n u^n}\right.$$

$$\left.+\varphi_2(u)+2x\varphi_3(u)+3x^2\varphi_4(u)+\ldots+nx^{n-1}\varphi_{n+1}(u)\right]du,$$

$$y''' = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2u^2x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-3}u^{n-3}x^{n-3}}{(n-3)!}}{\mu^{n-2} u^{n-2}}\right.$$

$$+1.2.3\,\varphi_4(u)+2.3.4\,x\varphi_5(u)+3.4.5\,x^2\varphi_6(u)+\ldots$$

$$\left.+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\varphi_{n+1}(u)\right]du$$

ist, folgenden Werth für $y'''-xy'+ny$:

7)

$$y'''-xy'+ny = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2u^2x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-3}u^{n-3}x^{n-3}}{(n-3)!}}{\mu^{n-2}u^{n-2}}\right.$$

$$-x\,\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2u^2x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-1}u^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}}{\mu^n u^n}$$

$$+n\,\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2u^2x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^n u^n x^n}{n!}}{\mu^{n+1}u^{n+1}}$$

$$+[1.2.3\,\varphi_4(u)+n\varphi_1(u)]+[2.3.4\,\varphi_5(u)+(n-1)\varphi_2(u)]\,x$$

$$+[3.4.5\,\varphi_6(u)+(n-2)\varphi_3(u)]\,x^2+\ldots$$

$$+[(n-3)(n-2)(n-1)\varphi_n(u)+4\varphi_{n-3}(u)]\,x^{n-4}$$

$$+[(n-2)(n-1)n\,\varphi_{n+1}(u)+3\varphi_{n-2}(u)]\,x^{n-3}$$

$$\left.+2x^{n-2}\varphi_{n-1}(u)+x^{n-1}\varphi_n(u)\right]du.$$

Wenn wir nun voraussetzen, dass das unbestimmte Integrale des eben aufgeschriebenen Ausdruckes folgenden Werth habe:

$$8)\quad -SCe^{-\frac{u^3}{3}}\cdot\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2u^2x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-1}u^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}}{\mu^{n+1}u^n},$$

dann muss sein:

$$\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-3}u^{n-3}x^{n-3}}{(n-3)!}}{\mu^{n-2}u^{n-2}}$$

$$-x\,.\,\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-1}u^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}}{\mu^{n}u^{n}}$$

$$+n\,.\,\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n}u^{n}x^{n}}{n!}}{\mu^{n-1}u^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
&+[1.2.3\,\varphi_4(u)+n\varphi_1(u)]+[2.3.4\,\varphi_5(u)+(n-1)\,\varphi_2(u)]\,x\\
&+[3.4.5\,\varphi_6(u)+(n-2)\,\varphi_3(u)]\,x^2+\ldots\\
&+[(n-3)(n-2)(n-1)\,\varphi_n(u)+4\varphi_{n-3}(u)]\,x^{n-4}\\
&+[(n-2)(n-1)n\,\varphi_{n+1}(u)+3\varphi_{n-2}(u)]\,x^{n-3}\\
&\quad+2\varphi_{n-1}(u)\,x^{n-2}+\varphi_n(u)\,x^{n-1}
\end{aligned}$$

$$=\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-1}u^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}}{\mu^{n-2}u^{n-2}}$$

$$+n\,.\,\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-1}u^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)}}{\mu^{n+1}u^{n+1}}$$

$$-x\,.\,\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x-\frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!}-\ldots-\frac{\mu^{n-2}u^{n-2}x^{n-2}}{(n-2)!}}{\mu^{n}u^{n}}$$

nd dies giebt nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned}
&[1.2.3\,\varphi_4(u)+n\varphi_1(u)]+[2.3.4\,\varphi_5(u)+(n-1)\,\varphi_2(u)]\,x\\
&+[3.4.5\,\varphi_6(u)+(n-2)\,\varphi_3(u)]\,x^2\ldots\\
&+[(n-3)(n-2)(n-1)\,\varphi_n(u)+4\varphi_{n-3}(u)]\,x^{n-4}\\
&+[(n-2)(n-1)n\,\varphi_{n+1}(u)+3\varphi_{n-2}(u)]\,x^{n-3}\\
&\quad+2\varphi_{n-1}(u)\,x^{n-2}+\varphi_n(u)\,x^{n-1}=-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}-\frac{\mu u x^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

lieraus geht hervor folgendes System von Gleichungen:

$$9)\quad\left\{\begin{aligned}
&1.2.3\,\varphi_4(u)+n\varphi_1(u)=0,\\
&2.3.4\,\varphi_5(u)+(n-1)\,\varphi_2(u)=0,\\
&3.4.5\,\varphi_6(u)+(n-2)\,\varphi_3(u)=0,\\
&\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\\
&(n-3)(n-2)(n-1)\,\varphi_n(u)+4\varphi_{n-3}(u)=0,\\
&(n-2)(n-1)n\,\varphi_{n+1}(u)+3\varphi_{n-2}(u)=0.
\end{aligned}\right.$$

$$10)\quad\left\{\begin{aligned}
\varphi_n(u)&=-\frac{\mu u}{(n-1)!}.\\
\varphi_{n-1}(u)&=-\frac{1}{2(n-2)!}.
\end{aligned}\right.$$

Aus der letzten Gleichung des Systems 9) folgt:

$$\varphi_{n-2}(u) = -\frac{(n-2)(n-1)n}{3}\varphi_{n+1}(u),$$

also hängt $\varphi_{n-2}(u)$ ab von der willkürlichen Function $\varphi_{n+1}(u)$; setzen wir letztere der Einfachheit wegen gleich Null, so ist auch $\varphi_{n-2}(u)$ gleich Null, also haben wir:

$$11)\qquad \begin{cases} \varphi_{n+1}(u) = 0, \\ \varphi_{n-2}(u) = 0. \end{cases}$$

Aus der vorletzten Gleichung des Systems 9) folgt:

$$\varphi_{n-3}(u) = -\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{4}\varphi_n(u),$$

und wird hierin statt $\varphi_n(u)$ sein in 10) stehender Werth gesetzt, so erhält man:

$$12)\qquad \varphi_{n-3}(u) = \frac{\mu u}{4(n-4)!}.$$

Die vorvorletzte Gleichung des Systems 9) lautet:

$$(n-4)(n-3)(n-2)\varphi_{n-1}(u) + 5\varphi_{n-4}(u) = 0$$

und giebt:

$$\varphi_{n-4}(u) = -\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{5}\varphi_{n-1}(u).$$

Setzt man hierein statt $\varphi_{n-1}(u)$ seinen in 10) stehenden Werth, so erhält man:

$$\varphi_{n-4}(u) = \frac{1}{2.5(n-5)!}$$

u. s. f. Das System der aus 9) und 10) abgeleiteten Gleichungen lautet daher folgendermaassen:

$$\varphi_{n+1}(u) = 0,\quad \varphi_n(u) = -\frac{\mu u}{1.(n-1)!},\quad \varphi_{n-1}(u) = -\frac{1}{2.(n-2)!},$$

$$\varphi_{n-2}(u) = 0,\quad \varphi_{n-3}(u) = \frac{\mu u}{1.4(n-4)!},\quad \varphi_{n-4}(u) = \frac{1}{2.5(n-5)!},$$

$$\varphi_{n-5}(u) = 0,\quad \varphi_{n-6}(u) = -\frac{\mu u}{1.4.7(n-7)!},\quad \varphi_{n-7}(u) = -\frac{1}{2.5.8(n-8)!},$$

. . . .

und daher ist:

$$13)\qquad y = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x - \frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!} - \cdots - \frac{\mu^n u^n x^n}{n!}}{\mu^{n+1} u^{n+1}}\right.$$
$$+ \mu u\left(-\frac{x^{n-1}}{1.(n-1)!} + \frac{x^{n-4}}{1.4(n-4)!} - \frac{x^{n-7}}{1.4.7(n-7)!} + \cdots\right)$$
$$\left.+\left(-\frac{x^{n-2}}{2.(n-2)!} + \frac{x^{n-5}}{2.5(n-5)!} - \frac{x^{n-8}}{2.5.8(n-8)!} + \cdots\right)\right]du.$$

Dieser Werth von y giebt nun in die Gleichung 1), welche folgendermaassen geschrieben werden kann:

$$y''' - xy' + ny = 0$$

substituirt, das Resultat:

$$8)\quad -SCe^{-\frac{u^3}{3}} \cdot \frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x - \frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!} - \ldots - \frac{\mu^{n-1} u^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}}{\mu^{n+1} u^n},$$

nur muss noch hierein $u = \infty$ und $u = 0$ gesetzt und die Resultate dieser Substitutionen von einander abgezogen werden.

Für $u = \infty$ verschwindet der Ausdruck 8), für $u = 0$ aber erscheint er in der Form $\frac{0}{0}$, dessen wahrer Werth

$$- SC \frac{x^n}{\mu n!}$$

ist, was auch so geschrieben werden kann:

$$-\frac{x^n}{n!}\left(\frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_3}{\mu_3}\right)$$

und daher vermöge der Gleichung 4) verschwindet. Es ist daher der in 13) stehende Ausdruck das mit zwei willkürlichen Constanten versehene Integrale der Gleichung 1).

So ist z. B. das Integrale der Gleichung

$$y''' = xy' - y$$

folgendes:

$$y = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} - \mu u\right] du;$$

ferner hat das Integrale der Gleichung

$$y''' = xy' - 2y$$

die Gestalt:

$$y = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x - \frac{\mu^2 u^2 x^2}{2}}{u^3} - \mu u x - \tfrac{1}{2}\right] du.$$

Das Integrale der Gleichung:

$$y''' = xy' - 3y$$

ist:

$$y = SC\int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\left[\frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x - \frac{\mu^2 u^2 x^2}{2!} - \frac{\mu^3 u^3 x^3}{3!}}{\mu^4 u^4} - \frac{\mu u x^2}{2} - \frac{x}{2}\right] du$$

etc. etc.

Wir haben bis jetzt blos zwei particuläre Integrale der Gleichung 1) gegeben, nicht aber das vollständige Integrale derselben. Es lässt sich aber leicht auch das dritte particuläre Integrale finden, denn dieses dritte erscheint in der Form eines ganzen algebraischen Polynoms, wie sich folgendermaassen darthun lässt: Die beiden Differentialgleichungen:

1) $$y''' = xy' - ny,$$

2) $$y^{(n+3)} = xy^{(n+1)}$$

haben gewiss drei particuläre Integrale gemeinschaftlich, denn dieselben drei particulären Integrale, welche der Gleichung 1) genügen, genügen auch der Gleichung 2), weil die Gleichung 2) eine unmittelbare Folge der Gleichung 1) ist. Die Gleichung 2) hat aber ausser den genannten drei particulären Integralen noch n particuläre Integrale, die nicht der Gleichung 1) genügen, und die blos in Rechnung eingeführt worden sind durch das n malige Differentiiren der Gleichung 1). Es folgt aber aus 2):

9) $$y = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0$$

unter $A_n, A_{n-1}, A_{n-2} \ldots A_1, A_0$ willkürliche Constante verstanden. Da dieser Ausdruck $n+1$ willkürliche Constante enthält, so repräsentirt er $n+1$ particuläre Integrale der Gleichung 2); wenigstens eines dieser particulären Integrale gehört daher der Gleichung 1) an. Um dieses zu finden, setzen wir den in 9) aufgestellten Werth von y in 1), und bestimmen die Constanten $A_n, A_{n-1}, A_{n-2} \ldots A_1, A_0$ so, dass der Gleichung 1) identisch Genüge geschieht.

Aus

$$y = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots$$

folgt:

$$y' = nA_n x^{n-1} + (n-1) A_{n-1} x^{n-2} + (n-2) A_{n-2} x^{n-3} + \ldots$$

$$y''' = n(n-1)(n-2) A_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) A_{n-1} x^{n-4}$$
$$+ (n-2)(n-3)(n-4) A_{n-2} x^{n-5} + \ldots$$

daher ist:

$$y''' - xy' + ny = A_{n-1} x^{n-1} + 2A_{n-2} x^{n-2} + [3A_{n-3} + n(n-1)(n-2) A_n] x^{n-3}$$
$$+ [4A_{n-4} + (n-1)(n-2)(n-3) A_{n-1}] x^{n-4} + \ldots = 0$$

und diese Gleichung zerfällt in folgende:

$$A_{n-1} = 0,$$
$$A_{n-2} = 0,$$
$$3A_{n-3} + n(n-1)(n-2) A_n = 0,$$
$$4A_{n-4} + (n-1)(n-2)(n-3) A_{n-1} = 0,$$
$$5A_{n-5} + (n-2)(n-3)(n-4) A_{n-2} = 0,$$

daher ist:

$$A_{n-1} = 0,\ A_{n-2} = 0,\ A_{n-3} = -\frac{n(n-1)(n-2)}{3} A_n,$$

$$A_{n-4} = 0,\ A_{n-5} = 0,\ A_{n-6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3.6} A_n,$$

$$A_{n-7} = 0,\ A_{n-8} = 0,$$

$$A_{n-9} = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{3.6.9} A_n;$$

. . . .

Setzen wir

$$A_n = \frac{C}{n!},$$

so ist:

$$A_{n-3} = -\frac{C}{3(n-3)!},\quad A_{n-6} = \frac{C}{3.6(n-6)!},\quad A_{n-9} = -\frac{C}{3.6.9(n-9)!},\ldots$$

und daher ist ein particuläres Integrale der Gleichung 1) stets von folgender Gestalt:

$$y = C\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-3}}{3(n-3)!} + \frac{x^{n-6}}{3.6(n-6)!} - \frac{x^{n-9}}{3.6.9(n-9)!} + \ldots\right].$$

Ganz auf gleiche Weise könnte man nicht nur die Gleichung

$$y''' = A(xy' - ny),$$

sondern auch die viel allgemeinere Gleichung

$$y^{(m)} = A(xy' - ny)$$

behandeln, woselbst A beliebig und n ganz und positiv ist.

Der specielle Fall

14) $$y'' = xy' - ny$$

gestattet eine viel einfachere Behandlungsweise. Setzt man nämlich

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} z,$$

so erhält man, da

$$y' = e^{\frac{x^2}{2}}(z' + xz),$$

$$y'' = e^{\frac{x^2}{2}}(z'' + 2xz' + z + x^2 z)$$

ist, folgende Gleichung zwischen z und x

$$z'' + xz' + (n+1)z = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich auch folgendermaassen schreiben:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\frac{d^{1-n}z}{dx^{1-n}} + z\frac{d^{-n}z}{dx^{-n}}\right] = 0.$$

Aus ihr folgt:

$$\frac{d^{1-n}z}{dx^{1-n}} + x\frac{d^{-n}z}{dx^{-n}} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{n+1}x^n$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\frac{d^{-n}z}{dx^{-n}} = L_1 e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}dx + L_2 + L_3 x + L_4 x^2 + \ldots + L_{n+1}x^{n-1},$$

daher ist

$$z = \frac{d^n}{dx^n}\left[L_1 e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}dx\right]$$

und endlich

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}dx\right]$$

das vollständige Integrale der Gleichung 14).

Man kann das vollständige Integrale der Gleichung

$$14)\qquad y'' = xy' - ny$$

auch so schreiben:

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] + C_2 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{\frac{x^2}{2}} dx\right]$$

und hierbei bemerken, dass das erste dieser beiden particulären Integrale eine ganze algebraische Function von x ist, die entwickelt folgende Gestalt hat:

$$y = C\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-2}}{2(n-2)!} + \frac{x^{n-4}}{2.4(n-4)!} - \frac{x^{n-6}}{2.4.6(n-6)!} + \ldots\right]$$

VII. Notiz über Evoluten. Von Dr. A. Enneper. — In den „*Annales de mathématiques*" (*t. XX*, *pag.* 216, *Juin* 1861) ist ein Theorem zu beweisen aufgestellt, welches sich in etwas verschiedener Fassung in den „*Comptes rendus*" von 1861 befindet. Dieses Theorem lässt sich auf folgende Weise ausdrücken:

> Wird eine Rotationsfläche von einem Punkte oder parallelen Strahlen beleuchtet, so wirft die Fläche auf eine Ebene E, senkrecht zur Rotationsachse, einen Schatten, dessen Begrenzung eine gewisse Curve C ist. Nimmt man die Trennungslinie von Licht und Schatten auf der Rotationsfläche und die Achse der Fläche zu Directricen einer Conoidfläche, so ist die Begrenzung des Schattens, welchen die Conoidfläche auf die Ebene E wirft, die Evolute der Curve C.

Am angeführten Orte ist dieser Satz nur für parallele Strahlen bemerkt; es ist indessen nicht schwer, denselben für den Fall zu beweisen, wenn die Fläche von einem Punkte beleuchtet wird.

Ist u eine Function von ϑ, so kann die Gleichung einer Rotationsfläche als Resultat der Elimination von φ und ϑ zwischen folgenden Gleichungen angesehen werden,

$$1)\qquad x = u\cos\varphi,\quad y = u\sin\varphi,\quad z = \int u' \cot\vartheta\,\partial\vartheta,\quad u' = \frac{\partial u}{\partial\vartheta},$$

wenn die Achse der z zur Rotationsachse genommen wird. Geht die berührende Ebene im Punkte (x, y, z)

$$(\xi - x)\cos\vartheta\cos\varphi + (\eta - y)\cos\vartheta\sin\varphi = (\zeta - z)\sin\vartheta$$

durch den festen Punkt (a, b, c), so findet die Gleichung statt:

$$(a - x)\cos\varphi + (b - y)\sin\varphi = (c - z)\tan\vartheta,$$

d. h.

$$2)\qquad a\cos\varphi + b\sin\varphi = u + \tan\vartheta\left(c - \int u' \cot\vartheta\,\partial\vartheta\right).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 1) bestimmt auf der Rotationsfläche die Berührungscurve der umschriebenen Kegelfläche, deren Spitze im Punkt (a, b, c) liegt. Die Gleichungen der Directrix der Kegelfläche sind:

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = u\cos\varphi, \quad y_1 = u\sin\varphi, \quad z_1 = \int u' \cot\vartheta\,\partial\vartheta, \\ a\cos\varphi + b\sin\varphi = u + \tan\vartheta\,.\left(c - \int u' \cot\vartheta\,\partial\vartheta\right). \end{cases}$$

Durch Elimination von ϑ zwischen den Gleichungen

$$4)\qquad \frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y-b}{y_1-b} = \frac{z-c}{z_1-c}$$

folgt die Gleichung der Kegelfläche, wobei φ als Function von ϑ angesehen ist, bestimmt durch die Gleichung 2).

Nimmt man die Curve doppelter Krümmung, bestimmt durch die Gleichungen 3), und die Achse der Rotationsfläche zu Directricen einer Conoidfläche, so erhält man die Gleichung derselben durch Elimination von ϑ und φ zwischen der Gleichung 2) und den folgenden:

$$5)\qquad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad z = z_1.$$

Sieht man φ als Function von ϑ an, bestimmt durch die Gleichung 2), so ergiebt sich die Gleichung der Conoidfläche auch durch Elimination von v und ϑ zwischen den folgenden Gleichungen:

$$6)\qquad x = v\cos\varphi, \quad y = v\sin\varphi, \quad z = z_1.$$

Die Gleichung der berührenden Ebene zur Conoidfläche im Punkte (x, y, z) ist:

$$7)\qquad (\xi - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial z}{\partial y} = \zeta - z.$$

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial\vartheta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\vartheta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\vartheta}, \qquad \frac{1}{v}\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},$$

oder

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad 0 = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$$

findet man leicht:

$$v\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\varphi\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta}, \quad v\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\varphi\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta}.$$

Die Gleichung 7) geht hierdurch über in:

$$-(\xi - v\cos\varphi)\sin\varphi\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta} + (\eta - v\sin\varphi)\cos\varphi\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta} = (\zeta - z_1)\,v\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},$$

d. h.

$$(\eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi)\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta} = (\zeta - z_1)\,v\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

Geht diese Ebene durch den Punkt (a, b, c), so ist

$$8)\qquad (b\cos\varphi - a\sin\varphi)\frac{\partial z_1}{\partial\vartheta} = (c - z_1)\,v\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

Setzt man den vorstehenden Werth von v in die Gleichungen 6), so erhält man die Gleichungen der Berührungscurve der Kegelfläche, welche vom Punkt (a, b, c) aus der Conoidfläche umschrieben ist. Ist $(x_2, y_2, z_2 = z_1)$ ein Punkt der Berührungscurve, so ist die Kegelfläche durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x_2 = \cos\varphi \frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{(c-z_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}} \frac{\partial z_1}{\partial\vartheta}, \quad y_2 = \sin\varphi \frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{(c-z_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}} \frac{\partial z_1}{\partial\vartheta},$$

$$9) \qquad \frac{x-a}{x_2-a} = \frac{y-b}{y_2-b} = \frac{z-c}{z_2-c}.$$

Die beiden Kegelflächen 4) und 9) treffen die Ebene der x und y in zwei Curven C und C', für welche folgendes System von Gleichungen besteht:

$$10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a - \frac{u\cos\varphi - a}{z_1 - c} c \\ y &= b - \frac{u\sin\varphi - b}{z_1 - c} c \end{aligned} \right\} \text{(Curve } C.)$$

$$11) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= a - \frac{c}{z_1 - c}\left[\frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{(c-z_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}} \frac{\partial z_1}{\partial\vartheta}\cos\varphi - a\right] \\ y' &= b - \frac{c}{z_1 - c}\left[\frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{(c-z_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}} \frac{\partial z_1}{\partial\vartheta}\sin\varphi - b\right] \end{aligned} \right\} \text{(Curve } C'.)$$

$$12) \quad a\cos\varphi + b\sin\varphi = u + \tang\vartheta.(c - z_1), \quad z_1 = \int u'\cot\vartheta\,\partial\vartheta, \quad \frac{\partial z_1}{\partial\vartheta} = u'\cot\vartheta.$$

Durch Differentiation von 12) folgt:

$$13) \qquad (b\cos\varphi - a\sin\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{c - z_1}{\cos^2\vartheta}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$14) \qquad c\left\{\left(\frac{b\cos\varphi - a\sin\varphi}{c - z_1}\right)^2 \cos^2\vartheta\, u'\cot\vartheta - u\right\} = M,$$

substituirt für $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ seinen Werth aus 13) in die Gleichungen 11), subtrahirt diese Gleichungen von den Gleichungen 10), so findet man:

$$15) \qquad x - x' = \frac{M}{z_1 - c}\cos\varphi, \quad y - y' = \frac{M}{z_1 - c}\sin\varphi.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 13) und 14) geben die Gleichungen 10) nach ϑ differentiirt:

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = \frac{M}{b\cos\varphi - a\sin\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta}, \quad \frac{\partial y}{\partial\vartheta} = -\frac{M}{b\cos\varphi - a\sin\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{\cos^2\vartheta}.$$

Hieraus findet man leicht:

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta^2} - \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2} = \left(\frac{M}{b\cos\varphi - a\sin\varphi}\,\frac{1}{\cos^2\vartheta}\right)^2 \frac{1}{b\cos\varphi - a\sin\varphi}\,\frac{c - z_1}{\cos^2\vartheta}.$$

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)^2\right\}} = \frac{M}{b\cos\varphi - a\sin\varphi}\,\frac{1}{\cos^2\vartheta}.$$

Ist also ϱ der Krümmungshalbmesser der Curve C im Punkte C', so geben die beiden vorstehenden Gleichungen:

$$16)\qquad \varrho = \frac{M}{c - z_1}.$$

Der Winkel λ, welchen die Normale zur Curve C im Punkte (x, y) mit der Achse der x bildet, ist durch die Gleichung bestimmt:

$$tang\,\lambda = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial y}{\partial \vartheta}} = tang\,\varphi$$

oder $\lambda = \varphi$. Die Gleichungen 15) lassen sich wegen 16) schreiben:

$$x' - x = \varrho\,cos\,\varphi, \quad y' - y = \varrho\,sin\,\varphi,$$

woraus unmittelbar folgt, dass ein Punkt (x', y') der Curve C angehört.

Geschieht die Beleuchtung der Fläche durch Strahlen, welche der Geraden

$$\frac{x}{cos\,\alpha} = \frac{y}{cos\,\beta} = \frac{z}{cos\,\gamma}$$

parallel sind, so hat man statt der Gleichungen 2) und 8) die folgenden:

$$cos\,\alpha\,cos\,\varphi + cos\,\beta\,sin\,\varphi = cos\,\gamma\,.\,tang\,\vartheta,$$

$$(cos\,\beta\,cos\,\varphi - cos\,\alpha\,sin\,\varphi)\frac{\partial z_1}{\partial \vartheta} = v\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\,cos\,\gamma.$$

Da die weitere Ausführung der Rechnungen nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit bietet, so möge dieselbe hier unterbleiben.

VIII. Ueber eine Reductionsformel. Von SIMON SPITZER. — Durch meine Studien über Differentialgleichungen wurde ich zu der Frage veranlasst, ob und in welchen Fällen das Integral

$$1)\qquad \int \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n}{(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^q}\,dx$$

auf die Form

$$2)\qquad K\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^q} + \frac{K_1 + K_2 x + K_3 x^2 + \ldots + K_n x^{n-1}}{(x-\alpha)^{p-1}\,(x-\beta)^{q-1}}$$

gebracht werden kann.

Differentiirt man beide Ausdrücke, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n}{(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^q} &= \frac{K}{(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^q}\\ &+ \frac{K_2 + 2K_3 x + \ldots + (n-1)\,K_n x^{n-2}}{(x-\alpha)^{p-1}\,(x-\beta)^{q-1}}\\ &+ (1-p)\,(x-\beta)\,\frac{K_1 + K_2 x + \ldots + K_n x^{n-1}}{(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^q}\\ &+ (1-q)\,(x-\alpha)\,\frac{K_1 + K_2 x + \ldots + K_n x^{n-1}}{(x-\alpha)^p\,(x-\beta)^q}.\end{aligned}$$

Multiplicirt man beiderseits mit $(x-\alpha)^p(x-\beta)^q$, ordnet rechter Hand nach Potenzen von x und vergleicht endlich die Coefficienten gleicher Potenzen von x, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
C_n &= (n+1-p-q)\,K_n,\\
C_{n-1} &= (n-p-q)\,K_{n-1}+[\beta(p-n)+\alpha(q-n)]\,K_n,\\
C_{n-2} &= (n-1-p-q)\,K_{n-2}+[\beta(p-n+1)+\alpha(q-n+1)]\,K_{n-1}\\
&\quad +(n-1)\,\alpha\beta\,K_n,\\
C_{n-3} &= (n-2-p-q)\,K_{n-3}+[\beta(p-n+2)+\alpha(q-n+2)]\,K_{n-2}\\
&\quad +(n-2)\,\alpha\beta\,K_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_2 &= (3-p-q)\,K_2+[\beta(p-3)+\alpha(q-3)]\,K_3+3\alpha\beta\,K_4,\\
C_1 &= (2-p-q)\,K_1+[\beta(p-2)+\alpha(q-2)]\,K_2+2\alpha\beta\,K_3,\\
C_0 &= (1-p-q)\,K_0+[\beta(p-1)+\alpha(q-1)]\,K_1+\alpha\beta\,K_2,
\end{aligned}$$

wobei der Symmetrie wegen $K=(1-p-q)\,K_0$ gesetzt wurde. Diese Gleichungen bestimmen der Reihe nach $K_n, K_{n-1}, \ldots K_1, K_0$, falls $p+q$ nicht eine der Zahlen $1, 2, 3\ldots(n+1)$ ist.

Als Anwendung der zwischen 1) und 2) bestehenden Gleichung zeigen wir die Integration der Differentialgleichung

$$3)\qquad (1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)\,y=0,$$

worin n eine ganz positive Zahl bedeuten möge.

Integrirt man die vorstehende Differentialgleichung $(n+1)$ Mal nach einander, indem man

$$\int y\,dx=y^{(-1)},\quad \int y^{(-1)}\,dx=y^{(-2)},\ldots$$

setzt, so erhält man

$$(1-x^2)\,y^{(1-n)}+2nx\,y^{(-n)}=C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n,$$

was auch rückwärts durch $(n+1)$malige Differentiation leicht zu prüfen ist. Setzt man für den Augenblick $y^{(-n)}=z$, so hat man die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx}+\frac{2nx}{1-x^2}\,z=\frac{C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n}{1-x^2};$$

diese giebt:

$$z=(1-x^2)^n\int\frac{C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n}{(1-x^2)^{n+1}}\,dx,$$

oder nach dem Vorigen:

$$\begin{aligned}
y^{(-n)}=K\,(1-x^2)^n&\int\frac{dx}{(1-x^2)^{n+1}}\\
&+K_1+K_2x+K_3x^2+\ldots+K_nx^{n-1},
\end{aligned}$$

worin $K, K_1, \ldots K_n$ von den willkürlichen Constanten $C_0, C_1, \ldots C_n$ abhängen. Durch $n$malige Differentiation der vorigen Gleichung folgt als completes Integral von No. 3):

$$y=K\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\left\{\int\frac{dx}{(1-x^2)^{n+1}}+\text{Const.}\right\}\right]$$

wofür man schreiben kann:

$$y = c_1 \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right] + c_2 \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n \int \frac{dx}{(1-x^2)^{n+1}}\right]$$

oder nach Bertram und Heine:

$$y = c_1 D_x^n \left[(1-x^2)^n\right] + c_2 D_x^n \left[(1-x^2)^n \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2)^{n+1}}\right].$$

Vergl. Heine: Handbuch der Kugelfunctionen, S. 89.

VIII. Ueber die Verschiedenheit des Klanges (Klangfarbe), von Brandt. (Pogg. Ann., Bd. 112, S. 324.) — Man kann sich leicht überzeugen, dass der Klang des Tones einer Saite ein verschiedener ist, je nachdem man sie an verschiedenen Stellen, etwa wie beim Spielen der Harfe, aus der Gleichgewichtslage bringt und dann loslässt. Der Verfasser des oben genannten Aufsatzes hat nun durch Rechnung gezeigt, dass die einzelnen Glieder, aus denen in dem angegebenen Falle der Ausdruck für die Ablenkung und Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der Saite zusammengesetzt ist, von verschiedener Grösse sind, je nachdem die Saite an dem einen oder anderen ihrer Punkte gezupft worden ist. Bekanntlich ist die Differentialgleichung einer Saite:

$$1)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

wobei:

$$2)\qquad \varkappa = \sqrt{\frac{Qgh}{p}}$$

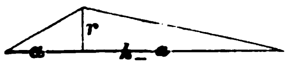
ist und Q die Spannung, h die Länge, p das Gewicht der Saite und g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Das allgemeine Integral der Gleichung 1), welches den Bedingungen genügt: für jedes t ist $y=0$, wenn $x=0$ oder $x=h$ ist und $\frac{\partial y}{\partial t}=0$ für $t=0$, ist:

$$3)\qquad y = A_1 \cos\frac{\varkappa\pi t}{h} \sin\frac{\pi x}{h} + A_2 \cos\frac{2\varkappa\pi t}{h} \sin\frac{2\pi x}{h} + A_3 \cos\frac{3\varkappa\pi t}{h} \sin\frac{3\pi x}{h} + \ldots$$

wobei die Coefficienten A aus der Gleichung zu bestimmen sind:

$$4)\qquad A_n = \int_0^h \varphi(\vartheta) \sin\frac{n\pi\vartheta}{h} \,.\, d\vartheta,$$

in welcher $y_0 = \varphi(x)$ die Anfangslage der Saite ($t=0$) bedeutet. Ist die Saite anfänglich in der Entfernung a von dem einen Endpunkte um die Strecke r seitwärts abgelenkt worden, so ist es nahezu richtig, sich dieselbe zur Zeit $t=0$ aus zwei Geraden (s. Figur) zusammengesetzt zu denken, von denen die eine durch die Gleichung:



$$\chi(x)=\frac{r}{a}\,x,$$

die andere durch die Gleichung:

$$\psi(x)=r\,\frac{h-x}{h-a}$$

ausgedrückt ist. Die Gleichung $y_0=\varphi(x)$ ist somit aus zwei Addenden $\chi(x)$ und $\psi(x)$ zusammengesetzt, von denen erstere Function zwischen $x=0$ und $x=a$, letztere zwischen $x=a$ und $x=h$ gilt und von Null verschiedene Werthe erhalten soll. Demnach ist:

$$A_n=\frac{2}{h}\int_0^a\frac{r}{a}\,\vartheta\sin\frac{n\pi\vartheta}{h}\,d\vartheta+\frac{2}{h}\int_a^h r\,\frac{h-\vartheta}{h-a}\sin\frac{n\pi\vartheta}{h}\,d\vartheta$$

$$=\frac{2r}{ha}\int_0^a\vartheta\,.\sin\frac{n\pi\vartheta}{h}\,d\vartheta+\frac{2r}{h-a}\int_a^h\sin\frac{n\pi\vartheta}{h}\,d\vartheta$$

$$-\frac{2r}{h(h-a)}\int_a^h\vartheta\sin\frac{n\pi\vartheta}{h}\,d\vartheta.$$

Durch die Substitution $\frac{n\pi\vartheta}{h}=\tau$ kommt man auf die Integralformen $\int\sin\tau\,d\tau$ und $\int\tau\sin\tau\,d\tau$, nach deren Auswerthung man in dem gegebenen Falle erhält:

$$5)\qquad A_n=\frac{2rh^2}{a(h-a)n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi a}{h}.$$

Die Ausbiegung der Saite wird nun durch folgende Reihe dargestellt:

$$6)\ y=\frac{2rh^2}{a(h-a)\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi a}{h}\cos\frac{\varkappa\pi t}{h}\sin\frac{\pi x}{h}+\frac{1}{2^2}\sin\frac{2\pi a}{h}\cos\frac{2\varkappa\pi t}{h}\sin\frac{2\pi x}{h}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi a}{h}\cos\frac{3\varkappa\pi t}{h}\sin\frac{3\pi x}{h}+\ldots\ldots\right]$$

Die im Eingange dieser Zeilen hervorgehobene Erfahrung, dass der Klang einer Saite verschieden ist, je nachdem dieselbe an dem einen oder anderen ihrer Punkte gezupft wird, ist nun von Brandt als Beleg für die von Ohm gegen Seebeck vertheidigte Ansicht benutzt worden, dass jedem Gliede einer nach der Fourier'schen Reihe zerlegten periodischen Bewegung ein einzelner Ton entspreche. Allgemein ist bekanntlich die Annahme, dass das Ohr im Stande sei, eine periodische Bewegung in ihre isochronen Theilbewegungen zu zerlegen. Wenn nun zugegeben wird, dass das Glied der Reihe, welches $\cos\frac{n\varkappa\pi t}{h}$ enthält, für sich allein einen

Ton von der Schwingungsmenge $\frac{n\pi}{h}$ geben würde, so sieht man nicht ein, wie sich die Wirkung von mehreren Gliedern anders als durch Intensitätsverhältnisse von einem Intervall oder Accord unterscheiden sollen, wie Herr Brandt sehr richtig bemerkt. Seebeck's Einwürfe beziehen sich hauptsächlich auf Fälle, in denen er die einzelnen Töne, die den Gliedern der Reihe entsprechen, sehr schwach oder gar nicht hörte und in denen er glaubte, dass die höheren Glieder (Töne) nur den Grundton verstärken, mit dem sie allerdings gleiche Periodicität besitzen. Brandt ist es nun gelungen, an einer Saite manche Obertöne besonders stark herauszuhören, oder dieselben ganz zu unterdrücken, je nachdem die Saite an verschiedenen Stellen gezupft wurde. Diese Fähigkeit seines Gehöres, sollte sie eine allgemeine sein, spricht allerdings für die (jetzt wohl allgemein angenommene) Hypothese von Ohm. Die oben mitgetheilte Rechnung soll nur die einzelnen Fälle erklären, unter denen namentlich diejenigen charakteristisch sind, bei denen Obertöne ausfallen. Wird die Saite an einem Punkte gezupft, der sie in irrationalem Verhältnisse theilt, so giebt sie eine Reihe von Tönen, deren Schwingungsmengen sich wie die Reihe der natürlichen Zahlen zu einander verhalten. Die höheren Obertöne werden nicht mehr gehört, weil ihre Intensität, die dem Ausdruck A_n 5) proportional ist, mit wachsendem n sehr rasch abnimmt. Wird die Saite in der Mitte gezupft, so bemerkt man einen hohlen Klang des Tones und das Fehlen der Obertöne, die 2, 4, 6, 8 etc. Mal so viel Schwingungen machen als der Grundton; dies erklärt sich dadurch, dass $\sin\frac{n\pi a}{h} = \sin\frac{n\pi}{2}$ wird und daher für ein gerades n den Werth Null annimmt. Um den Versuch anzustellen, soll man nach Brandt nach dem Anschlagen der Saite dieselbe an einem Schwingungsknoten berühren, der dem zu beobachtenden Oberton angehört. Dadurch tritt er allein hervor und wird dann auch leicht ohne Berührung des Schwingungsknotens gehört.

Der Unterschied im Klange rührt von der verschiedenen Beimischung höherer Töne (im Sinne Ohm's) zum Grundtone her. Der grelle Klang einer dicht an der Befestigungsstelle gezupften Saite wird von Brandt durch das stärkere Auftreten der Obertöne erklärt. Dies stimmt mit No. 6) vollkommen überein, denn ist $\frac{a}{h}$ klein, so fallen erst die entfernteren Obertöne weg.

Dr. Kahl.

X. Bedenken A. v. Baumgartner's gegen das Wärmeäquivalent $A = 423{,}55$ Kilogrammeter von Joule (Ueber den Grund der scheinbaren Abweichung des mechanischen Wärmeäquivalentes bei verschiedenen Gasen, von Freiherrn Andreas v. Baumgartner, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Bd. 38. S. 379).

v. Baumgartner geht von der Ableitung des Arbeitsäquivalentes der Wärme aus, welche durch die Verbindung von Grössen geschehen kann, die zu anderen Zwecken für Gase mit der grössten Genauigkeit bestimmt worden sind. Die Berechnung aus den für 0° C. bestimmten Constanten eines Gases ergiebt bekanntlich für das Arbeitsäquivalent der Wärme:

$$A = \frac{p\alpha}{s} \frac{1}{c_1 - c} = \frac{p\alpha}{s} \frac{k}{(k-1)\,c_1},$$

wobei p den der Spannung des Gases entgegengesetzten und ihr gleichen Druck auf die Einheit der Oberfläche bedeutet, α der Ausdehnungscoefficient bei der Erwärmung von 0° C., s das specifische Gewicht des Gases, c_1 die specifische Wärme bei constantem Druck, c die bei constantem Volumen, $k = \frac{c_1}{c}$ ist. Die Bestimmungen sind nur für wenige Gase ausgeführt worden, die meist von **Regnault** erhaltenen Werthe sind folgende:

Name des Gases.	α	s	c_1	k
Atmosphärische Luft . . .	0,003665	1,2932	0,2377	1,4096
Wasserstoffgas	0,0036612	0,0896	3,4046	1,4104
Stickgas	0,003668	1,2561	0,2440	1,4006
Kohlenoxydgas	0,0036688	1,2510	0,2479	1,4090
Kohlensäure	0,0037099	1,9774	0,2164	1,2791
Stickoxydul	0,0037195	1,9747	0,2238	1,2700
Cyangas	0,0038707	2,3355	0,4057	1,2062
Schweflige Säure	0,0039028	2,8683	0,4507	1,2624

wobei die Werthe von k aus den besten Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit und Regnault's Bestimmung der Dichte des Quecksilbers zur Luft berechnet sind. v. Baumgartner erhält nun mit Hilfe der Werthe in obiger Tabelle für das Arbeitsäquivalent der Wärme:

1. für atmosphärische Luft . . 423,79
2. „ Wasserstoffgas 426,49
3. „ Stickgas 424,90
4. „ Kohlenoxyd 420,30
5. „ Kohlensäure 410,74
6. „ Stickoxydul 408,89
7. „ Cyangas 249,66
8. „ schwefligsaures Gas . . 150,05

Die grosse Abweichung vom Aequivalent 423.55 erklärt nun v. Baumgartner durch theilweise Verwendung der Wärme zu innerer Arbeit. Da nun unter den permanenten Gasen Wasserstoff beim Comprimiren (Mariotte's Gesetz und Compressionswärme) dem idealen Gaszustande sehr nahe kommt, näher als andere Gase, und auch das grösste Wärmeäquivalent giebt, so wird es wahrscheinlich, dass die anderen permanenten Gase einen Theil der aufgenommenen Wärme immer noch zu innerer Arbeit verbrauchen, so dass das bis jetzt allgemein angenommene Wärmeäquivalent 423,55 von Joule vielleicht zu niedrig ist. Dr. Kahl.

VI.

Ueber den Dualismus in den metrischen Relationen am vollständigen Viereck und Vierseit auf der Kugel und in der Ebene.

Von Dr. Beez,
Lehrer an der königl. Realschule zu Plauen i. V.

Der Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln an vollständigen Vierecken und Vierseiten ist meines Wissens noch nicht einer eingehenden Betrachtung unterzogen worden und es stehen die wenigen bekannten trigonometrischen Lehrsätze über die genannten Figuren gänzlich isolirt und ohne Zusammenhung neben einander. Namentlich aber fehlt es durchaus an metrischen Relationen über das vollständige Vierseit auf der Kugel und in der Ebene, so dass selbst die bekannten Sätze vom Kreisviereck noch kein Analogon für das Kreisvierseit gefunden haben. Es dürfte daher wohl nachstehender Versuch, die vorhandenen Lücken auszufüllen und bereits bekannte Sätze mit neu aufgefundenen zu einem Ganzen zusammenzustellen, gerechtfertigt erscheinen, zumal in den metrischen Relationen am Viereck und Vierseit ein durchgreifender Dualismus sich zu erkennen giebt, durch welchen eine übersichtliche Gruppirung und leichte Auffassung sämmtlicher metrischen Sätze ermöglicht wird.

Für das Dreieck findet sich eine solche Zusammenstellung von dualen Sätzen bereits in dem vorzüglichen Lehrbuch der Trigonometrie und Polygonometrie von Dr. H. Tr. Müller, S. 194, 202—204, 261—265, doch ist, wie mir scheint, an den betreffenden Stellen der Begriff des Dualismus etwas zu weit ausgedehnt und es werden Gleichungen als dual bezeichnet, die zwar eine gewisse Aehnlichkeit mit einander haben, aber in Bezug auf die genannte Eigenschaft einander nicht völlig decken. Der Begriff des Dualismus, wie er bereits in der Geometrie der Lage ausgebildet worden ist, erfordert, dass man, um von einem Lehrsatz zu dem ihm dualen überzugehen, nur Punkte (Linien) mit Linien (Punkten) zu vertauschen hat, während alles Andere im Wesentlichen unverändert bleibt. In solch strengem Sinne lässt sich aber der Dualismus auch in den metrischen Eigenschaften des sphärischen Dreiecks und Vierecks durchführen, wobei natürlich statt Punkten die an ihnen liegenden Winkel und statt Linien die Bogen grösster Kreise zu setzen sind. Weniger deutlich zeigt sich der metrische Dualismus bei den ebenen Figuren, da die Eigenthümlichkeit derselben, eine constante Winkelsumme zu besitzen, die von der Grösse der Seiten ganz unabhängig ist, den Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln an vielen Stellen gänzlich aufhebt und häufig nur noch goniometrische Beziehungen übrig lässt. Doch auch in diesen Rudimenten ist der Dualismus aufs Strengste nachzuweisen, wie sich aus dem Folgenden zur Genüge ergeben wird.

Bevor wir aber unseren eigentlichen Gegenstand, das Viereck, ins Auge fassen, wollen wir zuerst die wirklich dualen Beziehungen des Dreiecks und Dreiseits feststellen.

Unter einem Dreieck verstehen wir ein System von drei Punkten A, B, C mit den drei Verbindungslinien dieser Punkte $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ und den Durchschnittswinkeln $bc = \alpha$, $ac = \beta$, $ab = \gamma$; unter einem Dreiseit ein System von drei Linien A, B, C mit ihren drei Durchschnittswinkeln $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$ und den Verbindungslinien der Schnittpunkte $\beta\gamma = a$, $\alpha\gamma = b$, $\alpha\beta = c$. Bemerken wir nun noch, dass wir als den dritten Winkel γ nicht den innerhalb des Dreiecks liegenden, sondern seinen Nebenwinkel ansehen, so erhalten wir für das Dreieck auf der Kugel sofort die Beziehungen:

I. $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

II. $$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha,$$

III. $$\cot a \sin b = -\cos b \cos \gamma + \sin \gamma \cot \alpha,$$

denen als duale für das Dreiseit durch einfache Buchstabenvertauschung gegenüber gestellt werden können:

1) $$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

2) $$\sin \alpha \sin b = \sin \beta \sin a,$$

3) $$\cot \alpha \sin \beta = -\cos \beta \cos c + \sin c \cot a.$$

Es zeigt sich, dass II. und 2) sich selbst dual sind, indem durch die Buchstabenvertauschung keine neue Gleichung erzielt wird. Von den abgeleiten Gleichungen mögen nur die Neper'schen Analogien aufgeführt werden. Für das Dreieck giebt es deren nur zwei:

IV. $$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma},$$

V. $$\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma},$$

woraus durch Vertauschung die für das Dreiseit giltigen abgeleitet werden:

4) $$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}c},$$

5) $$\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}c}.$$

Den Gleichungen des sphärischen Dreiecks sind folgende für das ebene analog:

I. $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

II. $$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

III. $$\frac{b}{a} = -\cos \gamma + \sin \gamma \cot \alpha,$$

IV. $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan \frac{1}{2}\gamma},$$

V. $$1 = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}\gamma},$$

denen wiederum folgende, für das ebene Dreiseit giltige als dual bezeichnet werden müssen:

1) $$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma,$$

2) $$\sin a \,.\, b = \sin \beta \,.\, a,$$

3) $$\cot \alpha \sin \beta = -\cos \beta + \frac{c}{a},$$

4) $$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{a-b}{c},$$

5) $$\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{a+b}{c}.$$

Gehen wir nun zu unserem eigentlichen Thema, der Zusammenstellung derjenigen Sätze vom vollständigen Viereck und Vierseit, über, in welchen Dualität sich nachweisen lässt, so ist bei der geringen Zahl von dahin einschlagenden Lehrsätzen es durchaus nicht möglich, auch nur im Entferntesten einen solchen zu begründen, wenn man nicht zunächst die Zahl der Relationen vermehrt, welche zwischen Seiten und Winkeln an genannten Figuren stattfinden. Aber in dieser Beziehung leitet das Princip des Dualismus gewissermaassen von selbst auf die Erfindung neuer Sätze, und da zwischen ebenen und sphärischen Figuren ein solcher Zusammenhang existirt, dass in den Eigenschaften der ersteren die der letzteren wenigstens angedeutet liegen, dagegen aus den Formeln der Sphärik die der Planimetrie ohne Mühe und mit vollkommener Sicherheit entwickelt werden können, so führt jeder Satz vom Viereck oder Vierseit, mag er nun der Ebene oder der Kugel angehören, noch auf drei andere, nämlich auf den ihm dualen und auf die beiden ihnen analogen auf der Kugel oder in der Ebene. So hat z. B. der Ptolemäische Satz vom Kreisviereck in der Ebene seinen ihm dualen ebenfalls in der Ebene, jeder von beiden aber wiederum seinen analogen auf der Kugel. Ebenso entspricht dem Gauss'schen Satz vom sphärischen Viereck (*s. disquisitiones generales circa superficies curvas*, *theor.* 6), den ich, wenn auch anders formulirt, an die Spitze der nachfolgenden Reihe von Sätzen gestellt habe, zunächst ein dualer für das sphärische Vierseit, und beiden können wiederum zwei analoge für das ebene Viereck und Vierseit gegenüber gestellt werden.

Erklärungen. Ein vollständiges Viereck ist ein System von vier Punkten A, B, C, D mit ihren sechs Verbindungslinien $AB = a$, $CD = a_1$, $BC = b$, $AD = b_1$, $AC = c$, $BD = c_1$, von denen je zwei nicht in einer Ecke zusammenstossende, wie a und a_1, b und b_1, c und c_1, Gegenseiten heissen mögen. Als metrische Bestimmungsstücke sind anzusehen:

1. die Längen der Verbindungslinien selbst;
2. die von ihnen gebildeten Durchschnittswinkel aa_1, bb_1 etc.

Ein vollständiges Vierseit dagegen ist ein System von vier Linien AB, BC, CD, DA mit ihren sechs Durchschnittswinkeln $BAD = \alpha$, $BCD = \alpha_1$, $ABC = \beta$, $ADC = \beta_1$, $AED = \gamma$, $AFB = \gamma_1$, von denen je zwei nicht auf einer Linie liegenden, wie α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, Gegenwinkel heissen mögen. Als metrische Bestimmungsstücke sind:

1. die Grössen der Durchschnittswinkel selbst und
2. die Verbindungslinien ihrer Scheitel $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ etc.

anzusehen.

Lehrsatz I*a*. In jedem sphärischen Viereck*) ist das Product der Cosinus eines Paares Gegenseiten vermindert um das Product der Cosinus eines anderen Paares gleich dem Product der Sinus des dritten Paares in den Cosinus ihres Durchschnittswinkels.

$$\cos a \cos a_1 - \cos b \cos b_1 = \sin c \sin c_1 \cos cc_1,$$
$$\cos b \cos b_1 - \cos c \cos c_1 = \sin a \sin a_1 \cos aa_1,$$
$$\cos c \cos c_1 - \cos a \cos a_1 = \sin b \sin b_1 \cos bb_1.$$

Beweis. Bezeichnen wir den Durchschnitt von a und a_1 mit E, von b und b_1 mit F, von c und c_1 mit G und fassen wir die Winkel bei E, F und G in dem Sinne, dass nicht zwei derselben Gegenwinkel in den Vierecken $AEDG$ und $AFBG$ sind, oder sei $aa_1 = AED$, $bb_1 = 180° - AFB$, $cc_1 = BGA$, so ist in den Dreiecken

ABG, CGD, BGC und AGD

$$1)\quad \begin{cases} \cos a = \cos AG \cos BG + \sin AG \sin BG \cos cc_1, \\ \cos a_1 = \cos CG \cos DG + \sin CG \sin DG \cos cc_1, \\ \cos b = \cos BG \cos CG + \sin BG \sin CG \cos cc_1, \\ \cos b_1 = \cos AG \cos DG + \sin AG \sin DG \cos cc_1, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt:

$$\cos a \cos a_1 - \cos b \cos b_1 = \sin (AG + CG) \sin (BG + DG) \cos cc_1,$$
$$= \sin c \sin c_1 \cos cc_1.$$

Aus den Dreiecken

BEC, AED, AEC und BED

$$2)\quad \begin{cases} \cos b = \cos BE \cos CE + \sin BE \sin CE \cos aa_1, \\ \cos b_1 = \cos AE \cos DE + \sin AE \sin DE \cos aa_1, \\ \cos c = \cos AE \cos CE + \sin AE \sin CE \cos aa_1, \\ \cos c_1 = \cos BE \cos DE + \sin BE \sin DE \cos aa_1, \end{cases}$$

*) Es soll von nun an statt vollständiges Viereck oder Vierseit nur Viereck oder Vierseit überhaupt gesagt werden.

folglich:

$$\cos b \cos b_1 - \cos c \cos c_1 = \sin(BE - AE) \sin(CE - DE) \cos aa_1,$$
$$= \sin a \sin a_1 \cos aa_1.$$

Aus den Dreiecken CAF, DBF, ABF und CDF findet sich endlich:

$$3) \quad \begin{cases} \cos c = \cos CF \cos AF - \sin CF \sin AF \cos bb_1, \\ \cos c_1 = \cos DF \cos BF - \sin DF \sin BF \cos bb_1, \\ \cos a = \cos AF \cos BF - \sin AF \sin BF \cos bb_1, \\ \cos a_1 = \cos CF \cos DF - \sin CF \sin DF \cos bb_1, \end{cases}$$

also:

$$\cos c \cos c_1 - \cos a \cos a_1 = \sin(CF - BF) \sin(DF - AF) \cos bb_1,$$
$$= \sin b \sin b_1 \cos bb_1.$$

Lehrsatz Ib. In jedem sphärischen Vierseit ist das Product aus den Cosinus eines Paares Gegenwinkel, vermindert um das Product der Cosinus eines anderen Paares gleich dem negativen Product der Sinus des dritten Paares in den Cosinus des Bogens, der die Gegenecken des dritten Paares vorbindet.

$$\cos\alpha \cos\alpha_1 - \cos\beta \cos\beta_1 = -\sin\gamma \sin\gamma_1 \cos\gamma\gamma_1,$$
$$\cos\beta \cos\beta_1 - \cos\gamma \cos\gamma_1 = -\sin\alpha \sin\alpha_1 \cos\alpha\alpha_1,$$
$$\cos\gamma \cos\gamma_1 - \cos\alpha \cos\alpha_1 = -\sin\beta \sin\beta_1 \cos\beta\beta_1.$$

Beweis. Aus den Dreiecken AFE, CFE, DFE, BFE ergiebt sich der Reihe nach, wenn der Bogen $EF = \gamma\gamma_1$ gesetzt wird:

$$\cos\alpha = -\cos BEF \cos DFE + \sin BEF \sin DFE \cos\gamma\gamma_1,$$
$$\cos\alpha_1 = -\cos CFE \cos CEF + \sin CFE \sin CEF \cos\gamma\gamma_1,$$
$$-\cos\beta = -\cos BEF \cos BFE + \sin BEF \sin BFE \cos\gamma\gamma_1,$$
$$-\cos\beta_1 = -\cos DEF \cos DFE + \sin DEF \sin DFE \cos\gamma\gamma_1,$$

woraus man findet:

$$\cos\alpha \cos\alpha_1 - \cos\beta \cos\beta_1 = -\cos\gamma\gamma_1 \sin(CFE - DFE) \sin(CEF - BEF),$$
$$= -\sin\gamma \sin\gamma_1 \cos\gamma\gamma_1.$$

Man könnte Ib. auch direct aus Ia. ableiten, wenn man erwägt, dass das Polarviereck zum ursprünglichen sich wie ein Vierseit zum Viereck verhält. Durch die bekannten Substitutionen in den Formeln des Vierecks wird man dann die Formeln für das Polarviereck oder das Vierseit erhalten. Zugleich ist im Betreff des Sinnes, in welchem die Verbindungsbogen $\gamma\gamma_1$, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ zu nehmen sind, zu bemerken, dass nicht zwei derselben sich innerhalb eines Vierecks schneiden dürfen, dass also $\gamma\gamma_1 = EF$, $\alpha\alpha_1 = AC$, aber $\beta\beta_1 = 180^\circ - BD$ zu setzen ist.

Lehrsatz Ic. In jedem Viereck in der Ebene ist die Summe der Quadrate eines Paares Gegenseiten, vermindert um die Quadrate eines anderen Paares gleich dem negativen doppelten Product aus dem dritten Paare und dem Cosinus ihres Durchschnittswinkels.

$$a^2 + a_1^2 - (b^2 + b_1^2) = -2cc_1 \cos cc_1,$$
$$b^2 + b_1^2 - (c^2 + c_1^2) = -2aa_1 \cos aa_1,$$
$$c^2 + c_1^2 - (a^2 + a_1^2) = -2bb_1 \cos bb_1.$$

Beweis. Aus den Dreiecken ABG, CGD, BGC und AGD ergiebt sich:

$$a^2 = AG^2 + BG^2 - 2AG.BG\cos cc_1,$$
$$a_1^2 = CG^2 + DG^2 - 2CG.DG\cos cc_1,$$
$$b^2 = BG^2 + CG^2 + 2BG.CG\cos cc_1,$$
$$b_1^2 = AG^2 + DG^2 + 2AG.DG\cos cc_1,$$

folglich ist:

$$a^2 + a_1^2 - (b^2 + b_1^2) = -2\cos cc_1 (AG + CG)(BG + DG),$$
$$= -2cc_1 \cos cc_1.$$

Lehrsatz I*d*. In jedem Vierseit in der Ebene ist das Product aus den Cosinus zweier Gegenwinkel vermindert um das Product zweier anderen gleich dem negativen Product aus den Sinus des dritten Paares.

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 - \cos\beta\cos\beta_1 = -\sin\gamma\sin\gamma_1,$$
$$\cos\beta\cos\beta_1 - \cos\gamma\cos\gamma_1 = -\sin\alpha\sin\alpha_1,$$
$$\cos\gamma\cos\gamma_1 - \cos\alpha\cos\alpha_1 = -\sin\beta\sin\beta_1.$$

Beweis. Aus den Dreiecken AFE, CFE, DFE und BFE folgt:

$$\cos\alpha = -\cos BEF\cos DFE + \sin BEF\sin DFE,$$
$$\cos\alpha_1 = -\cos CFE\cos CEF + \sin CFE\sin CEF,$$
$$-\cos\beta = -\cos BEF\cos BFE + \sin BEF\sin BFE,$$
$$-\cos\beta_1 = -\cos DEF\cos DFE + \sin DEF\sin DFE,$$

also:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 - \cos\beta\cos\beta_1 = -\sin(CFE - DFE)\sin(CEF - BEF),$$
$$= -\sin\gamma\sin\gamma_1.$$

Lehrsatz II*a*. In jedem sphärischen Viereck ist die Summe der drei Producte, welche aus den Sinus je zweier Gegenseiten und dem Cosinus ihres Durchschnittswinkels gebildet werden, gleich Null.

$$\sin a\sin a_1\cos aa_1 + \sin b\sin b_1\cos bb_1 + \sin c\sin c_1\cos cc_1 = 0.$$

Der Beweis ergiebt sich durch Addition der drei Gleichungen in I*a*. Auf dieselbe Weise erhält man aus I*b*., I*c*., I*d*. die entsprechenden Sätze:

Lehrsatz II*b*. In jedem sphärischen Vierseit ist die Summe der drei Producte aus den Sinus je zweier Gegenwinkel in den Cosinus ihrer Verbindungslinien gleich Null.

$$\sin\alpha\sin\alpha_1\cos\alpha\alpha_1 + \sin\beta\sin\beta_1\cos\beta\beta_1 + \sin\gamma\sin\gamma_1\cos\gamma\gamma_1 = 0.$$

Lehrsatz II*c*. In jedem ebenen Viereck ist die Summe der drei Producte aus je zwei Gegenseiten in den Cosinus ihres Durchschnittswinkels gleich Null.*)

$$aa_1\cos aa_1 + bb_1\cos bb_1 + cc_1\cos cc_1 = 0.$$

*) Dieser Satz gilt auch für das räumliche Viereck oder Tetraeder. S. Jacobi's Anhänge zu v. Swinden, No. 950, wenn man nur statt Durchschnittswinkel zweier Gegenseiten den Winkel setzt, welchen eine Seite mit einer sie schneidenden, der Gegenseite parallelen Geraden bildet.

Lehrsatz II*d*. In jedem ebenen Vierseit ist die Summe der drei Producte aus den Sinus je zweier Gegenwinkel gleich Null.

$$\sin\alpha \sin\alpha_1 + \sin\beta \sin\beta_1 + \sin\gamma \sin\gamma_1 = 0.$$

Lehnsatz 1. Wenn in einem sphärischen Viereck $ABCD$ die Seite $AB = a$, $CD = a_1$, $BC = b$, $AD = b_1$ und der Unterschied der Gegenwinkelsummen $(A+C)-(B+D) = \varDelta$ gegeben sind, so lässt sich stets ein zweites Viereck $A'B'C'D'$ construiren, welches dieselben Seiten $A'B' = a$, $C'D' = a_1$, $B'C' = b$, $A'B' = b_1$ aber den entgegengesetzten Unterschied der Gegenwinkelsummen besitzt, nämlich $(A'+C')-(B'+D') = -\varDelta$.

Beweis. Man denke sich die vier Seiten a, a_1, b, b_1 um die Punkte A, B, C, D drehbar, so wird, wenn man A und C einander allmählig nähert, wodurch B und D sich von einander entfernen, die Winkelsumme $A+C$ sich vergrössern, $B+D$ dagegen kleiner werden. Das Umgekehrte wird eintreten, wenn man A und C von einander entfernt, wodurch B und D sich nähern. Man hat es nun offenbar in der Gewalt, diese Verschiebung in dem einen oder dem anderen Sinne, je nachdem anfänglich $(A+C) \gtrless (B+D)$ war, so lange fortzusetzen, bis $(A+C)-(B+D) = 0$ ist und darüber hinaus, bis $(B'+D')-(A'+C')$ denselben Werth $\varDelta$ hat, wie vorher $(A+C)-(B+D)$. Zwei derartige Vierecke wie $ABCD$ und $A'B'C'D'$ mögen **zugeordnete** heissen, während das zwischen ihnen liegende, für welches die Gleichung $A+C = B+D$ stattfindet, das sphärische Sehnenviereck ist. Nennt man bei derselben Bezeichnung, wie bisher, das dritte Paar Gegenseiten in dem Viereck $ABCD$, c und c_1, in dem zugeordneten Viereck $A'B'C'D$ aber c' und c'_1, so finden zwischen den Grössen a, a_1, b, b_1 und c', c'_1 und $\varDelta$ folgende Relationen statt:

Lehrsatz III*a*.

$$\begin{aligned} \sin^2\tfrac{1}{2}c \sin^2\tfrac{1}{2}c_1 &= \sin^2\tfrac{1}{2}c' . \sin^2\tfrac{1}{2}c'_1 \\ &= \sin^2\tfrac{1}{2}a \sin^2\tfrac{1}{2}a_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}b \sin^2\tfrac{1}{2}b_1 \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}a_1 \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}b_1 \cos\tfrac{1}{2}\varDelta \end{aligned}$$

und in ganz entsprechender Weise für die beiden eingeschlagenen Vierecke $ACDB$, $ADBC$ und den ihnen zugeordneten $A'C'D'B'$, $A'D'B'C'$, wenn die Unterschiede der Winkeldifferenzen

$$(BAC - BDC) - (ACD - ABD)$$

und

$$(CAD - CBD) - (ACB - ADB)$$

bezüglich $\varDelta'$ und $\varDelta''$ gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \sin^2\tfrac{1}{2}b \sin^2\tfrac{1}{2}b_1 &= \sin^2\tfrac{1}{2}b' . \sin^2\tfrac{1}{2}b'_1 \\ &= \sin^2\tfrac{1}{2}a \sin^2\tfrac{1}{2}a_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}c \sin^2\tfrac{1}{2}c_1 \\ &\quad - 2\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}a_1 \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}c_1 \cos\tfrac{1}{2}\varDelta', \\ \sin^2\tfrac{1}{2}a \sin^2\tfrac{1}{2}a_1 &= \sin^2\tfrac{1}{2}a' . \sin^2\tfrac{1}{2}a'_1 \\ &= \sin^2\tfrac{1}{2}b \sin^2\tfrac{1}{2}b_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}c \sin^2\tfrac{1}{2}c_1 \\ &\quad - 2\sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}b_1 \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}c_1 \cos\tfrac{1}{2}\varDelta''. \end{aligned}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c_1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}c'}{\sin\frac{1}{2}c'_1}$$
$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a\,\sin^2\frac{1}{2}b_1+\sin^2\frac{1}{2}a_1\,\sin^2\frac{1}{2}b+2\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}a_1\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}b_1\,\cos\frac{1}{2}\Delta}{\sin^2\frac{1}{2}a\,\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}a_1\,\sin^2\frac{1}{2}b_1+2\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}a_1\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}b_1\,\cos\frac{1}{2}\Delta},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b_1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}b'}{\sin\frac{1}{2}b'_1}$$
$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a\,\sin^2\frac{1}{2}c_1+\sin^2\frac{1}{2}a_1\,\sin^2\frac{1}{2}c-2\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}a_1\,\sin\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c_1\,\cos\frac{1}{2}\Delta'}{\sin^2\frac{1}{2}a\,\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}a_1\,\sin^2\frac{1}{2}c_1-2\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}a_1\,\sin\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c_1\,\cos\frac{1}{2}\Delta'},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a_1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}a'}{\sin\frac{1}{2}a'_1}$$
$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}b\,\sin^2\frac{1}{2}c_1+\sin^2\frac{1}{2}b_1\,\sin^2\frac{1}{2}c-2\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}b_1\,\sin\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c_1\,\cos\frac{1}{2}\Delta''}{\sin^2\frac{1}{2}b\,\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b_1\,\sin^2\frac{1}{2}c_1-2\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}b_1\,\sin\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}c_1\,\cos\frac{1}{2}\Delta''}.$$

Der Beweis der Formeln unter III*a*., jedoch ohne Berücksichtigung des zugeordneten Vierecks, ist von Herrn Professor C. W. Baur in seiner schätzenswerthen Abhandlung im Julihefte von 1861 in dieser Zeitschrift gegeben worden, und ihm gebührt, wie ich auch dankbar anerkenne, das Verdienst, die Formeln unter III*a*. zuerst aufgestellt zu haben. Ich bin auf die Sätze unter III*a*. und IV*a*. durch die Verallgemeinerung der Formeln III*c*. und IV*c*., die an der betreffenden Stelle bewiesen werden, gekommen, habe jedoch bis jetzt noch keinen Beweis für dieselben gefunden. Von ihrer Richtigkeit kann man sich indess durch Rechnung überzeugen.

Mit Hilfe des Polarvierecks auf der Kugel, welches zu dem ursprünglichen Viereck wie ein Vierseit sich verhält, ergeben sich folgende, den Sätzen III*a*. und IV*a*. entsprechende Beziehungen, in denen

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1,\ \gamma,\ \gamma_1$$

wie bisher die sechs Winkel eines vollständigen Vierseits

$$\alpha',\ \alpha'_1;\ \beta',\ \beta'_1;\ \gamma',\ \gamma'_1$$

Winkelpaare sind, die bezüglich den drei zugeordneten Vierseiten angehören, endlich:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (AB+CD)-(BC+AD),\\ \varepsilon' &= (BF-DE)-(DF-BE),\\ \varepsilon'' &= (CF-AF)-(CF-AE)\end{aligned}$$

gesetzt worden sind, also bezüglich die Unterschiede der Gegenseitensummen oder Differenzen des sphärischen Vierseits bedeuten.

Lehrsatz III*b*.

$$\begin{aligned}\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\,.\,\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma_1 &= \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma'\,\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma'_1\\ &= \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1+\cos^2\tfrac{1}{2}\beta\,\cos^2\tfrac{1}{2}\beta_1\\ &\quad+2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\,\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\beta_1\,\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon,\\ \cos^2\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\cos^2\tfrac{1}{2}\beta_1 &= \cos^2\tfrac{1}{2}\beta'\,\cos^2\tfrac{1}{2}\beta'_1\\ &= \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1+\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma_1\\ &\quad-2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma_1\,\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon',\end{aligned}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 = \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha' \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha'_1$$
$$= \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta_1 + \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma_1$$
$$- 2 \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta_1 \cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma_1 \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon''.$$

Lehrsatz IV*b*.

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma_1} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma'}{\cos \frac{1}{2}\gamma'_1}$$
$$= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \frac{1}{2}\beta_1 + \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \cos^2 \frac{1}{2}\beta + 2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha_1 \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta_1 \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \frac{1}{2}\beta + \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \cos^2 \frac{1}{2}\beta_1 + 2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha_1 \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta_1 \cos \frac{1}{2}\varepsilon},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\beta_1} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\beta'}{\cos \frac{1}{2}\beta'_1}$$
$$= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \frac{1}{2}\gamma_1 + \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma - 2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha_1 \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\varepsilon'}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \frac{1}{2}\gamma + \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_1 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma_1 - 2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha_1 \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\varepsilon'},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha_1} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha'}{\cos \frac{1}{2}\alpha'_1}$$
$$= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\beta \cos^2 \frac{1}{2}\gamma_1 + \cos^2 \frac{1}{2}\beta_1 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma - 2 \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta_1 \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\varepsilon'}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta \cos^2 \frac{1}{2}\gamma + \cos^2 \frac{1}{2}\beta_1 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma_1 - 2 \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta_2 \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\varepsilon''}.$$

Lehnsatz 2. Wenn in einem ebenen Viereck $ABCD$ die Seiten $AB = a$, $CD = a_1$, $BC = b$, $AD = b_1$ und die Summe zweier Gegenwinkel $A + C$ gegeben sind, so lässt sich stets ein zugeordnetes zweites Viereck $A'B'C'D'$ construiren, welches dieselben Seiten $A'B' = a$, $C'D' = a_1$, $B'C' = b$, $A'D' = b_1$ und dieselbe Gegenwinkelsumme nur in verkehrter Lage enthält, so dass $B' + D' = A + C$ und folglich auch $A' + C' = B + D$.

Beweis. Denkt man sich die Seiten a, a_1, b, b_1 des ebenen Vierecks um die Punkte A, B, C, D drehbar, so wird, wenn man B und D einander nähert, A und C sich von einander entfernen oder umgekehrt und die Gegenwinkelsumme $A + C$ zu- oder abnehmen, je nachdem $B + D$ ab- oder zunimmt. Für den speciellen Fall, dass die Gegenwinkelsummen gleich werden, also $A + C = B + D = 2R$ wird, erhält man das Kreisviereck. Nun kann man aber, vorausgesetzt, dass anfänglich $A + C \gtrless B + D$ war, das Viereck so lange verschieben, bis es in die neue Lage $A'B'C'D'$ kommt, in welcher $A' + C' = B + D$, $B' + D' = A + C$ wird. Nennt man in diesem Viereck das dritte Paar Gegenseiten (die Diagonalen) c' und c'_1, während sie im ursprünglichen c und c_1 hiessen, und setzt $A + C - (B + D) = \Delta$, also

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{A + C - (B + D)}{2} = 180^\circ - (B + D) \text{ oder } = (A + C) - 180^\circ,$$

so ist:

Lehrsatz IIIc.

$$c^2 c_1^2 = c'^2 c'^2_1 = a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + 2\, a a_1\, b b_1 \cos \tfrac{1}{2}\Delta$$

und für die beiden Vierecke mit einspringenden Ecken, wenn

$$(BAC - BDC) - (ACD - ABD) = \Delta',$$
$$(CAD - CBD) - (ACB - ADB) = \Delta''$$

gesetzt wird:

$$b^2 b_1^2 = b'^2 b'^2_1 = a^2 a_1^2 + c^2 c_1^2 - 2 a a_1 c c_1 \cos \tfrac{1}{2} \varDelta,$$
$$a^2 a_1^2 = a'^2 a'^2_1 = b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 - 2 b b_1 c c_1 \cos \tfrac{1}{2} \varDelta'.$$

Desgleichen ist:

Lehrsatz IV*c*.

$$\frac{c}{c_1} \cdot \frac{c'}{c'_1} = \frac{a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 + 2 a a_1 b b_1 \cos \frac{1}{2} \varDelta}{a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 + 2 a a_1 b b_1 \cos \frac{1}{2} \varDelta},$$
$$\frac{b}{b_1} \cdot \frac{b'}{b'_1} = \frac{a^2 c_1^2 + a_1^2 c^2 - 2 a a_1 b b_1 \cos \frac{1}{2} \varDelta}{a^2 c^2 + a_1^2 c_1^2 - 2 a a_1 b b_1 \cos \frac{1}{2} \varDelta},$$
$$\frac{a}{a_1} \cdot \frac{a'}{a'_1} = \frac{b^2 c_1^2 + b_1^2 c^2 - 2 b b_1 c c_1 \cos \frac{1}{2} \varDelta'}{b^2 c^2 + b_1^2 c_1^2 - 2 b b_1 c c_1 \cos \frac{1}{2} \varDelta'}.$$

Beweis von III*c*. und IV*c*.

Es sei $AC = x$, $BD = y$, so ist in den Dreiecken ABC und ADC

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}.$$
$$\cos D = \frac{a_1^2 + b_1^2 - x^2}{2 a_1 b_1}.$$

Setzt man ferner:

$$\mu = \cos (B + D) = \cos B \cos D - \sin B \sin D$$

und substituirt hierin die Werthe von $\cos B$, $\cos D$, $\sqrt{1 - \cos^2 B}$, $\sqrt{1 - \cos^2 D}$, so erhält man nach Hinwegschaffung der irrationalen Grössen

$$1)\quad \frac{(a^2 + b^2 - x^2)^2}{4 a^2 b^2} + \frac{(a_1^2 + b_1^2 - x^2)^2}{4 a_1^2 b_1^2} - \mu \frac{(a^2 + b^2 - x^2)(a_1^2 + b_1^2 - x^2)}{2 a a_1 b b_1} = 1 - \mu^2.$$

Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich aus den Dreiecken ABD und BCD

$$\cos A = \frac{a^2 + b_1^2 - y^2}{2 a b_1},$$
$$\cos C = \frac{a_1^2 + b^2 - y^2}{2 a_1 b}.$$

Da aber:

$$\cos (A + C) = \cos [360^0 - (B + D)] = \mu,$$

so findet man durch dieselben Operationen, wie vorher:

$$2)\quad \frac{(a^2 + b_1^2 - y^2)^2}{4 a^2 b_1^2} + \frac{(a_1^2 + b^2 - y^2)^2}{4 a_1^2 b^2} - \mu \frac{(a^2 + b_1^2 - y^2)(a_1^2 + b^2 - y^2)}{2 a a_1 b b_1} = 1 - \mu^2.$$

Entwickeln wir zunächst die zusammengesetzten Ausdrücke in 1) und 2), ordnen 1) nach der Hauptgrösse x, 2) nach y und reduciren beide Gleichungen auf Null, so ergiebt sich:

$$3) \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & x^4 (a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 - 2 \mu a a_1 b b_1) \\ & - 2 x^2 [a^2 b^2 (a_1^2 + b_1^2) + a_1^2 b_1^2 (a^2 + b^2) - \mu a a_1 b b_1 (a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2)] \\ & + a^2 b^2 (a_1^2 + b_1^2)^2 + a_1^2 b_1^2 (a^2 + b^2)^2 - 2 \mu a a_1 b b_1 (a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) \\ & \qquad - 4 a^2 a_1^2 b^2 b_1^2 (1 - \mu^2). \end{aligned} \right.$$

$$4)\begin{cases} 0 = y^4\,(a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 - 2\mu a a_1 b b_1) \\ \quad -2y^2\,[a^2 b_1^2 (a_1^2 + b^2) + a_1^2 b^2 (a^2 + b_1^2) - \mu a a_1 b b_1 (a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2)] \\ \quad + a^2 b_1^2 (a_1^2 + b^2)^2 + a_1^2 b^2 (a^2 + b_1^2)^2 - 2\mu a a_1 b b_1 (a^2 + b_1^2)(a_1^2 + b^2) \\ \quad - 4 a^2 a_1^2 b^2 b_1^2 (1 - \mu^2). \end{cases}$$

Setzen wir hierin zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} a a_1 + b b_1 &= A, \\ a b + a_1 b_1 &= B, \\ a b_1 + a_1 b &= C, \\ a a_1 b b_1 &= D^2, \\ a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 &= E \end{aligned}$$

und

$$A B C - (1+\mu) D^2 E = S,$$

so ergeben sich aus 3) und 4) für x und y die einfacheren Bedingungsgleichungen:

$$5)\quad 0 = x^4 [B^2 - 2(1+\mu) D^2] - 2 S x^2 + [A^2 - 2(1+\mu) D^2]\,[C^2 - 2(1+\mu) D^2],$$

$$6)\quad 0 = y^4 [C^2 - 2(1+\mu) D^2] - 2 S y^2 + [A^2 - 2(1+\mu) D^2]\,[B^2 - 2(1+\mu) D^2],$$

aus denen x^2 und y^2 gefunden werden:

$$7)\quad x^2 = \frac{S \pm \sqrt{\{S^2 - [A^2 - 2(1+\mu) D^2]\,[B^2 - 2(1+\mu) D^2]\,[C^2 - 2(1+\mu) D^2]\}}}{B^2 - 2(1+\mu) D^2},$$

$$8)\quad y^2 = \frac{S \pm \sqrt{\{S^2 - [A^2 - 2(1+\mu) D^2]\,[B^2 - 2(1+\mu) D^2]\,[C^2 - 2(1+\mu) D^2]\}}}{C^2 - 2(1+\mu) D^2}.$$

Die Anzahl der positiven Wurzeln von x und y, die hier allein in Betracht kommen können, reducirt sich auf zwei für jede Grösse, also im Ganzen auf vier. Nun kommen in beiden Gleichungen als Bestimmungsstücke, sowohl für x, als für y die Grössen a, a_1, b, b_1 und μ, d. h. die Cosinus der Gegenwinkelsumme $A + C$ oder $B + D$ vor. Aus vier Seiten aber und einer Gegenwinkelsumme lassen sich nach dem 2. Lehnsatze zwei von einander verschiedene Vierecke construiren, die wir zugeordnete genannt haben. Die vier von einander verschiedenen positiven Wurzeln der Gleichungen 3) und 4) stellen die vier von einander verschiedenen Diagonalen dieser beiden Vierecke dar, und es kommt nur darauf an, zu bestimmen, welche von den Wurzeln als zusammengehörige Diagonalen eines und desselben Vierecks zu betrachten sind. Erwägt man zu dem Zwecke, dass bei Verschiebung des Vierecks $ABCD$ die Verlängerung der einen Diagonale eine Verkürzung der anderen nach sich zieht, so kann kein Zweifel obwalten, dass, wenn c und c_1 die Diagonalen des ursprünglichen c' und c'_1 die Diagonalen des zugeordneten Vierecks sind, ihnen folgende Werthe zukommen müssen:

$$c^2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - T}}{B^2 - 2(1+\mu) D^2},$$

$$c_1^2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - T}}{C^2 - 2(1+\mu) D^2},$$

$$c'^2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - T}}{B^2 - 2(1+\mu)D^2},$$

$$c_1'^2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - T}}{C^2 - 2(1+\mu)D^2},$$

worin:

$$T = [A^2 - 2(1+\mu)D^2]\,[B^2 - 2(1+\mu)D^2]\,[C^2 - 2(1+\mu)D^2]$$

gesetzt worden ist. Hieraus ergiebt sich aber durch Multiplication:

$$9)\qquad c^2 c_1^2 = \frac{T}{[B^2 - 2(1+\mu)D^2]\,[C^2 - 2(1+\mu)D^2]} = c'^2 \,.\, c_1'^2$$

und

$$\frac{c^2}{c_1^2} \cdot \frac{c'^2}{c_1'^2} = \frac{T}{[B^2 - 2(1+\mu)D^2]^2} \cdot \frac{[C^2 - 2(1+\mu)D^2]^2}{T},$$

woraus folgt:

$$10)\qquad \frac{c}{c_1} \cdot \frac{c'}{c_1'} = \frac{C^2 - 2(1+\mu)D^2}{B^2 - 2(1+\mu)D^2}.$$

Bedeutet ferner $\varDelta$ den Unterschied der Gegenwinkelsummen

$$A + C - (B + D),$$

so ist:

$$\cos \tfrac{1}{2}\varDelta = -\cos(B + D) = -\mu$$

oder

$$\mu = -\cos \tfrac{1}{2}\varDelta.$$

Substituirt man in 9) und 10) statt μ den letztgefundenen Werth und ersetzt die Buchstaben A, B, C, D durch die oben angegebenen Ausdrücke, so erhält man die ersten Formeln unter den Lehrsätzen IIIc. und IVc. Die übrigen Formeln, welche sich auf die Vierecke mit einspringenden Ecken $ACBD$ und $ADBC$ beziehen, werden durch eine ähnliche Entwickelung erhalten.

Lehrsatz IIId. In jedem Vierseit in der Ebene ist:

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma_1 = \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta_1.$$

Beweis. Bekanntlich besteht zwischen irgend welchen drei Winkeln x, y, z folgende goniometrische Beziehung:

a) $\sin(x + y) \sin(y + z) = \cos x \cos z - \cos y \cos(x + y + z)$.

Setzt man hierin:

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad y = \tfrac{1}{2}\beta, \quad z = \tfrac{1}{2}\alpha_1,$$

so ist:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta) = \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_1 + \beta)$$

oder da $\alpha + \beta = 180^\circ + \gamma_1$, $\alpha_1 + \beta = 180^\circ - \gamma$

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma_1 = \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta_1.$$

Lehrsatz IVd. Desgleichen:

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}\gamma}{\cos \tfrac{1}{2}\gamma_1} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta_1 + \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos \tfrac{1}{2}\beta}{\cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta + \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos \tfrac{1}{2}\beta_1}.$$

Beweis. Zwischen den beliebigen Winkeln x, y, z existirt auch die Relation:

b) $$\frac{\sin(x+y)}{\sin(y+z)}=\frac{\cos y\cos z-\cos x\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y-\cos z\cos(x+y+z)},$$

aus der man durch dieselben Substitutionen wie im vorigen Beweis zunächst

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta)}=\frac{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\alpha_1-\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\alpha_1)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta-\cos\frac{1}{2}\alpha_1\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\alpha_1)}$$

und weiter den aufgestellten Satz enthält.

Zur Vervollständigung des Ganzen stellen wir endlich noch die Lehrsätze vom Kreisviereck und Kreisvierseit auf der Kugel und in der Ebene unter V. und VI. zusammen, die sich aus den allgemeinen Sätzen ohne Mühe ableiten lassen, dadurch, dass Δ, Δ', Δ'', ε, ε', ε'' Null werden lässt, wodurch je zwei zugeordnete Vierecke oder Vierseite in ein einziges, nämlich das Kreisviereck oder Kreisvierseit, übergehen und

$$\begin{gathered}a'=a,\quad b'=b,\quad c'=c,\\ a'_1=a_1,\quad b'_1=b_1,\quad c'_1=c_1,\\ \alpha'=\alpha,\quad \beta'=\beta,\quad \gamma'=\gamma,\\ \alpha'_1=\alpha_1,\quad \beta'_1=\beta_1,\quad \gamma'_1=\gamma_1\end{gathered}$$

wird. Man kann dieselben jedoch auch unabhängig von den allgemeinen Formeln mit Hilfe ähnlicher goniometrischer Relationen wie a) und b) beweisen, dadurch, dass man die sphärischen oder ebenen Radien nach den Ecken oder den Berührungspunkten zieht und die Seiten des Vierecks oder die Winkel des Vierseits als Functionen des Radius und der zugehörigen Mittelpunktswinkel ausdrückt, wie bei Lehrsatz V*a*. und VI*a*., V*b*. und VI*b*. geschehen soll.

Lehrsatz V*a*. In jedem sphärischen Kreisviereck ist

$$\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}c_1=\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}a_1+\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}b_1$$

und

Lehrsatz VI*a*.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c_1}=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b_1+\sin\frac{1}{2}a_1\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a_1\sin\frac{1}{2}b_1}.$$

Beweis. Zieht man vom Pol O des um $ABCD$ beschriebenen Kreises die vier sphärischen Radien OA, OB, OC, OD und setzt Winkel $AOD=2x$, $COD=2y$, $BOC=2z$, so ist $AOB=360^\circ-2(x+y+z)$ und wenn ϱ den sphärischen Radius des um $ABCD$ beschriebenen Kreises bedeutet:

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z)&=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\varrho},\\ \sin y&=\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\sin\varrho},\\ \sin z&=\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\varrho},\\ \sin(x+y)&=\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\sin\varrho},\end{aligned}$$

$$\sin(y+z) = \frac{\sin \frac{1}{2} c_1}{\sin \varrho}.$$

Setzt man diese Werthe in folgende, zwischen den Winkeln x, y, z überhaupt bestehende Gleichungen:

c) $\sin(x+y) \sin(y+z) = \sin x \sin z + \sin y \sin(x+y+z)$,

d) $$\frac{\sin(x+y)}{\sin(y+z)} = \frac{\sin y \sin z + \sin x \sin(x+y+z)}{\sin x \sin y + \sin z \sin(x+y+z)},$$

so resultiren V*a*. und VI*a*.

Lehrsatz V*b*. In jedem Kreisvierseit auf der Kugel ist:

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma_1 = \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta_1$$

und

Lehrsatz VI*b*.

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\gamma_1} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta_1 + \cos \frac{1}{2}\alpha_1 \cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta + \cos \frac{1}{2}\alpha_1 \cos \frac{1}{2}\beta_1}.$$

Beweis. Bedeutet O den Pol des in das Vierseit $ABCD$ eingeschriebenen Kreises, so werden die Bogen OA, OB, OC, OD, OE, OF die betreffenden Winkel α, α_1, β, β_1, γ, γ_1 halbiren. Zieht man ferner nach den Berührungsstellen 1, 2, 3, 4, die bezüglich zwischen A, B, C, D, A liegen, die sphärischen Radien $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ und setzt $\angle 1O2 = 2x$, $\angle 2O3 = 2y$, $3O4 = 2z$, so ist:

$$\sin(x+y+z) = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \varrho},$$

$$\sin y = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha_1}{\cos \varrho},$$

$$\sin x = \frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \varrho},$$

$$\sin z = \frac{\cos \frac{1}{2}\beta_1}{\cos \varrho},$$

$$\sin(y+z = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \varrho},$$

$$\sin(x+y) = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma_1}{sos\, \varrho}.$$

Führt man diese Werthe in die Relationen unter c) und d) ein, so erhält man V*b*. und VI*b*.

Für das ebene Kreisviereck gelten ferner:

Lehrsatz V*c*.

$$cc_1 = aa_1 + bb_1.$$

Lehrsatz VI*c*.

$$\frac{c}{c_1} = \frac{ab_1 + a_1 b}{ab + a_1 b_1},$$

denen für das ebene Kreisvierseit dual sind:

Lehrsatz V*d*.

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma_1 = \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\beta_1$$

und

Lehrsatz VI*d*.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma_1}=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta_1+\cos\frac{1}{2}\alpha_1\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta+\cos\frac{1}{2}\alpha_1\cos\frac{1}{2}\beta_1}.$$

Merkwürdig ist hierbei, dass die Formeln für das sphärische und ebene Kreisvierseit genau dieselben sind und dass auch die Relationen am ebenen Kreisvierseit sich von denen des allgemeinen ebenen Vierseits durch Nichts unterscheiden.

VII.

Formeln und Tafeln zur Auflösung verschiedener hypsometrischer Aufgaben.

Von Prof. Rogg zu Ehingen a. D.

I. Ueber die Laplace-Ohm'sche Barometerformel.

1.

Es bezeichne

ψ die mittlere Polhöhe der beiden Beobachtungsplätze;

b' und b'' die beobachteten Barometerstände an der unteren und oberen Station;

τ' und τ'' die beiden Quecksilbertemperaturen;

t' und t'' die beiden Lufttemperaturen;

α den Ausdehnungscoefficienten der atmosphärischen Luft durch die Wärme;

M den Modulus der gemeinen Logarithmen;

$R' = 6370312^{M}$ den Halbmesser einer Kugel, welche mit dem Erdsphäroid, nach den von Bessel aus den Breitengradmessungen abgeleiteten Dimensionen, den gleichen Inhalt und die gleiche Oberfläche hat;

$K = 18336^{M}$ den von Ramond für das Niveau des Meeres und die geographische Breite 45° angegebenen Barometercoefficienten;

$$v=\frac{1}{1-0{,}002588\,.\cos 2\psi}=1+0{,}002588\,.\cos 2\psi;$$

$$K' = vK\,.\,\{1+\tfrac{1}{2}(t'+t'')\,\alpha\};$$

so gilt nach Laplace unter

B' und B'' die auf den Gefrierpunkt reducirten Barometerhöhen an der unteren und oberen Station, und unter

x den gesuchten Höhenunterschied verstanden,

die Gleichung:

$$1^a)\qquad \frac{R'x}{R'+x} = K'\left(Log\,\frac{B'}{B''} + \frac{2Mx}{R'}\right)$$

oder, wenn man auf beiden Seiten $\frac{x^2}{R'+x}$ addirt,

$$1^b)\qquad x = K'\left(Log\,\frac{B'}{B''} + \frac{2Mx}{R'}\right) + \frac{x^2}{R'+x}.$$

Nach Dr. G. S. Ohm (Grundzüge der Physik, S. 191) ist

$$2^a)\qquad x\left(1 - K'.\frac{2M}{R}\right) = K'.\,Log\,\frac{B'}{B''},$$

oder, mittelst Auflösung der Klammer:

$$2^b)\qquad x = K'\left(Log\,\frac{B'}{B''} + \frac{2Mx}{R'}\right).$$

2.

Zieht man die Ohm'sche Gleichung 2^b) von der Laplace'schen 1^b) ab, so bleibt $\frac{x^2}{R'+x}$. Dieser Ausdruck giebt den Betrag der kleinen Correction für die Luftsäule x wegen Abnahme der Intensität der Schwere von unten nach oben, welche bekanntlich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde stattfindet. Sie beruht also auf keinem falschen Princip, muss aber gleichwohl aus der Formel 1^b) entfernt werden. Hiermit hat es folgende Bewandtniss.

Bezeichnet man mit g' und g'' die Intensitäten der Schweren an der unteren und oberen Station, so gilt der Ausdruck:

$$a)\qquad \frac{g''}{g'} = \left(\frac{R'}{R'+x}\right)^2.$$

Die Luftsäule, welche der Quecksilbersäule des Barometers das Gleichgewicht hält, hat, was Dr. G. S. Ohm (Grundzüge der Physik, S. 183) zuerst gezeigt, die Form eines abgekürzten Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt der Erde liegt. Bezeichnen wir daher mit f' und f'' die Grössen der Querschnitte dieses Kegels in den Entfernungen R' und $(R'+x)$ vom Mittelpunkt der Erde, so gilt der Ausdruck:

$$b)\qquad \frac{f''}{f'} = \left(\frac{R'+x}{R'}\right)^2,$$

folglich das Product aus den Gleichungen a) und b):

$$c)\qquad \frac{f''g''}{f'g'} = 1.$$

Es bezeichne nun dx ein Increment der Höhe x, D' und D'' die Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft in den Entfernungen R' und $(R'+x)$

vom Centrum der Erde, G' und G'' die Gewichte der Luftsäulchen $dx \,.\, f'$ und $dx \,.\, f''$, so gelten die Gleichungen:

$$G' = dx \,.\, f' \,.\, g' \,.\, D',$$
$$G'' = dx \,.\, f'' \,.\, g'' \,.\, D'',$$

folglich wegen c):

d) $$G' : G'' = D' : D''.$$

Diese Proportion zeigt, in Verbindung mit Gleichung c), unzweideutig an, dass die Correction für x wegen Abnahme der Schwere mit der Erhebung über den Meeresspiegel durch die neue von Ohm nachgewiesene Correction wegen der konischen Form der Luftsäule, welche der Quecksilbersäule des Barometers das Gleichgewicht hält, aufgehoben wird. Eine nothwendige Folge hiervon ist, dass der Theilsatz

$$\frac{x^2}{R' + x}$$

aus der Laplace'schen Gleichung 1^b) verbannt werden muss.

3.

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass die Ohm'sche Formel die genauere ist, obwohl der Unterschied zwischen ihr und der Laplace'schen $\left(= \frac{x^2}{R' + x}\right)$ nicht gross sein kann; für 1800 Toisen z. B., ein Höhenunterschied, wie er nur in Hochgebirgen vorkommt, beträgt der Fehler kaum 1 Toise.

Die Ohm'sche Gleichung 2^b):

$$x = K'\left(Log\,\frac{B'}{B''} + \frac{2Mx}{R'}\right),$$

oder, wegen $K' = vK(1 + \alpha t)$:

3) $$x = vK(1 + \alpha t)\left(Log\,\frac{B'}{B''} + \frac{2Mx}{R'}\right),$$

wenn man zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(t' + t'') = t$$

setzt, lässt sich leicht auf eine für die logarithmische Berechnung bequeme Form bringen. Denn unter allen Umständen ist $\frac{x}{R}$ eine kleine Grösse, also, da $2M < 1$, nur umsomehr $\frac{2Mx}{R'}$. Für die Berechnung dieses Quotienten darf man daher, ohne von der Genauigkeit etwas aufzuopfern, schreiben:

$$x = vK(1 + \alpha t) \,.\, Log\,\frac{B'}{B''};$$

folglich:

$$\frac{2Mx}{R'} = \frac{2M \,.\, vK}{R'}(1 + \alpha t) \,.\, Log\,\frac{B'}{B''}.$$

Setzt man daher

$$K\left(1+\frac{2M.vK}{R'}\right)=A,$$

so geht Gleichung 3) über in

4) $$x=vA\left\{1+\left[\left(1+\frac{2M(vK)^2}{R'.vA}\right)\alpha\right].t\right\}.Log\frac{B'}{B''}.$$

Um die in der Luft befindliche Feuchtigkeit mit in Rechnung zu nehmen, setzt Laplace den Coefficienten α für die 100theilige Scale gleich $\frac{1}{250}$; für die 80theilige Scale ist folglich $\alpha=\frac{1}{200}$. Für die Bestimmung des sehr kleinen Bruches $\frac{2M.(vK)^2}{R'.vA}$ darf man, ohne der Genauigkeit einen merklichen Eintrag zuzufügen, $v=1$ und $A=K=18336^M$ **setzen.** Bei diesen Unterstellungen ergiebt sich aber:

$$\left(1+\frac{2M.(vK)^2}{R.vA}\right)\alpha=0{,}0050124695,$$

oder, da $t=\frac{1}{2}(t'+t'')$ ist:

$$\left[\left(1+\frac{2M.(vK)^2}{R.vA}\right)\alpha\right].t=0{,}0025067.(t'+t'').$$

Hiernach geht Gleichung 4) über in

5)' $$x=vA.\{1+0{,}0025067.(t'+t'')\}.Log\frac{B'}{B''}.$$

4.

Der Anwendung dieser Formel muss eine Reduction der beiden Barometerstände auf 0° Temperatur vorangehen; oder es muss, was bequemer ist und der Genauigkeit nicht schadet, der Barometerstand der oberen Station auf die Temperatur des Quecksilbers an der unteren Station reducirt werden.

Der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers ist bekanntlich für jeden Grad der 80theiligen Scale gleich $\frac{1}{4440}$. Man muss folglich

$$b'' \text{ mit } b''\left(1+\frac{\tau'-\tau''}{4440}\right)$$

und

$$Log\frac{B'}{B''} \text{ mit } Log\frac{b'}{\beta}$$

vertauschen, und dann geht Gleichung 5) über in

6) $$x=vA.\{1+0{,}0025067.(t'+t'')\}.Log\frac{b'}{\beta}.$$

5.

Für die Berechnung terrestrischer Höhenunterschiede sind fünfstellige Logarithmen stets ausreichend. Die Mantissen derselben ändern sich aber von der Zahl 4440 an, vor und rückwärts, um 10 Einheiten der fünften Decimalbruchstelle. Man darf daher schreiben:

$$Log\,\beta = Log\,b'' + 0{,}00010\,.\,(\tau' - \tau'').$$

Und setzt man

$$Log\,b' - Log\,\beta = u,$$
$$A\,.\,\{1 + 0{,}0025067\,.\,(t' + t'')\} = A',$$

so geht Gleichung 6) in folgende über:

$$x = v\,.\,A'\,.\,(Log\,b' - Log\,\beta) = v\,A'\,u$$

oder

7) $$Log\,x = Log\,u + Log\,A' + Log\,v,$$

wo $Log\,A'$, mit dem Argument $(t' + t'')$, aus Tafel I. und $Log\,v$, mit dem Argument ψ, aus Tafel II. entlehnt werden kann, und wobei x in Toisen gelesen werden muss.

Die Scale des Barometers darf nach beliebigem Maass getheilt sein, die Temperaturen aber müssen in Graden der 80theiligen Scale angegeben werden.

Ich will nun den Gebrauch der obigen Formel 7) durch ein Beispiel erläutern.

Nach den Beobachtungen, welche Alexander v. Humboldt an der Oberfläche des Meeres und auf dem Chimborasso angestellt hat, war:

$b' = 337^L,79$	$\tau' \ldots = +\,20^0,24$ R.	$t' = +\,20^0,24$ R.
$b'' = 167,20$	$\tau'' \ldots = +\,8,00$	$t'' = -\,1,28$
$\psi = 1^0\,45'$	$\tau' - \tau'' = +\,12,24$	$t' + t'' = +\,18,96 = +\,19^0$.

$Log\,b'' = 2,22324$	$Log\,A' = 3,99478$
$+\,122$	$Log\,u = 9,48314$
$Log\,\beta = 2,22446$	$Log\,v = 0,00113$
$Log\,b' = 2,52865$	$Log\,x = 3,47905$
$u = 0,30419$	$x = 3013^T,4$
	$= 18080,4$ Par. Fuss.

Will man nach der genauen Formel von Ohm:

$$x\left(1 - K'.\frac{2M}{R}\right) = K'.\,Log\,\frac{B'}{B''}$$

rechnen, so entsteht eine Arbeit, welche im Vergleich zur vorhergehenden sehr weitläufig ist. Ich beschränke mich deshalb auf die Angabe der Hauptmomente.

$$Cpl.\,Log\,(1 - 0{,}002538\,.\,cos\,2\psi) = 0{,}0011233$$
$$Log\,K,\ \text{d. i. } Log\,18336 \ldots\ldots = 4{,}2633046$$
$$Log\,(1 + \alpha t),\ \text{d. i. } Log.\,1{,}0475185 = 0{,}0201618$$
$$Log\,K' \ldots\ldots\ldots\ldots = 4{,}2845897$$
$$Log\,\frac{2M}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}1346536$$
$$Log\,\frac{2MK'}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots = 7{,}4192433$$
$$1 - \frac{2MK'}{R'} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}9973743$$

Tafel I.

Logarithmus A' mit dem Argument $t'+t''$.

$t'+t''$	0°,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
+ 0°	3,97457	468	479	490	501	512	523	533	543	554
1	566	577	588	599	609	620	631	642	653	664
2	675	686	697	708	719	730	740	751	762	773
3	783	794	805	815	826	837	848	859	870	880
4	890	901	911	922	933	944	954	965	976	987
5	998	009*	020*	031*	042*	053*	063*	074*	085*	095*
6	3,98105	116	127	138	149	159	169	180	191	202
7	213	224	234	245	255	266	276	287	297	308
8	319	330	341	351	362	373	383	393	404	415
9	426	437	447	458	468	479	489	500	510	521
10	532	543	553	564	574	585	595	606	616	627
11	638	649	659	670	681	691	702	712	723	733
12	744	755	765	776	786	797	807	818	828	839
13	850	861	871	882	892	903	913	924	934	945
14	955	966	976	987	997	007*	018*	028*	039*	049*
15	3,99060	071	081	092	102	113	123	134	144	155
16	165	176	186	197	207	218	228	239	249	259
17	269	280	290	300	310	321	331	341	352	363
18	374	385	395	406	416	427	437	448	458	468
19	478	488	499	509	520	531	541	551	562	572
20	582	592	603	613	624	634	644	655	665	675
21	685	695	706	716	726	737	747	757	767	778
22	788	798	809	819	829	840	850	860	871	881
23	892	902	913	923	934	944	954	964	974	984
24	994	004*	014*	024*	034*	045*	055*	065*	076*	087*
25	4,00097	107	117	128	138	149	159	169	179	189
26	199	209	219	230	240	250	260	270	281	291
27	301	311	321	332	342	352	362	372	383	393
28	403	413	423	434	444	454	464	474	485	495
29	505	515	525	536	546	556	566	576	586	506
30	606	616	626	636	646	657	667	677	687	697
31	707	717	727	737	747	758	768	778	788	798
32	808	818	828	838	848	859	869	879	889	899
33	909	919	929	939	949	960	970	980	990	999
34	4,01000	019	029	039	049	059	069	079	089	099
35	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
36	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
37	309	319	329	339	349	359	369	379	389	399
38	409	419	429	439	449	459	468	478	488	498
39	508	518	528	538	548	558	567	577	587	597
40	607	617	627	637	647	656	666	676	686	696

$Log.\ B' = 2,5260825$
$Log.\ B'' = 2,2224531$
$u = 0,3042094$

Man hat daher (nach Ohm):

$0,0973743 \,.\, x = 0,3042094 \,.\, K'.$

Hieraus

$x = 5873^{M},6 = 3013^{T},6,$

ein Resultat, von welchem das obige, nach der abgekürzten Ohm'schen Formel berechnete nur um $0^{T},2$ abweicht, eine Differenz, welche bei einem Höhenunterschied von mehr als 18000 Par. Fuss gar keine Beachtung verdient.

Berechnet man die Höhe des Chimborasso nach der ursprünglichen Formel von Laplace, so kommt:

	$5879^{M},13 = 3016^{T},4$
Hiervon ab (Art. 2) . . . . . . $\frac{x^2}{R'} =$	2,8
Bleibt	3013,6
Die genaue Ohm'sche Formel gab	3013,6
Differ.	0,0

Die von Ohm angenommenen Coefficienten: $K = 18316^{M},21$ und $\alpha = 0,003665$ (für die 100theilige Scale) beziehen sich auf völlig trockene Luft. Dies geht aber nur an, wenn man, wie Bessel es gethan, das Resultat nach dem Stand des Psychrometers corrigirt. Lässt man aber diese Correction ausser Acht und rechnet mit den von Ohm angenommenen Constanten, so ergiebt sich, wie Herr Prof. Dr. C. A. F. Peters (Astr. Nachr. No. 963) nachgewiesen hat, ein Resultat, welches für grössere Höhenunterschiede um ein Erhebliches kleiner ausfällt, als dasjenige, welches nach der Laplace'schen Barometerformel herauskommt; für den Chimborasso z. B. macht diese Differenz — 50 Par. Fuss.

Um das in Pariser Fussen erhaltene Resultat bequem und sicher auf Meter, englische, Wiener, oder preussische Fusse zurückzuführen, kann man sich Tafel III. bedienen.

Tafel II.

Argument ψ.

ψ	Log. v	ψ
0°	+ 0,00113	90
5	111	85
10	106	80
15	0,00098	75
20	87	70
25	73	65
30	56	60
30	0,00056	60
31	52	59
32	49	58
33	45	57
34	41	56
35	38	55
36	34	54
37	31	53
38	27	52
39	23	51
40	20	50
41	16	49
42	12	48
43	0,0008	47
44	4	46
45	0,00000	45

Log v ist subtractiv, wenn

$\psi > 45°$;

additiv, wenn

$\psi < 45°$.

Tafel III.

Reduction der Pariser Fusse auf Meter, englische, Wiener un rheinländische Fusse.

A. Meter.

Par. F.	Meter	Par. F.	Meter	Par. F.	Meter	Par. F.	Me
1	0,325	10	3,248	100	32,484	1000	32
2	0,650	20	6,497	200	64,968	2000	64
3	0,975	30	9,745	300	97,452	3000	97
4	1,299	40	12,994	400	129,936	1000	129
5	1,624	50	16,242	500	162,420	5000	162
6	1,949	60	19,490	600	194,904	6000	194
7	2,274	70	22,739	700	227,388	7000	227
8	2,599	80	25,987	800	259,872	8000	259
9	2,924	90	29,236	900	292,355	9000	292
10	3,248	100	32,484	1000	324,839	10000	324

B. Englische Fusse.

Par. F.	Engl. F.	Par. F.	Engl. F.	Par. F.	Engl. F.	Par. F.	Eng
1	1,066	10	10,658	100	106,577	1000	106
2	2,132	20	21,315	200	213,153	2000	213
3	3,197	30	31,973	300	319,730	3000	319
4	4,263	40	42,631	400	426,306	4000	426
5	5,329	50	53,288	500	532,883	5000	532
6	6,395	60	63,946	600	639,459	6000	639
7	7,460	70	74,604	700	746,036	7000	746
8	8,526	80	85,261	800	852,612	8000	852
9	9,592	90	95,919	900	959,189	9000	959
10	10,658	100	106,577	1000	1065,765	10000	1065

C. Wiener Fusse.

Par. F.	Wien. F.	Par. F.	Wien. F.	Par. F.	Wien. F.	Par. F.	Wie
1	1,028	10	10,276	100	102,761	1000	102
2	2,055	20	20,552	200	205,521	2000	205
3	3,083	30	30,828	300	308,282	3000	308
4	4,110	40	41,104	400	411,042	4000	411
5	5,138	50	51,380	500	513,803	5000	513
6	6,166	60	61,656	600	616,563	6000	616
7	7,193	70	71,932	700	719,324	7000	719
8	8,221	80	82,208	800	822,084	8000	822
9	9,248	90	92,484	900	924,845	9000	924
10	10,276	100	102,761	1000	1027,605	10000	1027

(Zu Tafel III.)

D. Rheinländische Fusse (Dänemark und Preussen).

Par. F.	Rh. F.	Par. F.	Rh. F.	Par. F.	Rh. F.	Par. F.	Rheinl. F.
1	1,035	10	10,350	100	103,500	1000	1035,003
2	2,070	20	20,700	200	207,001	2000	2070,006
3	3,105	30	31,050	300	310,501	3000	3105,010
4	4,140	40	41,400	400	414,001	4000	4140,013
5	5,175	50	51,750	500	517,502	5000	5175,016
6	6,210	60	62,100	600	621,002	6000	6210,019
7	7,245	70	72,450	700	724,502	7000	7245,023
8	8,280	80	82,800	800	828,003	8000	8280,026
9	9,315	90	93,150	900	931,503	9000	9315,029
10	10,350	100	103,500	1000	1035,003	10000	10350,032

II. Berechnung terrestrischer Höhenunterschiede aus beobachteten Zenithabständen mit Rücksicht auf den Stand der meteorologischen Instrumente.

6.

Die trigonometrische Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier terrestrischer Punkte M und M' gründet sich zunächst auf die Kenntniss der Entfernung beider Punkte und der Zenithdistanz des Punktes M vom Signal über M' oder umgekehrt. Ausserdem müssen Mittel vorhanden sein, aus der beobachteten Zenithdistanz die wahre herzuleiten, d. h. die Einwirkung der irdischen Strahlenbrechung aus dem Resultat schaffen zu können.

Um die Formel für diese Correction darzustellen, bezeichne ich mit

ϑ die lineare Länge des in der geometrischen Erdoberfläche liegenden Bogens MM', die Toise als Einheit angesehen;

φ die geographische Breite des Beobachtungsplatzes M;

z die Zenithdistanz des Signals über M' von M aus gesehen;

Δz die Grösse der terrestrischen Refraction;

$a = 3272077{,}14$ Toisen die halbe grosse Achse (Radius des Aequators) und $b = 3261139{,}13$ Toisen die halbe kleine Achse (Umdrehungsachse), nach den von Bessel aus den Breitengradmessungen abgeleiteten Dimensionen des Erdsphäroids;

$e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ die Excentricität der Erzeugungsellipse;

$r = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$ den Krümmungshalbmesser am Punkt M im Azimuth von 90°;

$\varrho = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$ den Krümmungshalbmesser am Punkt M im Azimuth $= 0$;

$\dfrac{1}{R} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{\varrho}\right)$ den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers R am Punkt M im Azimuth $= 45^\circ$;

C den Centriwinkel des Bogens ϑ;

und dann gilt die Gleichung:

$$\Delta z = \tfrac{1}{12} C$$

für den Barometerstand $= 337$ Pariser Linien und den Eispunkt. Für jeden anderen Barometerstand b und jede andere Lufttemperatur t (der 80theiligen Scale) muss man diesen Ausdruck nach L a p l a c e mit der Formel:

$$\Delta z = \tfrac{1}{12} C \cdot \frac{b}{337} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{t}{213}}$$

vertauschen.

Es ist aber, in Secunden gelesen:

$$C = \frac{1}{R \sin 1''} \cdot \vartheta;$$

folglich, wenn man, um abzukürzen:

$$\frac{1}{R \cdot \sin 1''} = N$$

und

$$\frac{213}{12 \cdot 337} = v$$

setzt:

$$\Delta z = \vartheta \cdot b \cdot \frac{1}{213 + t} \cdot N \cdot v$$

oder ($Log\, v = 8{,}72157 - 10$)

$$Log\, \Delta z = Log\left(\vartheta \cdot b \cdot \frac{1}{213 + t}\right) + Log\, N + 8{,}72157 - 10,$$

wo $Log\, N$ mit dem Argument φ aus Tafel V. entlehnt werden kann.

B e i s p i e l d e r A n w e n d u n g. Sei $Log\, \vartheta = 4{,}09066$, $b = 300$ Par. Linien, $t = 10^\circ$ R. und $\varphi = 48^\circ$, so ist die Rechnung wie folgt:

$Log\, \vartheta$	$= 4{,}09966$	
$Log\, b$	$= 2{,}47712$	
$Cpl.\ Log.\ (213 + t)$	$= 7{,}65170 - 10$	
$Log\, N$	$= 8{,}79945 - 10$	(Taf. V.)
$Log\ const.$	$= 8{,}72157 - 10$	
$Log\, \Delta z$	$= 1{,}74950$	
Δz	$= 56',17.$	

7.

Es bezeichne h die Meereshöhe des Punktes M und h' die des Punktes M', die Toise als Einheit angenommen, so gilt bekanntlich die Gleichung:

$$\left(1+\frac{h'+h}{2R}\right)2R:h'-h = cotang\,\tfrac{1}{2}C : cotang\,(z+\Delta z-\tfrac{1}{2}C)$$

oder, wenn man die sehr kleine Grösse $\frac{h'+h}{2R}$ vernachlässigt:

$$h'-h = 2R\,.\,cotang\,(z+\Delta z-\tfrac{1}{2}C)\,.\,tang\,\tfrac{1}{2}C.$$

Es ist aber Winkel C stets so klein, dass man, ohne von der Genauigkeit etwas Erhebliches aufopfern zu müssen, $tang\,\frac{1}{2}C$ mit $arc\,\frac{1}{2}C$ vertauschen darf; also:

$$h'-h = RC\,.\,cotang\,(z+\Delta z-\tfrac{1}{2}N\vartheta).$$

Ferner ist, den mittleren Krümmungshalbmesser als Einheit angenommen:

$$RC = R\,.\,\frac{\vartheta}{R} = \vartheta;$$

folglich:

$$h'-h = \vartheta\,cotang\,(z+\Delta z-\tfrac{1}{2}N\vartheta).$$

Beispiel der Anwendung. Sei $Log\,\vartheta = 4{,}0996631$, $b = 300$ Par. Linien, $t = 10^0$ R., $\varphi = 48^0$ und $z = 88^0\ 43'\ 25''$, so ist, nach dem vorhergehenden Artikel, $\Delta z = 56'',2$ und die Rechnung daher wie folgt:

$$\begin{aligned}
Log\,\vartheta\ . &= 4{,}09966\\
Log\,N\ . &= 8{,}79945 - 10\\
Log\,(N\vartheta) &= 2{,}89911\\
N\vartheta &= 792'',7 = 0^0\ 13'\ 12'',7.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= 88^0\ 43'\ 25'',0\\
\Delta z &= \ \ 0\ \ \ \ 0\ \ \ 56{,}2\\
&\ \ \ 88^0\ 44'\ 21'',2\\
\tfrac{1}{2}N\vartheta &= \ \ 0\ \ \ \ 6\ \ \ 36{,}4\\
z+\Delta z-\tfrac{1}{2}N\vartheta &= 88^0\ 37'\ 44'',8\\
Log\,cotang\,(z+\Delta z-\tfrac{1}{2}N\vartheta) &= 8{,}3789625\\
Log\,\vartheta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . &= 4{,}0996631\\
Log\,(h'-h)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . &= 2{,}4786256\\
h'-h\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . &= 301{,}04 \text{ Tois.} = 1806{,}24 \text{ Par. Fuss.}
\end{aligned}$$

„In den unteren Luftschichten, welche allein die irdische Strahlenbrechung bedingen, sind die periodischen und localen Störungen des Gleichgewichts der Atmosphäre mit den klimatischen Einwirkungen so mannichfaltig durchflochten, dass es schwerlich je gelingen wird, aus den blossen Angaben der meteorologischen Instrumente den Werth der Strahlenbrechung für jeden einzelnen Fall mit Zuverlässigkeit anzugeben.“

Für Distanzen von weniger als 10000 Toisen ist diese Unzuverlässigkeit gering, wächst aber rasch mit der Zunahme von ϑ, nämlich nahezu

Tafel IV.

Enthaltend die Werthe von $R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{r}\right)$.

φ	Log R	φ	Log R	φ	Log R
45° 0′	6,514821	50° 0′	6,515073	55° 0′	6,515318
10	830	10	081	10	326
20	838	20	090	20	334
30	846	30	098	30	342
40	855	40	106	40	350
50	863	50	115	50	358
46° 0′	872	51° 0′	124	56° 0′	366
10	881	10	132	10	374
20	889	20	141	20	382
30	897	30	149	30	389
40	906	40	157	40	397
50	914	50	165	50	405
47° 0′	922	52° 0′	173	57° 0′	412
10	930	10	181	10	420
20	939	20	189	20	427
30	947	30	198	30	435
40	956	40	207	40	442
50	965	50	214	50	450
48° 0′	973	53° 0′	222	58° 0′	459
10	981	10	230	10	467
20	990	20	238	20	474
30	998	30	246	30	482
40	6,515007	40	254	40	489
50	015	50	262	50	497
49° 0′	023	54° 0′	270	59° 0′	504
10	031	10	278	10	511
20	040	20	286	20	519
30	048	30	294	30	526
40	056	40	302	40	534
50	065	50	310	50	541
50° 0′	073	55° 0′	318	60° 0′	548

im Verhältniss des Quadrats der Entfernung. Bei grossen Werthen ϑ muss man daher, um der Gefahr zu entgehen, ein Resultat zu erzi welches von der Wahrheit bedeutend abweicht, von verschiedenen tionen (deren Meereshöhen bekannt sind) die Zenithdistanzen des zı stimmenden Punktes beobachten, und hierauf die Endresultate der R nung zu einem Mittelwerth ausgleichen. — Ein hierher gehöriges reiches Beispiel bietet die trigonometrische Bestimmung der Höhe Montblanc aus sechs verschiedenen Beobachtungsplätzen. Ich will Hauptmomente dieser interessanten Arbeiten angeben, zuvor aber merken, dass die erste der folgenden Beobachtungen von dem Mailänder Astronomen Dr. Francesco Carlini, die vier folgenden von Offizieren des österreichischen General-Quartiermeisterstabes in den Jahren 1821 und 1822, die sechste aber von Offizieren des französischen Ingenieurcorps ausgeführt wurden.

Beobachtungs-Stationen.	Beobachtete Zenithdistanz z	Werth der Correction Δz	Entfernung der Station ϑ	Höhe der Station h	Höhendifferenz $h'-h$	Höhe des Montblanc h'
			Toisen	Toisen	Toisen	Toisen
1) Mont Colombier . .	88° 5′ 28″,0	3′ 57″,2	44208,6	737,8	1722,2	2460,0
2) Mont Trelod . . .	87 26 33,3	2 20,2	27844,7	1115,7	1346,8	2462,5
3) Perron d'Encombres	88 35 49,4	2 38,9	34758,0	1447,5	1012,4	2459,9
4) Glacier d'Ambin .	89 12 27,8	2 48,2	38569,3	1730,8	733,1	2463,9
5) Rochemelon	89 16 58,3	2 23,9	36909,9	1813,3	645,5	2458,8
6) Mont Granier . . .	88 21 47	3 29,0	43036,0	986,2	1473,9	2460,1

Hiernach ist offenbar die Höhe des Montblanc im Mittel: 3460,7 Toisen = 14764 Par. Fuss, wobei man aber nicht übersehen darf, dass auf dem Montblanc kein Signal stand, also die Schneekuppe anvisirt werden musste, deren Dicke wegen des Verdunstens und Anschmelzens des Schnees beständigen und gar nicht unbeträchtlichen Schwankungen unterworfen ist.

III. Bestimmung der Weite des scheinbaren Horizonts.

8.

Sei B ein erhöhter Punkt der Erdoberfläche, T ein Punkt im scheinbaren Horizont desselben und $AB = a$ seine Meereshöhe, so heisst Bogen AT die Weite des scheinbaren Horizonts des Beobachtungsplatzes B. Um die Grösse derselben zu finden, betrachte ich AT als Bogen eines grössten Kreises auf einer Kugel, welche den mittleren Krümmungshalbmesser R der Erdoberfläche am Punkt A $\left[\text{nämlich } \frac{1}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r}\right)\right]$ zum Radius hat.

Es sei C der Mittelpunkt dieser Kugel und die Tangente BT gezogen, so ist in dem bei T rechtwinkligen Dreieck, wegen $CT = CA = R$ und $CB = R + a$, offenbar

$$tang\, C = \frac{TB}{TC} = \frac{\sqrt{\{(R+a)^2 - R^2\}}}{R}.$$

Hieraus, wenn man die sehr kleine Grösse $\frac{a^2}{R^2}$ vernachlässigt:

$$1) \qquad tang\, C = \sqrt{\left(\frac{2a}{R}\right)}.$$

Tafel V.

Enthaltend die Werthe von $N = \frac{1}{R \sin 1''}$.

φ	$Log\ N$	φ	$Log\ N$	φ	$Log\ N$
45°	8,79961	50°	8,79935	55°	8,79911
46	55	51	30	56	06
47	50	52	25	57	01
48	45	53	20	58	8,79896
49	40	54	15	59	92
50	35	55	11	60	87

Bezeichnet man daher mit x die lineare Länge des Bogens AT, welcher den Winkel C misst, und mit y die lineare Länge des Secundenbogens, so hat man:

$$x = C \,.\, y$$

und

$$648000 \,.\, y = \pi R \text{ Toisen};$$

also:

$$x = \frac{\pi}{648000} \,.\, CR = R \,.\, C \,.\, \sin 1''$$

oder

2) $$Log\, x = Log\, C + Log\, R + 4{,}685575 - 10,$$

wo $Log\, R$ mit dem Argument φ aus Tafel IV. entlehnt werden kann.

B e i s p i e l d e r A n w e n d u n g. Das Auge eines Beobachters auf einem Dampfboot befindet sich 1,5 Toisen über dem Niveau des Wassers. Was beträgt die Weite des Horizonts, die Polhöhe des Schiffs zu 55° angenommen?

$Log\, R$ . . $= 6{,}515318$ (Taf. IV.)

$Log \frac{1}{R}$. $= 3{,}484682$

$Log\, 2$ . . $= 0{,}301030$

$Log\, a$ . . $= 0{,}176091$

$3{,}961803$

$Log\, tang\, C = 6{,}9809015$

$C = 0^0\, 3'\, 17''$

$= 197''$.

$Log\, C$ . . $= 2{,}294466$

$Log\, R$ . . $= 6{,}515318$

$Log\, const.$ $= 4{,}685575 - 10$

$Log\, x$ . . $= 3{,}495359$

x . . $= 3129$ Toisen.

$= 0{,}8218$ geogr. M.

9.

Die Natur der Sache bringt es mit sich, dass bei grossen Distanzen die irdische Strahlenbrechung auf die Weite des scheinbaren Horizonts einen bedeutenden Einfluss ausübt. Bei Höhen vom ersten Rang, d. h.

bei Höhen, wie sie im Alpenland etc. vorkommen, kann die Vernachlässigung dieser Correction einen Fehler von 3000 Toisen und noch mehr zur Folge haben.

Ich will den mittleren Barometerstand b und die Lufttemperatur $= 0^0$ als Fundamentalzustand der Atmosphäre betrachten. Für diese Unterstellung ist die Weite des Horizonts, mit Rücksicht auf die irdische Strahlenbrechung, statt C offenbar (Art. 6):

$$C + \frac{b}{337} \cdot \tfrac{1}{12} \cdot C = \frac{4044 + b}{4044} \cdot C,$$

und man hat statt $x = R \,.\, C \,.\, \sin 1''$ zu setzen:

$$x = R \,.\, \frac{4044 + b}{4044} \,.\, C \,.\, \sin 1''$$

in Toisen gelesen, oder

$$x = \frac{R}{3807{,}235} \,.\, \frac{4044 + b}{4044} \,.\, C \,.\, \sin 1''$$

in geographischen Meilen gelesen; daher:

3) $\qquad Log\, x = Log\, \{(4044 + b) \,.\, C \,.\, R\} + 7{,}498064 - 10.$

Beispiel der Anwendung. Die Kuppe des Montblanc liegt 2460 Toisen ($= a$) über dem Niveau des Meeres und die Polhöhe desselben beträgt $45^0\, 50'$ ($= \varphi$). Was den mittleren Barometerstand anbelangt, so darf dieser bei einer Höhe von 2460 Toisen (Tafel VI.) zu 192 Par. Linien ($= b$) angenommen werden. Man hat daher {Formel 1) und 3)}:

$Log\, R \ldots = 6{,}514863$ (T. IV.)	$Log\, (4044 + b) = 3{,}620956$
$Log\, \frac{1}{R} \ldots = 3{,}485137$	$Log\, C \ldots = 3{,}902764$
$Log\, 2 \ldots = 0{,}301030$	$Log\, R. \ldots = 6{,}514863$ (T. IV.)
$Log\, a \ldots = 3{,}390935$	$Log\, const. \ldots = 7{,}498064 - 20$
$7{,}177102$	$Log\, x \ldots = 1{,}542647$
$Log\, tang\, C \ldots = 8{,}588501$	$x = 34{,}886$ geogr. M.
$C = 2^0\, 13'\, 14''$	
$= 7994''.$	

Der nächste Punkt des adriatischen Meeres ist weit mehr als 35 geographische Meilen vom Montblanc entfernt, kann also nicht, wie behauptet wurde, von der Spitze des Montblanc aus gesehen werden.

IV. Bestimmung der scheinbaren Höhe einer terrestrischen Position.

10.

Die scheinbare Höhe eines irdischen Gegenstandes B ist der Abstand seines höchsten Punktes (in senkrechter Richtung) vom Horizont des Beobachtungsplatzes A; sie lässt sich berechnen, wenn man die Entfernung beider Punkte ($= \vartheta$) und die Höhen (h', h) derselben kennt. Es sei nämlich h die Meereshöhe des Beobachtungsplatzes, C ein Punkt im scheinbaren Horizont desselben und h_0 seine Höhe, sowie h' die des höchsten Punktes von B, so ist offenbar

$h' - h$ der wahre, hingegen

$h' - h_0$ der scheinbare Höhenunterschied,

oder die Höhe des höchsten Punktes von B, über dem scheinbaren Horizont des Beobachtungsplatzes A; folglich

$$h' - h_0 = h' - h - (h_0 - h).$$

Es ist aber (Art. 6):

$$h_0 - h = \vartheta \; colang\,(90^\circ + \varDelta z - \tfrac{1}{2} C)$$

und man sieht, da $C = N\vartheta$, und ϑ gegeben, dass es blos auf die Berechnung der Grösse $\varDelta z$ ankommt. Diese ist aber, wie man weiss, vom Stand des Barometers und Thermometers abhängig, und man ist wiederum genöthigt, Willkür eintreten zu lassen. Ich will mich an den mittleren Stand des Barometers am Beobachtungsplatze und an die Lufttemperatur $= t$ Grad R. halten. Alsdann hat man (Art. 6):

1) $$\varDelta z = N \,.\, v \,.\, \vartheta \,.\, b \,.\, \frac{1}{213 + t}, \ldots \quad Log\, v = 8{,}72157$$

und

2) $$h' - h_0 = h' - h - \vartheta \; colang\,(90^\circ + \varDelta z - \tfrac{1}{2} N\vartheta).$$

Beispiel der Anwendung. Vor ein Paar Jahren war in einer Beilage zur Augsburger Allgemeinen Zeitung zu lesen, dass auf dem Pfender bei Bregenz der Monte-Rosa sichtbar sei, eine Angabe, welche vielfach bezweifelt wurde. Der Pfender liegt 544,2 Toisen über dem Meer und seine Polhöhe beträgt 47° 30′. Der höchste Gipfel des Monte-Rosastocks, die sogenannte Parrotspitze, liegt 2275,4 Toisen über dem Niveau des Oceans und ist vom Pfender um 30,3 geographische Meilen entfernt. Was ist die Höhe dieser Spitze, den scheinbaren Horizont des Pfenders als Basis angenommen?

Zuerst muss mittelst Formel 1) der Werth von $\varDelta z$ berechnet werden. — Für die Höhe des Pfenders, nämlich 544,2 Toisen, ist der mittlere Barometerstand (Tafel VI.) $b = 24$ Zoll 10 Linien Pariser Maass $= 298$ Linien. Setzt man nun $t = 10^\circ$ R., so ist, weil $\vartheta = 30{,}3$ geographische Meilen beträgt, die Rechnung wie folgt:

$Log\, 30{,}3 \ldots\ldots$	$= 1{,}48144.26$	$Log\,(N\vartheta) \ldots\ldots$	$= 3{,}86152$
$Log\, 3807{,}235 \ldots$	$= 3{,}58060.96$	$Log\, \frac{1}{2} \ldots\ldots$	$= 9{,}69897$
$Log\, \vartheta \ldots\ldots$	$= 5{,}06205.22$	$Log\,(\frac{1}{2} N\vartheta) \ldots\ldots$	$= 3{,}56049$
$Log\, N \ldots\ldots$	$= 8{,}79947$ (T. V.)	$\frac{1}{2} N\vartheta \ldots\ldots$	$= 3635''$
$Log\,(N\,.\,\vartheta) \ldots$	$= 3{,}86152$		$-\; 1^\circ\, 0'\, 35''$
$Log\, v \ldots\ldots$	$= 8{,}72157$	$+\, \varDelta z \ldots\ldots$	$8'\, 32$
$Log\, b \ldots\ldots$	$= 2{,}47422$		$+\, 90\;\; 0\;\; 0$
$Log\, \frac{1}{223} \ldots\ldots$	$= 7{,}65170$	$90^\circ + \varDelta z - \frac{1}{2} N\vartheta$	$= 89^\circ\, 7'\, 57''$
$Log\, \varDelta z \ldots\ldots$	$= 2{,}70901$		
$\varDelta z \ldots\ldots$	$= 512''$		

Tafel VI.

Enthaltend die in Toisen ausgedrückten Höhen, welche den in Pariser Linien gelesenen Barometerständen (B.) entsprechen.

B.	Tois.	B.	Tois.	B.	Tois.	B.	Tois.	B.	Tois.	B.	Tois.
338‴	0	310‴	376	282‴	787	254‴	1241	226‴	1748	199‴	2301
337	13	309	390	281	802	283	1258	225	1767	198	2323
336	26	308	404	280	818	252	1275	224	1787	197	2345
335	39	307	418	270	833	251	1292	223	1806	196	2367
334	52	306	432	278	849	250	1310	222	1826	195	2389
333	65	305	446	277	864	249	1327	221	1845	194	2411
332	78	304	460	276	880	248	1345	220	1865	193	2434
331	91	303	475	275	896	247	1362	219	1885	192	2456
330	104	302	489	274	912	246	1380	218	1905	191	2479
329	117	301	503	273	928	245	1398	217	1925	190	2502
328	130	300	517	272	943	244	1415	216	1945	189	2525
327	144	299	532	271	959	243	1433	215	1965	188	2548
326	157	298	547	270	976	242	1451	214	1985	187	2571
325	170	297	562	269	992	241	1469	213	2005	186	2594
324	184	296	576	268	1008	240	1487	212	2026	185	2617
323	197	205	591	267	1024	239	1505	211	2047	184	2641
322	211	204	606	266	1040	238	1523	210	2068	183	2665
321	224	293	620	265	1057	237	1542	209	2088	182	2688
320	238	292	635	264	1073	236	1560	208	2109	181	2712
319	251	291	650	263	1090	235	1578	207	2129	180	2736
318	265	290	665	262	1106	234	1597	206	2151	179	2761
317	279	289	680	261	1123	233	1616	205	2172	178	2785
316	292	288	695	260	1139	232	1634	204	2193	177	2809
315	306	287	710	259	1156	231	1653	203	2214	176	2834
314	320	286	725	258	1173	240	1672	202	2236	175	2858
313	334	285	741	257	1190	229	1691	201	2257	174	2884
312	348	284	756	256	1207	228	1710	200	2279	173	2909
311	361	283	771	255	1224	227	1729				

$$\begin{aligned}
&Log\ colang\,(90^0 + \Delta z - \tfrac{1}{2} N\vartheta)\ . = 8{,}1801860\\
&Log\ \vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 5{,}0620522\\
&Log\,\{\vartheta . colang\,(90^0 + \Delta z - \tfrac{1}{2} N\vartheta)\} = 3{,}2422322\\
&-\{\vartheta . colang\,(90^0 + \Delta z - \tfrac{1}{2} N\vartheta)\} = -1746{,}8 \text{ Tois.}\\
&h' - h = +\ 1731{,}2 \ \text{„}\\
&h' - h_0 = -\ \ 15{,}6 \ \text{„}
\end{aligned}$$

Für die angegebenen Daten liegt also die höchste Spitze des Monte-Rosastocks 15,6 Toisen, oder 93,6 Pariser Fuss unter dem scheinbaren Horizont des Pfenders bei Bregenz. — Es liegt zwar in der Natur der Sache, dass jede Auflösung einer solchen Aufgabe, falls nicht der Zufall sein Spiel treibt, nur eine leidliche Annäherung zur Wahrheit liefern kann. So gross darf jedoch die Differenz zwischen dem genauen Resultat und dem gefundenen nicht angenommen werden, dass es zweifelhaft sein könnte, ob auf dem Pfender der Monte-Rosa sichtbar sei oder nicht. Denn es ist nicht genug, dass die Kuppe des Berges in den Horizont tritt, es muss, um auf eine so grosse Entfernung sichtbar zu sein, ein grosses Stück des Berges über den Horizont emporragen.

11.

Ist die Entfernung des Beobachtungsplatzes nicht unmittelbar, sondern statt ihr der Längenunterschied der Endpunkte von $\vartheta = \omega$ und die Polhöhe eines jeden φ_1 und φ_2 gegeben, so lässt sich ϑ berechnen.

Seien $M_1 M_2$ die Endpunkte von ϑ, so gilt, wenn man vor der Hand den Erdkörper als eine Kugel ansieht, die Gleichung:

$$\cos M_1 M_2 = \sin \varphi_1 \,.\, \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \,.\, \cos \varphi_2 \,.\, \cos \omega.$$

Es bezeichne nun M_0 einen beliebigen Punkt in demjenigen grössten Kreis der Kugel, von welchem $M_1 M_2$ ein Bogen ist, und es werde gesetzt:

$$M_0 M_2 = v_2, \quad M_0 M_1 = v_1,$$

ausserdem

1) $$\tan \psi = \cos \varphi_2 \,.\, \cos \omega,$$

so ergiebt sich:

2) $$\cos (v_2 - v_1) = \sin \varphi_2 \,.\, \sec \psi \,.\, \sin (\varphi_1 + \psi).$$

Auch gilt die Proportion:

$$\sin \varphi_2 : \sin \varphi_1 = \sin v_2 : \sin v_1;$$

folglich:

3) $$\tan \tfrac{1}{2}(v_2 + v_1) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \,.\, \tan \tfrac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

Setzt man nun, um abzukürzen:

4) $$\sin \gamma = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1},$$

sodann, die geographische Meile als Einheit angenommen:

$$A = \frac{b \,.\, \sin 1''}{3807{,}23463},$$

$$B = \tfrac{1}{2} e^2,$$

$$C = \tfrac{3}{4} \,.\, \frac{e^2}{\sin 1''},$$

$$D = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{e^2}{\sin 1''},$$

so gilt nach den Untersuchungen von G. F. Thune *), unter ϑ die kürzeste Entfernung der Punkte M_1 und M_2 verstanden, die Gleichung:

---

*) *Tentamen circa trigonometricam sphaeroidicam, Havniae* 1815, *p.* 5.

$$
5)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\vartheta}{A} &= (v_2 - v)\,(1 + B\sin\gamma) \\
&\quad - C\sin^2\gamma\,.\,\sin(v_2 - v)\,.\,\cos(v_2 + v_1) \\
&\quad + D\cos^2\gamma\,.\,\sin(v_2 - v_1)\,.\,\frac{\cos v_2}{\cos v_1}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
Log\,A &= 7{,}6183346 - 10 \\
Log\,B &= 7{,}52338 - 10 \\
Log\,C &= 3{,}01390 \\
Log\,D &= 2{,}83718.
\end{aligned}
$$

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, will ich die Distanz Dünkirchen — Seeberg berechnen. Für dieses Exempel (Astronomische Nachr. No. 27) sind die Daten folgende:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= 51^0\ 2'\ 12'',7 \text{ (Dünkirchen)}, \\
\varphi_1 &= 50^0\ 56'\ 6'',7 \text{ (Seeberg)}, \\
\omega &= 8^0\ 21'\ 19''.
\end{aligned}
$$

1. Berechnung von ψ und $(\varphi + \psi)$.

$$
\begin{aligned}
Log\,cotang\,\varphi_2 &= 9{,}9077979 \\
Log\,cos\,\omega\,.\,. &= 9{,}9953658 \\
\hline
Log\,tang\,\psi\,. &= 0{,}9031637 \\
\psi\,. &= 38^0\ 39'\ 52'',38 \\
\varphi_1\,. &= 50\ \ 51\ \ 6{,}70 \\
\hline
\varphi_1 + \psi &= 89^0\ 35'\ 59'',08.
\end{aligned}
$$

2. Berechnung des Bogens $(v_2 - v_1)$.

$$
\begin{aligned}
Log\,sin\,(\varphi_1 + \psi) &= 9{,}9999894 \\
Log\,sec\,\psi\,.\,.\,.\,. &= 0{,}1074507 \\
Log\,sin\,\varphi_2\,\,.\,.\,. &= 9{,}8907287 \\
\hline
Log\,cos\,(v_2 - v_1) &= 9{,}9981688 \\
v_2 - v_1 &= 5^0\ 15'\ 28'',42 \\
&= 18928'',42\,;
\end{aligned}
$$

ein Resultat, welches die Weite der Distanz Dünkirchen — Seeberg darstellen würde, wenn die Erde eine Kugel wäre.

3. Berechnung des Bogens $(v_2 + v_1)$

$$
\begin{aligned}
Log\,tang\,\tfrac{1}{2}(v_2 - v_1)\ .\,. &= 8{,}6619572 \\
Log\,tang\,\tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)\ .\,. &= 0{,}0914560 \\
Cpl.\,Log\,tang\,\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) &= 3{,}0519739 \\
\hline
Log\,tang\,\tfrac{1}{2}(v_2 + v_1)\,.\,.\,. &= 1{,}8053871 \\
\tfrac{1}{2}(v_2 + v_1)\,.\,.\,. &= 89^0\ 6'\ 11'',48 \\
\tfrac{1}{2}(v_2 - v_1)\,.\,.\,. &= 2\ \ 37\ \ 44,\ 21 \\
\hline
v_2\ .\,.\,. &= 91^0\ 43'\ 55'',69 \\
v_1\ .\,.\,. &= 86\ \ 28\ \ 27,\ 27.
\end{aligned}
$$

4. **Berechnung der Hilfsgrösse γ.**

$$
\begin{aligned}
Log\ sin\ \varphi_1 &= 9{,}8001044\\
Log\ sin\ v_1 &= 9{,}9091773\\
\hline
Log\ sin\ \gamma &= 9{,}8909271\\
\gamma &= 51^0\ 4'\ 9'',28.
\end{aligned}
$$

5. **Berechnung der Distanz $M_1 M_2 = \vartheta$.**

$$
\begin{aligned}
&Log\ (v_2 - v_1)\ . = 4{,}27711\\
&Log\ B\ \ldots\ldots = 7{,}22235\\
&Log\ sin^2\ \gamma\ \ldots = 9{,}78185\\
\hline
&\ldots\ldots\ldots\ 1{,}28131\\
&\ldots\ldots\ldots\ 19'',11\\
&v_2 - v_1\ \ldots\ldots\ 18928{,}42\\
\hline
&\text{(I. Theilsatz)}\ .\ 18947'',53.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Log\ cos\ (v_2 + v_1) = 9{,}99979\ (n)\\
&Log\ sin\ (v_2 - v_1) = 8{,}96208\\
&Log\ sin^2\ \gamma\ \ldots = 9{,}78185\\
&Log\ C\ \ldots\ldots = 3{,}01390\\
&\ldots\ldots\ldots\ 1{,}75762\ (n)\\
&\text{(II. Theilsatz)}\ \ -57'',23.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Log\ sin\ (v_2 - v_1) = 8{,}96208\\
&Log\ cos^2\ \gamma\ \ldots = 9{,}59645\\
&Log\ D\ \ldots\ldots = 2{,}83781\\
&Log\ cos\ v_2\ \ldots = 8{,}48038\ (n)\\
&Cpl.\ Log\ cos\ v_1\ . = 1{,}21115\\
\hline
&\ldots\ldots\ldots\ 1{,}08787\ (n)\\
&\text{(III. Theilsatz)}\ \ -12'',24.
\end{aligned}
$$

Man hat daher:

$$
\begin{aligned}
&\text{I. Theilsatz}\ .\ 18947'',53\\
&(-)\ \text{II.}\ \ „\ \ .\ +57{,}23\\
&(-)\ \text{III.}\ \ „\ \ .\ +12{,}24\\
\hline
&\frac{D}{A} = 19017'',00
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Log\ \frac{D}{A}\ \ldots\ldots = 4{,}2791420\\
&Log\ A\ \ldots\ldots = 7{,}6183346\\
\hline
&Log\ \vartheta\ \ldots\ldots = 1{,}8974766\\
&\vartheta\ \ldots\ldots = 78{,}083\ \text{geogr. M.}
\end{aligned}
$$

General v. **Müffling** fand mit anderen Constanten und bekannten Formeln . . . . 79,012 geogr. M.

Differenz 0,071 geogr. M.

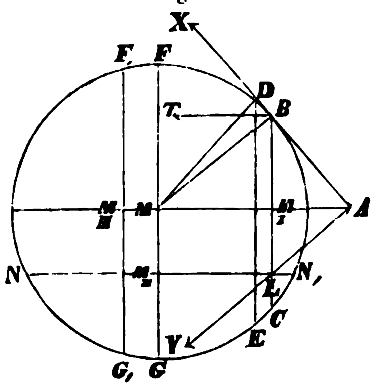
VIII.

Ueber den Einfluss der Rotationen kugelförmiger Geschosse auf die Flugbahnen derselben.

Von W. von Rouvroy,
Königlich Sächsischer Generalleutnant.

Die aus den Rotationen kugelförmiger Geschosse entspringenden grossen Veränderungen ihrer Flugbahnen sind bis jetzt wohl noch nicht genügend erklärt, und man hat bei den Versuchen hierzu zuweilen selbst die abenteuerlichsten Voraussetzungen zu Hilfe genommen. Ein neuer, wenig befriedigender Versuch, welcher dem Verfasser unlängst zu Gesicht kam, veranlasste denselben, sich wieder einmal mit diesem Problem zu beschäftigen, und führte dadurch zu der nachstehenden Arbeit, welche vielleicht mehr Aufklärung über jene eigenthümliche Erscheinung geben dürfte.

Fig. 1.

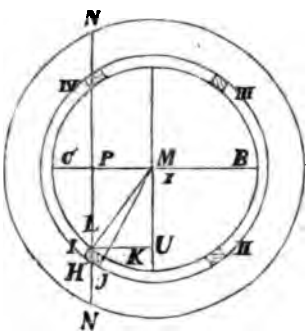


Eine Kugel vom Halbmesser r, deren Schwerpunkt der grösseren Einfachheit wegen mit ihrem Mittelpunkt M (Fig. 1) zusammenfalle, bewege sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung MA und drehe sich zugleich um die auf MA rechtwinklige Achse FG in der aus Fig. 3 ersichtlichen Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{w}{r}$; w sei kleiner als v, äusserstens $= v$. Man betrachte die Wirkung der Luft gegen eine Kugelzone $BCED$, welche durch zwei auf der Richtung MA rechtwinklige Kreisflächen begrenzt wird; Winkel AMB sei β, Winkel $BMD = d\beta$, mithin $MM_1 = r\cos\beta$, $M_1B = r\sin\beta$ und die Breite BD der Zone $= r\,d\beta$. In dieser Kugelzone, welche Fig. 2 in der vorderen Ansicht zeigt, hebe man zuvörderst die Elemente I, II, III und IV hervor, welche symmetri gegen die Ebene liegen, die durch MA gehend, auf der Ebene AMF rec winklig steht. Es sei Winkel $CM_IL = \alpha$, Winkel $LM_IK = d\alpha$, mitl die Fläche $HIKL$ eines Elementes $= IK \, . \, KL = r d\beta \, . \, M_IB$. $= r^2 d\beta d\alpha \sin\beta$. Die Geschwindigkeit der Rotation des Punktes L ergi sich aus Fig. 3, welche den Durchschnitt NN_I (Fig. 1 und 2) darstellt. ist nämlich in Fig. 3 $M_{II}P = MM_I$ (Fig. 1) $= r \cos\beta$, PL (wie in Fig. $= M_IC \sin\alpha = r \sin\beta \sin\alpha$, mithin $M_{II}L = \sqrt{r^2 \cos^2\beta + r^2 \sin^2\beta \sin^2\alpha}$, sov die Rotationsgeschwindigkeit $LQ = w \sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta \sin^2\alpha}$. Diese G schwindigkeit lässt sich aber in zwei andere, nämlich in LR, parallel i der Richtung MA des Schwerpunktes (s. Fig. 1) und LS rechtwinklig i letzterer zerlegen. Hier kommt nur $LR = \frac{PL}{M_{II}L} \, . \, LQ = w \sin\beta \sin\alpha$ in B tracht. Es treffen daher die betrachteten Flächenelemente gegen die v ihnen befindlichen Luftschichten:

I und II mit der Geschwindigkeit $v + w \sin\beta \sin\alpha = V_I$

III „ IV „ „ „ $v - w \sin\beta \sin\alpha = V_{II}$.

Fig. 2.



Wie und inwieweit diese Luftschicht hierbei seitwärts ausweichen, lässt sich n zwar mit Bestimmtheit nicht angeben; der man sich aber durch jeden beliebigen Pur der vorderen halben Kugelfläche, z. B. dur B (Fig. 1) eine Parallele BT zur Richtung d Schwerpunktes, und durch diese Gerade u dem Halbmesser MB der Kugel eine Ebe gelegt, so wird man wenigstens annäherun weise annehmen können, dass an dem Pur B die Luft in der Durchschnittslinie AB d genannten Ebene und der Berührungsebe von B dem Stoss ausweicht, und dass daher letzterer nur mit der G schwindigkeit $V_I \cos\beta$, respective $V_{II} \cos\beta$ erfolgt. Ist nun p das Gewic der Kugel, l das Gewicht der Raumeinheit Luft, $\frac{4p}{lr^2\pi} = c$, und nim man diejenige Kraft, welche der Kugel die Beschleunigung 1 ertheilt, a Einheit der Kräfte an, so kann der Druck, welchen die unaufhörlic Wiederholung der obigen Stösse, respective an den Elementen I und I erzeugt, wenigstens annäherungsweise:

$$\text{für das Element I:} \quad D_I = \frac{l \, . \, HIKL}{2p} V_I^2 \cos^2\beta$$

$$= \frac{2}{c\pi} d\alpha \, . \, d\beta \, . \, V_I^2 \cos^2\beta \sin\beta$$

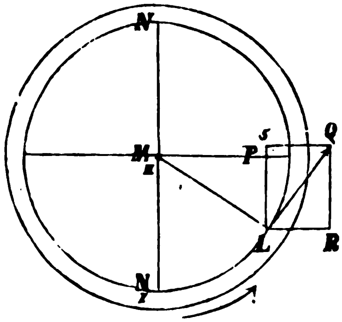
und

für das Element IV: $D_{II} = \frac{2}{c\pi} d\alpha \,.\, d\beta \,.\, V_{II}^2 \cos^2\beta \sin\beta$

gesetzt werden.*)

Mit dem seitlichen Ausweichen der Luft, welches nach obiger Annahme z. B. in B in der Richtung BX, und mit der Geschwindigkeit $V_I \sin\beta$, respective $V_{II} \sin\beta$ erfolgt, ist aber auch ein Widerstand verbunden, wie schon die Verminderung der Geschwindigkeit der Luft bei dem Durchströmen durch lange Röhren zeigt, und vermag man auch diesen Widerstand, welchen wir der Kürze wegen als Reibung und für die Elemente I und IV mit R_I und R_{II} bezeichnen wollen, nicht in Zahlen anzugeben, so würde es doch ein unrichtiges Bild der zu betrachtenden Bewegung geben, wenn dabei jener Widerstand ganz unbeachtet bliebe; denn man würde dann die Drehungsgeschwindigkeit w unveränderlich und in Folge hiervon in dem Ausdruck des Widerstandes gegen die fortgehende Bewegung ein constantes Glied erhalten. Wir setzen daher unter der Annahme, dass ε einen unbekannten, aber constanten und sehr kleinen Bruch bezeichnet, analog mit dem obigen:

Fig. 3.



$$R_I = \frac{2\varepsilon}{c\pi} d\alpha \,.\, d\beta \,.\, V_I^2 \sin^3\beta,$$

$$R_{II} = \frac{2\varepsilon}{c\pi} d\alpha \,.\, d\beta \,.\, V_{II}^2 \sin^3\beta.$$

Betrachtet man nun die Kräfte D_I und D_{II} näher, so ist sogleich zu bemerken, dass dieselben sämmtlich nach dem Mittelpunkt der Kugel gerichtet sind und daher weder Rotationen erzeugen, noch die schon existirende Rotation verändern können. Dagegen ist jede der genannten Kräfte in drei auf einander rechtwinklige Composanten zu zerlegen, von denen die erste parallel mit AM ist, und z. B. am Flächenelement I, die zweite die Richtung LP, und die dritte die Richtung LU hat. Diese drei Seitenkräfte verhalten sich zu der zu zerlegenden Kraft wie die drei Kanten eines Parallelepipedums $MM_I = r\cos\beta$ (Fig. 1), $LP = r \sin\beta \sin\alpha$ und $M_I P = r \sin\beta \cos\alpha$, zu dessen Diagonale $LM = r$. Daher ist

die Seitenkraft in der Richtung AM: $D_I \cos\beta$,

„ „ „ „ „ LP: $D_I \sin\beta \sin\alpha$,

„ „ „ „ „ LU: $D_I \sin\beta \cos\alpha$.

Zerlegt man ebenso die Kräfte D an den anderen drei Elementen und combinirt man die Ergebnisse mit dem vorstehenden, so zeigt sich zuvörderst, dass die Kraft in der Richtung LU und die ihr respective entgegen-

*) Die wahrscheinlich vor dem Körper eintretende Verdichtung der Luft dürfte diese Kräfte D_I und D_{II} und deren Differenz noch etwas vergrössern; allein dies lässt sich nicht wohl in Rechnung nehmen.

gesetzten und parallelen Kräfte sich gegenseitig aufheben. Dagegen erhält man als Gesammtwirkung der vier Kräfte D:

in der Richtung AM die Kraft:

$$2(D_I + D_{II}) \cos\beta$$
$$= \frac{4}{c\pi} d\alpha\, d\beta\, (V_I^2 + V_{II}^2) \cos^3\beta \sin\beta$$
$$= \frac{8}{c\pi} d\alpha\, d\beta\, [v^2 \cos^3\beta \sin\beta + w^2 \cos^3\beta \sin^3\beta \sin^2\alpha],$$

in der Richtung LP (d. h. nach derjenigen Seite, auf welcher in der vorderen Halbkugel die Drehung nach rückwärts erfolgt) die Kraft:

$$2(D_I - D_{II}) \sin\beta \sin\alpha$$
$$= \frac{4}{c\pi} d\alpha\, d\beta\, (V_I^2 - V_{II}^2) \cos^2\beta \sin^2\beta \sin\alpha$$
$$= \frac{16}{c\pi} d\alpha\, d\beta\, (v w \cos^2\beta \sin^3\beta \sin^2\alpha).$$

Die Kräfte R_I und R_{II}, welche in tangentialen Richtungen, z. B. im Punkte B (Fig. 1) in der Richtung BX, in dem Punkte L in der Richtung LY wirken, sind nicht ohne Einfluss auf die Rotation des Körpers; da aber bei der Bestimmung derselben nicht die ganze Rotationsgeschwindigkeit LQ (Fig. 3) in Rechnung kam, so wird es angemessener sein, den hemmenden Einfluss der Luft auf die Drehungen der Kugel nicht hier, sondern später sogleich im Ganzen zu betrachten. Dagegen lassen sich die Kräfte R_I und R_{II} auf ähnliche Weise in drei Seitenkräfte zerlegen, wie D_I und D_{II}. Für die in L thätige Kraft R_I haben z. B. die drei Seitenkräfte die Richtungen $LM_{II} \# AM_I$ (Fig. 1), PL und UL (Fig. 2), und verhalten sich zu R_I wie die Kanten $AM_I = AL \sin\beta$, $PL = r \sin\beta \sin\alpha$ und $UL = r \sin\beta \cos\alpha$, eines Parallelepipedums zu dessen Diagonale $AL = AB = r \tang\beta$. Endlich wird auch hier die in der Richtung UL wirkende Seitenkraft durch die in entgegengesetzter Richtung am Element II thätige Kraft aufgehoben, so dass nur die Seitenkräfte:

in der Richtung AM, $\quad R_I \sin\beta$,
" " " LP, $\quad -R_I \cos\beta \sin\alpha$

zu berücksichtigen sind. Verfährt man auf gleiche Art mit den übrigen Kräften R und combinirt man die Ergebnisse wie oben, so findet sich als Gesammtwirkung der Kräfte R:

in der Richtung AM die Kraft:

$$2(R_I + R_{II}) \sin\beta$$
$$= \frac{4\varepsilon}{c\pi} d\alpha\, d\beta\, (V_I^2 + V_{II}^2) \sin^4\beta$$
$$= \frac{8\varepsilon}{c\pi} d\alpha\, d\beta\, [v^2 \sin^4\beta + w^2 \sin^6\beta \sin^2\alpha]$$

und in der Richtung LP die Kraft:

$$-2(R_I - R_{II})\cos\beta\sin\alpha$$

$$= -\frac{4\varepsilon}{c\pi}\,d\alpha\,d\beta\,(V_I^2 - V_{II}^2)\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha$$

$$= -\frac{16\varepsilon}{c\pi}\,d\alpha\,d\beta\,(v\,w\sin^4\beta\cos\beta\sin^2\alpha).$$

Auf der Rückseite der Kugelfläche können natürlich nur tangentiale Kräfte wirken und annäherungsweise kann man dieselben denen an der vorderen Halbkugel gleich annehmen. Denkt man sich hierbei für einen Augenblick die Flächenelemente I, II, III und IV in der hinteren Halbkugel, so hat z. B. in L die tangentiale Kraft R_I nicht mehr die Richtung LY, sondern die Richtung LA, und sie giebt daher, sowie an der vorderen Kugelhälfte, wieder eine Seitenkraft $R_I \sin\beta$ in einer der Richtung von v entgegengesetzten Richtung, dagegen aber die zweite Seitenkraft $R_I\cos\beta\sin\alpha$ in der Richtung LP, nicht wie vorn negativ, sondern positiv. Es heben sich mithin die an der vorderen und hinteren Kugelhälfte in der genannten Richtung LP wirkenden Composanten der R auf, während in der Richtung AM die Reibung der Luft an der hinteren Halbkugel einen eben so grossen Widerstand erzeugt, wie an der vorderen Kugelhälfte. Für die weitere Untersuchung sind daher nur noch die drei ersten unter den oben gefundenen vier Mittelkräften zu berücksichtigen. Die Integration der für dieselben erhaltenen Ausdrücke nach α und zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ giebt die Gesammtwirkung der Luft gegen die Kugelzone $BCED$ (Fig. 1), sodann aber erhält man durch eine zweite Integration nach β und zwischen den eben genannten Grenzen den Gesammtwiderstand gegen die vordere Kugelhälfte. Bei der Ausführung dieser Rechnungen kommen die nachstehenden Integrale in Anwendung:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\alpha\sin^2\alpha = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\alpha\,\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\sin^3\beta\cos\beta = \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\sin^3\beta\cos^3\beta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\,(\sin^3\beta\cos\beta - \sin^5\beta\cos\beta) = \tfrac{1}{12},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\cos^2\beta\sin^3\beta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\,(\cos^2\beta\sin\beta - \cos^4\beta\sin\beta) = \tfrac{2}{15},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\sin^4\beta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta\left[\frac{1-\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 4\beta}{8}\right] = \tfrac{3}{16}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta \sin^6\beta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta \left[\sin^2\beta - 2\sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^4\beta\right]$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\beta \left[\sin^2\beta - \tfrac{3}{8}\sin^2 2\beta + \tfrac{1}{8}\sin^2 2\beta\cos 2\beta\right] = \tfrac{5}{32}\pi.$$

Mit Benutzung dieser Formeln giebt die Integration von $2(D_I + D_{II})\cos\beta$ nach α:

$$\frac{4}{c} d\beta \left[v^2\cos^2\beta\sin\beta + \tfrac{1}{2}w^2\cos^2\beta\sin^3\beta\right]$$

und alsdann die Integration nach β:

$$\frac{1}{c}\left(v^2 + \tfrac{1}{6}w^2\right).$$

Ebenso erhält man durch Integration von $4(R_I + R_{II})\sin\beta$ (wobei also der Reibungswiderstand gegen die vordere und hintere Halbkugel so gleich zusammengefasst ist) zunächst:

$$\frac{8\varepsilon}{c} d\beta \left[v^2\sin^4\beta + \tfrac{1}{2}w^2\sin^6\beta\right]$$

und sodann

$$\frac{3\pi\varepsilon}{2c}\left[v^2 + \tfrac{5}{12}w^2\right].$$

Setzt man daher:

$$b = \frac{1}{1 + \frac{3\pi\varepsilon}{2}} c,$$

so wird der Gesammtwiderstand der Luft gegen die fortgehende Bewegung des Geschosses in der Richtung MA:

$$= \frac{1}{b}\left[v^2 + \tfrac{1}{6}\left(1 + \frac{9\pi\varepsilon}{4 + 6\pi\varepsilon}\right)w^2\right].$$

Da aber ε ein sehr kleiner Bruch, und deshalb die mit w^2 multiplicirte Parenthese von der Einheit nur wenig verschieden ist, endlich aber der Reibungswiderstand und mit demselben auch ε ohnehin nicht genau bestimmt werden kann, so setzen wir für den Gesammtwiderstand gegen die Bewegung des Schwerpunktes anstatt des vorstehenden Ausdrucks $\frac{1}{b}\left[v^2 + \frac{1}{6}w^2\right]$.

Die Integrationen von $2(D_I - D_{II})\sin\beta\cos\alpha$ geben endlich zuerst:

$$\frac{4}{c} v w\, d\beta \,.\, \cos^2\beta\sin^3\beta$$

und sodann

$$\tfrac{8}{15} \cdot \frac{1}{c} v w.$$

Da indessen $\frac{16}{15}$ und $1 + \frac{3\pi\varepsilon}{2}$ nur wenig verschieden sind, so kann zur weiteren Vereinfachung der Untersuchung der vorstehende Ausdruck der seitlich wirkenden Kraft $\frac{1}{2b} v w$ gesetzt werden. Liesse sich die Verdichtung der Luft vor dem Geschoss und die Verschiedenheit dieser Verdichtung auf der vorwärts und rückwärts rotirenden Seite der Kugelfläche mit in Rechnung bringen, so würde sich jener Seitendruck noch wesentlich grösser als der oben gefundene herausstellen.

Es bleibt nun noch übrig, den hemmenden Einfluss des Reibungswiderstandes der Luft auf die Umdrehungen des Geschosses wenigstens annäherungsweise zu bestimmen. Zu diesem Behuf betrachte man wieder die vier Flächenelemente I, II, III und IV, sehe dieselben jedoch je zwei und zwei als Elemente einer anderen Kugelzone, z. B. No. I und IV als Elemente der an den Durchschnitt NN_I anstossenden Zone an. Der Halbmesser der Kreisfläche NN_I, nämlich $M_{II}L$ (Fig. 3) sei $r \sin j$, der Abstand dieser Fläche vom Mittelpunkt M der Kugel also $r \cos j$ und die Breite der zu betrachtenden Zone $r dj$; endlich sei der Winkel $LM_{II}P$ (Fig. 3) δ, sowie die Höhe des Flächenelementes $= M_{II}L \,.\, d\delta = r d\delta \,.\, \sin j$ und mithin der Inhalt des letzteren $r^2 dj\, d\delta \,.\, \sin j$. Alsdann ist die Drehungsgeschwindigkeit LQ des Punktes L (Fig. 3) $w \sin j$ und derjenige Theil der Geschwindigkeit v, welcher die Richtung von LQ besitzt, $v \sin \delta$. Hieraus folgen die Geschwindigkeiten, mit welchen die Luft an den respective vorwärts und rückwärts rotirenden Elementen hinstreicht, $w \sin j + v \sin \delta$ und $w \sin j - v \sin \delta$, sowie die Reibungswiderstände an diesen Elementen:

$$\text{in I und II} \quad S_I = \frac{2\varepsilon}{c\pi} [w \sin j + v \sin \delta]^2 \, dj\, d\delta \,.\, \sin j,$$

$$\text{in III und IV} \quad S_{II} = \frac{2\varepsilon}{c\pi} [w \sin j - v \sin \delta]^2 \, dj\, d\delta \,.\, \sin j.$$

Die Momente dieser Kräfte erhält man durch Multiplication mit $r \sin j$; nimmt man aber hierbei als Einheit dasjenige Moment an, welches in der Peripheriegeschwindigkeit w die Beschleunigung 1 erzeugt, und ist $\frac{2}{5} h r^2 p$ das Trägheitsmoment der Kugel, so finden sich die Momente*) der vorstehenden Kräfte durch Multiplication derselben mit $\frac{\sin j}{0{,}4 h}$, nämlich:

$$\text{für } S_I \text{ das Moment: } \frac{5\varepsilon}{ch\pi} dj\, d\delta\, [w^2 \sin^4 j + 2 v w \sin^3 j \sin \delta + v^2 \sin^2 j \sin^2 \delta] = M_I,$$

$$\text{„ } S_{II} \text{ „ „ } \frac{5\varepsilon}{ch\pi} dj\, d\delta\, [w^2 \sin^4 j - 2 v w \sin^3 j \sin \delta + v^2 \sin^2 j \sin^2 \delta] = M_{II}.$$

---

*) Für massive Kugeln von homogener Masse ist bekanntlich $h = 1$, für Hohlgeschosse hingegen erhält man nach Maassgabe ihres grösseren oder kleineren inneren hohlen Raumes circa $h = 1{,}2 - 1{,}25$.

Berücksichtigt man ferner, dass $v \geq w$ vorausgesetzt wurde, und nimmt man:

$$\sin\delta_I = \frac{w}{v}\sin j$$

an, so ist von $\delta = 0$ bis $\delta = \delta_I$ $w \sin j > v \sin\delta$, mithin am Element IV die Richtung des Luftstromes derjenigen der Kugelfläche entgegengesetzt, von $\delta = \delta_I$ bis $\delta = \frac{1}{2}\pi$ hingegen erstere und letztere Richtung übereinstimmend. Um daher für die Vorderhälften der beiden betrachteten Zonen das Moment des Reibungswiderstandes zu finden, hat man von $\delta = 0$ bis $\delta = \delta_I$ das Integral von $2(M_I + M_{II})$, von $\delta = \delta_I$ bis $\delta = \frac{1}{2}\pi$ hingegen das Integral von $2(M_I - M_{II})$ zu nehmen, und sodann beide Integrale zu addiren. Nun ist:

$$2(M_I + M_{II}) = \frac{2\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, dj\, d\delta\, [w^2 \sin^4 j + v^2 \sin^2 j \sin^2 \delta]$$

$$= \frac{2\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, dj\, d\delta \left[w^2 \sin^4 j + v^2 \sin^2 j \left(\frac{1 - \cos 2\delta}{2}\right)\right]$$

und das Integral hiervon zwischen den Grenzen 0 und δ_I:

$$= \frac{2\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, dj \,.\, [(w^2 \sin^4 j + \tfrac{1}{2} v^2 \sin^2 j)\, \delta_I - \tfrac{1}{4} v^2 \sin^2 j \sin 2\delta_I].$$

Hingegen findet sich:

$$2(M_I - M_{II}) = \frac{4\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, vw\, dj \,.\, d\delta \sin^3 j \sin\delta$$

und das Integral hiervon zwischen den Grenzen $\delta = \delta_I$ und $\delta = \frac{1}{2}\pi$:

$$= \frac{4\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, vw\, dj \,.\, \sin^3 j \cos\delta_I.$$

Addirt man beide Integrale, und berücksichtigt man dabei, dass im ersten derselben $\sin 2\delta_I = 2\frac{w}{v}\sin j \cos\delta_I$ ist, so ergiebt sich das Moment der an den beiden Vorderhälften der betrachteten Zonen wirkenden Reibungswiderstände

$$\frac{2\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, dj\, [(\tfrac{1}{2} v^2 \sin^2 j + w^2 \sin^4 j)\, \delta_I + \tfrac{3}{2} vw \sin^3 j \cos\delta_I].$$

Setzt man zur Elimination von δ_I näherungsweise:

$$\delta_I = \frac{w}{v}\sin j + \frac{1}{6}\frac{w^3}{v^3}\sin^3 j$$

und

$$\cos\delta_I = 1 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{v^2}\sin^2 j,$$

so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\frac{4\mathfrak{M}\varepsilon}{ch\pi}\, vw\, dj \left[\sin^3 j + \frac{1}{3}\frac{w^2}{v^2}\sin^5 j + \frac{1}{6}\frac{w^4}{v^4}\sin^7 j\right].$$

Der Reibungswiderstand an den hinteren Hälften der gedachten Kugel- ungefähr demjenigen an ihren Vorderhälften gleich gesetzt werden; man erhält daher das Moment der Reibungswiderstände an der ganzen Kugelfläche, wenn das Doppelte des vorstehenden zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ integrirt wird. Hierbei hat man:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dj\, sin^3 j = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dj\, sin j\,(1 - cos^2 j) = \tfrac{2}{3},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dj\, sin^5 j = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dj\, sin j\,(1 - 2\,cos^2 j + cos^4 j) = \tfrac{8}{15},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dj\, sin^7 j = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dj\, sin j\,(1 - 3\,cos^2 j + 3\,cos^4 j - cos^6 j) = \tfrac{16}{35}$$

und mithin das gesuchte Moment der Luftreibung:

$$= \frac{160\,\varepsilon}{3ch\pi}\, v w \left[1 + \tfrac{4}{15}\,\frac{w^2}{v^2} + \tfrac{4}{35}\,\frac{w^4}{v^4}\right].$$

Da endlich $\frac{w}{v}$ ein ächter Bruch und der kleine Bruch ε ohnehin nicht genau zu bestimmen ist, so genügt es wohl, wenn unter der Voraussetzung $n = \frac{160\,\varepsilon}{3h\pi}$, das Moment des Reibungswiderstandes, welcher die Umdrehung des Geschosses verlangsamt, $= \frac{n}{b}\, v w \left[1 + \tfrac{1}{6}\,\frac{w^2}{v^2}\right]$ gesetzt wird, wodurch sich für die weitere Untersuchung der Bewegung das Verhältniss der Aenderungen von v und w möglichst einfach gestaltet.

Aus den bisherigen Ergebnissen lassen sich nun nachstehende Folgerungen ziehen:

Verbindet eine Kugel, deren geometrischer Mittelpunkt auch der Mittelpunkt ihrer Masse ist, mit der Bewegung dieses letzteren Punktes die Drehung um eine durch denselben Punkt gehende und auf dessen Richtung rechtwinklige Achse, so wird durch diese drehende Bewegung nicht nur die negative Beschleunigung des Massenmittelpunktes $\left(\text{um das Glied } \frac{w^2}{6b}\right)$ vergrössert, sondern auch ein seitlicher Luftdruck gegen diesen Punkt erzeugt, dessen Richtung rechtwinklig auf der durch seine Richtung und durch die Drehungsachse bestimmten Ebene ist und nach derjenigen Seite geht, auf welcher die vordere Halbkugel die Drehung rückwärts ausführt. Denkt man sich also die Wirkung der Schwerkraft hinweg, und ist die Drehungsachse zugleich eine der freien Achsen des Körpers, oder bildet dieselbe wenigstens nur einen kleinen Winkel mit der freien Achse des grössten oder kleinsten Trägheitsmoments, d. h. ist die Drehungsachse vollständig oder doch mindestens annäherungsweise als stabil anzusehen*), so bewegt sich der Mittelpunkt der Kugel in der durch seine ursprüngliche Richtung gehenden, auf der Drehungsachse normalen Ebene, welche wir die Flugebene nennen wollen, beschreibt aber in dieser Ebene keine Gerade, sondern eine Curve, deren Richtung sich mehr und mehr nach derjenigen Seite wendet, auf welcher die Rotation rückwärts geschieht.

Liegt die Drehungsachse waagerecht, mithin die Flugebene senkrecht, so wird auch durch den Hinzutritt der Schwerkraft der Mittelpunkt der Kugel, welcher zugleich ihr Schwerpunkt war, nicht aus der Flugebene herausgezogen, sondern lediglich die Form der beschriebenen Curve verändert. Geht die Drehung der Kugel vorn nach unten, so wird dadurch der Erfolg der Schwerkraft gleichsam verstärkt, d. h. die Flugbahn mehr gekrümmt und wesentlich verkürzt. Dreht sich hingegen die Kugel vorn von unten nach oben, so ist der Erfolg ein umgekehrter; denkt man sich dabei in jedem Moment der Bewegung die Schwerkraft in zwei Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine die Richtung der Tangente und die andere die Richtung der Normale der Bahn besitzt, und ist die Drehungsgeschwindigkeit anfänglich so gross, dass $\frac{1}{2b}vw$ grösser, als die letzte der beiden Composanten der Schwerkraft ausfällt, so wird die Bahn anfänglich concav nach oben und derjenige Punkt derselben, in welchem $\frac{1}{2b}vw$ dem gedachten Theil der Schwerkraft gleich geworden ist, der Wendepunkt der Curve, von dem aus die Krümmung nach unten beginnt.

Wird eine Kugel, deren Schwerpunkt M_{III} (Fig. 1) nicht mit ihrem Mittelpunkt M zusammenfällt, in drehende Bewegung um eine horizontale freie Achse $F_I G_I$ und zugleich in fortgehende Bewegung in einer auf $F_I G_I$ rechtwinkligen Richtung $M_{III} A$ gesetzt, so müssen sich zwar die oben für die concentrische Kugel gefundenen Widerstände der Luft periodisch vergrössern und verkleinern, sowie bei jeder einzelnen Rotation die grosse und die kleine Kugelhälfte mit der Drehung vorwärts wechseln, der Erfolg im Ganzen bleibt jedoch der nämliche wie oben. Wenn aber demungeachtet in der Praxis die Abweichungen der excentrischen Geschosse besonders hervortreten, so liegt dies wohl nur darin, dass diese Geschosse in den Geschützröhren die grössten Rotationsgeschwindigkeiten erhalten, und dass man durch die ihrem Schwerpunkt im Geschützrohr gegebene Stellung die Lage ihrer Drehungsachse beliebig bestimmen, und somit den Einfluss dieser Lage auf die Geschossbahn beobachten kann.

---

*) Zuweilen sieht man Geschosse, welche anfänglich die Richtung nach dem Ziel gut einzuhalten schienen, sich im letzteren Theil ihrer Bahn auffällig rechts oder links wenden; die Ursache dieser Erscheinung ist jedenfalls ein allmäliges Umschlagen der Rotationsachse, die anfänglich nahe horizontal gewesen sein mochte, ohne doch die obigen Bedingungen der Stabilität zu erfüllen.

Ist endlich bei einem kugelförmigen Geschoss — gleichviel ob der Mittelpunkt und der Schwerpunkt desselben zusammenfallen oder nicht — die Drehungsachse nicht waagerecht, mithin die ursprüngliche Flugebene nicht vertical, so wird die Lage dieser Ebene durch die Schwerkraft fort und fort geändert, d. h. der Schwerpunkt des Geschosses beschreibt eine Curve von doppelter Krümmung, deren Studium um so verwickelter sein würde, weil dann die Drehungsachse nicht rechtwinklig auf der Richtung des Schwerpunktes bliebe, und also die Ergebnisse der obigen Rechnung nicht einmal zur Anknüpfung dieser Untersuchung ausreichten. Ebenso verwickelt wird natürlich das Problem, wenn die Drehungsachse gleich bei dem Anfang der Bewegung nicht rechtwinklig auf der Richtung des Schwerpunktes ist, oder endlich wenn bei derselben die oben angeführten Bedingungen der Stabilität nicht erfüllt werden.

Es kann nicht in der Absicht des Verfassers liegen, auf die vorstehenden Ergebnisse eine neue Theorie der Flugbahnen kugelförmiger Geschosse zu gründen; denn die analytischen Schwierigkeiten eines solchen Unternehmens wären zu gross, als dass man sich von demselben einen für die militärische Praxis nützlichen Erfolg versprechen könnte. Dagegen möge hier nur noch eine kurze Untersuchung über die Bewegung der im Eingang beschriebenen Kugel, unter Nichtbeachtung der Schwerkraft, Platz finden, um wenigstens ein ungefähres Bild der durch ihre Rotationen erzeugten Veränderung der Flugbahnen zu geben.

Eine Kugel vom Gewicht p und vom Halbmesser r, deren Massenmittelpunkt mit ihrem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt, auf welche aber die Schwerkraft nicht einwirkt, werde mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{W}{r}$ um eine ihrer freien Achsen in drehende Bewegung versetzt und dabei zugleich ihrem Mittelpunkt (Schwerpunkt) die Geschwindigkeit V in einer auf der Drehungsachse rechtwinkligen Richtung ertheilt. Die durch die letztere Richtung gehende, auf der Drehungsachse normale Ebene sei die Ebene der rechtwinkligen Coordinaten x und y, die ursprüngliche Richtung des Mittelpunktes die Achse der x, und die ursprüngliche Richtung der oben nachgewiesenen ablenkenden Kraft die Achse der y. Nach der Zeit t, deren Differential als constant betrachtet werden soll, habe der Mittelpunkt der Kugel die Coordinaten x und y, den Bogen s durchlaufen, und die Geschwindigkeit v, deren Richtung mit der Richtung der x den Winkel φ bilde; die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sei für denselben Moment $\frac{w}{r}$. Ist dann, wie oben, l das Gewicht der Raumeinheit Luft, f das Gewicht der Raumeinheit des Materials der Kugel (letzteres innerhalb der Kugelfläche gleichförmig vertheilt angenommen) und bezeichnen wieder ε und n die auf die Luftreibung bezüglichen Factoren, so hat man für:

$$b = \frac{1}{1+\frac{3\pi\varepsilon}{2}} \cdot \frac{4p}{lr^2\pi} = \frac{1}{1+\frac{3\pi\varepsilon}{2}} \cdot \frac{f}{l}\, \tfrac{16}{3} r,$$

während des Zeittheils dt, nach den früheren Entwickelungen:

die Beschleunigung der Geschwindigkeit w: $\quad -\frac{n}{b}\, vw \left(1+\frac{1}{6}\frac{w^2}{v^2}\right)$,

" " " " v: $\quad -\frac{1}{b}\, v^2 \left(1+\frac{1}{6}\frac{w^2}{v^2}\right)$,

die Beschleunigung der auf die Richtung des Mittelpunktes rechtwinkligen Kraft . . $+\frac{1}{2b}\, vw$.

Da aber b die Länge einer Linie ist, so kann man sich die in dem Vorstehenden aufgeführten Längen V, W, v, w, x, y und s in demjenigen Längenmaass ausgedrückt denken, dessen Einheit b*) ist, wodurch in den vorstehenden Beschleunigungen auch $b=1$ wird. Endlich sind während des Zeittheils dt die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von v mit den Richtungen der x und y bildet, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$ und $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$ und die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Kraft $\frac{1}{2}vw$ mit der genannten Coordinatenrichtung macht, $-\sin\varphi = -\frac{dy}{ds}$ und $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$. Man hat daher für die Zunahmen der Geschwindigkeiten w, v, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ während des Zeittheils dt:

$$1)\qquad dw = -nvw\left[1+\frac{1}{6}\frac{w^2}{v^2}\right]dt,$$

$$2)\qquad dv = -v^2\left[1+\frac{1}{6}\frac{w^2}{v^2}\right]dt,$$

$$3)\qquad \frac{d^2x}{dt} = -v^2\left[1+\frac{1}{6}\frac{w^2}{v^2}\right]\frac{dx}{ds}\,.\,dt - \frac{1}{2}vw\,.\,\frac{dy}{ds}\,.\,dt,$$

$$4)\qquad \frac{d^2y}{dt} = -v^2\left[1+\frac{1}{6}\frac{w^2}{v^2}\right]\frac{dy}{ds}\,.\,dt + \frac{1}{2}vw\,.\,\frac{dx}{ds}\,.\,dt.$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite giebt:

$$\frac{dw}{dv} = \frac{nw}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{w} - n\frac{dv}{v} = 0$$

und das Integral hiervon ist, da für $w=W$, $v=V$ wird,

$$\log\frac{w}{v^n} = \log\frac{W}{V^n}.$$

*) Es muss bemerkt werden, dass diese Einheit sehr gross ist, z. B. bei zwölfpfündigen Kanonen, nach Maassgabe des für ε angenommenen Werthes, für Vollkugeln circa 3000 Dresdner Ellen, für die Hohlgeschosse etwa 1800—2000 dergleichen Ellen beträgt.

Setzt man daher zur Abkürzung:

5) $$k = \frac{W}{V^n},$$

so wird

6) $$w = kv^n.$$

Durch Benutzung dieser Gleichung lässt sich die Drehungsgeschwindigkeit w aus der weiteren Untersuchung der Bewegung ganz entfernen. Zuvörderst folgt nämlich aus den Gleichungen 2) und 6):

$$dt = -\frac{dv}{v^2(1+\frac{1}{6}k^2v^{2n-2})} = -dv\,(v^{-2} - \tfrac{1}{6}k^2v^{-4+2n} + \tfrac{1}{36}k^4v^{-6+4n}\ldots)$$

und hieraus durch Integration, da für $t=0$ $v=V$ wird:

7) $$t = \left(\frac{1}{v}-\frac{1}{V}\right) - \frac{k^2}{6(3-2n)}\left(\frac{1}{v^{3-2n}}-\frac{1}{V^{3-2n}}\right) + \frac{k^4}{36(5-4n)}\left(\frac{1}{v^{5-4n}}-\frac{1}{V^{5-4n}}\right)\ldots$$

Sodann hat man auch:

$$ds = v\,dt = -\frac{dv}{v(1+\frac{1}{6}k^2v^{2n-2})} = -dv\left(\frac{1}{v} - \frac{\frac{1}{6}k^2v^{2n-3}}{1+\frac{1}{6}k^2v^{2n-2}}\right)$$

und durch Integration dieser Gleichung, wenn A die hinzu zu fügende Constante bezeichnet:

$$s = \log A - \log v - \frac{1}{2-2n}\log(1+\tfrac{1}{6}k^2v^{-2+2n})$$
$$= \log\frac{A}{v(1+\frac{1}{6}k^2v^{-2+2n})^{\frac{1}{2-2n}}}$$
$$= \log\frac{A}{(v^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2)^{\frac{1}{2-2n}}}.$$

Da nun für $s=0$ $v=V$ wird, so ist $A=(V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2)^{\frac{1}{2-2n}}$, und mithin:

8) $$s = \frac{1}{2-2n}\cdot\log\left(\frac{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}{v^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}\right),$$

oder wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet:

9) $$e^{(2-2n)s} = \frac{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}{v^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2},$$

woraus dann wieder

10) $$v^{2-2n} = \frac{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}{e^{(2-2n)s}} - \frac{1}{6}k^2$$

folgt. Letzteres kann in dem Falle $n>1$ zur leichteren Uebersicht auch auf die Form:

11) $$v^{2n-2} = \frac{V^{2n-2}}{\left(1+\frac{1}{6}\frac{W^2}{V^2}\right)e^{(2n-2)s} - \frac{1}{6}\frac{W^2}{V^2}}$$

gebracht werden und giebt dann erst für $s = \infty$ $v = 0$. **Wird die Gleichung** 3) mit $-\frac{dy\,dt}{ds^2}$ und die Gleichung 4) mit $\frac{dx\,dt}{ds^2}$ multiplicirt, und dann die Summe beider genommen, so erhält man:

$$12)\qquad \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \tfrac{1}{2}vw\frac{dt^2}{ds} = \tfrac{1}{2}k\frac{ds}{v^{1-n}}.$$

Hieraus folgt zunächst der Krümmungshalbmesser der von dem Mittelpunkt des Geschosses beschriebenen Curve

$$= \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{2v^{1-n}}{k} = \frac{2v^{1-n}V^n}{W} = \frac{2V}{W}\cdot\left(\frac{v}{V}\right)^{1-n}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser nimmt mithin bei der allmäligen Verminderung von v ab oder zu, je nachdem n kleiner oder grösser als 1 ist.

Ferner ist:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = d\,.\,arctang\left(=\frac{dy}{dx}\right) = \varphi$$

und mithin die Gleichung 12) auch:

$$13)\qquad d\varphi = \tfrac{1}{2}k\frac{ds}{v^{1-n}}.$$

Führt man hier den Werth von v^{1-n} aus der Gleichung 10) ein, setzt man zur Abkürzung

$$14)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{2(1-n)}{\sqrt{6}}, \\ a = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{6}k^2}{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}} = \dfrac{W}{\sqrt{6V^2+W^2}}, \\ \mu = arcsin\,(=a) = arctang\left(=\dfrac{W}{V\sqrt{6}}\right), \end{cases}$$

und berücksichtigt man, dass $(1-n)\,a e^{(1-n)s}\,ds = d(ae^{(1-n)s})$ ist, so geht die Gleichung 13) in:

$$15)\qquad d\varphi = \frac{1}{m}\cdot\frac{d(ae^{(1-n)s})}{\sqrt{1-a^2e^{2(1-n)s}}}$$

über. Das Integral hiervon ist, da für $s=0$ auch $\varphi = 0$ wird:

$$16)\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{m}\left[arcsin\,(=ae^{(1-n)s}) - arcsin\,(=a)\right] \\ \quad = \dfrac{1}{m}\left[arcsin\,(=ae^{(1-n)s}) - \mu\right] \end{cases}$$

und hieraus folgt noch:

$$17)\qquad e^{(1-n)s} = \frac{1}{m}\,sin\,[\mu + m\varphi].$$

Ist $n > 1$, so wird m negativ, und bei dem unendlichen Wachsen von s $arcsin\,(= a e^{-(n-1)s}) = 0$, mithin

$$\varphi = -\frac{\mu}{m} = \frac{\sqrt{6}}{2(n-1)}\ arctang\left(= \frac{W}{V\sqrt{6}}\right).$$

Die Curve würde daher für $n > 1$ eine Asymptote haben, welche mit der Richtung der x den vorstehenden Winkel bildete.

Um φ auch als Function von v zu erhalten, kann man die Gleichung 16) schreiben:

$$\varphi = \frac{1}{m}\,.\ arcsin\,(= a e^{(1-n)s}\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-a^2 e^{2(1-n)s}}),$$

oder da nach den Gleichungen 10) und 14)

$$\sqrt{1-a^2 e^{2(1-n)s}} = \frac{e^{(1-n)s}\, v^{1-n}}{\sqrt{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}}$$

und

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{V^{1-n}}{\sqrt{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}}$$

ist:

$$\varphi = \frac{1}{m}\,.\ arcsin\left(= \frac{V^{1-n} - v^{1-n}}{\sqrt{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}}\,.\ a e^{(1-n)s}\right)$$

oder

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{m}\,.\ arcsin\left(= \frac{V^{1-n} - v^{1-n}}{\sqrt{V^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}}\,.\,\frac{k\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{v^{2-2n}+\frac{1}{6}k^2}}\right) \\ &= \frac{1}{m}\,.\ arcsin\left(= \frac{W(V^{1-n} - v^{1-n})}{\sqrt{(6V^2+W^2)(v^{2-2n}+\frac{1}{6}W^2V^{-2n})}}\right). \end{aligned}\right.$$

Wird umgekehrt der Werth von $e^{(1-n)s}$ aus der Gleichung 17) in die Gleichung 10), und dabei zugleich für a dessen Werth aus 13) eingesetzt, so findet sich:

$$19)\quad v^{1-n} = \frac{k}{\sqrt{6}}\ cotang\,(\mu + m\varphi) = \frac{W}{V^n\sqrt{6}}\ cotang\,(\mu + m\varphi),$$

woraus auch:

$$20)\quad \varphi = -\frac{\mu}{m} + \frac{1}{m}\ arctang\left(= \frac{W}{v^{1-n}\,V^n\sqrt{6}}\right),$$

oder insofern $n > 1$

$$\varphi = -\frac{\mu}{m} + \frac{1}{m}\ arctang\left(= \frac{W v^{n-1}}{V^n\sqrt{6}}\right)$$

folgt. Ferner giebt die Gleichung 13)

$$ds = \frac{2}{k}\, v^{1-n}\, d\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}\, d\varphi\ cotang\,(\mu + m\varphi),$$

und da man noch $\frac{dx}{ds} = cos\,\varphi$ und $\frac{dy}{ds} = sin\,\varphi$ hat, so ist:

$$21)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= ds\ cos\,\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}\, d\varphi\ cos\,\varphi\ cotang\,(\mu + m\varphi), \\ dy &= ds\ sin\,\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}\, d\varphi\ sin\,\varphi\ cotang\,(\mu + m\varphi). \end{aligned}\right.$$

In dem besonderen Falle $n=1$ wird $m=0$, und da nach 14) $cotang\,\mu = \frac{V\sqrt{6}}{W}$ ist:

$$dx = \frac{2V}{W} d\varphi \cos\varphi,$$

$$dy = \frac{2V}{W} d\varphi \sin\varphi,$$

Verlegt man überdies für diesen Fall den Coordinatenanfang in der Achse der y um $\frac{2V}{W}$ vorwärts, so wird für $\varphi=0$ auch $x=0$, hingegen $y=-\frac{2V}{W}$, und man erhält durch Integration der vorstehenden Gleichungen:

$$x = \frac{2V}{W}\sin\varphi, \quad y = -\frac{2V}{W}\cos\varphi,$$

mithin

$$x^2 + y^2 = \frac{4V^2}{W^2},$$

d. h. für $n=1$, wo die Geschwindigkeiten v und w fortwährend in gleichem Verhältniss abnehmen, würde der Mittelpunkt der Kugel bis zur gänzlichen Erschöpfung seiner Bewegungskraft einen Kreis vom Halbmesser $\frac{2V}{W}$ durchlaufen, welchen seine ursprüngliche Richtung berührte.

Von diesem speciellen Falle abgesehen, können die Integrale der Gleichungen 21) wohl nur in der Form von unendlichen Reihen gegeben werden, deren Fortgang wenig übersichtlich und deren Convergenz wegen der Verschiedenheit der möglichen Werthe von m schwer festzustellen sein würde. Es erscheint daher zweckmässiger, von diesen Gleichungen ganz abzusehen und z. B. zu einer graphischen Darstellung der Curve das Erforderliche lieber nach der Gleichung 17) zu berechnen. Hat man nach derselben für die Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ von φ die entsprechenden Bogenlängen $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ bestimmt, und sind die Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ so gewählt, dass die Bogenstücke $s_1, s_2-s_1, s_3-s_2 \ldots$ annäherungsweise als gerade Linien, d. h. als Sehnen der Curven betrachtet werden können, so erhält man n Punkte dieser krummen Linie, wenn man die gedachten Sehnen so aneinander stösst, dass sie mit der Richtung der x, respective die Winkel $\frac{1}{2}\varphi_1, \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2), \frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_3) \ldots$ bilden.

Die ganze Beschaffenheit der Flugbahn, welche der Mittelpunkt des Geschosses beschreibt, hängt, wie sich theilweise schon bei dem obigen herausstellte, davon ab, ob n grösser, gleich, oder kleiner als 1 ist, nämlich ob die Drehungsgeschwindigkeit w schneller, verhältnissmässig eben so schnell, oder langsamer als die Geschwindigkeit v der fortgehenden Bewegung abnimmt. Die ersten beiden Fälle sind aber mehr als unwahrscheinlich, denn sie bedingten nicht nur eine kaum denkbare Grösse des Reibungswiderstandes der Luft, sondern die praktischen Beobachtungen zeigen auch, so weit sich dies nach denselben beurtheilen lässt, eher eine Abnahme als eine Zunahme der Krümmungshalbmesser. Für $n < 1$, als den wahrscheinlichsten Fall, darf nun nicht unbeachtet bleiben, dass bei demselben der vorausgesetzte Unterschied von v und w sich immer mehr vermindert, endlich aber $v = w = \frac{W}{V^n} v^n$, d. h. $v^{1-n} = \frac{W}{V^n}$ und von dieser Grenze aus v selbst noch kleiner als w wird. Die sämmtlichen oben entwickelten Gleichungen gelten daher für $n < 1$ nur bis zu der gedachten Grenze, weil bei der denselben zum Grund liegenden Berechnung des Widerstandes der Luft $v > w$ vorausgesetzt war. Wollte man den späteren Verlauf der Bewegung untersuchen, so müsste mit einer neuen und ganz anderen Berechnung jenes Widerstandes begonnen werden. Es dürfte aber eine derartige Untersuchung um so weniger Interesse gewähren, da in der Praxis die Geschosse wohl meistentheils die Erde erreichen, bevor $v = w$ geworden ist, und wir begnügen uns deshalb damit, noch die Werthe anzugeben, welche die übrigen Veränderlichen für $v = w$ erhalten. Aus der Gleichung 7) folgt für $v^{1-n} = W V^{-n}$:

$$t = \frac{1}{V}\left[\left(\frac{V}{W}\right)^{\frac{1}{1-n}} - 1\right] - \frac{W^2}{6(3-2n)V^3}\left[\left(\frac{V}{W}\right)^{\frac{3-2n}{1-n}} - 1\right] + \ldots,$$

aus der Gleichung 8):

$$s = \frac{1}{2-2n} \log\left(\frac{6V^2 + W^2}{7W^2}\right)$$

und endlich aus der Gleichung 20)

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{\mu}{m} + \frac{1}{m} \,.\, arctang\left(= \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2(1-n)}\left[arctang\left(= \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - arctang\left(= \frac{W}{V\sqrt{6}}\right)\right]\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2(1-n)}\, arctang\left(= \frac{(V-W)\sqrt{6}}{6V+W}\right).\end{aligned}$$

Geht bei horizontaler Drehungsachse die Richtung von V unter einem beträchtlichen Winkel (dem Elevationswinkel) schräg aufwärts, und denkt man sich nun die Wirkung der Schwerkraft auf das Geschoss hinzutretend, so wird durch dieselbe die allmälige Verminderung von v in Vergleich mit derjenigen von w im aufsteigenden Ast der Bahn beschleunigt, im absteigenden Ast hingegen wieder verzögert. Das Verhältniss von v und w nähert sich daher in der Gegend des Scheitels der Bahn der obigen Grenze viel mehr, als es die vorstehenden Rechnungen für dasselbe s geben, und kommt dann im absteigenden Ast nach und nach wieder mehr mit den Resultaten der gedachten Rechnung in Uebereinstimmung. Hieraus erklärt sich, warum gerade im Beginn des absteigenden Astes der Einfluss der Rotationen auf die Richtungen der Geschosse am auffälligsten hervortritt.

IX.

Ueber die tägliche Variation des Barometers und die atmosphärische Lunar-Fluth.

Von Dr. E. Knorr,
Kaiserlich russischer Staatsrath.

Obgleich seit einer langen Reihe von Jahren fast unter jedem Himmelsstriche und in jedem Theile der Erde, wohin nur europäische Kenntnisse und Bildung drang, meteorologische und vorzüglich Barometerbeobachtungen angestellt worden sind, wodurch der physikalischen Geographie und der Meteorologie jene Ausbreitung zum grösseren Theile gegeben wurde, welcher beide Wissenschaften sich jetzt erfreuen, und obgleich die Meteorologie Lieblingswissenschaft vieler Physiker wurde, so möchte man doch wohl mit vielem Rechte behaupten, dass dieser für den Menschen so wichtige und so anziehende Theil der Naturkunde als Wissenschaft in mehreren seiner einzelnen Theile noch immer nicht sehr weit über die Anfänge hinaus gefördert worden sei. So möchte z. B. nächst den Temperaturverhältnissen wohl schwerlich irgend eine andere Naturerscheinung aufzufinden sein, welche sich zahlreicherer Beobachtungen erfreute, als die Veränderung des atmosphärischen Drucks, und dennoch ist die Theorie dieser Veränderungen, d. h. die Kenntniss der Gesetze, nach welchen selbige erfolgen, abgeleitet aus den wirkenden Kräften, fast noch gar nicht vorhanden. Es bietet aber auch kein Phänomen scheinbar mehr Unregelmässigkeit und Gesetzlosigkeit dar, als die Veränderung der Barometerhöhe, und die mehrfach sich unter einander modificirenden Ursachen, welche jene Veränderungen bedingen, sind selbst wiederum in ihren Elementen nur sehr unvollkommen gekannt, ja sogar zum Theil noch fraglich. Je complicirter aber sich jene Erscheinungen zeigen, mit desto mehr Recht hat wohl zunächst derjenige Theil derselben die Aufmerksamkeit der Beobachter auf sich gezogen, in welchem sich eine stete, sehr *regelmässige* Wiederkehr zeigt; ich meine die tägliche Variation der

Barometerhöhe. Ohne die älteren Untersuchungen anzuführen, zu welchen letzteres Phänomen Anlass gegeben hat, erlauben wir uns nur Alexander v. Humboldt's Abhandlung im dritten Bande seiner *Relation historique du voyage au nouveau continent. Paris* 1824. 4. (*Voyage etc.* 8. 10. Bd.) zu erwähnen, wo man von pag. 270—312 (8. pag. 330—478) neben einer vortrefflichen Zusammenstellung schätzbarer Beobachtungen und höchst beachtungswerther Resultate, gleichzeitig die interessantesten historischen Notizen in Bezug auf jene Erscheinung findet. Diese Arbeit des hochberühmten Naturforschers gab dem Verfasser des vorliegenden Aufsatzes zu Anfang des Jahres 1828 Gelegenheit, mit Alexander v. Humboldt, mit welchem er damals in näherer Beziehung zu stehen das Glück hatte, eine fortgesetzte Discussion zu führen über die Ursachen der fraglichen Erscheinung.

Der Verfasser, gestützt auf mathematische Betrachtungen und auf numerische Berechnungen, welche sich zunächst auf die Beobachtungen gründeten, die im Jahre 1824 bei Sonnenaufgang und um 2^h Nachmittags correspondirend zu Genf und auf dem St. Bernhard angestellt wurden, und dann später auf dreistündige Beobachtungen an denselben Orten um 9^h Morgens, 12^h und 3^h Nachmittags während des Jahres 1827 angestellt, suchte den berühmten Naturforscher zu der Ansicht zu neigen, dass die tägliche Variation des Barometers im Wesentlichsten eine Folge der täglichen Veränderung der Temperatur und des Dunstgehalts der Atmosphäre sei, weil sich die Möglichkeit nachweisen lasse, dass beide Ursachen zusammen eine ähnliche Erscheinung bewirken könnten. Die Discussion über diesen Gegenstand endete mit den Worten A. v. Humboldt's: „Ich bin gewissermaassen mit der Ansicht alt geworden, dass die tägliche Variation des Barometers nur durch kosmische Ursachen erklärt werden könne, und deshalb fällt es mir schwer, mir eine andere anzueignen, obgleich ich eingestehen muss, dass die Ihrige manches für sich hat.“ Diese Ansicht A. v. Humboldt's über eine kosmische Ursache der in Rede stehenden Erscheinung hat eine neue Stütze erhalten durch die Untersuchung Lamont's über die Frage, ob die tägliche Schwankung des Barometers durch die Erwärmung der Erdoberfläche allein erklärt werden kann, oder ob sie theilweise einer kosmischen Kraft zugeschrieben werden muss?

„Ich habe, sagt Lamont (Pogg. Ann. 1861, No. 10, pag. 281), wiederholt schon mit der Frage über die Ursache der täglichen Barometerschwankungen mich beschäftigt, und bin zu der Ansicht gelangt, dass sie nur zum Theil der Erwärmung der Erdoberfläche durch die Sonne zugeschrieben werden können, zum grössten Theile aber von einer kosmischen Kraft herrühren, die verschieden von der Schwere ihren Sitz in der Sonne hat, und die ich vorläufig als identisch mit der Elektricität annehme. So verschieden auch in verschiedenen geographischen

Breiten und verschiedenen Meereshöhen das Phänomen im Ganzen sich gestaltet, dennoch konnte überall (Madras, St. Helena, Hobartown, Toronto, Madrid, München, Prag, Petersburg) die Beobachtung durch zwei Glieder dargestellt werden, wovon das erste eine Periode von 24 Stunden hat, und im Sommer gross, im Winter klein ist, also mit der Temperatur übereinstimmt, während das zweite ganz analog der Ebbe und Fluth in 24 Stunden 2 Maxima und 2 Minima giebt, und in kalten und warmen Monaten, in hohen und tiefen Beobachtungspunkten so nahe übereinstimmende Grössen hat, dass es durch eine, von atmosphärischen Einflüssen unabhängige Kraft bedingt sein muss."

Wie Lamont in seiner angeführten Abhandlung anführt, ist **Kreil** (Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. XLIII, S. 121) gegen die obige Ansicht aufgetreten, und hat nachzuweisen gesucht, dass man den auf- und absteigenden Luftstrom als Ursache der täglichen Barometer-Schwankungen ansehen müsse, wobei er einen beträchtlichen Theil seiner Schlüsse auf die Scheidung der trüben und heiteren Tage desselben Monats gründet. Hierdurch veranlasst, hat auch Lamont eine solche Scheidung vorgenommen, und er findet, **dass sich die atmosphärische Ebbe und Fluth an trüben und heiteren Tagen vollkommen gleich zeige**, was er als eine neue sehr gewichtige Bestätigung seiner Ansicht betrachtet. Bezeichnet n die Zeit in Stunden, vom wahren Mittag an gerechnet, so findet Lamont folgende Ausdrücke*):

I. Für die Temperaturwirkung.

An heiteren Tagen:	An trüben Tagen:
im Winter: $0''',065 \sin (15n + 120^\circ 51')$,	im Winter: $0''',025 \sin (15n + 87^\circ 25')$,
„ Frühling: $0,102 \sin (15n + 148^\circ 48')$,	„ Frühling: $0,048 \sin (15n + 13^\circ 24')$,
„ Sommer: $0,182 \sin (15n + 164^\circ 29')$,	„ Sommer: $0,064 \sin (15n + 183^\circ 46')$,
„ Herbst: $0,112 \sin (15n + 158^\circ 20')$.	„ Herbst: $0,020 \sin (15n + 30^\circ 19')$.

II. Für die Ebbe und Fluth.

An heiteren Tagen:	An trüben Tagen:
im Winter: $0''',074 \sin (30n + 153^\circ 17')$,	im Winter: $0''',080 \sin (30n + 165^\circ 0')$,
„ Frühling: $0,119 \sin (30n + 151^\circ 54')$,	„ Frühling: $0,107 \sin (30n + 147^\circ 51')$,
„ Sommer: $0,110 \sin (30n + 142^\circ 38')$,	„ Sommer: $0,106 \sin (30n + 146^\circ 38')$,
„ Herbst: $0,118 \sin (30n + 151^\circ 26')$.	„ Herbst: $0,110 \sin (30n + 150^\circ 53')$.

Aus den Ausdrücken unter No. II. folgt, dass die halben Amplituden der von der atmosphärischen Ebbe und Fluth abhängigen täglichen Oscillationen der Barometerhöhen sein werden:

---

*) Für welchen Beobachtungsort?

An heiteren Tagen:		An trüben Tagen:	
im Winter:	0''',074	im Winter:	0''',080
„ Frühling:	0,119	„ Frühling:	0,107
„ Sommer:	0,110	„ Sommer:	0,106
„ Herbst:	0,118	„ Herbst:	0,110
im Mittel:	0,105	im Mittel:	0,101

also im Mittel für das ganze Jahr 0''',103 = 0,232 Millimeter, wenn französische, oder = 0,201 Millimeter, wenn englische Linien verstanden werden.

Für $n = 0$, d. h. für Mittag, ergiebt sich:

An heiteren Tagen:		An trüben Tagen:	
im Winter:	0''',033269	im Winter:	0''',020704
„ Frühling:	0,056051	„ Frühling:	0,056955
„ Sommer:	0,066760	„ Sommer:	0,058300
„ Herbst:	0,056425	„ Herbst:	0,053525
im Mittel:	0,053126	im Mittel:	0,047371

und im jährlichen Mittel 0''',0502 = 0,1134 Millimeter, wenn französische, oder 0,1276 Millimeter, wenn englische Linien zu verstehen sind.

Die in dem letzten Täfelchen enthaltenen Zahlen zeigen sich nun wenigstens von den Jahreszeiten nicht so unabhängig, dass der Schluss auf eine ausserhalb der Atmosphäre existirende besondere Kraft, die unabhängig von atmosphärischen Einflüssen sei, vollständig begründet erschiene. Die Zahlen steigen regelmässig vom Winter zum Frühling, und vom Frühling zum Sommer, und ebenso nehmen dieselben vom Sommer zum Herbst und vom Herbst zum Winter wieder ab; ein Gleiches gilt aber auch für die mittleren Temperaturen der Jahreszeiten. Man könnte inzwischen diese Zu- und Abnahme auch als eine Folge der verschiedenen Entfernung der Sonne ansehen, und wollten wir auch zugeben, dass diese Ansicht die richtige sei, so bliebe doch immer noch die Frage übrig, ob die anziehende Kraft der Sonne auf die Theilchen der Erdatmosphäre, mit gleichzeitiger Berücksichtigung derselben Anziehung auf den festen und flüssigen Kern des Erdkörpers, nicht solche kleine Veränderungen der Barometerhöhe zu bewirken vermöge, wie sie durch die Ausdrücke unter II. dargestellt werden? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, bemerken wir, dass Bouvard in seinem *Mémoire sur les observations méteorologiques faites à l'observatoire royal de Paris* (*lu à l'acad. des sciences le* 23. *Avril* 1827) die Mittelzahlen von Barometerbeobachtungen mittheilt, welche um 9^h Vormittags, um 12^h und um 3^h Nachmittags während 298 Syzygien und eben so vieler Quadraturen angestellt wurden, und Laplace (*Mécanique céleste*, T. 5), welcher seine Untersuchungen über die atmosphärische Lunarfluth auf diese Beobachtungen stützt, nimmt an, dass für dieselben der Mittag als mittlere Eintrittszeit, sowohl für die Syzygien wie für die

Quadraturen, gelten kann. Es ist nun die mittlere Barometerhöhe um Mittag

für die Syzygien . . . . . $A' = 755{,}989$ Millimeter,
„ „ Quadraturen . . . $B' = 756{,}689$ „
mithin $B' - A' = 0{,}700$ Millimeter,

folglich die halbe Amplitude der Barometerschwankung in Folge der Anziehung des Mondes im Mittel für den Mittag 0,350 Millimeter, da in dieser Differenz sich der Einfluss, welcher von der Anziehung der Sonne abhängt, von selbst eliminirt. Nimmt man nun ferner mit Laplace an, dass die Wirkung der Sonne 2½ Mal geringer als die des Mondes sei, so ergiebt sich für die Einwirkung derselben auf das Barometer 0,140 Millimeter als mittlere halbe Amplitude der Oscillation. Die oben unter II. angeführten Ausdrücke ergaben nun aber als jährliches Mittel für die halbe Amplitude 0,1134 Millimeter für französische, oder nur 0,1276 Millim. für englische Linien; man sieht also, dass eine solche Oscillation sehr wohl durch die Anziehung der Sonne hervorgebracht werden kann, und noch keine Nothwendigkeit vorliegt, nach einer anderen, bis jetzt noch unbekannten Naturkraft zu forschen, um dieselbe zu erklären, sobald man die Richtigkeit der für die Wirkung des Mondes eben angegebenen Zahl zugestehen muss. Aber gerade hiergegen fehlt es nicht an gewichtigen Gründen, auf welche wir hier inzwischen nur insoweit näher eingehen wollen, als die Darlegung dieser Gründe die Veranlassung werden kann, neue gründliche Untersuchung über den fraglichen Gegenstand anzustellen.

Laplace (*Mécanique céleste*, *T.* 5), gestützt auf Bouvard's Berechnung der Pariser Beobachtungen aus den 11 Jahren von 1816—1826, setzt die ganze Ausdehnung der Barometerschwankungen in Folge der Anziehung des Mondes auf die Erdatmosphäre nur auf 0,01763 Millim. fest, und er sagt pag. 167:

„*L'extrême pétitesse de l'action attractive du soleil sur l'atmosphère est prouvée par la pétitesse de l'action attractive de la lune. C'est donc par l'action de sa chaleur que le soleil produit la variation diurne. Mais il est presque impossible de soumettre les effets de cette action à l'analyse; et toute explication de ce genre de phénomènes qui n'est point fondée sur le calcul, doit être banni de la philosophie naturelle.*“

Bezeichnen R und λ' zwei Grössen, die für ein und denselben Beobachtungsort als constant betrachtet werden, h den Stundenwinkel der Sonne, vom Mittag an gezählt, q die mittlere tägliche synodische Bewegung des Mondes, i die Zahl der Tage, welche, von einer Conjunction an gerechnet, verflossen sind, so kann die Formel für die lunarische Fluth der Atmosphäre, auf welche Laplace seine Untersuchungen gründet, dargestellt werden durch

$$R\cos\{2h-2iq-2\lambda'\}\;^{*})$$.

Nimmt man ferner mit Laplace an, dass die Syzygien und Quadraturen im Mittel um Mittag eintreten, so hat man für die Conjunction:

um 9^h Morgens . . . $2h=-90^0 \quad i=-\frac{1}{8}$,
„ 12^h Mittags . . . $2h=0 \quad i=0$,
„ 3^h Nachmittags . $2h=90^0 \quad i=\frac{1}{8}$,

für die Opposition dagegen:

um 9^h Morgens . . $2h=-90^0 \quad iq=180^0-\frac{1}{8}q$,
„ 12^h Mittags . . $2h=0 \quad iq=180^0$,
„ 3^h Nachmittags $2h=90^0 \quad iq=180^0+\frac{1}{8}q$,

mithin für die Wirkung des Mondes auf die Atmosphäre in den Syzygien:

um 9^h Morgens . . $-R\sin(2\lambda'-\frac{1}{4}q)$,
„ 12^h Mittags . . $+R\cos 2\lambda'$,
„ 3^h Nachmittags $+R\sin(2\lambda'+\frac{1}{4}q)$.

Für die Quadraturen hätte man dagegen:

um 9^h Morgens . . $2h=-90^0 \quad iq=\pm 90^0-\frac{1}{8}q$,
„ 12^h Mittags . . $2h=0 \quad iq=\pm 90^0$,
„ 3^h Nachmittags $2h=90^0 \quad iq=\pm 90^0+\frac{1}{8}q$,

mithin für die Wirkung des Mondes in den Quadraturen:

um 9^h Morgens . . $+R\sin(2\lambda'-\frac{1}{4}q)$,
„ 12^h Mittags . . $-R\cos 2\lambda'$,
„ 3^h Nachmittags $-R\sin(2\lambda'+\frac{1}{4}q)$.

Bezeichnen nun A, A', A'' die während der Syzygien, B, B', B'' die während der Quadraturen beobachteten Barometerhöhen, ferner C, C', C'' diejenigen, welche ohne Einwirkung des Mondes stattfinden würden, resp. für 9^h Morgens, 12^h Mittags und 3^h Nachmittags, so hat man nach Laplace für die Syzygien:

$$\begin{aligned} C-R\sin(2\lambda'-\tfrac{1}{4}q)&=A\\ C'+R\cos 2\lambda' &=A' \quad (\alpha)\\ C''+R\sin(2\lambda'+\tfrac{1}{4}q)&=A'' \end{aligned}$$

und für die Quadraturen:

$$\begin{aligned} C+R\sin(2\lambda'-\tfrac{1}{4}q)&=B\\ C'-R\cos 2\lambda' &=B' \quad (\beta)\\ C''-R\sin(2\lambda'+\tfrac{1}{4}q)&=B''. \end{aligned}$$

Nach Bouvard's Rechnung setzt nun Laplace:

$$\lambda'=32^0\,6'\;^{**})$$

oder 2 Stunden 8 Minuten in Zeit, ein Resultat, welches nur durch eine verschiedene Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung so verschieden von einem früher gefundenen:

---

*) *Mécanique céleste*, *Tome* 5, *pag*. 237. *Bouvard*, *Mémoire sur les observations météorologiques etc.*, *pag*. 23.

**) *Suppl. au* 5. *tome du traité de mécanique cél.*, *pag*. 20 *et Conn. de temps pour l'an* 1835. — *Bouvard*, *Mémoire etc.*, *pag*. 32.

$$\lambda' = 49^0\, 38'\, 40'' = 3^h\, 18'\, 36'' \text{ in Zeit}$$

ausfällt *). Diese Verschiedenheit in den numerischen Werthen für ein und dieselbe Grösse, deren Bestimmung doch auf denselben Grundgleichungen und denselben Beobachtungen beruht, ist jedenfalls Bedenken erregend, und ruft Zweifel gegen die Richtigkeit der Theorie, oder gegen die der Beobachtungen wach. Was nun zunächst die Theorie betrifft, so haben wir nichts darin auffinden können, was der Anwendung der Formel von Laplace, in der Weise, wie dieselbe geschehen ist, entgegen wäre, und wir unterlassen hier der Kürze wegen die Rechtfertigung derselben, indem wir sofort zur Betrachtung der Beobachtungen übergehen. Aus Bouvard's oben angeführter Memoire lässt sich nun folgende Tabelle zusammenstellen:

Tabelle No. 1.

Observatorium zu Paris.

Barometerhöhe in Millimeter reducirt auf 0° Temperatur.

	9^h Morgens	12^h Mittags	3^h Nachm.
Mittel aus allen Beobachtungen von 1816—1826 incl.	756,347	756,085	755,591
2 Tage vor den Syzygien	755,941	755,623	755,124
1 Tag vor den Syzygien	756,205	756,016	755,510
Syzygien	756,319	755,989	755,396
1 Tag nach den Syzygien	756,177	755,879	755,445
2 Tage nach den Syzygien	756,100	755,845	755,377
2 Tage vor den Quadraturen	756,644	756,368	755,718
1 Tag vor den Quadraturen	757,031	756,851	756,403
Quadraturen	757,057	756,689	756,027
1 Tag vor den Quadraturen	756,370	756,329*	755,573
2 Tage vor den Quadraturen	756,438	756,158	755,711

Vergleicht man hier die Barometerhöhen, wie sie im Mittel aus allen 11jährigen Beobachtungen folgen, mit denjenigen, welche zu den entsprechenden Stunden während den Syzygien und Quadraturen beobachtet wurden, so zeigt sich, dass während der Syzygien das Barometer durchgängig niedriger, während der Quadraturen aber durchgängig, mit einer einzigen Ausnahme, höher stand, als im allgemeinen Mittel, und der Einfluss des Mondes stellt sich hier auf eine Weise heraus, wie es schärfer nicht verlangt werden könnte. Betrachten wir, wie es für das Folgende hinreichend ist, nur die an den Tagen der Syzygien und der Quadraturen selbst beobachteten Barometerhöhen, so ergiebt sich für die Mittel derselben folgende Zusammenstellung:

*) *Mécanique céleste, Tome* 5, *p.* 241.

Tabelle No. 2.

	9^h Morgens	12^h Mittags	3^h Nachm.
	B mm	B' mm	B'' mm
Quadraturen	757,057	756,089	756,027
	A	A'	A''
Syzygien	756,319	755,989	755,396
	$B-A$	$B'-A'$	$B''-A''$
Differenz	0,738	0,700	0,631
	$\frac{A+B}{2}$	$\frac{A'+B'}{2}$	$\frac{A''+B''}{2}$
Halbe Summe	756,688	756,339	755,711
11jährige Mittel	756,347	756,085	755,591
Differenz	0,341	0,254	0,120

Vergleicht man nun die im vorstehenden Täfelchen enthaltenen Zahlen mit den beiden Systemen von Gleichungen, die wir oben mit α und β bezeichnet haben, so folgt zunächst, dass, um in Hinsicht der algebraischen Zeichen den Beobachtungen zu genügen, R negativ genommen werden muss, und dass man haben müsse: $2\lambda' < \frac{1}{2}q$, mithin $\lambda' < 1^0\,31',5$, was mit keinem der oben angeführten, durch Bouvard gefundenen beiden Werthen von λ' übereinstimmt. Da in den obigen mit α und β bezeichneten 6 Gleichungen nur die 5 Grössen C, C', C'', R und λ' unbekannt und aus den Beobachtungen zu bestimmen sind, so führen dieselben noch zu einer Bedingungsgleichung, welche durch

$$\sin \tfrac{1}{2}q = \frac{(A+A'') - (B+B'')}{2(A'-B')}$$

dargestellt werden kann. Substituirt man hierin die entsprechenden Werthe für A, A', A'', B, B', B'', so ergiebt sich $\frac{1}{2}q = 77^0\,55',1$, mithin die tägliche synodische Bewegung des Mondes:

$$q = 311^0\,40',4.$$

Der Mond müsste also in beiläufig 27¾ Stunden alle 4 Phasen durchlaufen, wenn den Beobachtungen genügt werden sollte.

Ferner geben die unter α und β oben angeführten Gleichungen, dass man haben müsse:

$$C = \frac{A+B}{2},\quad C' = \frac{A'+B'}{2},\quad C'' = \frac{A''+B''}{2}.$$

Erwägt man nun, dass in dem 11jährigen Cyclus, aus welchen die Beobachtungen für die Syzygien und Quadraturen entnommen sind, den Gleichungen α und β zu Folge, der Einfluss derselben auf die mittleren Barometerhöhen eliminirt sein müsste, und dass höchstens aus einem etwaigen Ueberschuss von 2 Quadraturen, 1 zu Anfang und 1 zu Ende des Cyclus, ein Unterschied von Tausendtheilen eines Millimeters in den mittleren Barometerhöhen entspringen könnte, so ergiebt sich auch hier nicht die nöthige Uebereinstimmung, indem, wie Tafel 2 zeigt, die Grössen $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A'+B'}{2}$, $\frac{A''+B''}{2}$ von den Werthen von C, C', C'', wie solche aus allen 11jährigen Beobachtungen folgen, selbst bis auf 0,3 Millimeter verschieden sind.

Das Angeführte reicht nun wohl schon vollständig hin, um den Schluss zu rechtfertigen, dass die in der *Mécanique céleste* und bei Bouvard (*Mémoire sur les observ. méteor. etc.*) enthaltenen numerischen Bestimmungen in Bezug auf die lunarische Ebbe und Fluth der Atmosphäre keinen Eingang in die Wissenschaft finden können; es müssen dieselben vielmehr anderweitig mit Zugrundelegung anderer Beobachtungen neu begründet werden.

Welchen Ursachen die Unzulänglichkeit der in Rede stehenden Beobachtungen zuzuschreiben sei, darüber vermögen wir eine bestimmte Meinung nicht zu fassen; es kann diese Ursache eben so gut darin liegen, dass die Zahl von 298 Syzygien und eben so vieler Quadraturen für das Klima von Paris nicht hinreichend ist, um in den Mitteln aus den Beobachtungen den Einfluss der sogenannten unregelmässigen Barometerschwankungen verschwinden zu lassen, als auch darin, dass bei dem Ausschreiben der Beobachtungen aus den täglichen Journalen, und bei der Disposition derselben für die Berechnung, Irrthümer vorgefallen sind; wenigstens ist die Bestimmung der Mittelzahlen deshalb nicht zuverlässig, weil sich ein Fehler darin nachweisen lässt. Statt der in der Tabelle No. 1 mit * bezeichneten Zahl $756^{mm},329$ steht bei Bouvard (*Mémoire etc.*) $756^{mm},079$; rechnet man jedoch die einzelnen Zahlen nach, von denen letztere das Mittel sein soll, so ergiebt sich die von uns angenommene. Wie dem aber auch sein möge, jedenfalls bleibt es wünschenswerth, dass neue numerische Bestimmungen über die atmosphärische Lunuarfluth auf eine grosse Anzahl sicherer Beobachtungen gegründet werden könnten, die an einem Orte angestellt wären, an welchem seiner tropischen Lage wegen die periodischen Oscillationen der Barometerhöhe weit schärfer und bestimmter hervorträten, als zu Paris.

Es können nun aber auch aus denen bei Laplace und Bouvard sich vorfindenden numerischen Bestimmungen für die atmosphärische Lunarfluth keine Argumente weder für noch gegen die im Eingang erwähnte Ansicht Lamont's hergeleitet werden, und es liegen auch, so scheint es uns wenigstens, noch keine hinreichend sicheren Gründe vor, weshalb die kleinen, von Lamont aufgefundenen Oscillationen, welche von dem doppelten Stundenwinkel abhängen, nicht von der Anziehung der Sonne auf die Erdatmosphäre bedingt sein könnten.

Kleinere Mittheilungen.

XI. Bemerkung über die Gammafunctionen. — Setzt man wie gewöhnlich

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

$$q = e^{-\pi \frac{K}{K'}},$$

so gelten bekanntlich die Formeln

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots,$$

$$\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots,$$

aus denen durch Subtraction folgt

$$\left(1 - \sqrt{k'}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 4(q + q^9 + q^{25} + \ldots)$$

oder

$$a) \qquad 2\sqrt{K}\,\sqrt[4]{\pi} = \frac{4\sqrt{2}\,\sqrt[4]{\pi^3}}{1 - \sqrt{k'}}(q + q^9 + q^{25} + \ldots).$$

Im speciellen Falle $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist

$$K = K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 y^{-\frac{3}{4}}(1 - y)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})},$$

oder, weil $\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{3}{4}) = \pi\sqrt{2}$,

$$K = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\sqrt{\pi}},$$

b) $$2\sqrt{k}\,\sqrt[4]{\pi} = \Gamma(\tfrac{1}{4})$$

und zugleich

c) $$q = e^{-\pi}.$$

Vermöge der in b) und c) angegebenen Werthe erhält man aus der allgemeinen Gleichung a) das elegante Resultat

$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = \frac{4\sqrt[4]{(2\pi)^3}}{\sqrt[4]{2}-1}\,(e^{-\pi} + e^{-9\pi} + e^{-25\pi} + \ldots).$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch $\Gamma(\frac{1}{8})$, $\Gamma(\frac{3}{8})$ u. s. w. durch Reihen ausdrücken, jedoch sind letztere weit complicirter und gewissermaassen nur analytische Curiosa.

(Briefliche Mittheilung von Dr. Enneper.)

XII. Ueber ein Problem der ebenen Geometrie. Von Dr. A. Enneper. — Im dritten Bande von Crelle's Journal hat Jacobi die vollständige Auflösung des Problems gegeben:

> „Die Relation zwischen den Radien zweier Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte zu finden, von denen der eine einem unregelmässigen Polygon umschrieben, der andere demselben eingeschrieben ist."

Lässt man Ellipsen an die Stelle der beiden Kreise treten, so hat man zwischen den vier Hauptachsen, deren Neigung gegen einander, und der Distanz der Mittelpunkte eine Relation aufzustellen. Dieselbe ist das Resultat der Elimination eines Winkels zwischen zwei Gleichungen, von denen die eine algebraisch ist, während die zweite in Gestalt einer linearen Relation zwischen zwei elliptischen Integralen erscheint.

Die beiden Hauptachsen $2a$ und $2b$ der grösseren Ellipse werden zu Coordinatenachsen genommen. Die halben Hauptachsen der umschlossenen Ellipse seien a' und b', ξ und η die Coordinaten ihres Mittelpunktes, endlich ω der Winkel, welchen die Hauptachse $2a'$ mit der Abscissenachse bildet. Die Gleichungen der beiden Ellipsen sind dann folgende:

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

2) $$\frac{\{(x-\xi)\cos\omega + (y-\eta)\sin\omega\}^2}{a'^2} + \frac{\{(x-\xi)\sin\omega + (y-\eta)\cos\omega\}^2}{b'^2} = 1.$$

Auf dem Umfang der ersten Ellipse nehme man zwei beliebige Punkte (x', y'), (x'', y'') an und bestimme die Coordinaten dieser Punkte durch *excentrischen* Anomalien, 2φ, $2\varphi'$, so dass also:

$$\begin{aligned} x' &= -a\cos 2\varphi, & x'' &= -a\cos 2\varphi', \\ y' &= b\sin 2\varphi, & y'' &= b\sin 2\varphi'. \end{aligned}$$

Soll die Verbindungslinie dieser Punkte, nämlich:

$$x\,\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{a} - y\,\frac{\sin(\varphi+\varphi')}{b} + \cos(\varphi'-\varphi) = 0$$

die zweite Ellipse berühren, so findet zwischen den Winkeln φ und φ' die Relation statt:

$$\begin{aligned} &a'^2\{a\sin a\,\sin(\varphi'+\varphi) + b\cos\omega\cos(\varphi'+\varphi)\}^2 \\ &+ b'^2\{a\cos\omega\sin(\varphi'+\varphi) - b\sin\omega\cos(\varphi'+\varphi)\}^2 \\ &= \{ab\cos(\varphi'-\varphi) + b\,\xi\cos(\varphi'+\varphi) - a\,\eta\sin(\varphi'+\varphi)\}^2 \end{aligned}$$

oder

$$3)\ \left\{\begin{aligned} &a'^2\{a\sin\omega\,(\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi') + b\cos\omega\,(1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi')\}^2 \\ &+ b'^2\{a\cos\omega\,(\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi') - b\sin\omega\,(1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi')\}^2 \\ &= \{ab\,(1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi') + b\xi\,(1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi') - a\eta\,(\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi')\}^2. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung kann als das Integral einer elliptischen Differentialgleichung angesehen werden. Differentiirt man die vorstehende Gleichung, so ergiebt sich ein Resultat von der Form $P\partial\varphi + Q\partial\varphi' = 0$. Setzt man in P für $\operatorname{tang}\varphi$ ihren Werth in Function von $\operatorname{tang}\varphi'$ mittelst der Gleichung 3) ein, eliminirt mit Hilfe derselben Gleichung $\operatorname{tang}\varphi'$ aus Q, so folgt:

$$4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} = \pm\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{f(\varphi')}},$$

wo

$$5)\ \left\{\begin{aligned} f(\psi) &= a'^2\{(\xi + a\cos 2\psi)\sin\omega + (\eta - b\sin 2\psi)\cos\omega\}^2 \\ &+ b'^2\{(\xi + a\cos 2\psi)\cos\omega - (\eta - b\sin 2\psi)\sin\omega\}^2 - a'^2 b'^2. \end{aligned}\right.$$

Da φ und φ' in derselben Richtung gezählt werden, so ist in der Gleichung 4) das obere Zeichen zu nehmen, also

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{f(\varphi')}}.$$

Diese Gleichung integrirt giebt:

$$6)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} + \int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} = \int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{f(\varphi')}},$$

wo λ offenbar der Werth von φ' ist, welcher sich aus 3) für $\varphi'=0$ ergiebt, nämlich:

$$7)\ \left\{\begin{aligned} &a'^2\{b\cos\omega + a\sin\omega\operatorname{tang}\lambda\}^2 + b'^2\{a\cos\omega\operatorname{tang}\lambda - b\sin\omega\}^2 \\ &\qquad = \{b\,(a+\xi) - a\eta\operatorname{tang}\lambda\}^2. \end{aligned}\right.$$

Seien A und A' die beiden Punkte auf dem Umfang der Ellipse 1), bestimmt durch die Winkel 2φ und $2\varphi'$. Zieht man von A' aus eine zweite Tangente an die Ellipse 2), so trifft dieselbe den Umfang der Ellipse 1) in einem Punkt A''. Bestimmt man diesen Punkt, analog wie die Punkte A und A', durch einen Winkel $2\varphi''$, so erhält man zwischen φ' und φ'' eine ähnliche Gleichung wie 6), wenn φ und φ' respective durch φ' und φ'' ersetzt werden. Fährt man so fort, so ergeben sich für n zusammenstossende Tangenten folgende Gleichungen:

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}+\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}},$$

$$\int_0^{\varphi'}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}+\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\int_0^{\varphi''}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\int_0^{\varphi^{(n-1)}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}+\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\int_0^{\varphi^{(n)}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$8)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}+n.\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\int_0^{\varphi^{(n)}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}.$$

Soll das Tangenten-Polygon, beschrieben um die Ellipse 2), ein geschlossenes sein, so muss der Winkel $2\varphi^{(n)}$ gleich dem Winkel 2φ plus einem Multiplum von vier Rechten sein, d. h.:

$$2\varphi^{(n)}=2\varphi+2s\pi,\qquad \varphi^{(n)}=\varphi+s\pi,$$

wo s eine ganze Zahl bedeutet. Man hat dann:

$$\int_0^{\varphi^{(n)}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\int_0^{\varphi+s\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}+s\int_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}.$$

Diese Gleichung von 8) abgezogen giebt:

$$\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}=\frac{s}{n}\int_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}},$$

d. h.:

$$9)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\begin{aligned}[a'^2\{(a+\xi\cos 2\varphi)\sin\omega+(\eta-b\sin 2\varphi)\cos\omega\}^2+\\+b'^2\{(a+\xi\cos 2\varphi)\cos\omega-(\eta-b\sin 2\varphi)\sin\omega\}^2-a'^2b'^2]\end{aligned}}}\\=\frac{s}{n}&\int_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\begin{aligned}[a'^2\{(a+\xi\cos 2\varphi)\sin\omega+(\eta-b\sin 2\varphi)\cos\omega\}^2+\\+b'^2\{(a+\xi\cos 2\varphi)\cos\omega-(\eta-b\sin 2\varphi)\sin\omega\}^2-a'^2b'^2]\end{aligned}}}\end{aligned}\right.$$

Substituirt man hieraus den Werth von $\tang \lambda$ in die Gleichung 7), so erhält man eine Relation zwischen a, b, ξ, η, a', b' und ω, welche ausdrückt, dass der Ellipse 2) ein Polygon von n Seiten und s Umläufen umschrieben werden kann, welches gleichzeitig der Ellipse 1) eingeschrieben ist.

Für den Fall zweier Kreise hat man $a=b=r$, $a'=b'=r$, $\eta=0$ und $\omega=0$. Die Gleichungen 7) und 9) werden dann einfach:

$$r'=(r+\xi)\cos\lambda,$$

$$\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}=\frac{2s}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\vartheta)}},$$

$$k^2=\frac{4\xi r}{(\xi+r)^2-r'^2}$$

oder

$$\frac{r'}{r+\xi}=\cos am\frac{2sK}{n},\quad k^2=\frac{4\xi r}{(\xi+r)^2-r'^2},$$

was die von Jacobi gegebenen Gleichungen sind.

Die beiden Integrale in 9) lassen sich bekanntlich nach Gauss (*Commentat. rec. Gotting. IV*) durch eine Substitution von der Form:

$$\cos\varphi=\frac{p+p'\cos\vartheta+p''\sin\vartheta}{r+r'\cos\vartheta+r''\sin\vartheta},\quad \sin\varphi=\frac{q+q'\cos\vartheta+q''\sin\vartheta}{r+r'\cos\vartheta+r''\sin\vartheta}$$

auf die gewöhnliche Form elliptischer Integrale reduciren, so dass die Gleichung 9) übergeht in:

$$\int_0^{2\mu}\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(G+G'\cos^2\vartheta+G''\sin^2\vartheta)}}=\frac{4s}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(G+G'\cos^2\vartheta+G''\sin^2\vartheta)}},$$

wo

$$\cos 2\mu=\frac{-r'+p'\cos 2\lambda+q'\sin 2\lambda}{r-p\cos 2\lambda-q\sin 2\lambda},\quad \sin 2\mu=\frac{-r''+p''\cos 2\lambda+q''\cos 2\lambda}{r-p\cos 2\lambda-q\sin 2\lambda}.$$

Die Ausführung dieser Substitution verursacht eine solche Complication von Formeln und nachherigen Eliminationen, dass es kaum der Mühe verlohnen möchte, auf diesem Wege die gesuchte Relation darzustellen.

Sind die beiden Ellipsen 1) concentrisch und confocal, also

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2-z^2}+\frac{y^2}{b^2-z^2}=1$$

ihre Gleichungen, so hat man $a'^2=a^2-z^2$, $b'^2=b^2-z^2$, $\xi=0$, $\eta=0$, $\omega=0$. Nimmt man $s=1$, so geben die Gleichungen 7) und 9)

$$\tang^2\lambda=\frac{b^2z^2}{a^2(b^2-z^2)},$$

$$\int_0^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(a^2\sin^2 2\varphi+b^2\cos^2 2\varphi-z^2)}}=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(a^2\sin^2 2\varphi+b^2\cos^2 2\varphi-z^2)}}$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-2\lambda} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)K,$$

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-z^2},$$

also

$$\cos 2\lambda = \sin am\left(1-\frac{1}{n}\right)K$$

und da

$$\tan^2\lambda = \frac{b^2z^2}{a^2(b^2-z^2)},$$

$$\cos 2\lambda = \frac{a^2b^2-z^2(a^2+b^2)}{a^2b^2-z^2(a^2-b^2)} = \sin am\left(1-\frac{1}{n}\right)K.$$

Für $n=3$ und $\sin am\, \frac{1}{3}K = x$ hat man die Gleichungen:

$$x = -\frac{a^2b^2-z^2(a^2+b^2)}{a^2b^2-z^2(a^2-b^2)},$$

$$2x(1-k^2x^2) = 1-k^2x^4,$$

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-z^2}.$$

Durch Elimination von x und k^2 zwischen diesen Gleichungen folgt:

$$\{z^4(a^2-b^2)(3a^2+b^2)-2a^2b^2(a^2-b^2)z^2-a^4b^4\}$$
$$\{(a^2-b^2)^2z^4+2a^2b^2(a^2+b^2)z^2-3a^4b^4\}=0.$$

Der erste Factor kann offenbar nicht verschwinden, da sich derselbe für $a=b$ auf $-a^4b^4$ reducirt und die gesuchte Relation auch für zwei Kreise giltig bleiben muss, folglich muss der zweite Factor verschwinden, d. h.

$$(a^2-b^2)^2z^4+2a^2b^2(a^2+b^2)z^2-3a^4b^4=0$$

ist die gesuchte Relation. Die Gleichung giebt für z^2 nur eine positive Wurzel, man findet:

$$1-\frac{z^2}{a^2} = \frac{\{\sqrt{(a^4+b^4-a^2b^2)}-b^2\}^2}{(a^2-b^2)^2}, \quad 1-\frac{z^2}{b^2} = \frac{\{\sqrt{(a^4+b^4-a^2b^2)}-a^2\}^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

Die beiden Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2\{\sqrt{(a^4+b^4-a^2b^2)}-b^2\}^2}+\frac{y^2}{b^2\{a^2-\sqrt{(a^4+b^4-a^2b^2)}\}^2}=\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$$

haben also die Eigenschaft, dass unzählig viele Dreiecke der ersten eingeschrieben werden können, welche gleichzeitig der zweiten umschrieben sind.

Für zwei ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen lässt sich die gesuchte Relation auf die zweier Kreise zurückführen. Setzt man in 7) und 9)

$$a' = a z,\quad b' = b z,\quad \omega = 0,\quad s = 1,$$
$$\xi = \varrho \cos 2\alpha,\quad \eta = \varrho \sin 2\alpha,$$

so erhält man folgende Gleichungen:

$$z = (1 + \varrho \cos 2\alpha) \cos \lambda - \varrho \sin \lambda \sin 2\alpha$$
$$= (1 + \varrho) \cos \alpha \cos (\lambda + \alpha) + (1 - \varrho) \sin \alpha \sin (\lambda + \alpha),$$
$$\int_0^\lambda \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 (\varphi + \alpha))}} = \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 (\varphi + \alpha))}},$$
$$k^2 = \frac{4\varrho}{(1-\varrho)^2 - z^2}.$$

Für $\lambda + \alpha = \beta$ hat man einfacher:

$$10)\qquad z = (1 + \varrho) \cos \alpha \cos \beta + (1 - \varrho) \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\int_0^\beta \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} - \int_0^\alpha \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{2}{n} K.$$

Die letzte Gleichung giebt:

$$11)\qquad \cos am \frac{2K}{n} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\, \Delta(\alpha)\, \Delta(\beta)}{1 - k^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Aus 10) findet man:

$$(1+\varrho)^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) = 4\varrho \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2(1-\varrho) z \sin \alpha \sin \beta + (1+\varrho)^2 - z^2,$$

hierdurch geht

$$[\Delta(\alpha)\, \Delta(\beta)]^2 = 1 - k^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + k^4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$
$$= 1 - \frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2 - z^2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + \frac{(4\varrho)^2}{\{(1+\varrho)^2 - z^2\}^2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

über in

$$(1+\varrho)\, \Delta(\alpha)\, \Delta(\beta) = 1 - \varrho - z \frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2 - z^2} \sin \alpha \sin \beta = 1 - \varrho - k^2 z \sin \alpha \sin \beta.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und 10) nimmt die Gleichung 11) folgende Form an:

$$\cos am \frac{2K}{n} = \frac{z}{1+\varrho}.$$

Diese Relation ist ganz analog derer für zwei Kreise. Setzt man in der betreffenden Gleichung für zwei Kreise, mit den Radien r, r' und der Distanz d der Mittelpunkte,

$$\frac{r'}{r} = z,\quad \frac{d}{r} = \varrho = \sqrt{\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)},$$

so erhält man unmittelbar die entsprechende Relation für zwei ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen.

Die Bedingung, dass ein Dreieck der Ellipse 2) umschrieben werden kann, welches gleichzeitig der Ellipse 1) eingeschrieben ist, möchte sich am einfachsten wohl auf folgende Weise finden lassen.

Man setze zur Abkürzung:

$$12)\quad a'^2 \cos^2\omega + b'^2 \sin^2\omega = A,\ a'^2 \sin^2\omega + b'^2 \cos^2\omega = B,\ (a'^2 - b'^2)\sin\omega\cos\omega = C.$$

Vom Punkte (u, v) des Umfanges der Ellipse 1) lege man eine Tangente

$$13)\qquad \frac{y-v}{x-u} = m$$

an die Ellipse 2). Für m erhält man dann die Gleichung:

$$14)\quad m^2\{A-(\xi-u)^2\} + 2m\{C+(\xi-u)(\eta-v)\} + B-(\eta-v)^2 = 0.$$

Jeder Wurzel dieser Gleichung entspricht eine Tangente. Sind m', m'' die beiden Wurzeln von 14), ferner (x', y'), (x'', y'') die Punkte, in welchen die Ellipse 1) von den Tangenten geschnitten wird, so hat man:

$$x'-u = \frac{y'-v}{m'} = -2\,\frac{\frac{u}{a^2} + m'\frac{v}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{m'^2}{b^2}},$$

$$x''-u = \frac{y''-v}{m''} = -2\,\frac{\frac{u}{a^2} + m''\frac{v}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{m''^2}{b^2}}.$$

Die Gleichung der Geraden durch die Punkte (x', y') und (x'', y'') wird also, wegen $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$,

$$15)\quad \frac{y}{b^2}\left\{\frac{v}{a^2} - \frac{u}{a^2}(m'+m'') - \frac{m'm''}{b^2}v\right\} + \frac{x}{a^2}\left\{\frac{m'm''}{b^2}u - \frac{u}{b^2}(m'+m'') - \frac{u}{a^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{a^2} + \frac{m'm''}{b^2}.$$

Aus 14) folgt aber

$$m'+m'' = -2\,\frac{C+(\xi-u)(\eta-v)}{A-(\xi-u)^2},\quad m'm'' = \frac{B-(\eta-v)^2}{A-(\xi-u)^2}.$$

Setzt man

$$P = \frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1,\quad Q = \frac{\xi u}{a^2} + \frac{\eta v}{b^2} - 1,$$

so wird die Gleichung 15)

$$\frac{x}{a^2}\left\{2\left(\xi Q + \frac{Cv+Bu}{b^2}\right) - uP\right\} + \frac{y}{b^2}\left\{2\left(\eta Q + \frac{Cu+Av}{a^2}\right) - vP\right\}$$
$$= P + 2(Q+1).$$

Ist diese Gerade eine Tangente zur Ellipse 2), so erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$15)\quad \left\{\frac{2\xi}{a^2}\left(\xi Q + \frac{Cv+Bu}{b^2}\right) + \frac{2\eta}{b^2}\left(\eta Q + \frac{Cu+Av}{a^2}\right) - 2(Q+1) - P\left(\frac{\xi u}{a^2} + \frac{\eta v}{b^2} + 1\right)\right\}^2$$
$$= \frac{A}{a^4}\left\{2\left(\xi Q + \frac{Cv+Bu}{b^2}\right) - uP\right\}^2 + \frac{B}{b^4}\left\{2\left(\eta Q + \frac{Cu+Av}{a^2}\right) - vP\right\}^2$$
$$- \frac{2C}{a^2b^2}\left\{2\left(\xi Q + \frac{Cv+Bu}{b^2}\right) - uP\right\}\left\{2\left(\eta Q + \frac{Cu+Av}{a^2}\right) - vP\right\}^2.$$

Wegen

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

ist

$$\frac{Bu^2}{b^2a^2}+\frac{Av^2}{a^2b^2}-\frac{2Cuv}{a^2b^2}=\frac{B}{b^2}\left(1-\frac{v^2}{b^2}\right)+\frac{A}{a^2}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)+\frac{2Cuv}{a^2b^2}$$
$$=P-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}+1-\left(\frac{Au^2}{a^4}+\frac{Bv^2}{b^4}-\frac{2Cuv}{a^2b^2}\right).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich die rechte Seite der Gleichung 15) auf folgende Art darstellen:

$$16)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(P^2-4\frac{AB-C^2}{a^2b^2}\right)\left(\frac{Au^2}{a^4}+\frac{Bv^2}{b^4}-\frac{2Cuv}{a^2b^2}\right)\\&+4PQ\left\{\frac{C}{a^2b^2}(u\eta+\xi v)-\frac{Au\xi}{a^4}-\frac{Bv\eta}{b^4}\right\}\\&+4Q^2\left(\frac{A\xi^2}{a^4}+\frac{B\eta^2}{b^4}-\frac{2C\xi\eta}{a^2b^2}\right)\\&+4\frac{AB-C^2}{a^2b^2}\left\{2Q(Q+1)-\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Die linke Seite von 15) ist gleich

$$\left\{PQ+2\left(C\frac{u\eta+\xi v}{a^2b^2}-\frac{Au\xi}{a^4}-\frac{Bv\eta}{b^4}\right)\right\}^2.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\left\{C\frac{u\eta+\xi v}{a^2b^2}-\frac{Au\xi}{a^4}-\frac{Bv\eta}{b^4}\right\}^2=\left(\frac{Au^2}{a^4}+\frac{Bv^2}{b^4}-\frac{2Cuv}{a^2b^2}\right)\left(\frac{A\xi^2}{a^4}+\frac{B\eta^2}{b^4}-\frac{2C\xi\eta}{a^2b^2}\right)$$
$$-\frac{AB-C^2}{a^4b^4}(\xi v-\eta u)^2,$$

$$\frac{(\xi v-\eta u)^2}{a^2b^2}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-(Q+1)^2,$$

so lässt sich die linke Seite der Gleichung 15) auch auf folgende Art schreiben:

$$\begin{aligned}P^2Q^2&+4PQ\left(C\frac{u\eta+\xi v}{a^2b^2}-\frac{Au\xi}{a^4}-\frac{Bv\eta}{b^4}\right)\\&+4\left(\frac{Au^2}{a^4}+\frac{Bv^2}{b^4}-\frac{2Cuv}{a^2b^2}\right)\left(\frac{A\xi^2}{a^4}+\frac{B\eta^2}{b^4}-\frac{2C\xi\eta}{a^2b^2}\right)\\&+4\frac{AB-C^2}{a^2b^2}\left\{(Q+1)^2-\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Subtrahirt man diesen Ausdruck von 16), so erhält man die Gleichung 15) in ihrer einfachsten Form, nämlich:

$$\left(\frac{Au^2}{a^4}+\frac{Bv^2}{b^4}-\frac{2Cuv}{a^2b^2}-Q^2\right)\left\{P^2-4\left(\frac{A\xi^2}{a^4}+\frac{B\eta^2}{b^4}-\frac{2C\xi\eta}{a^2b^2}\right)-4\frac{AB-C^2}{a^2b^2}\right\}=0.$$

Setzt man den zweiten Factor gleich Null, so erhält man folgende von u und v unabhängige Relation, welche ausdrückt, dass ein Dreieck der

Ellipse 1) einbeschrieben werden kann, welches gleichzeitig der Ellipse 2) umschrieben ist:

$$\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}+\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)^2=4\left(\frac{A\xi^2}{a^4}+\frac{B\eta^2}{b^4}-\frac{2C\xi\eta}{a^2b^2}\right)-4\frac{AB-C^2}{a^2b^2}.$$

XIII. Ueber eine einhüllende Fläche. Von Dr. A. Enneper. — In der „*Correspondance sur l'école polytechnique*" (I. p. 22, II. p. 420) und den „*Applications de géométrie*" (p. 200) hat Dupin die Enveloppe aller Kugelflächen untersucht, welche drei gegebene Kugelflächen berühren. Diese Fläche, die sogenannte „Cyclide", ist neuerdings von Roberts Gegenstand mehrerer Mittheilungen an die Pariser Akademie geworden (*Comptes rendus* LIII, p. 546 und 724, siehe auch *ibid.* p. 921 eine Bemerkung von Mannheim). Die Gleichung der Cyclide ist weitläufig, man erhält aber ein ziemlich einfaches Resultat, wenn die drei gegebenen Kugelflächen beständig ausserhalb oder innerhalb der eingehüllten Kugelfläche liegen.

Seien:

$$1)\qquad \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,\\ (x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2=r'^2,\\ (x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2=r''^2\end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen Kugelflächen und

$$2)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$$

die Gleichung einer Kugelfläche, welche die obigen berührt. Man hat dann die Relationen:

$$3)\qquad \begin{cases}(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2=(r+\varrho)^2,\\ (\alpha-a')^2+(\beta-b')^2+(\gamma-c')^2=(r'+\varrho)^2,\\ (\alpha-a'')^2+(\beta-b'')^2+(\gamma-c'')^2=(r''+\varrho)^2.\end{cases}$$

Sieht man α, β, γ als Functionen von ϱ an, so folgt die Enveloppe durch Elimination von ϱ zwischen der Gleichung 2) und:

$$4)\qquad (\alpha-x)\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}+(\beta-y)\frac{\partial\beta}{\partial\varrho}+(\gamma-z)\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}=\varrho.$$

Durch Differentiation nach ϱ geben die Gleichungen 3)

$$(\alpha-a)\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}+(\beta-b)\frac{\partial\beta}{\partial\varrho}+(\gamma-c)\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}=r+\varrho,$$

$$(\alpha-a')\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}+(\beta-b')\frac{\partial\beta}{\partial\varrho}+(\gamma-c')\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}=r'+\varrho,$$

$$(\alpha-a'')\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}+(\beta-b'')\frac{\partial\beta}{\partial\varrho}+(\gamma-c'')\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}=r''+\varrho.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung 4) folgt unmittelbar:

$$\begin{vmatrix}\alpha-x & \beta-y & \gamma-z & \varrho\\ \alpha-a & \beta-b & \gamma-c & r+\varrho\\ \alpha-a' & \beta-b' & \gamma-c' & r'+\varrho\\ \alpha-a'' & \beta-b'' & \gamma-c'' & r''+\varrho\end{vmatrix}=0.$$

Multiplicirt man die letzte Verticalreihe mit $\sqrt{-1}$, so ist auch:

$$\begin{vmatrix} \alpha-x & \beta-y & \gamma-z & \varrho\sqrt{-1} \\ \alpha-a & \beta-b & \gamma-c & (\varrho+r)\sqrt{-1} \\ \alpha-a' & \beta-b' & \gamma-c' & (\varrho+r')\sqrt{-1} \\ \alpha-a'' & \beta-b'' & \gamma-c'' & (\varrho+r'')\sqrt{-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Bildet man das Quadrat dieser Determinante, so folgt, mit Rücksicht auf 2) und 4):

$$5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & m & m' & m'' \\ m & 0 & n'' & n' \\ m' & n'' & 0 & n \\ m'' & n' & n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$m = (\alpha-x)(\alpha-a) + (\beta-y)(\beta-b) + (\gamma-z)(\gamma-c) - \varrho(r+\varrho),$$
$$n = (\alpha-a')(\alpha-a'') + (\beta-b')(\beta-b'') + (\gamma-c')(\gamma-c'') - (\varrho+r')(\varrho+r'')$$

und m', m'', n', n'' ähnliche Bedeutung haben. Nun ist aber

$$2m = 2\alpha^2 - 2\alpha(x+a) + 2\beta^2 - 2\beta(y+b) + 2\gamma^2 - 2\gamma(z+c) - 2\varrho(r+\varrho)$$
$$+ 2ax + 2by + 2cz$$

oder

$$\begin{aligned} 2m = {} & (\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2 - \varrho^2 \\ & + (\alpha-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2 - (\varrho+r)^2 \\ & - (x-a)^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2 + r^2. \end{aligned}$$

Wegen 2) und 4) wird nun einfach:

$$-2m = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2.$$

Ebenso folgt:

$$-2n = (a'-a'')^2 + (b'-b'')^2 + (c'-c'')^2 - (r'-r'')^2.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} M &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2, \\ M' &= (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 - r'^2, \\ M'' &= (x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2 - r''^2, \\ N &= (a'-a'')^2 + (b'-b'')^2 + (c'-c'')^2 - (r'-r'')^2, \\ N' &= (a-a'')^2 + (b-b'')^2 + (c-c'')^2 - (r-r'')^2, \\ N'' &= (a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2 - (r-r')^2, \end{aligned}$$

so nimmt die Gleichung 5) folgende Form an:

$$\begin{vmatrix} 0 & M & M' & M'' \\ M & 0 & N'' & N' \\ M' & N'' & 0 & N \\ M'' & N' & N & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$(MN)^2 + (M'N')^2 + (M''N'')^2 = 2MM'NN' + 2MM''NN'' + 2M'M''N'N'',$$

was die Gleichung der obigen Enveloppe ist.

XIV. Geometrisches Theorem. Von Dr. A. ENNEPER. — **Bewegt sich eine Gerade von constanter Länge innerhalb einer Ellipse, so beschreibt ein fester Punkt derselben eine Curve achten Grades. Der Inhalt dieser Curve ist gleich dem Inhalt der Ellipse, vermindert um den Inhalt einer zweiten Ellipse, deren halbe Hauptachsen die Segmente der beweglichen Geraden sind.**

Es seien

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$2)\qquad \frac{x-\xi}{a\cos\varphi}=\frac{y-\eta}{b\sin\varphi}=z$$

die Gleichungen der gegebenen Ellipse und einer Sehne derselben, (ξ,η) ist ein fixer Punkt der Sehne. Sind (x',y'), (x'',y'') die Schnittpunkte der Sehne 2) mit dem Umfang der Ellipse 1), so hat man:

$$3)\qquad \frac{x'-\xi}{a\cos\varphi}=\frac{y'-\eta}{b\sin\varphi}=z',\quad \frac{x''-\xi}{a\cos\varphi}=\frac{y''-\eta}{b\sin\varphi}=z''.$$

Bezeichnet man die beiden Segmente, welche der Punkt (ξ,η) auf der Sehne abschneidet, durch p und q, so finden die Gleichungen statt:

$$(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2=p,\quad (x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2=z''^2,$$

oder wegen der Gleichungen 3)

$$4)\qquad p^2=z'^2\Delta^2,\quad q^2=z''^2\Delta^2,\quad \Delta=\sqrt{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}.$$

Substituirt man aus 2) $x=\xi+za\cos\varphi$, $y=\eta+zb\sin\varphi$ in die Gleichung 1), so erhält man für z die quadratische Gleichung:

$$z^2+2z\left(\frac{\xi\cos\varphi}{a}+\frac{\eta\sin\varphi}{b}\right)=1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind z' und z'', folglich:

$$5)\qquad -\frac{z'+z''}{2}=\frac{\xi\cos\varphi}{a}+\frac{\eta\sin\varphi}{b},\quad -z'z''=1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}.$$

Die letzte dieser Gleichungen zeigt, dass z' und z'' entgegengesetzte Zeichen haben. Setzt man also $\varepsilon=\pm 1$, so geben die Gleichungen 4)

$$z'=-\varepsilon\frac{p}{\Delta},\quad z''=\frac{\varepsilon q}{\Delta}.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen 5) über in:

$$6)\qquad \frac{\xi\cos\varphi}{a}+\frac{\eta\sin\varphi}{b}=\varepsilon\frac{p-q}{2\Delta},$$

$$7)\qquad 1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{pq}{\Delta^2}.$$

Durch Elimination von φ zwischen diesen Gleichungen folgt eine *Gleichung, die, in* Beziehung auf ξ und η, vom achten Grade ist.

Die Gleichung 6) wird identisch für:

$$8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi}{a} = \tfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{p-q}{\Delta}\cos\varphi - g\sin\varphi, \\[2ex] \dfrac{\eta}{b} = \tfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{p-q}{\Delta}\sin\varphi + g\cos\varphi. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Werthe von ξ und η in 8) giebt:

$$g^2 = 1 - \left(\frac{p+q}{2\Delta}\right)^2.$$

Sind die Coordinaten x, y einer Curve Functionen einer Variabeln φ, bezeichnet S den Inhalt der Curve, so hat man:

$$\pm\, 2S = \int \begin{vmatrix} x & y \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} \partial\varphi,$$

wo links das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die rechte Seite positiv oder negativ ist. Für die Gleichungen 8) findet man:

$$\frac{1}{ab}\cdot \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = 1 - \frac{pq}{\Delta^2} - \varepsilon\frac{p-q}{2}\,\frac{\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\dfrac{1}{\Delta}}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{p+q}{2\Delta}\right)^2\right\}}}$$

$$= 1 - \frac{pq}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

$$+\,\varepsilon\frac{p-q}{p+q}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\arccos\left(\frac{p+q}{2\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}}\right).$$

Bezeichnet man durch S den Gesammtinhalt der obigen Curve achten Grades, so ist:

$$\frac{2S}{ab} = \frac{1}{ab}\int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi} \end{vmatrix} \partial\varphi,$$

oder, wie man leicht bemerkt,

$$\frac{2S}{ab} = \int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{pq}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right)\partial\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{pq}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right)\partial\varphi,$$

d. h.

$$S = \pi ab - \pi pq,$$

welche Gleichung das obige Theorem enthält.

Der oben bemerkten Gleichung

$$\pm\, 2S = \int \begin{vmatrix} x & y \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} \partial\varphi$$

lässt sich leicht eine analoge für den Raum an die Seite stellen. Die Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche seien Functionen zweier Variabeln u und v. Setzt man:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{d v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F,$$

bezeichnet durch C die Länge des Perpendikels, gefällt vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die berührende Ebene zur Fläche im Punkte (x, y, z), so ist:

$$\pm C=\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{(EG-F^2)}}.$$

Nimmt man das Flächenelement $\partial\Sigma$ als Basis und den Anfangspunkt zur Spitze einer Kegelfläche, so ist das Volumen, welches dieselbe umschliesst, $\frac{1}{3}C\partial\Sigma$. Bezeichnet man also durch V das Volumen für einen beliebigen Theil der Fläche, so ist:

$$\pm 3V=\pm\int\!\!\int C\partial\Sigma=\pm\int\!\!\int C\sqrt{(EG-F^2)}\,\partial u\,\partial v=\int\!\!\int\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\partial u\,\partial v.$$

Diese Gleichung scheint noch nicht bemerkt zu sein. Für ein dreiachsiges Ellipsoid erhält man mittelst:

$$\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\quad \frac{y}{b}=\sqrt{\frac{(b^2-u^2)(v^2-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}},\quad \frac{z}{c}=\sqrt{\frac{(u^2-c^2)(v^2-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}$$

unmittelbar das bekannte Theorem Legendre's über die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

XV. Einige Formeln für das Trägheitsmoment ebener Vielecke. —

I. Trägheitsmoment des Dreiecks. Stehen den Seiten a, b, c eines ebenen homogenen Dreiecks die Winkel A, B, C gegenüber, und sucht man das Trägheitsmoment des Dreiecks für eine ganz beliebige, durch die Spitze B gelegte Drehachse D, welche mit den drei Seiten die Winkel α, β, γ einschliesst, so zerlege man das Dreieck in streifenförmige Elemente parallel zur Seite b; steht ein solcher Streifen in der von B nach der Mitte U der Seite b gezogenen Geraden $BU=l$ um x von der Spitze B ab, so ist seine Masse $dM=\mu\frac{bh}{l^2}x\,dx$, seine Mitte steht von der Drehachse D_1 um $\frac{\varepsilon x}{l}$ ab und sein Trägheitsmoment in Bezug auf D_1 ist daher

$$1)\qquad dT=dM\left[\frac{E^2}{l^2}x^2+\tfrac{1}{12}\frac{b^2}{l^2}x^2\sin^2\beta\right],$$

wenn μ die Masse für die Flächeneinheit, h die Höhe BH des Dreiecks und E die Entfernung des Seitenmittels U von der Drehachse bedeutet. Das Trägheitsmoment des Dreiecks von der Masse M ist also für eine Achse durch

$$2)\quad \begin{cases} \text{die Spitze } B \ldots T_1 = \frac{1}{4} M [3E^2 + \frac{1}{4} b^2 \sin^2\beta], \\ \text{den Schwerpunkt } T = \frac{1}{6} M [\frac{1}{3} E^2 + \frac{1}{4} b^2 \sin^2\beta], \\ \text{die Mitte von } b. \; . \; T_2 = \frac{1}{6} M [E^2 + \frac{1}{4} b^2 \sin^2\beta]. \end{cases}$$

Projicirt man die drei Seiten a, b, c und die Mittellinie l in eine auf der Drehachse D_1 senkrechte Ebene, so sind die Projectionen $e_1 = a \sin\alpha$, $e_2 = b \sin\beta$, $e_3 = c \sin\gamma$ und E; in dem dabei entstehenden Dreiecke ist

$$e_2^2 = e_1^2 + e_3^2 - 2 e_1 e_3 \cos(e_1, e_3) = e_1^2 + e_3^2 - 2 e_1 e_3 \frac{\cos B - \cos\alpha \cos\gamma}{\sin\alpha \sin\gamma},$$

$$3)\quad b^2 \sin^2\beta = a^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\gamma - 2ac(\cos B - \cos\alpha\cos\gamma),$$

$$4)\quad \pm \cos\beta = \frac{a\cos\alpha - c\cos\gamma}{b} = \frac{\sin(B+C)\cos\alpha - \sin C \cos\gamma}{\sin B}.$$

Zu Formel 4) kann man auch unmittelbar durch zweimalige Anwendung des soeben benutzten Satzes der sphärischen Trigonometrie gelangen. In ähnlicher Weise bestimmen sich die Winkel λ und φ, welche die Drehachse D_1 mit l und mit h einschliesst,

$$5)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\sin ABU \cos\alpha + \sin CBU \cos\gamma}{\sin B} = \dfrac{a\cos\alpha + c\cos\gamma}{2l}, \\ \cos\varphi = \dfrac{\cos A \cos\alpha + \cos C \cos\gamma}{\sin B} = \dfrac{b_2 \cos\alpha}{b \sin C} + \dfrac{b_1 \cos\gamma}{b \sin A}, \end{cases}$$

wobei $b_1 = a\cos C$ und $b_2 = c\cos A$ die beiden Abschnitte der Seite b sind.

Eben so leicht findet man aus dem durch die Projectionen gebildeten Dreiecke

$$e_1^2 + e_3^2 = 2E^2 + 2\left(\frac{e_2}{2}\right)^2; \quad E^2 + \frac{1}{4} b^2 \sin^2\beta = \frac{a^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\gamma}{2}$$

und erhält nun durch Einsetzung dieser Werthe in die Formel 2)

$$6)\quad \begin{cases} T_1 = \frac{1}{4} M [a^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\gamma - \frac{1}{3} b^2 \sin^2\beta], \\ T_1 = \frac{1}{6} M [a^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\gamma + ac(\cos B - \cos\alpha\cos\gamma)], \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} T = \frac{1}{36} M [a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta + c^2\sin^2\gamma], \\ T = \frac{1}{18} M [a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta - ac(\cos B - \cos\alpha\cos\gamma)], \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{12} M [a^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\gamma], \\ T_2 = \frac{1}{12} M b^2 \dfrac{\sin^2 A \sin^2\alpha + \sin^2 C \sin^2\gamma}{\sin^2(A+C)}. \end{cases}$$

Unter den in diesen Formeln enthaltenen besonderen Fällen zeichnen sich aus:

1. Die Drehachse liegt in der Ebene des Dreiecks parallel zur Seite b;

$$9)\quad T = \tfrac{1}{18} M h^2 = \tfrac{1}{6} T_1 = \tfrac{1}{3} T_2.$$

2. Die Drehachse steht senkrecht auf der Ebene des Dreiecks;

$$10)\quad T = \tfrac{1}{36} M (a^2 + b^2 + c^2).$$

3. Ebene $D_1 BC$ steht senkrecht auf Ebene $D_1 BA$; $\cos B = \cos\alpha \cos\gamma$;

$$11)\qquad T=\tfrac{1}{18}M\,[a^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\gamma] = \tfrac{1}{3}T_1 = \tfrac{2}{3}T_2.$$

4. Macht die Projection der unter dem Winkel ϑ gegen die Dreiecksebene geneigten Drehachse mit der Höhe h des Dreiecks gegen BC hin den Winkel v, so macht sie mit der Senkrechten zu h gegen C hin den Winkel $\frac{\pi}{2}-v$, und es ist dann

$$\cos\varphi = \cos\vartheta \cos v,\qquad \cos\beta = \cos\vartheta \sin v,$$
$$\cos\alpha = \cos\beta \cos C + \cos\varphi \sin C,\qquad \cos\gamma = -\cos\beta\cos A + \cos\varphi \sin A.$$

Da nun $a^2+c^2=2h^2+b_1^2+b_2^2$ ist, so gehen die Formeln 6), 7) und 8) über in folgende, leicht auch unmittelbar aus den allgemeinsten Formeln für das Trägheitsmoment bei beliebiger Lage der Drehachse zu entwickelnde Formeln:

$$12)\left\{\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{1}{6}M\left[h^2\sin^2\varphi + \frac{b_1^2-b_1b_2+b_2^2}{3}\sin^2\beta + h(b_1-b_2)\cos\varphi\cos\beta\right],\\
T_1 &= \tfrac{1}{6}M\,[a^2+c^2+ac\cos B - 3h^2\cos^2\varphi - (b_1^2-b_1b_2+b_2^2)\cos^2\beta\\
&\qquad + h(b_1-b_2)\cos\varphi\cos\beta],
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{18}M\,[h^2\sin^2\varphi + (b_1^2+b_1b_2+b_2^2)\sin^2\beta + h(b_1-b_2)\cos\varphi\cos\beta],\\
T &= \tfrac{1}{18}M\,[a^2+c^2-ac\cos B - h^2\cos^2\varphi - (b_1^2+b_1b_2+b_2^2)\cos\beta\\
&\qquad + 3h(b_1-b_2)\cos\varphi\cos\beta],
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
T_2 &= \tfrac{1}{6}M\left[h^2\sin^2\varphi + \frac{b_1^2+b_2^2}{2}\sin^2\beta + h(b_1-b_2)\cos\varphi\cos\beta\right],\\
T_2 &= \tfrac{1}{12}M\,[a^2+c^2-2h^2\cos^2\varphi - (b_1^2+b_2^2)\cos^2\beta\\
&\qquad + 2h(b_1-b_2)\cos\varphi\cos\beta].
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Formeln fliessen, wenn man einmal φ und einmal β zu Null werden oder zu $\frac{\pi}{2}$ anwachsen lässt, je zwei Reihen von Formeln, welche in ähnlicher Weise mit einander verwandt sind, wie die auf S. 175 flg. des V. Jahrganges dieser Zeitschrift für das Rechteck, den Kreis und die Parabel aufgestellten Formeln. — Ebenso kann man die Winkel α, β, durch den Winkel λ und den Winkel ψ ausdrücken, welchen die Drehachse mit der in der Dreiecksebene senkrecht zu l gelegten Geraden einschliesst; wenn λ oder ψ der Neigungswinkel der Drehachse gegen die Ebene ist, so ergiebt sich hierbei:

$$13)\qquad\left\{\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{18}M\left[\tfrac{3}{4}\frac{b^2h^2}{l^2} + \left(l^2 + \tfrac{3}{4}\frac{l^2-h^2}{l^2}b^2\right)\sin^2\lambda\right],\\
T &= \tfrac{1}{18}M\left[\tfrac{3}{4}\frac{b^2h^2}{l^2}\sin^2\psi + l^2 + \tfrac{3}{4}\frac{l^2-h^2}{l^2}b^2\right].
\end{aligned}\right.$$

Mit Hilfe der Formeln 5), 6) und 7) überzeugt man sich leicht, dass es im Allgemeinen bei gleicher Neigung der Drehachse nicht zwei verschiedene Lagen derselben giebt, für welche T und T_1 gleich gross ausfallen; für T_2 dagegen giebt es noch eine zweite solche Lage, sobald das Dreieck bei B rechtwinklig ist, in welchem Falle sich ja das rechtwinklige Dreieck von U aus in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegen lässt. Anders ist es beim gleichseitigen Dreieck.

II. Trägheitsmoment des Vierecks. Die Formeln für das Trägheitsmoment unregelmässiger Vielecke entwickelt man entweder mit Benutzung der Formeln 7), wobei man das Vieleck ganz beliebig in Dreiecke zerlegen kann, oder mit Benutzung der Formeln 6), wobei man das Vieleck von dem Punkte aus, wo die Drehachse die Ebene des Vielecks trifft, in Dreiecke zerlegt.

So erhält man z. B. als Trägheitsmoment des Vierecks $ABCF$ von der Masse M für eine Drehachse durch den Eckpunkt B:

$$14)\quad T_1=\tfrac{1}{6}M\left[a^2\sin^2\alpha+\frac{h_1c_1^2\sin^2\gamma_1+h_2c_2^2\sin^2\gamma_2}{h_1+h_2}-\tfrac{1}{3}\frac{h_1b_1^2\sin^2\beta_1+h_2b_2^2\sin^2\beta_2}{h_1+h_2}\right],$$

wenn die Eckpunkte A und F um h_1 und h_2 von der Diagonale $BC=a$ entfernt sind, und diese den Winkel α, die Seiten $BA=c_1$, $BF=c_2$, $CA=b_1$ und $CF=b_2$ aber die Winkel γ_1, γ_2, β_1 und β_2 mit der Drehachse einschliessen.

Als Trägheitsmoment des Vierecks für eine Achse durch die Mitte der Diagonale a dagegen ergiebt sich aus 8):

$$15)\quad T_1=\tfrac{1}{12}M\frac{h_1c_1^2\sin^2\gamma_1+h_2c_2^2\sin^2\gamma_2+h_1b_1^2\sin^2\beta_1+h_2b_2^2\sin^2\beta_2}{h_1+h_2};$$

ist aber φ der Winkel zwischen h_2 und der Drehachse, sowie B_1, B_2, C_1 und C_2 die Winkel, welche die Diagonale a mit den Seiten c_1, c_2, b_1 und b_2 macht, so wird

$$16)\quad \begin{aligned} T_2=\tfrac{1}{12}\frac{M}{h_1+h_2}\Big[&h_1(c_1^2+b_1^2)+h_2(c_2^2+b_2^2)-2(h_1^3+h_2^3)\cos^2\varphi\\ &-\{h_1(c_1^2\cos^2B_1+b_1^2\cos^2C_1)+h_2(c_2^2\cos^2B_2+b_2^2\cos^2C^2)\}\cos^2\alpha\\ &-2\{h_1^2(c_1\cos B_1-b_1\cos C_1)-h_2^2(c_2\cos B_2-b_2\cos C_2)\}\cos\varphi\cos\alpha\Big]\end{aligned}$$

Macht die zweite Diagonale d mit der Drehachse gegen A hin den Winkel δ und schneiden sich die Diagonalen so, dass die Abschnitte a_1 und a_2, d_1 und d_2 sind, so ist das Trägheitsmoment des Vierecks für eine Drehachse durch den Schnittpunkt der Diagonalen:

$$17)\quad \begin{aligned} T_3=\tfrac{1}{6}M\Big[&\frac{a_1^3+a_2^3}{a}\sin^2\alpha+\frac{d_1^3+d_2^3}{d}\sin^2\delta-\frac{a_1}{3a}\,\frac{d_1c_1^2\sin^2\gamma_1+d_2c_2^2\sin^2\gamma_2}{d}\\ &-\frac{a_2}{3a}\,\frac{d_1b_1^2\sin^2\beta_1+d_2b_2^2\sin^2\beta_2}{d}\Big].\end{aligned}$$

Für das Trapez endlich, dessen parallele Seiten b und b_0 mit der Drehachse den Winkel β, während die nicht parallelen Seiten a und c mit der Drehachse die Winkel α und γ einschliessen, findet man als Trägheitsmoment *für eine beliebige* Drehachse durch den Schwerpunkt aus 1):

$$18)\qquad T=\frac{M}{6(b+b_0)^2}\left[\frac{b^2+4bb_0+b_0^2}{6}(a^2\sin^2\alpha+c^2\sin^2\gamma)\right.$$
$$\left.+\frac{b^4+2b_1^3b_0+6b^2b_0^2+2b_1b_0^3+b_0^4}{6}\sin^2\beta\right].$$

III. **Trägheitsmoment regelmässiger Vielecke für eine beliebige Drehachse durch den Schwerpunkt.** Wenn man die Formel 6) auf die n gleichschenkligen Dreiecke des regelmässigen $n$seitigen Vielecks von der Masse M anwendet, welches in den Kreis vom Halbmesser r eingeschrieben ist, so hat man $\gamma_1=\alpha_2$, $\gamma_2=\alpha_3$ u. s. w. zu setzen und erhält daher als Trägheitsmoment dieses Vielecks für eine beliebige Schwerachse:

$$T=\tfrac{1}{6}Mr^2\left[2\frac{\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\ldots+\sin^2\alpha_n}{n}\right.$$
$$\left.+\cos B-\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n\cos\alpha_1}{n}\right].$$

Ist ϑ der Neigungswinkel der Drehachse gegen die Ebene des Vielecks und macht die Projection der Drehachse mit den nach dem ersten, zweiten u. s. f. Eckpunkte gezogenen Halbmessern die Winkel

$$v_1,\quad v_2=v_1+B,\quad v_3=v_2+B=v_1+2B \text{ u. s. f.},$$

so ist

$$\cos\alpha_1=\cos\vartheta\cos v_1$$
$$\cos\alpha_2=\cos\alpha_1\cos B-\sin B\cos\vartheta\sin v_1 \text{ u. s. f.}$$
$$\cos B-\cos\alpha_1\cos\alpha_2=\cos B\sin^2\alpha_1+\tfrac{1}{2}\sin B\cos^2\vartheta\sin 2v_1,$$
$$\cos B-\cos\alpha_2\cos\alpha_3=\cos B\sin^2\alpha_2+\tfrac{1}{2}\sin B\cos^2\vartheta\sin 2v_2 \text{ u. s. f.}$$
$$T=\tfrac{1}{6}Mr^2\left[(2+\cos B)\frac{\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\ldots+\sin^2\alpha_n}{n}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\sin B\cos^2\vartheta\frac{\sin 2v_1+\sin 2v_2+\ldots+\sin 2v_n}{n}\right].$$

Nun bilden aber die Winkel $2v_1$, $2v_2$, ... eine arithmetische Reihe, deren Differenz $2B$ und deren letztes Glied $2v_n=2v_1+2(n-1)B$ ist; da nun $nB=2\pi$, so ist

$$\sin 2v_1+\sin 2v_2+\ldots+\sin 2v_n=0=\cos 2v_1+\cos 2v_2+\ldots+\cos 2v_n,$$
$$\frac{\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\ldots+\cos^2\alpha_n}{n}=\cos^2\vartheta\frac{\cos^2 v_1+\cos^2 v_2+\ldots+\cos^2 v_n}{n},$$
$$=\cos^2\vartheta\frac{n+\cos 2v_1+\cos 2v_2+\ldots+\cos 2v_n}{2n}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cos\vartheta,$$
$$\frac{\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\ldots+\sin^2\alpha_n}{n}=\frac{2-\cos^2\vartheta}{2}=\frac{1+\sin^2\vartheta}{2},$$

$$19)\quad\begin{cases}T=\tfrac{1}{12}Mr^2(2+\cos B)(1+\sin^2\vartheta),\\ T=\tfrac{1}{4}M(h^2+\tfrac{1}{12}s^2)(1+\sin^2\vartheta)=\tfrac{1}{4}M(r^2-\tfrac{1}{6}s^2)(1+\sin^2\vartheta),\end{cases}$$

wobei $s=r\sin\frac{B}{2}$ die Seitenlänge und $h=r\cos\frac{B}{2}$ den Abstand einer

Seite vom Mittelpunkte bezeichnet. Das Maximum von F erscheint bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, das Minimum dagegen bei $\vartheta = 0$.

Es ist demnach das Trägheitsmoment eines jeden regelmässigen Vielecks für irgendwelche Drehachse ausser den Bestimmungsstücken des Vielecks nur von der Neigung ϑ der Drehachse gegen die Vielecksebene abhängig, nicht aber von der Lage der Drehachse gegen die Vielecksseiten. (Vergl. Jahrgang V, S. 171, Anmerkung.)

Setzt man $T = \frac{1}{24} k_n M r^2 (1 + \sin^2\vartheta)$, so hat man für $n = 3, 4, 6, 8, 12, \infty$:

$$\begin{aligned} k_3 &= 3 = 4 - \sqrt{1}, & k_4 &= 4 = 4 + \sqrt{0}, \\ k_6 &= 5 = 4 + \sqrt{1}, & k_8 &= 4 + \sqrt{2}, \\ k_{12} &= 4 + \sqrt{3}, & k_\infty &= 6 = 4 + \sqrt{4}. \end{aligned}$$

In welchen Fällen der obige Satz auch für gerade oder schiefe Prismen und Pyramiden von regelmässiger Grundfläche gilt, ist leicht zu ermitteln, da das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt gelegte Drehachse bei

$$28) \quad \begin{cases} \text{Prismen} & T = M\left(\varrho^2 + \frac{1}{12} q_1^2 \sin^2\psi\right), \\ \text{Pyramiden} & T = \frac{3}{5} M\left(\varrho^2 + \frac{1}{16} q_2^2 \sin^2\psi\right) \end{cases}$$

zu setzen ist, wobei ϑ der Neigungswinkel der Drehachse gegen die Grundfläche und ψ der Neigungswinkel der Drehachse gegen die geometrische Achse q_1 des Prismas oder gegen die durch die Spitze der Pyramide gelegte Schwerachse q_2 bedeutet, während

$$\varrho^2 = \left(h^2 + \frac{1}{12} s^2\right) \frac{1 + \sin^2\vartheta}{4},$$

$$\cos\psi = \sin\omega \sin\vartheta + \cos\omega \cos\vartheta \cos\nu$$

ist, wenn q_1 oder q_2 unter dem Winkel ω gegen die Grundfläche, die durch q_1 oder q_2 und durch die Drehachse normal zur Grundfläche gelegten Ebenen aber unter dem Winkel ν gegen einander geneigt sind.

Chemnitz. Dr. Zetzsche.

XVI. Ueber das Potential der Kugelschaale. — Mittelst der Theorie der Kugelfunctionen gelangt man leicht zu dem Satze, dass das Potential der Kugelschaale in endlicher Form entwickelbar ist, wenn die Dichtigkeit im Punkte xyz durch eine ganze rationale Function der Coordinaten x, y, z dargestellt wird*). Der Satz dürfte daher ziemlich bekannt sein, obschon er nirgends besonders hervorgehoben erscheint. Wir wollen ihn

*) Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich die Dichtigkeit eine ganze rationale Function der Polarcoordinaten und giebt, nach Kugelfunctionen entwickelt, eine endliche Reihe. Für das Ellipsoid verhält sich die Sache ähnlich, nur mit dem Unterschiede, dass man auf elliptische Integrale kommt.

im Folgenden unabhängig von der Theorie der Kugelfunctionen beweisen und zugleich ein Paar unbemerkt gebliebene interessante Specialfälle desselben näher betrachten.

Die Dichtigkeit im Punkte xyz sei $f(x, y, z)$, das Volumenelement $dv = dx\,dy\,dz$, die Radien der Kugelschaale mögen r_0 und r_1, die Coordinaten des angezogenen Punktes ξ, η, ζ heissen, endlich sei zur Abkürzung

$$u = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2};$$

das Potential der Kugelschaale ist dann

$$V = \int\!\!\int\!\!\int \frac{f(x, y, z)}{u}\, dx\, dy\, dz,$$

wobei sich die Integrationen auf alle positiven und negativen x, y, z erstrecken, welche der Bedingung

$$r_0^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq r_1^2$$

genügen. In Polarcoordinaten ist wie gewöhnlich

1) $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\varphi\sin\psi,\quad dv = r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi;$

dem analog setzen wir

$$2)\qquad \xi = \varrho\cos\lambda,\quad \eta = \varrho\sin\lambda\cos\mu,\quad \zeta = \varrho\sin\lambda\sin\mu,$$

und bezeichnen mit τ den Winkel zwischen ϱ und r; dies giebt

$$\cos\tau = \frac{\xi}{\varrho}\frac{x}{r} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{y}{r} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{z}{r}$$

oder

$$3)\qquad \cos\tau = \cos\lambda\cos\varphi + \sin\lambda\sin\varphi\cos(\psi - \mu),$$

$$u = \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho r\cos\tau + r^2},$$

$$V = \int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x, y, z)}{u}\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi.$$

In der letzten Formel sind die vorher angegebenen Werthe von x, y, z, $\cos\tau$ und u zu substituiren, was der Kürze wegen unterlassen wurde.

Von den zusammengehörigen Coordinatensystemen x, y, z und r, φ, ψ gehen wir zu zwei neuen Systemen x_1, y_1, z_1 und r, τ, ω über, indem wir die feste Gerade ϱ zur Achse x_1 und die Ebene des Winkels λ zur Ebene $x_1 y_1$ nehmen. Nennen wir der Reihe nach A, B, C die Punkte, in welchen die ursprüngliche x-Achse und die Vectoren ϱ, r eine Begrenzungsfläche der Kugelschaale schneiden, so entsteht ein sphärisches Dreieck, worin $\angle A = \psi - \mu$, die Seite $AB = \lambda$ und die Seite $AC = \varphi$ ist; dem Winkel φ im früheren Polarsysteme entspricht in dem neuen die Seite $BC = \tau$, endlich entspricht dem Winkel ψ der Winkel $180^\circ - B = \omega$. Man hat nun die Relationen

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cos\tau - \sin\lambda\sin\tau\cos\omega,$$
$$\sin\varphi\cos(\psi - \mu) = \sin\lambda\cos\tau + \cos\lambda\sin\tau\cos\omega,$$
$$\sin\varphi\sin(\psi - \mu) = \sin\tau\cos\omega;$$

entwickelt man aus den zwei letzten die Werthe von $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$

und multiplicirt nachher mit dem Radiusvector r, welcher beiden Polarsystemen gemeinschaftlich angehört, so erhält man nach No. 1)

$$x = r\,(\cos\lambda\cos\tau - \sin\lambda\sin\tau\cos\omega),$$
$$y = r\,[\sin\lambda\cos\mu\cos\tau + (\cos\lambda\cos\mu\cos\omega - \sin\mu\sin\omega)\sin\tau],$$
$$z = r\,[\sin\lambda\sin\mu\cos\tau + (\cos\lambda\sin\mu\cos\omega + \cos\mu\sin\omega)\sin\tau],$$

oder, wenn λ und μ durch ξ, η, ζ ausgedrückt werden

$$x = \frac{r}{\varrho}\left(\xi\cos\tau - \sqrt{\eta^2+\zeta^2}\,\sin\tau\cos\omega\right),$$
$$y = \frac{r}{\varrho}\left(\eta\cos\tau + \frac{\xi\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}\sin\tau\cos\omega - \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}\sin\tau\sin\omega\right),$$
$$z = \frac{r}{\varrho}\left(\zeta\cos\tau + \frac{\xi\zeta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}\sin\tau\cos\omega + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}\sin\tau\sin\omega\right).$$

Das neue Volumenelement ist $r^2\sin\tau\,dr\,d\tau\,d\omega$, die Integrationsgrenzen bleiben für r, τ, ω die nämlichen, wie für r, φ, ψ, und so wird

$$4)\qquad V = \int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x,y,z)\,r^2\sin\tau}{\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}}\,dr\,d\tau\,d\omega,$$

wobei noch die vorigen Werthe von x, y, z zu substituiren sind.

Ist nun $f(x, y, z)$ eine ganze Function für x, y, z, so erhält sie zufolge der genannten Substitution die Form

$$f(x,y,z) = \Sigma C_i r^k\cos^m\tau\sin^n\tau\cos^p\omega\sin^q\omega,$$

worin C eine Constante, i, k, m, n, p, q ganze Zahlen bedeuten; die Berechnung von V führt demnach auf Integrale von der Form

$$\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^k\cos^m\tau\sin^n\tau\cos^p\omega\sin^q\omega}{\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}}\,r^2\sin\tau\,dr\,d\tau\,d\omega.$$

Man bemerkt sogleich, dass das Integral

$$\int_0^{2\pi}\cos^p\omega\sin^q\omega\,d\omega$$

verschwindet, wenn nicht p und q gleichzeitig gerade Zahlen sind; im letzteren Falle ist sein Werth eine nur von p und q abhängende Constante, welche vor die beiden übrigen Integralzeichen tritt; mithin bleiben nur Doppelintegrale von der Form

$$\int_{r_0}^{r_1} r^{k+2}\,dr\int_0^{\pi}\frac{\cos^m\tau\sin^n\tau}{\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}}\sin\tau\,d\tau.$$

Erhebt man die vorhin angegebenen Werthe von x, y, z auf ganze Potenzen und beachtet, dass $\sin\tau$ nie allein, sondern entweder mit dem Factor $\cos\omega$ oder mit $\sin\omega$ verbunden vorkommt, so erhält man auch jede ungerade Potenz von $\sin\tau$ multiplicirt mit einer ungeraden Potenz von oder von $\sin\omega$; dasselbe gilt für die Producte irgend welcher Pot von x, y, z, d. h. wenn n ungerade ist, muss wenigstens eine der Z p und q ungerade sein. Derartige Glieder liefern aber bei der Integ nach ω verschwindende Integrale, mithin bleiben für die Integrati Beziehung auf τ nur Glieder mit geraden n übrig. Gleichzeitig fallen alle Glieder weg, in denen ungerade Potenzen von $\sqrt{\eta^2+\zeta^2}$ vorkon jedes Doppelintegral der obigen Form ist also mit einer rationalen tion von ξ, η, ζ, ϱ multiplicirt. Mittelst der Substitution

$$\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}=u,\qquad \cos\tau=\frac{\varrho^2+r^2-u^2}{2\varrho r}$$

erhält man weiter

$$\int\frac{\cos^m\tau\,\sin^n\tau}{\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}}\sin\tau\,d\tau$$
$$=\int\left(\frac{\varrho^2+r^2-u^2}{2\varrho r}\right)^m\left(\frac{\sqrt{4\varrho^2r^2-(\varrho^2+r^2-u^2)^2}}{2\varrho r}\right)^n\frac{du}{\varrho r};$$

wegen des geraden n ist der unter dem Integralzeichen stehende Aus rational und liefert nach Integration und Einführung der Grenzen $u=$ und $u=\pm(\varrho-r)$ eine rationale Function von ξ, η, ζ, ϱ, r; deren In tion in Beziehung auf r leicht genug ist. Man hat daher den Satz: die Dichtigkeit im Punkte xyz durch eine ganze ratio Function von x, y, z dargestellt wird, so ist das Pote eine rationale Function der vier Grössen ξ, η, ζ und ϱ.

Für den speciellen Fall $f(x,y,z)=x$ ergiebt sich nach No. 4)

$$\iiint\frac{x}{u}\,dx\,dy\,dz=\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^3(\cos\lambda\cos\tau-\sin\lambda\sin\tau\cos\omega)}{\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}}\sin\tau\,dr\,d$$
$$=\frac{2\pi\xi}{\varrho}\int_{r_0}^{r_1}r^3\,dr\int_0^{\pi}\frac{\cos\tau\sin\tau\,d\tau}{\sqrt{\varrho^2-2\varrho r\cos\tau+r^2}};$$

der Werth des auf τ bezüglichen Integrales ist

$$\frac{2}{3}\frac{\varrho}{r^2}\text{ wenn }\varrho<r,$$

$$\frac{2}{3}\frac{r}{\varrho^2}\text{ wenn }\varrho>r,$$

und daraus folgt für $\varrho<r_0$:

$$5)\qquad\iiint\frac{x}{u}\,dx\,dy\,dz$$
$$=\frac{2\pi\xi}{\varrho}\int_{r_0}^{r_1}\frac{2}{3}\frac{\varrho}{r^2}r^3\,dr=\tfrac{2}{3}\pi\xi(r_1^2-r_0^2),$$

dagegen für $\varrho > r_1$:

7) $$\iiint \frac{x}{u}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{2\pi\xi}{\varrho}\int_{r_0}^{r_1} \frac{2}{3}\,\frac{r}{\varrho^2}\,r^3\,dr = \tfrac{4}{15}\pi\xi\,\frac{r_1^5 - r_0^5}{\varrho^2}.$$

Besteht die Masse der Kugelschaale aus einer stetigen Folge paralleler ebener Schichten, von denen jede für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von einer solchen Lamelle zur anderen variirt, so ist die einfachste Voraussetzung

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D,$$

wobei man sich D so gross genommen denken kann, dass $f(x, y, z)$ immer positiv bleibt. Dies giebt

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\,(r_1^2 - r_0^2)\,(A\xi + B\eta + C\zeta + 3D), \qquad \varrho < r_0,$$

$$V = \tfrac{4}{15}\pi\left\{\frac{(r_1^5 - r_0^5)\,(A\xi + B\eta + C\zeta)}{\varrho^3} + 5\,\frac{(r_1^3 - r_0^3)\,D}{\varrho}\right\}, \qquad \varrho > r_1.$$

Im ersten Falle sind die Componenten der Anziehung der Kugelschaale auf den Punkt $\xi\eta\zeta$

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi} = \tfrac{2}{3}\pi\,(r_1^2 - r_0^2)\,A,$$

$$Y = \tfrac{2}{3}\pi\,(r_1^2 - r_0^2)\,B, \quad Z = \tfrac{2}{3}\pi\,(r_1^2 - r_0^2)\,C,$$

d. h. im umschlossenen Hohlraume bleibt die Anziehung constant sowohl der Grösse, als der Richtung nach; die Grösse ist

$$R = \tfrac{2}{3}\pi\,(r_1^2 - r_0^2)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

ihre Richtung steht senkrecht auf den Parallelebenen, welche die Massenelemente von gleicher Dichtigkeit enthalten.

Als zweites Beispiel diene die Annahme $f(x, y, z) = x^2$; sie giebt

$$\iiint \frac{x^2}{u}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^4\,(\cos\lambda\cos\tau - \sin\lambda\sin\tau\cos\omega)^2}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho r\cos\tau + r^2}}\,\sin\tau\,dr\,d\tau\,d\omega,$$

woraus nach Integration in Beziehung auf ω und Substitution der Werthe von $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ folgt

$$\iiint \frac{x^2}{u}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \pi\int_{r_0}^{r_1} r^4\,dr \int_0^{\pi} \frac{\varrho^2 - \xi^2 + (3\xi^2 - \varrho^2)\cos^2\tau}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho r\cos\tau + r^2}}\,\sin\tau\,d\tau.$$

Die Integration nach τ liefert

$$\tfrac{4}{15}\left\{5\,\frac{\varrho^2}{r} + \frac{(3\xi^2 - \varrho^2)\,\varrho^2}{r^3}\right\} \quad \text{wenn } \varrho < r,$$

$$\tfrac{4}{15}\left\{5\varrho+\frac{(3\xi^2-\varrho^2)r^2}{\varrho^3}\right\} \quad \text{wenn } \varrho>r,$$

und hieraus ergiebt sich

$$7)\qquad \iiint \frac{x^2}{u}\,dx\,dy\,dz$$
$$=\tfrac{1}{15}\pi\{5(r_1^4-r_0^4)+2(r_1^2-r_0^2)(3\xi^2-\varrho^2)\},\quad \varrho\leqq r_0,$$
$$8)\qquad \iiint \frac{x^2}{u}\,dx\,dy\,dz$$
$$=\tfrac{4}{15}\pi\left\{\frac{r_1^5-r_0^5}{\varrho}+\frac{(r_1^7-r_0^7)(3\xi^2-\varrho^2)}{7\varrho^5}\right\},\quad \varrho\geqq r_1.$$

Nach diesen Formeln hat es keine Schwierigkeit, den Fall

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2$$

zu behandeln; setzt man zur Abkürzung

$$A+B+C=K,\quad A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=S,$$

so erhält man

$$V=\tfrac{1}{15}\pi\{5(r_1^4-r_0^4)K+2(r_1^2-r_0^2)(3S-K\varrho^2)\},\quad \varrho\leqq r_0,$$
$$V=\tfrac{4}{15}\pi\left\{\frac{r_1^5-r_0^5}{\varrho}K+\frac{(r_1^7-r_0^7)(3S-K\varrho^2)}{7\varrho^5}\right\},\quad \varrho\geqq r_1.$$

Einfacher werden diese Formeln, wenn $A+B+C=0$ ist, d. h. wenn die Massenelemente von gleicher Dichtigkeit auf gewissen Hyperboloiden liegen.

Der interessanteste Specialfall ist

$$f(x,y,z)=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2;$$

die Masse besteht dann aus einer stetigen Folge concentrischer homogener Kugelschaalen, deren Mittelpunkt die Coordinaten a, b, c besitzt, also excentrisch gegen den Mittelpunkt der aus r_0 und r_1 beschriebenen Kugelschaale liegt; die Dichtigkeit eines Massenelementes ist direct proportional dem Quadrate der Entfernung desselben vom Punkte abc. Berechnet man zuerst das Integral

$$\iiint \frac{(a-x)^2}{u}\,dx\,dy\,dz,$$

indem man $(a-x)^2$ auflöst und die Formeln 5), 6), 7) und 8) anwendet, so findet man für $\varrho\leqq r_0$:

$$a^2\,.\,2\pi(r_1^2-r_0^2)-2a\,.\,\tfrac{2}{3}\pi(r_1^2-r_0^2)\xi$$
$$+\tfrac{2}{15}\pi(r_1^2-r_0^2)(3\xi^2-\varrho^2)+\tfrac{1}{3}\pi(r_1^4-r_0^4)$$
$$=2\pi(r_1^2-r_0^2)\{a^2-\tfrac{2}{3}a\xi+\tfrac{1}{15}(3\xi^2-\varrho^2)+\tfrac{1}{6}(r_1^2+r_0^2)\}$$

und für $\varrho\geqq r_1$:

$$a^2\,.\,\tfrac{4}{3}\pi\frac{r_1^3-r_0^3}{\varrho}-2a\,.\,\tfrac{4}{15}\pi\frac{r_1^5-r_0^5}{\varrho^3}\xi$$
$$+\tfrac{4}{15}\pi\frac{r_1^5-r_0^5}{\varrho}+\tfrac{4}{105}\pi\frac{(r_1^7-r_0^7)(3\xi^2-\varrho^2)}{\varrho^5}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$V = 2\pi(r_1^2 - r_0^2)\{a^2 + b^2 + c^2 - \tfrac{2}{3}(a\xi + b\eta + c\zeta) + \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_0^2)\}, \quad \varrho \leq r_0,$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi\left\{\frac{(r_1^3 - r_0^3)(a^2 + b^2 + c^2)}{\varrho} - \frac{1}{5}\frac{(r_1^5 - r_0^5)[2(a\xi + b\eta + c\zeta) - 3\varrho^2]}{\varrho^3}\right\},$$
$$\varrho \geq r_1.$$

Im ersten Falle sind die Componenten der Anziehung der Kugelschaale auf den Punkt $\xi\eta\zeta$

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\tfrac{4}{3}\pi(r_1^2 - r_0^2)\,a,$$
$$Y = -\tfrac{4}{3}\pi(r_1^2 - r_0^2)\,b, \quad Z = -\tfrac{4}{3}\pi(r_1^2 - r_0^2)\,c,$$

d. h. im umschlossenen Hohlraume bleibt die Anziehung constant sowohl der Grösse, als der Richtung nach; die Grösse der Anziehung ist

$$R = -\tfrac{4}{3}\pi(r_1^2 - r_0^2)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

ihre Richtung ist parallel der Geraden vom Punkte abc nach dem Mittelpunkte der Kugelschaale. SCHLÖMILCH.

XVII. Nachweis eines wohlfeilen Apparates zu Spectralbeobachtungen. — Alb. Mousson hat in Pogg. Ann. Bd. 112, S. 428 die mathematische Theorie spectroskopischer Apparate gegeben und am Schlusse seiner theoretischen Betrachtungen ein Spectroskop beschrieben, welches ihm alle Vorzüge der Bequemlichkeit, Einfachheit und Wohlfeilheit zu vereinigen schien, die der Chemiker und Physiker bei qualitativen Spectralversuchen verlangen kann. Das Mousson'sche Spectroskop besteht aus einer 40 bis 60 Centimeter langen, 3 bis 4 Centimeter weiten, inwendig geschwärzten Röhre, welche der Bequemlichkeit beim Experimentiren wegen zum Ausziehen eingerichtet ist. An einem Ende der Röhre ist eine sehr sorgfältig hergerichtete Spalte eingesetzt, deren einer Backen (um die Spaltenweite ändern zu können) mittelst Mikrometerschraube zu verschieben ist; am anderen Ende der Röhre befindet sich ein Prisma von gutem Flintglas, welches von aussen gedreht werden kann, damit man ihm diejenige Stellung geben kann, bei welcher man beim Hineinsehen in das Prisma das farbige Bild der Spalte am deutlichsten sieht. Um beim Hineinblicken in das Prisma nicht durch die Reflexe an den Prismenflächen gestört zu werden, ist das Rohr dicht am Prisma durch eine geschwärzte Metallplatte schief geschlossen, welche nur eine so kleine Oeffnung in der Mitte erhalten hat, als zur Beobachtung des Spectrums erforderlich ist. Das ganze Rohr ist in einer Hülse festgeschraubt, die an einem Stativ auf- und niedergeschoben werden kann und vertical und horizontal beweglich ist, so dass man dem Rohre jede beliebige Lage geben und das Spectroskop zur Beobachtung jeder beliebigen Lichtquelle bequem gebrauchen kann.

Nachdem ich durch den hiesigen geschickten Mechaniker Schadewell ein Mousson'sches Spectroskop hatte anfertigen lassen, überzeugte ich mich zunächst, dass sich dieses Instrument recht vorzüglich zur Beobachtung der Frauenhofer'schen Streifen eignet. Als ich das Spectroskop nach dem Himmel dicht neben die Sonne richtete, sah ich nach richtiger Einstellung des Prismas die Streifen *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *H'*, sowie einige mit kleinen Buchstaben bezeichneten Streifen. Indem ich ungefähr 50^{cm} vor die Spalte eine Bunsen'sche Gasflamme brachte, welche successive durch Alkali- und Erdsalze gefärbt wurde, welche am Platindrathe in die Flamme gebracht wurden, sah ich die Fundamentalerscheinungen, die der Spectralanalyse zu Grunde liegen, auf das Deutlichste, in Folge dessen ich das Mousson'sche Spectroskop bereits zu wiederholten Malen mit Vortheil bei qualitativen chemischen Analysen benutzte. Nach meinen Versuchen kann ich das Mousson'sche Spectroskop ganz besonders zum Gebrauch in physikalischen Cabinetten und chemischen Laboratorien von Lehranstalten empfehlen. Herr Mechanikus Schadewell (Dresden, Scheffelgasse 16) liefert ein Mousson'sches Spectroskop, Stativ und Röhre von Messing, für 10 Thaler; Spectroskope mit minder elegantem Stativ und Papprőhre sind noch wohlfeiler.

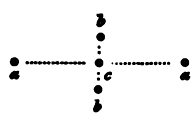
Ich habe es versucht, das Spectroskop noch wohlfeiler zu machen, indem ich die Spalte, die sehr genau gearbeitet sein muss, durch eine feste Ritze zu ersetzen suchte. Ein planparalleles Glasstück wurde auf der einen Seite nach dem Liebig'schen Versilberungsverfahren versilbert und in der dünnen Silberschicht eine Spalte mit einem scharfen Messer hergestellt. Diese Spalte leistete aber die gewünschten Dienste nicht, weil die Spaltenränder nicht scharf waren und deshalb bei den spectroskopischen Versuchen zur Entstehung der unangenehmen Zantedeschi'schen Streifen Veranlassung gaben. Ich bin jetzt damit beschäftigt, die verstellbare Spalte durch eine Stanniolspalte zu ersetzen und werde später über das Resultat meiner Versuche berichten.

Dr. Kahl.

XVIII. Ueber die Spectra chemisch verschiedener Körper. Von Dr. Ernst Mach.

Es scheint dem Verfasser dieser Notiz die moderne Untersuchung der Spectra chemisch verschiedener Körper sehr geeignet, um über manche Punkte der Atomentheorie ins Klare zu kommen. Der Verfasser erlaubt sich, da er als Nichtchemiker schwerlich in der Lage sein dürfte, die Sache weiter zu verfolgen, nachstehende Bemerkungen zu publiciren, welchen er übrigens nur einen problematischen Werth beilegt.

Die Spectra der Gase sind discontinuirlich, während feste Körper ein continuirliches Spectrum zeigen. In festen Körpern stehen die Molecüle *in Wechsel*wirkung, in Gasen aber nicht, wenn wir die wohlbegründete Theorie der Gase von Krönig und Clausius acceptiren. Der Umstand nun, dass die Spectra der Gase nur wenige helle Linien aufzuweisen haben, dürfte einen Schluss auf die Constitution der Gasmolecüle ermöglichen. Weil diese unter einander in keiner Wechselwirkung stehen, so gerathen offenbar beim Leuchten die einzelnen Gasmolecüle jedes für sich in stehende Schwingungen und diese Schwingungen zeigen nur einige wenige Wellenlängen. — Wäre das Gasmolecül ein Continuum oder bestünde es aus einer sehr grossen Anzahl einzelner Atome, so erhielte man für die Schwingung, die sich in diesem Molecül etabliren kann, eine partielle Differentialgleichung. Aus der blossen Form dieser Bewegungsgleichung ergiebt sich schon, dass sich im Allgemeinen eine unendliche Anzahl verschiedener Schwingungsweisen über einander legen werden. Es wird von besonderen Nebenumständen abhängen, ob daraus eine einfachere Bewegungsart resultirt. Die Erklärung des Spectrums mit wenigen hellen Linien, der Schwingung mit einer geringen Anzahl von Schwingungsperioden würde sich hieraus wenigstens nicht einfach ableiten lassen. — Nehmen wir aber an, ein Gasmolecül bestünde aus einer stabilen Gruppe von nur wenigen Körperatomen (s. Fig.), so erhält man für die Schwingung jedes einzelnen Atoms eine separate Differentialgleichung. Es treten dann so viele verschiedene Schwingungsweisen auf als Atome in der Gruppe vorhanden sind *). Wären die Vibrationsamplituden klein, d. h. die Erregung gering, so kann die auf ein Atom wirkende Kraft der Verschiebung aus der Gleichgewichtslage proportional gesetzt werden; es schwingt dann das Atom nach dem einfachen Gesetze $s = a \sin kt$. In diesem Falle hat jedes Atom nur eine einzige Schwingungsperiode, es giebt dem Spectrum nur eine einzige helle Linie, nur eine Wellenlänge. Die ganze Gruppe aber bietet dann so viele verschiedene Schwingungsperioden, so viele helle Linien im Spectrum, als sie verschiedene Lagerungsarten der Atome aufzuweisen hat. Die Gruppe (s. Fig.) z. B., wo die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Atome die gleiche Lagerung haben, zeigt drei verschiedene Schwingungsperioden (a, b, c). — Bei grösseren Amplituden, bei intensiverem Leuchten, geht die Kraft nicht mehr der Verschiebung proportional, die Schwingungen werden complicirter, das Spectrum, wie die Erfahrung lehrt, an hellen Linien reicher.



Einerseits nun scheinen sich die gewöhnlichsten Spectralphänomene durch die letzteren Annahmen leicht zu erklären, während andererseits das Spectrum eines Gases ein Mittel an die Hand geben würde, auf die Gruppirung der Atome eines Gasmolecüls zu schliessen. — Die Veränderung des Spectrums mit der Intensität des Leuchtens müsste das Ge-

*) Für die ganze Gruppe hat man natürlich so viele simultane Differentialgleichungen, als Atome in derselben enthalten sind.

setz kennen lehren, nach welchem die Atome auf einander wirken. Kann man doch schon aus dem Hinzutreten immer kürzerer und kürzerer Wellenlängen bei erhöhtem Glühen eines festen Körpers schliessen, dass die bewegende Kraft sehr rasch mit der Verschiebung der Atome aus der Gleichgewichtslage wächst.

Die Schwere wirkt auf alle Körper gleich. Dadurch wird die Annahme, dass es nur eine Art von Körperatomen giebt, einigermaassen wahrscheinlich. Geht man von dieser gewiss prüfenswerthen Hypothese aus, so ist durch das Atomgewicht die Anzahl der Atome bestimmt, welche ein Gasmolecül zusammensetzen. Das Spectrum gestattet einen Schluss auf die Gruppirung und einen ähnlichen die Krystallform. Die Untersuchung des Zusammenhanges von Atomgewicht, Spectrum und Krystallform chemisch einfacher Körper scheint sehr viel zu versprechen.

Chemisch verschiedene Gase würden sich dem Gesagten nach nur durch die Zahl und Gruppirung der Körperatome eines Gasmolecüls unterscheiden. Ein chemisch einfacher Körper würde dann definirt als ein Aggregat von Molecülen, deren Atome so stabil gruppirt sind, dass die Form der Gruppen aus jeder Verbindung wieder unverändert hervorgeht.

In der weiteren Verfolgung dieser Ideen dämmert wenigstens die Hoffnung auf, die Chemie in angewandte Mechanik verwandelt zu sehen.

Berichtigungen.

(Zeitschrift für Mathematik und Physik VII, 2.)

Seite 68 Zeile 6 v. u. statt angewende*ten* lese man angewende*te*,
" 68 " 7 v. o. sind die Grenzen der Integration zu vertauschen,
" 69 " 6 v. u. statt *log* 150000 lese man *log* 1500000,
" 69 " 4 v. u. statt $\frac{1}{52,626}$ lese man $\frac{1}{42,626}$,
" 70 " 5 v. o. statt $\frac{\log 600'000\,000}{600}$ lese man $\frac{\log 600'000\,000}{6000}$,
" 71 " 6 v. u. statt gleich nach dem Radius lese man gleich dem Radius,
" 72 " 8 v. o. ist auf der rechten Seite der Gleichung 8) das Zeichen $+\ldots$ hinzuzufügen,
" 72 sind die beiden mit * und ** bezeichneten Anmerkungen zu vertauschen,
" 73 Zeile 5 v. o. statt leicht gefunden lese man berechnet,
" 73 " 8 v. o. statt nur lese man um,
" 73 " 10 v. o. statt umschrieben lese man beschrieben,
" 73 " 25 v. o. statt wechseln*den* lese man wechseln*de*,
" 73 " 28 v. o. statt Hypothes*en* lese man Hypothes*e*,
" 73 " 11 v. u. statt welch*er* lese man welch*en*,
" 74 " 1 v. o. statt Erscheinungen lese man Einwirkungen.

Eldena, den 14. April 1862.

E. Segnitz.

X.

Zur analytischen Behandlung der Oberflächen zweiter Ordnung; insbesondere über homofocale und conjugirte Oberflächen.

Von Dr. Wilh. Fiedler,

Lehrer der darstellenden Geometrie an der Gewerbeschule in Chemnitz.

II. Anwendung auf die Theorie der homofocalen und conjugirten Flächen nach den Arbeiten von Chasles und Cremona.

19. Ueberall im Folgenden soll durch $K=0$ der imaginäre Kreis der unendlich entfernten Ebene, d. i.

$$K=\alpha^2 \sin^2\varphi+\beta^2 \sin^2\psi+\gamma^2 \sin^2\varkappa-2\beta\gamma(\cos\varphi-\cos\psi\cos\varkappa)$$
$$-2\gamma\alpha(\cos\psi-\cos\varkappa\cos\varphi)-2\alpha\beta(\cos\varkappa-\cos\varphi\cos\psi)$$

und durch

$$K=0$$

der über diesem imaginären Kreise stehende Kegel vom Scheitel (x, y, z), der Asymptotenkegel einer aus jenem Punkte beschriebenen Kugel, d. i.

$$K=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,$$

es sollen ferner durch die Symbole

$S=0$, $S_1=0$ etc. $\Sigma=0$, $\Sigma_1=0$ etc. $U=0$, $U_1=0$ etc. $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ etc., überhaupt Oberflächen des zweiten Grades ausgedrückt werden, und zwar mögen die Symbole Σ, Ω, K insbesondere für Tangentialcoordinaten, also bei homofocalen Flächen, die Symbole S, U, K aber bei Punktcoordinaten, also bei conjugirten Flächen gebraucht werden; endlich mögen k, $k' \ldots$, $l, l' \ldots$, $m, m' \ldots$, $\varkappa, \varkappa_1 \ldots$, $\lambda, \lambda_1 \ldots$, $\mu, \mu_1 \ldots$ Constanten sein, wie sie in den Formeln als individualisirende Parameter auftreten. Dann ist es durch das Vorhergehende begründet, dass durch

$$\Sigma+kK=0,\quad \Sigma+k_1 K=0$$

Oberflächen zweiten Grades repräsentirt werden, welche mit der Oberfläche $\Sigma=0$ homofocal sind, während durch

$$S+\lambda K=0,\quad S+\lambda_1 K=0$$

Oberflächen zweiten Grades dargestellt sind, welche mit der Fläche $S=0$ conjugirt genannt wurden. Aus dieser Bezeichnungsweise gehen die zahlreichen Ergebnisse, welche die Theorie dieser beiden Flächenfamilien schon jetzt umfasst, mit Leichtigkeit hervor. Sie sollen in den nachfolgenden Entwickelungen in der Art zusammen gestellt werden, dass sich jedem der drei Hauptsätze über die homofocalen Flächen der entsprechende über die conjugirten Flächen anschliesst und dass die daraus in beiden Theorien entspringenden specielleren Sätze darauf folgen; schliesslich mag überall auf die Form der entsprechenden Sätze in der Theorie der sphärischen Kegelschnitte kurz hingewiesen werden. Weil hier überall nur von Oberflächen zweiten Grades, ihren gemeinschaftlichen Developpabeln und ihren Durchschnittscurven die Rede sein soll, so mag die nähere Bezeichnung der Flächen als solche im Folgenden zur Kürzung des Ausdrucks weggelassen werden.

20. Erster Hauptsatz: Wenn zwei homofocale Oberflächen A, A_1 und eine beliebige andere Oberfläche B gegeben sind und den beiden respective A und B, A_1 und B gemeinschaftlichen developpabeln Flächen die Oberflächen C, C_1 respective eingeschrieben werden, so ist die diesen letzteren beiden Oberflächen gemeinsam umschriebene Developpable zugleich zwei Oberflächen umschrieben, von denen die eine zu den beiden ersten Oberflächen A, A_1, die andere aber zur dritten Oberfläche B homofocal ist.

Die homofocalen Oberflächen A, A_1 können durch die Gleichungen

$$A) \equiv \Sigma + kK = 0, \quad A_1) \equiv \Sigma + k_1 K = 0,$$

die Oberfläche B durch

$$B) \equiv \Omega = 0$$

dargestellt werden. Dann ist

$$C) \equiv \mu\Omega + (\Sigma + kK) = 0, \quad C_1) \equiv \mu_1\Omega + (\Sigma + k_1 K) = 0$$

die Form, welche den Gleichungen der Flächen C und C_1 zukommt, und man erhält

$$\mu_1 C - \mu C_1 \equiv \mu_1(\Sigma + kK) - \mu(\Sigma + k_1 K) = (\mu_1 - \mu)\Sigma + (\mu_1 k - \mu k_1)K,$$
$$C - C_1 \equiv (\mu - \mu_1)\Omega + (k - k_1)K,$$

Formeln, welche den Beweis des obigen Satzes geben.

Auf Grund der Relation

$$k_1 C - kC_1 \equiv (k_1\mu - k\mu_1)\Omega + (k_1 - k)\Sigma$$

darf man hinzufügen, dass jene den Oberflächen C, C_1 gemeinschaftliche developpable Fläche auch einer dritten Fläche noch umschrieben ist, deren mit der Fläche B gemeinschaftlicher Developpabeln zugleich eine dem homofocalen Flächensystem A, A_1 angehörige Fläche eingeschrieben ist; oder, wie M. Chasles den Satz ausdrückt, den er als seinen dritten Hauptsatz bezeichnet: Wenn drei homofocale Oberflächen A, A_1, A_2 und eine beliebige Oberfläche B gegeben sind und in die durch B und A, B und A_1 respective bestimmten developpabeln Flächen die Oberflächen C, C_1 respective eingeschrieben werden, so umhüllen die von den Flächen B und A_2, C und C_1 respective bestimmten developpabeln Flächen eine und dieselbe Oberfläche C_2.

Wird derselbe Beweis in Punktcoordinaten interpretirt, so stellen die Gleichungen

$$A) \equiv S + \lambda K = 0, \quad A_1) \equiv S + \lambda_1 K = 0$$

conjugirte Oberflächen dar, die beliebige B) wird durch

$$B) \equiv U = 0$$

repräsentirt; es ist

$$C) \equiv \nu U + (S + \lambda K) = 0, \quad C_1) \equiv \nu_1 U + (S + \lambda_1 K) = 0$$

die Form, welche den Gleichungen von solchen Oberflächen C und C_1 zukommt, die respective die Durchdringungscurven von A und B, von A_1 und B in sich enthalten, und man erhält

$$\nu_1 C - \nu C_1 \equiv \nu_1 (S + \lambda K) - \nu (S + \lambda_1 K) = (\nu_1 - \nu) S + (\nu_1 \lambda - \lambda_1 \nu) K,$$

$$C - C_1 = (\nu - \nu_1) U + (\lambda - \lambda_1) K,$$

Formeln, in denen der Satz enthalten ist: Wenn zwei bezüglich eines Punktes a conjugirte Oberflächen A, A_1 und eine beliebige dritte Oberfläche B gegeben sind, und durch die Durchschnittscurven der letzteren mit den beiden ersteren respective zwei Oberflächen C, C_1 gelegt werden, so lassen sich durch die Durchdringungscurve dieser beiden neuen Oberflächen zwei Oberflächen legen, von denen die eine zu den Flächen A, A_1, die andere zu der Fläche B, immer rücksichtlich des Punktes a, conjugirt ist.

Die Relation

$$\lambda_1 C - \lambda C_1 \equiv (\lambda_1 \nu - \lambda \nu_1) U + (\lambda_1 - \lambda) S$$

begründet ferner den Zusatz, dass durch jene Durchdringungscurve der Flächen C, C_1 sich eine dritte Oberfläche legen lässt, deren Durchschnittscurve mit der Fläche B zugleich auf einer zu dem conjugirten Flächensystem A, A_1 gehörigen Fläche enthalten ist. Oder analog der Fassung von M. Chasles ausgesprochen: Wenn durch die Schnittcurven einer Oberfläche B mit zweien von drei bezüglich eines Punktes a conjugirten Oberflächen A und A_1 respective die Oberflächen C und C_1 gelegt werden, so sind die Durchdringungscurve dieser letzteren Flächen und die der Fläche B mit der dritten conjugirten A_2 auf einer und derselben Oberfläche.

21. Folgerungen. Die in diesen Sätzen enthaltenen Beziehungen sind so allgemein, dass eine Fülle der Specialitäten sich aus denselben ergiebt. Es mag nützlich sein, sich in einem Ueberblick zuerst ihre Mannichfaltigkeit zu vergegenwärtigen, um dann erst die einzelnen daraus springenden Ergebnisse darzulegen.

In *der Familie der homofocalen* Flächen, also bei der Interpretation nach Tangentialcoordinaten, ist es statthaft, dass die Fläche A in einen Kegelschnitt degenerire und es können ferner zwei Punkte oder auch ein Punkt als specielle Fälle der Kegelschnittsgestalt aufgefasst werden; dabei kann endlich dieser Kegelschnitt als auf der Oberfläche A selbst liegend gedacht werden. Man kann voraussetzen, dass die homofocalen Oberflächen A, A_1 oder eine von beiden sich auf Kegelschnitte reduciren und sie können insbesondere die Focalcurven der nämlichen Oberfläche sein; man kann die Oberflächen C, C_1 als die Berührungscurven zweier aus demselben Centrum den Flächen A, A_1 umschriebenen Kegel, oder die Fläche C als reducirt auf den Scheitel eines Kegels ansehen, der der Fläche A und der Fläche B, die als sich berührend gesetzt sind, nach demselben Kegelschnitt umschrieben ist; in diesem Falle kann jene Spitze als der Pol der Berührungscurve der Flächen A und B benannt werden. Eine dieser Flächen C, C_1 oder beide können sodann als mit Kegelschnittscurven der gemeinschaftlichen developpabeln Fläche von B und A_1 zusammenfallend gedacht werden; wenn dann die Fläche B zugleich eine Kugel und somit dem imaginären unendlich entfernten Kreise umschrieben ist, so kann die Fläche C zu einer mit B concentrischen Kugel werden, und man kann noch specieller voraussetzen, dass sie sich auf das Centrum der Kugel B reducirt. Endlich können mehrere dieser Voraussetzungen zugleich stattfinden.

Dagegen ist es in der Familie der in Bezug auf einen Punkt a conjugirten Flächen, d. h. bei der Interpretation nach Punktcoordinaten, statthaft, die nachfolgenden Voraussetzungen zu machen. Die Fläche B kann eine Kegelfläche und noch specieller eine der Fläche A umschriebene Kegelfläche sein; sie kann sich auf zwei Ebenen reduciren, welche speciell die Fläche A berühren und endlich auch in eine einzige zusammenfallen können; man darf hinzufügen, dass diese mit der Ebene des Unendlichen zusammenfallen und dass sie speciell den Punkt a in sich enthalten kann, rücksichtlich dessen die Flächen einander conjugirt sind, oder endlich, dass dieser Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen angehört. Wird dieser Punkt a als das gemeinschaftliche Centrum der Flächenfamilie angenommen, so ergeben sich noch andere Specialitäten. Es können ferner die Flächen A, A_1 entweder beide zugleich oder einzeln zu Kegelflächen degeneriren, und insbesondere als die conjugirten Cylinder einer Fläche oder als conjugirte Kegelflächen derselben überhaupt erscheinen. Die Flächen C, C_1 können die den Schnittcurven derselben Ebene mit den Flächen A, A_1 entsprechenden Berührungskegel sein, oder die Flächen B und A können als sich berührend und die Fläche C als die Ebene ihrer Berührung angesehen werden. Man kann ferner die Oberfläche C als einen der vier Kegel zweiten Grades setzen, welche durch die Durchschnittscurve der Flächen B und A gelegt werden können; alsdann wird, wenn B eine Kugel und A der Asymptotenkegel derselben ist, C eine mit B concentrische Kugel sein, die man speciell als auf ihren Mittelpunkt reducirt, d. i. vom Radius Null, voraussetzen darf. Die Gestalt der Sätze, welche aus diesen speciellen Voraussetzungen hervorgehen, kann unter Beachtung der im Artikel 19 gegebenen Specialbedeutungen der allgemeinen Symbolformeln leicht gewonnen werden.

22. Sei, um mit den speciellen Folgerungen des Satzes über homofocale Flächen zu beginnen, zuerst die Fläche B ein Kegelschnitt, den man sich auch auf einer der Flächen A, A_1 denken darf, so hat man den Satz: 1) Sind den durch einen Kegelschnitt B mit je einer der homofocalen Flächen A, A_1 bestimmten developpabeln Flächen die Oberflächen C, C_1 eingeschrieben, so ist die diesen letzteren beiden gemeinschaftliche developpable Fläche zugleich einer mit A, A_1 homofocalen und einer anderen Fläche umschrieben, welche den Kegelschnitt B zur Focalcurve hat*).

Sei sodann die Oberfläche B in zwei Punkte p, p_1 degenerirt, so folgt: 2) Wenn zweien homofocalen Oberflächen A, A_1 von den Punkten p, p_1 respective Kegelflächen umschrieben sind und diesen letzteren je eine einem die Oberflächen C, C_1 eingeschrieben werden, so ist die den Flächen C, C_1 gemeinschaftliche Developpable auch einer zu A, A_1 homofocalen Fläche und einer Rotationsfläche umschrieben, welche die Punkte p, p_1 zu Brennpunkten hat.

Hierbei kann man ferner als die Flächen A, A_1 die Focalcurven einer und derselben Oberfläche denken.

Fallen beide Punkte p, p_1 zusammen, so folgt: 3) Wenn die Flächen C, C_1 den homofocalen Flächen A, A_1 eine einer nach den Berührungscurven eingeschrieben sind, welche zwei umschriebene concentrische Kegel auf diesen bestimmen, so ist die denselben gemeinsam umschriebene developpable Fläche zugleich einer mit A, A_1 homofocalen Fläche und einer mit jenen Kegelflächen concentrischen Kugel umschrieben.

Die Flächen C, C_1 werden als die Berührungscurven zweier concentrischer Kegel mit den Flächen A, A_1 gedacht und man hat: 4) Die developpable Fläche, welche von den Berührungscurven zweier concentrischer Kegel mit den homofocalen Flächen A, A_1 bestimmt wird, ist zugleich einer der homofocalen Fa-

---

*) Die Folgerungen, welche sich aus den beiden Zusätzen der Haupttheoreme in Art. 20 ergeben, sind leicht hinzuzufügen, sollen aber der Kürze wegen fortgelassen werden; ich komme für einige besonders beachtenswerthe Resultate derselben weiterhin darauf *zurück (Art. 26)*.

milie angehörigen Fläche und einer Kugel umschrieben, « mit den beiden Kegelflächen concentrisch ist.

Wenn die Flächen B und A einander nach einem Kegelschnitt rühren und die Fläche C auf den Pol dieser Berührung reducirt ist, so hält man: 5) Sind zwei homofocale Flächen A, A_1 und eine d ersteren nach einer Ebene vom Pol c eingeschriebene Fläc B gegeben, wird sodann der von B mit A_1 bestimmten dev loppabeln Fläche die Fläche C_1 eingeschrieben und aus de Pol c an dieselbe ein Berührungskegel gelegt, so gehe durch die entsprechende Berührungscurve zwei die Fläcł C_1 in ihr berührende Oberflächen, deren eine mit A, A_1, di andere mit B homofocal ist.

Ist die Fläche B zu einem auf A gelegenen Kegelschnitt degeneri so gilt der Satz: 6) Sind zwei homofocale Flächen A, A_1, ur ein ebener Schnitt der ersten B mit seinem Pol c gegebe wird sodann der von B mit A_1 bestimmten developpabe Fläche die Fläche C_1 eingeschrieben und dieser von de genannten Pol c aus ein Kegel umschrieben, so ist die B rührungscurve desselben überdies seine Berührungscurv mit zwei anderen Oberflächen, deren eine mit A, A_1 hom focal ist, während die andere den Kegelschnitt B zur Foca curve hat.

Ist dagegen A selbst einer der Focalkegelschnitte von A_1 und sind (Punkte p, p_1 zwei Punkte desselben, die Fläche C aber in den Pol ihr Sehne degenerirt, so folgt: 7) Wenn einer Oberfläche A aus zw Punkten p, p_1 ihrer Focalcurve A_1 Kegel umschrieben we den, so umhüllen diese eine Oberfläche C_1, welche mit de Pol c der Sehne pp_1 der Focalcurve A einen Berührungskeg bestimmt, der zweien Flächen mit C_1 nach derselben Cur umschrieben ist, von denen die erste mit A_1 homofocal is während die zweite die Punkte p, p_1 zu Brennpunkten hat.

Sei ferner die Fläche C_1 einer der vier Kegelschnitte, welche d von B mit A_1 bestimmten developpabeln Fläche angehören — eine Vorau setzung, die auch in 6) statthaft ist —, so entspringt daraus: 8) Jed Kegelschnitt der developpabeln Oberfläche, die durch ei Fläche A_1 und eine Fläche B bestimmt ist, welche der zu homofocalen Fläche A eingeschrieben wird, liegt zuglei auf einer mit A und A_1 und auf einer mit B homofocalen Obe fläche; und beide homofocalen Oberflächen sind in den Keg eingeschrieben, der den gedachten Kegelschnitt der dev loppabeln Fläche zur Basis hat und mit dem den Flächen und A nach ihrer Berührungscurve umschriebenen Kegel co centrisch ist.

23. Man nehme an, dass die Oberfläche B in zwei auf der Oberfläche A gelegene Punkte p, p_1 übergeht, dass somit die durch A und B bestimmte developpable Fläche sich auf die beiden Tangentialebenen von A in diesen Punkten reducirt; und setze überdies voraus, dass die Fläche C in die Durchschnittlinie dieser Ebenen degenerire, so hat man: 9) Wenn aus zwei Punkten p, p_1 einer Oberfläche A einer homofocalen Fläche A_1 Kegelflächen*) umschrieben sind und in diese eine beliebige Oberfläche C_1 eingeschrieben wird, so liegen die Berührungspunkte der Tangentialebenen der letzteren Fläche, welche zugleich die Durchschnittslinie der in den Punkten p, p_1 an die Oberfläche A gelegten Tangentialebenen enthalten, auf zwei Oberflächen, welche in diesen Punkten von denselben Ebenen berührt werden und deren erste zur Familie der homofocalen Flächen A, A_1 gehört, während die zweite die Punkte p, p_1 zu Brennpunkten hat.

Sei endlich vorausgesetzt, dass die Fläche B eine Kugel ist, so kann dieselbe als dem unendlich entfernten imaginären Kreise umschrieben und dieser selbst daher als die Fläche A betrachtet werden; jede Oberfläche C, welche der durch A und B bestimmten developpabeln Fläche eingeschrieben ist, ist eine mit B concentrische Kugel. Man hat zunächst: 10) Wenn der durch eine Kugel B und die Oberfläche A_1 bestimmten developpabeln Fläche eine Fläche C_1 eingeschrieben wird, so ist die durch sie und eine mit B concentrische Kugel C bestimmte developpable Fläche auch einer mit A_1 homofocalen Fläche umschrieben.

Lässt man die Kugel C auf das Centrum von B sich reduciren, so folgt: 11) Der einer Fläche C_1, welche mit der Kugel B und einer beliebigen Oberfläche A_1 einer und derselben developpabeln Fläche eingeschrieben ist, aus dem Centrum dieser Kugel umschriebene Kegel berührt längs derselben Berührungscurve ausser der Fläche C_1 auch eine zu A_1 homofocale Fläche.

Ist endlich in diesem Falle die Fläche C_1 ein Kegelschnitt in der durch B und A_1 bestimmten developpabeln Fläche, so schliesst man: 12) Jeder der Kegelschnitte einer developpabeln Fläche, die zugleich einer Kugel und einer Oberfläche A_1 umschrieben ist, liegt auf einer zu A_1 homofocalen Fläche und der nach ihm dieser letzteren umschriebene Kegel ist mit der Kugel concentrisch.

24. Eben so reiche und eigenthümliche Folgerungen gestattet der auf

*) Diese Kegel schneiden sich in Kegelschnitten, und man kann einen derselben als Fläche C_1 nehmen.

die *conjugirten Flächenfamilien* bezügliche allgemeine Satz. Es sollen zunächst nur einige von denen hier aufgeführt werden, bei welchen über die Lage des Punktes a, bezüglich dessen die Flächen conjugirt sind, keinerlei specielle Voraussetzung gemacht wird. Die Oberfläche B sei zuerst auf das System zweier Ebenen E, E_1 reducirt: 1) *Wenn durch die respectiven Schnittlinien zweier bezüglich eines Punktes a conjugirten Oberflächen A, A_1 die Flächen C, C_1 eine durch eine gelegt werden, so ist die gemeinschaftliche Durchschnittscurve dieser letzteren zugleich auf einer zur Familie der conjugirten Flächen A, A_1 gehörigen und auf einer anderen Fläche enthalten, welche a zum Brennpunkt und die Ebenen E, E_1 zu bezüglichen Directionsebenen hat.*

In dem speciellen Falle, wo die beiden Ebenen E, E_1 zusammenfallen ist die Fläche, welche a zum Brennpunkt und diese Ebene zur bezüglichen Directionsebene hat, eine *Rotationsfläche*. Wird endlich in demselben Falle diese Ebene E als mit der unendlich entfernten Ebene zusammenfallend vorausgesetzt, so hat man den Satz: 2) *Die Durchdringungscurve zweier Flächen C, C_1, welche zweien bezüglich des Punktes a conjugirten Flächen A, A_1 ähnlich und ähnlich gelegen sind, gehört zugleich einer Fläche der conjugirten Familie A, A_1 und einer Kugel an, welche den Punkt a zum Centrum hat.*

Sodann gehöre der Punkt a, rücksichtlich dessen die Flächen conjugirt sind, der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E, E_1 oder der einzigen Ebene, in welche beide zusammenfielen, selbst an. Man hat: 3) *Wenn man durch die respectiven Durchschnittscurven zweier bezüglich des Punktes a conjugirten Flächen A, A_1 mit den durch diesen Punkt gehenden Ebenen E, E_1 die Oberflächen C, C_1 legt, so gehört deren Durchdringungscurve zugleich einer Fläche der conjugirten Familie A, A_1 und einem Kegel zweiten Grades an, der den Punkt a zum Scheitel und die Ebenen E, E_1 zu cyclischen Ebenen hat.*

In dem speciellen Falle, wo die Ebenen E, E_1 in eine einzige Ebene übergehen, wird diese Kegelfläche zum *Rotationskegel* vom Scheitel a, und seine Achse ist normal zur Ebene E.

Sei ferner A ein zu A_1 conjugirter Kegel, B das System zweier Tangentialebenen desselben, und C die Ebene ihrer Berührungsseiten, so hat man: 4) *Ist eine Oberfläche A_1 und ein ihr bezüglich des Punktes a conjugirter Kegel gegeben, so schneiden zwei Tangentialebenen dieses letzteren dieselbe in zwei Kegelschnitten, durch welche eine Fläche C_1 gelegt werden kann, welche längs eines und desselben Kegelschnittes eine zur conjugirten Familie A, A_1 gehörige Fläche berührt und eine* andere Fläche überdies, welche den Punkt a zum Focalpunkt und das System der Berührungsebenen von A zu bezüglichen Directionsebenen hat; die Ebene jenes Kegelschnittes ist aber die Ebene der Berührungsseiten des Kegels A.

Sei endlich B eine Kugelfläche vom Centrum a, und A ihr Asymptotenkegel, so ist C eine mit B concentrische Kugel und es folgt: 5) Wenn zwei concentrische Kugeln B, C und eine Oberfläche A_1 gegeben sind, und durch die Durchschnittscurve von B und A_1 eine Oberfläche C_1 gelegt wird, so gehört die Durchschnittscurve der Flächen C und C_1 zugleich einer bezüglich des Centrums jener Kugeln mit A_1 conjugirten Fläche an.

Reducirt sich aber endlich die zweite Kugel C auf das Centrum der ersten, so hat man: 6) Wenn durch die Durchschnittscurve einer Kugel B mit einer Oberfläche A_1 eine Oberfläche C_1 gelegt ist, so lässt sich eine andere Oberfläche bestimmen, welche mit A_1 concentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen und überdies der Fläche C_1 bezüglich des Centrums der Kugel B conjugirt ist.

25. Es scheint überflüssig, den Ergebnissen beider Theorien mit gleichmässiger Aufmerksamkeit auf das sphärische Feld oder das der Kegelflächen zweiten Grades nachzugehen; es mag genügen, anzuführen, dass die Hauptsätze sich direct auf sphärische Kegelschnitte übertragen lassen, und dazu einige der speciellen aus der Theorie der homofocalen sphärischen Kegelschnitte nach M. Chasles zu stellen.

Der sphärische Kegelschnitt B sei in ein Punktpaar degenerirt und noch specieller, in einen Punkt; dem entspricht der Satz: 1) Wenn von einem Punkte der Kugelfläche an zwei homofocale Kegelschnitte A, A_1 auf derselben die Tangenten gelegt sind (natürlich Bögen grösster Kreise) und für die Berührungspunkte derselben den ersteren einer einem zwei neue sphärische Kegelschnitte C, C_1 eingeschrieben werden, so ist das diesen letzteren gemeinschaftlich umschriebene Vierseit zugleich einem Kegelschnitt der homofocalen Familie A, A_1 und einem Kreise umschrieben, der in jenem Punkte sein sphärisches Centrum hat. Ueberdies liegen je zwei Gegenecken des fraglichen Vierseits auf einem mit dem gegebenen homofocalen Kegelschnitt und die entsprechende Diagonale des Vierseits ist die Polare desselben Punktes in Bezug auf diesen.

Oder der Kegelschnitt B sei mit A in doppelter Berührung und C der Pol derselben; dann gilt der Satz: 2) Wenn zwei homofocale sphärische *Kegelschnitte* A, A_1 und ein Kegelschnitt B gegeben sind, welcher A doppelt berührt, so liegen die Berührungspunkte der Tangenten, welche man vom Pol jener Berührung aus an einen mit B und A_1 demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt C_1 zieht, auf zwei in denselben Punkten von ihnen berührten Kegelschnitten, von denen der eine mit A, A_1, der andere mit B homofocal ist.

Reducirt sich in diesem Falle der Kegelschnitt B auf zwei dem Kegelschnitt A angehörige Punkte, und C_1 auf eine Diagonale des von ihnen aus dem Kegelschnitt A_1 umschriebenen Vierseits, so findet man 3), dass zwei Gegenecken dieses Vierseits auf zwei Kegelschnitten liegen, welche in ihnen selbst die Bögen grösster Kreise berühren, die von da nach dem Pol der jenen beiden Punkten auf A entsprechenden Sehne gelegen sind; zwei Kegelschnitten, von den der eine mit A, A_1 homofocal ist und der andere die gedachten Punkte zu Brennpunkten hat.

Ist der Kegelschnitt B ein Kreis, so dass er eine doppelte Berührung mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise hat, so kann dieser letztere als der Kegelschnitt A betrachtet werden, und man erhält den Satz: 4) Sind zwei Kugelkreise B, C von demselben sphärischen Centrum und ein Kegelschnitt A_1 gegeben, und beschreibt man in das den Curven B, A_1 gemeinsam umschriebene Vierseit einen Kegelschnitt C_1, so ist das dem Kreise C und dem Kegelschnitt C_1 umschriebene Vierseit auch zugleich einem zu A_1 homofocalen Kegelschnitt umschrieben. Dabei darf der Kreis C als vom Radius Null oder auf das Centrum von B reducirt genommen werden.

Ist endlich C_1 ein Gegeneckenpaar des den Curven B und A_1 umschriebenen Vierseits, so entspringt der Satz: 5) Wenn ein sphärisches Vierseit einem Kegelschnitt A_1 und einem Kreise B umschrieben ist, so sind zwei seiner Gegenecken auf einem zu A_1 homofocalen Kegelschnitt und die entsrechenden Tangenten dieses letzteren gehen durch das sphärische Centrum des Kreises.

M. Chasles macht zu diesem Satze die schöne Bemerkung: Wenn der Kreis B und der Kegelschnitt A_1 einander im Punkte d berühren, so wird das umschriebene Vierseit zu einem Dreiseit; die der Tangente in d angehörigen Ecken desselben liegen als Gegenecken des Vierseits auf einem mit A_1 homofocalen Kegelschnitt und die entsprechenden Tangenten verbinden sie mit dem Centrum des Kreises; die dritte Ecke des Dreiseits und der Berührungspunkt d als die anderen Gegenecken liegen nicht minder auf einem homofocalen Kegelschnitt, dessen entsprechende Tangenten *nach demselben* Centrum gehen. Dieser Kegelschnitt ist durch den Punkt *d allein bestimmt*, so, dass für unendlich viele den Kegelschnitt A_1 in d

berührende Kreise der Ort der Scheitel sphärischer Winkel, die je einem von ihnen und dem Kegelschnitt umschrieben sind, ein mit A_1 homofocaler Kegelschnitt ist. Der Umstand, dass die der Tangente in d entsprechenden Ecken des umschriebenen Dreiseits auf einem mit A_1 homofocalen Kegelschnitt liegen, führt zur Kenntniss einer schönen Eigenschaft des Polygons von kleinstem Umfang bei gegebener Seitenzahl, welches einem sphärischen Kegelschnitt umschrieben werden kann: Seine Ecken liegen auf einem Kegelschnitt, welcher zu dem gegebenen homofocal ist.

26. Endlich können aus den im Art. 20 aus den Gleichungen

$$k_1 C - k C_1 \equiv (k_1 \mu - k \mu_1) \Omega + (k_1 - k) \Sigma,$$
$$\lambda_1 C - \lambda C_1 \equiv (\lambda_1 \nu - \lambda \nu_1) U + (\lambda_1 - \lambda) S$$

abgeleiteten Zusätzen des ersten Hauptsatzes einige specielle Folgerungen gezogen werden. Zuerst für die Theorie der homofocalen Oberflächen beispielsweise die folgenden.

Die Fläche B sei auf einen Punkt reducirt. Wenn dreien homofocalen Flächen A, A_1, A_2 von demselben Punkte aus Kegel umschrieben und den beiden ersten nach den bezüglichen Berührungscurven die Oberflächen C, C_1 eingeschrieben sind, so umhüllt die durch diese letzteren bestimmte developpable Fläche zugleich eine Oberfläche C_2, welche der dritten homofocalen Fläche A_2 nach ihrer Berührungscurve eingeschrieben ist.

Dabei können die Flächen C, C_1 als auf die Berührungscurven der bezüglichen umschriebenen Kegel reducirt gedacht werden; man kann überdies die Fläche B als einen Punkt der Oberfläche A voraussetzen, so dass sich die eine Berührungscurve auf einen Punkt reducirt, welchem als Berührungskegel die Tangentialebene entspricht.

Sodann für die Theorie der conjugirten Oberflächen.

Die Fläche B sei eine Ebene. Wenn zweien von drei in Bezug auf denselben Punkt conjugirten Oberflächen A, A_1 nach den mit einer Ebene B bestimmten Schnittcurven die Oberflächen C, C_1 eingeschrieben werden, so kann durch die Durchschnittscurve derselben eine Oberfläche C_2 gelegt werden, welche der dritten conjugirten Fläche A_2 nach ihrer Schnittcurve mit jener Ebene eingeschrieben ist.

Nimmt man an, dass die conjugirten Flächen A, A_1, A_2 speciell conjugirte Kegel, die Ebene B die Ebene ihrer Mittelpunkte, die Flächen C und C_1 aber die Systeme je zweier an die Kegel A, A_1 gelegten Tangentialebenen sind, so erkennt man, dass diese Tangentialebenen sich überdies in vier geraden Linien schneiden, welche Erzeugende einer und derselben Kegelfläche zweiten Grades C_2 sind, die überdies die dritte Kegelfläche A_2 *längs der von der Ebene B* in ihr bestimmten Erzeugenden berührt.

Endlich für die Theorie der homofocalen sphärischen Kegelschnitte.

Der Kegelschnitt B sei ein Punkt. Wenn man durch die Berührungspunkte der von einem Punkte der Kugelfläche an zwei von dreien homofocalen Kegelschnitten A, A_1 Tangenten zieht und denselben nach diesen Tangenten zwei andere Kegelschnitte C, C_1 einschreibt, so umhüllt das den beiden letzteren gemeinschaftlich umschriebene Vierseit zugleich einen Kegelschnitt C_2, der dem dritten homofocalen Kegelschnitt A_2 nach den Berührungspunkten der ihm entsprechenden Tangenten eingeschrieben ist. Hierbei dürfen die eingeschriebenen Kegelschnitte C, C_1 als in die Paare der Berührungspunkte auf den homofocalen Kegelschnitten A, A_1 degenerirend gedacht werden.

27. **Zweiter Hauptsatz.** Wenn in die eine der von zwei homofocalen Oberflächen A, A_1 respective mit einer beliebigen dritten Oberfläche B bestimmten developpabeln Flächen eine Oberfläche C eingeschrieben wurde, so kann in die andere stets eine zu C homofocale Fläche C_1 eingeschrieben werden.

Die homofocalen Flächen A, A_1 repräsentiren die Gleichungen

$$A) \equiv \Sigma + kK = 0, \quad A_1) \equiv \Sigma + k_1 K = 0,$$

die Oberfläche B sei

$$B) \equiv \Omega = 0.$$

Dann ist die Form der Gleichung der Fläche C, welche mit A und B derselben developpabeln Fläche eingeschrieben ist, nothwendig

$$C) \equiv \mu\Omega + (\Sigma + kK) = 0.$$

Durch Multiplication der Gleichung B mit μ und Addition des Products zu A_1) findet man aber

$$\mu B + A_1) \equiv \mu\Omega + (\Sigma + k_1 K),$$

d. i.

$$\equiv C_1) \equiv C + (k - k_1) K,$$

d. h. eine der durch B und A_1 bestimmten developpabeln Fläche eingeschriebene Oberfläche ist mit C homofocal, was zu beweisen war.

Wenn die Interpretation in Punktcoordinaten an Stelle der Interpretation in Tangentialcoordinaten tritt, so leiten die Gleichungen

$$A) \equiv S + \lambda K = 0, \quad A_1) \equiv S + \lambda_1 K = 0,$$

welche zwei conjugirte Oberflächen repräsentiren, mit der einen beliebigen Oberfläche

$$B) \equiv U = 0$$

zu der Formel

$$C) \equiv \nu U + (S + \lambda K) = 0$$

als Gleichung einer Fläche C, welche die Durchdringungscurven der *Flächen A und B* enthält, und man erkennt die Identität

$$vB + A_1) \equiv vU + (S + \lambda_1 K)$$
$$\equiv C_1) \equiv C + (\lambda - \lambda_1) K,$$

d. h. eine durch die Schnittcurve der Flächen A_1 und B gelegte Fläche C_1 ist mit C conjugirt. Man hat somit den Satz: Wenn durch die Durchdringungscurve, welche von einer beliebigen Oberfläche B mit der ersten von zwei bezüglich eines Punktes a conjugirten Flächen A, A_1 gebildet wird, eine Oberfläche C gelegt ist, so kann durch die Durchdringungscurve derselben Oberfläche B mit der anderen conjugirten Fläche A_1 eine Oberfläche C_1 gelegt werden, welche bezüglich desselben Punktes a mit der Fläche C conjugirt ist.

28. Von den Folgerungen dieser Sätze mögen die nachstehenden hier Platz finden, zunächst die auf homofocale Oberflächen bezüglichen.

Die Oberfläche B sei auf einen Kegelschnitt reducirt, oder eine ihrer Hauptachsen verschwindend klein; man erhält: 1) Wenn in die eine von zwei developpabeln Flächen, welche durch einen Kegelschnitt B und je eine der homofocalen Flächen A, A_1 bestimmt werden, eine Oberfläche C eingeschrieben ist, so kann in die andere eine zu C homofocale Oberfläche C_1 eingeschrieben werden.

Dieser Kegelschnitt kann ferner als ein auf der Fläche A oder auf A_1 gelegener, oder als die Vereinigung von zwei Punkten, oder endlich als ein Punkt, in welchem zwei Punkte zusammenfallen, gedacht werden — abermals speciell auf der Oberfläche selbst —; die letztere Voraussetzung liefert den Satz: 2) Wenn zwei homofocalen Oberflächen A, A_1 von demselben Punkte p aus Kegelflächen umschrieben sind und der ersten von ihnen nach der betreffenden Berührungscurve eine Oberfläche C eingeschrieben wird, so kann der zweiten nach ihrer Berührungscurve eine mit C homofocale Oberfläche C_1 eingeschrieben werden.

Man kann überdies die Fläche A als eine der Focalcurven von A_1 und den Punkt p als einen Punkt in ihrer Ebene voraussetzen; dies giebt: 3) Wenn der Focalcurve A der Fläche A_1 ein Kegelschnitt C eingeschrieben ist, so kann dieser Oberfläche A_1 eine Fläche C_1 eingeschrieben werden, für welche derselbe eine Focalcurve ist; der beiden Flächen nach ihrer gemeinschaftlichen Berührungscurve umschriebene Kegel hat den Pol der Berührungssehne der beiden Focalcurven zum Mittelpunkt.

Endlich kann auf demselben Wege fortschreitend der Kegelschnitt C in zwei Punkte des Kegelschnitts A degeneriren und man findet sodann: 4) Wenn eine Fläche A_1 und eine ihrer Focalcurven A gegeben sind, so sind irgend zwei Punkte dieser Curve Brennpunkte einer in A_1 eingeschriebenen Rotationsfläche und der Scheitel des diesen Flächen nach ihrer Berührungscurve umschriebenen Kegels ist der Pol der jene beiden Punkte der Focalcurve A verbindenden Sehne. Dies ist ein schon in den *Comptes rendus* vom Jahre 1843, Bd. XVI veröffentlichter Satz.

Andererseits kann im Satz 2) die Voraussetzung gemacht werden, dass die eingeschriebene Oberfläche C auf die Berührungscurve der Fläche A mit dem umschriebenen Kegel sich reducire; alsdann entsteht der Satz: 5) Wenn zweien homofocalen Oberflächen A, A_1 von demselben Punkte aus Kegelflächen umschrieben werden, so ist die auf der ersten Oberfläche entstehende Berührungscurve Focalcurve einer der zweiten nach ihrer Berührungscurve eingeschriebenen Oberfläche.

In der Voraussetzung, dass die Fläche B der Fläche A umschrieben und dass die Fläche C auf dem Pol der Ebene der Berührungscurve reducirt sei, ergiebt sich: 6) Die developpable Fläche, welche von einer Oberfläche A_1 und von einer Fläche B bestimmt wird, die einer zu A_1 homofocalen Fläche A eingeschrieben ist, umhüllt zugleich eine Kugel, die ihr Centrum im Pol der Berührung der Flächen B und A hat.

Wenn in diesem Falle die Fläche B in einen auf der Oberfläche A gelegenen Kegelschnitt degenerirt, so hat man: 7) Die developpable Fläche, welche durch eine Oberfläche A_1 und einen auf der zu ihr homofocalen Fläche A gelegenen Kegelschnitt bestimmt ist, umhüllt zugleich eine Kugel, welche den Pol der Ebene von B in Bezug auf die Fläche A zum Centrum hat.

29. In der Theorie der conjugirten Oberflächen schliessen sich folgende besondere Fälle an.

Die Fläche A sei ein Kegel, welcher der Fläche A conjugirt ist und die Fläche B degenerire in eine durch den Scheitel desselben gehende Ebene; man hat den Satz: 1) Wenn zu einer Oberfläche A_1 und einer ihr bezüglich des Punktes a conjugirten Kegelfläche A eine zweite Kegelfläche C beschrieben wird, die die erste längs zweien Erzeugenden berührt, so kann in die Oberfläche A_1 eine zu dieser Kegelfläche C bezüglich des Punktes a conjugirte Fläche C_1 eingeschrieben werden, und die Berührungscurve, nach welcher dies geschieht, liegt in der Ebene der Erzeugenden, längs welcher die Berührung der Kegelflächen A und C stattfindet.

Reducirt sich dabei die Fläche C auf das System zweier Tangentialebenen der Kegelfläche A, so entspricht dem der Satz: 2) Wenn eine Oberfläche A_1 und eine ihr bezüglich des Punktes a conjugirte Kegelfläche A gegeben sind, so sind zwei Tangentialebenen dieser letzteren die dem Punkt a als Focalpunkt entsprechenden Directionsebenen einer in die Fläche A_1 eingeschriebenen Oberfläche C_1, und die Berührungscurve dieser letzteren Flächen liegt in der Ebene der Erzeugenden, längs welcher die Kegelfläche A durch die beiden Tangentialebenen berührt wird.

Die Fläche B sei der Fläche A nach einem Kegelschnitt umschrieben und die Fläche C sei auf die Ebene dieses letzteren reducirt; man erhält: 3) Wenn zwei bezüglich eines Punktes a einander conjugirte Oberflächen A, A_1 und eine der Fläche A längs eines Kegelschnittes eingeschriebene Fläche B gegeben sind, so kann durch die Durchdringungscurve der Flächen B und A_1 eine Rotationsfläche gelegt werden, welche die Berührungsebene der Flächen B und A zur Directionsebene und den Punkt a zum bezüglichen Brennpunkt hat.

Aus der Voraussetzung, dass A eine zur Fläche A_1 conjugirte Kegelfläche, B das System zweier Tangentialebenen derselben und C die durch die entsprechenden Berührungsseiten bestimmte Ebene sei, erhält man den Satz: 4) Ist eine Fläche A_1 und eine ihr bezüglich des Punktes a conjugirte Kegelfläche A gegeben, so wird A_1 von zwei Tangentialebenen dieser letzteren in zwei Kegelschnittslinien geschnitten, durch welche eine Rotationsfläche gelegt worden kann, der der Punkt a als ein Brennpunkt und die Ebene der Berührungsseiten der Kegelfläche als zugehörige Directionsebene angehört.

Und den anderen: 5) Ist eine Fläche A_1 und eine ihr bezüglich des Punktes a conjugirte Kegelfläche A gegeben, welche letztere von einer den Punkt a enthaltenden Ebene in zwei Erzeugenden geschnitten wird, so schneiden die diesen Erzeugenden entsprechenden Tangentialebenen die Fläche A_1 in zwei Kegelschnitten, durch welche ein Rotationskegel vom Scheitel a und einer zur Ebene dieser Erzeugenden senkrechten Achse gelegt werden kann.

30. In ähnlicher Weise entspringen eine Reihe specieller Sätze aus dem analogen gleichlautenden Hauptsatze in der Theorie der homofocalen sphärischen Kegelschnitte; ich will sie nur andeuten.

Wenn z. B. der Kegelschnitt B auf einen Punkt reducirt ist, von welchem aus Tangenten an zwei homofocale Kegelschnitte gelegt werden, so kann zu jedem dem ersten derselben nach diesen Tangenten eingeschriebenen Kegelschnitt C ein dem zweiten nach seinen Tangenten eingeschriebener Kegelschnitt C_1 gegeben werden, welcher mit jenem homofocal ist. Denkt man dabei ferner den eingeschriebenen Kegelschnitt C auf die Berührungspunkte reducirt, so werden diese nothwendig zu Brennpunkten für den Kegelschnitt C_1.

Wenn der Kegelschnitt B mit A eine doppelte Berührung hat und zugleich der Kegelschnitt C als der Pol derselben gedacht ist, so ist das dem Kegelschnitt B und einem zu A homofocalen Kegelschnitt A_1 gemeinsam umschriebene Vierseit zugleich einem Kreis umschrieben, der den Berührungspol der Kegelschnitte B und A zum Centrum hat; dabei kann ferner vorausgesetzt werden, dass der Kegelschnitt B sich auf zwei Punkte des Kegelschnitts A reducirt. Man kann aber auch den Kegelschnitt C als das System der Berührungspunkte der Kegelschnitte A und B setzen und erkennt sodann, dass in das dem Kegelschnitt B und einem zu A homofocalen Kegelschnitt A_1 umschriebene Vierseit ein Kegelschnitt eingeschrieben werden kann, der jene Berührungspunkte zu Brennpunkten hat.

31. Dritter Hauptsatz: Wenn drei beliebige Oberflächen A, B, C einer und derselben developpabeln Fläche eingeschrieben sind, so umhüllt die durch zwei den Flächen A und B respective homofocale Flächen A_1 und B_1 bestimmte developpable Fläche zugleich eine dritte der Fläche C homocale Fläche C_1.

Die durch die Gleichungen

$$A) \equiv \Sigma + \mu \Omega = 0, \quad B) \equiv \Sigma + \mu_1 \Omega = 0, \quad C) \equiv \Sigma + \mu_2 \Omega = 0$$

repräsentirten Flächen sind derselben durch die Flächen $\Sigma = 0$ und $\Omega = 0$ bestimmten developpabeln Fläche eingeschrieben; die Flächen

$$A_1) \equiv (\Sigma + \mu \Omega) + kK = 0, \quad B_1) \equiv (\Sigma + \mu_1 \Omega) + k_1 K = 0$$

sind den Flächen A) und B) respective homofocal und die daraus entspringenden Relationen

$$\begin{aligned}(\mu_2 - \mu_1) A_1 + (\mu - \mu_2) B_1 &\equiv \mu_2 (\Sigma + \mu \Omega) + \mu_2 k K - \mu_1 (\Sigma + \mu \Omega) - \mu_1 k K \\ &\quad + \mu (\Sigma + \mu_1 \Omega) + \mu k_1 K - \mu_2 (\Sigma + \mu_1 \Omega) - \mu_2 k_1 K \\ &= (\mu - \mu_1)(\Sigma + \mu_2 \Omega) + [k(\mu_2 - \mu_1) + k_1(\mu - \mu_2)] K, \\ k_1 A_1 - k B_1 &\equiv k_1 (\Sigma + \mu \Omega) + k k_1 K - k (\Sigma + \mu_1 \Omega) - k k_1 K \\ &= k_1 A - k B\end{aligned}$$

beweisen den Satz, denn sie zeigen die durch die Flächen A_1 und B_1 bestimmte developpable Fläche gleichzeitig einer zu C homofocalen Fläche umschrieben. Die letztere von ihnen spricht aber zugleich aus, dass die den Flächen A_1, B_1, also auch C_1, und die den Flächen A, B, also auch C entsprechenden developpabeln Oberflächen eine und dieselbe Fläche zweiter Ordnung umhüllen.

Es erscheint überflüssig, die analoge Entwickelung in Punktcoordinaten herzusetzen, da sie durch blose Zeichenübertragung erhalten werden kann; der daraus entspringende allgemeine Satz für die Theorie der *conjugirten* Oberflächen lautet: Wenn drei Oberflächen A, B, C durch *eine und dieselbe* Curve gehen, so lässt sich durch die

Durchschnittscurve zweier, den ersten beiden bezüglich eines Punktes a conjugirten Oberflächen A_1, B_1 eine Oberfläche C_1 legen, welche der Fläche C bezüglich desselben Punktes conjugirt ist. Ueberdies liegen die beiden Durchdringungscurven respective der Flächen A, B; also auch C, und der Flächen A_1, B_1, also auch C_1, auf einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung.

Es mag bemerkt werden, dass diese Zusätze den bei dem ersten Hauptsatze gegebenen, deren einen M. Chasles als seinen dritten Hauptsatz bezeichnete, völlig entsprechen.

32. In der Theorie der homofocalen Oberflächen schliessen sich daran folgende Specialitäten.

Man betrachte zwei Focalcurven der Flächen A, B als Oberflächen A_1, B_1, und man hat den Satz: 1) Wenn drei Oberflächen A, B, C in dieselbe developpable Fläche eingeschrieben sind, so umhüllt die durch zwei Focalcurven der ersten beiden bestimmte developpable Fläche auch eine zur dritten homofocale und eine in die den Flächen A, B, C gemeinschaftlich umschriebene developpable Fläche eingeschriebene Fläche.

Ist die Fläche C eine Kugel, d. h. dem unendlich entfernten imaginären Kreise umschrieben, so erhält man den Satz: 2) Wenn zwei Oberflächen A, B in eine der Kugel C umschriebene developpable Fläche eingeschrieben sind, so ist die zweien respective zu A, B homofocalen Flächen A_1, B_1 umschriebene developpable Fläche auch einer mit C concentrischen Kugel umschrieben; ferner ist von den beiden von den Flächen A, B und A_1, B_1 respective bestimmte developpablen Flächen eine und dieselbe Oberfläche umhüllt.

Die Verbindung beider vorigen Voraussetzungen liefert ferner den Satz: 3) Wenn zwei Oberflächen A, B mit einer Kugel C zugleich einer developpablen Fläche eingeschrieben sind, so umhüllt eine durch zwei Focalcurven dieser Oberflächen bestimmte developpable Fläche eine mit C concentrische Kugel; und beide bezeichnete developpable Flächen sind derselben Oberfläche umschrieben.

Sei die Oberfläche B der A umschrieben und die Oberfläche C auf den Pol der Berührungsebene oder auf diese selbst reducirt: 4) Wenn zwei Oberflächen A, B einander nach einem Kegelschnitt umschrieben sind und zwei ihnen respective homofocale Flächen A_1, B_1 beschrieben werden, so ist die durch diese letzteren bestimmte developpable Fläche dreien Flächen zugleich umschrieben, nämlich einer Kugel, die ihr Centrum im Pol der Berührungsebene der Flächen A und B hat, einer

Oberfläche, für welche die entsprechende Berührungscurve eine Focalcurve ist, und einer dritten den Oberflächen A und B nach ihrer Berührungscurve gemeinschaftlich umschriebenen Oberfläche.

5) Reducirt sich die Oberfläche B überdies auf einen Kegelschnitt in der Fläche A, so wird derselbe zur Focalcurve der Oberfläche B_1, und die durch die Oberflächen A_1 und B_1 bestimmte developpable Fläche ist zugleich einer aus dem Pol der Ebene B beschriebenen Kugel und einer Oberfläche umschrieben, welche die Oberfläche A nach der Curve B berührt.

Fällt endlich die Oberfläche A_1 mit A selbst zusammen, so entsteht der Satz: 6) Wenn ein auf der Oberfläche A gelegener Kegelschnitt B zur Focalcurve eine Oberfläche B_1 genommen ist, so ist die von den Oberflächen A und B_1 bestimmte developpable Fläche zugleich einer Kugel umschrieben, deren Centrum der Pol der Ebene des Kegelschnitts B ist.

33. Von den speciellen Folgerungen in der Theorie der conjugirten Oberflächen mögen gleichfalls einige angeführt werden.

Wenn die Oberflächen A und B einander umschrieben sind und die Fläche C als der Pol der Ebene der Berührungscurve oder als diese selbst genommen wird, so gilt der Satz: 1) Die Durchschnittscurve zweier Oberflächen A_1 und B_1, welche bezüglich eines Punktes a den einander in einem Kegelschnitt berührenden Oberflächen A, B conjugirt sind, liegt zugleich auf drei anderen Oberflächen, nämlich auf einer Rotationsfläche, die den Punkt a zum Brennpunkt und die Ebene jener Berührung zur bezüglichen Directionsebene hat, auf einer Oberfläche, welche bezüglich desselben Punktes der nach jener Berührungscurve der Oberflächen A und B umschriebenen Kegelfläche conjugirt ist, und auf einer jenen Oberflächen A und B längs ihrer Berührungscurve umschriebenen Oberfläche.

Die Oberfläche B sei der der Oberfläche A nach dem ebenen Schnitte C umschriebene Kegel: 2) Wenn zu zwei bezüglich eines Punktes a conjugirten Oberflächen A, A_1 ein der ersten umschriebener Kegel B und eine demselben bezüglich des Punktes a conjugirte Oberfläche B_1 bestimmt werden, so liegt die Durchdringungscurve der Flächen A_1 und B_1 zugleich auf einer Rotationsfläche, die den Punkt a zum Brennpunkt und die Ebene der Berührungscurve der Oberflächen A und B zur bezüglichen Directionsebene hat, und auf einer Oberfläche, die längs eben dieser Berührungscurve den Oberflächen A und B eingeschrieben ist.

Unter der combinirten Voraussetzung, dass A eine Kegelfläche, B das System zweier Berührungsebenen derselben und C die Ebene der Berührungsseiten repräsentire, entspringt der Satz: 3) Wenn zu einer Oberfläche A_1, einer ihr bezüglich des Punktes a conjugirten Kegelfläche und zweien Tangentialebenen derselben eine Oberfläche B_1 so beschrieben wird, dass a zu ihrem Brennpunkt und das Paar der bezeichneten Tangentialebenen zu ihren bezüglichen Directionsebenen wird, so ist die Durchschnittscurve derselben mit der Oberfläche A_1 zugleich auf einer Rotationsfläche, für die der Punkt a ein Brennpunkt und die Ebene der Berührungsseiten jener Tangentialebenen die bezügliche Directionsebene ist, und auf einer Kegelfläche enthalten, welche längs dieser Berührungsseiten die Kegelfläche A berührt.

Jene Rotationsfläche wird zur Kegelfläche, sobald der Punkt a der Ebene den Berührungsseiten angehört.

34. Endlich entsprechen in der Theorie der sphärischen homofocalen Kegelschnitte beispielsweise den folgenden besonderen Voraussetzungen die beigefügten Sätze.

Die Kegelschnitte A, B_1 sind Brennpunktenpaare der Kegelschnitte A, B_1: 1) Wenn drei Kegelschnitte A, B, C demselben Vierseit eingeschrieben sind, so bestimmen die je ein Brennpunktenpaar der beiden ersten unter ihnen verbindenden Bögen die Ecken eines Vierseits, welches zugleich einem dem dritten C homofocalen Kegelschnitt umschrieben ist; und dieses Vierseit umhüllt mit dem ersten, welches den Kegelschnitten A, B, C gemeinsam umschrieben ist, einen und denselben Kegelschnitt.

Der Kegelschnitt C sei insbesondere ein Kreis: 2) Wenn zwei Kegelschnitte A, B mit einem Kreise C demselben Vierseit eingeschrieben sind und zwei ihnen respective homofocale Kegelschnitte A_1, B_1 beschrieben werden, so ist das von diesen letzteren bestimmte umschriebene Vierseit zugleich einem mit dem ersten concentrischen Kreise umschrieben; beiden Vierseiten ist aber überdies ein und derselbe Kegelschnitt eingeschrieben.

Die Kegelschnitte A_1 und B_1 können als zu Brennpunkten der Kegelschnitte A und B reducirt gedacht werden: 3) Wenn zwei Kegelschnitte A und B zugleich mit einem Kreise demselben Vierseit eingeschrieben sind, so bestimmen die Brennpunkte des einen mit denen des anderen ein Vierseit, welches einem mit dem ersten concentrischen Kreise und überdies mit dem erst bezeichneten Vierseit einem und demselben Kegelschnitt umschrieben ist.

Die Kegelschnitte A und B haben eine doppelte Berührung, C ist der Pol derselben oder das Paar der Berührungspunkte: 4) Wenn zu zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten A, B die respective homofocalen Kegelschnitte A_1, B_1 construirt werden, so kann man dem durch diese letzteren bestimmten umschriebenen Vierseit einen Kreis und zwei Kegelschnitte einschreiben; der erste hat sein Centrum im Pol der Berührung von A und B, der eine der Kegelschnitte hat die entsprechenden Berührungspunkte zu Brennpunkten und der andere von ihnen ist in denselben mit den Kegelschnitten A und B in doppelter Berührung.

Dabei können ferner die Kegelschnitte A_1 und B_1 auf die Paare der Brennpunkte von A und B reducirt gedacht werden.

Der Kegelschnitt B sei in zwei Punkte des Kegelschnittes A degenerirt: 5) Wenn zwei homofocale Kegelschnitte A, A_1 und ein Kegelschnitt B_1 gegeben sind, der zwei Punkte des Kegelschnittes A zu Brennpunkten hat, so kann man dem Vierseit, welches diesem und dem Kegelschnitt A_1 zugleich umschrieben ist, einen Kreis und einen Kegelschnitt einschreiben, von denen der erstere sein Centrum im Pol der Sehne hat, welche jene beiden Punkte des Kegelschnittes verbindet, während der zweite den Kegelschnitt A in denselben Punkten doppelt berührt.

Die Kegelschnitte A und A_1 fallen zusammen: 6) Wenn ein Kegelschnitt B_1 seine Brennpunkte auf den Kegelschnitt A hat, so ist das beiden Curven umschriebene Vierseit zugleich einem Kreise umschrieben, der den Pol der jene Brennpunkte verbindenden Sehne zum Centrum hat.

35. Der Theorie der homofocalen entspricht die der homocyclischen Kegelschnitte; sie sind, wie früher ausgeführt ist, mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise einem und demselben Viereck umschrieben, während die homofocalen Kegelschnitte mit ihm ein und demselben Vierseit eingeschrieben sind. Alle Sätze jener Theorie haben ihre entsprechenden in dieser. Wenn durch $x:y:z$ die Coordinaten eines Punktes der Kugelfläche in Bezug auf rechtwinklige Achsen bezeichnet werden, so drücken Gleichungen von der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda'(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

homofocale Kegelschnitte aus; denn $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ist die Gleichung des unendlich entfernten imaginären Kreises. Dann repräsentiren die Gleichungen

$$S = 0, \quad S_1 = 0$$

zwei homocyclische Kegelschnitte A, A_1, die Gleichung

$$U = 0$$

einen beliebigen dritten Kegelschnitt B; es sind

$$U + \mu S = 0, \quad U + \mu_1 S_1 = 0$$

zwei mit B und A, B und A_1 respective denselben Vierecken umschriebene Kegelschnitte C, C_1, und man findet

$$C - C_1 \equiv \mu S - \mu_1 S_1,$$
$$\mu_1 C - \mu C_1 \equiv (\mu_1 - \mu) U + (\lambda - \lambda_1) \mu \mu_1 (x^2 + y^2 + z^2),$$

d. h. es gilt der Satz: Wenn den von einem Kegelschnitt B mit zweien homocyclischen Kegelschnitten A, A_1 gebildeten Vierecken zwei Kegelschnitte C, C_1 umschrieben werden, so ist das von ihnen bestimmte Viereck gleichzeitig einem zu A, A_1 homocyclischen A_2 und einem anderen zu B homocyclischen Kegelschnitt B_1 umschrieben. Die von den Kegelschnitten B und A_2, C und C_1 respective bestimmten Vierecke sind überdies demselben Kegelschnitt C_2 umschrieben.

Eben so in einer den früheren Entwickelungen völlig analogen Weise ergeben sich die beiden anderen Hauptsätze der Theorie und aus ihnen fliessen dann wieder durch passende Specialisirungen eine grosse Menge Einzelfolgerungen. Aber nur die beiden Hauptsätze sollen hier genannt und eine einfache Betrachtung an sie zusammenschliessend geknüpft werden. Die beiden Sätze lauten: Wenn dem von einem Kegelschnitt B mit dem einen von zwei homocyclischen Kegelschnitten A, A_1 gebildeten Viereck ein Kegelschnitt C umschrieben ist, so kann dem von jenem mit dem anderen homocyclischen Kegelschnitt gebildeten Viereck ein zu C homocyclischer Kegelschnitt C_1 umschrieben werden.

Und: Wenn drei Kegelschnitte A, B, C demselben Viereck umschrieben sind, so kann dem von zwei zu den beiden ersten respective homocyclischen Kegelschnitten A_1, B_1 gebildeten Viereck ein Kegelschnitt C_1 umschrieben werden, der dem dritten homocyclisch ist. Die Ecken beider Vierecke liegen auf demselben Kegelschnitt.

Man kann endlich diese Sätze als auf Kegelschnitte bezüglich, die einem und demselben Kegelschnitt umschrieben sind, in einen einzigen zusammenfassen, welcher so lautet: Wenn zu mehreren demselben Vierseit umschriebenen Kegelschnitten A, A_1, A_2 ... ein beliebiger Kegelschnitt B gegeben ist und den von ihm mit zweien von jenen bestimmten Vierecken respective die Kegelschnitte C, C_1 umschrieben sind, so können dem Viereck dieser letzteren Kegelschnitte umschrieben werden, welche respective auch den vom Kegelschnitt B mit einem der Reihe A_2, A_3... angehörigen Kegelschnitt gebildeten Vierecken umschrieben sind. Ueberdies liegen die Ecken der von A mit A_1 und der von C mit C_1 gebildeten Vierecke auf demselben Kegelschnitt.

Man schliesst daraus, dass die Durchschnittspunkte der entsprechenden Kegelschnitte zweier Büschel, deren vierpunktige Basen auf einem und demselben Kegelschnitt liegen, sich immer in einem Kegelschnitt finden. (Vergl. *Nouvelles Annales, de Mathématiques*, *t. XIX*, *p.* 278.)

In einen ähnlichen Satz vereinigt M. Chasles die Theorie der homofocalen Oberflächen zweiten Grades; es genügt, darauf hinzudeuten. (Vergl. Liouville's *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *t. V.* 1860. *p.* 444.)

Aber eine andere Seite der Betrachtung muss nunmehr die Aufmerksamkeit anziehen. Indem ich mich ihr zuwende, verweile ich noch einen Augenblick bei der gleichzeitigen Betrachtung von Curven und Oberflächen zweiten Grades, um nachher von den letzteren allein wieder zu sprechen.

(Schluss im nächsten Hefte.)

XI.

Vervielfachung und Theilung der elliptischen Integrale und damit in Zusammenhang stehende Eigenschaften confocaler Kegelschnitte.

Von C. Küpper.

I.

Jedem bestimmten Winkel φ sind unendlich viele Paare von Winkeln ψ, ψ' durch die Gleichung:

$$1)\qquad F(k,\psi') = F(k,\varphi) + F(k,\psi),\quad \left(k = \frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$$

zugeordnet. Jacobi hat zuerst eine Methode angegeben, diese Winkel zu construiren und dadurch das Problem der Addition und Multiplication der elliptischen Integrale erster Art gelöst. Eine andere, nicht minder einfache Lösung besteht in Folgendem:

Man zeichne eine Ellipse E, deren Halbachsen a, b sind, ziehe in dem Endpunkt B der kleinen Achse, von welcher aus die Complemente der excentrischen Anomalien als Bestimmungswinkel der Punkte von E gerechnet werden sollen, eine Tangente, ebenso in dem Punkte, zu dem der Winkel φ (als Complement seiner excentrischen Anomalie) gehört. Durch den Durchschnittspunkt T_1 beider Tangenten lege man eine mit E confocale Ellipse $\mathfrak{E}$; dann genügen die Bestimmungswinkel irgend zweier Punkte von E, deren Tangenten sich auf $\mathfrak{E}$ schneiden, der Gleichung 1).

Man kann auch eine mit E confocale Hyperbel $\mathfrak{H}$ anwenden: Den Punkt $\mathfrak{T}_1$, durch welchen $\mathfrak{H}$ bestimmt wird, erhält man auf derselben Tangente in B, als Durchschnitt dieser mit einer anderen Tangente von E, deren Berührungspunkt $\pi - \varphi$ zum Bestimmungswinkel hat. Zieht man nun von irgend einem Punkte auf $\mathfrak{H}$ zwei Tangenten an E, und nimmt von dem einen Berührungspunkt den Bestimmungswinkel selbst, vom anderen das Supplement des entsprechenden Winkels, so hat man in diesen ein Paar die Gleichung 1) befriedigende Werthe.

Beweis. TP, $T'P$ seien zwei Tangenten an E, die sich in P auf $\mathfrak{C}$ schneiden; ψ, ψ' die Bestimmungswinkel von T, T'. Wenn P um ein unendlich kleines Stück auf $\mathfrak{C}$ fortrückt, durchlaufen die Punkte T, T' auf E die Elemente ds, ds' und wachsen ψ, ψ' um $d\psi$, $d\psi'$. 2δ, $2\delta'$ seien die zu TP, $T'P$ parallelen Durchmesser von E; ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser für T, T'; ω, ω' die Winkel, welche zwei auf einander folgende Tangenten beziehlich in T, T' mit einander bilden. Dann ist:

$$ds = \varrho\omega, \quad ds' = \varrho'\omega'.$$

Weil nun PT, PT' mit der Tangente in P an $\mathfrak{C}$ gleiche Winkel bilden, so hat man:

$$PT\,\omega = PT'\,\omega';$$

folglich: $ds : ds' = \frac{\varrho}{PT} : \frac{\varrho'}{PT'}$; aber $\varrho : \varrho' = \delta^3 : \delta'^3$, $PT : PT' = \delta : \delta'$; mithin:

$$\frac{ds}{\delta^2} = \frac{ds'}{\delta'^2}.$$

Und weil $\delta = a\,\Delta(\psi)$, $ds = d\psi\,\Delta(\psi)$,

$$2) \qquad \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = \frac{d\psi'}{\Delta(\psi')}.$$

Durch Integration dieser Gleichung, indem man beachtet, dass $\psi = 0$, $\psi' = \varphi$ entsprechende Grenzen sind, erhält man unsere Construction. Wenn $\varphi = am\,u$ gesetzt wird, so ist klar, wie man durch successives Tangentenziehen $am\,2u$, $am\,3u$ u. s. w., ebenso $am\,(t+u)$, $am\,(t+2u) \ldots$ erlangen kann.

Die anzubringende Modification für den Fall, dass P auf $\mathfrak{H}$ liegt, wird dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein.

II.

Es hat keinerlei Schwierigkeit, analytisch nachzuweisen, dass, wenn an eine Ellipse E von irgend einem Punkte einer Confocalen $\mathfrak{C}$ zwei Tangenten gezogen werden, zwischen den Bestimmungswinkeln ψ, ψ' der Berührungspunkte die Relation besteht:

$$3) \qquad \cos\psi \,.\, \cos\psi' + p \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\psi' = q.$$

Die Constante q findet sich durch die Annahme $\psi = 0$, $\psi = \varphi$, $q = \cos\varphi$. Sodann ergiebt sich $p = \Delta(\varphi)$. Auf diese Weise kann man entweder gemäss I die Formeln für die Addition der elliptischen Functionen erster Art beweisen, oder, indem man sich auf diese stützt, die Construction I ableiten. Sind $\sqrt{a^2+\lambda}$, $\sqrt{b^2+\lambda}$ die Halbachsen von $\mathfrak{C}$, so hat man zugleich

$$a^2 + \lambda = a^2 \frac{1+\Delta(\varphi)}{1+\cos\varphi}, \quad b^2 + \lambda = b^2 \frac{1+\Delta(\varphi)}{\cos\varphi + \Delta(\varphi)}.$$

Wir setzen $\cos\varphi = c$, $\frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi)} = s$,

$$4) \qquad a^2 + \lambda = a^2 \frac{c+s}{s(1+c)}, \quad b^2 + \lambda = b^2 \frac{c+s}{c(1+s)}.$$

$$5)\qquad c=\frac{a^2b^2-\lambda^2}{a^2b^2+2a^2\lambda+\lambda^2},\quad s=\frac{a^2b^2-\lambda^2}{a^2b^2+2b^2\lambda+\lambda^2}.$$

Liegt aber P auf der confocalen Hyperbel $\mathfrak{H}$ mit den Halbachsen $\sqrt{a^2+\lambda_1}$, $\sqrt{b^2+\lambda_1}$, und heissen ψ, ψ' wieder die Bestimmungswinkel der Berührungspunkte zweier Tangenten aus P an E, so kommt:

$$-\cos\psi\cos\psi'+\mathfrak{p}\,.\sin\psi\sin\psi'=\mathfrak{q}.$$

Wie eben, wenn $\psi=0$, $\psi'=\varphi'$ zusammengehören, $\mathfrak{q}=-\cos\varphi'$; sodann $\mathfrak{p}=\varDelta(\varphi')$.

Daher:

$$\cos(\pi-\psi)\cos\psi'+\sin(\pi-\psi)\sin\psi'\,\varDelta(\pi-\varphi')=\cos(\pi-\varphi').$$

Die Hyperbel $\mathfrak{H}$ werde der Ellipse $\mathfrak{E}$ so zugeordnet, dass $\pi-\varphi'=\varphi$. Dann ist:

$$a^2-\lambda_1=(a^2-b^2)\frac{1+\cos\varphi}{1+\varDelta(\varphi)},\quad b^2-\lambda_1=(a^2-b^2)\frac{\cos\varphi-\varDelta(\varphi)}{1+\varDelta(\varphi)},$$

$$\lambda_1=a^2\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda},\qquad \lambda=-a^2\frac{b^2-\lambda_1}{a^2-\lambda_1},$$

$$\cos\varphi=\frac{a^2b^2-\lambda^2}{a^2b^2+2a^2\lambda+\lambda^2}=\frac{a^2b^2-\lambda_1}{-a^2b^2+2a^2\lambda_1-\lambda_1^2},$$

$$\varDelta(\varphi)=\frac{a^2b^2+2b^2\lambda+\lambda^2}{a^2b^2+2a^2\lambda+\lambda^2}=\frac{-a^2b^2-2b^2\lambda_1+\lambda_1^2}{-a^2b^2+2a^2\lambda_1-\lambda_1^2}.$$

Das Rechteck aus den Hauptachsen der $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ ist unveränderlich.

III.

Geometrisch aufgefasst, besteht das Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Art darin, dass, wenn die Gleichung 1) oder 3) besteht, zwei elliptische Bögen, deren Endpunkten beziehlich die Bestimmungswinkel ψ, ψ'; 0, φ zukommen, eine rectificable Differenz haben:

$$aE(k,\varphi)-a\,[E(k,\psi')-E(k,\psi)]=ak^2\sin\varphi\sin\psi\sin\psi'.$$

Diesem Ausdrucke entspricht folgender Beweis:

$$ds=a\,\varDelta(\psi)\,d\psi,\quad ds'=a\varDelta(\psi')\,d\psi'.$$

Aus 1) oder 3) folgt wie bekannt:

$$\sin\varphi\,\varDelta(\psi')=-\sin\psi\cos\psi'+\cos\psi\sin\psi'\,\varDelta(\psi),$$
$$\sin\varphi\,\varDelta(\psi)=\cos\psi\sin\psi'-\sin\psi\cos\psi'\,\varDelta(\varphi).$$

Also:

$$\frac{ds-ds'}{a}=\frac{1}{\sin\varphi}\,d(\sin\psi\sin\psi')+\frac{\varDelta(\varphi)}{\sin\varphi}\,d(\cos\psi\cos\psi').$$

Da nun $\cos\psi\cos\psi'$ bei $\psi=0$ zu $\cos\varphi$ wird, so liefert die Integration in den Grenzen $0,\psi$ für ds und φ,ψ' für ds':

$$E(k,\psi)-E(k,\psi')+E(k,\varphi)=\frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin\varphi}+\frac{\cos\psi\cos\psi'-\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\varDelta(\varphi).$$

Mit Hilfe von 3):

$$E(k,\varphi)-[E(k,\psi')-E(k,\psi)]=k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\psi'.$$

Es dürfte von Interesse sein, dass die Jacobi'sche Construction sich auch zum Beweise des Additionstheorems für das zweite Integral eignet.

In Fig. 2 Taf. I seien r, R die Radien der um m, M beschriebenen Kreise, die Centrale $Mm = e$. Die Sehnen AQ, PP' sind Tangenten am kleinen Kreise, zu den Bögen AQ, AP, AP' gehören die Peripheriewinkel φ, ψ, ψ'.

$$PT = \Delta(\psi)\sqrt{(R+e)^2 - r^2}, \quad P'T = \Delta(\psi')\sqrt{(R+e)^2 - r^2}.$$

Ferner:

$$PT + P'T = 2R\sin(\psi' - \psi), \quad PT - P'T = 2e\sin(\psi + \psi'),$$

also:

$$PT = (R+e)\cos\psi\sin\psi' - (R-e)\sin\psi\cos\psi',$$
$$P'T = (R-e)\cos\psi\sin\psi' - (R+e)\sin\psi\cos\psi'.$$

Folglich:

$$\Delta(\psi)\,d\psi - \Delta(\psi')\,d\psi' = \frac{(R+e)\,d\,(\sin\psi\sin\psi') + (R-e)\,d\,(\cos\psi\cos\psi')}{\sqrt{(R+e)^2 - r^2}}.$$

Durch Integration wie oben und unter Benutzung von:

$$\cos\varphi = \cos\psi\cos\psi' + \sin\psi\sin\psi'\,\Delta(\varphi), \quad \Delta(\varphi) = \frac{R-e}{R+e},$$

$$\sin\varphi = \frac{AT_0}{R+e} = \frac{\sqrt{(R+e)^2 - r^2}}{R+e};$$

entsteht:

$$E(k,\varphi) - [E(k,\psi') - E(k,\psi)] = \frac{4Re}{\sqrt{(R+e)^2 - r^2}}\sin\varphi\sin\psi\sin\psi'$$
$$= k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\psi'.$$

Für viele Betrachtungen ist es von Wichtigkeit, denjenigen Punkt C ins Auge zu fassen, der für die von (M) umschlossene Schaar von Kreisen, welche paarweise dieselbe Chordale haben, die Grenze bildet. Bezeichnet man mit a, b die Abschnitte, in welche er den Durchmesser AB theilt, so ist in den aufgeführten Formeln $k^2 = \dfrac{4Re}{\sqrt{(R+e)^2 - r^2}} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Ferner sind $PCA = \beta$, $P'CA = \beta'$, $QCA = \alpha$ die Winkel, durch welche ψ, ψ', φ bei Anwendung der Landen'schen Substitution ersetzt werden; dabei tritt an die Stelle von k das Verhältniss $\dfrac{a-b}{a+b} = MC : MB$.

Jacobi hat z. B. gezeigt, dass bei einem $2n$ Eck $PP'P'' \ldots$, welches um den kleineren und in den grösseren Kreis beschrieben ist, die Verbindungslinien gegenüberstehender Ecken sich in C schneiden. Lässt man nun den Kreis M in einem doppelt so grossen mit dem Mittelpunkt B rollen, so beschreibt C eine Ellipse E. Zieht man in den Lagen von C, bei welchen die Punkte P, P', $P'' \ldots$ in Berührung mit dem festen Kreise *sind, Tangenten* an E, so erhält man ein geschlossenes, der E umschriebe*nes* $4n$ *Eck*, das zugleich einer mit E confocalen Ellipse einbeschrieben ist. Durch den Satz von Jacobi wird diese Eigenschaft bedingt: Die $4n$ Berührungspunkte auf E sind zu je vieren die Ecken von n Parallelogrammen, und vier solche Ecken sind Punkte, für welche die von Fagnani entdeckte Eigenschaft stattfindet.

IV.

Aus der in I bewiesenen Gleichung 2) ergiebt sich in bekannter Weise als Bedingung dafür, dass ein n Eck P, welches der Ellipse E umschrieben, der $\mathfrak{E}$ einbeschrieben ist, und als dessen erste Seite irgend eine durch den Winkel ψ ihres Berührungspunktes charakterisirte Tangente von E genommen wird, sich nach einer bestimmten Anzahl i von Umläufen schliesst:

$$\varphi = am \frac{4iK}{n}. \quad (i, n \text{ sind relative Primzahlen.})$$

Die Unabhängigkeit dieser Bedingung von ψ, also von der Lage der Tangente von E, welche zur ersten Seite gewählt ist, lässt erkennen, dass, wenn irgend eins dieser n Ecke sich schliesst, dasjenige etwa, dessen erste Seite im Scheitel B berührt, dann auch ein Gleiches von jedem Polygone P gilt, dem irgend eine Tangente von B als erste Seite dient, und dass ein solches stets n Seiten bekommt und i Umläufe macht.

Nennt man zwei elliptische Bögen gleich, wenn ihre Differenz rectificabel ist, so kann man sich ohne Zweideutigkeit also ausdrücken:

$\mathfrak{A}$) Jedem bestimmten Bogen von E [etwa $aE\,(k, \varphi)$] sind unzählige gleich. Die beiden Tangenten in den beiden Endpunkten eines solchen Bogens schneiden sich auf einer mit E confocalen Ellipse $\mathfrak{E}$, und die Berührungspunkte je zweier Tangenten von E, die von dem nämlichen Punkte auf $\mathfrak{E}$ ausgehen, begrenzen einen solchen Bogen. Die Ellipse $\mathfrak{E}$ heisst der gegebenen durch den Winkel φ oder durch amu zugeordnet.

$\mathfrak{B}$) Wenn dadurch, dass von irgend einem Anfangspunkte auf E, n gleiche Bögen aneinander gelegt werden, die Peripherie von E gerade i mal durchmessen wird, so geschieht dies gleicherweise, wenn man von einem anderen Punkte ausgehend, n den ersten gleiche Bögen auf E abträgt. In dem angenommenen Sinne erscheint das i fache der Peripherie von jedem der beiden Punkte aus in n gleiche Theile getheilt.

$\mathfrak{C}$) Jedes der E umschriebene n Eck, dessen aufeinanderfolgende Seiten die E der Reihe nach in den Punkten einer solchen n Theilung berühren, ist einer, der E durch $am \frac{4iK}{n}$ zugeordneten Confocalen $\mathfrak{E}$ einbeschrieben. Und wählt man irgend eine Tangente von E als erste Seite eines um E und zugleich in $\mathfrak{C}$ beschriebenen Polygons, so wird dies stets ein geschlossenes nEck von i Umläufen, zwischen dessen Seiten gleiche elliptische Bögen begriffen sind. Derartige Polygone können elliptisch reguläre heissen.

$\mathfrak{D}$) Halbirung und Verdoppelung des elliptischen Integrals u (Fig. 1, Taf. I).

Durch den Winkel $\varphi = am\,u$ sei $\mathfrak{C}$ der gegebenen E zugeordnet; B, $\mathfrak{B}$ seien die Endpunkte der Halbachsen b, $\sqrt{b^2+\lambda}$. Von $\mathfrak{B}$ aus werde an E eine Tangente gelegt und mit φ_0 der Bestimmungswinkel des Berührungspunktes bezeichnet. Dann folgt nach $\mathfrak{A}$):

$$\varphi_0 = am\,\tfrac{1}{2}u.$$

Die dem Winkel φ_0 entsprechende Ellipse $\mathfrak{C}_0$ habe zu Halbachsen $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, $\sqrt{b^2+\lambda_0}$, so sind diese mittelst der Formeln 4) aus c_0, s_0 zu berechnen. Aber diese Functionen lassen sich sehr leicht durch die zu φ gehörigen c, s ausdrücken. Die Figur ergiebt sogleich:

$$\frac{b}{\cos\varphi_0} = \sqrt{b^2+\lambda},$$

daher

$$\cos\varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda}}, \quad \Delta(\varphi_0) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}}$$

und

$$6) \qquad c_0 = \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda}}, \quad s_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda}}.$$

Substituirt man aus 4) die Werthe von $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$:

$$7) \qquad c_0^2 = \frac{c(1+s)}{c+s}, \quad s_0^2 = \frac{s(1+c)}{c+s}.$$

Somit die Verdoppelungsformeln:

$$8) \qquad c = \frac{-1+c_0^2+s_0^2}{1-c_0^2+s_0^2}, \quad s = \frac{-1+c_0^2+s_0^2}{1+c_0^2-s_0^2}.$$

Weil nach 4):

$$a^2+\lambda_0 = a^2\,\frac{c_0+s_0}{s_0(1+c_0)},$$

so folgt aus 6):

$$a^2+\lambda_0 = a\,\frac{a\sqrt{b^2+\lambda}+b\sqrt{a^2+\lambda}}{b+\sqrt{b^2+\lambda}}, \quad b^2+\lambda_0 = b\,\frac{a\sqrt{b^2+\lambda}+b\sqrt{a^2+\lambda}}{a+\sqrt{a^2+\lambda}}.$$

Nach 5), 6):

$$\sqrt{a^2+\lambda} = a\,\frac{1}{s_0} = a\,\frac{a^2b^2+2b^2\lambda_0+\lambda_0^2}{a^2b^2-\lambda_0^2}, \quad \sqrt{b^2+\lambda} = b\,\frac{a^2b^2+2a^2\lambda_0+\lambda_0^2}{a^2b^2-\lambda_0^2}.$$

Hiermit ist zugleich die Aufgabe erledigt, die dem Winkel $am\,2u$ zugeordnete Ellipse $\mathfrak{C}'$ zu construiren. Man findet ihre Halbachse $\sqrt{b^2+\lambda'}$, indem man die Tangente im Punkte φ bis zum Durchschnitt $\mathfrak{B}'$ mit MB

verlängert; $\sqrt{a^2+\lambda'}$, $\sqrt{b^2+\lambda'}$ sind ebenso durch $\sqrt{a^2+\lambda}$, $\sqrt{b^2+\lambda}$ auszudrücken, wie diese durch $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, $\sqrt{b^2+\lambda_0}$.

Das Voranstehende liefert auch die Multiplication und Division eines elliptischen Integrals durch irgend eine Potenz von 2 auf eine anschauliche Weise.

Bezeichnet man noch das Segment BT_1 mit $\mathfrak{r}$, so ist, weil $T_1\varphi$ eine Berührende von E:

$$\frac{b}{\cos\varphi} - b : \frac{b}{\cos\varphi} - b\,.\cos\varphi = \mathfrak{r} : a\sin\varphi, \text{ also } \mathfrak{r} = a\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi;$$

dies führt zu einer neuen Construction der zum Winkel φ gehörigen Ellipse $\mathfrak{E}$.

Da weiter:

$$\frac{\mathfrak{r}^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} = 1, \text{ d. h. } \mathfrak{r} = \sqrt{\lambda\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}};$$

so kommt mittelst 6):

$$tang\,\varphi_0\,\Delta(\varphi_0) = tang\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

die bekannte Folge von $\varphi_0 = am\,\frac{1}{2}u$.

V.

$\mathfrak{A}$) Die Bedingung $\varphi = am\frac{4K}{n}$ liefert ein der E umschriebenes elliptisch reguläres nEck P_1 von einem Umlauf. Es sei der $\mathfrak{E}$ einbeschrieben, deren Halbachsen $\sqrt{a^2+\lambda}$, $\sqrt{b^2+\lambda}$. Das der E umschriebene reguläre $2n$Eck p_1 von einem Umlauf ist in die Ellipse $\mathfrak{E}_0$ von den Halbachsen $\sqrt{a^2+\lambda_0}$, $\sqrt{b^2+\lambda_0}$ beschrieben. Wenn P_1 vorliegt, so hat man p_1 sofort, und umgekehrt (IV). p_1 wird aber bestimmt durch die Relation $\varphi_0 = am\frac{2K}{n}$. Aus dieser folgt eine algebraische Gleichung zwischen c_0, s_0: $f(c_0, s_0) = 0$, aus welcher mittelst 4):

$$c_0 = \frac{a^2b^2 - \lambda_0^2}{a^2b^2 + 2a^2\lambda_0 + \lambda_0^2}, \quad s_0 = \frac{a^2b^2 - \lambda_0^2}{a^2b^2 + 2b^2\lambda_0 + \lambda_0^2}$$

λ_0 erhalten wird. Ersetzt man dagegen nach 6) c_0, s_0 durch $\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda}}$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda}}$, so findet man λ.

Herr Richelot hat in einer ausgezeichneten Arbeit (Crelle, Bd. 38) als Fortsetzung der von Jacobi begonnenen Untersuchung (Crelle, Bd. 3) aus jener transcendenten Bedingungsgleichung $\varphi_0 = am\frac{2K}{n}$ die algebraische abgeleitet und sie in ihrer einfachsten Form aufgestellt.

Der kürzeste Weg, sich diese zu verschaffen, ist wohl folgender:

Sei $\frac{2K}{n} = u_0$, n eine ungerade Zahl $2m+1$. Theilt man die halbe

Peripherie von E von B aus in $2m+1$ gleiche Theile (im erklärten Sinne), so liegen je m Theilpunkte symmetrisch gegen die grosse Achse, und nach unseren Sätzen muss die Tangente im $m$ten Theilpunkte die grosse Achse in einem Hauptscheitel der Confocalen $\mathfrak{E}_0$ schneiden, woraus denn geometrisch folgt:

$$\sin^2 am\, m u_0 = \frac{a^2}{a^2+\lambda_0}, \text{ nach 4): } = \frac{s_0(1+c_0)}{c_0+s_0}.$$

Ist nun erstens die Zahl $2m+1$ von der Form $4h+1$, so geben nach Richelot's Bezeichnung die Multiplicationsformeln der elliptischen Functionen:

$$\frac{\sin am\, 2h u_0}{\sin am\, u_0} = s_0 \frac{S_{2h}}{N_{2h}}$$

mit Hilfe von 9) die Gleichung:

$$\alpha) \qquad N_{2h}^2 - s_0(1-c_0)(c_0+s_0) S_{2h}^2 = 0.$$

Ist zweitens $2m+1$ von der Form $4h+3$, so kommt:

$$\frac{\sin am\, (2h+1) u_0}{\sin am\, u_0} = \frac{S_{2h+1}}{N_{2h+1}};$$

folglich:

$$\beta) \qquad (1-c_0)(c_0+s_0) S_{2h+1}^2 - s_0 N_{2h+1}^2 = 0.$$

Wie die der Null gleichzusetzenden Ausdrücke von einem darin enthaltenen überflüssigen Factor befreit werden, ist bei Richelot nachzusehen.

Beispiel. Für ein der Ellipse umschriebenes Sechseck ist $2m+1=3$ $mu_0 = u_0$; daher 9):

$$\sin u_0^2 = 1 - c_0^2 = \frac{s_0(1+c_0)}{c_0+s_0};$$

also:

$$f(c_0, s_0) = c_0 + s_0 - 1 = 0.$$

Der Uebergang zum Dreieck einerseits, zum Zwölfeck andererseits bleibe dem Leser überlassen.

Eigenschaften der einer Ellipse E umschriebenen elliptisch regulären Polygone P.

$\mathfrak{B}$) Ist P ein $2n$ Eck, so sind seine Ecken paarweise Endpunkte von Durchmessern der Confocalen $\mathfrak{E}$. Die Berührungspunkte der Seiten auf E sind paarweise Endpunkte von Durchmessern dieser Ellipse.

Ist P ein $4n$ Eck und liegt der Punkt T als Berührungspunkt einer Seite von P in irgend einem Quadranten von E, so treten nothwendigerweise in den beiden Nebenquadranten die beiden Punkte als Berührungspunkte von Seiten des P auf, welche T als Fagnanische Punkte zugeordnet sind. — In jedem Ellipsenquadranten befinden sich also stets gleichviele Berührungspunkte. Errichtet man in den auf einen Quadranten kommenden Punkten Normalen auf E und nimmt deren Abstände vom Mittelpunkte von E, so geben diese eine constante Summe. Bildet man für die Punkte, welche in zwei Nebenquadranten liegen, die Summen ihrer Bogenabstände von ungleichnamigen Scheiteln, so ist die Differenz dieser Summen der constanten Summe der Normalen-Abstände gleich.

C) Die in Rede stehenden Polygone sind mit denen identisch, auf welche Herr Steiner durch anderweitige Untersuchungen geführt wurde. Dieser berühmte Geometer scheint die vorstehenden Beziehungen zur eingeschriebenen Ellipse nicht bemerkt zu haben; aber er theilt ohne Beweis folgende schöne Sätze mit.

Erster Satz. Das der Ellipse E umschriebene, einer Confocalen $\mathfrak{E}$ einbeschriebene nEck P_i von i Umläufen hat unter allen übrigen gleichartigen (convexen nEcken von i Umläufen), welche der E umschrieben sein können, einen kleinsten Umfang.

Ein der E umschriebenes nEck kann nämlich nur dann eines vom kleinsten Umfang sein, wenn es die Eigenschaft besitzt, dass die Normale auf E in dem Berührungspunkte T irgend einer Seite v desselben sich mit den Halbirungslinien der an dieser Seite liegenden Ausenwinkel von P_i in einem Punkte schneidet. Beschreibt man in das von 3 auf einander folgenden Seiten u, v, w gebildete Dreiseit einen Kreis, so lässt sich leicht zeigen, dass, wenn der Berührungspunkt dieses Kreises und der Seite v nicht mit T zusammenliegt, durch eine blose Veränderung der Lage von v, durch welche der Abstand jener Berührungspunkte abnimmt, der Umfang von P_i verkleinert wird. Fallen aber diese beiden Berührungspunkte zusammen, so liegen die Ecken von P_i auch in einer mit E confocalen Ellipse:

Denn U, W seien die Eckpunkte, in welchen w, v und v, u zusammenstossen, Z der Mittelpunkt des in das Dreiseit $u\,v\,w$ beschriebenen Kreises. Denkt man durch U eine mit E confocale Ellipse gelegt, so hat diese erstens die Gerade $Z\,U$ zur Tangente, weil diese den Winkel vw halbirt. Zu beweisen bleibt zweitens, dass die Confocale auch den Punkt W aufnimmt. Da die Gerade ZT normal auf v steht, so ist nach einem bekannten Satze Z der Pol von v in Bezug auf die gedachte Confocale. Würde diese demnach die v statt in W in einem anderen Punkte X schneiden, so müsste XZ Tangente der Confocalen sein, und ferner müsste ZX, wenn von X noch eine Tangente an E gedacht wird, gegen v und diese letztere gleiche Neigung haben, was offenbar dem widersreitet, dass $Z\,W$ gegen v und u gleich geneigt ist. Daher liegt W in der Confocalen, ebenso die folgenden Ecken von P_i.

Zweiter Satz. Das der Ellipse E eingeschriebene, einer Confocalen umschriebene nEck P_i hat unter den gleichartigen der E eingeschriebenen nEcken einen grössten Umfang.

Ein der E eingeschriebenes nEck kann nämlich nur dann eins vom grössten Umfang sein, wenn ihm die Eigenschaft zukommt, dass seine Winkel durch die in ihren Scheiteln stehenden Normalen von E gehälftet werden. Denn halbirt etwa die Normale in der Ecke V den von den Seiten UV, VW gebildeten Winkel nicht, so lässt sich leicht darthun, dass man ein grösseres mit dem vorliegenden gleichartiges nEck bildet, wenn man ohne an dem einen, in den Ecken U, W begrenzten Theile des Polygons etwas zu ändern, die Ecke V an die Stelle des Bogens UW rückt, wo die Normale den Winkel UVW halbirt. Hat aber das Polygon die erforderliche Eigenschaft, so ist es auch einer mit E confocalen Ellipse umschrieben. Davon endlich, dass diese letztere eine völlig bestimmte E ist, und dass es nicht eine zweite Confocale giebt, der ein mit P_i gleichartiges der E eingeschriebenes nEck umschrieben werden kann, überzeugt man sich am besten an einer Figur: Man stelle sich eine von E umschlossene Confocale E' vor, ziehe als erste Seite von P_i eine Tangente im Endpunkte der kleinen Achse von E bis zur Ellipse $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$; zugleich ziehe man im Endpunkt der kleinen Achse von E' eine Tangente bis $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{C}$; von $\mathfrak{A}$ aus lege man die zweite Seite $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von P_i tangirend an E, zugleich von $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ tangirend an E' u. s. f. Dann gewahrt man sogleich, dass die Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ ... nothwendig den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... stets auf $\mathfrak{C}$ voraus sein müssen. Schliessen sich daher die beiden Polygone gleichzeitig zum ersten Male, so muss das zweite wenigstens einen Umlauf mehr haben; d. h. es ist ihm nicht mehr gleichartig.

Man darf hiernach von einem, einer Ellipse eingeschriebenen elliptisch regulären nEck sprechen. Damit ist dann ein nEck von iUmläufen (n, i natürlich relative Primzahlen) zu verstehen, welches einer völlig bestimmten mit jener confocalen Ellipse als elliptisch reguläres Polygon umschrieben ist.

Dritter Satz. Der Umfang aller nEcke P_i, welche zwischen zwei confocalen Ellipsen, der einen E umschrieben, der andern $\mathfrak{C}$ eingeschrieben sind, ist constant. Oder: Alle elliptisch regulären nEcke P_i haben einerlei Umfang; und zwar gilt dies für die umschriebenen sowohl, wie für die eingeschriebenen nEcke (natürlich ist der Umfang verschieden bei zwei nEcken, die bei derselben Ellipse zu der einen und andern Kathegorie gehören).

In der That, wenn man beachtet, dass je zwei in einer Ecke A von P_i zusammenstossende Seiten mit dem Element der Curve $\mathfrak{C}$ gleiche Winkel bilden, so begreift man, dass durch Uebergang von einem Polygone zu dem unendlich nahen, der Umfang keine Aenderung erleidet.

Nach Steiner soll dieser constante Umfang sein: $\alpha\Sigma(\cos x + \cos y)$, α ist die grosse Halbachse $\sqrt{a^2+\lambda}$ von $\mathfrak{C}$, x, y bedeuten die Winkel, in welche der von einem bestimmten Brennpunkte F von $\mathfrak{C}$ nach der Ecke A gezogene Leitstrahl den Polygonwinkel TAT' theilt.

Beweis. Der zweite Brennpunkt sei G. AT, AT' sind zwei Tangenten an E; T, T' ihre Berührungspunkte. Die nach F, G gezogenen Leitstrahlen seien für A: p, q; für T: t, u; für T': t', u'. Der Winkel, den t, u mit TA bilden sei w, der Winkel von t', u' mit $T'A$ sei w'.

Die gewöhnliche Construction der Tangenten von einem Punkte ausserhalb der Ellipse giebt:

$$AT = p\cos x - t\cos w,\ AT = u\cos w + q\cos y,\ AT' = q\cos x - u'\cos w',$$
$$AT' = t'\cos w' + p\cos y.$$

Also durch Addition

$$AT + AT' = \left[\frac{u-t}{2}\cos w\right] + a(\cos x + \cos y) + \left[\frac{t'-u'}{2}\cos w'\right].$$

In der Summe der ähnlichen Ausdrücke erscheint das eingeklammerte Endglied als Anfangsglied mit entgegengesetztem Vorzeichen bei jedem folgenden Summanden, und hebt sich fort.

Schliesst sich daher das Polygon, ist T wieder zuletzt Berührungspunkt, so hebt sich dann auch das Anfangsglied und man hat die Steiner'sche Formel.

Ein anderer, bemerkenswerther Ausdruck für dieselbe constante Summe ist:

$$2\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\lambda}\,\Sigma\frac{\Delta(\psi)]^2}{b^2+\lambda[\Delta(\psi)]^2}$$

Die ψ sind die Complemente der excentrischen Anomalien für die Berührungspunkte der Seiten.

B) Aus einem der E umschriebenen elliptisch regulären n Eck P, von einem Umlauf kann man ein n Eck von i Umläufen (i, n relative Primzahlen) ableiten. Man findet nämlich einen Punkt der confocalen Ellipse, in welcher das sternförmige Polygon P_i eingeschrieben ist, wenn man die $q$te und $(q+i)$te Seite von P_1 bis zu ihrem Durchschnitt verlängert. Man erhält es direct, wenn man fortfährt und die $(q+1)$te Seite bis zum Durchschnitt mit der $(q+i+1)$ten verlängert u. s. w. Umgekehrt, wenn ein n Eck von i Umläufen vorliegt, so ist damit ein n Eck von einem Umlauf gegeben.

Wenn aber ein Polygon P_i betrachtet wird als regulär elliptisches, das der E einbeschrieben ist, so kann man nach dem Bisherigen n i c h t das e i n g e s c h r i e b e n e reguläre n Eck von einem Umlauf construiren, noch umgekehrt von diesem zu jenen gelangen.

C) Hat man das Integral $2K$ in n, und in ν gleiche Theile getheilt (wo n, ν relative Primzahlen), so kann man es durch eine geometrische Construction in $n\nu$ gleiche Theile theilen:

$$\varphi_0 = am\frac{2K}{n},\quad \varphi = am\frac{2K}{\nu}.$$

1) Ziehe in den Punkten φ_0, φ von E zwei Tangenten, durch ihren

Durchschnitt eine mit E confocale Ellipse: bestimme den Winkel $am\,t$, welchen die Confocale der E zugeordnet ist. Dann ist

$$t = \frac{n-\nu}{n\nu} 2K = \frac{n-\nu}{2n\nu} 4K.$$

Wenn nun $n-\nu$ eine ungerade Zahl ist, so ist nach β) die Aufg zu lösen; wenn aber $n-\nu$ die $p$te Potenz von 2 und keine höhere als I tor enthält, so construire man nach IV $am \frac{t}{2^p}$, und verfahre dann nach

2) Es reichen hiezu auch die beiden, der E durch die Winkel φ_0, φ geordneten confocalen Ellipsen aus. Die ganze Peripherie von E de ich in $\alpha\beta$ gleiche Theile getheilt. Zieht man in irgend zwei Theilpu ten, die durch α solcher Theile getrennt sind, zwei Tangenten, so sch den sich diese auf der Confocalen von E, die zum Winkel $am \frac{4K}{\beta}$ geh Theilt man daher mit Hülfe der zu $am \frac{4K}{\alpha}$ gehörigen Confocalen die E erst in α gleiche Theile, dann mit Hülfe der andern Confocalen von je der α Theilpunkte aus jedesmal in β gleiche Theile, so erhält man si $\alpha\beta$ gleiche Theile getheilt, wenn α, β relative Primzahlen si Haben α, β den grössten Theiler τ und ist $\alpha = \tau . \alpha'$, $\beta = \tau . \beta'$, so si man, das bei den ersten α' Theilungen von je β Theilen jedesmal β ne Theilpunkte erhalten werden, dass aber später alle früheren der Re nach wiederkehren. Mit Hülfe der beiden Confocalen erh man $\alpha'\beta$ Theilpunkte, also ebenso viele, als das klein Vielfache von α, β angiebt. Es leuchtet ein, dass sie mit denen sammenfallen, welche die E in $\alpha'\beta$ gleiche Theile theilen. $\alpha =$ $\beta = 2\nu$ giebt $\alpha'\beta = 2n\nu$, wie vorher verlangt wurde.

δ) Zum Schluss möge eine Anwendung auf einen besonderen Fall I Platz finden (Fig. 3, Taf. I):

Die einer Ellipse E umschriebenen Vierecke von kl stem Umfang sind Parallelogramme $\left(\varphi = am\,K = \frac{\Pi}{2}\right)$. Il Ecken liegen in einer mit E confocalen Ellipse $\mathfrak{E}$ von Halbachsen $\sqrt{a^2+ab}$, $\sqrt{b^2+ab}$. Ihre Seiten berühren die I Fagnani'schen Punkten. Ihr Umfang ist constant $= 4\,(a +$ Die Normalen von E in den Berührungspunkten der Ec eines solchen Parallelogramms haben vom Mittelpun der E gleichen Abstand. Die Polarfiguren dieser Par lelogramme in Bezug auf $\mathfrak{E}$ sind dieser umschriebene Rec ecke, deren Ecken auf einem Kreise vom Radius $a+b$ l gen. — Analog: Die einer Ellipse eingeschriebenen Vierecke von gr tem Umfange sind Parallelogramme u. s. w.

2) In 1) wurden unter Fagnani'schen Punkten zwei in Nebenquadranten befindliche Punkte von E verstanden, für welche die Differenz ihrer Bogenabstände von ungleichnamigen Scheiteln rectificabel ist. Ordnet man die beiden, in demselben Quadranten, einander zu, so wie ihre entsprechenden, im gegenüberliegenden Quadranten, und beschreibt das Parallelogramm, dessen Seiten die E in diesen vier Punkten berühren, so liegen seine Ecken auf einer mit E confocalen Hyperbel $\mathfrak{H}$. Die Differenz zweier zusammenstossenden Seiten ist $2(a-b)$. Die Halbachsen von $\mathfrak{H}$ sind $\sqrt{a^2-ab}$, $\sqrt{b^2-ab}$. Die Polarfiguren dieser Parallelogramme in Bezug auf $\mathfrak{H}$ sind der $\mathfrak{H}$ umschriebene Rechtecke, deren Ecken auf einem Kreise vom Radius $a-b$ liegen.

Die in 1) und 2) vorkommende umhüllte Ellipse E ist von den beiden mit ihr concentrischen Kreisen $(a+b)$, $(a-b)$, die Polarfigur; von jenem in Bezug auf $\mathfrak{E}$, von diesem in Bezug auf $\mathfrak{H}$.

XII.

Ueber die Abweichung des freien Falles der Körper von der Verticalen.

Von Dr. LUDW. MATTHIESSEN,
Lehrer der Physik am Gymnasium in Jever.

In einer früheren Mittheilung (Jahrg. V dieser Zeitschrift) von Bacaloglo über die Richtungsänderung der Verticalen in der äusseren Verlängerung der Normalen eines Punktes der Erdoberfläche hat derselbe eine Notiz von Puiseux (*Compt. rend.* 1856, Bd. 42, S. 683) über die Wirkung der Umdrehung der Erde auf die Bewegung irdischer Körper einer theilweisen Prüfung unterworfen, wobei er auf zum Theil entgegengesetzte Resultate geführt worden ist. Das Interessante dieser Frage macht es wünschenswerth, dieselbe hier nochmals zu erörtern, namentlich da in der gedachten Mittheilung einige nicht unbedeutende Irrthümer enthalten sind. Aus der Notiz von Puiseux ist dem Verfasser nur das Wenige bekannt geworden, was Bacaloglo in der Vergleichung desselben mit seinen Resultaten erwähnt. Da die Notiz von Puiseux selbst auch nur auf die Resultate hindeutet, so soll im Folgenden die Theorie etwas ausführlicher entwickelt werden.

Was zunächst die von Bacaloglo aufgestellten Formeln anbelangt, so ist bekannt, dass (S. 60, Z. 10 v. o.) „die Gesammtwirkung des Erdellipsoides auf den äusseren Punkt M_1 nicht in der Richtung der Normalen $M_1 N_1$ an dem durch M_1 gelegten homofocalen Ellipsoide $A_1 B_1$ stattfindet,“ dass also die Formel für den Winkel α_1 (Z. 5 v. u.) unrichtig ist. Da ebendasselbe von der Massenattraction des Erdellipsoides auf den Punkt M gilt, und also in Formel 1) die Wirkung der Centrifugalkraft schon enthalten ist, so ist in jener Gesammtwirkung auf den äusseren Punkt M_1 nach Einführung der Umdrehung der Erde (S. 61, Z. 14 u. 16) nicht auf die Differenz Δ, sondern auf die Wirkung der ganzen Centrifugalkraft $\frac{v_1^2}{\varrho_1}$ Rücksicht zu nehmen. Auch leuchtet nicht recht ein, wie (S. 62, Z. 8 v. o.) die Be*trachtung der Homofocalität* vernachlässigt werden dürfe. Bei Vermeidung dieser Fehler würde sich ergeben haben, dass die Resultate, zu denen Puiseux durch seine Untersuchungen gelangt ist, richtig sind; nämlich:

1) dass ein frei hängender, homogener Faden eine parabolische Curve bildet, welche ihre concave Seite dem nächsten Erdpole zuwendet;
2) dass ein in seinem Schwerpunkte aufgehängter, in der Meridianebene liegender Stab sich so zu stellen strebt, dass sein unteres Ende ebenfalls gegen den nächsten Pol sich hinneigt, also auf der nördlichen Halbkugel gegen Norden gerichtet ist.

Um dieses Problem mit genügender Schärfe zu lösen, ist es nothwendig, die Richtung der Verticalen in allen Punkten ausserhalb des Erdsphäroid zu bestimmen. Diese wird gefunden aus den Eigenschaften der Niveauflächen, indem man zu diesen die Flächen bestimmt, welche dieselben normal durchschneiden. Die Methode der Bestimmung der Normalflächen irgend einer gegebenen Fläche soll hier vorangehen und an einigen verwandten Beispielen erläutert werden.

Bedeuten x, y die Coordinaten der Niveaulinien, η, ξ die der Normalcurven, so ist für irgend einen Punkt P eines Ebenenschnittes parallel der x, y Ebene oder für ein constantes z

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}+1=0, \quad \text{oder} \quad \frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{dx}{dy}.$$

Um die Gleichung der gesuchten Trajectorie zu finden, hat man also die Gleichung der Curve $y=f(x)$ oder $\varphi(x,y)=0$ nach x zu differentiiren, in $f'(x)$ oder $\varphi'(x,y)=\frac{dy}{dx}$ statt x und y zu setzen ξ und η und die constanten Grössen, welche beim Uebergange von einer Curve $\varphi(x,y)$ zur nächstfolgenden, unendlich nahe liegenden $\varphi(x,y+\delta y)$ variiren, mittelst der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ zu eliminiren. Auf diese Weise erhält man die Differentialgleichung der Trajectorie

$$\frac{d\eta}{d\xi}+F(\xi,\eta)=0.$$

Die Schmiegung der Trajectorie ergiebt sich alsdann aus der Beschaffenheit des Werthes $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, auf dessen Vorzeichen man ausser der Differentiirung obiger Gleichung auch aus demjenigen von $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$ schliessen kann. Seien P, Q, R drei unendlich nahe liegende Punkte der Trajectorie ST (Fig. 4, Taf. I) für ein constantes Differential von ξ, ferner dx gleich $d\xi$, so ergeben sich aus der Betrachtung der einander unendlich nahe liegenden Niveaulinien AB und $A_1 B_1$ folgende Gleichungen:

$$PM=y;\ Pm=dy;\ MM_1=m\mu_1=dx;\ \frac{Q_1 r}{\mu Q}=\delta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$
$$Pm_1=Qm_2=d\xi;\ Qm_1=d\eta;\ RR_1=d^2\eta.$$

Nehmen wir weiter an, dass $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ohne Aenderung der Abscisse variirt werde und, wie sich aus der Betrachtung der Figur ergiebt, einen positiven Werth erhalte, so wird diese Variation ausgedrückt:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dA}\left(\frac{dA}{dx}\right)\delta x = \frac{d\varphi'(x,y,A)}{dA}\left(\frac{dA}{dx}\right)\delta x = + W;$$

wenn man die Achse OA kurz mit A bezeichnet.

Da andererseits $\frac{dy}{d\xi} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ ist, so differentiirt diese Gleichung in

$$d\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \frac{d^2\eta}{d\xi} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

und weil offenbar $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ mit $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dasselbe Vorzeichen ist, so ist auch $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ positiv, d. h. die Trajectorie ist gegen die Y Achse convex gekrümmt.

1. Untersuchen wir zunächst die Trajectorie, welche alle Ellipsen, die unter sich ähnlich und um ihren Mittelpunkt ähnlich gelegen sind, senkrecht durchschneidet, so wird dieselbe die Richtung der Verticalen innerhalb der Niveauflächen eines als homogen gedachten Erdellipsoides verfolgen. Ziehen wir dabei die Niveaulinien eines Meridians in Betracht und nehmen in Uebereinstimmung mit der im Attractionscalcül allgemein adoptirten Bezeichnungsweise die OX zur kürzeren oder Polarachse und OY zur Aequatorialachse (Fig. 5, Taf. I), so ist die allgemeine Gleichung derselben:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (1+\lambda^2)(a^2 - x^2)$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wenn man nun ξ statt x setzt, so wird

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}$$

die Differentialgleichung der Trajectorie. Eliminirt man a vermittelst der gegebenen Gleichung und setzt η statt y, so resultirt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{1+\lambda^2}\cdot\frac{\eta}{\xi},$$

folglich ist $\log nat\, \eta = \log nat\, C\xi : (1+\lambda^2)$.

Geht die Trajectorie durch den Punkt (x,y), so ist ebenfalls

$$log\, nat\, y_1 = log\, nat\, C\,.\, x_1 : (1+\lambda^2).$$

Wird diese Gleichung von dem unbestimmten Integrale subtrahirt, so erhält man:

$$log\, nat\, \frac{\eta}{y_1} = log\, nat\, \frac{\xi}{x_1} : (1+\lambda^2)$$

oder

$$\xi = x_1 \left(\frac{\eta}{y_1}\right)^{1+\lambda^2}.$$

Die Trajectorie ist also eine parabolische Curve, so lange nicht λ^2 gleich Null ist. Da für positive Coordinaten ξ und η das zweite Differential negativ ist, nämlich

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\cdot\frac{\eta}{\xi^2},$$

so ist die Curve gegen die Polarachse concav. Die Schmiegung derselben ergiebt sich aus der Gleichung für den Krümmungsradius

$$\varrho = \mp \frac{[\xi^2(1+\lambda^2)^2+\eta^2]^{\frac{3}{2}}}{\eta\,\xi\,\lambda^2(1+\lambda^2)}.$$

Für $\eta=\xi=0$ erhält man $\varrho=\infty$. Für die Annahme $a=b$ bilden die Niveaulinien concentrische Kreise und die Gleichung der Trajectorie geht über in die einer Geraden, welche durch den gemeinschaftlicheu Mittelpunkt geht, nämlich

$$\eta = \frac{y_1}{x_1}\,\xi.$$

Für $1+\lambda^2=2$ sind die Trajectorien Parabeln, für $1+\lambda^2=3$ Neil'sche Parabeln u. s. w.

2. Es soll die Gleichung derjenigen Trajectorien bestimmt werden, welche alle homofocalen Ellipsen unter rechten Winkeln schneidet. Bezeichnen wiederum ξ und η die Coordinaten derselben, so ist

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2}\eta^2 + \xi^2;\quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi},$$

wo a und b variabel, aber durch die Gleichung

$$b^2 - a^2 = b_0{}^2 - a_0{}^2 = \lambda^2 a_0{}^2$$

aneinander gebunden sind. Eliminirt man a zwischen diesen Gleichungen, so erhält man

$$\eta\,\xi\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 - (\eta^2-\xi^2-\lambda^2 a_0{}^2)\frac{d\eta}{d\xi} - \eta\,\xi = 0,$$

oder auch

$$\left(\eta\frac{d\eta}{d\xi}+\xi\right)\left(\xi\frac{d\eta}{d\xi}-\eta\right) + \lambda^2 a_0{}^2\frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie mit 4η und setze $\eta^2 = z$, so verwandelt sich dieselbe in

$$\left(\frac{dz}{d\xi}+2\xi\right)\left(\xi\frac{dz}{d\xi}-2z\right)+2\lambda^2 a_0^2\frac{dz}{d\xi}=0.$$

Differentiirt man diese m-mal nach ξ, so ist

$$\frac{d^m}{d\xi^m}\left[\left(\frac{dz}{d\xi}+2\xi\right)\left(\xi\frac{dz}{d\xi}-2z\right)\right]+2\lambda^2 a_0^2\frac{d^m z}{d\xi^m}=0,$$

worin der erste Theil

$$=\left(\frac{dz}{d\xi}+2\xi\right)\left\{\xi\frac{d^{m+1}z}{d\xi^{m+1}}+(m-2)\frac{d^m z}{d\xi^m}\right\}$$

$$+\frac{m}{1}\left(\frac{d^2z}{d\xi^2}+2\right)\left\{\xi\frac{d^m z}{d\xi^m}+(m-3)\frac{d^{m-1}z}{d\xi^{m-1}}\right\}$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^3z}{d\xi^3}\left\{\xi\frac{d^{m-1}z}{d\xi^{m-1}}+(m-4)\frac{d^{m-2}z}{d\xi^{m-2}}\right\}+\ldots$$

$$+\frac{d^{m+1}z}{d\xi^{m+1}}\left\{\xi\frac{dz}{d\xi}-2z\right\}.$$

Setzt man nun in der Taylor'schen Reihe a statt x und $\xi-a$ statt h, so nimmt sie die Form

$$z=f(\xi)=f(a)+\frac{\xi-a}{1}.f'(a)+\frac{(\xi-a)^2}{1.2}.f''(a)+\ldots$$

an, welche jedenfalls ihre Giltigkeit haben und der vorgelegten Gleichung genügen wird, wenn aus dieser folgt, dass von einer bestimmten Stelle an $f^{(n)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)\ldots$ sämmtlich Null sind für ein beliebiges ξ. Setzen wir nun $\xi=a=0$, und $m=1,2,3\ldots$, so ist:

$$f(0)=-2z\frac{dz}{d\xi}+\lambda^2a_0^2\frac{dz}{d\xi}=0;\quad \frac{dz}{d\xi}=f'(\xi)=0;$$

da ferner

$$f'(\xi)=\left(\frac{dz}{d\xi}+2\xi\right)\left(\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}-\frac{dz}{d\xi}\right)+\left(\xi\frac{dz}{d\xi}-2z\right)\left(\frac{d^2z}{d\xi^2}+2\right)+2\frac{d^2z}{d\xi^2}=0,$$

so wird für $\xi=0$,

$$f'(0)=-2z\frac{d^2z}{d\xi^2}-4z+2\lambda^2a_0^2\frac{d^2z}{d\xi^2}=0;\quad \frac{d^2z}{d\xi^2}=f''(\xi)=\frac{2z}{\lambda^2a_0^2-z};$$

$$f''(0)=-2z\frac{d^3z}{d\xi^3}-4\frac{dz}{d\xi}-2\frac{d^2z}{d\xi^2}.\frac{dz}{d\xi}+2\lambda^2a_0^2\frac{d^3z}{d\xi^3}=0;\quad f'''(\xi)=0;$$

u. s. w. allgemein von dieser Stelle an $f^{(n)}(\xi)=0$.

Wenn man nun für $\xi=0$ den Werth von $z=a$ setzt, so ist

$$\eta^2=z=f(\xi)=c+\frac{\xi^2}{2}.\frac{2c}{\lambda^2a_0^2-c}=c-\frac{c\xi^2}{c-\lambda^2a_0^2};$$

dies ist die gesuchte Gleichung. Man kann dieselbe auch schreiben:

$$c-\lambda^2a_0^2=\frac{c-\lambda^2a_0^2}{c}\eta^2+\xi^2$$

und es folgt daraus, dass, wenn c positiv und $<\lambda^2a_0^2$ ist, man Hyperbeln erhält, welche mit den gegebenen Ellipsen homofocal sind und jede derselben rechtwinklig treffen. Um c zu bestimmen, nehmen wir an, dass die Trajectorie durch den Punkt (x_0y_0) gehe; dann ist

$$y_0^2 = c - \frac{c x_0^2}{c - \lambda^2 a_0^2}$$

und

$$c = \frac{x_0^2 + y_0^2 + \lambda^2 a_0^2}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + \lambda^2 a_0^2)^2 - 4\lambda^2 a_0^2 y_0^2};$$

woraus folgt, dass c stets positiv ist. Auch ist leicht einzusehen, dass wegen der nothwendigen Bestimmung $c < \lambda^2 a_0^2$, von dem doppelten Vorzeichen des irrationalen Theiles von c nur das negative zulässig ist. Für die Annahme $c > \lambda^2 a_0^2$ würde man nämlich die gegebenen homofocalen Ellipsen wieder erhalten. Um die Grenzwerthe von c zu erhalten, erwäge man, dass $c = 0$ wird für $y_0 = 0$ und $x_0 = a_0$; hingegen $c = \lambda^2 a_0^2$ für $y_0 = b_0 = \sqrt{1 + \lambda^2} . a_0$ und $x_0 = 0$. Man sieht, dass die Trajectorien Hyperbeln sind, deren grosse Achsen zwischen Null und $2\lambda a_0$ variiren. (Vgl. Fig. 6, Taf. I.)

3. Wir wollen dies Problem mit Rücksicht auf die äusseren Niveauflächen des Erdsphäroides partiell zu lösen versuchen. Die geringe Excentricität des als homogen betrachteten Erdellipsoides lässt eine Vereinfachung dieser verhältnissmässig schwierigen Aufgabe zu. Bezeichnen X und Y die Componenten der gesammten Massenanziehung auf den äusseren Punkt (x, y), so ist die Differentialgleichung der Niveaulinie in einer durch den Punkt und die Polarachse gelegten Ebene

$$X dx + (Y + w^2 y)\, dy = 0$$

oder wenn man für X und Y ihre exacten Werthe substituirt, und die Gleichung mit $\frac{\lambda^3}{2\pi f \varrho (1 + \lambda^2)}$ multiplicirt

$$\left\{ \frac{\lambda \frac{A}{A_1}}{1 + \lambda^2 \frac{A^2}{A_1^2}} - \operatorname{arctang} \lambda \frac{A}{A_1} + \frac{w^2 \lambda^3}{2\pi f \varrho (1 + \lambda^2)} \right\} y\, dy$$

$$+ 2 \left\{ \operatorname{arctang} \lambda \frac{A}{A_1} - \lambda \frac{A}{A_1} \right\} x\, dx = 0,$$

worin A die halbe kleine Achse des gegebenen, A_1 die des homofocalen durch den Punkt (x, y) gehenden Ellipsoides bedeutet. A und A_1 sind stets durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{1 + \lambda^2 \frac{A^2}{A_1^2}} = A_1^2$$

an einander gebunden, mittelst deren zunächst A_1 aus der vorliegenden Differentialgleichung eliminirt werden kann.

Da es dem Zwecke dieser Abhandlung fern liegt, eine vollständige Lösung des vorgestellten Problems zu geben, so möge hier zunächst die Bestimmung der Gleichung der beträchtlich entfernten Niveauflächen vorangehen, darauf die Gleichung der Trajectorien, welche die der Oberfläche sehr nahe liegenden Niveauflächen normal durchschneiden, und auf welche es hier hauptsächlich ankommt, folgen.

Für die Punkte der von der Oberfläche des Erdsphäroides beträchtlich entfernten Niveauflächen wird der Quotient $\frac{A^2}{A_1^2}$ sehr klein, und die Gleichung für A_1 reducirt sich auf folgende:

$$x^2 + y^2 = A_1^2$$

und mit Rücksicht darauf, dass λ^2 eine sehr kleine Grösse ist, nimmt die Differentialgleichung folgende Form an:

$$\left\{-\tfrac{2}{3}\frac{A^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{V}{1+\lambda^2}\right\} y\,dy - \tfrac{2}{3}\frac{A^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\, x\,dx = 0,$$

wobei das Rotationsmoment $\frac{n^2}{2\pi f\varrho}$ mit V bezeichnet ist. Die Integration ergiebt als Gleichung der Niveaufläche:

$$\tfrac{2}{3}\frac{A^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{V}{2}\,\frac{y^2}{(1+\lambda^2)} = \tfrac{2}{3}\frac{A^3}{a} = \tfrac{2}{3}\frac{A^3}{b} + \frac{V}{2}\,\frac{b^2}{(1+\lambda^2)}.$$

Die Gleichung der Constanten, worin A die halbe Polarachse, des Erdellipsoids, a und b die halben Achsen der Niveauflächen bezeichnen, liefert das Verhältniss $a:b$. Dividirt man nämlich die Gleichung durch $\frac{2}{3}A^3$, nimmt $V = 0{,}0023$ und die Abplattung zu $0{,}00329$ an, so erhält man:

$$\left(\frac{b}{A}\right)^3 - \frac{A}{a}\,.\,584{,}8\left(\frac{b}{A}\right) + 584{,}8 = 0,$$

oder wenn man α statt $\frac{a}{A}$, β statt $\frac{b}{A}$ setzt:

$$\alpha = \frac{584{,}8\,\beta}{\beta^3 + 584{,}8}.$$

Die Differentiale sind

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = 584{,}8\,\frac{584{,}8 - 2\beta^3}{(\beta^3 + 584{,}8)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = -\,584{,}8\,\frac{18\,\beta^5}{(\beta^3 + 584{,}8)^3}.$$

Für ein Maximum oder Minimum ist

$$2\beta^3 - 584{,}8 = 0;\quad \beta = 6{,}637$$

oder wenn man b in geographischen Meilen ausdrückt, 4847,8, welches nach Laplace die höchste Höhe der Atmosphäre ist.

Da der zweite Differentialquotient für ein positives β negativ bleibt, so erreicht α ein Maximum für $b = 6{,}637\,.\,A$, für welchen Werth $a = \frac{2}{3}b = 4{,}425\,.\,A$ wird, so dass also über diese Grenze der Niveauflächen hinaus kein Gleichgewicht der Atmosphäre mehr möglich ist und eine Zerstreuung derselben stattfinden muss. Da aus der Beschaffenheit der Gleichung dieser äussersten Niveauflächen folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ stets positiv bleibt, so gilt dasselbe von $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$; mithin ist die Trajectorie gegen die nächsten Erdpol concav gekrümmt. Das Weitere ist aus Fig. 7, Taf. I ersichtlich.

Um endlich die Gleichung der Trajectorien zu bestimmen, welche die der Erdoberfläche sehr naheliegenden Niveaufläche normal durchschneiden, kann man folgenden Weg einschlagen. Der Winkel φ_0, welchen die Normale eines Punktes O des Meridians mit der Aequatorialachse MB (Fig. 8, Taf. I) bildet, wird bestimmt durch die Gleichung

$$tang\,\varphi_0 = \frac{x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\lambda^2 + \frac{1}{7}\lambda^4 - \ldots\right)}{y\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\lambda^2 + \frac{3}{7}\lambda^4 - \ldots - \frac{V}{2(1+\lambda^2)}\right)},$$

hingegen der Winkel φ der Normale eines homologen äusseren Punktes W, der um $R+\delta$ vom Mittelpunkte entfernt ist, wenn man z für $\frac{R}{R+\delta}$ setzt, durch

$$tang\,\varphi = \frac{x_1\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\lambda^2 + \frac{z^7}{7}\lambda^4 - \ldots\right)}{y_1\left(\frac{z^3}{3} - \frac{2z^5}{5}\lambda^2 + \frac{3z^7}{7}\lambda^4 - \ldots - \frac{V}{2(1+\lambda^2)}\right)}.$$

Verwandelt man diese Function von z nach der Reihe

$$f(z) = f\left(1 - \frac{\delta}{R}\right) = f'(1) - \frac{\delta}{R}f'(1) + \frac{\delta^2}{1.2.R^2}f''(1) - \ldots,$$

so erhält man

$$tg\,\varphi = \frac{x_1}{y_1}\left[\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\lambda^2 + \frac{1}{7}\lambda^4 - \ldots}{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\lambda^2 + \frac{3}{7}\lambda^4 - \ldots - \frac{V}{2(1+\lambda^2)}} - \frac{\delta\left(\frac{2}{15}\lambda^2 - \frac{8}{21}\lambda^4 - \frac{V}{2}\right)}{R\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\lambda^2 + \frac{3}{7}\lambda^4 - \frac{V}{2(1+\lambda^2)}\right)^2}\right]$$

Für einen homologen Punkt ist $\frac{x_1}{y_1}$ gleich $\frac{x}{y}$ und für einen Ort mittlerer Breite, also etwa $x = y$, würde aus obigen Formeln der Werth $\varphi - \varphi_0$ leicht berechnet werden können. Wegen der Kleinheit dieses Winkels $\varphi - \varphi_0$ kann man nämlich setzen

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{tang\,\varphi - tang\,\varphi_0}{2},$$

also

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\delta}{R}\,\frac{\left(\frac{V}{4} - \frac{1}{15}\lambda^2 + \frac{4}{21}\lambda^4\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\lambda^2 + \frac{3}{7}\lambda^4 - \frac{V}{2(1+\lambda^2)}\right)^2},$$

woraus die ausserordentliche Kleinheit des gesuchten Winkels deutlich wird. Nimmt man

$$V = 0{,}0022907, \quad \sqrt{1+\lambda^2} = 1{,}00433441 \text{ (Newton)},$$
$$\delta = 1000^{\text{m}}, \quad R = 6376000^{\text{m}},$$

so findet man nur $0^{\text{sec}}{,}00292$ Abweichung. Wählt man dagegen statt jenes zuerst von Newton für ein homogenes Erdellipsoid berechneten Werthes des Achsenverhältnisses den durch Messung bestimmten $\sqrt{1+\lambda^2} = 1{,}003345$, so ergiebt sich

$$\varphi - \varphi_0 = 0^{\text{sec}},041.$$

Dieser letzte Werth weicht indess aller Wahrscheinlichkeit nach mehr von dem wirklichen ab, als der erste, da wegen der Heterogeneität des Erdballs die Anziehung eine andere Function der Abplattung sein muss, als die oben angenommene. So viel scheint aber klar zu sein, dass dér von Puiseux angegebene Werth 0",17 viel zu gross ist. Aus der Natur der obigen Gleichungen folgt zunächst, dass die Trajectorie nahe an der Erdoberfläche keinen Wendepunkt hat. Denn differentiirt man $\operatorname{tang}\varphi$ nach z und setzt $\frac{d \operatorname{tang}\varphi}{dz}$ gleich Null, so wird $z > 1$, was gegen die Voraussetzung ist. Als Gleichung für ein Maximum nämlich

$$\tfrac{2}{15}\lambda^2 z^5 - \tfrac{8}{21}\lambda^4 z^7 - \frac{V}{2} = 0.$$

Da ferner $V = \frac{4}{15}\lambda^2 - \frac{8}{35}\lambda^4$, so ist auch, wenn man statt z^5 setzt $= 1 - \frac{5\delta}{R}$,

$$\tfrac{4}{3}\lambda^2 \frac{\delta}{R} + \tfrac{8}{15}\lambda^4 = 0,$$

welcher Gleichung nicht durch ein positives δ Genüge geschieht.

Um die Gleichung der Curve selbst innerhalb enger Grenzen, z. B. zwischen $\delta = 0$ und $\delta = 1000^m$, zu finden, denke man sich den Horizont von O als Abscissenachse, die Normale ON' als Ordinatenachse. Sei ferner $WM_1 = \delta$ die Ordinate, $OM_1 = s$ die Abscisse des Punktes W der Trajectorie OWP. Die Normale ON' bildet mit dem Radiusvector MOp' den Winkel $N'Op' = M_1WM_{11}$. Da dieser Winkel aber stets sehr klein ist, so ist es gestattet, die mit δ bezeichnete Ordinate dem Incremente δ' des Radiusvector MW gleich zu setzen. Innerhalb der angegebenen Grenzen kann man sich der homologen Punkte bedienen, da sich die Richtung und Grösse der Kräfte verhältnissmässig wenig ändert, wenn man in irgend einer Niveaufläche von dem Punkte N zu dem benachbarten p fortschreitet. Nun ist

$$\frac{ds}{d\delta} = \operatorname{tang}(\varphi - \varphi_0) = \frac{\delta}{R}\,\frac{\left(\frac{V}{4} - \frac{1}{15}\lambda^2 + \frac{4}{21}\lambda^4\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\lambda^2 + \ldots\right)^2},$$

und wenn man mit Berücksichtigung des Newton'schen Abplattungsquotienten substituirt:

$$V = \tfrac{4}{15}\lambda^2 - \tfrac{8}{35}\lambda^4,$$

so erhält man

$$\frac{ds}{d\delta} = \tfrac{6}{5}\lambda^4 \frac{\delta}{R}; \quad \delta^2 = \frac{5}{3\lambda^4} Rs;$$

worin die Eigenschaft der gesuchten Curve als einer **Parabel** ausgedrückt ist. Für $\delta = 1000^{m}$ findet man $s = 0^{mm},008$. Hiernach würde die Ablenkung χ eines in seinem Schwerpunkt aufgehängten Stabes nur

$$\chi = \frac{R(\varphi - \varphi_0)}{2\delta} = 9''$$

betragen.

Die Abweichung des freien Falles von der Verticalen, wegen der Umdrehung der Erde, ist viel beträchtlicher. Bezeichnet nämlich w die Winkelgeschwindigkeit, so ist, wenn wieder die Verticale als Ordinatenachse angesehen wird, und h die Fallhöhe nach der Zeit t bedeutet:

$$s_1 = \cos\varphi\,[wt(R+\delta) - wt(R+\delta-h)] = wht\cos\varphi,$$

$$h = gt^2 \text{ und } s_1^2 = \cos^2\varphi\,\frac{w^2}{g}\,h^3;\; h^3 = \frac{g}{w^2 \,.\, \cos\varphi^2}\,s_1^2 \text{ (Neil's Parabel).}$$

Wählt man, um die orthogonalen Projectionen der Fallcurve zu erhalten, den Horizont zur Grundebene, den Meridian zur Seitenebene, die durch die Verticale senkrecht zum Meridian gelegte Ebene zur Verticalebene, so stellt sich die Horizontalprojection auf der nördlichen Halbkugel als gegen SW. convex, die Verticalprojection als gegen O. concav, die Seitenprojection (Querriss) als gegen N. concav dar. Die Gleichung der Horizontalprojection ist:

$$\sqrt{\frac{5R}{3\lambda^4}}\,s^{\frac{1}{2}} = \delta - \sqrt[3]{\frac{g}{w^2\cos^2\varphi}}\,.\,s_1^{\frac{2}{3}}.$$

Die Grösse der Abweichung eines fallenden Körpers vom Fusspunkte der Verticalen beträgt hiernach für die Fallhöhe von 1000^{m} beinahe $0^{m},4$, während die von der Richtungsänderung der Verticalen herrührende nur wenig über $0^{mm},008$ beträgt, da aus den Eigenschaften der Parabel folgt, dass dieselbe innerhalb der Grenzen $0^{mm},008$ und $0^{mm},016$ fällt.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Ueber einige Integralformeln. — Setzt man zur Abkürzun $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\varrho$ und *arctang* $\frac{\beta}{\alpha}=\Theta$, so gelten bei positiven α die bekannt Formeln

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{\Gamma(\mu)\cos\mu\Theta}{\varrho^\mu},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{\Gamma(\mu)\sin\mu\Theta}{\varrho^\mu},$$

deren rechte Seiten auch durch

$$\frac{\Gamma(1+\mu)}{\varrho^\mu}\cdot\frac{\cos\mu\Theta}{\mu}\quad\text{und}\quad\frac{\Gamma(1+\mu)}{\varrho^\mu}\cdot\frac{\sin\mu\Theta}{\mu}$$

ersetzt werden können. Aus der letzteren Form erkennt man, dass d erste Integral für $\mu=0$ unendlich wird, während das zweite in demselb Falle den endlichen Werth Θ erhält, wie auch sonst schon bekannt i Es scheint unbemerkt geblieben zu sein, dass die Formeln, welche m durch Differentiation in Beziehung auf μ erhält, ein ganz ähnliches Ve halten zeigen; unter Benutzung der zweiten Form ergiebt sich nämlich

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,lx\,e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{\varrho^\mu}\left\{\frac{\Theta\sin\mu\Theta}{\mu}+\frac{(\mu\,l\varrho+1)\cos\mu\Theta}{\mu^2}\right\}+\frac{\Gamma'(1+\mu)}{\varrho^\mu}\,\frac{\cos\mu\Theta}{\mu},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,lx\,e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(1+\mu)}{\varrho^u}\left\{\frac{\mu\Theta\cos\mu\Theta-\sin\mu\Theta}{\mu^2}-\frac{l\varrho\sin\mu\Theta}{\mu}\right\}+\frac{\Gamma'(1+\mu)}{\varrho^\mu}\,\frac{\sin\mu\Theta}{\mu}.$$

Für $\mu = 0$ wird der erste Integralwerth unendlich, der zweite aber endlich $= [-l\varrho + \Gamma'(1)]\,\Theta$, d. i. weil $\Gamma'(1) = -0{,}5772156\ldots = -C$

$$1)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\alpha x}\,\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = [C + \tfrac{1}{2}l\,(\alpha^2+\beta^2)]\ \mathrm{arctang}\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Die zweite der ursprünglichen Formeln gilt übrigens auch für $\alpha = 0$, wenn μ zwischen -1 und $+1$ liegt; man kann daher die vorliegende Formel gleichfalls für $\alpha = 0$ in Anspruch nehmen, wodurch entsteht

$$2)\qquad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = (C + l\beta)\,\frac{\pi}{2},\quad \beta > 0.$$

Hieraus leitet man ohne Mühe die folgenden zwei Integralwerthe ab

$$3)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin\mu x\,\cos\nu x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{C + \tfrac{1}{2}l\,(\mu^2-\nu^2)\right\},\quad \mu > \nu.$$

$$4)\qquad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin\mu x\,\cos\nu x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\,l\left(\frac{\nu+\mu}{\nu+\mu}\right),\quad \mu < \nu.$$

Die letzte Formel lässt sich wieder zur Entwickelung des Integrals

$$S_n = \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin 2\mu x - 2\mu\sin x}{x}\,\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\,dx$$

benutzen. Es ist nämlich

$$S_n = \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$$

$$-2\mu\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx$$

und wenn man

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\,(\cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx)$$

setzt, so giebt die Ausführung aller Integrationen

$$S_n = \frac{\pi}{2}\left\{(1-2\mu)\,C + l\,(2\mu) - 2\mu\,l\,(2n+1)\right.$$

$$\left. + \,l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{2+\mu}{2-\mu}\cdots\frac{n+\mu}{n-\mu}\right)\right\}$$

wobei μ zwischen 0 und 1 liegen muss. Aus der bekannten Formel

$$\Gamma(p) = Lim\,\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,n^{p-1}}{p\,(p+1)\,(p+2)\ldots(p+n-1)},\quad (n=\infty)$$

folgt weiter

$$\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)} = Lim \left\{\frac{(1+\mu)(2+\mu)\dots(n+\mu)}{(1-\mu)(2-\mu)\dots(n-\mu)} n^{-2\mu}\right\}$$

und es kann daher

$$\frac{(1+\mu)(2+\mu)\dots(n+\mu)}{(1-\mu)(2-\mu)\dots(n-\mu)} = n^{2\mu}\left[\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)} + \varepsilon\right]$$

gesetzt werden, wo ε gegen die Null convergirt, wenn n unendlich w
Hiernach ist

$$S_n = \frac{\pi}{2}\left\{(1-2\mu)C + l(2\mu) - 2\mu\, l\left(2+\frac{1}{n}\right) + l\left(\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)} + \varepsilon\right)\right\}$$

und bei unendlich wachsenden n

$$Lim\, S_n = \frac{\pi}{2}\left\{(1-2\mu)C + l(2\mu) - 2\mu\, l2 + l\left(\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)}\right)\right\}.$$

Andererseits lässt sich $Lim\, S_n$ unmittelbar nach dem Dirichlet'
Satze

$$Lim \int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\,dx = \pi\left\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots\right\}$$

bestimmen, indem man

$$f(x) = l\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin 2\mu x - 2\mu \sin x}{x}$$

nimmt; dies giebt

$$Lim\, S_n = l\left(\frac{1}{\pi}\right)\frac{\sin 2\mu\pi}{1} + l\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{\sin 4\mu\pi}{2} + l\left(\frac{1}{3\pi}\right)\frac{\sin 6\mu\pi}{3} + \dots$$

$$= l\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{(1-2\mu)\pi}{2} - \frac{l2}{1}\sin 2\mu\pi - \frac{l4}{2}\sin 4\mu\pi - \frac{l6}{3}\sin 6\mu\pi -$$

Vergleicht man die beiden Werthe von $Lim\, S_n$ und beachtet, dass

$$\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\mu)} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)}{\mu[\Gamma(\mu)]^2} = \frac{\pi}{\mu[\Gamma(\mu)]^2 \sin\mu\pi}$$

ist, so gelangt man zu der folgenden, unter der Bedingung $0 < \mu < 1$
tigen Reihenentwickelung

$$l\Gamma(\mu) = (1-\mu)\,l\pi + (\tfrac{1}{2}-\mu)C - \tfrac{1}{2}l\sin\mu\pi$$
$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{l2}{1}\sin 2\mu\pi + \frac{l4}{2}\sin 4\mu\pi + \frac{l6}{3}\sin 6\mu\pi + \dots\right\}.$$

Im Wesentlichen stimmt dieses Resultat mit demjenigen überein,
ches Kummer auf ganz anderem Wege gefunden hat. (Crelle's Jou
Bd. 35.)

XX. Note über die Integration der Gleichung:

1) $(a_n + b_n x)\,y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1}x)\,y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x)\,y' + (a_0 + b_0 x)\,y = 0.$

Von Simon Spitzer, Professor des Merkantilrechnens an der Wiener
delsakademie.

Wir setzen, geleitet durch die Arbeiten des Herrn **Petzval**, das Integral der Gleichung 1) in folgender Form voraus:

$$2)\qquad y=\frac{\partial^h}{\partial u^h}[e^{ux}W],$$

in welcher nach vorgenommener $h$maliger Differation statt u die constante Zahl α gesetzt werden muss. Die Aufgabe ist nun, für W eine solche Function von u, und für h und α solche constante Zahlen zu finden, dass der Ausdruck 2) der Gleichung 1) identisch Genüge leistet.

Schreiben wir vorerst die Gleichung 2) folgendermassen:

$$y=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}[e^{ux}W]\right\}_\alpha,$$

dann ist

$$y'=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}[u\,e^{ux}W]\right\}_\alpha,$$

$$y''=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}[u^2e^{ux}W]\right\}_\alpha,$$

$$y^{(n)}=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}[u^ne^{ux}W]\right\}_\alpha,$$

und diese Werthe in 1) substituirt geben:

$$3)\qquad \left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\Big[\big((a_nu^n+a_{n-1}u^{n-1}+\ldots+a_1u+a_0)\right.$$

$$\left.+\,x(b_nu^n+b_{n-1}u^{n-1}+\ldots+b_1u+b_0)\big)e^{ux}W\Big]\right\}_\alpha=0.$$

Setzen wir nun der Kürze halber:

$$a_nu^n+a_{n-1}u^{n-1}+\ldots+a_1u+a_0=U_0$$

$$b_nu^n+b_{n-1}u^{n-1}+\ldots+b_1u+b_0=U_1,$$

so geht 3) über in

$$4)\qquad \left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}[(U_0+U_1x)e^{ux}W]\right\}_\alpha=0,$$

und diese Gleichung soll nun identisch stattfinden.

Damit aber

$$5)\qquad \frac{\partial^h}{\partial u^h}[(U_0+U_1x)e^{ux}W]=0$$

für $u=\alpha$ identisch werde, ist es, wie wir bemerkt haben, erforderlich, dass die Gleichung 5) in die Form

$$6)\qquad \frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[(u-\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-h\varphi\right]=0$$

gebracht werden könne, denn führt man die hier vorkommende $h$malige Differentation wirklich aus, so erhält man

$$7)\qquad (u-\alpha)\frac{\partial^{h+1}\varphi}{\partial u^{h+1}}+h\frac{\partial^h\varphi}{\partial u^h}-h\frac{\partial^h\varphi}{\partial u^h}=0,$$

was für $u=\alpha$ in der That identisch wird, wenn nur $\frac{\partial^{h+1}\varphi}{\partial u^{h+1}}$ für $u=\alpha$ nicht ∞ ist.

Wir setzen daher

$$8)\qquad (U_0 + U_1 x)\, e^{ux}\, W = (u-\alpha)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - h\varphi.$$

Damit diese Gleichung stattfinden könne, muss offenbar φ die Form haben:

$$\varphi = e^{ux} z,$$

woselbst z eine Function von u vorstellt, und setzt man φ in dieser Form voraus, so hat man:

$$(U_0 + U_1 x) e^{ux}\, W = e^{ux}\left[(u-\alpha)\frac{\partial z}{\partial u} - hz + (u-\alpha)xz\right]$$

oder beiderseits durch e^{ux} dividirt

$$9)\qquad (U_0 + U_1 x)\, W = (u-\alpha)\frac{\partial z}{\partial u} - hz + (u-\alpha)xz.$$

Diese eine Gleichung zerfällt nun in folgende zwei Gleichungen:

$$10)\qquad \begin{cases} U_0 W = (u-\alpha)\dfrac{\partial z}{\partial u} - hz, \\ U_1 W = (u-\alpha) z, \end{cases}$$

und diese zwei reichen hin zur Bestimmung von z und W. Sucht man nämlich aus der untern Gleichung z und setzt dies in die obere Gleichung, so erhält man, da

$$z = \frac{U_1 W}{u-\alpha}$$

ist,

$$U_0 W = \frac{\partial}{\partial u}(U_1 W) - (h+1)\frac{U_1 W}{u-\alpha}.$$

Hieraus folgt:

$$W = \frac{(u-\alpha)^{h+1}}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} \quad \text{und} \quad z = (u-\alpha)^h e^{\int \frac{U_0}{U_1} du},$$

somit ist

$$11)\qquad y = \left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[\frac{(u-\alpha)^{h+1}}{U_1} e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du}\right]\right\}_\alpha.$$

Das eben gefundene y ist, wenn h Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet (und unter dieser einzigen Voraussetzung ist die ganze bisher geführte Analysis tadellos) und α ganz willkürlich ist, im allgemeinen gleich Null, denn differenzirt man man einen Ausdruck der Form

$$(u-\alpha)^{h+1}\,\psi(u)$$

$h$mal, so erhält man einen Werth, der für $u=\alpha$ verschwindet, wenn nämlich weder $\psi(\alpha)$, noch einer der folgenden Differentialquotienten

$$\psi'(\alpha),\ \psi''(\alpha),\ \ldots\ \psi^{(h)}(\alpha)$$

unendlich gross ist.

Aber anders ist es in dem speciellen Falle, wo α eine Wurzel der *Gleichung* $U_1 = 0$ ist. Setzen wir voraus, dass $u=\alpha$ eine einfache Wurzel der Gleichung $U_1=0$ ist, und dass $\frac{U_0}{U_1}$, in Partialbrüche zerlegt, unter anderen den Partialbruch $\frac{A}{u-\alpha}$ gebe. In diesem Falle hat sodann y die Form

$$y=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[(u-\alpha)^{A+h}e^{ux}F(u)\right]\right\}_\alpha,$$

wo $F(u)$ eine Function von u ist, die für $u=\alpha$ weder Null noch unendlich wird, und selbe vereinfacht sich noch, wenn man die willkürliche Zahl h gleich $-A$ setzt, denn dann ist:

$$y=\left\{\frac{\partial^{-A}}{\partial u^{-A}}\left[e^{ux}F(u)\right]\right\}_\alpha.$$

„Sind daher $u-\alpha$, $u-\beta$, $u-\gamma$, ... einfache Factoren von U_1, und giebt $\frac{U_0}{U_1}$ in Partialbrüche zerlegt, unter Anderem die Partialbrüche

$$\frac{A}{u-\alpha},\quad\frac{B}{u-\beta},\quad\frac{C}{u-\gamma},$$

so hat, wenn A, B, C, ... ganze negative Zahlen bedeuten, die vorgelegte Gleichung folgende particuläre Integrale:

$$\begin{aligned}y=C_1&\left\{\frac{\partial^{-A}}{\partial u^{-A}}\left[\frac{(u-\alpha)^{1-A}}{U_1}e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\right]\right\}_\alpha\\+C_2&\left\{\frac{\partial^{-B}}{\partial u^{-B}}\left[\frac{(u-\beta)^{1-B}}{U_1}e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\right]\right\}_\beta\\+C_3&\left\{\frac{\partial^{-C}}{\partial u^{-C}}\left[\frac{(u-\gamma)^{1-C}}{U_1}e^{ux+\int\frac{U_0}{U}du}\right]\right\}_\gamma\end{aligned}$$

unter C_1, C_2, C_3... willkürliche Constante verstanden.

So hat man z. B. für die Gleichung

$$y'''=xy'-ny,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\frac{U_0}{U_1}=-u^2-\frac{n}{u},$$

und ein particuläres Integrale obiger Differential-Gleichung ist daher

$$y=\left\{\frac{\partial^n}{\partial u^n}\left[e^{ux-\frac{u^3}{3}}\right]\right\}_0.$$

Die eben vorgetragene Methode setzt voraus, dass $U_1=0$ den Factor $u=\alpha$ nur einmal habe, kommt aber $u=\alpha$ wiederholt in U_1 vor, so gilt diese Methode nur in einem sehr speciellen Falle, nämlich dann, wenn $\frac{U_0}{U_1}$ in Partialbrüche zerlegt unter anderen den Partialbruch hat:

$$\frac{A}{u-\alpha}+\frac{A_1}{(u-\alpha)^2}+\frac{A_2}{(u-\alpha)^3}\cdots,$$

woselbst A ganz und negativ, A_1, A_2... aber sämmtlich gleich Null sind.

Zum Schlusse erlauben wir uns noch eine Bemerkung. Herr I hat zuerst particuläre Integrale der Gleichung 1) in der Form

$$y = \left\{ \frac{\partial^k}{\partial u^k} [e^{u x} W] \right\}_\alpha$$

dargestellt (siehe dessen Werk über Integration der linearen Differ gleichungen, I. Band, 2. Abschnitt, § 4, und II. Band, 5. Abschnit und das ist gewiss sehr verdienstlich. Aber der Weg, den er eingescl um zu diesen particulären Integralen zu gelangen, ist dunkel und ä beschwerlich, und der von ihm gegebenen Methode fehlt die nothw Strenge.

Wir glauben, dass die von uns hier gegebene Methode sowohl d forderungen der Strenge als auch denen der Kürze genügt.

XXI. Ueber einen geometrischen Satz von Mac Laurin. *sectio III*, §. 98 des Appendix zu seinem *Treatise of Algebra* stell Laurin folgenden Satz auf:

Wenn durch den Schwerpunkt S eines Dreieck eine Gerade gezogen wird, welche CB in U, BA in I die Verlängerung von AC in V schneidet, so ist im

$$\frac{1}{US} + \frac{1}{VS} = \frac{1}{WS}.$$

Am einfachsten dürfte sich dieses Theorem mittelst der Tra salentheorie beweisen lassen. Bezeichnet man nämlich die Mitte Seiten BC, CA, AB mit A_1, B_1, C_1 und betrachtet AB als Transv des Dreiecks $A_1 US$, so hat man

$$\frac{A_1 B}{BU} \cdot \frac{UW}{WS} \cdot \frac{SA}{AA_1} = 1$$

d. i. wegen $A_1 B = \frac{1}{2} BC$, $SA = \frac{2}{3} AA_1$,

$$\frac{UW}{WS} = 3 \frac{BU}{BC}$$

oder, wenn UW in $US + WS$ zerlegt wird,

$$1) \qquad \frac{US}{WS} + 1 = 3 \frac{BU}{BC}.$$

Sieht man zweitens AC als Transversale des Dreiecks BUS hat man

$$\frac{BC}{CU} \cdot \frac{UV}{VS} \cdot \frac{SB_1}{B_1 B} = 1$$

d. i. wegen $SB_1 = \frac{1}{2} B_1 B$

$$\frac{UV}{VS} = 3 \frac{CU}{BC}$$

oder, wenn UV durch $VS - US$ ersetzt wird,

$$2) \qquad 1 - \frac{US}{VS} = 3 \frac{CU}{BC}.$$

Die Summe der Gleichungen 1) und 2) ist

$$\frac{US}{WS}-\frac{US}{VS}=1,$$

und hieraus folgt augenblicklich der zu beweisende Satz.

München. E. v. Hunyady aus Pesth.

XXII. Notiz nach M. A. Cayley. *Philosoph. Magaz. Vol. XIII*, vierte Reihe. Von Dr. Wilh. Fiedler.

In den Annalen von Gergonne (T. XI, p. 205) geben Brianchon und Poncelet den Satz, nach welchem eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Eckpunkte eines Dreiecks geht, auch den Durchschnittspunkt seiner Höhen enthält. (Man vergleiche Analyt. Geom. d. Kegelschnitte, Art. 230, Aufg. 1.) Derselbe lässt sich als ein specieller Fall des anderen Satzes betrachten, nach welchem die Kegelschnitte, welche durch dieselben vier Punkte gehen, mit einer beliebigen geraden Transversale ein System involutorischer Segmente bestimmen.

Denn man schliesst daraus zunächst das Folgende. Ist E ein Kegelschnitt, welcher von einer geraden Linie L in Punkten geschnitten wird, die zu jedem der beiden Punktenpaare, in welchen dieselbe gerade Linie L zwei andere Kegelschnitte S und S_1 schneidet, conjugirt harmonisch sind, so hat jeder Kegelschnitt S_2, der mit S und S_1 durch die nämlichen vier Punkte geht, die nämliche Eigenschaft, in L ein Punktpaar zu bestimmen, welches durch die Punkte des Kegelschnittes E harmonisch getrennt wird.

Als ein specieller Fall davon ergiebt sich der Satz: Jeder Kegelschnitt, welcher durch die vier Schnittpunkte zweier rectangulären Hyperbeln geht, ist selbst eine rectanguläre Hyperbel.

Und daraus entspringt der Brianchon-Poncelet'sche Satz ebensowohl, wie der ganz elementare, dass in einem Dreiecke das dritte Höhenperpendikel durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten geht.

Man sieht, dass dieser Satz sich dem über Kreise zur Seite stellt, welcher aussagt, dass jeder Kegelschnitt ein Kreis sei, welcher die vier Durchschnittspunkte zweier Kreise enthält, welcher also durch die imaginären unendlich entfernten Kreispunkte geht.

Analytisch kann dem Beweis des Brianchon-Poncelet'schen Satzes die folgende Gestalt gegeben werden. Der Kegelschnitt

$$a\alpha^2+a'\beta^2+a''\gamma^2+2b\beta\gamma+2b'\gamma\alpha+2b''\alpha\beta=0$$

ist dem Fundamentaldreieck umschrieben, wenn man hat

$$a=0,\quad a'=0,\quad a''=0$$

(Analyt. Geom. d. Kegelschn., Art. 134, 271).

Derselbe ist aber eine rectanguläre Hyperbel, wenn man hat

$$a + a' + a'' = 2\,(b \cos A + b' \cos B + b'' \cos C)$$

(vergl. a. a. O. Art. 64, Aufg. 9 und Zusatz V, p. 596); somit eine dem Fundamentaldreieck umschriebene Hyperbel, wenn

$$b \cos A + b' \cos B + b'' \cos C = 0$$

ist. Eine solche enthält somit den durch

$$\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C$$

bestimmten Punkt, d. h. den Durchschnittspunkt der Höhen (vergl. a. a. O. Art. 64, Aufg. 3).

XXIII. Eine Ergänzung des Satzes über die Involution eines Kegelschnittbüschels. Von Dr. WILH. FIEDLER.

Jede gerade Transversale, welche durch eine der Ecken des sich selbst conjugirten Dreiecks eines durch dieselben vier Punkte gehenden Büschels von Kegelschnitten gezogen ist, bestimmt mit den Kegelschnitten des Büschels und den Gegenseitenpaaren und Diagonalen seiner viereckigen Basis eine Involution, welche jene Ecke und den Durchschnittspunkt mit der Gegenseite des sich selbst conjugirten Dreiecks zu ihren Doppelpunkten hat.

Diese Punkte bleiben für alle diejenigen Involutionen Doppelpunkte, welche durch Kegelschnittbüschel erzeugt werden, denen das nämliche Dreieck als das sich selbst conjugirte entspricht.

Den dualistisch entsprechenden Satz über die involutorischen Strahlbüschel erhält man leicht.

Es ergiebt sich daraus die folgende Construction, die zugleich auch den Beweis zu führen geeignet ist.

Sei $ABCD$ das Viereck, O der Durchschnittspunkt seiner Diagonalen, E, F die Durchschnittspunkte seiner Gegenseitenpaare, T eine beliebige durch O gehende Transversale, welche die Gegenseitenpaare AB, CD; BC, DA in den Punkten a, a'; b, b' respective, die Gerade EF aber in O' schneidet, so sind O, O' die Doppelpunkte der Involution aa', bb'. Betrachtet man nun die in F sich schneidenden Vierecksseiten als fest, die Diagonale AC als sich um O drehend, so dass sie in ihren auf einander folgenden Lagen die Punktereihen A', A'', A'''..., C', C'', C'''... in den festen Seiten bestimmt, so liefern die Geraden EA', EC'; EA'', EC''; EA''', EC''' etc. in der Transversale T die Punktenpaare und Segmente cc', dd', ee' etc., welche sämmtlich der gegebenen Involution angehören.

XXIV. Ueber den Kubik- und Oberflächeninhalt sämmtlicher einfachen Formen des regelmässigen Krystallsystems. Von Dr. F. DELLMANN.

Zum Verständniss dieser Abhandlung sind krystallographische Vorkenntnisse nicht erforderlich. Da die besprochenen Formen in der Natur vorkommen, so liefert das Nachfolgende einen Beitrag zu der auch auf andern Gebieten der Naturwissenschaften vorkommenden Einfachheit der Gesetzmässigkeit der Erscheinungswelt.

Denken wir uns 3 auf einander rechtwinklige, gleiche Gerade sich im gemeinsamen Kreuzungspunkte halbirend und auch um jeden ihrer 6 Endpunkte 8 Ebenen gelegt in der Weise, dass jede Ebene von den beiden andern Geraden die Stücke m und n abschneidet, welche beide grösser sind als jenes zur Einheit angenommene, und $m < n$. Nach den Entdeckungen von Weiss sind m und n kleine ganze Zahlen oder Brüche, welche sich durch kleine ganze Zahlen darstellen lassen.

Der Körper, welcher auf diese Weise entsteht, heisst Hexakisoktaeder oder Oktakishexaeder, wird von 48 ungleichseitigen, spitzwinkligen Dreiecken begrenzt, hat also 72 Kanten von dreifacher Art, lange, mittlere und kurze; ferner 26 Ecken von dreifacher Art, nämlich 6 achtseitige, an welchen die langen und mittleren, 8 sechsseitigen, an welchen die langen und kurzen, und 12 vierseitige, an denen die mittlern und kurzen Kanten abwechseln. Die 6 Ecken sollen Oktaederecken, die 8 Ecken Hexaederecken und die 12 Ecken Dodekaederecken heissen. Ie zwei gegenüberliegende Ecken werden durch eine Gerade verbunden, welche Achse heisst; der Körper hat also, wenn wir die Achsen nach den Ecken benennen, 3 Oktaeder-, 4 Hexaeder- und 6 Dodekaederachsen. Durch die drei Oktaederachsen wird der ganze Raum der Form in 8 Octanten getheilt; die Dodekaederachsen halbiren die rechten Winkel der Oktaederachsen, gehen also mitten zwischen 2, die Hexaederachsen aber mitten zwischen 3 Octaederachsen hindurch; die beiden Perpendikel aus einem Punkte einer Dodekaederachse auf die beiden Oktaederachsen desselben Quadranten, sowie die 3 Perpendikel aus einem Punkte einer Hexaederachse auf die 3 Ebenen desselben Oktanten sind einander gleich.

Das Hexakisoktaeder ist der Repräsentant von noch 6 anderen Formen. Nach dem Obigen schneidet jede Ebene oder Krystallfläche des Hexakisoktaeders von den drei Oktaederachsen die Stücke a, ma und na ab, wo m und n unveränderlich sind. Setzen wir $m = 1$ und $n = 1$, so haben wir das Oktaeder, blos $m = 1$ das Triakisoktaeder, $m = n$ aber < 1 das Ikositetraeder, $m = 1$ und $n = \infty$ das Rhombendodekaeder, $m > 1$ und $n = \infty$ das Tetrakishexaeder, $m = n = \infty$ das Hexaeder. Man sieht also, dass das Verhältniss, welches die 3 von den Oktaederachsen abgeschnittenen Stücke bilden, alle möglichen Fälle erschöpft; beim Oktaeder sind sie alle 3 gleich; beim Triakisoktaeder sind 2 gleich, das dritte ist kleiner; beim Hexakisoktaeder sind sie alle ungleich; beim Rhombendodekaeder werden nur zwei gleiche abgeschnitten; beim Tetrakishexaeder nur 2 ungleiche; beim Hexaeder wird nur eine Oktaederachse geschnitten. Durch Einsetzung bestimmter Werthe in die Formeln für das Hexakisoktaeder können also alle Formen erhalten werden.

Es kann auch die Hälfte der 48 Flächen den Raum vollständig begre: zen. Wenn man sich die an den mittleren Kanten liegenden abwechsel den Flächenpaare, oder die an den abwechselnden Hexaederecken liege den Flächengruppen bis zum Verschwinden der andern Flächen erweit denkt, so entstehen 2 Formen, von denen G. Rose die erste Hemioktak hexaeder, die andere Hemihexakisoktaeder nennt. Im Gegensatze zu d: sem hemiedrischen Formen heisst das Hexakisoktaeder eine homoedriscl

Wenn man die soeben ausgesprochenen beiden Ableitungsgesetze i die hemiedrischen Formen scharf ins Auge fasst, so wird man leicht erke nen, dass nach der Art der Erzeugung des Hemihexakisoktaeders dieje gen homoedrischen Formen mit ihren hemiedrischen zusammenfallen mi sen, deren Flächen an mehr als eine Hexaederecke stossen; es sind d das Rhombendodekaeder, das Tetrakishexaeder und das Hexaeder, welc also ihre eignen hemiedrischen Formen sind nach dieser Ableitung. Ebei können nach der Art der Ableitung des Hemioktakishexaeders diejenig homoedrischen Formen keine Extraformen haben, deren Flächen entwe an mehr als eine Oktaederecke stossen, wie beim Oktaeder, Triakis taeder und Rhombendodekaeder, oder an mehr als eine Dodekaederecl wie beim Ikositetraeder und Hexaeder. Ist die Erweiterung eines na dem Ableitungsgesetze in Betracht kommenden Theils einer Fläche c übrige Theil dieser Fläche, so muss die homoedrische Form mit der hei edrischen übereinstimmen. Deshalb giebt es nach beiden Ableitung gesetzen im Ganzen nur 6 Extraformen, nach dem ersten Gesetze das H mioktakishexaeder und Hemitetrakishexaeder, nach dem zweiten das H mioktaeder, Hemitriakisoktaeder, Hemiikositetraeder und Hemihexak oktaeder. Für die Praxis ist dies besonders wichtig, weil nur diejenig homoedrischen Formen mit hemiedrischen in Combination vorkommen kö nen, welche nach demselben Ableitungsgesetze ihre eigenen hemiedrisch sind. Die demselben Ableitungsgesetze unterworfenen Formen bilden ei Gruppe, welche man eine Krystallreihe nennt, deren es also im unreg mässigen System, in dem System mit 3 auf einander rechtwinkligen u gleichen Achsen, drei giebt, die Krystallreihe des Hexakisoktaeders oc homoedrische, die des Hemioktakishexaders oder parallelförmig-hemied sche, und die des Hemihexakisoktaeders oder geneigtflächig-hemiedrisc Dies dient auch zum Verständniss der nachfolgenden Uebersichten.

Um die Formel für den Kubikinhalt dec Hexakisoktaeders zu erhalt denke man sich dasselbe aus 48 gleichen Pyramiden bestehend, von den je 6 mit ihrer Spitze an einer Hexaederecke zusammenstossen. Die Grui flächen derselben sind also von einer halben Oktaederachse ($=1$), eii halben Dodekaederachse und einer mittlern Kante umschrieben. Die hal Oktaederachse sei die Grundlinie, ein Perpendikel aus der Dodekaed ecke auf die Oktaederachse die Höhe der Grundfläche. Dieses Perpendil schneidet ein Stück der Grundlinie (vom Mittelpunkte des Krystalles gerechnet) ab, welches ihm (dem Perpendikel) gleich ist; beide, Perpendikel und Segment der Grundlinie, sind die Katheten, die halbe Dodekaederachse ist die Hypothenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, da die Dodekaederachse den rechten Winkel zweier Oktaederachsen halbirt. Die mittlere Kante schneidet über die Dodekaderecke hinaus die andere Oktaederachse in der Entfernung m vom Mittelpunkte. In der Fig. 9, Taf. I bezeichnet a die Oktaederecke, b den Fusspunkt des Perpendikels, c den Mittelpunkt des Krystalles, e die Dodekaederecke und d den Punkt, wo die verlängerte mittlere Kante ae die andere Oktaederachse trifft. Hier ist also $ac = 1$ und $cd = m$; ce halbirt den rechten Winkel acd. Wir haben also die Proportion, wenn wir $bc = be = p$ setzen: $1 : m = 1 - p : p$, also $m + 1 : m = 1 : p$ und $p = \frac{m}{m+1}$. Folglich ist der Inhalt der Grundfläche: $\frac{m}{2(m+1)}$. Dieser ist also noch mit einem Drittel der Höhe zu multipliciren, um den Inhalt der Pyramide zu erhalten.

Diese Höhe ist das Perpendikel aus einer Hexaederecke auf eine der 3 Ebenen, welche den zugehörigen Oktanten begrenzen; es heisse p' und Fig. 10, Taf. I zeige seine Construction. Hier sei h die Hexaederecke, a der Mittelpunkt, b eine Oktaederecke, c und p zwei Dodekaederecken, also ch und hp zwei kurze Kanten, he das gesuchte Perpendikel; also $ab = 1$, $ad = m = ar$, $af = n$: cq ein Perpendikel aus der Dodekaederecke auf dieselbe Ebene daf. Die beiden Ebenen, welche sich in der kurzen Kante ch schneiden, gehen nach der Voraussetzung durch f, schneiden von af ein Stück $= n$ ab; also geht ihre Durchschnittslinie auch durch f; folglich auch die Ebene der beiden Perpendikel he und cq. Ist oe ein Perpendikel von e auf af, so ist $oe = he$, da auch die Projectionen der 3 Perpendikel diesen gleich sind. Wir haben nun die Proportion: $aq : af = oe : af - ao$, wo ao ebenfalls $= p'$. Setzen wir die gleichen Werthe ein:

$$\frac{m}{m+1} : n = p' : n - p', \text{ oder } \frac{m}{m+1} : \frac{m}{m+1} + n = p' : n,$$

also

$$p' = \frac{mn}{mn + m + n}.$$

Folglich ist der Inhalt einer solchen Pyramide:

$$\frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{mn}{3(mn+m+n)} = \frac{m^2 n}{6(m+1)\,mn + m + n)},$$

also der 48 Pyramiden:

$$\frac{8m^2 n}{(m+1)(mn+m+n)} = 2 \cdot \frac{2m}{m+1} \cdot \frac{2mn}{mn+m+n},$$

und setzen wir die ganze Oktaederachse $= 1$, so ist der Inhalt des Hex kisoktaeders:

$$\frac{m^2 n}{(m+1)(mn+m+n)}.$$

Daraus ergiebt sich folgender Satz:

Der Inhalt des Hexakisoktaeders ist ein Product aus der ganz Oktaederachse, dem doppelten Perpendikel aus der Dodekaederecke a die Oktaederachse und dem doppelten Perpendikel aus der Hexaederec auf die Ebene zweier Oktaederachsen.

Oder: Der Inhalt des Hexakisoktaeders ist das Product der doppelt Perpendikel, welche aus den drei derselben Krystallfläche angehörig Ecken auf die Ebene zweier Oktaederachsen gefällt werden.

Die speciellen Werthe der bekanntesten Formen sind, wenn die gan Oktaederachse $= 1$ gesetzt wird:

Hexaeder	$a : \infty a : \infty a = 1.$
Oktaeder	$a : a : a = \frac{1}{6}.$
Dodekaeder	$a : a : \infty a = \frac{1}{4}.$
Ikositetraeder	$a : 2a : 2a = \frac{1}{3}.$
Ikositetraeder	$a : 3a : 3a = \frac{9}{20}.$
Triakisoktaeder	$a : a : 2a = \frac{1}{5}.$
Triakisoktaeder	$a : a : 3a = \frac{3}{14}.$
Tetrakishexaeder	$a : \frac{3}{2}a : \infty a = \frac{9}{25}.$
Tetrakishexaeder	$a : 2a : \infty a = \frac{4}{9}.$
Tetrakishexaeder	$a : \frac{5}{2}a : \infty a = \frac{25}{49}.$
Tetrahishexaeder	$a : 3a : \infty a = \frac{9}{16}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{3}{2}a : 3a = \frac{3}{10}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{4}{3}a : 4a = \frac{2}{7}.$
Hexakisoktaeder	$a : 2a : 4a = \frac{8}{21}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{7}{3}a : 7a = \frac{49}{110}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{11}{5}a : \frac{11}{3}a = \frac{121}{304}.$

Ist blos $n = \infty$, so kann die Formel durch diese Grösse aufgehob werden; dann ist sie: $\frac{m^2}{(m+1)^2}$. Darin liegt der Grund, warum der Kub inhalt der Tetrakishexaeder stets ein Quadrat sein muss. Die Anschau der Form zeigt Dasselbe, da die Höhe der Grundfläche sowohl, als a die Höhe der Pyramide selbst die halbe Kante des Würfels ist, welche der Form steckt.

Denken wir, um den Oberflächeninhalt zu bestimmen, das Hexak oktaeder aus 48 Pyramiden bestehend, deren Grundflächen Krystallfläc sind, welche also mit ihren Spitzen im Mittelpunkte zusammenstossen, erhält man den Oberflächeninhalt, wenn man den Kubikinhalt durch dividirt, wo also p'' ein Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Krystallfläche bezeichnet. Dies p'' ist leicht in folgender Weise zu finden.

Man verbinde den Fusspunkt dieses Perpendikels mit den Punkten, wo die Krystallfläche die drei Oktaederachsen schneidet; die drei abgeschnittenen Stücke sind 1, m und n. Dann sind die Brüche $\frac{p''}{1}$, $\frac{p''}{m}$, $\frac{p''}{n}$ die Cosinus der Winkel, welche p'' mit den drei Oktaederachsen bildet; also ist nach einem bekannten stereometrischen Satze:

$$p''^2 + \frac{p''^2}{m^2} + \frac{p''^2}{n^2} = 1 = p''^2\left(1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right),$$

also

$$p'' = \frac{m^2 n^2}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}$$

und

$$p'' = m n \sqrt{\frac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}},$$

und wenn man die ganze Oktaederachse 1 setzt:

$$p'' = \frac{m n}{2} \sqrt{\frac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}.$$

Folglich ist der Oberflächeninhalt:

$$\frac{\dfrac{m^2 n}{(m+1)(mn+m+n)}}{\dfrac{m n}{6}\sqrt{\dfrac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}} = \frac{\dfrac{6m}{(m+1)(mn+m+n)}}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}}$$

$$= \frac{6m(m^2 n^2 + m^2 + n^2)}{(m+1)(mn+m+n)} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}.$$

Hier sind die Werthe der obigen Formen:

Hexaeder		$= 6.$
Oktaeder		$= \sqrt{3}.$
Dodekaeder		$= \frac{3}{2}\sqrt{2}.$
Ikositetraeder	$a : 2a : 2a$	$= \sqrt{6}.$
Ikositetraeder	$a : 3a : 3a$	$= \frac{9}{10}\sqrt{11}.$
Triakisoktaeder	$a : a : 2a$	$= \frac{9}{5}.$
Triakisoktaeder	$a : a : 3a$	$= \frac{3}{7}\sqrt{19}.$
Tetrakishexaeder	$a : \frac{3}{2}a : \infty a$	$= \frac{18}{25}\sqrt{13}.$
Tetrakishexaeder	$a : 2a : \infty a$	$= \frac{4}{3}\sqrt{5}.$
Tetrakishexaeder	$a : \frac{5}{2}a : \infty a$	$= \frac{30}{49}\sqrt{29}.$
Tetrakishexaeder	$a : 3a : \infty a$	$= \frac{9}{8}\sqrt{10}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{3}{2}a : 3a$	$= \frac{8}{5}\sqrt{14}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{4}{3}a : 4a$	$= \frac{8}{7}\sqrt{26}.$
Hexakisoktaeder	$a : 2a : 4a$	$= \frac{4}{7}\sqrt{21}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{3}{7}a : 7a$	$= \frac{21}{55}\sqrt{59}.$
Hexakisoktaeder	$a : \frac{11}{5}a : \frac{11}{3}a$	$= \frac{38}{76}\sqrt{155}.$

Der Oberflächeninhalt ist nur dann eine rationale Grösse, wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Factor, oder vielmehr dessen Nenner ein Quadrat ist. Dies ist der Fall:

1) wenn m und n unendlich sind; dann verschwinden m^2 und n^2 gegen $m^2 n^2$;
2) wenn $n = m + 1$ ist; dann ist $m^2 n^2 + m^2 + n^2 = (m^2 + m + 1)^2$;
3) wenn blos n unendlich und $m^2 + 1$ ein Quadrat ist; dann verschwindet m^2 aus der Summe und sie wird zu $(m^2 + 1) n^2$. Dieser Fall kommt bei hemiedrischen Formen vor.

Zur Berechnung der hemiedrischen Formen wird derselbe Weg eingehalten. Um also den Kubikinhalt zu finden, werden die beiden Formen ebenfalls aus 48 Pyramiden bestehend gedacht, deren je 6 mit ihren Spitzen in einer Hexaederecke zusammenstossen. Eine Verschiedenheit in der Berechnung ergiebt sich nur aus einer Verschiedenheit der Formen.

Das Hemioktakishexaeder ist von 24 Vierecken begrenzt mit dreierlei Seiten; also hat es auch dreierlei Kanten. Die langen und kurzen Kanten verbinden die Oktaederecken mit den Dodekaederecken, die mittleren die Hexaederecken mit den Dodekaederecken; der mittleren Kanten sind so viel, wie der langen und kurzen zusammen, also $\frac{24 \cdot 4}{4} = 24$. An den Oktaederecken sind die abwechselnden Kanten gleich, an den Dodekaederecken nicht, sie haben nur ein Paar gleiche Kanten, zwei mittlere, welche zu den Hexaederecken gehen. Da die beiden Kanten, welche die Oktaeder- und Dodekaederecken verbinden, verschieden sind, so liegt die Dodekaederecke auch nicht mehr im Endpunkte der Dodekaederachse. Ein Quadrant zweier Oktaederachsen hat die Form der Fig. 11, Taf. I. Hier ist also $ac = n$, $bc = cd = 1$, $ce = m$; bcf und fcd sind die beiden Grundflächen der zu berechnenden Pyramiden; bf ist die lange, fd die kurze Kante. Zwei Seitenflächen der Pyramiden, die eine der einen, die andere der anderen Gruppe angehörig, fallen also hier in eine Krystallfläche zusammen.

Nach der Figur sind die beiden Höhen der Dreiecke, nämlich fg und fh, leicht zu berechnen. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke cda und gfa hat man:

$$cd : ca = gf : ga \text{ oder } 1 : n = x : n - y, \text{ wenn } x = gf \text{ und } y = fh,$$

also

$$x = \frac{n - y}{n}.$$

Ferner:

$$bc : ce = fh : he \text{ oder } 1 : m = y : m - x,$$

also

$$y = \frac{m - x}{m}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man:

$$x = \frac{m(n-1)}{mn+1} \text{ und } y = \frac{n(m-1)}{mn+1}.$$

Also sind die beiden Grundflächen, welche zur Grundlinie 1 haben:

$$bfc = \frac{m(n-1)}{2(mn+1)} \text{ und } fcd = \frac{n(m-1)}{2(mn+1)}.$$

Bei der Erzeugung des Hemioktakishexaeders sind an jeder Hexaederecke drei Flächen geblieben, also haben die Hexaederecken ihre Lage behalten, folglich stimmt hier die Höhe der Pyramiden mit der des Hexakisoktaeders überein. Der Inhalt einer Pyramide mit der Grundfläche bcf ist also:

$$\frac{m(n-1)}{2(mn+1)} \cdot \frac{mn}{3(mn+m+n)} = \frac{m^2 n^2 (n-1)}{6(mn+1)(mn+m+n)}$$

und mit der Grundfläche fcd:

$$\frac{n(m-1)}{2(mn+1)} \cdot \frac{mn}{3(mn+m+n)} = \frac{mn^2(m-1)}{6(mn+1)(mn+m+n)},$$

also der Inhalt der ganzen Form:

$$\frac{4m^2 n(n-1}{(mn+1)(mn+m+n)} + \frac{4mn^2(m-1)}{(mn+1)(mn+m+n)}$$

$$= \frac{4mn[m(n-1)+n(m-1)]}{(mn+1)(mn+m+n)} = \frac{4mn(2mn-m-n)}{(mn+1)(mn+m+n)},$$

und wenn die ganze Oktaederachse $= 1$ gesetzt wird:

$$\frac{mn(2mn-m-n)}{2(mn+1)(mn+m+n)}.$$

Specielle Werthe sind hier:

Hemitetrakishexaeder	$a : 2a : \infty a = \frac{1}{4}$.
Hemitetrakishexaeder	$a : \frac{3}{2}a : \infty a = \frac{3}{8}$.
Hemitetrakishexaeder	$a : \frac{4}{3}a : \infty a = \frac{5}{14}$.
Hemioktakishexaeder	$a : \frac{3}{2}a : 3a = \frac{9}{44}$.
Hemioktakishexaeder	$a : 2a : 4a = \frac{20}{63}$.
Hemioktakishexaeder	$a : \frac{5}{3}a : 5a = \frac{25}{84}$.

Das Hemihexakisoktaeder ist von 24 ungleichseitigen Dreiecken begrenzt. Seine 8 Hexaederecken zerfallen in 2 Gruppen, in 4 stumpfe, welche die des Hexakisoktaeders sind, und in 4 spitze, welche durch Erweiterung der Flächen jener 4 stumpfen über die mittleren Kanten hinaus entstehen. Denken wir nun, wie bisher, auch diesen Körper in derselben Weise aus 48 Pyramiden bestehend, so sehen wir, dass sie alle dieselbe Grundfläche haben, welche dieselbe ist, wie beim Hexakisoktaeder; diese kennen wir also schon. Aber die Höhe der Pyramiden, welche an den spitzen Hexaederecken zusammenstossen, ist grösser, als die der anderen und muss noch berechnet werden. Wenn wir zum Zwecke dieser Berechnung die Fig. 10, Taf. I anschauen, so ist klar, dass, wenn wir fq und fa verlängern über a und q hinaus, aus irgend einem Punkte der Verlängerung der fq auf die Verlängerung der fa ein Perpendikel fällen, dessen Fusspunkt von a so weit entfernt, wie es selbst lang ist, dass dies Perpendikel die gesuchte Grösse ist. Denn die neuen spitzen Hexaederecken des Hemihexakisoktaeders liegen in den Hexaederachsen, nur weiter vom Mittelpunkt. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich sofort mit Berücksichtigung des Früheren die Proportion:

$$\frac{m+1}{m} : n = x : n + x,$$

also:

$$\frac{m}{m+1} : n - \frac{m}{m+1} = x : u,$$

folglich ist

$$x = \frac{\frac{mn}{m+1}}{n - \frac{mn}{m+1}} = \frac{mn}{mn+n+m}.$$

Der Inhalt einer Pyramide von dieser Höhe ist also:

$$\frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{mn}{3(mn+n-m)} = \frac{m^2 n}{6(m+1)(mn+n-m)},$$

also der Inhalt der 24 Pyramiden:

$$\frac{4m^2 n}{(m+1)(mn+n-m)},$$

und wenn die ganze Oktaederachse 1 gesetzt wird:

$$\frac{m^2 n}{2(m+1)(mn+n-m)};$$

folglich ist der Inhalt des Hemihexakisoktaeders:

$$\frac{m^2 n}{2(m+1)(mn+n-m)} + \frac{m^2 n}{2(m+1)(mn+n+m)} = \frac{m^2 n^2}{m^2(n^2-1)+n^2(2m+1)}.$$

Die bekanntesten speciellen Werthe sind hier:

Hemioktaeder		$= \frac{1}{3}$.
Hemiikositetraeder	$a : 2a : 2a$	$= \frac{1}{2}$.
Hemiikositetraeder	$a : 3a : 3a$	$= \frac{3}{5}$.
Hemitriakisoktaeder	$a : a : 2a$	$= \frac{4}{15}$.
Hemihexakisoktaeder	$a : \frac{3}{2}a : 3a$	$= \frac{3}{8}$.
Hemihexakisoktaeder	$a : \frac{5}{3}a : 5a$	$= \frac{25}{63}$.

Aus dem Kubikinhalte wird auch für die hemiedrischen Formen in der früheren Weise die Formel für den Oberflächeninhalt abgeleitet. Also ist der Oberflächeninhalt des Hemioktakishexaeders:

$$\frac{\frac{mn(2mn-m-n)}{2(mn+1)(mn+m+n)}}{\frac{mn}{6}\sqrt{\frac{1}{m^2n^2+m^2+n^2}}} = \frac{\frac{3(2mn-m-n)}{(mn+1)(mn+m+n)}}{\sqrt{\frac{1}{m^2n^2+m^2+n^2}}}$$

$$= \frac{3(2mn-m-n)(m^2n^2+m^2+n^2)}{(mn+1)(mn+m+n)} \cdot \sqrt{\frac{1}{m^2n^2+m^2+n^2}};$$

und der Oberflächeninhalt des Hemihexakisoktaeders:

$$\frac{\dfrac{m^2 n^2}{m^2(n^2-1)+n^2(2m+1)}}{\dfrac{mn}{6}\sqrt{\dfrac{1}{m^2n^2+m^2+n^2}}} = \frac{6mn\,(m^2n^2+m^2+n^2)}{m^2(n^2-1)+n^2(2m+1)}\cdot\sqrt{\frac{1}{m^2n^2+m^2+n^2}}.$$

Specielle Werthe sind hier:

a) Das Hemioktakishexaeder und seine Modificationen:

Hemitetrakishexaeder	$a : 2a : \infty a =$	$\frac{3}{2}\sqrt{5}$.
Hemitetrakishexaeder	$a : \frac{3}{2}a : \infty a =$	$\frac{4}{5}\sqrt{13}$.
Hemitetrakishexaeder	$a : \frac{4}{3}a : \infty a =$	$\frac{75}{28}$.
Hemioktakishexaeder	$a : \frac{3}{2} : 3a =$	$\frac{9}{22}\sqrt{14}$.
Hemioktakishexaeder	$a : 2a : 4a =$	$\frac{10}{21}\sqrt{21}$.
Hemioktakishexaeder	$a : \frac{5}{3}a : 5a =$	$\frac{5}{14}\sqrt{35}$.

b) Das Hemihexakisoktaeder und seine Modificationen:

Hemioktaeder	$a : a : a =$	$2\sqrt{3}$.
Hemiikositetaeder	$a : 2a : 2a =$	$\frac{3}{2}\sqrt{6}$.
Hemiikositetraeder	$a : 3a : 3a =$	$\frac{6}{5}\sqrt{11}$.
Hemitriakisoktaeder	$a : a : 2a =$	$\frac{12}{5}$.
Hemihexakisoktaeder	$a : \frac{3}{2}a : 3a =$	$\frac{1}{2}\sqrt{31}$.
Hemihexakisoktaeder	$a : \frac{5}{3}a : 5a =$	$\frac{10}{21}\sqrt{35}$.

Da die Formeln für den Oberflächeninhalt der hemiedrischen Formen den unter dem Wurzelzeichen stehenden Factor mit der Formel für die hemiedrischen gemein haben, so muss auch hier in denselben Fällen der Ausdruck rational werden, Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: Wenn der Oberflächeninhalt einer homoedrischen oder hemiedrischen Form rational oder irrational ist, so hat die entsprechende hemiedrische oder homoedrische Form ebenfalls einen rationalen oder irrationalen Oberflächeninhalt.

XXV. Meteorologische Studien. Von Dr. F. Dellmann. — In dem Aufsatze über den Zusammenhang der Witterungserscheinungen (im ersten Hefte des vorigen Jahrganges dieser Zeitschrift) ist es mir möglich gewesen durch ein genaueres Studium der Beobachtungsresultate der Jahre 1851 bis 1858 darzuthun, dass sich ein vollständiger Zusammenhang findet in den Erscheinungen einer und derselben Station und benachbarter Stationen. Nimmt man an, dass die Wärme die Hauptursache aller Witterungsfacta ist, so kann man mit Zuhülfenahme physikalicher Gesetze die Variationen der übrigen meteorologischen Phänomen erklären. Wenn man einmal so viel Zeit und Mühe solchen Rechnungen opferte, so hat man ein dauerndes Interesse dafür gewonnen; und so möchte ich denn auch gerne wissen, wie sich zu meinen früheren Jahren die Jahre 1859 und 1861 verhielten, namentlich auch deswegen, weil auch diese gute Weinjahre waren. Ueber die Einwirkung der Witterung auf Weinproduction, für welche Jeder ir unserer Gegend ein besonderes Interesse hat, sind von mir zwei Aufsätz im letzten Jahrgange der „Natur von Ule und Müller", und einer in den letzten Jahresberichte der „Pollichia" erschienen. Für ihre Bearbeitun musste natürlich ein grösserer Zeitraum und ein weiteres Terrain in An spruch genommen werden. So ging ich so weit in der Zeit zurück, als e meine Literatur nur erlaubte, nämlich bis 1779, und im Raume dehnte ic die Untersuchung über die mittelrheinische Ebene und einige benachbart Oerter aus. Es haben sich auch durch diese Arbeiten recht interessant Resultate herausgestellt. Hier ist es meine Absicht, diese sämmtlich i einigen kurzen Sätzen zusammen zu stellen und dann den Charakter de Jahre 1859 und 1861 noch besonders anzudeuten.

Der jährliche Gang der Wärme stimmt im Allgemeinen überein mi dem des Dunstdrucks und der Windstärke; der Gang der Feuchtigkeit un der Himmelsbedeckung ist ein entgegengesetzter, so dass also mit einen Steigen und Fallen der Wärme auch eine Zu- und Abnahme des Dunst drucks und der Windstärke, aber eine Ab- und Zunahme der Feuchtigkei und Himmelsbedeckung verbunden ist. Der Luftdruck hat in Deutschlan und wohl überhaupt im mittleren Europa keinen mit der Wärme stimmenden jährlichen Gang, wohl aber, wenn man vom Luftdruck den Dunstdruck subtrahirt. In diese Gesetzmässigkeit stimmen auch die verschiedene Jahre. Nach demselben Gesetze regulirt sich der tägliche Gang, wo indess die Himmelsbedeckung eine Ausnahme macht, da sie Abends am geringsten, Morgens am grössten ist. Wenn in einem Jahre der täglich Gang der Wärme ein anderer ist, so tritt auch eine entsprechende Variation im täglichen Gange der übrigen Erscheinungen ein; ebenso in den einzelnen Jahreszeiten. Nach demselben Gesetze gehen auch, so weit di Beobachtung reicht, die Erscheinungen an benachbarten Stationen.

Von den genannten 6 Grössen ist im Allgemeinen die Regenmenge unabhängig; jedoch sind im Durchschnitt die wärmeren Jahre die trockneren: die trockensten gehören fast immer zu den wärmeren oder gar wärmsten: blos das Jahr 1783 macht eine Ausnahme, da es trocken, aber kühl war. Auch stimmt damit, dass die wärmere Gegend, die mittelrheinische Ebene die geringere Regenmenge hat.

Wärmeüberschuss und Regenmangel bringen den guten Wein, un beide Grössen vikariren für einander. Gute Weinjahre, d. h. solche welche eine vorzügliche Qualität der Traube produciren, haben währen der 7 Monate, welche auf diese Qualität influiren, nämlich März bis September, in der mittelrheinischen Ebene einen Wärmeüberschuss von etw 1^{0} und einen durchschnittlichen Regenmangel von etwa 6‴ Regenhöhe: in der Nachbarschaft sind in solchen Jahren Wärmeüberschuss und Regenmangel bedeutend geringer, so dass in guten Weinjahren die mittelrheinische Ebene für die Weinproduction in ein besonders günstiges Licht tritt

Die vier letzten guten Weinjahre 1857, 58, 59 und 61 verhalten sich so zu einander, dass im ersten und letzten Wärmeüberschuss und Regenmangel zusammen ziemlich gleichen Antheil hatten am guten Wein, in 1858 der Regenmangel überwog und 1859 der Wärmeüberschuss. Das Jahr 1783 steht einzig da, indem der gute Wein in diesem Jahre allein durch den Regenmangel producirt wurde. Das Jahr 1834 war in diesem Jahrhundert das beste Weinjahr, da es beide Grössen im Maximum zeigt. Das Jahr 1861 hat gezeigt, dass noch ein dritter Factor bei der Production der Qualität des Weines concurrirt, wenn auch in untergeordnetem Grade; es ist die Traubenmenge. Je geringer die Quantität, desto bedeutender ist die Qualität der Trauben. Das Jahr 1861 hat einen bessern Wein geliefert, als der Wärmeüberschuss, der allerdings fast einen Grad beträgt, und Regenmangel, nur 8¼ Linien, erwarten liessen, weil die Quantität gering war.

Die weinreichen Jahre, die Jahre mit vorzüglicher Quantität, haben einen ganz andern Grund, wie die guten Weinjahre. Sie entstehen blos durch Wärmeüberschuss, aber einer ganz andern Zeit, nämlich des Frühlings des betreffenden Jahres und der 9 vorhergehenden Monate, jedoch so, dass der Wärmeüberschuss zwar auf ein ganzes Jahr vertheilt sein muss, aber bei Weitem nicht so hoch zu sein braucht. Deshalb sind die meisten Jahre, welche auf gute Weinjahre folgen, weinreiche. Ein bedeutender und längerer, oder ein besonders hoher und kürzerer Wärmemangel von Johanni eines Jahres bis Johanni des folgenden, auch selbst im Winter, macht das letztere Jahr immer zu einem weinarmen. Es lässt sich dieses meteorologische Factum physiologisch auch leicht deuten. Ein bedeutender Wärmemangel im Sommer vorher erschwert den Knospenansatz, im Winter erfriert der Weinstock und im betreffenden Frühling selbst leidet die Blüthe darunter.

Um für die Vergleichung der beiden Jahre 1859 und 61 unter sich sowohl als auch mit den frühern einen festen Anhalt zu haben, muss wenigstens die Hauptzahlenreihe hier folgen. Es sind nach der früheren Bezeichnung die Differenzen $B-A$ die Differenzen zwischen den Nachmittags und Morgenmitteln. Die Buchstaben a, b, c, d, e, f bezeichnen wieder Wärme, Luftdruck, Dunstdruck, Feuchtigkeit, Windstärke und Himmelsbedeckung. Die ungestrichelten Buchstaben sollen hier das Jahr 1859, die gestrichelten das Jahr 1861 bezeichnen. Da Luftdruck und Feuchtigkeit den entgegengesetzten Gang der Wärme haben, so sind bei diesen wieder, um positive Differenzen zu gewinnen, die Werthe $A-B$ genommen. Die Ziffern 1, 2, 3 und 4 bedeuten die Jahreszeiten. Zur Vergleichung sollen die Differenzen des früheren Aufsatzes darunter gestellt werden, wo die ungestrichelten Buchstaben die Werthe der Periode 1851—58, die gestrichelten die der zweijährigen Periode 1857 + 1858 bedeuten.

Die Jahre 1859 und 1861.
B — A.

	a	*a'*	*b*	*b'*	*c*	*c'*	*d*	*d'*	*e*	*e'*	*f*	*f'*
			A—B	*A—B*			*A—B*	*A—B*				
1	2,61	3,12	2	10	7	25	13,3	10,7	0,30	0,26	— 0,41	— 0,8[illegible]
2	5,71	5,17	34	20	13	23	25,7	22,2	0,70	0,03	0,62	0,[illegible]
3	7,05	5,73	40	24	— 7	— 11	30,8	27,7	0,72	0,78	0,37	0,3[illegible]
4	4,64	4,86	19	19	20	40	21,5	20,3	0,39	0,47	— 0,99	— 1,1[illegible]
					Die Jahre 1851 — 1858 und 1857 + 1858.							
1	2,53	2,95	9	11,5	18	22	9,9	12,6	0,23	0,42	— 0,01	— 0,33
2	6,05	6,24	27	28	14	12	26,6	28,3	0,73	0,70	0,28	0,41
3	6,25	7,11	29	41	15	— 4	28,0	30,3	0,83	0,83	0,45	0,64
4	4,72	5,24	21	30	40	50	19,2	19,8	0,55	0,55	— 0,23	— 1,19

Es ist klar, dass in der ersten Uebersicht, wo wir die Mittel kleinere Zeiträume vor uns haben, eine geringere Regelmässigkeit sich aussprech muss. Dennoch tritt das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit der übrige Erscheinungen von denen der Wärme deutlich hervor; wenn wir die Zal len der Jahreszeiten nach einander betrachten, finden wir in fast allen R briken ein Steigen von 1—3 und wieder ein Fallen bei 4, also wie d Wärme zunimmt vom Winter bis zum Sommer und dann im Herbst wied abnimmt in der Differenz zwischen Nachmittags und Morgens, so auch d übrigen Differenzen. Besonderes Interesse gewährt indess das Jahr 18 Obgleich zu den warmen gehörig, in denen öfter, wahrscheinlich gewöh lich, wie wir aus 1857 wissen und hier an 1859 wieder sehen, die Differe *A — B* grösser ist, namentlich im Sommer, als in gewöhnlichen Jahren, i sie 1861 im Gegentheil kleiner. Denn die Wärmedifferenz *A — B* ist e Mittel der beiden Jahre 1851 — 58 im Sommer 6°,25, im Mittel der beid Jahre 1857 und 58 sogar 7°,11, und auch 1859 ist sie 7°,05; dagegen 1861 n 5°,73. Und demgemäss verhält sich auch die Differenz des Luftdruck welche nur 0''',24 (die Zahlen in der Uebersicht bedeuten unter *b* Hunde stellinien) im Jahre 1861, im Mittel der 8 Jahre 0''',29 und im Mittel de Jahre 1857 — 59 sogar 0''',40 bis 0''',41 beträgt. Bis in solches Detail läs sich also die Abhängigkeit der übrigen Witterungserscheinungen von den der Wärme nachweissen. Was aber noch besonders hervorgehoben we den muss, ist das, dass das Jahr 1858, wie im früheren Aufsatze bemer kein warmes war und doch den täglichen Gang mit 1857 und 1859 geme hatte; 1861 war ein warmes und blieb im täglichen Gange unter der Nor wogegen jene 3 Jahre darüber hinaus gingen. Daraus folgt, was ja 18 schon zeigt, jetzt aber durch 1861 in entgegengesetzter Richtung b stätigt wird, dass der tägliche Gang der Erscheinungen vom jährlich *unabhängig ist.* Wie der tägliche Gang aber auch sei, normal oder abnor die übrigen Erscheinungen richten sich nach dem Gange der Wärme, und das ist eine neue Bestätigung des Dorn'schen Gesetzes.

Die Differenz $B - A$ ist in der mittelrheinischen Ebene grösser, als in der Nachbarschaft, in Boppard und Trier, und in guten Weinjahren ist der Unterschied noch bedeutender, als in gewöhnlichen Jahren. Da nun der Weinstock, wie alle Pflanzen, am meisten bei Tage wächst, so tritt auch von dieser Seite die mittelrheinische Ebene als ein besonders begünstigtes Terrain für die Weinproduction hervor. Daraus ist ersichtlich, dass die Weine der mittelrheinischen Ebene den guten Ruf, welche sie haben, mit Recht verdienen, und dass sie ihn vorzugsweise dem Klima ihres Locals verdanken.

XXVI. Neues Vorkommen des Cäsiums und Rubidiums. — Durch die Entdeckung von Kirchhoff und Bunsen hat einerseits die Untersuchung der Salzsoolen und Mineralwässer ein neues Interesse gewonnen, andererseits ist aber auch eine Revision der Analysen aller kalihaltigen Mineralien nöthig geworden, da bei dem bisherigen Verfahren der Kaliumbestimmung mittelst Platinchlorid auch die analogen Verbindungen des Cäsiums und Rubidiums gefällt und als Kaliumverbindung gewogen wurden. Die hierauf gestützte Vermuthung, dass es gerade unter den Mineralien, welche für kalireich gelten, einige giebt, in denen ein beträchtlicher Theil des Kaliums durch Cäsium oder Rubidium ersetzt ist, veranlasste Professor Schrötter in Wien zu einer Untersuchung der Salzsoole von Aussee und des Lithionglimmers von Zinnwald (an der sächsisch-böhmischen Grenze). In beiden Substanzen fanden sich die genannten Metalle und namentlich in dem Lithionglimmer verhältnissmässig so reichlich, dass dieses Mineral, namentlich auch wegen seiner leichten Aufschliessbarkeit, das geeignetste Material zur Gewinnung der neuen Metalle sein dürfte. Versuche in grösserem Maasstabe, wozu die Vorbereitungen getroffen sind, werden das Nähere lehren.

(Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Bd. 44, S. 218.)

XXVII. Ueber die bedingt convergirenden Reihen. — Nach einer von Lejeune-Dirichlet herrührenden Bemerkung ist es bekanntlich bei unendlichen Reihen nicht erlaubt, die einmal vorhandene Anordnung der Glieder willkürlich abzuändern. Stellt man z. B. die Glieder der Reihe

$$l2 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots$$

so um, dass zwei positive Glieder auf einander folgen, so erhält man eine ganz andere Summe und zwar

$$\tfrac{3}{2} l2 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Diesem von Dirichlet selbst gegebenen Beispiele lässt sich ein anderes, womöglich noch frappanteres zur Seite stellen. Versetzt man lich die Glieder der convergirenden Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

auf die nämliche Weise, so entsteht die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,$$

welche man sich aus Gruppen von je drei Gliedern zusammengesetzt ken kann:

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}},$$

u. s. w.

Nun ist

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n+3}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{4n+4}}+\frac{1}{\sqrt{4n+4}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n+4}} \end{aligned}$$

oder

$$u_n > \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{n+1}},$$

mithin beträgt die Summe der neuen Reihe mehr als

$$(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\left\{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\right\}$$

d. h. während die ursprüngliche Reihe convergirt, ist die abgeleitete I divergent.

XIII.

Zur analytischen Behandlung der Oberflächen zweiter Ordnung; insbesondere über homofocale und conjugirte Oberflächen.

Von Dr. Wilh. Fiedler,

Lehrer der darstellenden Geometrie an der Gewerbeschule in Chemnitz.

(Schluss.)

III. Focalcurven und conjugirte Kegelflächen der Oberflächen zweiter Ordnung.

36. Die bisherigen Entwickelungen dieses Abschnittes haben die Folgerungen dargelegt, welche aus der Erkenntniss fliessen, dass homofocale Oberflächen in einer besonderen Weise einer und derselben developpabeln Fläche eingeschrieben sind. Vorher war diese Erkenntniss begründet und die Stellung nachgewiesen worden, welche die Focalcurven eines solchen Oberflächensystems in dieser seiner Beziehung zur gemeinsam umschriebenen developpabeln Fläche einnehmen. Von diesen Focalcurven selbst war nur dort des Näheren die Rede und es ward eben nur angedeutet, wie sie in allen Beziehungen für Oberflächen zweiten Grades die Bedeutung haben, welche den Brennpunkten für die Curven zweiten Grades zukommt. Es ist hier der Ort, darauf zurückzukommen. Insbesondere muss aber auf die entsprechenden Eigenschaften der conjugirten Oberflächen näher eingegangen werden. In den vorhergehenden allgemeinen Sätzen ihrer Theorie ist die grössere Allgemeinheit der Auffassung überall festgehalten worden, welche derselben dadurch zukommt, dass der Punkt a, bezüglich dessen die Flächen der Familie conjugirt heissen, unbestimmt bleibt. Jetzt ist aber daran zu erinnern, wie insbesondere durch die Voraussetzung, der Punkt a falle mit dem Centrum einer der Flächen selbst zusammen, die zwischen conjugirten und homofocalen Flächen zweiten Grades bestehende Analogie vollständig hervortritt; erst unter dieser Voraussetzung wurden die sämmtlichen Flächen der conjugirten Familie concentrisch und haben dieselben Hauptebenen; es ward zugleich erkannt,

dass die vier conjugirten Kegelflächen des Systems unter dieser Voraussetzung den einfachsten und klarsten Zusammenhang mit dem System selbst und zugleich die einfachste Analogie zu den Focalcurven der homofocalen Oberflächen gewinnen, denn es erscheinen als solche zwei imaginäre und zwei reelle Kegelflächen zweiten Grades, wie bei den homofocalen Oberflächen zwei imaginäre und zwei reelle Curven zweiten Grades: unter jenen imaginären ist der mit dem System concentrische Kegel, welcher über dem unendlich entfernten imaginären Kreise steht, wie unter den imaginären Curven der homofocalen Familie dieser Kreis selbst; die übrigen drei conjugirten Flächen sind Cylinder, deren Erzeugende den Hauptachsen des Systems parallel sind und deren Achsen mit diesen selbst zusammenfallen, ganz entsprechend den Focalcurven des anderen Systems. Die Beziehungen dieser conjugirten Kegelflächen zur Familie der Conjugirten erscheinen der besonderen Behandlung werth; und der Weg ihrer Untersuchung ist in den vorhergehenden Sätzen schon angedeutet.

Es wird aus denselben weiter erhellen, wenn ich zuvor kurz von dem Begriff conjugirter Kegelschnitte und conjugirter geraden Linien an Kegelschnitten spreche, wie es die Quellen an die Hand geben. Und es dient andererseits demselben Zwecke, wenn die Beziehung der Directionsebenen zu den Focalcurven bei den Oberflächen zweiten Grades einige weitere Erläuterungen findet. Man mag für jenen Zweck die Note von M. Terquem: „*Sur les lignes conjointes dans les coniques*“ im IV. Bande von Liouville's „*Journal de Mathématiques*“ (1838), p. 17 und die Abhandlung von M. Chasles unter demselben Titel im nämlichen Bande, p. 385*), für diesen aber die Abhandlungen von M. Amiot im VIII. (1843) und X. (1845) Bande desselben Journals (besonders die erstgenannte: „*Théorie des focales et des plans directeurs*,“ p. 161) vergleichen.

37. Für die conjugirten geraden Linien eines Kegelschnitts gelten völlig identisch die beiden Definitionen: Zwei gerade Linien sind einem Kegelschnitt conjugirt, wenn die auf sie als Coordinatenachsen bezogene Gleichung desselben die Quadrate der Coordinaten mit gleichen Coefficienten enthält. Und: Zwei gerade Linien heissen einem Kegelschnitt conjugirt, wenn die vier Durchschnittspunkte, welche sie auf ihm bestimmen, in einer Kreisperipherie liegen.

Denn aus der Gleichungsform

$$A(x^2+y^2)+Bxy+Cx+Dy+E=0,$$

welche der ersten entspricht, ergiebt sich für die Durchschnittspunkte der Coordinatenachsen mit der Curve das Paar der Gleichungen

*) Man wird finden, dass der grösste Theil der dort bewiesenen Sätze sich auf das Einfachste denen anschliesst, welche hier aus den symbolischen Formeln gewonnen sind, und dass diese Auffassung sie vereinfacht und bequem ordnet.

$$Ax^2 + Cx + E = 0, \quad Ay^2 + Dy + E = 0,$$

und das Product der Abschnitte in jeder Achse ist daher

$$= \frac{E}{A},$$

welches die zweite Definition begründet.

Es ist auch nach dieser Definition klar, dass stets drei Paare conjugirter Linien zugleich bestimmt werden, nämlich die beiden Paare der Gegenseiten und das Diagonalenpaar des Vierecks, welches jene Schnittpunkte des Kreises und des Kegelschnitts bezeichnen. Wenn beide, der Kreis und der Kegelschnitt, concentrisch sind, so wird dieses Viereck ein Rechteck, seine Seiten laufen den Achsen des Kegelschnitts parallel und der von seinen Diagonalen gebildete Winkel hat die Achsen zu seinen Halbirungslinien. Jedes Paar gleicher Durchmesser, insbesondere auch bei der Hyperbel das Paar der Asymptoten, ist ein Paar conjugirter Linien; in jeder Achse fallen zwei Paare conjugirter Linien zusammen, während das dritte Paar von den Scheiteltangenten gebildet wird; nicht minder in der Berührungssehne eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Kreises überhaupt, und auch dann bilden die entsprechenden Tangenten das dritte Paar. Es erhellt aus diesen Zusammenhängen nebenbei, dass solche conjugirte Linien auch als Bestimmungsmittel der Kegelschnitte dienen mögen, insbesondere, wenn man sich des Zirkels zu den Constructionen bedient.

Man findet aber überhaupt, dass jedes Paar conjugirter Linien mit einer Hauptachse des Kegelschnitts gleiche Winkel bildet, oder dass sie immer einem Paare gleicher Durchmesser desselben parallel sind. Denn für zwei vom Punkte O ausgehende Transversalen, welche respective in A, A_1, B, B_1 den Kegelschnitt schneiden, gilt die Relation

$$\frac{OA \,.\, OA_1}{OB \,.\, OB_1} = \frac{a_1^2}{b_1^2},$$

wenn a_1 und b_1 die respective parallelen Halbdurchmesser bezeichnen. Für die Lage der Punkte A, A_1, B, B_1 in einem Kreise gilt also die Bedingung

$$a_1^2 = b_1^2.$$

Daraus folgt einerseits, dass alle Kegelschnitte, welche die durch dieselben vier Punkte bestimmten conjugirten Linien gemein haben, parallele Hauptachsen besitzen; andererseits, dass die Betrachtung der conjugirten Geraden zu einer einfachen Construction des Krümmungskreises in einem Punkte der Curve benutzt werden kann. (Man vergleiche „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte," Art. 243.) Für die Parabel entspringt daraus unter Anderem das interessante Ergebniss, dass der Schnittpunkt, welchen der Krümmungskreis in einem ihrer Punkte mit ihr überdies gemein hat, drei Mal so weit von der Achse entfernt ist, als der

ent-

Berührungspunkt. Nicht minder lassen sich die conjugirten K flächen einer Oberfläche zweiten Grades zur Construction der Krümm centra in einem ihrer Punkte benutzen. Alle solche Richtungen deı wickelung können hier nur angedeutet werden.

Den früheren Betrachtungen gemäss ist das System der drei : gerader Linien, welche einem Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

in Bezug auf den Punkt (x_1, y_1) conjugirt sind, in dem Ausdruck

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + k\left\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right\} = 0$$

enthalten, wenn k so bestimmt wird, dass die Discriminante dieser chung, d. h. der Ausdruck

$$k^3 . r^2 + k^2 . \frac{a^2 b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) - b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2 b^2} + k . \frac{a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 -}{a^2 b^2}$$
$$+ \frac{1}{a^2 b^2}, \quad (r = 0)$$

den Werth Null annimmt.

Wenn das Analogon zu den in den Artikeln 16 und 17 gegebenen wickelungen über conjugirte Kegelflächen in Bezug auf Oberflächen ı ten Grades vervollständigt werden soll, so hat man den Punkt $(x_1, y_1$ gleich als Centrum der Curve, d. h. $x_1 = y_1 = 0$ zu nehmen. Daraus springen für k die drei Werthe

$$k = \infty, \quad k = -\frac{1}{a^2}, \quad k = -\frac{1}{b^2},$$

und für die drei Paare conjugirter Geraden die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 0, \quad y^2(a^2 - b^2) - a^2 b^2 = 0, \quad x^2(b^2 - a^2) - a^2 b^2 = 0$$

als für die Ellipse und mit umgekehrtem Vorzeichen von b^2 als für die perbel giltig. Die erste dieser drei Gleichungen repräsentirt in jı Falle die zwei geraden Linien, welche das Centrum der Curve mi beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkten verbinden.

Die beiden anderen geben

$$y = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}}, \quad x = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}},$$

d. h. in jedem Falle je zwei vom Centrum der Curve gleichweit entfe den Achsen derselben parallele Gerade; aber im Falle der Ellipse sin die Geraden

$$y = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}}$$

und im Falle der Hyperbel nur die anderen

$$x = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}}$$

reell.

Die Werthe sind numerisch gleich und die drei Paare conjugirter gerader Linien bilden daher die Seiten und Diagonalen eines Quadrats, welches dem Kegelschnitt eingeschrieben ist; immer sind nur zwei Gegenseiten desselben reell, nämlich bei der Ellipse, die der Hauptachse parallelen, bei der Hyperbel, die zur Hauptachse senkrechten; für beide Paare aber ist der Abstand vom Centrum

$$=\frac{ab}{c},$$

d. h. die vierte Proportionale zu den beiden Halbachsen und der linearen Excentricität.

Für den Fall des Kreises, d. i. $c=0$, $a=b$, werden beide Werthe unendlich gross, d. h. zwei Systeme der in Bezug auf den Mittelpunkt conjugirten Linien fallen in die unendlich entfernten Gerade; in der That, concentrische Kreise berühren sich in zwei imaginären Punkten der unendlich entfernten Geraden und zwei von den drei Systemen der Verbindungslinien dieser Punkte fallen somit in derselben zusammen.

38. Wenn man in der Geometrie der Kegelschnitte den Ort eines Punktes sucht, dessen Entfernung von einem festen Punkte zu seiner Entfernung von einer festen geraden Linie in einem unveränderlichen Verhältniss steht, so findet man bekanntlich einen Kegelschnitt, für welchen jener Punkt ein Brennpunkt und diese Gerade die zugehörige Directrix ist.

In der Geometrie des Raumes kann man das analoge*) Problem aufstellen: Welches ist der geometrische Ort eines Punktes, für den das Quadrat seiner Entfernung von einem festen Punkte zu dem Product seiner senkrechten Abstände von zwei festen Ebenen in einem constanten Verhältniss steht?

Wenn x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des festen Punktes und

$$x+Ay+Bz+C=0,\quad x+A_1y+B_1z+C_1=0$$

die Gleichungen der beiden festen Ebenen bezeichnen, so ist offenbar die Gleichung des gesuchten Ortes

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=k\,\frac{(x+Ay+Bz+C)\;(x+A_1y+B_1z+C_1)}{\sqrt{1+A^2+B^2}\,\sqrt{1+A_1^2+B_1^2}}.$$

Dieser Ort ist also eine Oberfläche zweiten Grades, und seine Gleichung erhält die Form

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\lambda(x+Ay+Bz+C)\,(x+A_1y+B_1z+C_1),$$

wenn man

$$\lambda=\frac{k}{\sqrt{1+A^2+B^2}\,\sqrt{1+A_1^2+B_1^2}}$$

setzt.

---

*) Der Grad und zugleich die Unvollständigkeit der Analogie wird später hervortreten.

Es liegt nahe, jenen Punkt als **einen Brennpunkt** und die beid festen Ebenen als **entsprechende Directionsebenen der Obe fläche zweiten Grades** zu bezeichnen, und zu fragen, ob ei **durch ihre Gleichung gegebene Oberfläche zweiten Grad einen Brennpunkt oder mehrere Brennpunkte und ein Sy stem von Directionsebenen besitzt.**

Die zur Beantwortung derselben führende Untersuchung mag be spielsweise für das dreiachsige Ellipsoid und die auf die Hauptebenen b zogene Gleichung desselben

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

durchgeführt werden*).

Diese Gleichung muss mit der gefundenen Ortsgleichung identific und zur Bestimmung der eingeführten Constanten geschritten werden. D Entwickelung derselben liefert den Ausdruck

$$\begin{aligned}x^2(1-\lambda)+y^2(1-\lambda AA_1)+z^2(1-\lambda BB_1)-yz\lambda(AB_1+A_1C)-xz\lambda(B+&\ldots\\ -xy\lambda(A+A_1)&\\ -x\{2x_1+\lambda(C+C_1)\}-y\{2y_1+\lambda(AC_1+A_1C)\}-z\{(2z_1+\lambda(BC_1+B_1C&\ldots\\ +x_1^2+y_1^2+z_1^2-\lambda CC_1&\end{aligned}$$

und damit als Bedingungen der Identität die folgenden.

Zuerst die Gruppe der verschwindenden Coefficienten der Produ der Veränderlichen

$$AB_1+A_1B=0,\quad B+B_1=0,\quad A+A_1=0.$$

Aus denselben erhält man als einzige reelle Werthsysteme

1) $$A_1=-A,\quad B=B_1=0$$

oder

2) $$B_1=-B,\quad A=B_1=0.$$

39. Aus der Annahme des ersten folgt für den Coefficienten von in der Entwickelung der Werth Eins und man muss daher die Achse gleichung des Ellipsoids in der Form

$$\frac{c^2x^2}{a^2}+\frac{c^2y^2}{b^2}+z^2-c^2=0$$

schreiben, um die übrigen Bedingungen der Identität zu erhalten, wie folg

$$1-\lambda=\frac{c^2}{a^2},\quad 1+\lambda A^2=\frac{c^2}{b^2},\quad 2x_1+\lambda(C+C_1)=0,$$

$$2y_1+\lambda A(C_1-C)=0,\quad z_1=0,\quad x_1^2+y_1^2+z_1^2-\lambda CC_1=-c^2.$$

Man findet successive

$$\lambda=\frac{a^2-c^2}{a^2},\quad A^2=-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)},\quad \lambda CC_1=\frac{1}{\lambda}\left(x_1^2-\frac{y_1^2}{A^2}\right),$$

und durch Einsetzen dieser Werthe in die letzte Bedingungsgleichung

---

*) Ich gebe sie in einer gegen die Entwickelungen von M. **Amiot** wesentli vereinfachten Form.

$$\frac{x_1^2}{a^2-c^2}+\frac{y_1^2}{b^2-c^2}=1.$$

Man erkennt daraus, dass für jenes Werthsystem 1) die durch die Gleichungen

$$z_1=0, \quad \frac{x_1^2}{a^2-c^2}+\frac{y_1^2}{b^2-c^2}=1$$

bestimmten Punkte den Charakter von Brennpunkten besitzen; für $a>b>c$ bilden sie eine reelle, in der Ebene der grossen und mittleren Achse gelegene Ellipse, deren Achsen mit diesen Hauptachsen selbst zusammenfallen und welche die Brennpunkte der in der xz- und yzEbene gelegenen Hauptschnitte zu Scheiteln, die Brennpunkte des Hauptschnittes in der xyEbene aber zu Brennpunkten hat.

Man findet für die entsprechenden Directionsebenen die Gleichungen

$$x+Ay+C=0,$$
$$x-Ay+C_1=0;$$

sie stehen also beide senkrecht zur Hauptebene der xy und machen mit der Achse der x gleiche, von der Lage des Punktes (x_1, y_1) in der Focalcurve unabhängige Winkel, in entgegengesetztem Sinne. Der Fusspunkt ihrer Durchschnittslinie in der Ebene der xy ist durch die Werthe der Coordinaten

$$x=-\frac{C+C_1}{2}, \quad y=-\frac{C-C_1}{2A}$$

bestimmt und die Einführung der für C, C_1, A vorher gefundenen Ausdrücke liefert die Relationen

$$x=\frac{x_1}{\lambda}, \quad y=-\frac{y_1}{\lambda A^2}$$

oder

$$x_1=\frac{a^2-c^2}{a^2}x, \quad y_1=\frac{b^2-c^2}{b^2}y \text{ *)}.$$

Dadurch bestimmen sich die Coordinaten des einem Punkte (x_1, y_1) in der Focalcurve entsprechenden Punktes der Directionsebenen, deren Lage sodann durch diesen und den Richtungscoefficienten A vollkommen bestimmt ist. Die Reihe dieser Punkte für alle Punkte der Focalcurve bildet eine neue, derselben zugeordnete Curve von der nämlichen Lage der Hauptachsen; ihre Gleichung ergiebt sich sofort durch die Substitution

$$x_1=\frac{a^2-c^2}{a^2}x, \quad y_1=\frac{b^2-c^2}{b^2}y$$

*) Man erkennt leicht, dass der Punkt (x, y) in der dem Punkte (x_1, y_1) entsprechenden Normale der Focalcurve liegt.

in

$$\frac{x_1^2}{a^2-c^2}+\frac{y_1^2}{b^2-c^2}=1$$

in der Form

$$\frac{x^2}{\frac{a^4}{a^2-c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^4}{b^2-c^2}}=1.$$

Man sieht, die Achsen des Hauptschnittes der Oberfläc sind die mittleren geometrischen Proportionalen zwisch den entsprechenden Achsen der letzteren Curve und d Focale; d. h. die Scheitel dieser letzteren Curve sind c Fusspunkte der Directricen des Hauptschnittes.

40. Die Annahme des zweiten Werthsystems

$$B_1=-B,\quad A_1=A=0$$

liefert entsprechende Resultate; sie fordert zunächst die Einheit als Co ficienten von y^2 in der Entwickelung der Ortsgleichung und daher Gleichung des Ellipsoids in der Form

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2+\frac{b^2z^2}{c^2}-b^2=0.$$

Dann ergeben sich die übrigen Bedingungen der Identität, wie folgt:

$$1-\lambda=\frac{b^2}{a^2},\quad 1+\lambda B^2=\frac{b^2}{c^2},\quad 2x_1+\lambda(C+C_1)=0,$$

$$y_1=0,\quad 2z_1+\lambda B(C_1-C)=0,\quad \lambda CC_1-x_1^2-y_1^2-z_1^2=-b^2.$$

Man findet successive

$$\lambda=\frac{a^2-b^2}{a^2},\quad B^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)},\quad \lambda CC_1=\frac{1}{\lambda}\left(x_1^2-\frac{z_1^2}{B^2}\right),$$

und durch Einsetzen in die letzte Bedingungsgleichung

$$\frac{z_1^2}{b^2-c^2}-\frac{x_1^2}{a^2-b^2}=1,$$

als die Gleichung der Focalcurve in der Hauptebene der xz. S ist offenbar eine Hyperbel, deren Achsen in die grosse u kleine Achse der Oberfläche fallen; ihre Scheitel sind Brennpunkte des in der xyEbene gelegenen Hauptschnit der Oberfläche, ihre Brennpunkte fallen mit den Bre punkten des in der Ebene der xz gelegenen Hauptschnit zusammen, sie hat also die Brennpunkte der Focalelli zu Scheiteln und die Hauptachsenendpunkte dieser le teren zu Brennpunkten.

Für die entsprechenden Directionsebenen hat man

$$x+Bz+C=0,\quad x-Bz+C_1=0;$$

sie stehen also senkrecht zur Hauptebene der xz und machen mit Achse der x gleiche Winkel; es findet aber zwischen den hier gefunde Directionsebenen und jenen, welche der Focalellipse entsprechen, sehr wesentliche Unterschied statt, dass hier das Quadrat des Richtungscoefficienten

$$B^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}$$

positiv ist, während es dort negativ war, d. h. die Directionsebenen, welche der Focalhyperbel entsprechen, sind reell, die, welche der Focalellipse entsprechen, aber imaginär. Man erkennt zugleich an dem Werthe dieses Richtungscoe:ficienten die cyclischen Ebene der Oberfläche.

Der Fusspunkt der Durchschnittslinie in der Ebene der xz ist durch die Werthe

$$x = -\frac{C + C_1}{2}, \quad z = -\frac{C - C_1}{2B}$$

bestimmt und man hat die Relationen

$$x = \frac{x_1}{\lambda}, \quad z = -\frac{z_1}{\lambda B^2}$$

oder

$$x_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x, \quad z_1 = -\frac{b^2 - c^2}{c^2} z.$$

Jene Punkte bilden also eine der Focalhyperbel zugeordnete Curve, deren Gleichung ist

$$\frac{\frac{z^2}{c^4}}{b^2 - c^2} - \frac{\frac{x^2}{a^4}}{a^2 - b^2} = 1.$$

Dies liefert dieselben Relationen wie vorhin.

Man findet überdies leicht, dass jede Asymptote der Focalhyperbel mit einer Asymptote der zugeordneten Hyperbel ein System conjugirter Durchmesser der Hauptellipse in der Ebene der xz bestimmt.

In der dritten Hauptebene, in der der yz, giebt es keine reelle Focalcurve; man erhält den Ausdruck

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

welcher für $a > b > c$ stets eine imaginäre Curve repräsentirt.

41. Man sieht sofort, wie diese Entwickelungen für alle centrischen Oberflächen zweiten Grades in fast unveränderter Geltung bleiben und wie leicht sie sich auf die Flächen ohne Centra im endlichen Raume ausdehnen lassen.

Ich gedenke besonders der Formen, welche sie für Rotationsflächen und für Kegelflächen zweiten Grades insbesondere annehmen.

Das Rotationsellipsoid entspricht der Substitution

$$a^2 = b^2,$$

und für das einfache Rotationshyperboloid hat man überdies das zeichen von c^2, für das doppelte aber das Vorzeichen von a^2 zu verän Doch sollen nur die dem Rotationsellipsoid entsprechenden Resultat gegeben werden. Man hat bei dem Rotationsellipsoid

$$\frac{x_1^2}{a^2-c^2}+\frac{y_1^2}{a^2-c^2}=1, \quad z_1=0$$

für die Focalellipse, und erkennt sie als einen Kreis in der El des Hauptschnittes xy durch die Brennpunkte des Hauptschnitt der Ebene der xz.

Die zugeordnete Curve wird

$$\frac{x^2}{\frac{a^4}{a^2-c^2}}+\frac{y^2}{\frac{a^4}{a^2-c^2}}=1,$$

und ist somit ein Kreis, welcher durch die Fusspunkte der Directricen Hauptschnitte geht.*)

Man hat ferner

$$x=0, \quad y=0$$

als die Gleichungen der Focalhyperbel und erkennt, dass die R tionsachse ihre Stelle vertritt.

Die zugeordnete Hyperbel hat die Gleichungen

$$y=0, \quad (a^2-c^2)\,z^2=c^4$$

und wird also durch zwei in der Hauptebene der xz gelegene, der A der x parallele Gerade in dem positiven und negativen Abstand

$$=\frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

von derselben vertreten, d. h. durch die Directricen des Hau schnittes in der Ebene xz.

Für die Kugel fallen diese Geraden beide in die unendlich entf Gerade der Ebene.

Für die Kegelfläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

liefert die Entwickelung folgende Resultate: Die Focalellipse Hauptebene der xy hat die Gleichung

$$\frac{c^2x^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2y^2}{b^2+c^2}=0;$$

sie reducirt sich ebenso, wie die zugeordnete Curve auf ein Paar imaginären Geraden, d. h. auf einen reellen Punkt. Die entspreche Directionsebenen sind imaginär, weil der Ausdruck für das Quadrat Richtungscoefficienten

---

*) Es ist bemerkenswerth, dass der Richtungcoefficient A^2 den Werth -1 nimmt.

$$A^2 = -\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2(a^2+c^2)}$$

stets negativ ist.

Die Focalhyperbel der Hauptebene der xz ist

$$\frac{x_1^2}{a^2-b^2} - \frac{z_1^2}{b^2+c^2} = 0;$$

zwei reelle Gerade in der Ebene der xz, welche durch die Spitze gehen.

Die Directionsebenen sind auch hier imaginär, denn es ist

$$B^2 = -\frac{a^2(b^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)}.$$

Aber die der Focalhyperbel zugeordnete Curve ist reell und hat die Gleichung

$$\frac{\frac{x^2}{a^4}}{a^2-b^2} - \frac{\frac{z^2}{b^2}}{b^2+c^2} = 0,$$

zwei gerade Linien.

Für $a^2 = b^2$, d. i. für den Rotationskegel, dessen Achse mit der Achse der z zusammenfällt, hat man speciell:

$$a^2y^2 + c^2x^2 = 0,$$

an Stelle der Focalellipse, und

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

als Gleichung der Focalhyperbel; die Achse der z ist also die letztere.

Wenn man hierbei für die Kegelflächen überhaupt imaginäre Directionsebenen erhält, so ist dies ein allen Regelflächen zweiten Grades entsprechendes Ergebniss; man kann es leicht für das einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid nachweisen.

42. Diese einfachen Entwickelungen reichen hin, um die vollständige Berechtigung des Namens Focalcurven für die betrachteten Oerter zu zeigen. Aber die Uebereinstimmung ist eine noch tiefer gehende, und es mögen wenigstens einige der leicht ableitbaren Ergebnisse hier angeführt werden.

Wenn ein Ellipsoid durch eine zur grossen oder mittleren Achse normale Ebene geschnitten wird, so trifft diese die zugeordnete Curve der Focale in zwei Punkten; die Punkte der in der Ebene jener Achsen gelegenen Focale, welche diesen entsprechen, sind Brennpunkte der Schnittcurve; die Summe der Radienvectoren, welche von ihnen nach einem beliebigen Punkte der Schnittcurve gezogen werden, ist unveränderlich; die Normale der Oberfläche in diesem Punkte des Schnittes liegt in der Ebene der Radienvectoren und halbirt den von ihnen gebildeten Winkel.

Analoge Resultate gelten für die übrigen Oberflächen zweiten Grades.

überall, wo die Schnittcurve hyperbolisch ist, tritt an Stelle der Summ die Differenz der Radienvectoren. Man kann daraus und aus dem Art. 4 und seiner Anmerkung auch schliessen, dass jede Ebene, welche i einem Punkte der Focalcurve zu der Tangente derselbe rechtwinklig ist, die Oberfläche zweiten Grades in eine Kegelschnitt schneidet, der diesen Punkt zum Brennpunk hat. Man weiss, wie diese Eigenschaft die Focallinien der Kege flächen zweiten Grades charakterisirt.

Aber auch minder nahe liegende Eigenschaften bleiben bewahrt, z. I die nachstehende. Man weiss, dass die reciproke Polare eines Kege schnitts ein Kreis ist, wenn der zur Directrix gewählte Kreis einen Bren punkt desselben zum Centrum hat.*) Weniger beachtet dürfte es aber sei dass die Focalcurven einer Oberfläche zweiten Grades di Centra der Kugeln bestimmen, rücksichtlich deren die reci proke Polare der Oberfläche eine Umdrehungsfläche wir

Oder: Die Pole einer geraden Linie in Bezug auf alle die Kege schnitte eines homofocalen Systems liegen in einer zu ihr selbst rechtwink ligen Geraden.**)

Und: Die Pole einer Ebene in Bezug auf alle homofocal Oberflächen zweiten Grades liegen in einer zu dieser Eben senkrechten geraden Linie. Diese Gerade ist die Normal der von jener Ebene berührten Oberfläche des Systems in Berührungspunkte.

Die vollständige Analogie mit den Brennpunkten der Kegelschnitt liegt zu Tage; dass die Focalcurven einer Oberfläche zweite Grades die reellen Doppelcurven in der developpabel Oberfläche sind, welche ihr und dem unendlich entfernte imaginären Kreis gemeinsam umschrieben ist, sowie di Brennpunkte des Kegelschnitts die reellen Ecken des Vier seits sind, welches ihm und dem unendlich entfernten ima ginären Kreise — oder vielmehr den zwei der betreffende Ebene angehörigen Punkten desselben — gemeinsam um schrieben ist, erscheint nun nur als ein weiteres Glied in der Kett dieser Analogien.

Aber das Vorhergehende hat den Blick zugleich so wenig von de verwandten Theorie der conjugirten Linien und Kegelflächen abgewandt dass sogar mitten in den letzten Entwickelungen direct Erinnerungen an Dasjenige liegen, was vorher über conju girte Linien erörtert ward. Sind nicht die Spuren der Directions ebenen der der Ebene xz angehörigen Focalhyperbel in dieser Ebene ode

*) Man vergleiche „Analyt. Geom. d. K." Art. 388.

**) Vergl. „Analyt. Geom. d. K." Art. 448, Aufg. 3.

die entsprechenden Spuren der Directionsebenen für die Focalellipse in der Ebene xy mit ihrer gleichen Neigung gegen die Achse der x oder die eine Hauptachse dieser Curven, conjugirte Linien in Bezug auf dieselben?

In der That, man kann leicht die Entwickelungen der Artikel 38—41 auf Kegelschnitte übertragen; ich will die Hauptergebnisse kurz vorüberführen, ohne die leichten Beweise beizufügen.

Der Ort eines in einer Ebene beweglichen Punktes, für welchen immer das Verhältniss seiner Entfernung von einem festen Punkte zu dem geometrischen Mittel seiner Entfernungen von zwei festen geraden Linien unveränderlich ist, ist ein Kegelschnitt. Man kann den festen Punkt einen Brennpunkt und die festen geraden Linien die Directionslinien desselben nennen. Jede Curve zweiten Grades kann als ein solcher Ort betrachtet werden; man gelangt durch die Vergleichung der Coefficienten in der Gleichung dieser letzteren und in der des Ortes zur Bestimmung der Directionslinien und des Brennpunktes, jedoch so, dass sich eine Curve als Ort der möglichen Brennpunkte und eine zweite Curve als Ort der Durchschnittspunkte der zugehörigen Directionslinien ergiebt; sie sind vom zweiten Grade und haben mit der gegebenen Curve die nämlichen Hauptachsen, das vollständige Analogon der Focale und der zugehörigen Curve in der vorher entwickelten Theorie. Die Directionslinien jedes Punktes machen mit den Achsen der Curve gleiche Winkel, wie vorher und sind daher conjugirte gerade Linien in Bezug auf dieselbe. Man hat aber in Bezug auf diese dem Kegelschnitt beigeordneten Curven ganz dieselben Eigenschaften wieder, wie in der entsprechenden Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung. Jede einer Hauptachse parallele Gerade schneidet die gegebene Curve und die von dem Durchschnittspunkt der Directionsachsen beschriebene Curve in zwei Punkten; diesen letzteren entsprechen zwei bestimmte Punkte der Focale, die zu den bezüglichen Directionsachsen gehörigen Brennpunkte; wenn man sie mit den besagten Punkten des gegebenen Kegelschnitts verbindet, so ist die Summe der Radienvectoren an beiden Punkten die nämliche und die Normalen desselben in diesen Punkten halbiren den jeweiligen Winkel zwischen den Radienvectoren etc.

Jene Directionsachsen sind conjugirte Gerade in Bezug auf den Kegelschnitt und der entsprechende Brennpunkt ist das Centrum des Kreises, welcher durch die zugehörigen Schnittpunkte der Curve und dieser Linien geht.

43. Es trifft den Mittelpunkt der Sache und den Nerv dieses Zusammenhanges, wenn ich den folgenden Satz beweise: Der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat der von ihm an einen festen Kreis gezogenen Tangente zu dem Product seiner Entfernungen von zwei festen Geraden in constantem Ver-

hältniss steht, ist ein Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte geht, welche jene geraden Linien mit dem Kreise gemein haben. Denn, wenn alle die letzten Betrachtungen in Wahrheit auf conjugirte Liniensysteme hinausführen, so muss dieser Satz giltig sein.

Sein Beweis zeigt zugleich, wie vollständig diese Theorien in den Kreis der hier vorgetragenen Symbolik gehören, denn er entspringt aus der einfachen Symbolformel

$$K - \lambda\alpha\beta = 0,$$

in welcher $K = 0$ die Gleichung eines Kreises, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die Gleichungen zweier geraden Linien und λ eine Constante bedeuten.

Man hat

$$\lambda = \frac{K}{\alpha\beta},$$

und dies ist nun, wie folgt, zu interpretiren*). Bekanntlich liefert die Substitution der Coordinaten eines beliebigen Punktes in die Gleichung eines Kreises das Quadrat der von ihm an den Kreis gehenden Tangente; die Substitution in die Gleichung einer Geraden aber die senkrechte Entfernung des Punktes von dieser Geraden.

Die Geltung des Satzes ist offenbar von der Grösse des Halbmessers und der Realität der Durchschnittspunkte der geraden Linien mit dem Kreise unabhängig; daher ist der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat der Entfernung von einem gegebenen festen Punkte zum Product seiner Entfernungen von zwei festen geraden Linien in einem constanten Verhältniss steht, ein Kegelschnitt; die festen geraden Linien sind als Sehnen seines imaginären Durchschnitts mit dem unendlich kleinen festen Kreise zu betrachten, welcher den festen Punkt zum Centrum hat.

Wenn diese Durchschnittssehnen in eine Gerade zusammenfallen, d. h. für die Symbolformel

$$K - \lambda\alpha^2 = 0,$$

so wird

$$\lambda = \frac{K}{\alpha^2};$$

der Ort eines Punktes, für welchen die Länge der von ihm an einen festen Kreis gezogenen Tangente zu seiner Entfernung von einer festen Geraden in unveränderlichem Verhältniss steht, ist ein Kegelschnitt, welcher den festen Kreis in den zwei Punkten berührt, wo die feste Gerade ihn schneidet.

---

*) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Art. 27, 52 f., 118, 284.

In dem Falle, wo der Kreis unendlich klein ist, entspringt daraus die **fundamentale Eigenschaft des Brennpunktes und der Directrix bei Kegelschnitten**; der Brennpunkt ist als unendlich kleiner Kreis zu betrachten, welcher mit dem Kegelschnitt eine doppelte imaginäre Berührung in der Directrix hat. Die Directrix ist die Vereinigung zweier in Bezug auf den Brennpunkt dem Kegelschnitt conjugirten Geraden. Jedem anderen Punkt der Focalcurve entsprechen zwei unter gleichen Winkeln gegen die Hauptachsen des Kegelschnitts geneigte Directionsachsen oder conjugirte Linien.

Dieselben Betrachtungen übertragen sich sehr leicht auf die Kugel und die Oberflächen zweiten Grades. Sobald die Symbolformel

$$K - \lambda A \,.\, B = 0,$$

in welcher

$$K = 0$$

die Gleichung einer Kugel,

$$A = 0, \quad B = 0$$

die Gleichungen fester Ebenen repräsentiren, während λ eine Constante ist, interpretirt wird, so erkennt man: Für alle Oberflächen zweiten Grades, welche durch die von den festen Ebenen A, B mit der festen Kugelfläche K bestimmten Kreislinien gelegt werden können, gilt die metrische Relation

$$\lambda = \frac{K}{A\,.\,B},$$

d. h. das Quadrat der von einem beliebigen Punkte einer solchen Oberfläche an die Kugel gelegten Tangente ist zu dem Product der Entfernungen dieses Punktes von den zwei festen Ebenen in einem unveränderlichen Verhältniss. Dieser Satz gilt unabhängig von dem Halbmesser der Kugel und von der Realität der Durchschnittscurven derselben mit der Oberfläche; er gilt also auch noch für eine Kugel vom Halbmesser Null. Der Mittelpunkt einer solchen Kugel ist aber ein Brennpunkt und die zugehörigen festen Ebenen sind Directionsebenen in dem früher entwickelten Sinne. Man sieht auch hier, sie sind zugleich cyclische Ebenen der Oberfläche.

Man kann sogar durch rein geometrische Betrachtungen den Ort solcher Punkte bestimmen, wenn man einen Satz als bekannt voraussetzt, welchen Herr Steiner im I. Bde. von Crelle's Journal (p. 47) bewiesen hat. Die fraglichen Punkte sind Centra von mit dem Halbmesser Null beschriebenen Kugeln, welche die Oberfläche in ebenen Curven schneiden; wenn aber zwei Oberflächen zweiten Grades sich in ebenen Curven schneiden, so zerfällt ihre gemeinschaftlich umschriebene developpable Fläche in zwei Kegelflächen zweiten Grades, und wenn die eine von ihnen eine Kugel ist, so müssen diese letzteren Rotationskegel sein. Soll zugleich diese Kugel den Radius Null haben, so kann ihr Mittelpunkt nur in Spitze eines dieser Kegel liegen. Demnach müssen die Focurven einer Oberfläche zweiten Grades als Ort der Scl tel der Rotationskegel gefunden werden, welche dersel umschrieben werden können. Die Natur eben dieses Ortes d cirte aber Herr Steiner an dem angeführten Orte. In vervollständi Form findet man dieselbe Untersuchung in Herrn Magnus' „Aufg und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes" p. 325; den Analogien dieser Curven mit den Brennpunkten der Kegelschı findet sich aber an beiden Orten nichts. Erst in Herrn Plücker's „Sy der analytischen Geometrie des Raumes" ist dieser Zusammenhang da legt; man vergleiche die schöne Darstellung in §. 11, p. 275—300 di Werks. Dass sie von der hier gegebenen ganz verschieden ist, brai ich wohl kaum zu bemerken.

Aber in der Theorie der Oberflächen zweiten Grades stellen sich, gezeigt worden ist, conjugirte Kegelflächen den conjugirten Lin systemen der Kegelschnitte erst in aller Vollständigkeit zur Seite; sie wie früher gezeigt ist, die durch den Durchschnitt einer Kugel mit Oberfläche zweiten Grades bestimmten Kegelflächen; ihre Hauptacl und ihre cyclischen Ebenen sind, wie es schon M. Chasles (Liouvi Journal, Vol. III, 1838, p. 432) angegeben hat, denen der Oberfläche rallel. Es bleibt mir übrig, von den umfassenderen Gesichtspunkten welche jetzt gewonnen sind, von den Eigenschaften dieser conjugi Flächen die wichtigsten zu entwickeln. Sie entsprechen denen der Fc curven und die einen können aus den anderen abgeleitet werden.

44. Für die durch

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

dargestellte Oberfläche zweiten Grades sind im Art. 17 die Gleichun der drei derselben bezüglich ihres Centrums conjugirten Cylinder wie f gefunden worden

$$\frac{y^2}{\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}}+\frac{z^2}{\frac{a^2c^2}{a^2-c^2}}-1=0,$$

$$\frac{z^2}{\frac{b^2c^2}{b^2-c^2}}+\frac{x^2}{\frac{b^2a^2}{b^2-a^2}}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{\frac{c^2a^2}{c^2-a^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^2b^2}{c^2-b^2}}-1=0.$$

Stellt man dazu die Gleichungen der drei Hauptschnitte der Fläche

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad \frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

und die Gleichungen ihrer conjugirten Liniensysteme

$$z^2(b^2-c^2)-b^2c^2=0,\quad y^2(c^2-b^2)-b^2c^2=0,$$
$$x^2(c^2-a^2)-c^2a^2=0,\quad z^2(a^2-c^2)-c^2a^2=0,$$
$$y^2(a^2-b^2)-a^2b^2=0,\quad x^2(b^2-a^2)-a^2b^2=0,$$

so kann man bemerken, dass

$$y^2\left\{\frac{c^2a^2}{c^2-a^2}-\frac{c^2b^2}{c^2-b^2}\right\}-\frac{c^2a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{c^2b^2}{c^2-b^2}=0,$$
$$x^2\left\{\frac{c^2b^2}{c^2-b^2}-\frac{c^2a^2}{c^2-a^2}\right\}-\frac{c^2a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{c^2b^2}{c^2-b^2}=0$$

durch Entwickelung auf

$$y^2(a^2-b^2)-a^2b^2=0,\quad x^2(b^2-a^2)-a^2b^2=0$$

zurückkommen; und ebenso bei den übrigen Paaren. Für die imaginäre conjugirte Kegelfläche gilt offenbar das Nämliche. Dies giebt den Satz: Jede Hauptebene einer Oberfläche zweiter Ordnung bestimmt in ihr und dem System der ihr in Bezug auf ihr Centrum conjugirten Flächen das System zweier Kegelschnitte, welchen dieselben drei Paare conjugirter gerader Linien gemeinschaftlich sind.

Der Hauptschnitt selbst und die Spur des zur Hauptebene normalen Cylinders bilden das System der beiden Kegelschnitte; die in die Hauptebene fallenden Seiten der beiden übrigen conjugirten Cylinder und des imaginären Kegels bilden die Paare der bezüglich des gemeinsamen Centrums diesen Kegelschnitten conjugirten Geraden.

Zugleich lehrt die symmetrische Form der Gleichungen, dass jeder der drei conjugirten Cylinder die beiden anderen bestimmt und man erkennt überdies leicht, dass jede der Kegelschnittslinien, welche ihre Spuren in den Hauptebenen sind, zwei ihrer Scheitel in den reellen conjugirten Linien der anderen hat. Man kann daher sagen: Wenn entsprechende Hauptschnitte zweier Oberflächen zweiter Ordnung bezüglich ihres gemeinschaftlichen Centrums dieselben conjugirten Linien haben, so entsprechen den Oberflächen selbst die nämlichen conjugirten Cylinder- und Kegelflächen. Und: Wenn zwei Oberflächen zweiter Ordnung einen gemeinschaftlichen conjugirten Cylinder besitzen, so haben ihre entsprechenden Hauptschnitte dieselben conjugirten Linien.

45. Die Sätze 4) und 5) des Artikels 30, angewandt auf die Oberfläche und einen der ihr bezüglich des Centrums conjugirten Cylinder, lauten: Zwei Tangentialebenen eines einer Oberfläche des zweiten Grades conjugirten Cylinders schneiden dieselbe nach zwei Kegelschnitten, durch welche eine Rotationsfläche gelegt werden kann, die das Centrum zum Brennpunkt hat. Die entsprechende Directionsebene ist die Ebene der beiden

Berührungsseiten des conjugirten Cylinders mit den Tangentialebenen.

Insbesondere schneiden die Asymptotenebenen des hyperbolischen conjugirten Cylinders die Oberfläche in zwei Kreisen, welche auf einer mit ihr concentrischen Kugel liegen.

Und: Wenn eine durch das Centrum der Oberfläche gelegte Ebene einen ihrer conjugirten Cylinder in zwei Erzeugenden schneidet, so bestimmen die ihnen entsprechenden Tangentialebenen des Cylinders in der Oberfläche zwei Kegelschnitte, welche auf einem mit der Oberfläche concentrischen Rotationskegel gelegen sind, dessen Achse zur ersten Ebene senkrecht ist.

Bei einem Ellipsoid ist der elliptische conjugirte Cylinder ganz ausserhalb der Fläche und hat keine reellen gemeinschaftlichen Berührungsebenen mit ihr; der hyperbolische Cylinder besitzt mit ihr gemeinschaftlich vier Tangentialebenen, welche die Region der die Fläche nicht schneidenden Tangentialebenen desselben von der Region derjenigen trennen, welche reelle Schnitte bestimmen. Bei dem einfachen Hyperboloid schneiden alle Tangentialebenen der beiden conjugirten Cylinder die Oberfläche; bei dem zweifachen Hyperboloid kann keine der Tangentialebenen des hyperbolischen conjugirten Cylinders einen reellen Schnitt bestimmen; der elliptische aber hat mit der Oberfläche vier Tangentialebenen gemein, welche wieder die vorerwähnten Grenzlagen markiren.

Der Satz 2) desselben Artikels 30 lautet jetzt: Zwei beliebige Tangentialebenen eines conjugirten Cylinders einer Oberfläche zweiten Grades sind die Directionsebenen bezüglich des Centrums derselben als eines Focalpunktes von einer anderen Oberfläche zweiter Ordnung, welche der gegebenen längs desjenigen Kegelschnitts eingeschrieben ist, den die Ebene der Berührungsseiten des conjugirten Cylinders bestimmt. Im Besonderen sind die Asymptotenebenen des hyperbolischen conjugirten Cylinders einer Oberfläche zweiten Grades die cyclischen Ebenen des Asymptotenkegels derselben.

Ebenso erhält der 4. Satz des Artikels 25 in Verbindung mit dem 3. Satze des Artikels 34 jetzt die folgende Gestalt: Eine Oberfläche zweiten Grades giebt mit einer ihrer conjugirten Cylinderflächen und zwei Tangentialebenen derselben folgenden Flächensystemen den Ursprung: 1) Der unendlichen Reihe derjenigen Oberflächen zweiten Grades, welche durch die Schnittcurven der Oberfläche mit jenen beiden Tangentialebenen des Cylinders gelegt werden können. 2) Der unendlichen Reihe der Oberflächen, die das Centrum der gegebenen Fläche zum Focalpunkt und die beiden Tangentialebenen des Cylinders zu bezüglichen Directionsebenen haben. 3) Der unendlichen Reihe der Rotationsflächen, welche das Centrum der gegebenen Fläche zum Brennpunkt und die Ebene der Berührungsseiten des Cylinders zur Directionsebene haben. 4) Der unendlichen Reihe der Cylinder, welche den gegebenen längs dieser Erzeugenden berühren. Diese vier Reihen von Flächen sind homographisch oder entsprechen einander nach gleichem Doppelschnittverhältniss. Zwei entsprechende Flächen der ersten beiden Reihen berühren sich längs eines Kegelschnitts in der Ebene der Erzeugenden des Cylinders. Drei entsprechende Oberflächen der letzten drei Reihen gehen durch eine und dieselbe Curve in dieser nämlichen Ebene.

46. Die folgenden Sätze ergeben sich leicht nach den Gesetzen der Polarreciprocität aus bekannten Sätzen von M. Chasles, Amiot und Plücker über die excentrischen Kegelschnitte; jedoch sind sie mit Hilfe der bisher gegebenen Relationen auch leicht direct zu beweisen. Ich gebe den Beweis bei dem ersten derselben, werde mich aber der Kürze wegen auf Andeutungen und erläuternde Bemerkungen bei den übrigen beschränken.

Die Polarebene eines Punktes (x_1, y_1, z_1) in Bezug auf die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

hat die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0;$$

$$xx_1+yy_1+zz_1=0$$

ist die das Centrum enthaltende, zum Radiusvector des Punktes (x_1, y_1, z_1) normale Ebene und somit

$$xx_1\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}+yy_1\frac{c^2-b^2}{c^2b^2}=1,\quad xx_1\frac{b^2-a^2}{b^2a^2}+zz_1\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}=1$$

die Durchschnittslinie dieser und der vorigen Ebene. Da die erste von diesen beiden Gleichungen auch die durch die besagte Gerade parallel zur Achse der z gehende Ebene, nicht minder aber die Polarebene der durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) zu derselben Achse gezogenen Parallelen in Bezug auf den conjugirten Cylinder der Oberfläche, welcher der Achse der z parallel ist, repräsentirt, so gilt der Satz: Wenn eine Oberfläche zweiten Grades vom Centrum O und ein Punkt M im Raume, sowie die Polarebenen des letzteren bezüglich der ersteren und eines ihrer conjugirten Cylinder gegeben sind, so bestimmt die Durchschnittslinie beider Ebenen mit dem Centrum eine zum Radiusvector OM des Punktes M norma Ebene.

Wird M auf der Oberfläche selbst gewählt, so wird die Polarebe bezüglich der Oberfläche zur Tangentialebene derselben; die Durc schnittslinie derselben mit der durch O zu OM normalen Ebene oder n der Polarebene des Punktes bezüglich eines conjugirten Cylinders wi von M. Cremona als Polnormale des Punktes M bezeichnet und ic will in Ermangelung einer besseren Benennung diese beibehalten.

Man sieht, wenn eine Oberfläche zweiten Grades vc einer Geraden geschnitten wird, welche einer ihrer Achse parallel ist, so liegen die Polnormalen der Schnittpunk in der Polarebene jener Geraden in Bezug auf den zur gle chen Achse parallelen conjugirten Cylinder der Fläche.

Man denke sich nun eine Tangentialebene der Oberfläche von ein Anfangslage aus nach einem bestimmten Gesetze bewegt und denke si die entsprechende Bewegung der Polnormale; jene erzeugt bei ihrer E wegung immer eine der Oberfläche umschriebene developpable Fläch diese eine Regelfläche; man kann fragen, wenn diese letztere ebe falls abwickelbar sein wird, und findet, dass für jeden Punkt der Ob fläche zwei Richtungen der Bewegung existiren, welche dieser F derung entsprechen. Die Bewegung der Tangentialebene nach einer jed derselben erzeugt eine der gegebenen Oberfläche umschriebene develo pable Fläche; der Anfangslage der Tangentialebene, der gemeinscha lichen Tangentialebene von beiden, entspricht in jeder von ihnen ei charakteristische Erzeugende, und die von diesen mit dem Ce trum bestimmten Ebenen sind orthogonal. In dieser Weise entsprech jeder Tangentialebene drei bezeichnende gerade Linie nämlich die Polnormale und die charakteristischen Erze genden. Sie bilden ein Dreieck, welches immer mit de gemeinschaftlichen Centrum der Flächen eine rectanglä dreiseitige Ecke bestimmt; die Ebenen derselben sind di gemeinschaftlichen Hauptebenen der Kegelflächen, unte denen die Durchschnittslinien der Tangentialebene mit de conjugirten Cylindern vom Centrum aus gesehen werder oder jenes Dreieck ist den drei besagten Kegelschnitten zugleich conjugir

Jene charakteristischen Erzeugenden sind für die Tangentialeben des einfachen Hyperboloids die ihr angehörigen Erzeugenden der Obe fläche selbst; die vom Centrum nach ihnen gehenden Ebenen sind die ge meinsamen cyclischen Ebenen der drei Kegelflächen, unter welchen di Schnittcurven der Tangentialebene mit den conjugirten Cylindern de Oberfläche vom Centrum aus gesehen werden. Dabei schneidet jede durc den Radiusvector des Berührungspunktes der Tangentialebene gelegt *Ebene einen der* fraglichen Kegel nach zwei Erzeugenden, die gegen de

Radiusvector gleich geneigt sind; es ergiebt sich daraus offenbar ein Gesetz über die Tangente einer Oberfläche zweiten Grades.

Eine beliebige Ebene schneidet ferner eine Oberfläche zweiten Grades und ihre conjugirten Cylinder in Curven, welche mit dem Centrum der Fläche homocyclische Kegel bestimmen; für jede zu zweien derselben gemeinschaftliche Tangentialebene sind die Berührungsseiten rectangulär. Jede Durchmesserebene insbesondere schneidet die Oberfläche und ihre conjugirten Cylinder nach Kegelschnitten, welche dieselben conjugirten Linien besitzen.

Daraus folgt unmittelbar, dass für einen aus dem Centrum beschriebenen, über einer ebenen Schnittcurve der Oberfläche stehenden Kegel durch die Hauptebenen drei gerade Linien in der Ebene des Schnittes bestimmt werden, für welche die durch sie gehenden einem conjugirten Cylinder parallelen Ebenen bezüglich dieses Cylinders selbst conjugirt sind.

Wenn ein Dreieck, dessen Seiten mit dem Centrum der Oberfläche eine rechtwinklige dreiseitige Ecke bestimmen, sich so bewegt, dass eine seiner Ecken die Oberfläche selbst durchläuft, indess die beiden anderen sich auf den reellen conjugirten Cylindern bewegen, so umhüllt die Ebene des Dreiecks eine Kugel, beschrieben über dem zum imaginären conjugirten Cylinder parallelen Durchmesser der Fläche.

47. Es existiren ferner Eigenschaften bezüglich der Segmente schneidender gerader Linien, von den einige hier folgen mögen.

Wenn eine durch das Centrum der Oberfläche gehende Transversale ihr selbst in M und einem ihrer conjugirten Cylinder in N begegnet, so ist die Grösse

$$\frac{\overline{On}^2 - \overline{Om}^2}{\overline{Om}^2 \cdot \overline{On}^2},$$

von der Richtung der Transversale unabhängig, gleich dem inversen Quadrate des mit jenem Cylinder gleichgerichteten Halbdurchmessers.

Die geradlinigen Polaren der Erzeugenden eines conjugirten Cylinders bezüglich der Oberfläche selbst umhüllen einen in der in ihm normalen Hauptebene derselben gelegenen Kegelschnitt, der mit der entsprechenden Spur des Cylinders gleiche Achsenrichtungen hat; man erhält einen Punkt der einer Erzeugenden vom Fusspunkt i entsprechenden Polare in dem Punkte t der bezüglichen Tangente der Spur des Cylinders, welcher mit i am Centrum einen rechten Winkel bestimmt. Diese Polare begegne den Asymptoten des in derselben Hauptebene gelegenen Focalkegelschnitts in Punkten p, q und die Radienvectoren Op, Oq bezeichnen in einer beliebigen Tangentialebene der Oberfläche die Punkte p_1, q_1; endlich sei N die Tangentialebene des conjugirten Cylinders längs der gedachten Erzeugenden und die im Centrum auf der durch dasselbe mit der Durchschnittslinie der Ebenen M und N bestimmten Ebene errichtete Normale schneide diese Ebenen selbst in m und n, so ist die Grösse unbeschadet der Lage der Ebenen M, N unveränderlich

$$\frac{\overline{On}^2 - \overline{Om}^2}{\overline{Om}^2 \cdot \overline{On}^2} : \frac{Op - Op_1}{Op \cdot Op_1} \cdot \frac{Oq - Oq_1}{Oq : Oq_1}$$

und dem Product aus dem inversen Quadrate des dem betrachteten Cylinder parallelen Halbdurchmessers in die Differenz der Quadrate der beiden anderen Halbdurchmesser gleich.

Man sieht leicht, wie dies Gesetz nur auf den zur Ebene der Focalhyperbel senkrechten conjugirten Cylinder direct anwendbar ist; eine leichte Veränderung überträgt es aber auch auf die anderen. Ist eine Tangentialebene M einer Oberfläche zweiten Grades und die Tangentialebene N eines ihrer conjugirten Cylinder gegeben, und wird durch die gerade Polare der Berührungsseite und den Durchschnittspunkt der Focalhyperbel mit der Ebene M eine Ebene P gelegt, so gilt für die Punkte m, n, in denen eine im Centrum auf die durch dies und die Durchschnittslinie der Ebenen M und N bestimmte Ebene errichtete Normale jene Ebenen trifft, und die Punkte m_1, p, in denen die gleiche Senkrechte auf der Ebene der Durchschnittslinie der Ebenen M und P diesen Ebenen selbst begegnet, unabängig von der Lage der Ebenen M und N die Relation

$$\frac{On - Om}{Om \cdot On} : \frac{Op - Om_1}{Om_1 \cdot Op} = \text{Const.}$$

Zwei beliebige Tangentialebenen eines conjugirten Cylinders sind Ebenen der Homologie für die Fläche selbst und eine Rotationsfläche, die das Centrum zum Brennpunkt und die Ebene der Berührungsseiten zur Directionsebene hat. Die entsprechenden Centra der Homologie liegen in den Asymptoten der Focalcurve, deren Ebene zu dem fraglichen Cylinder senkrecht steht. Wenn also in den Asymptoten der hyperbolischen Focalcurve einer Oberfläche zweiten Grades irgend zwei Punkte als Scheitel von Kegeln genommen sind, welche zugleich der gegebenen Oberfläche und einer Rotationsfläche umschrieben sind, die im Centrum einen Brennpunkt hat, so schneiden sich beide letzteren Oberflächen in Kegelschnitten, deren Ebenen den zur Ebene der Focalhyperbel normalen conjugirten Cylinder berühren. Es ist eine Folge davon, dass die Tangentialebenen einer Oberfläche zweiten Grades in den vier Punkten, in denen sie von einer hyperbolischen Focal-geschnitten wird, auch den zur Ebene der letzteren senkrechten conjugirten Cylinder berühren und so die Grenzen bilden zwischen denjenigen Tangentialebenen desselben, welche die Oberfläche schneiden, und denen, welche sie nicht schneiden. Diese vier Tangentialebenen sind für das Ellipsoid und das zweifache Hyperboloid reell und besitzen Eigenschaften, welche denen der Nabel- oder Kreispunkte nach den Gesetzen der Polarreciprocität entsprechen.

48. Es bleibt endlich übrig, das allgemeine Bild eines Systems conjugirter Oberflächen zweiten Grades so zu zeichnen, wie das allgemeine Bild des Systems homofocaler Flächen hier und an dem früher angeführten Orte gezeichnet worden ist. Die Gesammtheit der zu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

conjugirten Oberflächen zweiten Grades wird durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}(1+a^2k)+\frac{y^2}{b^2}(1+b^2k)+\frac{z^2}{c^2}(1+c^2k)-1=0$$

dargestellt; alle haben die Hauptebenen und die cyclischen Ebenen gemein und ihre Asymptotenkegel sind homocyclisch. Sie zerfallen in drei Gruppen: Ellipsoide, einfache und zweifache Hyperboloide; irgend zwei von ihnen haben keinen reellen Punkt gemein. Die Gruppe der Ellipsoide wird von dem elliptischen conjugirten Cylinder eingeschlossen, alle Glieder derselben haben ihre Hauptachse dem elliptischen und ihre mittlere Achse dem hyperbolischen Cylinder parallel; sie beginnen mit dem gemeinschaftlichen Centrum als den Ellipsoid von den Halbachsen Null und enden mit dem elliptischen Cylinder als einen Ellipsoid von einer unendlich grossen Hauptachse. Jenseits desselben und überhaupt in dem gesammten, von den convexen Seiten der beiden reellen conjugirten Cylinder umgrenzten Raume liegen die einfachen Hyperboloide, alle mit der imaginären Achse parallel dem elliptischen und mit der grossen reellen Achse parallel dem hyperbolischen conjugirten Cylinder, beginnend mit dem elliptischen und endigend mit dem hyperbolischen Cylinder als den beiden Gliedern der Gruppe, bei denen eine Hauptachse unendlich gross ist. Endlich liegen auf der concaven Seite des hyperbolischen Cylinders umschlossen je von einem der hyperbolischen desselben die doppelten Mäntel der zweifachen Hyperboloide; die beiden imaginären Achsen den Erzeugenden der reellen conjugirten Cylinder parallel, mit dem hyperbolischen Cylinder beginnend und ohne angebbare Endigung. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine einzige reelle Oberfläche des Systems und je nach der Lage des Punktes in den vorbezeichneten Räumen gehört dieselbe zur Classe der Ellipsoide, der einfachen oder zweifachen Hyperboloide.

Eine Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0$$

berührt die Oberfläche

$$\frac{x^2}{a^2}(1 + a^2 k) + \frac{y^2}{b^2}(1 + b^2 k) + \frac{z^2}{c^2}(1 + c^2 k) - 1 = 0,$$

wenn die Relation

$$\frac{a^2 \alpha^2}{(1 + a^2 k)} + \frac{b^2 \beta^2}{(1 + b^2 k)} + \frac{c^2 \gamma^2}{(1 + c^2 k)} = 1$$

erfüllt ist.

Diese Bedingungsgleichung liefert für k drei reelle Werthe, respective grösser als $-\frac{1}{c^2}$, zwischen $-\frac{1}{c^2}$ und $-\frac{1}{b^2}$, zwischen $-\frac{1}{b^2}$ und $-\frac{1}{a^2}$, d. h. jede beliebige Ebene berührt drei Flächen des conjugirten Systems, je eine von jeder Art. Wenn k_1, k_2, k_3 diese Wurzelwerthe repräsentiren, so hat man die Relationen

$$a^2 (b^2 - a^2)(c^2 - a^2)\alpha^2 = (1 + a^2 k_1)(1 + a^2 k_2)(1 + a^2 k_3)\, b^2 c^2,$$
$$b^2 (c^2 - b^2)(a^2 - b^2)\beta^2 = (1 + b^2 k_1)(1 + b^2 k_2)(1 + b^2 k_3)\, c^2 a^2,$$
$$c^2 (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\gamma^2 = (1 + c^2 k_1)(1 + c^2 k_2)(1 + c^2 k_3)\, a^2 b^2,$$

und darf k_1, k_2, k_3 als elliptische Tangentialcoordinaten im Raume betrachten, zu denen durch eben diese Relationen der Uebergang von den Plücher'schen Tangentialcoordinaten α, β, γ bewirkt wird.

Die drei einer solchen Ebene entsprechenden Berührungspunkte mit den durch k_1, k_2, k_3 individualisirten Flächen des Systems der Conjugirten bestimmen mit dem gemeinsamen Centrum drei orthogonale Gerade; in dem von jenen Punkten gebildeten Dreieck liefert jedes Seitenpaar zugleich das der Tangentialebene entsprechende Paar der charakteristischen Erzeugenden in Bezug auf die Oberfläche des Systems, welche in der gemeinschaftlichen Ecke berührt wird; immer ist zugleich die gegenüberliegende Seite jenes Dreiecks die Polnormale des betreffenden, als Berührungspunkt genommenen Eckpunktes.

Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen zweier Oberflächen des conjugirten Systems (verschiedener Art) bilden somit eine gemeinschaftlich umschriebene developpable Fläche, welche für beide nur charakteristische Erzeugende enthält. Sie wird von den Hauptebenen in Kegelschnittslinien geschnitten und hat eine vierte ebene Schnittcurve zweiten Grades ganz in unendlicher Entfernung. Diese developpabeln Flächen entsprechen in der Theorie der conjugirten Oberflächen genau den Krümmungslinien in der Theorie der homofocalen, die bekanntlich auf jeder Fläche durch sämmtliche ihr homofocalen Flächen verzeichnet werden; so erhält man auch alle die einer Oberfläche zweiten

Grades entsprechenden Flächen dieser Art, indem man sie mit sämmtlichen ihr conjugirten Oberflächen combinirt. Die Kegelschnitte, in welchen eine beliebige Ebene ein System conjugirter Oberflächen schneidet, bestimmen mit dem Centrum ein System homocyclischer Kegel, deren Hauptachsen die Ebene in den drei Punkten schneiden, in welchen sie von den drei ihr so entsprechenden Oberflächen berührt wird, und deren cyclische Ebenen durch die in dieser Ebene enthaltenen Erzeugenden des einfachen Hyperboloids gehen, welches unter jenen berührenden Flächen ist.

Manche Eigenschaften einer Oberfläche zweiten Grades bezüglich ihrer conjugirten Cylinder sind nur specielle Fälle allgemeinerer Sätze, die für conjugirte Oberflächen überhaupt gelten, auf Grund der Zugehörigkeit dieser Cylinder selbst zum System als Grenzflächen der Gruppen desselben.

Dies gilt z. B. von den folgenden allgemeinen Sätzen: Die Ebene eines Dreiecks, dessen Ecken drei conjugirte Oberflächen zweiter Ordnung respective durchlaufen, während sie in jeder ihrer Lagen mit dem Centrum ein System orthogonaler Geraden bestimmen, umhüllt eine mit den Oberflächen selbst concentrische Kugel, für welche das inverse Quadrat des Halbmessers dem dritten Theil der algebraischen Summe der inversen Quadrate der Halbachsen der Flächen ist.

Wenn zwei conjugirte Flächen zweiten Grades und zwei Tangentialebenen der ersten von ihnen gegeben sind, so liegen die Durchschnitte derselben mit der zweiten auf einer Oberfläche zweiten Grades, für welche das Centrum ein Focalpunkt und das Paar der Tangentialebenen der ersten Fläche, welche durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der gegebenen Tangentialebenen gelegt sind, das Paar der Directionsebenen ist.

Specieller: Wenn zwei conjugirte Flächen zweiten Grades und zwei parallele Tangentialebenen der einen von ihnen gegeben sind, welche die andere in Kegelschnitten schneiden, so geht durch die letzteren eine aus dem Centrum der Fläche beschriebenen Kegelfläche und die durch den Durchmesser der Berührungspunkte der ersten Oberfläche möglichen Tangentialebenen derselben sind die cyclischen Ebenen der Kegelfläche.

In zwei conjugirten Flächen zweiten Grades ist die Differenz der inversen Quadrate zweier gleichgerichteter Halbdurchmesser constant.

Der Asymptotenkegel eines Hyperboloids schneidet ein demselben conjugirtes Ellipsoid in Punkten, welche auf einer vom gemeinschaftlichen Centrum aus beschrieben Kugel liegen.

Wenn zwei Oberflächen zweiten Grades conjugirt sind, so werden s von einer einer Achse parallelen Geraden in Punkten geschnitten, der entsprechende Radienvectoren mit dieser Achse Winkel bilden, für welc die Sinus den nach der mittleren Achse gerichteten Durchmessern d Oberfläche umgekehrt proportional sind.

Man kennt den wichtigen Satz von Ivory betreffs der entspre chenden Punkte homofocaler Flächen. Die conjugirte Flächen besitzen eine correlative Eigenschaft. Man nenn in zwei conjugirten Flächen derselben Art zwei Punkte, je einen in ein correspondirend, wenn ihre den Hauptachsen parallelen Coordinaten de gleichgerichteten Halbmessern proportional sind; nicht minder sollen di Tangentialebenen correspondirender Punkte correspondirend heissen. Al dann ist in zwei conjugirten Oberflächen zweiten Grades von gleicher A die Differenz der inversen Quadrate der Entfernungen zweier entsprechen den Ebenen vom Centrum constant; und das Product der Entfernunge des gemeinschaftlichen Centrums von zwei Tangentialebenen der eine Fläche in den Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels ist dem auf di correspondirenden Ebenen bezüglichen analogen Product gleichwerthig.

Wenn endlich die Tangentialebenen zweier conjugirten Flächen der selben Art und die Senkrechte vom Centrum auf die durch dies und di Durchschnittslinie bestimmte Ebene bis zu den Ebenen selbst in p und verlängert wird, so ist die Grösse $\frac{Oq-Op}{Op\,.\,Oq}$ bei diesen und den correspon direnden Tangentialebenen von gleichem Werthe.

49. Es ist gezeigt worden, und auch ihre allgemeine Gleichun zeigt es, dass alle einander conjugirten Flächen zweite Grades einer imaginären Curve vierter Ordnung als ihre gemeinsamen Durchschnittscurve umschrieben sind, eine Curve, durch welche drei Cylinder zweiten Grades, worunter zwei reelle und ein imaginärer Kegel zweiten Grades gelegt werden können — de letzteren der Asymptotenkegel einer mit dem System concentrischen ima ginären Kugel; diese Flächen projiciren die fragliche Curve vierter Ord nung auf zwei der Hauptebenen in reellen Kegelschnitten, auf die dritt Hauptebene in einem imaginären Kegelschnitt und auf die unendlich ent fernte Ebene in einem imaginären Kreis. Alle Eigenschaften eines ein fachen Systems von Oberflächen zweiten Grades — nach de üblichen Bedeutung dieses Ausdrucks — gehen also auf das System con jugirter Flächen über; für Vieles von dem darauf Bezüglichen sei es er laubt, auf das dritte Heft der „Beiträge zur Geometrie der Lage“ zu verweisen, welches kürzlich Herr v. Staudt veröffentlicht hat.

Beispielsweise sei hier erwähnt, dass die Polarebenen eines beliebigen Punktes a bezüglich der Flächen eines conjugirten Systems ein Ebenenbüschel bilden, welches die Polnormale p jenes Punktes in Bezug auf die durch ihn selbst gehende Fläche des Systems zur gemeinschaftlichen Kante hat. Wenn der Punkt a eine Gerade g durchläuft, so beschreibt die Linie p ein einfaches Hyperboloid, welches durch das Centrum des Systems geht und die Polaren der Geraden g enthält. Drei Erzeugende seines Asymptotenkegels sind den Achsen der Flächen parallel. Wenn die Gerade g in einer Ebene E fortschreitet, so gehen alle ihm entsprechenden Hyperboloide durch eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade, welche das Centrum des Systems enthält und für die die Hauptachsen desselben die Richtungen der Asymptoten bezeichnen und welche überdies natürlich der Ort der Pole der Ebene E bezüglich der Flächen des Systems ist; die dieser Curve und der Ebene gemeinsamen Punkte sind die Berührungspunkte derselben mit dreien unter den Flächen des Systems. Entsprechend den drei Familien der Flächen des Systems, wie sie durch die conjugirten Cylinderflächen getrennt werden, hat sie drei Zweige, deren jedem ein Paar der Asymptoten zugehört. Einem derselben gehört das Centrum an, seine Asymptoten sind den Erzeugenden des imaginären und des elliptischen Cylinders parallel; die zwischen dem Centrum und dem unendlich entfernten Punkte des elliptischen Cylinders gelegenen Punkte desselben sind die Pole der Ebene bezüglich der Ellipsoide des Systems, während die Punkte des anderen Theils sich auf imaginäre Flächen des Systems beziehen. Die Pole der Ebene in Bezug auf die Gruppe der einfachen Hyperboloide liegen in dem Zweige der Curve, zu welchem die Asymptoten von der Richtung des hyperbolischen und des elliptischen conjugirten Cylinders gehören. Endlich entsprechen dem dritten Zweige von den Asymptoten parallel dem imaginären und hyperbolischen conjugirten Cylinder die zweifachen Hyperboloide des Systems.

Es ergiebt sich ferner leicht,*) dass jede gerade Linie mit den Flächen des conjugirten Systems Punkte einer Involution bestimmt; dass eine solche in Folge dessen nur zwei unter den Flächen des Systems berühren kann, — die Berührungspunkte sind die Brennpunkte der Involution**) und bestimmen sich durch die gemeinsamen Halbirungslinien aller der Winkel, unter denen die von den einzelnen Flächen bestimmten Segmente der Transversale vom Centrum aus gesehen werden.

Die Polnormalen aller der Punkte, welche die Transversale in den Flächen des Systems bestimmt, bilden ein einfaches, durch das Centrum der Flächen gehendes Hyperboloid; ist die Transversale selbst Polnormale

*) Man vergleiche z. B. diese Zeitschrift, Bd. VI, p. 2 unter II.
**) Man vergleiche „Analytische Geometrie der Kegelschnitte", p. 482, 500.

für eine der Oberflächen, so reducirt sich dieses Hyperboloid auf einen Kegel etc.; wenn sie insbesondere eine Achse der Flächen ist, so umhüllen auch die Tangentialebenen der Schnittpunkte eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Scheitel in der zu jener Achse senkrechten Hauptebene liegt.

Jene räumliche Curve dritter Ordnung, welche die Pole einer Transversalebene hinsichtlich der Flächen des Systems enthält, ist zugleich der Ort der Punkte der Oberflächen, deren Polnormalen in jener Ebene liegen; diese selbst umhüllen einen Kegelschnitt, der dem Dreieck eingeschrieben ist, welches die Hauptebenen des Systems mit der Transversalebene bestimmen.

Wenn die Transversalebene einer Hauptachse der conjugirten Flächen parallel ist, so theilen sich die in ihr gelegenen Polnormalen in zwei Gruppen, deren eine aus der Hauptachse parallelen Geraden besteht, während die andere ein Strahlenbüschel bildet, dessen Scheitel in der zur Achse normalen Hauptebene liegt; die den Polnormalen der ersten Gruppe entsprechenden Punkte der Flächen des Systems liegen in einer gleichseitigen Hyperbel in der zu jener Achse senkrechten Hauptebene, die der zweiten Gruppe entsprechenden aber in einer zu derselben Ebene normalen Geraden; jene Hyperbel enthält das Centrum des Systems, und ihre Asymptoten sind den in ihrer Ebene liegenden Hauptachsen des Systems parallel.

Alle die Polnormalen der Flächen eines conjugirten Systems, welche durch einen und denselben Punkt gehen, bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung und die entsprechenden Punkte der Flächen selbst liegen in der Scheitelkante des Büschels der Polarebenen, welches jenem Punkte entspricht.

Die Hauptebene des Systems conjugirter Flächen, welche zum hyperbolischen conjugirten Cylinder senkrecht ist, enthält alle Kreispunkte der Flächen des Systems, wie für jede derselben, paarweise entgegengesetzt vom Centrum aus gelegen. M. Cremona hat bemerkt, dass der geometrische Ort zweier so entgegengesetzter Kreispunkte aller Flächen des Systems eine Linie dritter Ordnung ist, die das Centrum zum Inflexionspunkt hat; zwei ihrer Asymptoten sind die in jenem Hauptschnitt gelegenen Achsen des Systems; die dritte geht auch durch das Centrum und ist die Spur einer cyclischen Ebene; die Inflexionstangente ist senkrecht zu ihr. Die Curve besteht aus drei Theilen, zwei in den Gegenwinkeln der Achsen und in Form hyperbolischer Aeste, der dritte mit dem Centrum und der dritten Asymptote. Die Gruppe der andern Kreispunktenpaare bestimmt eine der vorigen gleiche, nur durch die Lage verschiedene Curve, für welche die Spur der anderen cyclischen Ebene die dritte Asymptote ist, während sie die ersten Asymptoten und den Inflexionspunkt mit der ersten gemein hat. Ihre hyperbolischen Aeste liegen in den anderen Gegenwinkeln der Achsen.

Indem ich hier abbreche, wünschte ich glauben zu dürfen, dass die Länge dieser Abhandlung in dem Reichthum ihrer Resultate Entschuldigung und Rechtfertigung in den Augen aller Leser finden werde. Gewiss stehen die hier vorgeführten Theorien in einem rechten Knotenpunkt neuerer Erkenntniss, und die Forschungen G. Lamé's allein, welche die einen von ihnen mit glänzendem Erfolge in dem Gebiete der mathematischen Physik beherrschend nachwiesen, sichern ihnen die Aufmerksamkeit gegenwärtiger und künftiger Forscher. Es schien von Werth, zu zeigen, wie mit den einfachsten Entwickelungen der Zugang zu ihnen zu gewinnen sei.

XIV.

Ueber einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen.

Von Dr. A. Enneper,
Docent an der Universität Göttingen.

(Fortsetzung der Abhandlung T. VII, p. 75 dieser Zeitschrift.)

VII.

Schneidet man eine Fläche durch eine Reihe von Ebenen, welche sämmtlich einer festen Ebene e parallel sind, so heissen die Schnittcurven bekanntlich Niveaulinien in Beziehung auf die feste Ebene. Eine orthogonale Trajectorie dieser Niveaulinien, welche von einem bestimmten Punkte π ausgeht, wird die Linie des grössten Falls für den Punkt π in Beziehung auf die Ebene e genannt, weil die Tangente in π zur Curve senkrecht steht auf der Schnittlinie der Ebene e mit der berührenden Ebene in π zur Fläche.

Sei:

$$(\xi-x)\cos f+(\eta-y)\cos g+(\zeta-z)\cos h=0$$

die Gleichung der Ebene einer Niveaulinie, welche durch den Punkt (x, y, z) einer Fläche geht. Die Niveaulinie selbst ist dann durch die Differentialgleichung:

$$\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u}+\cos g\frac{\partial y}{\partial u}+\cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u+\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v}+\cos g\frac{\partial y}{\partial v}+\cos h\frac{\partial z}{\partial v}\right)\partial v=0$$

bestimmt. Mittelst dieser Gleichung findet man leicht, dass die der Winkel, welche die Tangente zur Niveaulinie im Punkte (x, den Coordinatenachsen bildet, folgenden Quantitäten proportional

$$\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u}+\cos g\frac{\partial y}{\partial u}+\cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}-\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v}+\cos g\frac{\partial y}{\partial v}+\cos h\right.$$

$$\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u}+\cos g\frac{\partial y}{\partial u}+\cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}-\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v}+\cos g\frac{\partial y}{\partial v}+\cos h\right.$$

$$\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u}+\cos g\frac{\partial y}{\partial u}+\cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial v}-\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v}+\cos g\frac{\partial y}{\partial v}+\cos h\right.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Tangente einer beliebige im Punkte (x, y, z) mit den Achsen bildet, sind gleich:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},\quad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},$$

wo ∂s das Bogenelement bezeichnet. Soll diese Curve eine ortl Trajectorie der obigen Niveaulinie sein, so erhält man für die I grössten Falles folgende Differentialgleichung:

$$\left[\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v}+\cos g\frac{\partial y}{\partial v}+\cos h\frac{\partial z}{\partial v}\right)E-\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u}+\cos g\frac{\partial y}{\partial u}+\cos h\frac{\partial}{\partial}\right.\right.$$

$$=\left[\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u}+\cos g\frac{\partial y}{\partial u}+\cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)G-\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v}+\cos g\frac{\partial y}{\partial v}+\cos h\frac{\partial}{\partial}\right.\right.$$

Die Quantitäten E, F, G haben dieselbe Bedeutung, wie in vorstehende Differentialgleichung ist für eine beliebige Fläche unc liebiges System von Niveaulinien nur selten integrabel; es lä leicht voraussehen, dass die Integration nur dann einiges Intere bieten wird, wenn die feste Ebene in Beziehung, auf welche die I grössten Falles gesucht wird, zur Fläche in irgend einer geome Relation steht.

Bestimmt man einen Punkt der Ellipsoidfläche

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$$

als Durchschnitt der drei confocalen Flächen

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1,\quad \frac{x^2}{l^2-u^2}+\frac{y^2}{m^2-u^2}+\frac{z^2}{n^2-u^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{l^2-v^2}+\frac{y^2}{m^2-v^2}+\frac{z^2}{n^2-v^2}=1,$$

so hat man folgende Gleichungen:

$$x=l\sqrt{\frac{(l^2-u^2)\,(l^2-v^2)}{(l^2-m^2)(l^2-n^2)}},\quad y=m\sqrt{\frac{(m^2-u^2)\,(v^2-m^2)}{(l^2-m^2)\,(m^2-n^2)}},$$

$$z=n\sqrt{\frac{(u^2-n^2)\,(v^2-n^2)}{(l^2-n^2)\,(m^2-n^2)}},$$

wo vorausgesetzt ist, dass $l>m>n$, $m>u>n$, $l>v>m$. Au *Gleichungen* findet man:

$$E = v^4 \frac{v^2 - u^2}{(l^2 - u^2)(m^2 - u^2)(u^2 - n^2)}, \quad G = v^4 \frac{v^2 - u^2}{(l^2 - v^2)(v^2 - m^2)(v^2 - n^2)}, \quad F = 0.$$

Für einen Kreisschnitt der Ellipsoidfläche hat man:

$$\cos g = 0, \quad \frac{\cos f}{\cos h} = \pm \frac{n}{l} \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{m^2 - n^2}}.$$

Diese Werthe von f, g, h geben:

$$\frac{\cos f \frac{\partial x}{\partial u} + \cos g \frac{\partial y}{\partial u} + \cos h \frac{\partial z}{\partial u}}{\cos f \frac{\partial x}{\partial v} + \cos g \frac{\partial y}{\partial v} + \cos h \frac{\partial z}{\partial v}} = -\frac{u}{v} \sqrt{\frac{(l^2 - v^2)(v^2 - n^2)}{(l^2 - u^2)(u^2 - n^2)}}.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Kreisschnitte einer Ellipsoidfläche hat also folgende einfache Form:

$$\frac{u^2 \partial u}{(m^2 - u^2)\sqrt{(l^2 - u^2)(u^2 - n^2)}} + \frac{v^2 \partial v}{(v^2 - m^2)\sqrt{(l^2 - v^2)(v^2 - n^2)}} = 0,$$

oder

$$u^2 = l^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi, \quad v^2 = l^2 \cos^2 \psi + n^2 \sin^2 \psi,$$

gesetzt:

$$\left\{1 - \frac{m^2}{(m^2 - n^2)\sin^2 \varphi - (l^2 - n^2)\cos^2 \varphi}\right\} \partial \varphi$$
$$= \left\{1 + \frac{m^2}{(l^2 - m^2)\cos^2 \psi + (m^2 - n^2)\sin^2 \psi}\right\} \partial \psi.$$

Durch Integration folgt:

$$\varphi - \psi + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\sqrt{(l^2 - m^2)(m^2 - n^2)}} \log \frac{tg\varphi + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{m^2 - n^2}}}{tg\varphi - \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{m^2 - n^2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{m^2 - n^2}} - tg\psi}{\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{m^2 - n^2}} + tg\psi} = p,$$

wo p einen Parameter bezeichnet, dessen Werth vom Ausgangspunkt der Trajectorie abhängt. Die vorstehende Gleichung, in einer etwas verschiedenen Form, hat zuerst Catalan auf sehr complicirte Art gefunden (*Journal de Mathém. XII*, p. 483—401). Mit gleicher Einfachheit lässt sich die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Kreisschnitte einer elliptischen Paraboloidfläche integriren, wenn man mit Valson (*Comptes rendus L*, p. 680) einen Punkt der Fläche

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - e} = \lambda + 2z \quad (\lambda > e)$$

als Durchschnitt der orthogonalen Paraboloide

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - e} = \lambda + 2z, \quad \frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{e + u} = u - 2z, \quad \frac{x^2}{v} + \frac{y^2}{v - e} = v + 2z, \quad (e > v)$$

ansieht. Aus den vorstehenden Gleichungen findet man leicht:

$$x = \sqrt{\frac{\lambda u v}{e}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\lambda - e)(e + u)(e + v)}{e}}, \quad 2z = u - v + e - \lambda.$$

Für einen Kreisschnitt der obigen Paraboloidfläche hat man:

$$\cos f = 0, \quad \frac{\cos g}{\cos h} = \pm \sqrt{\frac{e}{\lambda - e}},$$

lglich:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\cos f + \frac{\partial y}{\partial u}\cos g + \frac{\partial z}{\partial u}\cos h}{\frac{\partial x}{\partial v}\cos f + \frac{\partial y}{\partial v}\cos g + \frac{\partial z}{\partial v}\cos h} = -\sqrt{\frac{e-v}{e+u}}.$$

Mittelst dieser Gleichung und

$$4E = \frac{(v+u)(\lambda+u)}{u(e+u)}, \quad 4G = \frac{(v+u)(\lambda-v)}{v(e-v)}, \quad F = 0,$$

findet man als Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Kreisschnitte:

$$\frac{\lambda-v}{v}\,\frac{\partial v}{\sqrt{(e-v)}} + \frac{\lambda+u}{u}\,\frac{\partial u}{\sqrt{(e+u)}} = 0.$$

Durch Integration folgt:

$$\sqrt{(u+e)} + \sqrt{(e-v)} + \frac{\lambda}{2\sqrt{e}}\cdot\log\frac{\sqrt{e}+\sqrt{(e-v)}}{\sqrt{e}-\sqrt{(e-v)}}\,\frac{\sqrt{(u+e)}-\sqrt{e}}{\sqrt{(u+e)}+\sqrt{e}} = p,$$

wo wieder p einen Parameter bezeichnet.

Für eine Rotationsfläche um die Achse der z hat man:

$$x = V\cos u, \quad y = V\sin u, \quad z = \int\frac{\partial V}{\partial v}\cot v\,\partial v,$$

wo V Function von v allein ist. Sind die Ebenen der Niveaulinien der z Achse parallel, so hat man: $\cos f = \cos\omega$, $\cos g = \sin\omega$, $\cos h = 0$, ω ist ein constanter Winkel. In diesem Falle wird die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien:

$$\cot(u-\omega)\,\partial u + \frac{1}{\sin^2 v}\,\frac{\partial \log V}{\partial v}\,\partial v.$$

Durch Integration folgt:

$$\log\sin(u-\omega) + \int\frac{1}{\sin^2 v}\,\frac{\partial\log V}{\partial v}\,\partial v = p.$$

Für die Rotationsfläche einer Kettenlinie hat man $V = \frac{k}{\cos v}$, wo k eine Constante bedeutet, die vorstehende Gleichung giebt dann einfach

$$\sin(u-\omega)\tang v = Const.$$

VIII.

Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, stimmt durch die Winkel α, β, γ, so ist nach II):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Ah^2 + Bg^2 - 2Cgh}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo:

$$\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = 0,$$

$$\cdots\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \cos\beta\frac{\partial y}{\partial u} + \cos\gamma\frac{\partial z}{\partial u}, \quad h = \cos\alpha\frac{\partial x}{\partial v} + \cos\beta\frac{\partial y}{\partial v} + \cos\gamma\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Zwischen den Variabeln u und v findet die Relation statt:

$$g\partial u + h\partial v = 0.$$

Substituirt man für $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ ... ihre Werthe in Function von $\cos a'$, $\cos a''$... aus III), so erhält man für g und h folgende Gleichungen:

$$g = P'(\cos\alpha\cos a' + \cos\beta\cos b' + \cos\gamma\cos c')$$
$$+ P''(\cos\alpha\cos a'' + \cos\beta\cos b'' + \cos\gamma\cos c''),$$
$$h = Q'(\cos\alpha\cos a' + \cos\beta\cos b' + \cos\gamma\cos c')$$
$$+ Q''(\cos\alpha\cos a'' + \cos\beta\cos b'' + \cos\gamma\cos c'').$$

Da $\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = 0$, so kann man setzen:

$$\cos\alpha\cos a' + \cos\beta\cos b' + \cos\gamma\cos c' = \cos\varphi,$$
$$\cos\alpha\cos a'' + \cos\beta\cos b'' + \cos\gamma\cos c'' = \sin\varphi,$$

folglich:

$$g = P'\cos\varphi + P''\sin\varphi, \quad h = Q'\cos\varphi + Q''\sin\varphi.$$

Setzt man diese Werthe von g und h und aus III) für E, F, G, A, B, C ihre Werthe in Function von $P', P'', Q', Q'', r', r''$ in den obigen Ausdruck für ϱ, so nimmt derselbe folgende Form an:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''},$$

welche Gleichung das bekannte Theorem Euler's enthält. Bezeichnet man durch ∂s das Bogenelement des obigen Normalschnitts, so ist $\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial s}$ der Krümmungshalbmesser der Evolute dieses Normalschnittes. Ist nun $\frac{\partial\varrho}{\partial s} = 0$, so hat der Normalschnitt mit seinem osculatorischen Kreis im Punkte (x, y, z) einen Contact höherer Ordnung, d. h. der Normalschnitt wird von seinem osculatorischen Kreise surosculirt. Bildet man also die Gleichung $\frac{\partial\varrho}{\partial s} = 0$, so erhält man eine Relation zwischen $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, welche in Verbindung mit $\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma = 0$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, im Punkte (x, y, z) einen Normalschnitt bestimmt, der von einem osculatorischen Kreise surosculirt wird. Setzt man diese Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in die Gleichung $g\partial u + h\partial v = 0$, oder $(P'\cos\varphi + P''\sin\varphi)\partial u + (Q'\cos\varphi + Q''\sin\varphi)\partial v = 0$, so erhält man die Differentialgleichung einer Curve, welche die Eigenschaft hat, in jedem ihrer Punkte einen Normalschnitt zu berühren, der von seinem osculatorischen Kreise surosculirt wird. Der Einfachheit halber möge eine solche Curve Linie der surosculirten Normalschnitte heissen. Die Betrachtung dieser Curven rührt von de la Gournerie her (*Journ. de Mathém.* XX, *p.* 145). Statt von den Variabeln u, v eine als Function der anderen anzusehen, wird es besser sein, beide als Function einer dritten Variabeln w zu betrachten, und unter dieser Annahme zu setzen: $\frac{\partial u}{\partial w} = u'$, $\frac{\partial v}{\partial w} = v'$.

Nach den in III) entwickelten Formeln hat man:

$$\frac{\partial \cos\varphi}{\partial u} = \quad M\sin\varphi, \quad \frac{\partial\cos\varphi}{\partial v} = - \quad N\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \sin\varphi}{\partial u} = - M\cos\varphi, \quad \frac{\partial\sin\varphi}{\partial v} = \quad N\cos\varphi,$$

folglich:

$$\frac{\partial\cos\varphi}{\partial w} = (Mu' - Nv')\sin\varphi, \quad \frac{\partial\sin\varphi}{\partial u} = -(Mu' - Nv')\cos\varphi.$$

Differentiirt man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''}$$

nach w und setzt $\frac{\partial\varrho}{\partial w} = 0$, so folgt:

$$\cos^2\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r'}\cdot u' + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\cdot v'\right) + \sin^2\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''}\cdot u' + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''}\cdot v'\right)$$
$$+ 2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)(Mu' - Nv') = 0.$$

Eliminirt man φ zwischen dieser Gleichung und $(P'\cos\varphi + P''\sin\varphi)u'$ $+ (Q'\cos\varphi + Q''\sin\varphi)v'$, so folgt:

42) $$(P'u' + Q'v')^2\left(u'\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''} + v'\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''}\right) + (P''u' + Q''v')^2\left(u'\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r'} + v'\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)(Mu' - Nv')(P'u' + Q'v')(P''u' + Q''v').$$

Sind die Variabeln u, v so gewählt, dass $P'' = 0$, $Q' = 0$, so nimmt die vorstehende Gleichung, mittelst der in V) entwickelten Formeln, folgende elegante Form an:

43) $$Eu'^3\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''} + 3Eu'^2v'\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r''} + 3Gu'v'^2\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r'} + Gv'^3\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'} = 0.$$

Die Gleichung 42) ist in Beziehung auf u', v' vom dritten Grade, woraus folgt, dass in jedem Punkte einer Fläche wenigstens ein surosculirter Normalschnitt besteht. Die Integration dieser Gleichung giebt eine oder drei Linien der surosculirten Normalschnitte.

Für manche Zwecke ist es besser, die Gleichung 42) so zu transformiren, dass P', P'', Q', Q'', r', r'' durch A, B, C, E, F, G ersetzt sind, da diese Transformation aber zu weitläufigen Rechnungen Veranlassung geben würde, so soll die transformirte Gleichung direct abgeleitet werden. Die Gleichung $\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = 0$ lässt sich auch schreiben:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man diese Determinante successive mit den Determinanten A, B, C, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(EG-F^2)\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\cos\beta\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\cos\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)=(EG-F^2)\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$=g\left(\tfrac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial u}+\tfrac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right)+h\left(E\frac{\partial F}{\partial u}-\tfrac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}-\tfrac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$

$$(EG-F^2)\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\cos\beta\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\cos\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=(EG-F^2)\frac{\partial h}{\partial v}$$

$$=g\left(G\frac{\partial F}{\partial v}-\tfrac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}-\tfrac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}\right)+h\left(\tfrac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial v}+\tfrac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

$$(EG-F^2)\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\cos\beta\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+\cos\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)=(EG-F^2)\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$=(EG-F^2)\frac{\partial h}{\partial u}$$

$$=\tfrac{1}{2}g\left(G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\tfrac{1}{2}h\left(E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}\right).$$

Bezeichnet t eine Unbestimmte, so lässt sich die Gleichung $gu'+hv'=0$ ersetzen durch: $g=tv'$, $h=-tu'$. Die obigen Gleichungen geben dann:

$$\frac{2}{t}(EG-F^2)\frac{\partial g}{\partial w}=(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)\frac{\partial E}{\partial v}+u'(u'F+v'G)\frac{\partial E}{\partial u}$$

$$-(Eu'+Fv')\left(v'\frac{\partial G}{\partial u}+2u'\frac{\partial F}{\partial u}\right),$$

$$\frac{2}{t}(EG-F^2)\frac{\partial h}{\partial w}=-(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)\frac{\partial G}{\partial u}-v'(Eu'+Fv')\frac{\partial G}{\partial v}$$

$$+(Fu'+Gv')\left(u'\frac{\partial E}{\partial v}+2v'\frac{\partial F}{\partial v}\right).$$

Differentiirt man nun:

$$\varrho=\frac{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}{Ah^2+Bg^2-2Cgh}$$

nach w, setzt $\frac{\partial\varrho}{\partial w}=0$, für $\frac{\partial g}{\partial w}$, $\frac{\partial h}{\partial w}$ ihre obigen Werthe und $g=tv'$, $h=-tu'$, so folgt:

42a)
$$\left\{\begin{aligned}&\tfrac{3}{2}(Au'^2+2Cu'v'+Bv'^2)\left[u'\frac{\partial}{\partial u}(EG-F^2)+v'\frac{\partial}{\partial v}(EG-F^2)\right]\\
&=(EG-F^2)\left[\left(\frac{\partial A}{\partial u}u'+\frac{\partial A}{\partial v}v'\right)u'^2+2\left(\frac{\partial C}{\partial u}u'+\frac{\partial C}{\partial v}v'\right)u'v'\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial B}{\partial u}u'+\frac{\partial B}{\partial v}v'\right)v'^2\right]\\
&+(Bv'+Cu')\left[(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)\frac{\partial E}{\partial v}+u'(u'F+v'G)\frac{\partial E}{\partial u}\right.\\
&\qquad\left.-(Eu'+Fv')\left(v'\frac{\partial G}{\partial u}+2u'\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right]\end{aligned}\right.$$

$$\left. + (Au'+Cv')\left[(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)\frac{\partial G}{\partial u}+v'(u'E+v'F)\frac{\partial G}{\partial v} - (Fu'+Gv')\left(u'\frac{\partial E}{\partial v}+2v'\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right].\right)$$

Sind u, v die Argumente der Krümmungslinien, also $F=0$, $C=0$, so wird die vorstehende Gleichung einfacher:

$$43^a)\quad \left\{\begin{aligned} &E\left(u'\frac{\partial}{\partial u}\frac{A}{E\sqrt{EG}}+v'\frac{\partial}{\partial v}\frac{A}{E\sqrt{EG}}\right)u'^2 \\ &+G\left(u'\frac{\partial}{\partial u}\frac{B}{G\sqrt{EG}}+v'\frac{\partial}{\partial v}\frac{B}{G\sqrt{EG}}\right)v'^2 \\ &+\left(u'\frac{\partial E}{\partial v}-v'\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\frac{B}{G\sqrt{EG}}-\frac{A}{E\sqrt{EG}}\right)u'v'=0. \end{aligned}\right.$$

Die Integration dieser Gleichung führt beim Ellipsoid und elliptische Paraboloid zu sehr eleganten Resultaten. Bestimmt man einen Punk der Fläche

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$$

auf dieselbe Art, wie in VII), so findet man:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}=\cos a=-\frac{lmn}{uv}\frac{x}{l^2},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}=\cos b=-\frac{lmn}{uv}\frac{y}{m^2},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}=\cos c=-\frac{lmn}{uv}\frac{z}{n^2},$$

$$\frac{A}{\sqrt{EG}}=-\frac{lmn}{uv}\left(\frac{x}{l^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{y}{m^2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{z}{n^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Die Gleichung $\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$ nach u differentiirt, giebt:

$$\frac{x}{l^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{y}{m^2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{z}{n^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=-\left[\left(\frac{1}{l}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]$$

$$=\frac{-u^2(v^2-u^2)}{(l^2-u^2)(m^2-u^2)(u^2-n^2)},$$

folglich:

$$\frac{A}{\sqrt{EG}}=\frac{lmn}{u^3v}\cdot\frac{u^4(v^2-u^2)}{(l^2-u^2)(m^2-u^2)(u^2-n^2)},$$

oder kürzer:

$$\frac{A}{E\sqrt{EG}}=\frac{lmn}{u^3v}.$$

Ebenso findet man:

$$\frac{B}{G\sqrt{EG}}=\frac{lmn}{uv^3}.$$

Mittelst dieser Gleichungen giebt die Differentialgleichung 42):

$$3E\left(\frac{u'}{u}\right)^3+3G\left(\frac{v'}{v}\right)^3+E\left(\frac{u'}{u}\right)^2\frac{v'}{v}\left(1+\frac{v^2-u^2}{u}\frac{\partial}{\partial v}\log E\right)$$
$$+G\left(\frac{v'}{v}\right)^2\frac{u'}{u}\left(1-\frac{v^2-u^2}{v}\frac{\partial}{\partial u}\log E\right)=0.$$

Da nun:

$$(v^2-u^2)\frac{\partial \log E}{\partial v}=2v,\quad (v^2-u^2)\frac{\partial \log G}{\partial u}=-2u,$$

so folgt einfach:

$$\left(E\frac{u'^2}{u^2}+G\frac{v'^2}{v^2}\right)\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}\right)=0.$$

Der erste Factor dieser Gleichung ist wesentlich positiv, also kann nur der zweite verschwinden, d. h.

$$\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}=0.$$

Durch Integration folgt: $uv=p^2$, wo p einen Parameter bedeutet. Das Krümmungsmaass der Ellipsoidfläche im Punkte (x, y, z) ist gleich:

$$\frac{AB}{(EG)^2}=\frac{(lmn)^2}{u^4v^4}=\frac{1}{(lmn)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2}{l^4}+\frac{y^2}{m^4}+\frac{z^2}{n^4}\right)^2}.$$

Setzt man $uv=p^2$, so folgt:

44) $$\frac{x^2}{l^4}+\frac{y^2}{m^4}+\frac{z^2}{n^4}=\frac{p^4}{(lmn)^2}.$$

Die Linie der surosculirten Normalschnitte einer Ellipsoidfläche hat in jedem ihrer Punkte gleiches Krümmungsmaass und ist der Durchschnitt einer zweiten Ellipsoidfläche 44) mit der gegebenen. Für die Paraboloidfläche:

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-e}=\lambda+2z$$

erhält man ein analoges Resultat. Mittelst der in VII) gegebenen Gleichungen folgt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}=\sqrt{\frac{\lambda-e}{e}}\cdot\sqrt{\left(\frac{u}{\lambda+u}\cdot\frac{v}{\lambda-v}\right)},$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}=\sqrt{\frac{\lambda}{e}}\sqrt{\left(\frac{e+u}{\lambda+u}\cdot\frac{e-v}{\lambda-v}\right)},$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}=-\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-e)}}{\sqrt{(\lambda+u)(\lambda-v)}},$$

und hieraus:

$$\frac{A}{E\sqrt{EG}}=-\frac{1}{\lambda+u}\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-e)}{(\lambda+u)(\lambda-v)}},\quad \frac{B}{G\sqrt{EG}}=-\frac{1}{\lambda-v}\sqrt{\frac{\lambda(\lambda-e)}{(\lambda+u)(\lambda-v)}}.$$

Die Differentialgleichung 43) wird in diesem Falle:

$$\left(\frac{Eu'^2}{\lambda+u}+\frac{Gv'^2}{\lambda-v}\right)\left(\frac{u'}{\lambda+u}-\frac{v'}{\lambda-v}\right)=0,$$

d. h.

$$\frac{u'}{\lambda+u}-\frac{v'}{\lambda-v}=0,$$

oder integrirt $(\lambda+u)(\lambda-v)=p^2$. Für das Krümmungsmaass im Punkte (x, y, z) findet man:

$$\frac{AB}{(EG)^2}=\frac{\lambda(\lambda-e)}{(\lambda+u)^2(\lambda-v)^2}=\frac{1}{\lambda(\lambda-e)}\,\frac{1}{\left[1+\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{(\lambda-e)^2}\right]^2}.$$

Für $(\lambda+u)(\lambda+v)=p^2$ folgt:

$$45)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{(\lambda-e)^2}=\frac{p^2}{\lambda(\lambda-e)}-1.$$

Die Linie der surosculirten Normalschnitte einer elliptischen Paraboloidfläche hat also in jedem Punkte gleiches Krümmungsmaass und ist der Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einem elliptischen Cylinder. In den beiden vorhergehenden Beispielen ist p ein variabeler Parameter, dessen Werth sich nach dem Punkt der Fläche bestimmt, von welchem man ausgeht.

Die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Wendecurve einer developpabeln Fläche seien Functionen des Bogens s dieser Curve, ebenso der Krümmungshalbmesser ϱ und der Torsionsradius r im Punkte (ξ, η, ζ). Liegt der Punkt (x, y, z) mit dem Punkte (ξ, η, ζ) auf derselben Generatrix, ist v die variable Distanz beider Punkte, so findet man (für $u=s$):

$$E=1+\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2,\quad G=1,\quad F=1,\quad A=\pm\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2\frac{1}{r},\quad B=0,\quad C=0.$$

Die Gleichung 42) wird dann:

$$\partial s^2\left[3\,\partial v-v\,\partial \log\frac{\varrho}{r}+2\,\partial s\right]=0.$$

Setzt man $\partial s^2=0$, $s=Const.$, so erhält man eine Lösung, die evident ist, da der Normalschnitt, welcher durch eine Generatrix geht, einen Krümmungskreis mit unendlich grossem Radius hat. Verschwindet der zweite Factor der obigen Gleichung, so folgt:

$$3\frac{\partial v}{\partial s}-v\frac{\partial}{\partial s}\log\frac{\varrho}{r}+2=0$$

oder integrirt:

$$v=\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{1}{3}}\left[p-\tfrac{2}{3}\int\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}\partial s\right],$$

wo p wieder ein Parameter ist. Ist die Wendecurve eine Helix, d. h. eine Curve, welche die Kanten eines beliebigen Cylinders unter constantem Winkel schneidet, so ist $\frac{\varrho}{r}$ constant, man hat dann die einfache Lösung

$v=p-\frac{2}{3}s.$

Bestimmt man einen Punkt einer Rotationsfläche ebenso, wie in VII), *so folgt:*

$$G=\left(\frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2,\quad E=V^2,\quad F=0,\quad B=-\frac{V}{\sin^2 v}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2,$$

$$A=\cot v\, V^2\frac{\partial V}{\partial v},\quad C=0.$$

Die Differentialgleichung 43) wird in diesem Falle:

$$v'\left[v'^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial V}{\partial v}\right)-3u'^2\cos^2 v\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{V}{\cos v}\right]=0.$$

Für $v'=0$ folgt $v=Const.$, was einen Parallel der Fläche giebt; eine Lösung, die evident ist. Verschwindet der zweite Factor, so folgt:

$$\pm\sqrt{3}\frac{\partial u}{\partial v}=\sqrt{\frac{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial V}{\partial v}\right)}{\cos^2 v\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{\cos v}\right)}}.$$

Für die Rotationsfläche der Kettenlinie ist $V=\frac{R}{\cos v}$, die vorstehende Gleichung integrirt, giebt:

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin v}{1-\sin v}\pm u\sqrt{3}=p.$$

Man bemerkt leicht, dass die beiden Linien der surosculirten Normalschnitte auf der Rotationsfläche einer Kettenlinie Trajectorien sind, welche die Parallelkreise unter Winkeln von 30° schneiden.

IX.

Für die folgenden Entwickelungen ist eine Transformation der Flächen sehr nützlich, welche nach Liouville die Transformation mittelst reciproker Radienvectoren genannt wird. (Vergl. hierüber Thompson im *Journal de Mathém. X*, *p.* 364, *XII*, *p.* 256, Liouville *ibid. XII*, *p.* 265.) Diese Transformation besteht bekanntlich darin, dass die Punkte $q_1, q_2, q_3 \ldots$ der transformirten Fläche den Punkten $p_1, p_2, p_3 \ldots$ der ursprünglichen in Beziehung auf einen festen Punkt o so entsprechen, dass die Gleichungen stattfinden: $op_1 \,.\, oq_1 = h^2$, $op_2 \,.\, oq_2 = h^2$, $op_3 \,.\, oq_3 = h^2 \ldots$, wo h eine Constante bedeutet. Es scheint noch nicht bemerkt zu sein, dass sich die obige Transformation aus zwei anderen zusammensetzen lässt, welche bei vielen geometrischen Untersuchungen vorkommen.

Legt man von einem festen Punkte p aus einen Berührungskegel an eine Kugelfläche — allgemeiner an eine Fläche zweiten Grades —, so ist die Contactcurve eben; bewegt sich der Punkt p in einer Ebene e, so schneiden sich die Ebenen der Contactcurven in einem bestimmten Punkte p_1, welcher der Pol der eEbene heisst. Berührt die Ebene e beständig eine Fläche f, so liegt der Pol p_1 auf einer Fläche f_1, welche nach Poncelet die reciproke Polarfläche von f genannt wird. Sei:

46) $\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=k^2,$

die Gleichung der gegebenen Kugelfläche, dann ist:

$$(x-\xi)(\xi_1-\xi)+(y-\eta)(\eta_1-\eta)+(z-\zeta)(\zeta_1-\zeta)=k^2$$

die Gleichung der Polarebene für den Pol (ξ_1, η_1, ζ_1). Die Gleichung der berührenden Ebene im Punkte (x_1, y_1, z_1) zur Fläche $F(x, y, z)=0$ ist:

$$(x-x_1)\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+(z-z_1)\frac{\partial F_1}{\partial z_1}=0,$$

wo $F_1=F(x_1, y_1, z_1)$. Soll diese Ebene mit der obigen Polarebene identisch sein, so folgt:

$$\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}{\xi_1-\xi}=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}{\eta_1-\eta}=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial z_1}}{\zeta_1-\zeta}=\frac{x_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+z_1\frac{\partial F_1}{\partial z_1}}{\xi(\xi_1-\xi)+\eta(\eta_1-\eta)+\zeta(\zeta_1-\zeta)+k^2}.$$

Setzt man hierin einfach x, y, z statt x_1, y_1, z_1, und berücksichtigt:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\cos a}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\cos b}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\cos u},$$

so lassen sich die obigen Gleichungen einfacher schreiben:

$$\frac{\xi_1-\xi}{\cos a}=\frac{\eta_1-\eta}{\cos b}=\frac{\zeta_1-\zeta}{\cos c}=\frac{\xi(\xi_1-\xi)+\eta(\eta_1-\eta)+\zeta(\zeta_1-\zeta)+k^2}{x\cos a+y\cos b+z\cos c}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$47)\quad\left\{\begin{aligned}\xi_1-\xi&=\frac{k^2\cos a}{(x-\xi)\cos a+(y-\eta)\cos b+(z-\zeta)\cos c},\\ \eta_1-\eta&=\frac{k^2\cos b}{(x-\xi)\cos a+(y-\eta)\cos b+(z-\zeta)\cos c},\\ \zeta_1-\zeta&=\frac{k^2\cos c}{(x-\xi)\cos a+(y-\eta)\cos b+(z-\zeta)\cos c}.\end{aligned}\right.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind Functionen von u und v; denkt man sich diese Quantitäten zwischen den vorstehenden Gleichungen eliminirt, so erhält man eine Relation zwischen ξ_1, η_1, ζ_1, d. h. die Gleichung der reciproken Polarfläche von $F(x, y, z)=0$ in Beziehung auf die Kugelfläche 46). Der Einfachheit halber werde angenommen, dass die Variabeln u, v die Argumente der Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche seien, also die Relationen stattfinden $F=0$, $C=0$. Nach den in V) aufgestellten Gleichungen findet man:

$$\frac{\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}\frac{\partial\eta_1}{\partial u}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial u}\frac{\partial\eta_1}{\partial v}}{x-\xi}=\frac{\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\frac{\partial\zeta_1}{\partial u}-\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}}{y-\eta}=\frac{\frac{\partial\eta_1}{\partial v}\frac{\partial\xi_1}{\partial u}-\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}}{z-\zeta}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos a & \cos b & \cos c\\ \cos a' & \cos b' & \cos c'\\ \cos a'' & \cos b'' & \cos c''\end{vmatrix}\frac{PQ}{r'r''}.$$

Mittelst dieser Gleichungen ergiebt sich als Gleichung der berührenden Ebene im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) zur reciproken Polarfläche:

$$(x_1-\xi_1)(x-\xi)+(y_1-\eta_1)(y-\eta)+(x_1-\zeta_1)(z-\zeta)=0$$

oder

$$(x_1-\xi)(x-\xi)+(y_1-\eta)(y-\eta)+(z_1-\zeta)(z-\zeta)=k^2,$$

o x_1, y_1, z_1 die laufenden Coordinaten sind. Fällt man vom Punkte (ξ, η, ζ) in Perpendikel auf diese Ebene, bezeichnet die Coordinaten des Fusspunktes durch x_1, y_1, z_1, so ist derselbe durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$
48)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1-\xi &= k^2\,\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\\
y_1-\eta &= k^2\,\frac{y-y}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\\
z_1-\zeta &= k^2\,\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Eliminirt man u und v zwischen diesen Gleichungen, so erhält man ine Relation zwischen x_1, y_1, z_1, d. h. die Gleichung einer Fläche, welche en Ort der Fusspunkte der Perpendikel bildet, gefällt vom Punkte (ξ, η, ζ) uf die berührenden Ebenen der reciproken Polarfläche. Die Gleichungen) enthalten zugleich die Transformation mittelst reciproker Radienvectoren. Hieraus folgt:

Ist f_2 die reciproke Polarfläche einer Fläche f in Beziehung auf eine Kugelfläche, so ist die Fusspunktfläche f_1 von f_2, für den Mittelpunkt der Kugelfläche, die transformirte Fläche f mittelst reciproker Radienvectoren.

Mit Hilfe der in V) gegebenen Formeln lassen sich aus den Gleichunn 48) leicht die Hauptkrümmungshalbmesser der transformirten Fläche iden. Setzt man zur Abkürzung:

$$
49)\quad \left\{\begin{aligned}
H &= (x-\xi)\cos a + (y-\eta)\cos b + (z-\zeta)\cos c,\\
H' &= (x-\xi)\cos a' + (y-\eta)\cos b' + (z-\zeta)\cos c',\\
H'' &= (x-\xi)\cos a'' + (y-\eta)\cos b'' + (z-\zeta)\cos c'',\\
D &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = H^2 + H'^2 + H''^2,
\end{aligned}\right.
$$

o findet man aus 48):

$$
\frac{1}{k^2}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{P}{D}\left(\cos a' - 2\frac{x-\xi}{D}H'\right),\quad \frac{1}{k^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{Q}{D}\left(\cos a'' - 2\frac{x-\xi}{D}H''\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{P}{D} - 2\frac{P}{D}H'\right)\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{MP}{Q}\frac{\partial x_1}{\partial v}\\
&\quad + \frac{P^2}{D}\left[\frac{\cos a}{r''} - 2\frac{x-\xi}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right)\right],\\
\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{Q}{D} - 2\frac{Q}{D}H''\right)\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{NQ}{P}\frac{\partial x_1}{\partial u}\\
&\quad + \frac{Q^2}{D}\left[\frac{\cos a}{r'} - 2\frac{x-\xi}{D}\left(1+\frac{H}{r'}\right)\right],\\
\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{P}{D}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{Q}{D}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

Für die Differentialquotienten von y_1, z_1 ergeben sich ganz analoge Gleichungen. Bezeichnet man die Quantitäten E, F, G, A, B, C, wenn

x, y, z durch x_1, y_1, z_1 ersetzt werden, respective durch $E_1, F_1, G_1, A_1, B_1, C_1$, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen:

$$50)\qquad E_1 = k^4\left(\frac{P}{D}\right)^2,\quad G_1 = k^4\left(\frac{Q}{D}\right)^2,\quad F_1 = 0.$$

Der Werth von $\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}$ zeigt unmittelbar, dass $C_1 = 0$. Aus den beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $C_1 = 0$ folgt das bekannte Resultat, dass $u = Const.$, $v = Const.$, auf der transformirten Fläche ebenfalls Krümmungslinien sind oder mit anderen Worten, die Krümmungslinien einer Fläche ändern bei der Transformation mittelst reciproker Radienvectoren ihren Charakter nicht. Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Determinanten erhält man für A_1 folgende Gleichung:

$$\frac{A_1}{Q}\left(\frac{D}{k^2 P}\right)^3 = \begin{vmatrix} \frac{\cos a}{r''} - 2\frac{x-\xi}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right), & \frac{\cos b}{r''} - 2\frac{y-\eta}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right), & \frac{\cos c}{r''} - 2\frac{z-\zeta}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right) \\ \cos a' - 2\frac{x-\xi}{D}H', & \cos b' - 2\frac{y-\eta}{D}H', & \cos c' - 2\frac{z-\zeta}{D}H' \\ \cos a'' - 2\frac{x-\xi}{D}H'', & \cos b'' - 2\frac{y-\eta}{D}H'', & \cos c'' - 2\frac{z-\zeta}{D}H'' \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit:

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos a' & \cos b' & \cos c' \\ \cos a'' & \cos b'' & \cos c'' \end{vmatrix},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, so folgt:

$$\frac{\varepsilon A_1}{Q}\left(\frac{D}{k^2 P}\right)^3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{r''} - 2\frac{H}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right), & -\frac{2H'}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right), & -2\frac{H''}{D}\left(1+\frac{H}{r''}\right) \\ -2\frac{HH'}{D}, & 1-2\frac{H'^2}{D}, & -2\frac{HH'}{D} \\ -2\frac{HH''}{D}, & -2\frac{H'H''}{D}, & 1-2\frac{H''^2}{D} \end{vmatrix}$$

$$= -2\frac{H}{D} + \frac{1}{r''}\left(1 - 2\frac{H^2+H'^2+H''^2}{D}\right)$$

oder, wegen $D = H^2 + H'^2 + H''^2$,

$$-\frac{\varepsilon A_1}{Q}\left(\frac{D}{k^2 P}\right)^2 = 2\frac{H}{D} + \frac{1}{r''}.$$

Da nun

$$E_1 \sqrt{E_1 G_1} = \frac{k^2}{D} \cdot Q\left(\frac{k^2 P}{D}\right)^3,$$

so ist auch:

$$\frac{-\varepsilon A_1}{E_1\sqrt{E_1 G_1}}=\frac{1}{k^2}\left(2H+\frac{D}{r''}\right).$$

Ebenso folgt:

$$\frac{-\varepsilon B_1}{G_1\sqrt{E_1 G_1}}=\frac{1}{k^2}\left(2H+\frac{D}{r'}\right).$$

Bezeichnet man durch r_1' und r_1'' die Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x_1, y_1, z_1), so folgt, wegen $\frac{\varepsilon A_1}{E_1\sqrt{E_1 G_1}}=\frac{1}{r_1''}$, $\frac{\varepsilon B_1}{G_1\sqrt{E_1 G_1}}=\frac{1}{r_1'}$,

$$\frac{k^2}{r_1'}=-\left(2H+\frac{D}{r'}\right),\quad \frac{k^2}{r_1''}=-\left(2H+\frac{D}{r''}\right).$$

XV.

Ueber Hydrodiffusion.

Von Dr. Beez,

Lehrer an der königl. Realschule zu Plauen.

Im vierten Jahrgange dieser Zeitschrift p. 212—231 habe ich eine Ableitung der Gesetze gegeben, nach welchen ein im Wasser lösliches Salz aus seiner Lösung in reines Wasser, welches darüber geschichtet ist, der Schwere entgegen diffundirt und die Richtigkeit der aufgestellten Gleichungen durch Versuche nachgewiesen. Der Zweck gegenwärtiger Zeilen ist, eine rein theoretische Begründung der aufgestellten Gesetze zu versuchen und ohne Hilfe von partiellen Differentialen und ohne experimentelle Bestimmung der im allgemeinen Integral vorkommenden willkürlichen Functionen die Diffusionsgesetze aus dem Princip des chemischen Gleichgewichts zu entwickeln. Da ich im Verlauf dieser Arbeit mehrere Male auf die bereits citirte Abhandlung verweisen muss, so bitte ich den wohlwollenden Leser, dieselbe nochmals zur Hand zu nehmen und zugleich ein Versehen p. 216, Gleichung 2), welche dort lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right),$$

zu verbessern, indem dieselbe vielmehr, wie man sich leicht durch Rechnung überzeugt, heissen muss:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right),$$

wodurch sich, da Q unabhängig von t ist, die Differentialgleichung für einen Diffusionsstrom, der in einem Gefäss von beliebiger Form vor sich geht, auf den einfachen Ausdruck:

$$\frac{\partial(Qu)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2(Qu)}{\partial x^2}$$

reducirt*). An dem Folgenden wird jedoch hierdurch nichts geändert, da für ein constantes Q die letztere Gleichung übergeht in:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dieselbe, auf welche die ganze spätere Untersuchung basirt ist.

Auch in vorliegendem kleinen Beitrag zur Diffusionslehre beschränke ich mich auf den Fall, dass der Diffusionsstrom in einem cylindrischen Gefässe vor sich geht, werde jedoch die drei verschiedenen Arten von Diffusionsströmen, die sich experimentell prüfen lassen und für welche die Gleichungen 12), 13), 14) p. 224 f. der citirten Abhandlung aus einer Differentialgleichung abgeleitet worden sind, unabhängig von einander behandeln.

1. Der erste Diffusionsstrom entsteht, wenn man in einem cylindrischen Gefässe unter eine Schicht von reinem destillirten Wasser eine Schicht concentrirter Salzlösung mit der Vorsicht bringt, dass keine mechanische Mengung eintritt, sondern beide Flüssigkeiten durch eine scharf begrenzte Ebene von einander getrennt erscheinen. Das Gefäss muss sodann längere Zeit ruhig stehen, damit die Flüssigkeiten ungestört ihrer eigenen Molecularattraction überlassen bleiben, deren Wirkungen gewöhnlich erst nach einigen Tagen hinreichend stark hervortreten, um mit einiger Genauigkeit quantitativ bestimmt werden zu können. Denken wir uns nun die beiden ursprünglich übereinander stehenden Flüssigkeiten in unendlich dünne horizontale Schichten zerlegt, von welchen die unteren sämmtlich die volle anfängliche Concentration oder die Salzmenge 1, die oberen die Salzmenge 0 besitzen, so ist beim Beginn des Versuchs die Reihe der Concentrationen von oben nach unten:

$$\ldots\ldots 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 \ldots\ldots$$

die beiden aneinander grenzenden Schichten mit dem bezüglichen Salzgehalt 0 und 1 suchen ihren Salzgehalt auszugleichen, d. h. gleiche Concentration anzunehmen, was nach einer bestimmten, jedoch unendlich kleinen Zeit, deren Dauer für verschiedene Salze verschieden ist und von der Affinität des Wassers zu dem betreffenden Salze abhängt, geschehen wird. Nach Verlauf dieses Zeittheilchens wird die Diffusionsreihe folgende Gestalt haben:

$$\ldots\ldots 0, 0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1, 1, \ldots\ldots$$

Auf welche Weise nun weiter jede nachfolgende Reihe aus der vor-

*) Diese Bemerkung verdanke ich der Güte des Herrn Gustav Roch.

hergehenden sich ergiebt, wird sofort klar werden, wenn man erwägt, dass jede Schicht sowohl mit der über ihr stehenden dünneren, als mit der unter ihr befindlichen dichteren in das Gleichgewicht zu kommen sucht. Sind A, B, C drei solche, von oben nach unten geordnete, unendlich dünne Schichten von zunehmendem Salzgehalt, nämlich resp. u', u, u_1, so wird B von C die Salzmenge $\frac{u_1 - u}{2}$ empfangen, dagegen an A die Quantität $\frac{u - u'}{2}$ abgeben müssen. Somit wird der Zuwachs an Salz, welchen die Schicht B vermöge der vereinten Einwirkungen von A und C erhält, nur sein können:

$$=\frac{u_1 - u}{2} - \frac{u - u'}{2},$$

also wird die Schicht B selbst im nächsten Zeittheilchen nicht mehr die Concentration u, sondern:

$$\frac{u + u_1 - u}{2} - \frac{u - u'}{2},$$

d. h.

$$\frac{u_1 + u'}{2}.$$

haben. Es tritt demnach an die Stelle der Concentration u in der Schicht B nach Verlauf eines Zeittheilchens das arithmetische Mittel $\frac{u_1 + u'}{2}$ aus den Concentrationen der beiden angrenzenden Schichten zu Anfang desselben Zeittheilchens. Kraft dieses Bildungsgesetzes werden nun nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc. Zeittheilchen, vom Beginn des Versuches an gerechnet, die folgenden Diffusionsreihen entstehen, welche so unter einander geordnet worden sind, dass die von der ursprünglichen Berührungsebene gleichweit entfernten Schichten senkrecht unter einander zu stehen kommen, während die ursprüngliche Berührungsebene durch den verticalen Strich angedeutet ist:

Verflossene Zeittheilchen.	Concentrationen über der								Concentrationen unter der							
	ursprünglichen Grenzebene.															
1	.	.	.	.	.	.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	.	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	.	.	.	.
4	.	.	.	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	1	.	.	.
5	.	.	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{31}{32}$	1	.	.
6	.	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{22}{64}$	$\frac{22}{64}$	$\frac{42}{64}$	$\frac{42}{64}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{63}{64}$	1	.
7	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{99}{128}$	$\frac{99}{128}$	$\frac{120}{128}$	$\frac{120}{128}$	$\frac{127}{128}$	$\frac{127}{128}$	1

Das Gesetz, nach welchem die Zahlen der einzelnen Reihen aus den Ordnungszahlen 1, 2, 3, etc. sich ableiten lassen, ist nicht schwer zu erkennen. Denn, wenn allgemein

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}=n_k$$

gesetzt wird, so ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
1=1_0, & 1=2_0, & 1=3_0, & 1=4_0, & 1=5_0, & 1=6_0, & 1=7_0,\\
1=1_1, & 2=2_1, & 3=3_1, & 4=4_1, & 5=5_1, & 6=6_1, & 7=7_1,\\
 & 1=2_2, & 3=3_2, & 6=4_2, & 10=5_2, & 15=6_2, & 21=7_2,\\
 & & 1=3_3, & 4=4_3, & 10=5_3, & 20=6_3, & 35=7_3,\\
 & & & 1=4_4, & 5=5\ , & 15=6_4, & 35=7_4,\\
 & & & & 1=5_5, & 6=6_5, & 21=7_5,\\
 & & & & & 1=6_6, & 7=7_6,\\
 & & & & & & 1=7_7,
\end{array}$$

und es lassen sich die Zähler der obigen Reihen, wenn man die doppelten Glieder unberücksichtigt lässt, nämlich:

$$\begin{array}{l}
1,\\
1,\ 3,\\
1,\ 4,\ 7,\\
1,\ 5,\ 11,\ 15,\\
1,\ 6,\ 16,\ 26,\ 31,\\
1,\ 7,\ 22,\ 42,\ 57,\ 63,\\
1,\ 8,\ 29,\ 64,\ 99,\ 120,\ 127
\end{array}$$

bezüglich auch schreiben:

$$\begin{array}{l}
1_0,\\
2_0,\ 2_0+2_1,\\
3_0,\ 3_0+3_1,\ 3_0+3_1+3_2,\\
4_0,\ 4_0+4_1,\ 4_0+4_1+4_2,\ 4_0+4_1+4_2+4_3,\\
5_0,\ 5_0+5_1,\ 5_0+5_1+5_2,\ 5_0+5_1+5_2+5_3,\ 5_0+5_1+5_2+5_3+5_4,\\
\text{etc.}
\end{array}$$

Demgemäss ergiebt sich als die vollständige Diffusionsreihe nach Verlauf von $2n$ Zeittheilchen die nachstehende, deren Glieder sämmtlich den Nenner 2^{2n} haben:

$$(2n)_0,\ (2n)_0,\ (2n)_0+(2n)_1,\ (2n)_0+(2n)_1,\ (2n)_0+(2n)_1+(2n)_2,$$
$$(2n)_0+(2n)_1+(2n)_2,\ \text{etc.}$$

und als die beiden letzten Glieder, welche vom Anfang der Reihe gezählt, das $(4n-1)$te und $(4n)$te sind:

$$(2n)_0+(2n)_1+(2n)_2+\ldots+(2n)_{2n-2}+(2n)_{2n-1}.$$

Um die allgemeine Giltigkeit der durch Induction gefundenen Reihe zu beweisen, wenden wir den bekannten Schluss von k auf $k+1$ an. Es würden nämlich das $(2r-1)$te, $(2r)$te und $(2r+1)$te Glied in der $(2n)$ten Diffusionsreihe die Werthe haben:

1) $(2n)_0 + (2n)_1 + (2n)_2 + \ldots + (2n)_{r-1}$,
2) $(2n)_0 + (2n)_1 + (2n)_2 + \ldots + (2n)_{r-1}$,
3) $(2n)_0 + (2n)_1 + (2n)_2 + \ldots + (2n)_{r-1} + (2n)_r$,

das $(2r+1)$te Glied aber der $(2n+1)$ten Reihe nach derselben Induction lauten:

4) $(2n+1)_0 + (2n+1)_1 + (2n+1)_2 + \ldots + (2n+1)_{r-1} + (2n+1)_r$.

Bedenkt man nun, dass das $(2r+1)$te Glied dieser Reihe dasjenige ist, welches von der Grenzebene dieselbe Entfernung hat, als das $(2r)$te der vorigen Reihe, so ist klar, dass nach dem recurrirenden Gesetze dieser Reihen gleich dem arithmetischen Mittel aus dem $(2r-1)$ten und $(2r+1)$ten Gliede der vorigen Reihe sein müsse. Addirt man aber 1) und 3), so kommt:

$$(2n)_0 + [(2n)_0 + (2n)_1] + [(2n)_1 + (2n)_2] + \ldots + [(2n)_{r-1} + (2n)_r]$$

oder da:

$$(2n)_0 = 1 = (2n+1)_0$$

und allgemein:

$$(2n)_{k-1} + (2n)_k = (2n+1)_k,$$

so ist es

$$= (2n+1)_0 + (2n+1)_1 + (2n+1)_2 + \ldots + (2n+1)_{r-1} + (2n+1)_r,$$

also genau gleich der Reihe 4), die sich unmittelbar durch Induction ergab. Hierdurch ist die Giltigkeit der aufgestellten Reihe für jedes beliebige n erwiesen.

In den einzelnen Reihen macht sich insofern ein Unterschied bemerkbar, als diejenigen von ungerader Ordnungszahl zwei gleiche mittlere Glieder enthalten, was bei denen von gerader Ordnungszahl nicht der Fall ist. Betrachten wir zunächst die ersteren. In einer solchen ist der Werth des Mittelgliedes stets $= \frac{1}{2}$. Denn für die Ordnungszahl $(2n+1)$ haben das $(2n+1)$te Glied unserer Diffusionsreihe gleichen Werth, nämlich:

$$\{(2n+1)_0 + (2n+1)_1 + (2n+1)_2 + \ldots + (2n+1)_{n+1}\} : 2^{2n+1}.$$

Es ist aber:

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = (2n+1)_0 + (2n+1)_1 + \ldots + (2n+1)_n + (2n+1)_{n+1} + \ldots + (2n+1)_{2n+1}$$

und da in dieser Entwickelung von dem $(n+1)$ten Gliede an dieselben Werthe, nur in umgekehrter Reihenfolge, wiederkehren, so ist

$$(2n+1)_0 + (2n+1)_1 + \ldots + (2n+1)_n = \tfrac{1}{2} \cdot 2^{2n+1},$$

woraus sich ohne Weiteres die Richtigkeit obiger Behauptung ergiebt. Verlegt man nun den Anfang der Reihe in die ursprüngliche Grenzebene, so wird das erste Glied $\frac{1}{2}$ und das $(2r)$te

5) $= \frac{1}{2} + \{(2n+1)_{n+1} + (2n+1)_{n+2} + \ldots + (2n+1)_{n+r}\} : 2^{2n+1}$

sein. Lässt man hierin n unendlich werden, so kommt es darauf an, den Grenzwerth für:

$$\frac{(2n+1)_{n+r}}{2^{2n+1}}$$

zu bestimmen. Es ist aber:

$$\frac{(2n+1)_{n+r}}{2^{2n+1}} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n} \times \frac{(n+1)n\ldots(n-r+2)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} : 2^{2n+1}.$$

Um dem ersten Factor eine bequemere Gestalt zu geben, gehen wir von der identischen Gleichung

$$1.2.3\ldots(2n).(2n+1) = 1.3.5\ldots(2n+1).2.4.6\ldots(2n)$$
$$= 1.3.5\ldots(2n+1).1.2.3\ldots n.2^n$$

aus und dividiren auf beiden Seiten mit

$$1.2.3\ldots n \text{ und } 1.2.3\ldots(n+1),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)}2^n$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}2^{2n+1}.$$

Nach der Wallis'schen Formel aber ist:

$$Lim \frac{2.2.4.4\ldots(2n+2)(2n+2)}{1.3.3.5\ldots(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{2}$$
$$n = \infty,$$

folglich:

$$Lim \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} = Lim \sqrt{\frac{(2n+3)\pi}{2}}.$$

Der zweite Factor

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(n+2)(n+3)\ldots(n+r)}$$

kann, wenn man im Zähler und Nenner jeden Partialfactor mit n dividirt, geschrieben werden:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-2}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{r}{n}\right)}.$$

Erhebt man nun jeden Partialfactor auf die $n$te Potenz und berücksichtigt, dass:

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x},$$
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

für $n = \infty$ ist und zieht dann wieder die $n$te Wurzel, so nimmt der Ausdruck die Form an:

$$\left\{\frac{e^{-1}.e^{-2}.e^{-3}\ldots e^{-(r-2)}}{e^2.e^3.e^4\ldots e^r}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

welches endlich, wenn man die angedeutete Multiplication ausführt, in

$$e^{-\frac{r(r-1)}{n}}$$

übergeht. Somit ist für unendlich wachsende n

$$Lim \frac{(2n+1)_{n+r}}{2^{2n+1}} = Lim \sqrt{\frac{2}{(2n+3)\pi}}\, e^{\frac{-r(r-1)}{n}}$$
$$= Lim \sqrt{\frac{1}{n\pi}}\, e^{\frac{-r(r-1)}{n}}.$$

Wenn aber seit Beginn des Versuchs $(2n+1)$ Zeittheilchen verflossen sind, so werden diese für ein unendliches n einer endlichen Zeit proportional gesetzt werden können, die nach der Stärke der Affinität des Salzes zum Wasser verschieden ist. Man kann daher, wenn man die Dauer eines solchen Zeittheilchens $= k^2$ setzt, wenn k als unendlich kleine Grösse anzusehen ist, die verflossene Zeit $(2n+1)k^2$ gleich einer bestimmten Zahl t von endlichen Zeiteinheiten, multiplicirt mit einem constanten Factor α, annehmen. Dieser Factor α aber ist nichts anderes, als der Diffusionscoefficient, welcher die Geschwindigkeit angiebt, mit der das Salz aus einer Schicht in die nächstfolgende überströmt. Es sei daher:

$$(2n+1)k^2 = \alpha t,$$

woraus sich, wenn man 1 gegen $2n$ verschwinden lässt,

$$n = \frac{\alpha t}{2k^2}$$

ergiebt. Durch Substitution dieses Werthes geht

$$\sqrt{\frac{1}{n\pi}}\, e^{\frac{-r(r-1)}{n}}$$

über in

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha t\pi}}\, e^{\frac{-2r(r-1)}{\alpha t}k^2}.k.$$

Die Reihe in 5) lässt sich jetzt in eine Summenformel zusammenfassen und in der präciseren Gestalt:

$$= \tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{\alpha t u}} \sum_{r=0}^{r=r} e^{\frac{-2r(r-1)}{\alpha t}k^2}$$

schreiben. Diesen Salzgehalt also hat nach Verlauf von t Zeiteinheiten die $(2r)$te Schicht unter der ursprünglichen Grenzebene. Nennt man denselben u und setzt den anfänglichen Gehalt der Salzlösung $= U$, so wird

$$6)\qquad u = \tfrac{1}{2}U + U\sqrt{\frac{2}{\alpha t\pi}} \sum_{r=0}^{r=r} e^{\frac{-2r(r-1)}{\alpha t}k^2}.k.$$

Die $(2r+1)$te Schicht aber hat dieselbe Concentration, als die $(2r)$te, und wir können daher beide als eine einzige Schicht von gleicher Concentration, aber doppelter Dicke, als bisher, auffassen. Hätten wir nun die Dicke einer bisherigen Schicht k genannt (was uns erlaubt sein muss, da wir über die Theilung des vom Diffusionsstrom durchlaufenen Raumes noch völlig freie Hand haben), so würden wir die Dicke der nunmehrigen Schichten, die wir ∂x nennen wollen, gleich $2k$ setzen können, oder

$$k = \tfrac{1}{2}\partial x.$$

Sei endlich x der Abstand der $2r$ten Schicht von der Mitte, so

$$x = r \partial x$$

und wir können statt der Summenformel in 6) das Integral einführe schreiben:

$$7) \qquad u = \tfrac{1}{2} U + U \sqrt{\frac{1}{2 \alpha t \pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2 \alpha t}} \partial x.$$

Für die Concentration einer Schicht, welche dem oberen Thei Diffusionsreihe angehört und den Abstand x von der Mitte besitzt, man auf gleiche Weise finden:

$$8) \qquad u = \tfrac{1}{2} U - U \sqrt{\frac{1}{2 \alpha t \pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2 \alpha t}} \partial x,$$

welcher Ausdruck genau derselbe ist, wie derjenige, aus welchem ir ner früheren Abhandlung über Diffusion die Gleichung 12) herv gangen war.

Wir haben bis jetzt nur die Reihen von ungerader Ordnung $2n + 1$ betrachtet, doch gelten die erhaltenen Formeln auch für s deren Ordnungszahl gerade ist, sobald nur dieselbe unendlich gross Denn in einer solchen würde das erste Glied, von der Mitte au gere welches das $(2n + 1)$te vom Anfang der Reihe ist, den Werth l müssen:

$$\{(2n)_0 + (2n)_1 + \ldots + (2n)_{n-1} + (2n)_n\} : 2^{2n}.$$

Es ist aber:

$$2^{2n} = (2n)_0 + (2n)_1 + \ldots + (2n)_n + (2n)_{n+1} + \ldots + (2n)_{2n}.$$

Die Zahl der Glieder dieser Reihe ist ungerade, und wenn man die gleichweit vom Anfang und Ende abstehenden Glieder, die ein gleich sind, zusammenfasst, so bleibt das mittelste:

$$(2n)_n$$

übrig. Man kann daher auch schreiben:

$$2^{2n} = 2\{(2n)_0 + (2n)_1 + \ldots + (2n)_{n-1} + (2n)_n\} - (2n)_n.$$

Daher ist:

$$\frac{(2n)_0 + (2n)_1 + \ldots + (2n)_n}{2^{2n}} = \frac{2^{2n} + (2n)_n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{(2n)_n}{2^{2n+1}}.$$

Für unendliche n aber wird $\frac{(2n)_n}{2^{2n+1}}$ eine unendlich kleine Grösse gegen $\frac{1}{2}$ verschwindet. Um dieselbe Grösse differirt auch der allge Ausdruck, der sich aus der Betrachtung der Diffusionsreihen von ge Ordnungszahl ergiebt, von der Formel 5); er lässt sich daher für als mit 5) zusammenfallend ansehen.

2. Ein zweiter Diffusionsstrom kann hergestellt werden, wenn *einen kleineren* Cylinder, der mit concentrirter Salzlösung gefüllt is

ein verhältnissmässig sehr grosses Gefäss mit reinem destillirten Wasser **in** möglichster Höhe über dem Boden desselben*) aufstellt. Man kann **dann** ohne erheblichen Fehler annehmen, dass die Flüssigkeit, welche an **die** oberste Schicht im Cylinder aussen angrenzt, beständig die Concentration Null beibehält, da die diffundirte Salzlösung vermöge ihrer Schwere **an** dem Rande des Cylinders herabfliesst und auf dem Boden des grossen **Gefässes** sich ausbreitet, während eine neue Schicht reinen Wassers an **ihre** Stelle tritt. Unsere Diffusionsreihe erweitert sich in diesem Falle **nur** nach einer Seite, nach der unteren, hin, während in der ursprünglichen Grenzschicht die Concentration constant Null bleibt. Wendet man **auch** bei dieser Reihe das oben angeführte Bildungsgesetz an, dass die **Concentration** irgend einer Schicht nach Verlauf eines Zeittheilchens das **arithmetische** Mittel bildet, zwischen den Concentrationen der beiden **Nachbarschichten** vor Beginn desselben, so wird die Diffusionsreihe nach 1, 2, 3 ... 6 Zeittheilchen sich in folgender Weise gestalten:

$$\begin{array}{ll|lllllll}
1. & 0 & \frac{1}{2}, & 1, & & & & & \\
2. & 0 & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & 1, & & & & \\
3. & 0 & \frac{3}{8}, & \frac{6}{8}, & \frac{7}{8}, & 1, & & & \\
4. & 0 & \frac{6}{16}, & \frac{10}{16}, & \frac{14}{16}, & \frac{15}{16}, & 1, & & \\
5. & 0 & \frac{10}{32}, & \frac{20}{32}, & \frac{25}{32}, & \frac{30}{32}, & \frac{31}{32}, & 1, & \\
6. & 0 & \frac{20}{64}, & \frac{35}{64}, & \frac{50}{64}, & \frac{56}{64}, & \frac{62}{64}, & \frac{63}{64}, & 1.
\end{array}$$

Die unmittelbar an das reine Wasser stossende Schicht, oder die erste Schicht der Reihe hat, wie man leicht finden wird, nach Verlauf von $(2n)$ Zeittheilchen den Werth

$$\frac{(2n)_n}{2^{2n}},$$

welches für unendliche n derselben Grenze sich nähert, als

$$\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} = \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

Setzt man hierin wiederum $2n = \frac{\alpha t}{k^2}$, so erhält man

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha t}} \cdot k,$$

d. h. es ist die Concentration der obersten Schicht umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der verflossenen Zeit.

---

*) Ich hatte in meiner früheren Abhandlung diese Vorsichtsmassregel nicht erwähnt, weil ich es für überflüssig hielt, etwas so Selbstverständliches ausdrücklich anzuführen; doch bemerke ich noch nachträglich — um ein Bedenken des Herrn Dr. Quincke zu beseitigen, der über meine Abhandlung in den „Fortschritten der Physik im Jahre 1859, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin" referirt hat — dass ich allerdings bei allen Versuchen den kleinen Cylinder so weit oben als möglich im grösseren Gefässe angebracht habe, indem ich ihn auf einen gläsernen Dreifuss von ziemlicher Höhe aufstellte.

Da nun in jedem Zeittheilchen die oberste Schicht an das umgebende Wasser die Hälfte ihrer Salzmasse abgiebt, so ist auch die während eines Zeittheilchens in das Wasser übertretende Salzmenge proportional derselben Grösse. Nennt man diese unendlich geringe Quantität Salz, welche während eines Zeittheilchens diffundirt, ∂s, so ist:

$$\partial s = \frac{c}{\sqrt{t}} \partial t,$$

worin c einen constanten Coefficienten bedeutet, der von der anfänglichen Concentration, dem Querschnitt des Cylinders und dem Diffusionscoefficienten abhängig ist. Die ganze Menge also des aus dem Cylinder diffundirten Salzes wird nach Verlauf von t Zeiteinheiten

$$s = c\sqrt{t}$$

sein, d. h. die Mengen des aus dem Cylinder diffundirten Salzes verhalten sich, wie die Quadratwurzeln aus den verflossenen Zeiten. Dieses Gesetz wurde in der früheren Abhandlung aus Beobachtungen abgeleitet und setzte uns in den Stand, die bei der Integration der Gleichung zwischen partiellen Differentialen auftretende willkürliche Function $\psi(t)$ zu bestimmen; hier wird es aus dem Princip des chemischen Gleichgewichts *a priori* abgeleitet. Die Uebereinstimmung beider Resultate kann als eine Rechtfertigung meiner oben aufgestellten Ansicht von der Art und Weise, wie sich innerhalb mehrerer aneinander grenzenden Flüssigkeitsschichten verschiedener Concentration die moleculare Thätigkeit vollzieht, angesehen werden. Der Salzgehalt u der $r$ten Schicht, von oben nach unten gerechnet, ist ferner:

$$u = \{(2n)_n + (2n)_{n+1} + \ldots + (2n)_{n+r-1}\} : 2^{2n};$$

das allgemeine Glied dieses Ausdrucks aber

$$\frac{(2n)_{n+r-1}}{2^{2n}}$$

lässt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie oben, wenn man jetzt die Schichten nur halb so dick, als vorher, annimmt, in das Differential

$$2\sqrt{\frac{1}{2\alpha t\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} \partial x$$

umwandeln, so dass bei anfänglicher Concentration U erhalten wird:

$$9) \qquad u = 2U\sqrt{\frac{1}{2\alpha t\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} \partial x. \text{*)}$$

3. Eine dritte Art von Diffusionsstrom endlich kann auf die Weise eingeleitet werden, dass man ein cylindrisches Gefäss bis zum Rande mit

) In der Formel 13) und 13) der citirten Abhandlung muss das Zeichen — in + umgewandelt werden.

Wasser füllt, durch eine Glasplatte verschliesst und mit der Oeffnung nach unten in einen grossen Behälter mit concentrirter Salzlösung möglichst tief einhängt, worin man die Glasplatte vorsichtig entfernt. Bei dieser Anordnung ist es allerdings unmöglich, die Reihe der Concentrationen in dem Cylinder zu beobachten, da er oben verschlossen ist; doch kann man nach Verlauf einiger Zeit die Quantität Salz, welche aus dem grösseren Behälter in den kleinen Cylinder diffundirt ist, aus der Gewichtszunahme desselben bestimmen. Verschliesst man nämlich den eingetauchten Cylinder nach Beendigung des Versuchs wiederum unter der Flüssigkeit mit derselben Glasplatte, die man vorher benutzt hat, hebt den Cylinder aus dem grossen Gefäss und kehrt ihn um, so lässt sich unter Anwendung einiger Vorsicht die Gewichtszunahme annähernd durch Wägung finden. Immerhin werden indess nach dieser Methode angestellte Beobachtungen keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen können, wovon ich mich selbst durch mehrfache Versuche überzeugt habe. Das Charakteristische des jetzigen Diffusionsstromes besteht darin, dass die unterste Schicht im Cylinder von einer Salzlösung berührt wird, deren Concentration nahezu constant, nämlich gleich der anfänglichen ist. Denn an die Stelle der Schicht Salzlösung, die unmittelbar an die Flüssigkeit im Cylinder grenzt, tritt, nachdem dieselbe ihren Salzgehalt zum Theil an das Wasser im Cylinder abgegeben hat, sofort wieder eine neue mit vollem Salzgehalt, während sie selbst, da sie leichter geworden ist, in dem Gefäss nach oben steigt. In dem eingetauchten Cylinder werden sich nach einander folgende Diffusionsreihen bilden:

$$\begin{array}{ll|l}
1. & 1 & \frac{1}{2},\ 0, \\
2. & 1 & \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ 0, \\
3. & 1 & \frac{5}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{1}{8},\ 0, \\
4. & 1 & \frac{10}{16},\ \frac{6}{16},\ \frac{2}{16},\ \frac{1}{16},\ 0, \\
5. & 1 & \frac{22}{32},\ \frac{12}{32},\ \frac{7}{32},\ \frac{2}{32},\ \frac{1}{32},\ 0, \\
6. & 1 & \frac{44}{64},\ \frac{29}{64},\ \frac{14}{64},\ \frac{8}{64},\ \frac{2}{64},\ \frac{1}{64},\ 0.
\end{array}$$

Man erkennt auf der Stelle, dass das $r$te Glied der $(2n)$ten Reihe

$$= 1 - \{(2n)_n + (2n)_{n+1} + (2n)_{n+1} + \ldots + (2n)_{n+r}\} 2^{2n}$$

sein muss, und da wiederum

$$\frac{(2n)_{n+r}}{2^{2n}}$$

für unendliche n und r als ein Differential von der Form

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha t\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} \partial x$$

sich darstellen lässt, so wird bei anfänglicher Concentration U sich ohne Weiteres ergeben:

$$10)\qquad u = U\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\alpha t\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}}\partial x\right),$$

als die Gleichung des dritten Diffusionsstromes übereinstimmend n
chung 14) meiner früheren Abhandlung.

Kleinere Mittheilungen.

XXVIII. Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüc
HERM. HANKEL.

Mittelst eines eleganten, von Jacobi herrührenden Prin Heine die Transformation einer nach aufsteigenden Potenzen e riabelen geordneten Reihe in einen Kettenbruch, dessen Partialzäl Variabele linear enthalten, dessen Partialnenner Constanten si eine rationelle Weise ausgeführt. Es verdient vielleicht bemerkt den, dass sich dasselbe Princip nicht minder fruchtbar erweist, sich um die Transformation einer nach absteigenden Potenzen ei riabelen fortschreitenden Reihe in einen Kettenbruch handelt, Partialzähler Constanten, dessen Partialnenner lineare Function Variabelen sind.

In der That, sei

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{s_0}{\varphi} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \dots$$

in einen Kettenbruch:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \cfrac{1}{a_1 x + b_1 - \cfrac{1}{a_2 x + b_1 - \cfrac{1}{a_3 x + b_3 - \dots}}}$$

zu transformiren und bezeichne $p_n : q_n$ den $n$ten Näherungswert Kettenbruches, so überzeugt man sich leicht, dass p_{n+1} und q_n i ganze Functionen von $n$ten Grade in x sind, also:

$$1)\qquad q_n = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + \dots + c_n^{(n)} x^n.$$

Man weiss, dass:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{q^{n+1} q_{n+2}} + \dots$$

ist, woraus man:

$$2)\qquad q_n \frac{\varphi_1}{\varphi} - p_n = \frac{1}{q_{n+1}} + q_n\left(\frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \dots\right)$$

findet; die linke Seite hiervon ist:

$$(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x + \ldots + c_n^{(n)}x^n)\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots\right) - p_n.$$

Die rechte kann nach absteigenden Potenzen von x entwickelt werden und fängt, da q_{n+1} von $(n+1)$ten Grade ist, mit $\frac{1}{x_{n+1}}$ an. Es verschwinden somit auf der linken Seite die Coefficienten von $x^0, x^1, \ldots x^{n-1}$, die zur Bestimmung der Coefficienten in p_n hinreichen, sobald man die Coefficienten in q_n gefunden hat, die sich durch das Verschwinden der Coefficienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^n}$ bis auf einen constanten Factor bestimmen. Man erhält nämlich durch diese Bemerkung die n homogenen Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} c_0^{(n)}s_0 + c_1^{(n)}s_1 + \ldots + c_n^{(n)}s_n = 0, \\ c_0^{(n)}s_1 + c_1^{(n)}s_2 + \ldots + c_n^{(n)}s_{n+1} = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_0^{(q)}s_{n-1} + c_1^{(n)}s_n + \ldots + c_n^{(n)}s_{2n-1} = 0. \end{cases}$$

Man findet daher sehr leicht, wenn man:

$$c_n^{(n)} = \overline{\omega}_n \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix}$$

setzt:

$$q_n = \overline{\omega}_n \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_n \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & \ldots & s_{2n-1} \\ 1 & \ldots & x^n \end{vmatrix}.$$

Um $\overline{\omega}_n$ zu finden, nehmen wir auf die beiderseitigen Coefficienten von $\frac{1}{x^{n+1}}$ in der obigen Gleichung 2) Rücksicht, wodurch man erhält:

$$5)\qquad c_0^{(n)}s_n + c_1^{(n)}s_{n+1} \ldots + c_n^{(n)}s_{2n} = \frac{1}{c_{n+1}^{(n+1)}}$$

und hieraus durch Zusammenstellung mit 3):

$$5)\qquad \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_n \\ \vdots & & \vdots \\ s_n & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix}^2 \overline{\omega}_n \overline{\omega}_{n+1} = 1,$$

aus welcher Gleichung man $\overline{\omega}_n$ bestimmen kann, sobald $\overline{\omega}_1$ durch ein directes Verfahren gefunden ist.

Man gelangt auf Grund dieser Betrachtungen mit überraschender Kürze zur directen Bestimmung der Sturm'schen Function in der eleganten Form, wie sie Joachimsthal gegeben hat.

Nimmt man nämlich für φ eine ganze Function von x $m$ten Grades $=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_m)$, für φ_1 den Differentialquotienten dieser Function, so werden $s_0, s_1, \ldots$ die Potenzsummen der Wurzeln dieser Gleichungen unmittelbar darstellen. Entwickelt man nun $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ in einen Kettenbruch mittelst des Gleichungssystems:

$$6)\quad \begin{cases} \varphi_0 = (a_1 x + b_1)\,\varphi_1 - \varphi_2, \\ \varphi_1 = (a_2 x + b_2)\,\varphi_2 - \varphi_3, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{m-1} = (a_m x + b_m)\,\varphi_m, \end{cases}$$

so sind $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_m$ die Functionen, die von Sturm zur Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln von $\varphi = 0$ zwischen gegebenen Grenzen benutzt worden sind. Um diese durch die Potenzsummen der Wurzeln darzustellen, bemerken wir, dass nach einem bekannten Satze von Euler:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = q_n \frac{\varphi_1}{\varphi} - p_n$$

ist; auf der rechten Seite fängt die Entwickelung erst mit $\frac{1}{x_{n+1}}$ an und geht nach absteigenden Potenzen fort und zwar hat man:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_0^{(n)} s_{n+k} + c_1^{(n)} s_{n+k+1} + \ldots + c_n^{(n)} s_{2n+k} \right\} \frac{1}{x^{n+k+1}}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sigma_k = \frac{\alpha_1^k}{x - \alpha_1} + \ldots + \frac{\alpha_m^k}{x - \alpha_m},$$

wo nun σ_k eine symmetrische Function der Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ ist, also rational in x und die Coefficienten in φ ausgedrückt werden kann, so findet man:

$$x^n \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = c_0^{(n)} \sigma_n + c_1^{(n)} \sigma_{n+1} + \ldots + c_n^{(n)} \sigma_{2n}.$$

Mit dem Systeme 2) vereinigt, folgt hieraus:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = \frac{\overline{\omega}_n}{x^n} \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{n-1} & \sigma_n \\ s_1 & \ldots & s_n & \sigma_{n+1} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & \ldots & s_{2n-1} & \sigma_{2n} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante lässt sich leicht in eine orthosymmetrische*) transformiren. Man findet nämlich:

$$\begin{vmatrix} \sigma_0 & \ldots & \sigma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n & \ldots & \sigma_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0 - \frac{\sigma_1}{x}, & \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{x}, & \ldots & \sigma_n \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ \sigma_n - \frac{\sigma_{n+1}}{x}, & \sigma_{n+1} - \frac{\sigma_{n+2}}{x}, & \ldots & \sigma_{2n} \end{vmatrix}$$

und, da $\sigma_k - \frac{\sigma_{k+1}}{x} = \frac{s_k}{x}$ ist:

$$= \begin{vmatrix} \frac{s_0}{x}, & \frac{s_1}{x}, & \ldots & \sigma_n \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ \frac{s_n}{x}, & \frac{s_{n+1}}{x}, & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^n} \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{n-1} & \sigma_n \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & \ldots & s_{2n-1} & \sigma_{2n} \end{vmatrix},$$

so dass man:

$$\varphi_{n+1} = {}^{\omega}\varphi \begin{vmatrix} \sigma_0 & \dots & \sigma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n & \dots & \sigma_{2n} \end{vmatrix}$$

erhält und dies ist das schöne Resultat der Umformung des Sylvester'schen Summenausdruckes der Sturm'schen Function in eine orthosymmetrische Determinante.

Um den Factor $\overline{\omega}_n$ zu bestimmen, gehen wir von dem Werthe $\overline{\omega}_1 = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{s_0^2}$ aus, der sehr leicht zu finden ist. Setzen wir dann:

$$\begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_n \\ \\ s_n & \dots & s_{2n} \end{vmatrix} = S_n,$$

so finden wir aus der obigen Gleichung 5):

$$\omega_{2n} = \left(\frac{S_0 S_2 \dots S_{2n-2}}{S_1 S_3 \dots S_{2n-1}}\right)^2$$

$$\overline{\omega}_{2n+1} = \left(\frac{S_1 S_3 \dots S_{2n-1}}{S_0 S_2 \dots S_{2n}}\right)^2,$$

was mit den bekannten Resultaten übereinstimmt.

Eine andere Anwendung der obigen Betrachtungen lässt sich auf die Auflösung des Gleichungssystems machen:

$$\begin{array}{lllll} a_1 & + a_2 & + \dots + a_m & = s_0, \\ a_1\alpha_1 & + a_2\alpha_2 & + \dots + a_m\alpha_m & = s_1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1\alpha_1^{2m-1} & + a_2\alpha^{2m-1} & + \dots + a_m\alpha_m^{2m-1} & = s_{2m-1}, \end{array}$$

die schon von Lagrange gegeben ist. Es sind hierin $s_1, s_2, \dots s_{2m}$ gegebene Grössen, $a_1, \dots a_m$ sowie $\alpha_1, \dots \alpha_m$ die unbekannten.

Wir gehen mit Scheibner**) von der Gleichung:

$$\frac{a_1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{a_m}{x-\alpha_m} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \dots$$

aus und entwickeln die rechte Seite derselben in einen Kettenbruch von der Form 6). Dann lässt sich q_n aus dem System 3) bis auf einen Factor bestimmen. Hat man auf diese Weise q_m gefunden, so braucht man nur die Wurzeln von $q_m = 0$ nach x zu ermitteln, um die m Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ zu erhalten. Um die Grössen $a_1, a_2, \dots a_m$ ebenfalls zu finden, bemerkt man, dass a_n der Coefficient von $\frac{1}{x-\alpha_n}$ in der Zerlegung von $\frac{p_m}{q_m}$ in Partialbrüche ist, sodass wir:

---

*) Vergl. meine Inauguraldissertation: Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten. Leipzig, 1861.

**) Siehe Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1856, pag. 65 ff.

$$a_n = \left(\frac{p_m}{q'_m}\right)_{x=\alpha_n}$$

setzen können; da nun

$$p_m q_{m-1} - q_m p_{m-1} = 1$$

ist, und für $x = \alpha_n$, q_m verschwindet, so ist $p_m q_{m-1} = 1$ und somit:

$$a_n = \left(\frac{1}{q_{m-1}\, q'_m}\right)_{x=\alpha_n}.$$

Es kommt also alles auf die Darstellung von q_n an. In dem speciell Falle:

$$\frac{s_{p-1}}{s_p} = \frac{\lambda + p + 1}{\mu + p + 1}$$

ergiebt sich die Auflösung des Gleichungssystems 3) mit Leichtigkeit:

$$c_p^{(n)} = (-1)^p c_0^{(n)} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ \ldots\ p} \frac{(\mu+n)\ldots(\mu+n+p-1)}{(\lambda+1)\ldots\ (\lambda+p)},$$

so dass man:

$$q_n = c_0^{(n)} F(-n, m+n, \lambda+1, x)$$

hat, wo F die Gauss'sche hypergeometrische Reihe bezeichnet. Es si nun die α die m Wurzeln der Gleichung:

$$F(-m, \mu+m, \lambda+1, x) = 0.$$

Man hat für $x = \alpha_n$

$$q_{m-1} = c_0^{(m-1)} F(1-m, \mu+m-1, \lambda+1, \alpha_n),$$

$$q'm = -c_0^{(m)} \frac{m(\mu+m)}{\lambda+1} F(1-m, \mu+m+1, \lambda+2, \alpha_n)$$

und es besteht zwischen diesen beiden hypergeometrischen Reihen und

$$F(-m, \mu+m, \lambda+1, \alpha_n) = 0$$

eine lineare Relation:

$$F(1-m, \mu+m-1, \lambda+1, \alpha_n) = \alpha_n(1-\alpha_n) \frac{(\mu+2m-1)(\mu+m)}{(\mu+m-\lambda-1)(\lambda+1)} \times$$
$$\times F(1-m, \mu+m+1, \lambda+2, \alpha_n),$$

so dass man erhält:

$$a_n = -\frac{m}{\alpha_n(1-\alpha_n)} \frac{\mu+m-\lambda-1}{\mu+2m-1} \frac{1}{c_0^{(m)} c_0^{(m-1)}} A_n^2,$$

wo

$$A_n = \frac{\lambda+1}{m(\mu+m)} \frac{1}{F(1-m, \mu+m+1, \lambda+2, \alpha_n)}$$

zu setzen ist. Um den Werth von $c_0^{(m)} c_0^{(m-1)}$ zu finden, setzen wir de gegebenen Werth von $c_p^{(n)}$ in 4) ein und erhalten daraus mittelst ein von J. F. Pfaff für die Summation einer speciellen hypergeometrische Reihe dritter Ordnung gegebenen Formel:

$$c_0^{(n)} c_0^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{1}{s_0} \frac{(\lambda+1)\quad\ldots(\lambda+n+1)}{(\lambda-n-\mu+1)\ldots(\lambda-\mu)} \frac{(\mu+n)\ldots\quad(\mu+1)}{1.2\ \ldots n(\mu+2n+1)}$$

Das schliessliche Resultat ist somit:

$$a_n = \frac{\mu s_0}{\alpha_n(1-\alpha_n)} \frac{1.2 \;..\; m}{\mu(\mu+1)\,..\,(\mu+m-1)} \frac{(\mu-\lambda)\,..\,(\mu-\lambda+m-1)}{(\lambda+1)\,..\quad(\lambda+m)} A_n^2,$$

übereinstimmend mit dem von Scheibner a. a. O. gegebenen.
(Aus den Sitzungsberichten d. königl. sächs. Gesellsch. d. W. 15. März 1862.)

XXIX. Integration partieller Differentialgleichungen der Form:

$$1)\qquad x^{\frac{n}{2}} \frac{d^n z}{d x^n} = \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Von Simon Spitzer. — Schon einmal (im dritten Bande dieser Zeitschrift Seite 114) haben wir Gleichungen obiger Form zum Gegenstande der Integration gewählt; wir kommen nun wieder zu obiger Gleichung zurück, weil es uns gelungen, das Integrale derselben in besserer Form zu geben.

Wir setzen nämlich, um die Gleichung 1) zu integriren:

$$2)\qquad z = e^{\alpha y} f(x)$$

unter α eine constante Zahl verstanden und erhalten durch Substitution des Ausdrucks 2) in die Gleichung 1)

$$\left[x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} - \alpha^n f(x)\right] e^{\alpha y} = 0$$

oder kürzer

$$3)\qquad x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} - \alpha^n f(x) = 0.$$

Diese Gleichung 3) ist eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung; um selbe zu integriren, ist es nothwendig, einen Unterschied zu machen zwischen geraden und ungeraden Werthen von n.

Sei erstens n ungerade. In diesem Falle setzen wir in 3)

$$4)\qquad f(x) = x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} \zeta}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}},$$

unter ζ eine Function von x verstanden, und erhalten sodann, beiderseits gleich durch $x^{\frac{n}{2}}$ dividirend:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} \zeta}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}}\right] - \alpha^n \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} \zeta}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} = 0$$

oder anders geschrieben:

$$5)\qquad \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}}\left\{\frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial x^{\frac{n-1}{2}}}\left[x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} \zeta}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}}\right] - \alpha^n \zeta\right\} = 0.$$

Führen wir sodann in diese Gleichung statt x eine neue Variable ξ mittelst der Substitution

$$\xi = \sqrt{x},$$

so erhalten wir, da nach Liouville (*Journal de l'école polytechnique*, *t cah.* 24, *pag.* 51)

$$\frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} = 2^n \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial x^{\frac{n-1}{2}}} \left[x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} \zeta}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} \right]$$

ist:

$$\frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} \left[\frac{1}{2^n} \frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} - \alpha^n \zeta \right] = 0$$

und dieser Gleichung genügt man für solche Werthe von ζ, welche au Gleichung

$$6) \qquad \frac{\partial^n \zeta}{\partial \xi^n} = (2\alpha)^n \zeta$$

hervorgehen. Aus 6) folgt nun:

$$\zeta = C_1 e^{2k_1 \alpha \xi} + C_2 e^{2k_2 \alpha \xi} + C_3 e^{2k_3 \alpha \xi} + \ldots + C_n e^{2k_n \alpha \xi}$$

oder kürzer

$$\zeta = \overset{\varrho = n}{\underset{\varrho = 1}{S}} [C_\varrho e^{2k_\varrho \alpha \xi}],$$

woselbst

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$$

willkürliche Constante und

$$K_1, K_2, K_3, \ldots K_n$$

die n Wurzeln der Gleichung $K^n = 1$ sind. Da nun $\xi = \sqrt{x}$ ist, so hat

$$\zeta = \overset{\varrho = n}{\underset{\varrho = 1}{S}} [C_\varrho e^{2k_\varrho \alpha \sqrt{x}}],$$

folglich ist

$$f(x) = x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} \overset{\varrho = n}{\underset{\varrho = 1}{S}} [C_\varrho e^{2k_\varrho \alpha \sqrt{x}}]$$

und

$$z = x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} \overset{\varrho = n}{\underset{\varrho = 1}{S}} [C_\varrho e^{\alpha(y + 2k_\varrho \sqrt{x})}].$$

Da aber α eine ganz willkürliche Zahl und die vorgelegte Gleic linear ist, so genügt auch der Gleichung 1) eine Summe beliebig v solcher Ausdrücke mit immer anderen und anderen Werthen von α; mit anderen Worten, es genügt der vorgelegten Gleichung 1) für unge Werthe von n folgender Ausdruck:

$$7)\qquad z = x^{\frac{n}{2}} \overset{\varrho=n}{\underset{\varrho=1}{S}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} \varphi_\varrho (y + 2k_\varrho \sqrt{x}),$$

der in entwickelter Gestalt die Form hat:

$$8)\quad z = x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial x^{\frac{n+1}{2}}} [\varphi_1(y+2k_1\sqrt{x}) + \varphi_2(y+2k_2\sqrt{x}) + \ldots + \varphi_n(y+2k_n\sqrt{x})],$$

woselbst

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \ldots \varphi_n$$

willkürliche Functionen bedeuten.

Betrachten wir nun den Fall, wo n gerade ist. Die Gleichung 3) gestattet in diesem Falle folgende Schreibweise:

$$\begin{aligned}9)\quad x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} - \alpha^n f(x) = {} & A_0 \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[x f''(x) + \left(1 - \frac{n}{2}\right) f'(x) - \alpha^2 k^2 f(x)\right] \\ & - A_1 \frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left[x f''(x) + \left(1 - \frac{n}{2}\right) f'(x) - \alpha^2 k^2 f(x)\right] \\ & + A_2 \frac{\partial^{n-4}}{\partial x^{n-4}}\left[x f''(x) + \left(1 - \frac{n}{2}\right) f'(x) - \alpha^2 k^2 f(x)\right] \\ & - \ldots = 0,\end{aligned}$$

woselbst

$$\begin{aligned} A_0 &= x^{\frac{n}{2}-1}, \\ A_1 &= \left(\frac{n}{2} - 1\right) x^{\frac{n}{2}-2}, \\ A_2 &= \alpha^2 k^2 x^{\frac{n}{2}-2} + \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right) x^{\frac{n}{2}-3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ferner $k^n = 1$ ist, und wo zwischen den auf einander folgenden Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots A_n$$

die Recursion besteht:

$$A_r x = \left(\frac{n}{2} - r\right) A_{r-1} + \alpha^2 k^2 A_{r-2}.$$

Man genügt nun der Gleichung 9) durch solche Werthe von $f(x)$, welche der Gleichung

$$10)\qquad x f''(x) + \left(1 - \frac{n}{2}\right) f'(x) - \alpha^2 k^2 f(x) = 0$$

entsprechen. Diese Gleichung ist aber von der zweiten Ordnung und kann auf folgende Weise integrirt werden:

Führt man für x eine neue Variable ξ in Rechnung ein, mittelst der Substitution

$$\xi = \sqrt{x},$$

so erhält man:

$$\xi \frac{d^2 f}{\partial \xi^2} + (1-n)\frac{\partial f}{\partial \xi} - 4\alpha^2 k^2 \xi f = 0$$

und setzt man hierein

$$f = \xi^n \zeta,$$

unter ζ eine neue Variable verstanden, so erhält man:

$$\xi \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} + (n+1)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - 4\alpha^2 k^2 \xi \zeta = 0,$$

welche Gleichung nach Laplace's Methode integrirt:

11) $$\zeta = \int_{-2\alpha k}^{+2\alpha k} e^{u\xi}(u^2 - 4\alpha^2 k^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du$$

liefert. Es ist leicht einzusehen, dass ζ auch so geschrieben werden k

12) $$\zeta = \int_{-1}^{+1} e^{2\alpha k u \xi}(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du,$$

folglich ist:

$$f = \xi^n \int_{-1}^{+1} e^{2\alpha k u \xi}(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du,$$

ferner

$$f(x) = x^{\frac{n}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{2\alpha k u \sqrt{x}}(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du$$

und

$$z = x^{\frac{n}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{\alpha(y + 2ku\sqrt{x})}(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du.$$

Da α eine ganz willkürliche Zahl und die vorgelegte Gleichung linea so kann man z auch so schreiben:

$$z = x^{\frac{n}{2}} \int_{-1}^{+1} \varphi(y + 2ku\sqrt{x})(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du$$

und hier bedeutet φ eine willkürliche Function.

XXX. Notizen über einige bestimmte Integrale. Von Dr. A. Enni

I. Für $0 < p < 1$ hat man bekanntlich:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2p-1}}{g + h u^2}\partial u = \frac{\pi}{2 \sin p\pi} \cdot \frac{1}{g^{1-p} h^p}.$$

Setzt man hierin:

$$g = 1 - 2z\cos\alpha + z^2, \quad h = 1 - 2z\cos\beta + z^2, \quad u = \tan g\,\psi,$$

so folgt:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin p\pi}\,\dfrac{1}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}}\,\dfrac{1}{(1-2z\cos\beta+z^2)^p} \\ \displaystyle =2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tang\,\psi)^{2p-1}}{1-2z\,(\cos\alpha\cos^2\psi+\cos\beta\sin^2\psi)+z^2}\,\partial\psi. \end{cases}$$

Es werde angenommen, dass die Winkel α und β von einander verschieden sind und $\beta>\alpha$. Unter dieser Voraussetzung mache man im Integral der Gleichung 1) die Substitution

$$2)\qquad \tang\,\psi=\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\varphi}{\cos\varphi-\cos\beta}}.$$

Die rechte Seite der Gleichung 1) wird dann:

$$\int\limits_\alpha^\beta\frac{\partial\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\frac{\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}.$$

Für den Fall, dass $-1<z<1$ ist:

$$\frac{\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}=\sum_{n=1}^{n=\infty}z^{n-1}\sin n\varphi.$$

Mittelst dieser Entwickelung und der Substitution 2) nimmt die Gleichung 1) folgende Form an:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin p\pi}\,\dfrac{1}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}}\,\dfrac{1}{(1-2z\cos\beta+z^2)^p} \\ \displaystyle \sum_{n=1}^{n=\infty}z^{n-1}\int\limits_\alpha^\beta\frac{\sin n\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi. \end{cases}$$

Setzt man hierin $-z$ statt z, so folgt:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin p\pi}\,\dfrac{1}{(1+2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}}\,\dfrac{1}{(1+2z\cos\beta+z^2)^p} \\ \displaystyle \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1}\int\limits_\alpha^\beta\frac{\sin n\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi. \end{cases}$$

Bedeutet q eine positive Quantität, kleiner wie die Einheit, so giebt die Gleichung 3):

$$5)\quad \begin{cases} \displaystyle \frac{\pi}{\sin p\pi}\int\limits_0^1\frac{z^q+z^{-q}}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}\,(1-2z\cos\beta+z^2)^p}\,\partial z \\ \displaystyle \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^n}{n^2-q^2}\int\limits_\alpha^\beta\frac{\sin n\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1+p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi. \end{cases}$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n}{n^2-q^2} \sin n\varphi = \pi \frac{\sin q(\pi-\varphi)}{\sin q\pi}$$

wird die Gleichung 5)

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin q\pi}{\sin p\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{z^q+z^{-q}}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1-2z\cos\beta+z^2)^p}\,\partial z \\[2ex] = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin q(\pi-\varphi)}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi. \end{cases}$$

Auf ganz analoge Weise folgt aus 4)

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin q\pi}{\sin p\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{z^q+z^{-q}}{(1+2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1+2z\cos\beta+z^2)^p}\,\partial z \\[2ex] = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin q\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi. \end{cases}$$

In der Gleichung 6) muss $\alpha > 0$ sein, während in der Gleic $\alpha = 0$ sein kann.

Differentiirt man die Gleichungen 6) und 7) nach q, setzt n Differentiation $q=0$, so folgt:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sin p\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial z}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1-2z\cos\beta+z^2)^p} \\[2ex] = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\pi-\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi, \\[2ex] \dfrac{2\pi}{\sin p\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial z}{(1+2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1+2z\cos\beta+z^2)^p} \\[2ex] = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi, \end{cases}$$

und durch Addition:

$$\frac{2}{\sin p\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial z}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1-2z\cos\beta+z^2)^p}$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\partial\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p}.$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch leicht direct aus 3) und 4) ableiten. Für $p=\frac{1}{2}$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ geht die Gleichung 8) über in:

$$2\pi\int_0^1 \frac{\partial z}{(1+z)\sqrt{(1+z^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, die rechte Seite lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi\,.\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\log\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi-\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{1}{2}\varphi+\sqrt{\cos\varphi}}\,\partial\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\partial\varphi\,\log\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi+\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{1}{2}\varphi-\sqrt{\cos\varphi}},$$

folglich:

$$\pi\,.\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi+\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{1}{2}\varphi-\sqrt{\cos\varphi}}\,\partial\varphi.$$

Differentiirt man die Gleichungen 6) und 7) nach q, setzt nach der Differentiation $q=\frac{1}{2}$, so folgt:

$$\int_0^1\frac{(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}})\log z}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1-2z\cos\beta+z^2)^p}\,\partial z$$

$$=\sin p\pi\,.\int_\alpha^\beta\frac{(\mu-\varphi)\sin\frac{1}{2}\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p},$$

$$\int_0^1\frac{(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}})\log z}{(1+2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}(1+2z\cos\beta+z^2)_p}\,\partial z$$

$$=\sin p\pi\,.\int_\alpha^\beta\frac{\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi.$$

Für $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $p=\frac{1}{2}$ giebt die letzte Gleichung:

$$\int_0^1\frac{1-z}{1+z}\,\frac{\log\frac{1}{z}}{\sqrt{(1+z^2)}}\,\frac{\partial z}{\sqrt{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{1-\sqrt{\cos\varphi}}{1+\sqrt{\cos\varphi}}\right),$$

oder wenn man rechts $\log\frac{1}{z}=u$ setzt und links partiell integrirt:

$$\int_0^\infty\frac{1-e^{-u}}{1+u^{-u}}\,\frac{u e^{-\frac{1}{2}u}}{\sqrt{(1+e^{-2u})}}\,\partial u=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\frac{1+\sqrt{\cos\varphi}}{1-\sqrt{\cos\varphi}}\,.\,\partial\varphi.$$

Sei $q < 1$, dann ist:

$$\int_0^1 z^{n+q-1}(1-z)^{-q}\,\partial z = \frac{\pi}{\sin q\pi}\;\frac{q\,.\,(q+1)\ldots(q+n-1)}{1\,.\,2\ldots n}.$$

Mittelst dieser Gleichung folgt aus 3):

$$\frac{\sin q\pi}{\sin p\pi}\int_0^1 \frac{z^q(1-z)^{-q}}{(1-2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}\,(1-2z\cos\beta+z^2)^p}\,\partial z$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{\sin\frac{1}{2}q(\pi-\varphi)}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\Big\{q\sin\varphi+\frac{q(1+q)}{1\,.\,2}\sin 2\varphi$$

$$+\frac{q(1+q)(2+q)}{1\,.\,2\,.\,3}+\sin 3\varphi+\ldots\Big\}$$

$$=\frac{1}{2^q}\int_\alpha^\beta \frac{\sin\frac{1}{2}q(\pi-\varphi)}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\;\frac{\partial\varphi}{(\sin\frac{1}{2}\varphi)^q}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man aus 4):

$$\frac{\sin q\pi}{\sin p\pi}\int_0^1 \frac{z^q(1-z)^{-q}}{(1+2z\cos\alpha+z^2)^{1-p}\,(1+2z\cos\beta+z^2)^p}\,\partial z$$

$$=\frac{1}{2^q}\int_\alpha^\beta \frac{\sin\frac{1}{2}q\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\;\frac{\partial\varphi}{(\cos\frac{1}{2}\varphi)^q}.$$

Setzt man in der Gleichung 4) $z=e^{-u}$, multiplicirt diese Gleich auf beiden Seiten mit $e^{-u}\cos au\,\partial u$ und integrirt nach u zwischen Grenzen 0 und ∞, so folgt:

$$\frac{1}{\sin p\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u}\cos au\,du}{(1+2z^{-u}\cos\alpha+e^{-2u})^{1-p}\,(1+2z^{-u}\cos\beta+e^{-2u})}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2n}{n^2+a^2}\int_\alpha^\beta \frac{\sin n\varphi}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi$$

$$=\frac{1}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\int_\alpha^\beta \frac{e^{a\varphi}-e^{-a\varphi}}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}\,(\cos\varphi-\cos\beta)^p}\,\partial\varphi.$$

Statt der vorstehenden Gleichung lassen sich ohne Schwierigkeit gemeinere Relationen zwischen bestimmten Integralen aufstellen, denen die bemerkte Gleichung ein besonderer Fall ist, die indessen we ihrer Complication hier nicht weiter ausgeführt werden sollen.

II. Ist u eine beliebige reelle Quantität und $0 \leqq z \leqq 1$, so hat man bekanntlich:

$$\pi \frac{(e^{u\pi}+e^{-u\pi})(e^{u\pi}-e^{-u\pi})}{e^{2u\pi}-2\cos 2\pi z+e^{-2u\pi}} = \frac{u}{u^2+z^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{u}{u^2+(n+z)^2}+\frac{u}{u^2+(n-z^2)}\right\},$$

$$2\pi \frac{(e^{u\pi}-e^{-u\pi})\cos \pi z}{e^{2u\pi}-2 cs 2\pi z+e^{-2u\pi})} = \frac{u}{u^2+z^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\left\{\frac{u}{u^2+(n+z)^2}+\frac{u}{u^2+(n-z)^2}\right\}$$

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2u\pi}}{1-2e^{-u\pi}\cos \pi z+e^{-2u\pi}} \\ &=\frac{u}{u^2+z^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{u}{u^2+(2n+z)^2}+\frac{u}{u^2+(2n+z)^2}\right\},\end{aligned}\right.$$

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2u\pi}}{1+2e^{-u\pi}\cos \pi z+e^{-2u\pi}} \\ &=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{u}{u^2+(2n-1+z)^2}+\frac{u}{u^2+(2n-1-z)^2}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man in die Gleichung 2) $\frac{u}{2^m}$, $\frac{z}{2^m}$ statt u, z, so geht dieselbe über in:

$$\frac{\pi}{2^{m+1}}\,\frac{1-e^{-\frac{u\pi}{2^{m-1}}}}{1+2e^{-\frac{u\pi}{2^m}}\cos\frac{\pi z}{2^m}+e^{-\frac{u\pi}{2^{m-1}}}}$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{u}{u^2+[(2n-1)2^m+z]^2}+\frac{u}{u^2+[(2n-1)2^m-z]^2}\right\}.$$

Legt man m alle positiven, ganzzahligen Werthe bei, so durchläuft $(2n-1)2^m$, für $n=1,2,3\ldots$, alle geraden Zahlen; aus der vorstehenden Gleichung folgt also:

$$\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{2^m}\,\frac{1-e^{-\frac{u\pi}{2^{m-1}}}}{1+2e^{-\frac{u\pi}{2^m}}\cos\frac{\pi z}{2^m}+e^{-\frac{u\pi}{2^{m-1}}}}$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{u}{u^2+(2n+z)^2}+\frac{u}{u^2+(2n-z)^2}\right\}.$$

Diese Gleichung von 1) abgezogen giebt:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-2u\pi}}{1-2e^{-u\pi}\cos \pi z+e^{-2u\pi}}-\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{2^m}\,\frac{1-e^{-\frac{u\pi}{2^{m-1}}}}{1+2e^{-\frac{u\pi}{2^m}}\cos\frac{\pi z}{2^m}+e^{-\frac{u\pi}{2^{m-1}}}}$$

$$=\frac{u}{u^2+z^2}$$

oder wenn man $\frac{u}{\pi}$, $\frac{z}{\pi}$ statt u, z setzt und links

$$0=\tfrac{1}{2}\left(1-\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{2^m}\right)$$

subtrahirt:

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{e^{-u}\cos z - e^{-2u}}{1-2e^{-u}\cos z+e^{-2u}} + \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{2^m}\,\frac{e^{-\frac{u}{2^m}}\cos\frac{z}{2^m}+e^{-\frac{u}{2^{m-1}}}}{1+2e^{-\frac{u}{2^m}}\cos\frac{z}{2^m}+e^{-\frac{u}{2^{m-1}}}}\\ &\qquad\qquad = \frac{u}{u^2+z^2}. \end{aligned}\right.$$

Der Term unter dem Summenzeichen auf der linken Seite kann n

Potenzen von $e^{-\varepsilon u}$ entwickelt werden, wenn $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ gesetzt wird, :

dürfen gleiche Potenzen von e^{-u} nicht mit einander vereinigt werden, der Ausdruck:

$$\varepsilon(e^{-\varepsilon u}\cos\varepsilon z - e^{-2\varepsilon u}\cos 2\varepsilon z + e^{-3\varepsilon u}\cos 3\varepsilon z \ldots)$$

Null zur Grenze hat für $\varepsilon = 0$, aber nur dann, wenn in der eingeklamm ten Reihe die positivon Terme nicht von den negativen getrennt werd

Mittelst der Gleichung 3) findet man, wegen

$$\int_0^\infty \frac{u\cos u}{u^2+z^2}\partial u = \int_0^\infty \frac{u\cos zu}{1+u^2}\partial u$$

$$\int_0^\infty \frac{u\cos zu}{1+u^2}\partial u = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n\cos nz}{n^2+1} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+2^2}\cos\tfrac{1}{2}nz$$

$$+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+2^4}\cos\tfrac{1}{4}nz + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+2^6}\cos\tfrac{1}{8}nz$$

$$+\ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit

$$\frac{a}{z^2+a^2}\partial z$$

und integrirt nach z zwischen den Grenzen 0 und ∞, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{ue^{-au}}{1+u^2}\partial u = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{ne^{-na}}{n^2+1} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+2^2}e^{-\frac{1}{2}na}$$

$$+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+2^4}e^{-\frac{1}{4}na}+\ldots$$

Setzt man in 3) $z = a$, multiplicirt auf beiden Seiten mit $e^{-u}\partial u$ u integrirt nach u zwischen den Grenzen 0 und ∞, so erhält man für (vorhergehende Integral folgende Entwickelung:

$$\int_0^\infty \frac{ue^{-u}}{u^2+a^2}\partial u = \int_0^\infty \frac{ue^{-au}}{1+u^2}\partial u = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos na}{n+1} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{1}{2}na}{n+2^2}$$

$$+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{1}{4}na}{n+2^4} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{1}{8}na}{n+2^6}+\ldots$$

Die Gleichung 3) giebt für $z=0$

$$4)\quad \frac{1}{u}=\frac{1}{e^u-1}+\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{2}u}+1}+\tfrac{1}{4}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{4}u}+1}+\tfrac{1}{8}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{8}u}+1}+\ldots$$

oder $1+u$ statt u gesetzt:

$$5)\quad \frac{1}{1+u}=\frac{1}{e^{1+u}-1}+\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{e^{\frac{1+u}{2}}+1}+\ldots$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{1}{1+u}$ in das Integral:

$$\int\limits_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\,\partial u=\Pi(z-1)\,\Pi(-z)=\Gamma(z)\,\Gamma(1-z),$$

so folgt nach einfacher Reduction:

$$\Pi(-z)=\Gamma(1-z)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-n}}{n^z}+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{-\frac{1}{2}n}}{n^z\,2^{1-z}}$$
$$+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{-\frac{1}{4}n}}{n^z\,2^{2(1-z)}}+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{-\frac{1}{8}n}}{n^z\,2^{3(1-z)}}+\ldots$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $-\partial z$ und integrirt nach z zwischen den Grenzen $-x$ und 0, so folgt:

$$\int\limits_0^x \Pi(z)\,\partial z=\int\limits_0^x \Gamma(1+z)\,\partial z=\Sigma\,\frac{n-1}{\log n}\,\frac{e^{-n}}{n^x}$$
$$+\Sigma(-1)^{n-1}\,\tfrac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{n}{2}\right)^{-x}}{\log\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}n}+\Sigma(-1)^{n-1}\,\tfrac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{n}{4}\right)^{-x}}{\log\frac{n}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}n}$$
$$+\ldots$$

Die Quantität x wird kleiner wie die Einheit vorausgesetzt. Setzt man in 4) $z+u$ statt u, so folgt:

$$\frac{1}{z+u}=\frac{1}{e^{z+u}-1}+\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{e^{\frac{u+z}{2}}+1}+\ldots$$

Mittelst dieser Gleichung und 4) lassen sich die Integrale:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-zu}}{1+u}\,\partial u=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}}{z+u}\,\partial u,\quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin zu}{1+u}\,\partial u=\int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{z+u}\,\partial u,$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos zu}{1+u}\,\partial u=\int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{z+u}\,\partial u,$$

auf doppelte Weise entwickeln. So z. B. findet man:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin zu}{1+u}\,\partial u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z e^{-n}}{n^2+z^2} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{2ze^{-\frac{1}{2}n}}{n^2+(2z)^2}$$

$$+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{4ze^{-\frac{1}{4}n}}{n^2+(4z)^2} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{8ze^{-\frac{1}{8}n}}{n^2+(8z)^2} + \dots$$

$$= \Sigma\frac{e^{-nz}}{n^2+1} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{2}{n^2+2^2}\,e^{-\frac{1}{2}nz}$$

$$+\Sigma(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2+2^4}\,e^{-\frac{1}{4}nz} + \Sigma(-1)^{n-1}\frac{8}{n^2+2^6}\,e^{-\frac{1}{8}nz} + \dots$$

XXXI. Ueber die elliptische Kegelfläche. Von Dr. A. ENNEPER. — Es seien im Raume zwei Ellipsen gegeben, den Durchschnitt ihrer Ebenen nehme man zur Achse der x, die Achse der y und z mögen in den Ebenen der Ellipsen liegen und senkrecht auf der x-Achse stehen, so dass jede der Curven in ihrer Ebene auf ein orthogonales System bezogen ist. Die Gleichungen der beiden Ellipsen seien:

1) $\quad ax^2+a'y^2+2bxy+2cx+2c'y+e=0, \quad z=0,$

2) $\quad \alpha x^2+\alpha' z^2+2\beta xz+2\gamma x+2\gamma' z+\varepsilon=0, \quad y=0,$

Ist (x_1, y_1) der Mittelpunkt der Ellipse 1), so hat man:

$$x_1=\frac{bc'-a'c}{aa'-b^2},\quad y_1=\frac{bc-ac'}{aa'-b^2}.$$

Legt man durch den Mittelpunkt der Ellipse 1) einen Diameter parallel der x-Achse, bezeichnet durch ∂ seine halbe Länge, so hat man für ∂ die Gleichung:

$$\partial^2=\frac{1}{a}\cdot\frac{r}{aa'-b^2},$$

wo

3) $$-r=\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & a' & c'\\ c & c' & e\end{vmatrix}.$$

Für den Inhalt f der Ellipse hat man die Gleichung

$$f^2=\pi^2\frac{r^2}{(aa'-b^2)^3},$$

wo π wie gewöhnlich das Verhältniss des Diameters zur Peripherie eines Kreises bezeichnet. Für die Ellipse 2) sollen δ, ϱ und φ analoge Bedeutungen haben, wie d, r und f für die Curve 1). Es ist dann:

$$\delta^2=\frac{1}{\alpha}\,\frac{\varrho}{\alpha\alpha'-\beta^2},\quad \varphi^2=\pi^2\frac{\varrho^2}{(\alpha\alpha'-\beta^2)^3}$$

4) $$-\varrho=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \alpha' & \gamma'\\ \gamma & \gamma' & \varepsilon\end{vmatrix}.$$

Aus den obigen Gleichungen leitet man leicht die folgende ab:

$$5)\qquad \frac{f^2}{\varphi^2} = \frac{r^2}{\varrho^2}\,\frac{(\alpha\alpha' - \beta^2)^3}{(a a' - b^2)^3} = \frac{\varrho\, a^3 d^6}{r\,\alpha^3\delta^6}.$$

Nimmt man die Ellipse 1) zur Directrix einer Kegelfläche, deren Spitze im Punkt (u, v, w) liegt, so schneidet diese Kegelfläche die Ebene der (x, z) in der Curve:

$$a x^2 + 2 c x + e + (a u^2 + 2 b u v + a' v^2 + 2 c u + 2 c' v + e)\frac{z^2}{w^2}$$

$$- 2(a u + b v + c)\frac{x z}{w} - 2(c u + c' v + e)\frac{z}{w} = 0.$$

Soll diese Curve mit der Ellipse 2) identisch sein, so hat man folgende Gleichungen, in denen λ eine Unbestimmte bedeutet:

$$a = \lambda\alpha,\quad c = \lambda\gamma,\quad e = \lambda\varepsilon,$$

$$6)\qquad a u + b v + c = -\lambda\beta w,\quad c u + c' v + e = -\lambda\gamma' w,$$

$$a u^2 + 2 b u v + a' v^2 + 2 c u + 2 c' v + e = \lambda\alpha' w^2.$$

Bildet man das Product

$$-r v = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a' & c' \\ c & c' & e \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & v & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt

$$-r v = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a u + b v + c & b u + a' v + c' & c u + c' v + e \\ c' & c' & e \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung mit

$$v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & v & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, giebt, wegen der Gleichungen 6):

$$-r v^2 = \begin{vmatrix} \lambda\alpha & -\lambda\beta w & \lambda\gamma \\ -\lambda\beta w & \lambda\alpha' w^2 & -\lambda\gamma' w \\ \lambda\gamma & -\lambda'\gamma w & \lambda\varepsilon \end{vmatrix},$$

d. i. nach 4):

$$r v^2 = \lambda^3\varrho\,.\,w^2.$$

Diese Gleichung giebt wegen $a = \lambda\alpha$, $r\alpha^3 v^2 = \varrho\, a^3 w^2$. Eliminirt man $\frac{r}{\varrho}$ zwischen dieser Gleichung und 5), so folgt:

$$\left(\frac{w f}{v\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d}{\delta}\right)^6 \quad\text{oder}\quad \frac{w\,.\,f}{v\,.\,\varphi} = \frac{d^3}{\delta^3}.$$

Die Coordinaten w, v sind den Perpendikeln proportional gefällt vom Punkte (u, v, w) aus auf die Ebenen (x, y) und (x, z). Hieraus folgt:

Nimmt man die Schnittcurven zweier Ebenen E und E' mit einer elliptischen Kegelfläche als Basen zweier Cylinder, deren Höhen die Entfernungen ihrer Basen von der Spitze des Kegels sind, so verhalten sich diese Cylinder ihrem Inhalte nach wie die Cuben der D meter ihrer Basen, welche dem Durchschnitt der Ebenen E und parallel sind.

Für den Fall, dass die Ebenen E und E' parallel sind, geht das stehende Verhältniss der Diameter über in das Verhältniss zweier belie parallelen Diameter der Basen. Nimmt man drei Ebenen E, E', E'', erhält man ein Verhältniss zwischen den Diametern der Schnittcur welche den Durchschnitten der Ebenen E, E', E'' parallel sind.

In den Gleichungen 1) und 2) ist der Anfangspunkt der Coordin nicht fixirt. Die Gleichungen der Polaren für diesen Punkt in Bezieh auf die Curven 1) und 2) sind:

$$cx + c'y + e = 0, \quad z = 0;$$
$$\gamma x + \gamma' z + \varepsilon = 0, \quad y = 0.$$

Diese Geraden treffen die x-Achse in demselben Punkte $x = -$

$= -\frac{\varepsilon}{\gamma}$, hieraus folgt:

Sollen zwei Kegelschnitte derselben Kegelfläche angehören, müssen die Polaren für einen beliebigen Punkt der Schnittlinie i Ebenen diese Linie in ein und demselben Punkte treffen.

Der Pol der x-Achse und der Mittelpunkt der Curve 1) liegen der Geraden $ax + by + c = 0$, die beiden entsprechenden Punkte Curve 2) liegen auf der Geraden $\alpha x + \beta z + \varepsilon = 0$. Nach 6) schnei diese Geraden die x-Achse in demselben Punkte. Hieraus folgt:

Gehören zwei Kegelschnitte derselben Kegelfläche an, so lie ihre Mittelpunkte und die Pole der Schnittlinie ihrer Ebenen in e Ebene.

Anmerkung. Für die elliptische Cylinderfläche findet man leicht, dass Diameter zweier Ellipsen, welche der Schnittlinie ihrer Ebenen parallel sind, g sind, wenn die Ellipsen derselben Cylinderfläche angehören.

XXXII. Ueber das bestimmte Integral $\int\limits_0^\infty \frac{1 - \cos^m x}{x^2}\, dx$. Von

J. Stefan. — Ich betrachte nur den Fall eines ganzen positiven m. m eine gerade Zahl, also $m = 2n$, so benutze ich die Formel

$$2^{2n-1} \cos^{2n} x = \cos 2nx + \binom{2n}{1} \cos(2n-2)x + \binom{2n}{2} \cos(2n-4)x + \\ + \binom{2n}{n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

Setzt man darin $x=0$, so folgt:

$$2^{2n-1} = 1 + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{n-1} + \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die vorhergehende, multiplicirt dann mit $\frac{dx}{x^2}$ und integrirt von 0 bis ∞, so folgt:

$$2^{2n-1}\int\limits_0^\infty \frac{1-cs^{2n}x}{x^2}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{1-cs\,2nx}{x^2}\,dx + \binom{2n}{1}\int\limits_0^\infty \frac{1-cs\,(2n-2)\,x}{x^2}\,dx + \ldots$$

$$+\binom{2n}{n-1}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx.$$

Nun findet man leicht

$$1)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = a\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{a\pi}{2}$$

und diese Formel auf die in der voranstehenden Gleichung enthaltenen Integrale anwendend erhält man

$$2^{2n-1}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos^{2n}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[2n + \binom{2n}{1}(2n-2) + \binom{2n}{2}(2n-4) + \ldots\right.$$

$$\left.+\binom{2n}{n-1}2\right].$$

Bezeichnet man die Summe der in den Klammern befindlichen Reihe mit S_{2n}, so ist

$$2)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos^{2n}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2^{2n}}\,S_{2n}.$$

Für den Fall eines ungeraden m setze ich $m = 2n-1$ und benutze die Formel

$$2^{2n-2}\cos^{2n-1}x = \cos(2n-1)x + \binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)x + \ldots$$

$$+\binom{2n-1}{n-1}\cos x.$$

Setzt man darin $x=0$, so folgt:

$$2^{2n-2} = 1 + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} + \ldots + \binom{2n-1}{n-1}.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die voranstehende, multiplicirt wieder mit $\frac{dx}{x^2}$ und integrirt von 0 bis ∞, so erhält man, die Formel 1) anwendend,

$$2^{2n-2}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos^{2n-1}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[2n-1 + \binom{2n-1}{1}(2n-3) + \ldots\right.$$

$$\left.+\binom{2n-1}{n-1}\right].$$

Bezeichnet man die Summe der in den Klammern befindlichen Reih
S_{2n-1}, so ist

$$3)\qquad \int_0^\infty \frac{1-\cos^{2n-1}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\,S_{2n-1}.$$

Es handelt sich noch darum, die beiden Summen S_{2n} und S_{2n-1} a
werthen. Eine Relation zwischen den beiden lässt sich auf folgende W
gewinnen. Aus der bekannten Gleichung

$$\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k}$$

folgen:

$$\binom{2n}{0} = \binom{2n-1}{0}$$
$$\binom{2n}{1} = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1}$$
$$\binom{2n}{2} = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{2n}{n-1} = \binom{2n-1}{n-2} = \binom{2n-1}{n-1}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $2n$, $2n-2$, ...
und vereinigt die Producte durch Addition, so ist die resultirende Gleic

$$4)\qquad S_{2n} = 2\,S_{2n-1}.$$

Aus dieser Relation folgt das merkwürdige Resultat

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos^{2n-1}x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos^{2n}x}{x^2}\,dx$$

oder

$$5)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos^{2n-1}x - \cos^{2n}x}{x^2}\,dx = 0.$$

Um die Werthe der beiden Summen zu finden, setze ich

$$\binom{2n}{k}(2n-2k) = \binom{2n}{k}(2n-k) - \binom{2n}{k}k = \binom{2n}{k+1}(k+1) - \binom{2n}{k}$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\binom{2n}{0}2n = \binom{2n}{1}1$$
$$\binom{2n}{1}(2n-2) = \binom{2n}{2}2 - \binom{2n}{1}1$$
$$\binom{2n}{2}(2n-4) = \binom{2n}{3}3 - \binom{2n}{2}2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{2n}{n-1}2 = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}(n-1).$$

Vereinigt man diese Gleichungen durch Addition, so folgt:

$$S_{2n} = n\binom{2n}{n}$$

und somit das Endergebniss

$$\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos^{2n-1}x}{x^2}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos^{2n}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2^{2n}}\,n\binom{2n}{n}.$$

XXXIII. Ueber die Vereinigungsweite der von einem Hohlspiegel reflectirten Strahlen. Von Dr. J. Stefan. — In den Lehrbüchern der Physik wird gewöhnlich nur eine Näherungsformel für die Vereinigungsweite der von einem Hohlspiegel reflectirten Strahlen abgleitet und zwar so, dass man sich schon während der Ableitung Vernachlässigungen erlaubt, welche die an die strengen Methoden der Geometrie gewöhnten Schüler wenig befriedigen. Deshalb theile ich hier die folgende sehr einfache Ableitung der strengen Formel mit.

Sei PQ (s. Fig. 1, Taf. II) der Durchschnitt eines sphärischen Concavspiegels, O der Krümmungsmittelpunkt, SM die Richtung des einfallenden, MB die Richtung des reflectirten Strahls, so handelt es sich darum, die Lage von B gegen A oder O zu ermitteln.

Verlängert man MO bis O', so dass $SO = SO'$ wird, so sind die beiden Dreiecke MSO' und MBO ähnlich und man hat

$$OB : OM = SO' : O'M.$$

Setzt man $SO = d$, $OB = \delta$, $OM = r$ und den Winkel $MOA = \varphi$, so ist

$$O'M = OM + OO' = r + 2d\cos\varphi$$

und aus obiger Proportion

$$\delta = \frac{rd}{r + 2d\cos\varphi},$$

woraus man $\varphi = 0$ setzend die bekannte Näherungsformel erhält.

Eine ähnliche Construction lässt sich auch beim Convexspiegel zur Ableitung der Formel für die Bildweite verwenden, man hat daselbst den Radius zum Einfallspunkte nur über diesen und nicht über den Krümmungsmittelpunkt hinaus zu verlängern.

XXXIV. Ueber die Formeln für barometrische Höhenmessungen. Von C. M. Guldberg, Lehrer an der königlichen Militärakademie in Christiania. — Herr G. S. Ohm hat in seinem Werke: „Grundzüge der Physik" und auch in den „Astronomischen Nachrichten" eine Formel für Barometermessungen gegeben, die von der gewöhnlichen Laplace'schen

Formel verschieden ist. Im dritten Hefte der vorliegenden Zeitschrift hat Professor **Rogg** dieselbe Formel aufgenommen und als die genauere betrachtet. Dieses ist aber nicht der Fall, und wie ich im Folgenden zeigen werde, ist die alte Laplace'sche Formel die richtige. Bemerkt man, dass die Formel für Barometermessungen von einer Differentialgleichung abgeleitet ist, die die Gleichgewichtsbedingungen der Atmosphäre ausdrückt, so sieht man ein, dass es ganz gleichgiltig ist, welches Element man betrachtet, um diese Gleichung darzustellen, wenn man nur auf alle wirkenden Kräfte Rücksicht nimmt.

Laplace hat ein Cylinderelement betrachtet; zwar hat er die Schwerkräfte als parallele angesehen, dies ist aber ohne Einfluss auf das Endresultat, wie es leicht zu zeigen ist. **Ohm** hat ein Kegelelement betrachtet, hat aber die Seitendrucke, die bei einem solchen Element in Betracht kommen müssen, vernachlässigt.

An der Erdoberfläche in einem beliebigen Punkte M_0 (Fig. 2, Taf. II), dessen Breitegrad $= h$ ist, denkt man sich eine Verticale OM_0 gelegen und auf dieser Verticalen hat man in zwei Punkte M_1 und M_2 die Barometerhöhen gemessen. Die Temperatur der Luft in M_1 und M_2 sei t_1 und t_2. Der mittlere Erdradius sei R; die Intensität der Schwere in M_0 sei $g = g_0 (1 - \beta \cos 2h)$, wo g_0 die Intensität der Schwere bei 45° Breite ist und β eine constante Grösse $= 0{,}002588$.

Nun denkt man sich statt der Erde eine Kugel, deren Radius $= R$ ist; diese Kugel sei von einem Gas umgeben, dessen Temperatur überall constant ist $= t = \frac{t_1 + t_2}{2}$; endlich sei die Intensität der Schwere an dieser Kugel überall dieselbe $= g = g_0 (1 - \beta \cos 2h)$ und nach dem Mittelpunkte dieser Kugel gerichtet.

Ich erlaube mir hier die Bemerkung zu machen, dass man in den Lehrbüchern nicht ausdrücklich auf die Nothwendigkeit aufmerksam gemacht wird, dass auf dieser idealen Kugel die Intensität der Schwere überall gleich ist und zwar $= g_0 (1 - \beta_1 \cos 2h)$. Man kann nämlich nicht annehmen, dass auf dieser Kugel die Intensität der Schwere veränderlich ist und dem Gesetze $g = g_0 (1 - \beta \cos 2h)$ folgt, wo h den Breitegrad an dieser Kugel bedeutet.

Denn in diesem Falle könnten die Schwerkräfte nicht parallel, auch nicht nach dem Mittelpunkte der Kugel gerichtet sein. Die Einführung der Veränderlichkeit der Intensität der Schwere in die Barometerformel beruht also auf einem falschen Princip. Man berücksichtigt, dass die Centrifugalkraft und die ellipsoidische Form der Erde die Intensität der Schwere verändert, aber nicht, dass die Richtung der Schwere auch verändert wird. Wenn man nur die Centrifugalkraft berücksichtigt und also eine Kugel betrachtet, die um eine feste Achse rotirt, ist es leicht, e wahre Gleichgewichtsbedingung aufzustellen, und man findet, wenn p

der Luftdruck ist, $\frac{dp}{p} = M\partial r + N\partial h$, wo $\frac{dM}{dh} = \frac{dN}{dr}$ ist, welche Gleichung leicht zu integriren ist; es hat aber kein praktisches Interesse, weil die Wirkung der Ellipsoidicität von demselben Grad ist und folglich auch berücksichtigt werden muss.

Nach dieser Digression kehren wir zu unserem Problem zurück und betrachten ein Kegelelement begrenzt von zwei concentrischen Kegelflächen, dessen Mittelpunkt der der gegebenen Kugel ist und dessen Achse die Verticale durch M_0 ist (Fig. 3, Taf. II).

Auf diesem Kegelelement wirken nun folgende Kräfte: Auf die obere Fläche BB', deren Radius $OB = r_1$ ist, wirkt normal ein Druck p_1 per Flächeneinheit; auf die untere Fläche AA' mit Radius $OA = r_0$ auch ein normaler Druck $= p_0$. Auf die Seitenfläche $ABB'A'$ wirkt normal ein Druck, der variabel ist und mit p bezeichnet wird. Endlich wird das ganze Element von der Schwere angezogen, deren Richtung nach O geht. Nun seien $\angle XOA = \angle XOB = \varphi_0$, $\angle XOM = \varphi$; $OG = OM = r$. Der Druck in dem Punkte M_0 sei $= P$ und q gleich dem Gewicht einer Kubikeinheit Luft in M_0. Zerlegen wir jetzt alle wirkenden Kräfte nach zwei Richtungen, nämlich parallel OX und senkrecht derselben; alle die letzteren Componenten heben sich auf, weil Alles rings um OX symmetrisch ist. Wir haben folglich nur die Componenten längs OX zu betrachten. Betrachten wir ein kleines Element in C', dessen Abstand von $OX = HC' = r_1 \sin\varphi$ ist, und denken wir uns eine feste Ebene durch OX und sei ψ der Winkel zwischen dieser Ebene und der Geraden HC', so ist die Grösse dieses Flächenelementes $= r_1 \partial\varphi\, r_1 \sin\varphi\, d\psi$; der Druck, zerlegt nach OX, wird dann $= p_1 \cos\varphi$ per Flächeneinheit und folglich der Druck auf das Element $= p_1 r_1^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi$; also für die ganze Fläche BB' wird der Resultantdruck nach OX

$$= p_1 r_1^2 \int_0^{\varphi_0}\int_0^{2\pi} d\psi \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \pi \sin^2\varphi_0\, r_1^2 p_1.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die untere Fläche AA' den Resultantdruck $= \pi \sin^2\varphi_1\, r_0^2 p_0$.

In einem beliebigen Punkte G an der Seitenfläche wirkt ein Druck p normal OB, zerlegt nach OX wird dieser Druck $= p \sin\varphi_1$, also hat der Druck für ein Ringelement $= p \sin\varphi_1\, 2\pi r \sin\varphi_1\, dr$, und für die ganze Seitenfläche ist der Druck nach OX

$$= 2\pi \sin^2\varphi_1 \int_{r_1}^{r_0} pr\, dr.$$

Endlich betrachten wir ein Element M im Inneren des Kegels; das Volumen eines solchen Elements wird, wenn man dieselben Bezeichnungen wie bei C' einführt, $r\,d\varphi\, r \sin\varphi\, d\psi\, dr$; nun ist das Gewicht einer Kubikeinheit Luft in $M = q \frac{p}{P} \frac{R^2}{r^2}$, folglich das Gewicht des Elements $= q \frac{p}{P} R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi\, dr$; die Anziehung der Schwere wirkt nach M_0, und der Component derselben nach OX wird $= q \frac{p}{P} R^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi\, dr$, also der Resultantdruck der Schwere für das ganze Kegelelement $ABB'A'$

$$= \frac{q}{P} R^2 \int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\varphi_1}\int_0^{2\pi} d\psi \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi\, p\, dr = q \frac{R^2}{P} \pi \sin^2\varphi_1 \int_{r_0}^{r_1} p\, dr.$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht giebt nun:

$$\pi \sin^2\varphi_1\, p_1 r_1^2 + q \frac{R^2}{P} \pi \sin^2\varphi_1 \int_{r_0}^{r_1} p\, dr = \pi \sin^2\varphi_1\, p_0 r_0^2 + 2\pi \sin^2\varphi_1 \int_{r_0}^{r_1} p r\, dr.$$

Bei Reduction findet man:

$$p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2 = 2 \int_{r_0}^{r_1} p r\, dr - q \frac{R^2}{P} \int_{r_0}^{r_1} p\, dr.$$

Lässt man nun r_1 sich r_0 nähern, bekommt man die Differentialgleichung:

$$\partial (p r^2) = 2 p r\, \partial r - q \frac{R^2}{P} p\, \partial r,$$

oder

$$r^2 \partial p + 2 p r\, \partial r = 2 p r\, \partial r - q \frac{R^2}{P} p\, \partial r,$$

das heisst:

$$r^2 \partial p = - \frac{q}{P} p R^2 \partial r,$$

oder

$$\partial p = - q \frac{p}{P} \frac{R^2}{r^2} \partial r. \quad \text{(Laplace's Formel.)}$$

Wenn man dagegen die Seitendrucke vernachlässigt, hat man:

$$p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2 = - q \frac{R^2}{P} \int_{r_0}^{r_1} p\, dr,$$

oder die Differentialgleichung:

$$\partial (p r^2) = - q \frac{R^2}{P} p\, \partial r,$$

oder

$$r^2 \partial p + 2 p r\, dr = - q \frac{p}{P} R^2 \partial r,$$

also

$$\partial p = -p\left(\frac{q}{P}\frac{R^2}{r^2}\partial r + \frac{2}{r}\partial r\right). \quad \text{(Ohm's Formel.)}$$

Man sieht also, dass die Berücksichtigung, dass die Schwerkräfte gegen den Mittelpunkt gerichtet sind, ohne Einfluss auf die Form der Differentialgleichung ist.

Es bleibt nur übrig, zu zeigen, dass die Beobachtung des Luftdruckes durch eine Quecksilbersäule dasselbe Resultat liefert, ob man die Schwerkräfte als parallel oder nach dem Mittelpunkte gerichtet ansieht. Im letzten Falle sind die Gleichdrucksflächen concentrische Kugelflächen. Der Druck, den die Quecksilbersäule an der Fläche AA' (Fig. 4, Taf. II) ausübt, muss gleich dem Druck der Luft in demselben Abstand $OA = r_1$ vom Mittelpunkte der Erde sein. Sei $M_1K = b$ gleich der Höhe der Quecksilbersäule, sei γ gleich dem Gewicht einer Kubikeinheit Quecksilber bei der Erdoberfläche und bei derselben Temperatur wie in M_1, so ist im Punkte M, dessen Abstand $OM = r$ ist, das Gewicht einer Kubikeinheit Quecksilber $= \gamma\frac{R^2}{r^2}$. Betrachtet man ein kleines Element in N, dessen Volumen $= r\,d\varphi\; r\sin\varphi\, d\psi\, dr$, indem wir dieselben Bezeichnungen wie früher anwenden, so ist die Anziehung dieses Elements, zerlegt nach OX,

$$= r\,d\varphi\; r\sin\varphi\; d\psi\; dr\; \gamma\frac{R^2}{r^2}\cos\varphi.$$

Folglich wird die Resultantkraft in M_1 für die ganze Quecksilbersäule, wenn $OB = OK = r_1 + b$, $\angle XOC = \varphi'$,

$$= \gamma R^2 \int_{r_1}^{r_1+b}\int_0^{\varphi'}\int_0^{2\pi} d\psi\,\sin\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi\,dr = \pi\gamma R^2\int_{r_1}^{r_1+b}\sin^2\varphi'\,dr;$$

bezeichnet nun ϱ den Radius des Cylinderrohrs, so ist $\varrho = r\sin\varphi'$, folglich haben wir:

$$\pi\gamma R^2\int_{r_1}^{r_1+b}\sin^2\varphi'\,dr = \pi\varrho^2\gamma R^2\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{dr}{r^2} = \gamma\pi\varrho^2R^2\frac{b}{r_1(r_1+b)}.$$

Die Resultantkraft des Luftdrucks p_1 auf die Fläche AA' ist nun auch nach den früheren Gleichungen $\pi p_1 r_1^2\sin^2\varphi_1$, wo $\varphi_1 = \angle XOA$, also weil $\varrho = r_1\sin\varphi_1$, bekommt man

$$\pi p_1\varrho^2 = \gamma\pi\varrho^2R^2\frac{b}{r_1(r_1+b)} \quad \text{oder} \quad p_1 = \gamma b\frac{R^2}{r_1(r_1+b)}.$$

Man hat folglich genau dieselbe Formel, wie wenn man die Schwerkräfte als parallel und den Quecksilbercylinder als eben betrachtet.

Berichtigungen zum 4. Hefte dieses Jahrganges.

Seite	271	Zeile	15 v. o.	setze *sechsseitige* für sechsseitigen.
„	271	„	12 v. u.	setze *veränderlich* für unveränderlich.
„	271	„	11 v. u.	setze >1 für <1.
„	271	„	6 v. u.	setze für „kleiner“: *grösser*; *beim Ikositetraeder sind 2 gleic* *das dritte ist kleiner*. (Hier sind also die sämmtlichen Wört bis auf das letzte dieser Correctur ausgelassen.)
„	272	„	7 v. o.	setze für die Silbe sem die Silbe *sen*.
„	272	„	14 v. u.	streiche das *un* an unregel-.
„	272	„	11 v. u.	setze *parallelflächig-* für parallelförmig-.
„	272	„	8 v. u.	setze *des* für dec.
„	274	„	1 v. u.	setze $\frac{p''}{3}$ für $\frac{p''}{2}$.
„	278	„	7 v. o.	setze $\frac{m}{m+1}$ für $\frac{m+1}{m}$.
„	278	„	8 v. o.	vertausche den letzten Buchstaben *u* mit *n*.
„	278	„	9 v. o.	setze $x = \dfrac{\frac{mn}{m+1}}{n - \frac{m}{m+1}} = \dfrac{mn}{mn+n-m}$.
„	279	„	19 v. u.	setze *homoedrischen* für hemiedrischen.
„	279	„	5 v. u.	setze *Phänomene* für Phänomen.
„	279	„	3 v. u.	setze *mochte* für möchte.
„	281	„	10 v. u.	ist hinter der ersten Silbe das Bindezeichen ausgelassen.
„	282	„	16 v. u.	ist für das letzte Wort „ein“ zu setzen: *im*.
„	282	„	15 v. u.	ist das erste „beiden“ zu streichen.
„	283	„	2 v. o.	setze *Dove* für Dorn.
„	383	„	9 v. o.	setze *welchen* für welche.

XVI.

Ueber einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen.

Von Dr. A. Enneper,
Docent an der Universität Göttingen.

(Fortsetzung der Abhandlung T. VII, p. 313 dieser Zeitschrift.)

X.

Die Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Curve doppelter Krümmung seien Functionen einer Variabeln w. Das Bogenelement der Curve bezeichne man durch ∂s, ferner sei ϱ der Krümmungshalbmesser, r der Torsionsradius im Punkte (x, y, z). Die Winkel, welche die Tangente, Hauptnormale und die Normale zur Krümmungsebene mit den Coordinatenachsen bilden, seien respective

$$\begin{array}{c} \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ \lambda,\ \mu,\ \nu, \\ a,\ b,\ c. \end{array}$$

Für die Differentialquotienten von $\cos\alpha$ etc. nach w hat man dann nach Serret (*Journ. de Math. XVI*, *p.* 193) folgende Gleichungen*):

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}=\frac{\cos\lambda}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w},\quad \frac{\partial\cos\beta}{\partial w}=\frac{\cos\mu}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w},\quad \frac{\partial\cos\gamma}{\partial w}=\frac{\cos\nu}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w};$$

$$\frac{\partial\cos a}{\partial w}=\frac{\cos\lambda}{r}\frac{\partial s}{\partial w},\quad \frac{\partial\cos b}{\partial w}=\frac{\cos\mu}{r}\frac{\partial s}{\partial w},\quad \frac{\partial\cos c}{\partial w}=\frac{\cos\nu}{r}\frac{\partial s}{\partial w};$$

$$\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}=-\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}+\frac{\cos a}{r}\right)\frac{\partial s}{\partial w},\quad \frac{\partial\cos\mu}{\partial w}=-\left(\frac{\cos\beta}{\varrho}+\frac{\cos b}{r}\right)\frac{\partial s}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\cos\nu}{\partial w}=-\left(\frac{\cos\gamma}{\varrho}+\frac{\cos c}{r}\right)\frac{\partial s}{\partial w}.$$

---

*) Die Winkel λ, μ, ν und a, b, c bezeichnet Serret respective durch ξ, η, ζ und λ, μ, ν. Die Grössen a, b, c erscheinen hier in einer anderen Bedeutung, wie in I, da sie jedoch in der hier gebrauchten Bedeutung nicht weiter vorkommen, so kann dadurch kein Missverständniss entstehen. In allen folgenden Entwickelungen bezeichnen a, b, c immer die Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) einer Fläche mit den Achsen bildet.

Der Mittelpunkt (ξ, η, ζ) der osculatorischen Kugelfläche ist durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\xi = x + \varrho \cos\lambda - \frac{r}{\frac{\partial s}{\partial w}} \frac{\partial \varrho}{\partial w} \cos a,$$

$$\eta = y + \varrho \cos\mu - \frac{r}{\frac{\partial s}{\partial w}} \frac{\partial \varrho}{\partial w} \cos b,$$

$$\zeta = z + \varrho \cos\nu - \frac{r}{\frac{\partial s}{\partial w}} \frac{\partial \varrho}{\partial w} \cos c.$$

Für den Radius R der osculatorischen Kugelfläche ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\frac{r}{\frac{\partial s}{\partial w}} \frac{\partial \varrho}{\partial w}\right)^2.$$

Sind wieder u, v die Argumente der Krümmungslinien einer Fläche, so sollen ϱ_1, r_1 und

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \ \beta_1, \ \gamma_1, \\ \lambda_1, \ \mu_1, \ \nu_1, \\ a_1, \ b_1, \ c_1 \end{array}$$

dieselbe Bedeutung wie ϱ, r, α etc. haben für das System von Krümmungslinien, in welchem u allein variabel ist, die Coordinaten des Mittelpunktes der osculatorischen Kugelfläche und ihr Radius seien ξ_1, η_1, ζ_1 und R_1. In dem System von Krümmungslinien, in welchem v allein variirt, sollen die analogen Grössen durch r_2, ϱ_2, $\alpha_2 \ldots$ bezeichnet werden.

In dem ersten System von Krümmungslinien hat man $w = u$ und $\frac{\partial s}{\partial w} = \frac{\partial s}{\partial u} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}} = P$. Mit Hilfe der obigen Gleichungen und der in V aufgestellten Formeln findet man nun:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\alpha_1 \frac{\partial s}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos\beta_1 \frac{\partial s}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \cos\gamma_1 \frac{\partial s}{\partial u}$$

oder

$$52) \qquad \cos\alpha_1 = \cos a', \quad \cos\beta_1 = \cos b', \quad \cos\gamma_1 = \cos c'.$$

Durch Differentiation nach u geben diese Gleichungen:

$$53) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\lambda_1}{\varrho_1} = \dfrac{\cos a}{r''} + \dfrac{M}{P} \cos a'', \\[2ex] \dfrac{\cos\mu_1}{\varrho_1} = \dfrac{\cos b}{r''} + \dfrac{M}{P} \cos b'', \\[2ex] \dfrac{\cos\nu_1}{\varrho_1} = \dfrac{\cos c}{r''} + \dfrac{M}{P} \cos c''. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen quadrirt und addirt geben:

$$54)\quad \frac{1}{\varrho_1^2}=\frac{1}{r''^2}+\left(\frac{M}{P}\right)^2 \text{ oder } \frac{1}{\varrho_1}=\sqrt{\left\{\frac{1}{r''^2}+\left(\frac{M}{P}\right)^2\right\}}.$$

Die Gleichungen für $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ nach u differentiirt geben:

$$\cos a_1 \frac{P}{r_1}\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{Mr''}{P}\cos a-\cos a''\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''M}{P},$$

$$\cos b_1 \frac{P}{r_1}\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{Mr''}{P}\cos b-\cos b''\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''M}{P},$$

$$\cos c_1 \frac{P}{r_1}\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{Mr''}{P}\cos c-\cos c''\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''M}{P}.$$

Bildet man die Summe der Quadrate der vorstehenden Gleichungen, so folgt:

$$\left(\frac{P}{r_1}\right)^2\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}^2=\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''M}{P}\right)^2$$

oder

$$55)\quad \frac{P}{r_1}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\frac{r''M}{P}}{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)}=\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arctang}\frac{r''M}{P}.$$

Die Gleichungen für $\cos a_1$, $\cos b_1$, $\cos c_1$ werden hierdurch einfacher:

$$56)\quad \begin{cases} \cos a_1\sqrt{\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}}=\frac{r''M}{P}\cos a-\cos a'', \\ \cos b_1\sqrt{\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}}=\frac{r''M}{P}\cos b-\cos b'', \\ \cos c_1\sqrt{\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}}=\frac{r''M}{P}\cos c-\cos c''. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch $\partial\omega'$ den Winkel zweier successiven Krümmungsebenen, so lässt sich die Gleichung 55) auch schreiben:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arctang}\frac{r''M}{P}.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\operatorname{arctang}\frac{r''M}{P}=\omega'+h \text{ oder } \frac{r''M}{P}=\operatorname{tang}(\omega'+h),$$

wo h eine Constante bedeutet. Aus den Gleichungen 53) folgt aber:

$$\cos\lambda_1\cos a+\cos\mu_1\cos b+\cos\nu_1\cos c=\frac{\varrho_1}{r''}=\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{r''M}{P}\right)^2\right\}}},$$

also:

$$\cos\lambda_1\cos a+\cos\mu_1\cos b+\cos\nu_1\cos c=\cos(\omega'+h).$$

Bezeichnet man durch φ' den Winkel, welchen die Normale zur Fläche mit der Hauptnormale der Krümmungslinie bildet, so ist die linke Seite der vorstehenden Gleichung gleich $\cos\varphi'$, folglich $\varphi'=\omega'+h$. In einem anderen Punkte der Krümmungslinie hat man $\varphi''=\omega''+h$, also $\varphi'-\varphi''=\omega'-\omega''$, d. h.:

Die Differenz der Winkel, welche in zwei Punkten eine mungslinie die jedesmalige Normale zur Fläche mit dem mungshalbmesser der Curve bildet, ist gleich dem Winkel, die Krümmungsebenen der beiden Punkte einschliessen.

Es ist ferner $\frac{\varrho_1}{r''} = \cos\varphi'$, hieraus folgt:

Die Projection eines der Hauptkrümmungshalbmesser i Punkte einer Fläche auf die Hauptnormale einer Krümmu welche durch diesen Punkt geht, ist gleich dem Krümmu messer der Curve.

Substituirt man in die Gleichungen:

$$\xi_1 = x + \varrho_1 \cos\lambda_1 - \frac{r_1}{P}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\cos a_1,$$

$$\eta_1 = y + \varrho_1 \cos\mu_1 - \frac{r_1}{P}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\cos b_1,$$

$$\zeta_1 = z + \varrho_1 \cos\nu_1 - \frac{r_1}{P}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\cos c_1,$$

für ϱ_1, $\cos\lambda_1$, $\cos a_1$ etc. ihre Werthe aus 53), 54), 55), 56), so gel selben über in:

$$57)\quad \begin{cases} (\xi_1 - x)\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{r''M}{P} = r''^2 \cos a \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{M}{P} + \cos a'' \dfrac{\partial r''}{\partial u}, \\ (\eta_1 - y)\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{r''M}{P} = r''^2 \cos b \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{M}{P} + \cos b'' \dfrac{\partial r''}{\partial u}, \\ (\zeta_1 - z)\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{r''M}{P} = r''^2 \cos c \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{M}{P} + \cos c'' \dfrac{\partial r''}{\partial u}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen quadrirt und addirt geben:

$$58)\quad R_1^2 = \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{M}{P}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{r''}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{r''}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{M}{P} - \dfrac{M}{P}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{r''}\right)^2}.$$

Für das System von Krümmungslinien, in welchem v allein hat man $w = v$, $\frac{\partial s}{\partial w} = \frac{\partial s}{\partial v} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right\}} = Q.$

Man findet für dieses System folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \cos\alpha_2 = \cos a'', \quad \cos\lambda_2 = \dfrac{\varrho_2}{r'}\cos a + \varrho_2 \dfrac{N}{Q}\cos a', \\ \cos\beta_2 = \cos b'', \quad \cos\mu_2 = \dfrac{\varrho_2}{r'}\cos b + \varrho_2 \dfrac{N}{Q}\cos b', \\ \cos\gamma_2 = \cos c'', \quad \cos\nu_2 = \dfrac{\varrho_2}{r'}\cos c + \varrho_2 \dfrac{N}{Q}\cos c', \\ \dfrac{1}{\varrho_2} = \sqrt{\left\{\dfrac{1}{r'^2} + \left(\dfrac{N}{Q}\right)^2\right\}}, \end{cases}$$

$$59)\quad \begin{cases} \cos a_2 \sqrt{\left\{1+\left(\frac{r'N}{Q}\right)^2\right\}} = \frac{r'N}{Q}\cos a - \cos a', \\ \cos b_2 \sqrt{\left\{1+\left(\frac{r'N}{Q}\right)^2\right\}} = \frac{r'N}{Q}\cos b - \cos b', \\ \cos c_2 \sqrt{\left\{1+\left(\frac{r'N}{Q}\right)^2\right\}} = \frac{r'N}{Q}\cos c - \cos c'; \\ \frac{Q}{r_2} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}\frac{r'N}{Q}}{1+\left(\frac{r'N}{Q}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial v}\, arctang\, \frac{r'N}{Q}, \\ (\xi_2 - x)\frac{\partial}{\partial v}\frac{r'N}{Q} = r'^2 \cos a \frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q} + \cos a' \frac{\partial r'}{\partial u}, \\ (\eta_2 - y)\frac{\partial}{\partial v}\frac{r'N}{Q} = r'^2 \cos b \frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q} + \cos b' \frac{\partial r'}{\partial u}, \\ (\zeta_2 - z)\frac{\partial}{\partial v}\frac{r'N}{O} = r'^2 \cos c \frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q} + \cos c' \frac{\partial r'}{\partial u}, \\ R_2^2 = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)^2}{\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q} - \frac{N}{Q}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)^2}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben unmittelbar einige bekannte Eigenschaften der Krümmungslinien, welche plan oder sphärisch sind. Ist das System von Krümmungslinien, in welchem u allein variirt plan, so hat man $r_1 = \infty$, oder nach 55):

$$\frac{\partial}{\partial u}\, arctang\, \frac{r''M}{P} = 0.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$arctang\, \frac{r''M}{P} = \vartheta_1, \text{ oder } \frac{r''M}{P} = tang\, \vartheta_1,$$

wo der Winkel ϑ_1 nur von v abhängt. Die Gleichungen 56) werden dann:

$$\cos a_1 = \sin\vartheta_1 \cos a - \cos\vartheta_1 \cos a'', \quad \cos b_1 = \sin\vartheta_1 \cos b - \cos\vartheta_1 \cos b'',$$
$$\cos c_1 = \sin\vartheta_1 \cos c - \cos\vartheta_1 \cos c''.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\cos a_1 \cos a + \cos b_1 \cos b + \cos c_1 \cos c = \sin\vartheta_1,$$

d. h. die Ebene einer Krümmungslinie schneidet die Fläche unter einem constanten Winkel. Durch die Winkel a_1, b_1, c_1 ist im vorliegenden Falle die Normale zur Krümmungsebene der Curve bestimmt, und da die Curve plan ist, so ist diese Normale identisch mit einer Normale zu ihrer Ebene. Sind die Krümmungslinien des Systems (v) ebenfalls plan, so hat man

$$r_2 = \infty, \text{ oder } \frac{\partial}{\partial v}\, arctang\, \frac{r'N}{Q} = 0,$$

woraus durch Integration folgt:

$$\frac{r'N}{Q} = tang\,\vartheta_1,$$

der Winkel ϑ_2 ist nur von u abhängig.

Die vorstehenden Resultate sind specielle Fälle der sphärischen Krümmungslinien. Ist eine Curve sphärisch, so ist der Krümmungshalbmesser der osculatorischen Kugel in jedem ihrer Punkte constant. Soll das System der Krümmungslinien (u) sphärisch sein, so muss nach 58) in der Gleichung:

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{\left(\frac{1}{r''}\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P} - \frac{M}{P}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''}\right)^2}{\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{r''}\right)}$$

R_1 unabhängig von u_1, also blosse Function von v sein. Die vorstehende Gleichung giebt dann integrirt:

$$60)\qquad \frac{1}{R_1} = \frac{cos\,\vartheta_1}{r''} + sin\,\vartheta_1\,\frac{M}{P},$$

wo ϑ_1 nur von v abhängig ist. Für diesen Werth von R_1 werden die Gleichungen 57) einfach:

$$61)\qquad \begin{cases} \xi_1 = x + R_1\,cos\,\vartheta_1\,cos\,a + R_1\,sin\,\vartheta_1\,cos\,a'', \\ \eta_1 = y + R_1\,cos\,\vartheta_1\,cos\,b + R_1\,sin\,\vartheta_1\,cos\,b'', \\ \zeta_1 = z + R_1\,cos\,\vartheta_1\,cos\,c + R_1\,sin\,\vartheta_1\,cos\,c''. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen findet man unmittelbar:

$$\frac{\xi_1 - x}{R_1}\,cos\,a + \frac{\eta_1 - y}{R_1}\,cos\,b + \frac{\zeta_1 - z}{R_1}\,cos\,c = cos\,\vartheta_1.$$

Der Krümmungshalbmesser der osculatorischen Kugelfläche bildet also im Punkte (x, y, z) mit der Normale zur Fläche einen constanten Winkel, oder eine Kugelfläche, welche eine sphärische Krümmungslinie enthält, schneidet die Fläche unter einem constanten Winkel. Sind die Krümmungslinien des Systems (v) ebenfalls sphärisch, so ist in der Gleichung:

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q} - \frac{N}{Q}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)^2}{\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)^2}$$

R_2 nur von u abhängig. Die vorstehende Gleichung integrirt giebt:

$$62)\qquad \frac{1}{R_2} = \frac{cos\,\vartheta_2}{r'} + sin\,\vartheta_2\,\frac{N}{Q},$$

wo ϑ_2 eine Function von u allein ist. Der Mittelpunkt (ξ_2, η_2, ζ_2) der osculatorischen Kugelfläche ist durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$63)\qquad \begin{cases} \xi_2 = x + R_2\,cos\,\vartheta_2\,cos\,a + R_2\,sin\,\vartheta_2\,cos\,a', \\ \eta_2 = y + R_2\,cos\,\vartheta_2\,cos\,b + R_2\,sin\,\vartheta_2\,cos\,b', \\ \zeta_2 = z + R_2\,cos\,\vartheta_2\,cos\,c + R_2\,sin\,\vartheta_2\,cos\,c'. \end{cases}$$

Transformirt man eine Fläche mittelst reciproker Radienvectoren nimmt den Radius der Kugelfläche zur Einheit und ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten, so gehen, nach den in IX gegebenen Entwickelungen, die Quantitäten:

$$\frac{M}{P}, \frac{1}{r''}, \frac{N}{Q}, \frac{1}{r'},$$

respective über in:

$$D\frac{M}{P}+2H'', \quad \frac{D}{r''}+2H, \quad D\frac{N}{Q}+2H', \quad \frac{D}{r'}+2H,$$

wo wieder, wie in IX:

$$H=x\cos a+y\cos b+z\cos c, \quad H'=x\cos a'+y\cos b'+z\cos c',$$
$$H''=x\cos a''+y\cos b''+z\cos c'', \quad D=x^2+y^2+z^2.$$

Bezeichnet man durch R_1', R_2' die Halbmesser der osculatorischen Kugelflächen für die transformirten Krümmungslinien (u) und (v), so findet man leicht mittelst der obigen Bemerkungen und der Gleichungen 58), 59):

$$\frac{1}{R_1'^2}=\frac{\left\{D\left(\frac{1}{r''}\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P}-\frac{M}{P}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''}\right)+2H\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P}-2H''\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''}\right\}^2}{\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{r''}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P}\right)^2},$$

$$\frac{1}{R_2'^2}=\frac{\left\{D\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q}-\frac{N}{Q}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)+2H\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q}-2H'\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right\}^2}{\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r'}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{Q}\right)^2}.$$

Sind die ursprünglichen Krümmungslinien sphärisch, so nehmen die vorstehenden Gleichungen mittelst der Gleichungen 60), 62) folgende einfache Formen an:

64)

$$\pm\frac{1}{R_1'}=\frac{D}{R_1}+2(H\cos\vartheta_1+H''\sin\vartheta_1), \quad \pm\frac{1}{R_2'}=\frac{D}{R_2}+2(H\cos\vartheta_2+H'\sin\vartheta_2).$$

Durch Differentiation nach u und v findet man leicht, dass R_1' unabhängig von u und R_2' unabhängig von v ist, was sich von selbst versteht, da eine sphärische Krümmungslinie bei der bemerkten Transformation sphärisch bleibt. Für plane Krümmungslinien hat man in den Gleichungen 64) nur $R_1=\infty$, $R_2=\infty$ zu setzen, um unmittelbar die Radien der osculatorischen Kugelflächen der transformirten Curven zu erhalten, die selbstverständlich sphärisch sind.

XI.

Sind die beiden Systeme von Krümmungslinien einer Fläche plan, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r''M}{P}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r'N}{Q}\right)=0,$$

oder:

$$65) \qquad M = \frac{P}{r''} V, \quad N = \frac{Q}{r'} U,$$

wo V nur v enthält und U Function von u allein ist. Wegen der v· stehenden Werthe von M und N gehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{P}{r''} = \frac{1}{r'} \frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{Q}{r'} M, \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{Q}{r'} = \frac{1}{r''} \frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{P}{r''} N$$

über in:

$$66) \qquad \frac{\partial}{\partial v} \frac{P}{r''} = -\frac{P}{r''} \frac{Q}{r'} N, \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{Q}{r'} = -\frac{P}{r''} \frac{Q}{r'} U.$$

Substituirt man die Werthe von M und N aus 65) in

$$\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{PQ}{r'' r'},$$

so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P}{r''} V\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{r'} U\right) = \frac{PQ}{r'' r'},$$

oder wegen der Gleichungen 66):

$$67) \qquad \frac{P}{r''} V' + \frac{Q}{r'} U' = (1 + U^2 + V^2) \frac{P}{r''} \frac{Q}{r'},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{\partial V}{\partial v} = V' \quad \frac{\partial U}{\partial u} = U'.$$

Die vorstehende Gleichung wird identisch für:

$$68) \quad \frac{P}{r''} = \frac{U'}{1 + U^2 + V^2}\left(1 + \frac{1}{g}\right), \quad \frac{Q}{r'} = \frac{V'}{1 + U^2 + V^2}(1 + g),$$

wo g eine Unbestimmte bedeutet. Substituirt man diese Werthe v $\frac{P}{r''}, \frac{Q}{r'}$ in die Gleichungen 66), so folgt:

$$69) \quad \frac{V V'}{1 + U^2 + V^2} = \frac{\partial g}{\partial v} \frac{1}{g(g^2 - 1)}, \quad \frac{U U'}{1 + U^2 + V^2} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{g}{g^2 - 1}.$$

Die zweite Gleichung integrirt giebt:

$$g^2 - 1 = \frac{1 + U^2 + V^2}{\psi(v)},$$

wo $\psi(v)$ eine beliebige Function von v bezeichnet. Dieser Werth vo in die erste Gleichung 69) gesetzt, transformirt dieselbe in: $\frac{\partial \psi(v)}{\partial v} = -V$ d. h. $\psi(v) = k - V^2$, wo k eine Constante bedeutet. Für g hat man a die Gleichung:

$$g = \sqrt{\frac{1 + k + U^2}{k - V^2}}.$$

)ie Gleichungen 68) werden hierdurch:

$$70)\quad \begin{cases} \dfrac{P}{r''}=\dfrac{U'}{1+U^2+V^2}\left\{1+\sqrt{\left(\dfrac{k-V^2}{1+k+U^2}\right)}\right\} \\ \quad =\dfrac{U'}{\sqrt{(1+k+U^2)}}\,\dfrac{1}{\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}}, \\ \dfrac{Q}{r'}=\dfrac{V'}{1+U^2+V^2}\left\{1+\sqrt{\dfrac{1+k+U^2}{k-V^2}}\right\} \\ \quad =\dfrac{V^2}{\sqrt{(k-V^2)}}\,\dfrac{1}{\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}}. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen 59) sind die Cosinus der Winkel, welche eine Ebene des Systems (v) mit den Achsen bildet, folgenden Quantitäten proportional:

$$U\cos a-\cos a',\quad U\cos b-\cos b',\quad U\cos c-\cos c'.$$

Diese Grössen sind nur von u abhängig. Sind $\cos l_1$, $\cos m_1$, $\cos n_1$ Functionen von u allein, $\cos^2 l_1+\cos^2 m_1+\cos^2 n_1=1$, so kann man setzen:

$$71)\quad \begin{cases} U\cos a-\cos a'=\sqrt{(1+U^2)}\cos l_1, \\ U\cos b-\cos b'=\sqrt{(1+U^2)}\cos m_1, \\ U\cos c-\cos c'=\sqrt{(1+U^2)}\cos n_1. \end{cases}$$

Bezeichnet man ferner durch $\cos l_2$, $\cos m_2$, $\cos n_2$ Functionen von v allein, so kann man setzen:

$$72)\quad \begin{cases} V\cos a-\cos a''=\sqrt{(1+V^2)}\cos l_2, \\ V\cos b-\cos b''=\sqrt{(1+V^2)}\cos m_2, \\ V\cos c-\cos c''=\sqrt{(1+V^2)}\cos n_2, \end{cases}$$

wo $\cos^2 l_2+\cos^2 m_2+\cos^2 n_2=1$. Differentiirt man

$$U\cos a-\cos a'=\sqrt{(1+U^2)}\cos l_2 \text{ nach } u,$$
$$V\cos a-\cos a''=\sqrt{(1+V^2)}\cos l_2 \text{ nach } v,$$

substituirt für M, N, $\dfrac{P}{r''}$, $\dfrac{Q}{r'}$ ihre Werthe aus 65) und 70), ferner

$$\cos a'=U\cos a-\sqrt{(1+U^2)}\cos l_1,\quad \cos a''=V\cos a-\sqrt{(1+V^2)}\cos l_2,$$

so erhält man für $\cos a$ folgende Doppelgleichung:

$$72)^*\quad \begin{cases} \cos a=\left\{U\sqrt{(1+U^2)}\cos l_1+V\sqrt{(1+V^2)}\cos l_2\right\}\dfrac{\sqrt{(1+k+U^2)}+\sqrt{(k-V^2)}}{(1+U^2+V^2)\sqrt{(k-V^2)}} \\ \quad -\dfrac{\sqrt{(1+k+U^2)}}{U'\sqrt{(k-V^2)}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\cos l_1\sqrt{(1+U^2)}\right\} \\ =\left\{U\sqrt{(1+U^2)}\cos l_1+V\sqrt{(1+V^2)}\cos l_2\right\}\dfrac{\sqrt{(1+k+U^2)}+\sqrt{(k-V^2)}}{(1+U^2+V^2)\sqrt{(1+k+U^2)}} \\ \quad -\dfrac{\sqrt{(k-V^2)}}{V'\sqrt{1+k+U^2)}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\cos l_2\sqrt{(1+V^2)}\right\}. \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser beiden Werthe von $\cos a$ giebt:

$$U\sqrt{(1+U^2)}\cos l_1+V\sqrt{(1+V^2)}\cos l_2$$
$$=\frac{1+k+U^2}{U'}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\cos l_1\sqrt{(1+U^2)}\right\}-\frac{k-V^2}{V'}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\cos l_2\sqrt{(1+V^2)}\right\}.$$

oder:

$$\frac{(1+k+U^2)^{\frac{3}{2}}}{U'}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\cos l_1 \sqrt{(1+U^2)}}{\sqrt{(1+k+U^2)}}\right\}=\frac{(k-V^2)^{\frac{3}{2}}}{V'}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\cos l_2\sqrt{(1+V^2)}}{\sqrt{(k-V^2)}}\right\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur u, die rechte nur v enthält, so muss jede Seite der vorstehenden Gleichung constant sein. Man erhält so:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\cos l_1\sqrt{(1+U^2)}}{\sqrt{(1+k+U^2)}}\right\}=\frac{U'\sqrt{k(k+1)}}{(1+k+U^2)^{\frac{3}{2}}}\cos l,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\cos l_2\sqrt{(1+V^2)}}{\sqrt{(k-V^2)}}\right\}=\frac{V'\sqrt{k(k+1)}}{(k+V^2)^{\frac{3}{2}}}\cos l,$$

wo $\sqrt{k(k+1)}\cos l$ eine beliebige Constante bedeutet. Durch Integration der vorstehenden Gleichungen folgt:

$$72)'' \quad \left\{\begin{aligned} &\cos l_1\sqrt{(1+U^2)}=\cos l\sqrt{\frac{k}{k+1}}\,U-\sqrt{\frac{k+1+U^2}{k-1}}\cos l',\\ &\cos l_2\sqrt{(1+V^2)}=\cos l\sqrt{\frac{k+1}{k}}\,V-\sqrt{\frac{k-V^2}{k}}\cos l'',\end{aligned}\right.$$

wo $\frac{\cos l'}{\sqrt{(1+k)}}$, $\frac{\cos l''}{\sqrt{k}}$ beliebige Constanten sind. Ganz analoge Ausdrücke erhält man für $\cos m_1$, $\cos n_1$, $\cos m_2$, $\cos n_2$. Das System der Gleichungen 71), 72) lässt sich durch folgendes ersetzen:

$$73) \quad \left\{\begin{aligned} &U\cos a-\cos a'=U\sqrt{\frac{k}{k+1}}\cos l-\sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\cos l',\\ &U\cos b-\cos b'=U\sqrt{\frac{k}{k+1}}\cos m-\sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\cos m',\\ &U\cos c-\cos c'=U\sqrt{\frac{k}{k+1}}\cos n-\sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\cos n'.\end{aligned}\right.$$

$$74) \quad \left\{\begin{aligned} &V\cos a-\cos a''=V\sqrt{\frac{k+1}{k}}\cos l-\sqrt{\frac{k-V^2}{k}}\cos l'',\\ &V\cos b-\cos b''=V\sqrt{\frac{k+1}{k}}\cos m-\sqrt{\frac{k-V^2}{k}}\cos m'',\\ &V\cos c-\cos c''=V\sqrt{\frac{k+1}{k}}\cos n-\sqrt{\frac{k-V^2}{k}}\cos n''.\end{aligned}\right.$$

Bildet man die Summe der Quadrate der Gleichungen 73), so wird die linke Seite gleich $1+U^2$, dieselbe Summe bei den Gleichungen 74) giebt für die linke Seite $1+V^2$, multiplicirt man die Gleichungen 73) mit den entsprechenden Gleichungen 74), so wird die linke Seite gleich UV; da nun die rechten Seiten bei diesen Operationen dieselben Resultate geben müssen, so folgt, dass die Winkel:

$$\begin{gathered} l,\ m,\ n;\\ l',\ m',\ n';\\ l'',\ m'',\ n'';\end{gathered}$$

zu drei auf einander senkrechten Richtungen im Raume gehören, also die Relationen stattfinden:

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1, \quad \cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n' = 0,$$
$$\cos^2 l' + \cos^2 m' + \cos^2 n' = 1, \quad \cos l \cos l'' + \cos m \cos m'' + \cos n \cos n'' = 0,$$
$$\cos^2 l'' + \cos^2 m'' + \cos^2 n'' = 1, \quad \cos l' \cos l'' + \cos m' \cos m'' + \cos n' \cos n'' = 0.$$

Die Gleichungen der Ebenen der Krümmungslinien sind:

$$x(U\cos a - \cos a') + y(U\cos b - \cos b') + z(U\cos c - \cos c') = U_1,$$
$$x(V\cos a - \cos a'') + y(V\cos b - \cos b'') + z(V\cos c - \cos c'') = V_1.$$

Durch Differentiation findet man leicht $\frac{\partial U_1}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial V_1}{\partial u} = 0$, so dass also U_1 eine beliebige Function von u allein bezeichnet und analog V_1 nur von v abhängt. Wegen der Gleichungen 73), 74) gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$75)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{k+1}}\, U(x\cos l + y\cos m + z\cos n) \\ \qquad -\sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\,(x\cos l' + y\cos m' + z\cos n') = U_1, \\ \sqrt{\frac{k}{k+1}}\, V(x\cos l + y\cos m + z\cos n) \\ \qquad -\sqrt{\frac{k-V^2}{k}}\,(x\cos l'' + y\cos m'' + z\cos n'') = V_1. \end{cases}$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen nach u differentiirt giebt:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{k}{k+1}}\, U'(x\cos l + y\cos m + z\cos n) \\ &\quad - \frac{UU'}{\sqrt{(k+1)}\sqrt{(k+1+U^2)}}(x\cos l' + y\cos m' + z\cos n') \\ &\quad + \left(U\sqrt{\frac{k}{k+1}}\cos l - \sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\cos l'\right) P\cos a' \\ &\quad + \left(U\sqrt{\frac{k}{k+1}}\cos m - \sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\cos m'\right) P\cos b' \\ &\quad + \left(U\sqrt{\frac{k}{k+1}}\cos n - \sqrt{\frac{k+1+U^2}{k+1}}\cos n'\right) P\cos c' = \frac{\partial U_1}{\partial u}. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 73) wird der Factor von P einfach gleich -1, hierdurch vereinfacht sich die vorstehende Gleichung in:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{k}{k+1}}\, U'(x\cos l + y\cos m + z\cos n) \\ &\quad - \frac{UU'}{\sqrt{(k+1)}\sqrt{(k+1+U^2)}}(x\cos l' + y\cos m' + z\cos n') - P = \frac{\partial U_1}{\partial u} \end{aligned}$$

oder $x\cos l' + y\cos m' + z\cos n'$ mittelst der ersten Gleichung 75) eliminirt:

$$76)\quad \begin{cases} U'\frac{\sqrt{k(k+1)}}{k+1+U^2}(x\cos l + y\cos m + z\cos n) - P \\ \qquad = \frac{\partial U_1}{\partial u} - \frac{UU'}{1+k+U^2}U_1 = \sqrt{(1+k+U^2)}\,\frac{\partial}{\partial u}\frac{U_1}{\sqrt{(1+k+U^2)}}. \end{cases}$$

Analog findet man durch Differentiation der zweiten Gleichung 75) nach v:

$$77)\quad \begin{cases} V'\dfrac{\sqrt{k(k+1)}}{k-V^2}(x\cos l+y\cos m+z\cos n)-Q \\ =\dfrac{\partial V_1}{\partial u}+\dfrac{VV'}{k-V^2}V_1=\sqrt{(k-V^2)}\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{V_1}{\sqrt{(k-V^2)}}. \end{cases}$$

In den Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{r''}=\frac{Q}{r'}\frac{\partial P}{\partial v},\quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{r'}=\frac{1}{r''}\frac{\partial Q}{\partial u},$$

oder besser in den folgenden:

$$Q\frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{r''}=\frac{Q}{r'}\frac{\partial P}{\partial v},\quad P\frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{r'}=\frac{P}{r''}\frac{\partial Q}{\partial u},$$

ersetze man $\frac{P}{r''}$, $\frac{Q}{r'}$ durch ihre Werthe aus 70), dann folgt:

$$\frac{\partial P}{\partial v}+Q\frac{VU'}{\sqrt{k+1+U^2}}\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}}=0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial u}+P\frac{UV'}{\sqrt{k-V^2}}\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}}=0.$$

Substituirt man hierin für P, Q ihre Werthe aus 76), 77), so gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$\sqrt{k(k+1)}\left\{\frac{1}{\sqrt{(k-V^2)}}-\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\right\}\frac{\partial}{\partial v}(x\cos l+y\cos m+z\cos n)$$
$$+\sqrt{k(k+1)}(x\cos l+y\cos m+z\cos n)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{(k-V^2)}}=V\frac{\partial}{\partial v}\frac{V_1}{\sqrt{(k-V^2)}},$$

$$\sqrt{k(k+1)}\left\{\frac{1}{\sqrt{(k-V^2)}}-\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\right\}\frac{\partial}{\partial u}(x\cos l+y\cos m+z\cos n)$$
$$-\sqrt{k(k+1)}(x\cos l+y\cos m+z\cos n)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}$$
$$=U\frac{\partial}{\partial u}\frac{U_1}{\sqrt{(k+1+U^2)}},$$

oder

$$\sqrt{k(k+1)}\frac{\partial}{\partial v}\left\{(x\cos l+y\cos m+z\cos n)\left[\frac{1}{\sqrt{(k-V^2)}}-\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\right]\right\}$$
$$=V\frac{\partial}{\partial v}\frac{V_1}{\sqrt{(k-V^2)}},$$

$$\sqrt{k(k+1)}\frac{\partial}{\partial u}\left\{(x\cos l+y\cos m+z\cos n)\left[\frac{1}{\sqrt{(k-V^2)}}-\frac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\right]\right\},$$
$$=U\frac{\partial}{\partial u}\frac{U_1}{\sqrt{(h+1+U^2)}},$$

Aus diesen Gleichungen erhält man unmittelbar:

$$78)\quad \begin{cases} (x\cos l+y\cos m+z\cos n)\left[\dfrac{1}{\sqrt{(k-V^2)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\right] \\ =\displaystyle\int V\frac{\partial}{\partial v}\frac{V_1}{\sqrt{(k-V^2)}}\partial v+\int U\frac{\partial}{\partial u}\frac{U_1}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\partial u. \end{cases}$$

Substituirt man diesen Werth von $x\cos l + y\cos m + z\cos n$ in die Gleichungen 75), so hat man mit der vorstehenden Gleichung drei Gleichungen zur Bestimmung von x, y, z in Function von u, v. Diese Gleichungen enthalten scheinbar vier arbiträre Functionen U, V, U_1, V_1, die sich aber auf zwei reduciren lassen. Es ist nämlich:

$$\int U \frac{\partial}{\partial u} \frac{U_1}{\sqrt{(1+k+U^2)}} \partial u = \frac{U U_1}{\sqrt{(1+k+U^2)}} - \int \frac{U_1}{\sqrt{(1+k+U^2)}} \partial U.$$

Denkt man sich u in U_1 durch U ausgedrückt, so kann man setzen:

$$\int \frac{U_1}{\sqrt{(1+k+U^2)}} \partial U = \frac{\varphi(U)}{\sqrt{(k+1)}},$$

also

$$\int U \frac{\partial}{\partial u} \frac{U_1}{\sqrt{(1+k+U^2)}} \partial u = \frac{U\varphi'(U) - \varphi(U)}{\sqrt{(k+1)}},$$

wo $\varphi(U)$ eine beliebige Function von U bezeichnet. Ebenso kann man setzen:

$$\int V \frac{\partial}{\partial v} \frac{V_1}{\sqrt{(k-V^2)}} = \frac{V\psi'(V) - \psi(V)}{\sqrt{k}}, \quad \int \frac{V_1}{\sqrt{(k-V^2)}} \partial V = \frac{\psi(V)}{\sqrt{k}}.$$

Die Gleichungen 75) und 78) werden dann:

79)

$$U\sqrt{\left(\frac{k}{\sqrt{(k+1+U^2)}}\right)} \cdot (x\cos l + y\cos m + z\cos n) - \varphi'(U)$$
$$= x\cos l' + y\cos m' + z\cos n',$$

$$V\sqrt{\left(\frac{k+1}{k-V^2}\right)} \cdot (x\cos l + y\cos m + z\cos n) - \psi'(V)$$
$$= x\cos l'' + y\cos m'' + z\cos n'',$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{(1+k+U^2)(k-V^2)}} \cdot \frac{(1+U^2+V^2)\sqrt{k}}{\sqrt{(1+k+U^2)} + \sqrt{(k-V^2)}} (x\cos l + y\cos m + z\cos n)$$
$$= \{U\varphi'(U) - \varphi(U)\}\sqrt{\frac{k}{k+1}} + V\psi'(V) - \psi(V).$$

Durch Elimination von U und V zwischen diesen Gleichungen erhält man die allgemeine Gleichung der Flächen, in welchen beide Systeme von Krümmungslinien plan sind. Die vorstehenden Gleichungen, in etwas verschiedener Form, hat zuerst Serret aufgestellt (*Journal de Mathém. t. XVIII*). Diese Gleichungen erfordern eine Modification für den Fall, dass der Winkel, welchen die Ebene einer Krümmungslinie mit der Normale zur Fläche bildet, constant ist. Findet dieses statt für das System der Krümmungslinien, in denen v allein variirt, so ist $\frac{Nr'}{\varrho} = k$, wo k eine Constante bedeutet. Man hat dann statt der Gleichungen 65) bis 67) die folgenden:

$$N = k\frac{Q}{r'},\quad M = V\frac{P}{r''},\quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{r''} = -\frac{P}{r''}\frac{Q}{r'}V,\quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{r'} = -k\frac{P}{r''}\frac{Q}{r'},$$
$$\frac{P}{r''}\left[V' - \frac{Q}{r'}(1+V^2+k^2)\right] = 0.$$

Setzt man $V' = \frac{Q}{r'}(1+V^2+k^2)$, so ist $\frac{Q}{r'}$ unabhängig von u, also dann $-k\frac{P}{r''}\frac{Q}{r'} = 0$. Diese Gleichung kann nur bestehen für $r'' = \infty$ oder $k = 0$. Die erste Annahme führt auf developpable Flächen, die sich leichter auf andere Weise untersuchen lassen. Die Annahme $k=0$ zeigt, dass die Ebenen des Systems (v) durch die Normalen zur Fläche gehen. In diesem Falle werden die obigen Gleichungen einfacher:

$$N = 0,\quad \frac{Q}{r'} = \frac{V'}{1+V^2},\quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{r''} = -\frac{P}{r''}\frac{Q}{r'}V = -\frac{P}{r''}\cdot\frac{VV'}{1+V^2}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar: $\frac{P}{r''} = \frac{U'}{\sqrt{(1+V^2)}}$, wo U eine beliebige Function von U, und $U' = \frac{\partial U}{\partial u}$ ist. Die Cosinus der Winkel l, m, n, welche eine Ebene des Systems (u) mit den Achsen bildet, sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$80)\qquad \cos l = \frac{V\cos a - \cos a''}{\sqrt{(1+V^2)}},\quad \cos m = \frac{V\cos b - \cos b''}{\sqrt{(1+V^2)}},\quad \cos n = \frac{V\cos c - \cos c''}{\sqrt{(1+V^2)}}.$$

Durch Differentiation nach v überzeugt man sich leicht, dass l, m, n unabhängig von v, also constant sind. Die Gleichungen der Ebenen der beiden Systeme sind nun:

$$x\cos l + y\cos m + z\cos n = V_1,\quad x\cos a' + y\cos b' + z\cos c' = U_1,$$

wo V_1, U_1 Functionen, respective von v, u allein sind. Die erste Gleichung zeigt, dass die Ebenen des einen Systems sämmtlich einander parallel sind. Wegen $\cos a'\cos l + \cos b'\cos m + \cos c'\cos n = 0$ kann man setzen:

$$81)\qquad \begin{cases} \cos a' = \cos\vartheta\cos l' + \sin\vartheta\cos l'', \\ \cos b' = \cos\vartheta\cos m' + \sin\vartheta\cos m'', \\ \cos c' = \cos\vartheta\cos n' + \sin\vartheta\cos n'', \end{cases}$$

wo ϑ nur von u abhängig ist und die Winkel l, m, n; l', m', n'; l'', m'', n'' zu drei auf einander senkrechten Richtungen im Raume gehören. Die obigen Gleichungen nach u differentiirt, quadrirt und addirt geben:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{P}{r''}\right)^2 + U'^2 = \left(\frac{P}{r''}\right)^2(1+V^2) = U'^2,$$

also, mit Weglassung einer überflüssigen Constanten, $\vartheta = U$. Für diesen Werth von ϑ geht die Gleichung $x\cos a' + y\cos b' + z\cos c' = U_1$ mit Hilfe der Gleichungen 80) über in:

$$82)\qquad (x\cos l' + y\cos m' + z\cos n')\cos U + (x\cos l'' + y\cos m'' + z\cos n'')\sin U = U_1.$$

Die erste Gleichung 81) nach u differentiirt, für $\vartheta = U$,

$$\frac{P}{r''} \cos a + M \cos a'' = (\cos U \cos l'' - \sin U \cos l')\, U',$$

oder da: $M = V \frac{P}{r''}$, $\frac{P}{r''} = \frac{U'}{\sqrt{(1+V^2)}}$,

$$\frac{\cos a + V \cos a''}{\sqrt{(1+V^2)}} = \cos U \cos l'' - \sin U \cos l'.$$

Durch Elimination von $\cos a$ zwischen dieser Gleichung und der ersten Gleichung 80) folgt:

$$\sqrt{(1+V^2)} \cos a'' = -\cos l + (\cos U \cos l'' - \sin U \cos l')\, V.$$

Analoge Gleichungen erhält man für $\cos b''$, $\cos c''$. Aus diesen Gleichungen leitet man leicht die folgende ab:

$$83)\ \begin{cases} \sin U (\cos a'' \cos l' + \cos b'' \cos m' + \cos c'' \cos n') \\ \quad - \cos U (\cos a'' \cos l'' + \cos b'' \cos m'' + \cos c'' \cos n'') = -\frac{V}{\sqrt{(1+V^2)}}, \\ \cos a'' \cos l + \cos b'' \cos m + \cos c'' \cos n = -\frac{1}{\sqrt{(1+V^2)}}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

84) $\Omega = \sin U (x \cos l' + y \cos m' + z \cos n') - \cos U (x \cos l'' + y \cos m'' + z \cos n'')$,

so folgt durch Differentiation nach v:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = Q \sin u\, (\cos a'' \cos l' + \cos b'' \cos m' + \cos c'' \cos n')$$
$$- Q \cos U (\cos a'' \cos l'' + \cos b'' \cos m'' + \cos c'' \cos n''),$$

oder, wegen der ersten Gleichung 83), einfach:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{QV}{\sqrt{(1+V^2)}}.$$

Die Gleichung $x \cos l + y \cos m + z \cos n = V_1$ nach v differentiirt giebt $Q (\cos a'' \cos l + \cos b'' \cos m + \cos c'' \cos n) = \frac{\partial V_1}{\partial v}$, oder mit Rücksicht auf die zweite Gleichung 83), $-\frac{Q}{\sqrt{(1+V^2)}} = \frac{\partial V_1}{\partial v}$. Setzt man hieraus den Werth von Q in $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$, so folgt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = V \frac{\partial V_1}{\partial v}.$$

Die Gleichungen 81) geben für $\vartheta = U$

$$\sin U (\cos a' \cos l' + \cos b' \cos m' + \cos c' \cos n')$$
$$- \cos U (\cos a' \cos l'' + \cos b' \cos m'' + \cos c' \cos n'') = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung und 82), 84) findet man leicht:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = U' U_1.$$

Die beiden Gleichungen $\frac{\partial \Omega}{\partial u} = U' U_1$, $\frac{\partial \Omega}{\partial v} = V \frac{\partial V_1}{\partial v}$ geben:

$$\Omega = \int U' U_1 \, \partial u + \int V \frac{\partial V_1}{\partial v} \, \partial v.$$

Sieht man wieder U_1, V_1 als Functionen von U, V an, setzt $U_1 = \varphi'(U)$, $V_1 = \psi'(V)$, so ist eine Fläche, in welchen die Ebenen des einen Systems planer Krümmungslinien beständig normal zur Fläche sind, die Ebenen des anderen Systems sämmtlich einer festen Ebene parallel sind, durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$85)\quad \left\{\begin{aligned} & x \cos l + y \cos m + z \cos n = \psi'(V), \\ & (x \cos l' + y \cos m' + z \cos n') \cos U \\ & \quad + (x \cos l'' + y \cos m'' + z \cos n'') \sin U = \varphi'(U), \\ & (x \cos l' + y \cos m' + z \cos n') \sin U \\ & \quad - (x \cos l'' + y \cos m'' + z \cos n'') \cos U = \varphi(U) + V\psi'(V) - \psi(V). \end{aligned}\right.$$

In dem besonderen Falle, dass $\varphi(U)$ constant ist, erhält man Rotationsflächen.

Der Fall einer developpabeln Fläche mit planen Krümmungslinien lässt sich leicht auf folgende Weise erledigen. Im Punkte (x, y, z) der Wendecurve seien α, β, γ die Winkel, welche die Tangente mit den Coordinatenachsen bildet, ϱ der Krümmungshalbmesser und r der Torsionsradius. Die Quantiäten $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \varrho, r$ werden als Functionen von s angesehen, wo ∂s das Bogenelement der Wendecurve bezeichnet. Ist (x_1, y_1, z_1) ein Punkt der Fläche, welcher mit dem Punkte (x, y, z) auf derselben Generatrix liegt, v die variable Distanz der beiden Punkte, so hat man:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + (v - s) \cos\alpha, \\ y_1 &= y + (v - s) \cos\beta, \\ z_1 &= z + (v - s) \cos\gamma. \end{aligned}$$

Die Krümmungslinien sind durch $v = Const.$, $s = Const.$ bestimmt. Nimmt man in den vorstehenden Gleichungen s allein variabel, so findet man leicht, mittelst der zu Anfang von X. aufgestellten Gleichungen, für den reciproken Torsionsradius, einer Krümmungslinie, in welcher s allein variirt, folgenden Ausdruck:

$$\frac{\varrho}{v - s} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial s} \frac{\varrho}{r}}{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}.$$

Für eine plane Krümmungslinie verschwindet dieser Ausdruck, man hat dann $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\varrho}{r} = 0$, oder $\frac{\varrho}{r} = Const.$, die Wendecurve der developpabeln Fläche muss also eine Helix sein, wenn beide Systeme der Krümmungslinien plan sein sollen. Diese Bemerkung hat zuerst O. **Bonnet** gemacht (*Journal de l'écol. polyt. tom. XX*, p. 172).

Substituirt man aus den Gleichungen 72)″ die Werthe von $\cos l_1$ und $\cos l_2$ in 72)″, so folgt:

$$\{\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}\}\cos a$$
$$=\left[\sqrt{\frac{k}{1+k}}\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{\frac{1+k}{k}}\sqrt{(k-V^2)}\right]\cos l$$
$$-\left[\frac{U}{\sqrt{(1+k)}}\cos l'+\frac{V}{\sqrt{k}}\cos l''\right].$$

Ganz analoge Werthe findet man für $\cos b$, $\cos c$. Aus diesen Gleichungen leitet man leicht die folgenden ab:

$$\{\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}\}\,(\cos a\cos l+\cos b\cos m+\cos c\cos n)$$
$$=\sqrt{\frac{k}{1+k}}\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{\frac{1+k}{k}}\sqrt{(k-V^2)},$$
$$\{\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}\}\,(\cos a\cos l''+\cos b\cos m''+\cos c\cos n'')$$
$$=-\frac{V}{\sqrt{k}},$$
$$\{\sqrt{(1+k+U^2)}-\sqrt{(k-V^2)}\}\,(\cos a\cos l'+\cos b\cos m'+\cos c\cos n')$$
$$=-\frac{U}{\sqrt{(1+k)}}.$$

Mit Rücksicht auf 70) findet man aus den vorstehenden Gleichungen:

$$86)\quad\left\{\begin{aligned}&V(\cos a\cos l+\cos b\cos m+\cos c\cos n)\sqrt{\frac{1+k}{k}}\\&-(\cos a\cos l''+\cos b\cos m''+\cos c\cos n'')\sqrt{\frac{k-V^2}{k}}=V,\\&\cos a\cos l'+\cos b\cos m'+\cos c\cos n'=-\frac{P}{r''}\frac{U}{U'}\sqrt{\frac{1+k+U^2}{1+k}}.\end{aligned}\right.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lässt sich für die Flächen mit planen Krümmungslinien eine bemerkenswerthe Eigenschaft nachweisen, betreffend die Strictionslinie der windschiefen Fläche, gebildet aus den Normalen längs einer Krümmungslinie *). Sind α, β, γ die Winkel, welche ein Normalschnitt im Punkte (x, y, z) mit den Achsen einschliesst, so ist sein reciproker Krümmungshalbmesser gleich:

$$\frac{(\cos\alpha\cos a''+\cos\beta\cos b''+\cos\gamma\cos c'')^2}{r''}$$
$$+\frac{(\cos\alpha\cos a'+\cos\beta\cos b'+\cos\gamma\cos c')^2}{r'}.$$

Geht der Normalschnitt durch die Tangente zu einer Krümmungslinie, in welcher u allein variirt, so hat man $\alpha=a''$, $\beta=b''$, $\gamma=c''$, der Krümmungshalbmesser ist dann einfach gleich r''. Trägt man auf der

*) Die Normalen längs einer Krümmungslinie bilden keine developpable, sondern eine windschiefe Fläch[illegible]a sich diese Normalen im Allgemeinen nicht schneiden. Die Deduction der Di[illegible]ialgleichung der Krümmungslinien, wie sie in V. nach Monge gegeben, ist ni[illegible] ganz genau, sie wurde nur deshalb genommen, um die bemerkte Gleichung rascher abzuleiten.

Normalen einer Linie des Systems (u) die Quantität r'' ab, so liegt Endpunkt (x_1, y_1, z_1) auf einer Curve doppelter Krümmung, welche Strictionslinie der windschiefen Fläche ist, gebildet aus den Norm längs der Krümmungslinie. Für x_1, y_1, z_1 hat man die Gleichungen:

$$x_1 = x + r'' \cos a, \quad y_1 = y + r'' \cos b, \quad z_1 = z + r'' \cos c.$$

Diese Gleichungen nach u differentiirt geben, nach 37) und 40):

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial r''}{\partial u} \cos a, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{\partial r''}{\partial u} \cos b, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{\partial r''}{\partial u} \cos c.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$87) \left\{ \begin{aligned} & x_1 \cos l' + y_1 \cos m' + z_1 \cos n' = x \cos l' + y \cos m' + z \cos n' \\ & \qquad + r'' (\cos a \cos l' + \cos b \cos m' + \cos c \cos n'), \\ & \frac{\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial x_1}{\partial u} \left(V \sqrt{\frac{1+k}{k}} \cos l - \sqrt{\frac{k - V^2}{k}} \cos l' \right) \\ & + \frac{\partial y_1}{\partial u} \left(V \sqrt{\frac{1+k}{k}} \cos m - \sqrt{\frac{k - V^2}{k}} \cos m' \right) \\ & + \frac{\partial z_1}{\partial u} \left(V \sqrt{\frac{1+k}{k}} \cos n - \sqrt{\frac{k - V^2}{k}} \cos n' \right) \end{aligned} \right\}}{\sqrt{(1+V^2)} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2 \right]}} \\ & = \frac{V}{\sqrt{(1+V^2)}} \sqrt{\frac{1+k}{k}} (\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n) \\ & \quad - \sqrt{\frac{k - V^2}{k}} \frac{1}{\sqrt{(1+V^2)}} (\cos a \cos l' + \cos b \cos m'' + \cos c \cos n'') \end{aligned} \right.$$

Substituirt man aus 75) und 86) für $x \cos l' + y \cos m' + z \cos$ $\cos a \cos l' + \cos b \cos m' + \cos c \cos n'$ ihre Werthe, so geht die erste der v stehenden Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} & x_1 \cos l' + y_1 \cos m' + z_1 \cos n \\ & = \frac{U}{U'} \sqrt{\frac{1+k+U^2}{1+k}} \left[\frac{U' \sqrt{k(1+k)}}{1+k+U^2} (x \cos l + y \cos m + z \cos n) \right. \\ & \quad \left. - \frac{k+1}{1+k+U^2} \frac{U'}{U} U_1 - P \right]. \end{aligned}$$

Wegen 76) reducirt sich diese Gleichung einfach auf:

$$\begin{aligned} x_1 \cos l' + y_1 \cos m' + z_1 \cos n' &= \frac{U}{U'} \sqrt{\frac{1+k+U^2}{1+k}} \left[\frac{\partial U_1}{\partial u} - \frac{U' U_1}{U} \right] \\ &= U^2 \sqrt{\frac{1+k+U^2}{1+k}} \frac{\partial}{\partial U} \frac{U_1}{U}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von v, hieraus f unmittelbar:

Die Krümmungsmittelpunkte aller No schnitte, welche *den Tangenten einer planen Krümmungslinie senkrecht steh* liegen in einer Ebene. Die Ebenen der Krümmungsmittelpunkte für ein System planer Krümmungslinien sind sämmtlich einander parallel.

Dieser Satz gilt natürlich nur für Flächen, in welchen beide Systeme von Krümmungslinien plan sind.

Wegen der ersten Gleichung 86) reducirt sich die rechte Seite der zweiten Gleichung 87) einfach auf $\frac{V}{\sqrt{(1+V^2)}}$. Die linke Seite ist gleich dem Cosinus des Winkels, welchen die Tangente zur obigen Strictionslinie mit einer Richtung bildet, bestimmt durch

$$\frac{V}{\sqrt{(1+V^2)}}\sqrt{\frac{1+k}{k}}\cos l-\frac{1}{\sqrt{(1+V^2)}}\sqrt{\frac{k-V^2}{k}},\ \text{etc.}$$

Dieser Winkel ist gänzlich unabhängig von u. Hieraus folgt:

Die Strictionslinie der windschiefen Fläche, gebildet durch die Normalen längs einer planen Krümmungslinie, ist eine Helix.

Dieser Satz lässt sich auch auf folgende Art darthun. Sind die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines Punktes einer Curve doppelter Krümmung Functionen einer Variabeln u, bezeichnet man durch p das Verhältniss des Krümmungshalbmessers zum Torsionsradius, so ist:

$$88)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial^3 y_1}{\partial u^3} & \frac{\partial^3 z_1}{\partial u^3} \end{vmatrix} = \pm p\left[\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}},$$

wo $\left(\frac{\partial s_1}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2$. Nimmt man in $x_1=x+r''\cos a$ u allein variabel, so geben die Gleichungen 37) und 40):

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\frac{\partial r''}{\partial u}\cos a,\quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 r''}{\partial u^2}\cos a-\frac{P}{r''}\cos a'\frac{\partial r''}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3}=\left(\frac{\partial^3 r''}{\partial u^3}-\frac{P^2}{r''^2}\frac{\partial r''}{\partial u}\right)\cos a\quad\left(2\frac{P}{r''}\frac{\partial^2 r''}{\partial u^2}+\frac{\partial r''}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{P}{r''}\right)\cos a'$$
$$-\frac{P}{r''}M\frac{\partial r''}{\partial u}\cos a''.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und der analogen für $\frac{\partial y_1}{\partial u}$, $\frac{\partial z_1}{\partial u}$ .... reducirt sich die Determinante in 88) auf:

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos a' & \cos b' & \cos c' \\ \cos a'' & \cos b'' & \cos c'' \end{vmatrix}.\ M\left(\frac{P}{r''}\right)^2\left(\frac{\partial r''}{\partial u}\right)^3,$$

also abgesehen vom Zeichen, einfach auf $M\left(\frac{P}{v''}\right)^2\left(\frac{\partial r''}{\partial u}\right)^2$. Es ist ferner $\frac{\partial s_1}{\partial u}=\frac{\partial r''}{\partial u}$, der Factor von $\pm p$ in 88) nimmt folgende einfache Form an: $\left(\frac{P}{r''}\,\frac{\partial r''}{\partial u}\right)^2$. Für $\pm p$ ergiebt sich hieraus der Werth $\frac{r''M}{P}$, diese Quantität ist nach 65) gleich V, p ist also unabhängig von u, mithin gehört der Punkt (x_1, y_1, z_1) für ein constantes v einer Helix an.

XVII.

Beiträge zu Weddle's Methode der Auflösung numerischer Gleichungen.

Von Josef Popper.

(Aus den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. V. Folge. XI. Band. *)

Unter den vielen Methoden für die Auflösung höherer numerischer Gleichungen ist auch eine, die sich von der als höchst vortheilhaft bekannten Horner'schen wesentlich blos in der Darstellungsform der Unbekannten oder der Wurzel unterscheidet. Wird nämlich die Unbekannte nicht als Summe von successiv zu berechnenden Decimalziffern, sondern als das Product von ebenfalls nach einander aufzufindenden Factoren dargestellt, so erhält man die von dem Engländer Weddle erfundene Methode, welche derselbe in der Schrift: „*A new simple and general method of solving Numerical Equations of all orders, by Thomas Weddle, London* 1843 *by Hamilton and Co.* (5 *shill.*)" auseinandersetzte. Seither hat Herr Dr. C. H. Schnuse (in seiner „Theorie und Auflösung der höheren algebraischen und der transcendenten Gleichungen", Braunschweig 1850, im 11. Capitel S. 280—364) sie an höheren algebraischen Gleichungen erläutert.

Die speciellen Vorzüge der genannten Methode als aus diesen Abhandlungen leicht herausfindbar voraussetzend, gedenke ich hier einige Modificationen und Erweiterungen derselben mitzutheilen, durch welche

---

*) *Dieser Abdruck* enthält einige Beispiele weniger, als die Originalabhandlung.

sie auch in den für sie minder günstigen Fällen an Schnelligkeit selbst die *Horner*'sche Methode übertrifft. Ich werde sie ferner behufs der Berechnung imaginärer Wurzeln durch passende Substitutionen vereinfachen und endlich die bisher noch nicht versuchte Anwendung derselben auf transcendente Gleichungen auseinandersetzen.

Der Grad der Schnelligkeit und Genauigkeit der veränderten Methode wird leicht aus den vorzulegenden Beispielen zu ersehen sein, die ich stets mit den vollständigen Rechnungsoperationen vorlegen werde, und ich beginne sonach mit den höheren numerischen Gleichungen.

1. Höhere algebraische Gleichungen mit Einer Unbekannten.

Wenn

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

die gegebene Gleichung $n$ten Grades und a ein gegebener Näherungswerth der Unbekannten ist, so setze ich nach Weddle

$$x = a x_1$$

und erhalte

$$A_0 a^n x_1^n + A_1 a^{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + A_{n-1} a x_1 + A_n = 0.$$

Die neue Unbekannte $x_1 = \frac{x}{a}$ muss, wenn a in der Zahl der obersten dekadischen Einheiten genau angegeben ist, nothwendiger Weise $= 1 + \alpha$ sein, wobei α einen ächten Bruch oder allgemeiner eine positive Zahl < 1 bedeutet. Wird daher dieser Ausdruck für x eingesetzt, so kann α leicht annähernd gefunden werden und x erscheint sodann etwas genauer, als $a(1+\alpha)$. Das wahre x aber muss

$$x = a(1+\alpha)\, x_{11}$$

sein, wo x_{11} wieder $= 1 + \beta$ sein wird, wenn β eine Zahl unterhalb 1 bedeutet; nach Wiederholung der obigen Operation wird auch β erhalten werden und die Unbekannte x durch den genaueren Ausdruck $a(1+\alpha)(1+\beta)$ angedeutet erscheinen. Offenbar könnte man dieses immer wiederkehrende Verfahren sehr weit treiben; wir aber werden stets schon diejenige Genauigkeit als erwünscht voraussetzen, die sich bis auf Einheiten der 6. Decimale erstreckt und in der Hauptsache den eben bezeichneten Weg einschlagend, uns der Logarithmen bedienen, um folgende Vortheile zu bezwecken:

1. Die vielen Potenzirungen und Divisionen werden vermittelst der Logarithmen mit Leichtigkeit verrichtet; demnach können auch
2. die Correctionen der Wurzel schon einzeln in mehreren Decimalstellen bestimmt werden und endlich
3. es werden, um die Wurzel bis auf Einheiten der 6. Decimale zu finden, wegen 2) bloss zwei Transformationen, d. h. die Berechnung von nur zwei corrigirenden Factoren nothwendig sein; ein Vorzug dieser Methode, bei welcher (was den Hauptunterschied zwischen ihr und der Horner'-

schen begründet) spätere Decimalen der Correction nicht überflüssig, so dern als wirklich verbessernde Glieder zu gebrauchen sind, wenn au nicht eben jede folgende Decimale der Correction eine weitere der Wur hervorbringt.

Ich will nun eine Gleichung des 4. Grades vornehmen und den Ga der Operationen behufs der Wurzelauffindung auseinandersetzen.

Es sei 2,7 ein genäherter Werth der Wurzel folgender Gleichung:

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 148{,}6 = 0.$$

Wir setzen $x = 2{,}7\,x_1$, theilen durch $(2{,}7)^4$ und erhalten:

$$x_1^4 + \frac{3}{2{,}7}x_1^3 + \frac{2}{(2{,}7)^2}x_1^2 + \frac{6}{(2{,}7)^3}x_1 - \frac{148{,}6}{(2{,}7)^4} = 0.$$

Wir suchen daher die Logarithmen der Coefficienten:

$log\,3 = 0{,}477121$, $log\,2 = 0{,}301030$, $log\,6 = 0{,}778151$, $log\,148{,}6 = 2{,}172019$;
ebenso:

$$log\,2{,}7 = 0{,}431364$$

und ziehen die Vielfachen des letzteren Logarithmen

$log\,2{,}7 = 0{,}431364$, $2\,log\,2{,}7 = 0{,}862728$, $3\,log\,2{,}7 = 1{,}294092$, $4\,log\,2{,}7 = 1{,}7254$
von den darüber stehenden Logarithmen ab, dadurch bilden wir die Log rithmen der Coefficienten der neuen Gleichung mit der Wurzel $x_1 = (1+\alpha)$

$$0{,}045757,\quad 0{,}438302-1,\quad 0{,}484059-1,\quad 0{,}446563_n.$$

Wenn zu diesen Logarithmen die Zahlen mit beiläufiger Interpolation g sucht werden, so wird angenähert

$$x_1^4 + 1{,}111\,x_1^3 + 0{,}2743\,x_1^2 + 0{,}3048\,x_1 - 2{,}996 = 0.$$

Um eine Gleichung mit der Unbekannten α zu erhalten, berechnet m deren Coefficienten nach der Formel:

$$F(1+\alpha) = F(1) + \alpha F'(1) + \frac{\alpha^2}{1.2}F''(1) + \ldots$$

in welcher die nach einander folgenden Ableitungen der Function $F(x)$ üblicher Weise durch $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, ... angedeutet werden, u erhält angenähert:

$$10\,\alpha^2 + 8{,}186\,\alpha - 0{,}1058 = 0.$$

Durch blose Division erscheint

$$\alpha = \frac{0{,}1058}{8{,}186} = 0{,}013$$

und durch ungefähre quadratische Correctur, da $10.0{,}013^2 = 0{,}0017$ ist,

$$\alpha = \frac{0{,}1058 - 0{,}0017}{8{,}186} = 0{,}0127.$$

$Log\,(1+\alpha)$ ist daher $= log\,(1{,}0127) = 0{,}005481$ und mit diesem Log rithmen ist genau so wie mit $log\,2{,}7$ zu verfahren.

Wir stellen daher die obigen Logarithmen der Coefficienten der Gl *chung mit der* Wurzel x_1 wieder her:

$$0{,}045757,\quad 0{,}438302-1,\quad 0{,}484059-1,\quad 0{,}446563;$$

und ziehen die Vielfachen

$$\log(1+\alpha)=0{,}005481,\quad 2\log(1+\alpha)=0{,}110962,\quad 3\log(1+\alpha)=0{,}116443,$$
$$4\log(1+\alpha)=0{,}021924$$

von den über ihnen stehenden Logarithmen ab, wonach die Reste

$$0{,}040276,\quad 0{,}427340-1,\quad 0{,}467616-1,\quad 0{,}424639_n$$

die Logarithmen der Coefficienten der neueren Gleichung mit der Wurzel $x_{II}=1+\beta$ darstellen; mittelst genauer Interpolation erhalten wir:

$$x_{II}^4+1{,}097147\,x_{II}^3+0{,}267509\,x_{II}^2+0{,}293505\,x_{II}-2{,}658512=0.$$

Wenn die Wurzel wie oben um 1 vermindert wird, entsteht

$$\beta=\frac{2{,}658512-2{,}658188}{8{,}12}=\frac{0{,}000324}{8{,}12}=0{,}0000399$$

(ohne eine quadratische Correctur anzuwenden).

Da nun $\log(1+\beta)=\log 1{,}000039=0{,}000017$ ist, so zeigt sich, weil angenähert $x=a(1+\alpha)(1+\beta)$ ist,

$$\log x=\log a+\log(1+\alpha)+\log(1+\beta)$$
$$\log x=0{,}431364+0{,}005481+0{,}000017=0{,}436862$$
$$x=2{,}734309.$$

Die wahre Wurzel aber ist 2,734400.

Ich lasse nun zwei andere Beispiele folgen, bei denen stets die ganze Rechnung, wie sie erforderlich war, aufgenommen wurde:

I. Beispiel.

$$x^5-14\,x^4\quad+26\,x^3\quad+242\,x^2\quad-399\,x\quad-1300=0,\quad x=3{,}8\,x_1$$
$$0{,}146128_n\quad 1{,}414973\quad 2{,}383815\quad 2{,}600973_n\quad 3{,}113943_n$$
$$0{,}566344_n\quad 0{,}255405\quad 0{,}644463\quad 0{,}281837_n\quad 0{,}215023_n$$
$$x_1^5-3{,}6842\,x_1^4+1{,}8005\,x_1^3+4{,}4102\,x_1^2-1{,}9135\,x_1-1{,}6407=0$$
$$-2{,}2935\,\alpha^2+2{,}5716\,\alpha-0{,}0277=0$$
$$\frac{0{,}0277}{2{,}57}=0{,}010,\quad \frac{0{,}0277+0{,}0002}{2{,}5716}=0{,}0108=\alpha,$$
$$0{,}561679_n\quad 0{,}246075\quad 0{,}630468\quad 0{,}263177_n\quad 0{,}191608_n$$
$$x_{II}^5-3{,}644842\,x_{II}^4+1{,}762280\,x_{II}^3+4{,}270392\,x_{II}^2-1{,}833059\,x_{II}-1{,}554886=0$$
$$+2{,}415197\,\beta-0{,}000115=0$$
$$\frac{0{,}000115}{2{,}415197}=0{,}000048=\beta.$$

$$\log 3{,}8=0{,}579784$$
$$\log(1+\alpha)=0{,}004665$$
$$\log(1+\beta)=0{,}000021$$
$$\log x=0{,}584470$$
$$x=3{,}841223$$

II. Beispiel.

$$x^{20} + 5x^{17} \quad + 131x^{11} \quad - 8762{,}58 = 0, \qquad x = 1{,}4x_1$$

$$0{,}698970 \quad 2{,}117271 \quad 3{,}942632_n$$

$$0{,}260586 \quad 0{,}802119 \quad 1{,}020072_n$$

$$x_1^{20} + 1{,}8221\,x_1^{17} + 6{,}3406\,x_1^{11} - 10{,}4730 = 0$$

$$787\,\alpha^2 \quad + 120{,}7\,\alpha \quad - 1{,}3104 = 0,$$

wobei die beiden ersten Coefficienten nur näherungsweise berechnet si[nd]

$$\frac{1{,}3104}{120{,}7} = 0{,}01, \quad \frac{1{,}3104 - 0{,}0787}{120{,}7} = 0{,}0120 = \alpha$$

$$0{,}247365 \quad 0{,}762456 \quad 0{,}931032_n$$

$$x_{II}^{20} + 1{,}767522\,x_{II}^{17} + 5{,}787026\,x_I^{11} \quad - 8{,}549333 = 0$$

$$114\beta + 0{,}005215 = 0,$$

wobei der erste Coefficient nur genähert ist,

$$\frac{-0{,}005215}{114} = -0{,}000046 = \beta.$$

$$\begin{aligned} \log 1{,}4 &= 0{,}146128 \\ \log(1+\alpha) &= 0{,}004407 \\ \log(1+\beta) &= 9{,}999980 \\ \hline \log x &= 0{,}150512 \\ x &= 1{,}414213 \end{aligned}$$

2. Höhere algebraische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Sind mehrere algebraische Gleichungen mit einer gleich grossen A[n]zahl von Unbekannten gegeben, so lässt sich die in den vorhergehend[en] Beispielen angewendete Methode leicht auch auf diesen Fall ausdehne[n].

Gesetzt, man habe zwei Gleichungen mit den Unbekannten x und und man kenne einen Näherungswerth a von x, sowie einen Näherung[s]werth b von y.

Man setze

$$x = ax_1, \quad y = by_1,$$

so werden zwei transformirte Gleichungen mit den Unbekannten x_1 und [y_1] erhalten

$$F(x_1, y_1) = 0, \quad f(x_1, y_1) = 0.$$

Setzt man

$$x_1 = 1 + \alpha, \quad y_1 = 1 + \beta$$

und entwickelt nach dem Taylor'schen Lehrsatze bis zu den Gliedern d[er] 2. Ordnung inclusive, so erhält man

$$1) \quad F(1,1) + \alpha\frac{dF(1,1)}{dx_1} + \beta\frac{dF(1,1)}{dy_1} + \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2F(1,1)}{dx_1\,dy_1} + \alpha\beta\cdot\frac{d^2F(1,1)}{dx_1\,dy_1} + \frac{\beta^2}{2}\,\frac{d^2F(1,1)}{dy_1^2} = 0$$

und

$$2)\ f(1,1) + \alpha \frac{df(1,1)}{dx_1} + \beta \frac{df(1,1)}{dy_1} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{d^2 f(1,1)}{dx_1\, dy_1} + \alpha\beta \cdot \frac{d^2 f(1,1)}{dx^1\, dy_1} + \frac{\beta^2}{2} \frac{d^2 f(1,1)}{dy_1^2} = 0.$$

Zuerst werden die Glieder der 2. Ordnung vernachlässigt und zwei Gleichungen von der Form

$$3)\qquad A\alpha + B\beta = V,$$

$$4)\qquad A_1\alpha + B_1\beta = V_1$$

erhalten, welche genäherte Werthe für α und β geben, welche zur quadratischen Correction in den Gleichungen 1) und 2) benutzt werden. Das Resultat sind zwei Gleichungen, ganz ähnlich den Gleichungen 3) und 4), in welchen nur V und V_1 andere Werthe angenommen haben. Die Auflösung dieser Gleichungen giebt verbesserte Werthe von α und β.

Durch Substitution von

$$x_1 = (1+\alpha)\, x_{\text{II}} \quad \text{und} \quad y_1 = (1+\beta)\, y_{\text{II}}$$

erhält man zwei Gleichungen

$$F(x_{\text{II}}, y_{\text{II}}) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_{\text{II}}, y_{\text{II}}) = 0,$$

in welchen die Functionszeichen insofern eine andere Bedeutung haben, als die Coefficienten andere sind. Setzt man

$$x_{\text{II}} = 1 + \alpha_1 \quad \text{und} \quad y_{\text{II}} = 1 + \beta_1,$$

so erhält man die Benutzung der Taylor'schen Reihe

$$F(1,1) + \alpha_1 \frac{dF(1,1)}{dx_{\text{II}}} + \beta_1 \frac{dF(1,1)}{dy_{\text{II}}} = 0$$

und

$$f(1,1) + \alpha_1 \frac{df(1,1)}{dx_{\text{II}}} + \beta_1 \frac{df(1,1)}{dy_{\text{II}}} = 0,$$

wobei die Glieder, von der zweiten Ordnung angefangen, vernachlässigt werden. Die Auflösung dieser beiden Gleichungen giebt α_1 und β_1 und damit

$$x = a\,(1+\alpha)\,(1+\alpha_1) \quad \text{und} \quad y = b\,(1+\beta)\,(1+\beta_1).$$

Beispiel. Es seien gegeben die zwei Gleichungen

$$x^5 + 8x^3 y + 10xy^2 - 189{,}562 = 0,$$

$$y^4 + y^3 x + 20yx^2 - 174{,}884 = 0$$

und man kennt die Näherungswerthe

$$a = 1{,}7, \quad b = 2{,}2,$$

x^5 +	$8x^3y$ +	$10xy^2$	$-189{,}562 = 0$
0,000000	0,930090	1,000000	
1,152245	0,691347	0,230449	
	0,342423	0,684846	
1,152245	1,936860	1,915295	

$$14{,}198\, x_1^5 + 86{,}469\, x_1^3 y_1 + 82{,}280\, x_1 y_1^2 - 189{,}562 = 0$$

$$1)\qquad (401\alpha^2 + 424\alpha\beta + 82\beta^2) + (413\alpha + 251\beta) - 6{,}615 = 0$$

y^4 +	$y^3 x$ +	$20\, y x^2$	$-178{,}884 = 0$
0,000000	0,000000	1,301030	
	0,230449	0,460898	
1,369692	1,027269	0,342423	
1,369692	1,257718	2,104351	

$$23{,}425\, y_1^4 + 18{,}102\, y_1^3 x_1 + 127{,}160\, y_1 x_1^2 - 174{,}884 = 0$$

2) $$(127\,\alpha^2 + 309\,\alpha\beta + 195\,\beta^2) + (272\,\alpha + 275\,\beta) - 6{,}197 = 0$$

Aus 1) und 2) erhält man mit Vernachlässigung der Glieder de ten Ordnung

$$\alpha = 0{,}0058, \quad \beta = 0{,}0168$$

und damit

$$\alpha^2 = 0{,}000033, \quad \alpha\beta = 0{,}000097, \quad \beta^2 = 0{,}000282.$$

Damit wird die quadratische Correction in

$$\text{Gl. 1): } 401\,\alpha^2 + 424\,\alpha\beta + 82\,\beta^2 = 0{,}076,$$
$$\text{- 2): } 127\,\alpha^2 + 309\,\alpha\beta + 195\,\beta^2 = 0{,}089$$

und die verbesserten Werthe von α und β erhält man aus den Gleic

$$413\,\alpha + 251\,\beta - 6{,}539 = 0$$
$$272\,\alpha + 275\,\beta - 6{,}108 = 0$$
$$\alpha = 0{,}00586, \quad \beta = 0{,}0164$$
$$\log(1+\alpha) = 0{,}002538, \quad \log(1+\beta) = 0{,}007065$$

1,152245	1,9 6860	1,915295
0,012690	0,007614	0,002538
	0,007065	0,114130
1,164935	1,951939	1,931963

$$14{,}6196\, x_{II}^5 + 89{,}4415\, x_{II}^3 y_{II} + 85{,}4994\, x_{II} y_{II}^2 - 189{,}562 = 0$$

3) $$427\,\alpha_1 + 260\,\beta_1 - 0{,}0015 = 0$$

1,369692	1,257718	2,104351
	0,002538	0,005076
0,028260	0,021 95	0,007065
1,397952	1,281451	2,116492

$$25{,}0007\, y_{II}^4 + 19{,}1184\, y_{II}^3 x_{II} + 130{,}7651\, y_{II} x_{II}^2 - 174{,}884 = 0$$

4) $$281\,\alpha_1 + 288\,\beta_1 + 0{,}0002 = 0.$$

Aus 3) und 4) folgt

$$\alpha_1 = +0{,}000010, \quad \beta_1 = -0{,}000010$$
$$\log(1+\alpha_1) = 0{,}000004, \quad \log(1+\beta_1) = 9{,}999996.$$

$$x = 1{,}7\,(1+\alpha)\,(1+\alpha_1)$$
$$\log 1{,}7 = 0{,}230449$$
$$\log(1+\alpha) = 0{,}002538$$
$$\log(1+\alpha_1) = 0{,}000004$$
$$\log x = 0{,}233991$$
$$x = 1{,}709980$$

$$y = 2{,}2\,(1+\beta)\,(1+\beta_1)$$
$$\log 2{,}2 = 0{,}342423$$
$$\log(1+\beta) = 0{,}007065$$
$$\log(1+\beta_1) = 9{,}999996$$
$$\log y = 0{,}349484$$
$$y = 2{,}236062$$

3. Berechnung der imaginären Wurzeln höherer Gleichungen.

Die Weddle'sche Methode eignet sich in vorzüglichem Grade zur Berechnung der imaginären Wurzeln höherer Gleichungen.

Es sei

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

die gegebene Gleichung und man kenne einen Näherungswerth

$$a = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

der gegebenen Wurzel. Setzt man

$$x = a x_1 = \varrho x_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so wird die transformirte Gleichung mit der Unbekannten x_1

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} & A_0\varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,x_1^n \\ & + A_1\varrho^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi]\,x_1^{n-1} \\ & + A_2\varrho^{n-2}[\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi]\,x_1^{n-2} + \ldots \\ & + A_{n-1}\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,x_1 + A_n = 0 \end{aligned}\right.$$

sein. Ist a ein genäherter Werth der unbekannten Wurzel x, so wird x_1 nicht viel von der Einheit verschieden, aber im Allgemeinen eine complexe Grösse sein. Setzt man also

$$x_1 = 1 + \alpha + \beta i,$$

so werden α und β kleine Grössen sein. Bezeichnet man das Polynom der Gleichung 1) mit

$$F(x_1) = 0,$$

so giebt die erwähnte Substitution

$$F(1 + \alpha + \beta i) = 0$$

oder nach dem Taylor'schen Lehrsatze, indem man bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung inclusive entwickelt

$$2)\qquad F(1) + F'(1)\,(\alpha+\beta i) + \tfrac{1}{2}F''(1)\,(\alpha+\beta i)^2 = 0.$$

Die Grössen $F(1)$, $F'(1)$ und $\frac{1}{2}F''(1)$ sind complexe Coefficienten, welchen man die Form

$$F(1) = R\,(\cos\lambda + i\sin\lambda),\quad F'(1) = R_1\,(\cos\lambda_1 + i\sin\lambda_1)$$

und

$$\tfrac{1}{2}F''(1) = R_2\,(\cos\lambda_2 + i\sin\lambda_2),$$

wobei R, R_1, R_2, λ, λ_1, λ_2 bekannte Grössen sind, geben kann. Ebenso lässt sich $\alpha + \beta i$ auf die Form bringen

$$\alpha + \beta i = r\,(\cos\psi + i\sin\psi),$$

wo aber r und ψ unbekannte Grössen sind.

Die Gleichung 2) nimmt dann folgende Form an

3) $R_2 r^2 [\cos(2\psi + \lambda_2) + i \sin(2\psi + \lambda_2)] + R_1 r [\cos(\psi + \lambda_1) + i \sin(\psi$ -
$+ R (\cos\lambda + i \sin\lambda) = 0.$

Da $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ eine kleine Grösse ist, so kann man in ers proximation r^2 vernachlässigen und die Gleichung 3) reducirt sich a

$$R_1 r [\cos(\psi + \lambda_1) + i \sin(\psi + \lambda_1)] + R (\cos\lambda + i \sin\lambda) = 0,$$

aus welcher mit Leichtigkeit

$$r = \frac{R}{R_1} \quad \text{und} \quad \psi = 180^0 + (\lambda - \lambda_1)$$

folgt. Mit diesen genäherten Werthen von r und ψ berechnet n Glied der zweiten Ordnung

$$R_2 r^2 [\cos(2\psi + \lambda_2) + i \sin(2\psi + \lambda_2)]$$

und sucht auf dieselbe Weise wie früher die neuen verbesserten von r und ψ. Kennt man r und ψ, so kennt man auch

$$\alpha + \beta i = r (\cos\psi + i \sin\psi)$$

und

$$1 + \alpha + \beta i = \varrho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1),$$

welches ein genäherter Werth von x_1 ist und wo ϱ_1 nahe gleich der 1 φ_1 aber ein kleiner Winkel ist. Setzt man

$$x_1 = (1 + \alpha + \beta i) x_{II} = \varrho_1 x_{II} (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1),$$

so erhält man eine transformirte Gleichung mit der Unbekannten x_{II}, eine ganz ähnliche Form wie die Gleichung 1) besitzt, nur ist in de

$$\varrho \text{ in } \varrho\varrho_1,$$

also

$$\log\varrho \text{ in } \log\varrho + \log\varrho_1$$

und

$$\varphi \text{ in } \varphi + \varphi_1$$

übergegangen. Bezeichnet man auch dieses Polynom wieder mit

$$F(x_{II}) = 0, \tag{4}$$

so wird

$$x_{II} = 1 + \alpha_1 + \beta_1 i$$

und die Gleichung 4) bis auf Glieder der ersten Ordnung genau ent

$$F(1) + F'(1)(\alpha_1 + \beta_1 i) = 0$$

sein. Man findet wie oben $\alpha_1 + \beta_1 i$ und damit

$$x_{II} = 1 + \alpha_1 + \beta_1 i = \varrho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2),$$

womit man in der Regel die Rechnung schliessen kann. Die Wu Gleichung ist dann

$$x = a x_1 x_{II} = \varrho \varrho_1 \varrho_2 [\cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2)].$$

Durch den Gebrauch der Gauss'schen Logarithmen für die oder Differenz zweier Zahlen liesse sich die an sich schon einfach nung nicht unwesentlich abkürzen. In den folgenden Beispielen sind die Gauss'schen Logarithmen nicht benutzt worden.

Beispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$x^{10} + 15x^7 - 100x^4 + 276464x + 3520160 = 0$$

und bekannt der Näherungswerth

$$a = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2{,}6 + 3{,}9\,i$$

$$\log\varrho = 0{,}670916 \qquad \varphi = 56^0\,18'\,36{,}0''$$

$$\begin{array}{lll} 0{,}000000 & 1{,}176091 & 2{,}000000\ (180^0\ 0'\ 0''),\ 5{,}441638 \\ \underline{6{,}709160} & \underline{4{,}696412} & \underline{2{,}683664\ (225\ 14\ 24\ ),\ 0{,}670916} \end{array}$$

$$6{,}709160\,(203^0\,6'0''),\ 5{,}872503\ (34^0\,10'\,12''),\ 4{,}683664\ (\ 45\ 14\ 24\ ),\ 6{,}112554\ (56^0\,18'\,36'')$$

$$0{,}6729_n \quad 6{,}3029_n \quad 5{,}7902 \quad 5{,}6219 \quad 4{,}5314 \quad 4{,}5349 \quad 5{,}8566 \quad 6{,}0328$$

$$(-4709 - 2009\,i)\,x_1^{10} + (616{,}9 + 418{,}7\,i)\,x_1^7 + (33{,}99 + 34{,}27\,i)\,x_1^4 + (718{,}8 + 1078\,i)\,x$$
$$+ 3520 = 0,$$

wenn man der Kürze wegen die ganze Gleichung durch 10^3 dividirt. Setzt man

$$x_1 = 1 + \alpha + \beta i,$$

so ist bis auf die Glieder der zweiten Ordnung genau

$$(-196746 - 81406\,i)\,(\alpha + \beta i)^2 + (-41917 - 15944\,i)\,(\alpha + \beta i) + (181 - 478\,i) = 0$$
$$5{,}3319\ (202^0\,17') \qquad 4{,}6517\ (200^0\,49') \qquad 2{,}7084\ (290^0\,45'),$$

wobei die zuletzt angeführten Zahlen die Logarithmen der Moduli und die Argumente der drei complexen Coefficienten sind.

Mit Vernachlässigung der Glieder der zweiten Ordnung ist genähert

$$\log \textit{Modulus}\ (\alpha + \beta i) = 8{,}0567, \quad \textit{Argument}\ (\alpha + \beta i) = 269^0\,56'.$$

Für das complexe Glied der zweiten Ordnung findet man damit

$$\text{den } \log \textit{Modulus} = 44{,}53, \quad \text{das } \textit{Argument} = 22^0\,9'$$

und dieses Glied selbst

$$25{,}82 + 10{,}51\,i.$$

Den verbesserten Werth von $\alpha + \beta i$ erhält man aus

$$(-41917 - 15944\,i)\,(\alpha + \beta i) + (206{,}8 - 467{,}5) = 0$$
$$4{,}6517\ (200^0\,49') \qquad 2{,}7086\ (293^0\,52')$$

und damit

$$\log \textit{Modulus}\ (\alpha + \beta i) = 8{,}0569, \quad \textit{Argument}\ (\alpha + \beta i) = 273^0\,3'$$

$$\alpha + \beta i = + 0{,}0006 - 0{,}0114\,i$$

$$\log \varrho_1 = \log \textit{Modulus}\ (1 + \alpha + \beta i) = 0{,}000289$$

$$\varphi_1 = \textit{Argument}\ (1 + \alpha + \beta i) = - 0^0\,39'\,6''$$

$$6{,}709160\ (203^0\ 6'0''),\ 5{,}872503\ (34^0 10' 12''),\ 4{,}683664\ (45^0 14' 24''),\ 6{,}112554\ (56^0 18' 36''),$$
$$\underline{0{,}002890\ (-6\ 31\ 0\ ),\ 0{,}002023\ (-4\ 33\ 42\ ),\ 0{,}001156\ (-2\ 36\ 24\ ),\ 0{,}000289\ (-0\ 39\ \ 6\ ),}$$
$$6{,}712050\ (196\ 35\ 0\ ),\ 5{,}874526\ (29\ 36\ 30\ ),\ 4{,}684820\ (42\ 38\ \ 0\ ),\ 6{,}112843\ (55\ 39\ 30\ ),$$
$$6{,}693599_n\ \ 6{,}167519_n,\ 5{,}813757\ \ 5{,}568313,\ \ 4{,}551523\ \ 4{,}515604,\ \ 5{,}864220\ \ 6{,}029659$$

$$(-4938545 - 1470682\,i)\,x_{11}^{10} + (651264 + 379095\,i)\,x_{11}^7 + (35606 + 32780\,i)\,x_{11}^4$$
$$+ (731510 + 1070679\,i)\,x_{11} + 3520160 = 0.$$

Setzt man

$$x_{11} = 1 + \alpha_1 + \beta_1\,i,$$

so ist mit Vernachlässigung der Glieder der zweiten Ordnung

$$-43952668 - 10914356\,i)\,(\alpha_1 + \beta_1 i) + (-5 + 2872\,i) = 0$$
$$7{,}6559\ (193^0\,57') \qquad 3{,}4583\ (90^0\,6')$$

$$\log \text{Modulus}\,(\alpha_1+\beta_1 i) = 5{,}8024-10, \quad \text{Argument}\,(\alpha_1+\beta_1 i) = 76^\circ 9'$$

$$\alpha_1+\beta_1 i = 0{,}0000\,1519 + 0{,}0000\,6160\,i$$

$$\log \varrho_2 = \log \text{Modulus}\,(1+\alpha_1+\beta_1 i) = 0{,}000006{,}5$$

$$\varphi_2 = \text{Argument}\,(1+\alpha_1+\beta_1 i) = 0^\circ 0' 12{,}7''$$

$$\begin{array}{ll} \log \varrho = 0{,}670916 & \varphi = +\,56^\circ 18' 36{,}0'' \\ \log \varrho_1 = 0{,}000289 & \varphi_1 = -\;\;0\;\;39\;\;6{,}0 \\ \log \varrho_2 = 0{,}000006{,}5 & \varphi_2 = +\;\;0\;\;\;0\;\;12{,}7 \\ \hline \log \varrho\varrho_1\varrho_2 = 0{,}671211{,}5 & \varphi+\varphi_1+\varphi_2 = 55^\circ 39' 42{,}7'' \end{array}$$

$$\log \varrho\varrho_1\varrho_2 \cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2) = 0{,}422549, \quad \log \varrho\varrho_1\varrho_2 \sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2) = 0{,}58804$$

$$x = 2{,}645750 + 3{,}872991\,i.$$

Der angenommene Werth war aber

$$x = \sqrt{7} + i\sqrt{15}$$

$\log \sqrt{7} = 0{,}422\,549$ vollkommen übereinstimmend mit dem obigen Logarithmus,

$\log \sqrt{15} = 0{,}588\,045{,}5$ bis auf eine halbe Einheit der sechsten Decimale mit dem obigen Logarithmus übereinstimmend.

4. Auflösung transcendenter Gleichungen.

Auch bei dieser Art von Gleichungen wollen wir die Verfahrungsweise für algebraische Gleichungen consequent durchführen, also nicht die transcendenten Gleichungen in höhere algebraische verwandeln, sondern die gegebene Gleichung zweimal transformiren (das zweite Mal mit genauer Interpolation), um die Wurzel, die genähert bis in die erste Decimale bekannt sein soll, mit zwei corrigirenden Factoren zu multipliciren, wodurch die Wurzel in der Regel bis auf Einheiten der sechsten Decimale genau erhalten wird.

Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$1) \qquad 16^x + 25^x + 36^x - 36767{,}98 = 0$$

und ein angenäherter Werth von x sei $a = 2{,}8$.

Wir setzen

$$x = a(1+\beta) = 2{,}8(1+\beta)$$

und der Kürze halber

$$m = 16^{2,8}, \quad n = 25^{2,8}, \quad p = 36^{2,8},$$

so wird die obige Gleichung übergehen in

$$m\,.\,m^\beta + n\,.\,n^\beta + p\,.\,p^\beta - 36767{,}98 = 0$$

oder wenn man m^β, n^β und p^β als Exponentielle in Reihen entwickelt und bei der zweiten Potenz von β stehen bleibt

$$m(1+\beta lm+\tfrac{1}{2}\beta^2 lm^2) + n(1+\beta ln+\tfrac{1}{2}\beta^2 ln^2) + p(1+\beta lp+\tfrac{1}{2}\beta^2 lp^2) - 36767{,}98 = 0$$

oder

$$2) \qquad (m+n+p-36767{,}98) + \frac{\beta}{M}(m\log m + n\log n + p\log p)$$

$$+ \frac{\beta^2}{2M^2}(m\log m^2 + n\log n^2 + p\log p^2) = 0.$$

Vernachlässigt man einstweilen die zweite Potenz von β, so erhält man einen vorläufigen Werth

$$\beta = \frac{M[36767,98 - (m+n+p)]}{m \log m + n \log n + p \log p}.$$

Mit diesem vorläufigen Werthe von β wird das Glied der zweiten Ordnung in der Gleichung 2) berechnet und sodann nach Anbringung dieser quadratischen Correction ein neuer verbesserter Werth von β erhalten.

Wir wollen noch ganz kurz ein einzelnes Glied der Gleichung in seiner Entwickelung bis zum Schlusse der zweiten Transformation näher betrachten, z. B. das Glied 16^x.

Es ist

$$m = 16^{2,8},$$

daher

$$\log m = 2,8 \log 16,$$
$$\log \log m = \log 2,8 + \log \log 16.$$

Diese Grösse $\log \log m$ ist die einzige, die man mit genauer Interpolation zu berechnen hat, und dies nur, weil sie bei der zweiten Transformation wieder benutzt wird, wie leicht im Voraus einzusehen.

Zu $\log \log m$ nimmt man sogleich $\log m$ und annähernd m.

Als Factor von β erscheint ferner der Ausdruck $m \log m$; es ist aber

$$\log (m \log m) = \log m + \log \log m,$$

daher ergiebt sich dieser Logarithmus aus der Addition zweier bekannter Logarithmen und man hat nur annähernd die dazu gehörende Zahl zu suchen. Ebenso verhält es sich mit $m (\log m)^2$, da

$$\log (m \log m^2) = \log m + 2 \log m$$

ist, also auch hier bereits berechnete Grössen zur Verwendung kommen

Für die zweite Transformation ist

$$m' = 16^{2,8(1-\beta)},$$
$$\log m' = 2,8\,(1+\beta) \log 16,$$
$$\log \log m' = \log (2,8 \log 16) + \log (1+\beta) = \log \log m + \log (1+\beta),$$

so dass sich die meisten der in der Rechnung vorkommenden Grössen mit geringer Mühe auseinander ableiten lassen, wie die folgenden Beispiele noch deutlicher zeigen werden.

5. Neue Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen.

Zum Schlusse will ich noch ein anderes Verfahren, die Wurzeln höherer Gleichungen zu finden, auseinandersetzen, welches in einer abgeänderten Darstellung der Unbekannten jeder algebraischen sowohl, als auch jeder transcendenten Gleichung besteht, indem nämlich für die Unbekannte x die Form einer Exponentiellen $x = a^{1+\alpha}$ angenommen wird, unter a ein genäherter Werth der Wurzel verstanden.

Wie die Durchführung der Rechnung durch die verschiedenen Operationen erfolgt, wird das folgende Beispiel zeigen, aus welchem auch ersichtlich ist, dass die Auflösung der im letzten Beispiel angeführten transcendenten Gleichung das Muster für alle derartigen Wurzelauffindungen darstellt.

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung

1) $$x^4 - 24x^3 + 195x^2 - 612x + 580 = 0$$

und man kenne den Näherungswerth

$$a = 1{,}7, \quad \log a = 0{,}230449.$$

Man setzt

$$x = a^{1+\alpha}$$

und erhält

2) $$a^{4+4\alpha} - 24a^{3+3\alpha} + 195a^{2+2\alpha} - 612a^{1+\alpha} + 580 = 0$$

oder

3) $$(a^4 - 24a^3 + 195a^2 - 612a + 580) + \alpha\frac{\log a}{M}(4a^4 - 3{,}24a^3 + 2{,}195a^2 - 1{,}612a)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{\log a}{M}\right)^2(16a^4 - 9{,}24a^3 + 4{,}195a^2 - 1{,}612a) = 0,$$

indem man bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung inclusive entwickelt.

0,000000	$1{,}380211_n$	2,290035	$2{,}786751_n$		
0,921796	0,691347	0,460898	0,230449		
0,921796	$2{,}071558_n$	2,750933	$3{,}017200_n$		
8,352	$-$ 117,912	$+$ 563,551	$-$ 1040,400	$+$ 580,000	$= -$ 6,409
33,408	$-$ 353,736	$+$ 1127,102	$-$ 1040,400		$= -$ 233,626
133,632	$-$ 1061,208	$+$ 2254,204	$-$ 1040,400		$= +$ 286,228

Ferner ist

$$\log\log a = 9{,}362575 \qquad \log\tfrac{1}{2} = 9{,}698970,$$
$$\log M = 9{,}637785 \qquad \log\left(\frac{\log a}{M}\right)^2 = 9{,}449580$$
$$\log\left(\frac{\log a}{M}\right) = 8{,}724790 \qquad \log\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log a}{M}\right)^2 = 9{,}148550$$
$$\log(-233{,}626) = 2{,}368521_n \qquad \log 286{,}228 = 2{,}456712$$
$$2{,}093311_n \qquad 1{,}605262$$

Die Gleichung 3) übergeht somit in

4) $$(0{,}806790_n) + (2{,}093311_n)\,\alpha + (1{,}605262\,\alpha^2 = 0,$$

wo die eingeklammerten Grössen die Logarithmen der entsprechenden Coefficienten sind. Mit Vernachlässigung von α^2 erhält man zunächst

$$\text{vorläufiger Werth von } \log\alpha = 8{,}713479_n$$
$$\log\alpha^2 = 7{,}426958$$
$$1{,}605262$$
$$9{,}032220$$

das Glied der zweiten Ordnung $+ 0{,}1077$

$$
\begin{array}{r}
+\ 0{,}1077 \\
-\ 6{,}409 \\
\hline
-\ 6{,}3013
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\log(-6{,}3013) &= 0{,}799431_n \\
&\ 2{,}093311 \\
\hline
\text{verbesserter Werth von } \log a &= 8{,}706120_n \\
\log\log a &= 9{,}302575 \\
\hline
\log(\alpha \log a) &= 8{,}068695_n \\
\alpha \log a &= -0{,}011714
\end{aligned}
$$

An die Stelle von a tritt nun $a' = a^{1+\alpha}$

„ „ „ $\log a$ „ „ $\log a' = (1+\alpha)\log a = \log a + \alpha \log a$

„ „ „ $n \log a$ „ „ $n \log a' = n(1+\alpha)\log a = n \log a + n\alpha \log a$

0,921796	2,071558$_n$	2,750933	3,017200$_n$		
0,046856	0,035142	0,023428	$-0{,}011714$		
0,874940	2,036416$_n$	2,727505	3,005486$_n$		
7,498	$-108{,}747$	$+533{,}955$	$-1012{,}713$	$+580{,}000$	$= -0{,}007$
29,992	$-326{,}341$	$+1067{,}910$	$-1012{,}713$		$= -241{,}152$

$$
\begin{aligned}
\log a &= 0{,}230449 \\
\alpha \log a &= -0{,}011714 \\
\hline
\log a' &= 0{,}218735
\end{aligned}
$$

$$\frac{\log a'}{M} = 0{,}504 \text{ (genähert).}$$

Statt der Gleichung 4) ist nun folgende aufzulösen

$$-0{,}007 \quad -241.0{,}504\,\alpha' = 0$$

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= -0{,}0000576 \\
\log a' &= 0{,}218735 \\
\alpha' \log a' &= -0{,}000012{,}5 \\
\hline
\log a'' &= 0{,}218722{,}5 \\
x = a'' &= 1{,}654712.
\end{aligned}
$$

XVIII.

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Flächen.

Von M. Dietrich,
Lehrer an der Gewerbeschule zu München.

Einleitung.

Von den bis jetzt bekannten allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Curven sind wohl die folgenden drei von Newton und Cotes bereits ausgesprochenen, welche die Abschnitte betreffen, die durch eine solche Curve auf parallelen oder durch feste Punkte gehenden Transversalen gemacht werden, als die bedeutendsten anzusehen.

1. „Wenn man in der Ebene einer algebraischen Curve Transversalen zieht, die unter einander parallel sind, und auf jeder von ihnen das arithmetische Mittel der Abstände ihrer Schnittpunkte mit der Curve von einem beliebigen Punkt der Transversalen von letzterem aus aufträgt, so liegen die anderen Endpunkte dieser arithmetischen Mittel in einer Geraden."

2. „Wenn man um einen festen Punkt in der Ebene einer algebraischen Curve eine Transversale sich drehen lässt, welche die Curve in so vielen Punkten schneidet, als deren Gradzahl anzeigt, und auf dieser Transversalen in jeder ihrer Lagen das harmonische Mittel der Abstände ihrer Schnittpunkte mit der Curve von jenem festen Punkt aus aufträgt, so liegen die anderen Endpunkte dieser harmonischen Mittel in einer Geraden."

3. „Wenn man durch irgend einen Punkt in der Ebene einer algebraischen Curve zwei Transversalen parallel zu zwei festen Geraden zieht, so stehen die Producte der Abschnitte, also auch die geometrischen Mittel der letzteren, welche auf diesen beiden Transversalen von jenem Punkt bis zu ihrem Schnittpunkte mit der Curve gemacht werden, unter einander in einem constanten Verhältniss, das von der Lage jenes Punktes unabhängig ist."

Es liegt nun nahe, und ist auch leicht und fast ohne alle Rechnung *ausführbar*, aus diesen Sätzen die entsprechenden Eigenschaften der algebraischen Flächen abzuleiten. Doch möchte eine directe, von jenen Sätzen unabhängige Aufstellung dieser Eigenschaften, welche dann obige Sätze wieder als Zusätze in sich enthalten, schon deshalb den Vorzug verdienen, weil sich aus dem analytischen Ausdrucke derselben leicht noch weitere Eigenschaften als Folgerungen ergeben, welche man sonst wohl nicht würde erkennen können. Ich erlaube mir daher, diese Aufstellung im Nachfolgenden zu unternehmen und derselben nur als Einleitung einige Bemerkungen über die Asymptoten der algebraischen Flächen vorauszuschicken.

Die allgemeine Gleichung der Flächen $n$ten Grades, auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, sei:

$$1)\quad f(x,y,z) = Az^n + (A_1x + A'y)z^{n-1} + (A_2x^2 + A_1'xy + A''y^2)z^{n-2} + \dots$$
$$+ A_nx^n + \dots + A^{(n)}y^n + Bz^{n-1} + (B_1x + B'y)z^{n-2} + \dots + Cz^{n-3} + \dots = 0,$$

und die Gleichungen einer beliebigen Geraden seien:

$$2)\qquad x = \frac{\alpha}{\gamma}z + a,\quad y = \frac{\beta}{\gamma}z + b,$$

wo α, β, γ die Cosinus der Winkel bedeuten, welche diese Gerade mit den Richtungen der Coordinatenachsen macht. Für die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Fläche, für welche die Gleichungen 1) und 2) zusammen bestehen, erhält man durch Einsetzen der in 2) gegebenen Werthausdrücke von x und y in die Gleichung 1), wenn man noch die hierdurch entstehenden Aggregate

$$A\gamma^n + (A_1\alpha + A'\beta)\gamma^{n-1} + (A_2\alpha^2 + A_1'\alpha\beta + A''\beta^2)\gamma^{n-2} + \dots + A_n\alpha^n + \dots + A^{(n)}\beta^n,$$
$$B\gamma^{n-1} + (B_1\alpha + B'\beta)\gamma^{n-2} + \dots,\quad C\gamma^{n-2} + (C_1\alpha + C'\beta)\gamma^{n-3} + \dots,\ \dots$$

zur Abkürzung beziehungsweise mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... darstellt, die Gleichung:

$$3)\qquad \gamma^n \cdot f\left(\frac{\alpha}{\gamma}z + a,\ \frac{\beta}{\gamma}z + b,\ z\right)$$
$$= \mathfrak{A}z^n + \left[\left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right]\gamma z^{n-1} + \left[\tfrac{1}{2}\left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)^2\mathfrak{A}\right.$$
$$\left. + \left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\right]\gamma^2 z^{n-2} + \left[\tfrac{1}{6}\left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)^3\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}\left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)^2\mathfrak{B}\right.$$
$$\left. + \left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\right]\gamma^3 z^{n-3} + \dots = 0.$$

Setzt man hier für a und b die die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ irgend eines Punktes der Geraden 2) enthaltenden Werthe $\mathfrak{x} - \frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y} - \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{z}$ ein, so erhält man mit Beachtung der bekannten Eigenschaft einer homogenen Function $m$ten Grades $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$4)\qquad \left(\alpha\frac{d}{d\alpha} + \beta\frac{d}{d\beta} + \gamma\frac{d}{d\gamma}\right)^k\mathfrak{F} = m(m-1)\dots(m-k+1)\cdot\mathfrak{F},$$

nach den nöthigen Reductionen für die Coefficienten obiger Gleichung vom zweiten angefangen die Ausdrücke:

$$5)\qquad (\gamma D\mathfrak{A} - n\zeta . \mathfrak{A}) + \gamma\mathfrak{B},$$

$$\tfrac{1}{2}[\gamma^2 D^2\mathfrak{A} - 2(n-1)\gamma\zeta . D\mathfrak{A} + n(n-1)\zeta^2 . \mathfrak{A}] + \gamma[\gamma D\mathfrak{B} - (n-1)\zeta . \mathfrak{B}] + \gamma^2$$

$$\tfrac{1}{6}[\gamma^3 D^3\mathfrak{A} - 3(n-2)\gamma^2\zeta . D^2\mathfrak{A} + 3(n-1)(n-2)\gamma\zeta^2 . D\mathfrak{A} - n(n-1)(n-2)\zeta^3 .$$

$$+\tfrac{1}{2}\gamma[\gamma^2 D^2\mathfrak{B} - 2(n-2)\gamma\zeta . D\mathfrak{B} + (n-1)(n-2)\zeta^2 . \mathfrak{B}] + \gamma^2[\gamma D\mathfrak{C} - (n-2)\zeta . \mathfrak{C}] + \gamma^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

in welchen mit D das Symbol: $\xi\frac{d}{d\alpha} + \eta\frac{d}{d\beta} + \zeta\frac{d}{d\gamma}$ angedeutet ist.

Aus der Gleichung 3) zeigt sich sogleich, dass eine algebraische Fläche $n$ten Grades durch eine Gerade im Allgemeinen in n (nie mehreren) Punkten und also durch eine Ebene in einer Curve $n$ten (nie höheren) Grades geschnitten wird. Weniger als n Schnittpunkte aber erhält man in zweierlei Fällen, nämlich einmal, wenn für besondere Werthe der Zahlen α, β, γ, a und b, d. i. für besondere Richtungen und Lagen der schneidenden Geraden ein oder mehrere Paar von Wurzeln imaginär, dann auch, wenn der erste oder mehrere der ersten Coefficienten dieser Gleichung Null und dadurch eine gleiche Anzahl von Wurzeln unendlich gross werden.*)

---

*) Wird nämlich in der Gleichung:
$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + \ldots = 0$$
vorerst a_0 gleich Null, so werden die Quotienten
$$\frac{a_1}{a_0} = -(z_1 + z_2 \ldots), \quad \frac{a_2}{a_0} = z_1(z_2 + z_3 + \ldots) + z_2 z_3 + \ldots, \ \ldots$$
unendlich, während die Quotienten
$$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{z_1(z_2+z_3+\ldots)+z_2 z_3+\ldots}{z_1+z_2+\ldots}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{z_1(z_2 z_3+\ldots)+z_2 z_3 z_4+\ldots}{z_1+z_2+\ldots}, \ \ldots$$
endliche Werthe behalten, woraus folgt, dass eine, und nur eine der Wurzeln der gegebenen Gleichung, etwa z_1 unendlich gross geworden; es wird dann sogleich:
$$\frac{a_2}{a_1} = -(z_2 + z_3 + \ldots), \quad \frac{a_3}{a_1} = z_2 z_3 + \ldots, \ \ldots$$
entsprechend der Gleichung
$$a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + \ldots = 0.$$
Werden ferner a_0 und a_1 Null, so werden dadurch sowohl die Quotienten
$$\frac{a_2}{a_0}, \ \frac{a_3}{a_0}, \ \ldots$$
als auch
$$\frac{a_2}{a_1}, \ \frac{a_3}{a_1}, \ \ldots$$
unendlich, während
$$\frac{a_3}{a_2} = -\frac{z_1 z_2(z_3+\ldots)+z_1 z_3 z_4+\ldots}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots}, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{z_1 z_2(z_3 z_4+\ldots)+z_1 z_3 z_4 z_5+\ldots}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots}, \ \ldots$$
endlich bleiben, woraus man schliessen kann, dass zwei der Wurzeln, etwa z_1 und z_2 unendlich geworden, wodurch dann
$$\frac{a_3}{a_2} = -(z_3 + z_4 + \ldots), \quad \frac{a_4}{a_2} = z_3 z_4 + \ldots, \ \ldots$$
wird, entsprechend der Gleichung
$$a_2 z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + a_4 z^{n-4} + \ldots = 0.$$
Aehnlich lässt sich schliessen, wenn drei oder noch mehr der Coefficienten *Null werden.*

Durch das Eintreten dieses letzteren Falles erhält die Gerade für die iche eine besondere Bedeutung. Nähert sich nämlich vorerst in der ichung 3) der erste Coefficient $\mathfrak{A}$ der Null, so wird, da nach der eben nachten Bemerkung dann eine der Wurzeln dieser Gleichung unendlich d, einer der Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche auf dieser ner weiter hinausrücken und mit dem Verschwinden von $\mathfrak{A}$ sich im Unllichen verlieren. Da der Werth von $\mathfrak{A}$ blos von den Zahlen α, β, γ, o blos von der Richtung der Geraden abhängt, so wird das eben Gesagte für eine Gerade, so für alle mit dieser parallelen gelten, und die Fläche bst demnach nach dieser Richtung sich ins Unendliche ausdehnen. Undiesen parallelen Geraden werden ferner auch solche sein, für deren ondere Lage auch noch der zweite Coefficient in 3) verschwindet, welr ausser von α, β, γ auch noch von a und b oder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, d. i. von der ge der schneidenden Geraden abhängig ist. Je mehr nun eine der in Richtung (α, β, γ) gehenden Geraden dieser besonderen Lage, also dem sprechend jener zweite Coefficient der Null sich nähert, um so weiter d auf dieser Geraden auch noch ein zweiter ihrer Schnittpunkte mit der iche hinausrücken und mit dem Eintreten derselben in die genannte ge gleichfalls im Unendlichen verschwinden, während er, sobald die Gele über diese Lage hinweg ist, entweder auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten wieder erscheint, je nachdem der zweite Coefficient 3) beim Durchgang durch Null sein Vorzeichen beibehält oder ändert. dieser besonderen Lage nun, wo die Gerade die Fläche nach einer Seite nicht mehr trifft, ihr aber doch, je weiter hinaus, desto näher kommt l beim geringsten Heraustreten aus ihrer Lage oder Richtung dieselbe h wirklich, wenn auch noch ferne, erreicht, nennt man sie eine ymptote der Fläche. — Wenn für gewisse Werthe von α, β, γ nicht der erste, sondern unabhängig von a und b oder von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ noch mehe nachfolgende der ersten Coefficienten der Gleichung 3), etwa bis zum n verschwinden, so ist dann leicht zu sehen, dass auf allen Geraden, che die durch jene Werthe von α, β, γ bestimmte Richtung haben, soich je k Schnittpunkte derselben mit der Fläche im Unendlichen liegen eine solche Gerade erst in jenen Lagen eine Asymptote der Fläche d, in welchen die entsprechenden Werthe von a und b auch noch den n Coefficienten mit zu Null machen.

Die Bedingungen, dass die Gerade 2) eine Asymptote der Fläche 1) bestehen demnach im Allgemeinen in den Gleichungen:

6) $$\mathfrak{A} = 0$$

l

7) $$\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} \cdot a + \frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} \cdot b + \mathfrak{B}$$

r

$$\mathfrak{x} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \mathfrak{y} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \mathfrak{z} \cdot \frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} + \mathfrak{B} = 0,$$

von denen die erste die Richtungen, die zweite für jede dieser Richtungen die Lagen dieser Asymptoten bedingt. Wenn für besondere der Gleichung 6) genügenden Werthe von α, β, γ unabhängig von a und b oder von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung 7) mit erfüllt wird, also von den Ausdrücken $\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}$, $\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}$, und hiermit auch $\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}$, sowie $\mathfrak{B}$ jeder für sich Null wird, wodurch angezeigt ist, dass in der entsprechenden Richtung eine Gerade immer zwei ihrer Schnittpunkte mit der Fläche zugleich im Unendlichen hat, so unterliegt sie, um eine Asymptote der Fläche zu werden, der weiteren Bedingung:

$$8) \qquad \tfrac{1}{2}\left(a\frac{d}{d\alpha}+b\frac{d}{d\beta}\right)^2\mathfrak{A}+\left(a\frac{d}{d\alpha}+b\frac{d}{d\beta}\right)\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{r}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)^2\mathfrak{A}+\left(\mathfrak{r}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0,$$

welche sich ergiebt, indem man den dritten Coefficienten in 3) mit Beachtung der Gleichungen 6) und 7) gleich Null setzt. In ähnlicher Weise erhält man auch die Bedingungen, welche bestehen, wenn eine Gerade Asymptote der Fläche werden soll, von welcher in gewisser Richtung immer drei oder mehrere Schnittpunkte mit der Fläche zugleich im Unendlichen liegen.

Die Gleichungen 6) und 7), welche die Bedingungen enthalten, unter welchen eine Gerade eine Asymptote der Fläche 1) wird, lassen die Richtung und Lage einer solchen noch unbestimmt und bedingen dieselben nur theilweise, so dass einer Fläche, welche überhaupt Asymptoten hat, deren eine unbegrenzte Anzahl zukommt. Die Richtungen dieser Asymptoten sind alle parallel den Seiten eines Kegels vom $n$ten Grade, dessen Gleichung man erhält, wenn man in 6) für α, β, γ die Werthe $\frac{x-\xi}{l}$, $\frac{y-\eta}{l}$, $\frac{z-\zeta}{l}$ einsetzt, wo ξ, η, ζ die Coordinaten der beliebig genommenen Spitze dieses Kegels sind. Es ergiebt sich als Gleichung dieses die Asymptotenrichtungen der Fläche 1) enthaltenden Kegels:

$$9) \quad A(z-\zeta)^n+[A_1(x-\xi)+A'(y-\eta)](z-\zeta)^{n-1}+\ldots+A_n(x-\xi)^n+\ldots$$
$$+A^{(n)}(y-\eta)^n=0.$$

Die Gleichungen 7) und 8) ferner, welche die Werthe der Zahlen a und b oder $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ beschränken, zeigen sogleich, dass jeder der aus 6) bestimmten Richtungen eine unbegrenzte Anzahl von Lagen der Asymptoten zukommt, und zwar liegen diese alle im Allgemeinen in einer Ebene, als deren Gleichung die Gleichung 7) selbst angesehen werden kann. Wird aber für eine gewisse Richtung die Gleichung 7) unabhängig von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ erfüllt, so werden die Lagen der in dieser Richtung gehenden Asymptoten durch die Gleichung 8) oder eine höhere noch bedingt, aus welchen ersichtlich ist, dass diese Asymptoten dann die Seiten eines Cylinders des zweiten oder eines höheren Grades sind. Die so sich als Ort der Asymptoten von gleicher gegebener Richtung ergebende Ebene oder den Gleiches darstellenden Cylinder kann man die dieser Richtung zugehörige Asymptotenebene oder Asymptotencylinder der Fläche nennen.

Schneidet man die Fläche 1) durch die Ebene

10) $$Lx + My + Nz + P = 0,$$

so werden die in dieser Ebene liegenden Asymptoten der Fläche zugleich die Asymptoten der Schnittlinie derselben mit der Ebene 10) sein. Die Richtungen dieser Asymptoten bestimmen sich aus den Gleichungen

11) $$\mathfrak{A} = 0 \text{ und } L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

welche je n Werthe der Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$, also auch n verschiedene oder zum Theil oder durchaus gleiche Richtungen für die Asymptoten liefern. Diese werden, wie sich aus den Gleichungen 11) sogleich zeigt, für alle mit 10) parallelen Ebenen dieselben sein, woraus folgt, dass parallele Schnitte auf einer algebraischen Fläche auch parallele Asymptoten haben. Die einer der aus 11) erhaltenen Richtungen entsprechenden Lagen der Asymptoten findet man sodann aus den Gleichungen

12) $$\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} . a + \frac{d\mathfrak{A}}{d\beta} . b + \mathfrak{B} = 0 \text{ und } La + Mb + P = 0,$$

oder auch

$$\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} + \mathfrak{B} = 0 \text{ und } L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} + P = 0,$$

welche für jede Richtung je eine Lage der Asymptote bezeichnen, welche letztere auch als der Schnitt der gegebenen Ebene mit der ihrer Richtung zugehörigen Asymptotenebene betrachtet werden kann. Die Bedingung, dass wenigstens zwei der aus 11) folgenden Richtungen gleich sind, heisst, wie leicht zu finden,

$$\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} : L = \frac{d\mathfrak{A}}{d\beta} : M = \frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} : N,$$

welche ausspricht, dass dann die Asymptotenebene der Richtung (α, β, γ) der Ebene 10) parallel ist. Die Gleichungen 12) liefern in diesem Falle unendliche Werthe oder bestehen für jeden Werth von a und b, letzteres wenn der Quotient $\mathfrak{B} : P$ den in obiger Bedingung stehenden gleich ist. Eine Ausnahme macht der Fall, wo $\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}$, $\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}$, $\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}$ und $\mathfrak{B}$ jedes für sich Null wird, welcher auch der für gleiche Richtungen der Asymptoten eben aufgestellten Bedingung genügt. In diesem Falle dienen zur Bestimmung der Lagen der so gerichteten Asymptoten die Gleichungen

13) $$\tfrac{1}{2}\left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)^2 \mathfrak{A} + \left(a\frac{d}{d\alpha} + b\frac{d}{d\beta}\right)\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0 \text{ und } La + Mb + P = 0,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)^2\mathfrak{A}+\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0$$

und $L\mathfrak{x}+M\mathfrak{y}+N\mathfrak{z}+P=0,$

welche den Asymptoten zwei verschiedene oder nur eine Lage zuweist, je nachdem die aus 13) kommenden Werthpaare von a und b bezüglich reel und ungleich, oder gleich sind. Sind aber die genannten Werthe imaginär, so ist damit angezeigt, dass eine in der gegebenen Richtung gehende Gerade in keiner Lage, weder in bestimmter Nähe, noch unendlich fern Asymptote der Schnittlinie oder der Fläche werden kann, und dass demnach Schnittlinie und Fläche nach dieser Richtung hin sich nicht ins Unendliche ausstrecken. Die zwei verschiedenen Lagen von gleich gerichteten Asymptoten in der Ebene 10) erhält man, wenn diese Ebene den in der ersten der Gleichungen 13) dargestellten Cylinder schneidet, nur eine Lage, wenn sie diesen Cylinder berührt, und keine Lage, d. i. keine Asymptote, wenn die Ebene ganz ausserhalb des Cylinders liegt. — Durch Fortsetzung dieser Schlussweise kommt man zur Erkenntniss, dass die Schnittlinie einer Fläche $n$ten Grades mit einer Ebene höchstens n Asymptoten haben kann, welche sich alle als die Schnitte dieser Ebene mit den gewissen Richtungen zugehörigen Asymptotenebenen oder Asymptotencylindern ergeben; und dass sie keine solche, weder in bestimmter Lage, noch unendlich fern hat, wenn die für die Richtungen der Asymptoten bestehenden Bedingungsgleichungen diesen entweder blos imaginäre oder auch noch paarweise gleiche reelle Werthe liefern, und wenn im letzteren Falle dann die zu Bestimmung der Lage der Asymptoten dienenden Gleichungen den Bestimmungsstücken imaginäre Werthe geben. Hiermit ist auch das Mittel gegeben, zu erkennen, ob eine algebraische Fläche oder ebene Schnitte einer solchen vollständig geschlossen seien oder nicht.

Die Gleichung 6), welche die Richtungen der Asymptoten der Fläche bedingt, enthält blos die mit den verschiedenen A dargestellten Coefficienten der Gleichung 1), deren Anzahl $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ist, und ist bezüglich dieser linear. Wenn also

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$$

verschiedene Asymptotenrichtungen gegeben, so erstehen daraus eben so viele verschiedene Formen der Gleichung 6), aus welchen sich dann eine gleich grosse Anzahl der Coefficienten A, also alle bis auf einen, als bestimmt Vielfache dieses letzteren, unbestimmt bleibenden ergeben. Setzt man diese Werthausdrücke für die Coefficienten in der Gleichung 6) ein, so fällt jener unbestimmt gebliebene Coefficient durch Division weg und die Coefficienten dieser Gleichung erscheinen als bestimmte Functionen der gegebenen Richtungen. Hieraus folgt, dass für eine Fläche $n$ten Gr-des nur $\frac{n(n+3)}{2}$ verschiedene Asymptotenrichtungen willkürlich angenommen werden können, durch welche dann auch alle übrigen Asymptotenrichtungen vollständig bestimmt sind, und dass ferner zwei Flächen $n$ten Grades, welchen $\frac{n(n+3)}{2}$ verschiedene Asymptotenrichtungen gemeinschaftlich sind, auch alle übrigen gemein haben. Solche Flächen, welche daran zu erkennen sind, dass die Coefficienten der mit der höchsten Dimension der Coordinaten versehenen Glieder ihrer Gleichungen bezüglich gleich sind, kann man Flächen gleicher Asymptotenrichtung nennen.

Da gemäss der Gleichung 7) die Neigung der zur Asymptotenrichtung (α, β, γ) gehörigen Asymptotenebene gegen irgend eine Gerade oder Ebene blos von den Coefficienten des Polynoms $\mathfrak{A}$, die Lage derselben aber auch noch von dem Polynom $\mathfrak{B}$ abhängt, so sieht man sogleich, dass alle Flächen desselben Grades und von gleicher Asymptotenrichtung die irgend einer ihrer Asymptotenrichtungen zugehörigen Asymptotenebenen parallel haben. Haben diese Flächen aber zu $\frac{n(n+1)}{2}$ Asymptotenrichtungen (so gross ist auch die Anzahl der in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Coefficienten B) die Asymptotenebenen gemeinschaftlich, so sind ihnen auch die allen übrigen Asymptotenrichtungen zugehörigen Asymptotenebenen gemein (da in ihren Gleichungen dann nicht blos die Coefficienten A, sondern auch noch die zur zweithöchsten Dimension ihrer Coordinaten gehörigen Coefficienten B dieselben sind).

Nach diesen Bemerkungen über die Asymptoten der algebraischen Flächen soll nun zur Untersuchung der Eigenschaften der durch eine solche Fläche auf geradlinigen Transversalen gemachten Abschnitte vorgegangen werden.

I.

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Schnittpunkte der Geraden 2) mit der Fläche 1) und zwischen denselben der Punkt $\mathfrak{p}$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ so gelegen, dass seine Abstände von den auf der einen Seite desselben befindlichen Schnittpunkten dieselbe Summe geben, wie die Abstände desselben von den Schnittpunkten auf der anderen Seite, dass also

$$\mathfrak{p}p_1 + \mathfrak{p}p_2 + \ldots + \mathfrak{p}p_i = p_{i+1}\mathfrak{p} + \ldots + p_n\mathfrak{p}$$

ist, so hat man auch, wenn man alle diese Punkte auf einen weit genug zurückliegenden Punkt π bezieht,

$$(\mathfrak{p}\pi - p_1\pi) + (\mathfrak{p}\pi - p_2\pi) + \ldots + (\mathfrak{p}\pi - p_i\pi) = (p_{i+1}\pi - \mathfrak{p}\pi) + \ldots \\ + (p_n\pi - \mathfrak{p}\pi)$$

oder

14). $$\Sigma_n (\mathfrak{p}\pi - p_k\pi) = 0,$$

welche Gleichung dann

$$\mathfrak{p}\pi = \frac{1}{n}(p_1\pi + p_2\pi + \ldots + p_n\pi)$$

giebt; d. h. es ist alsdann der Abstand des Punktes $\mathfrak{p}$ von einem beliebigen auf derselben Geraden gewählten Punkte π das arithmetische Mittel der Abstände der Schnittpunkte p von demselben Punkte. Man kann desswegen den Punkt $\mathfrak{p}$ den arithmetischen Mittelpunkt der Punkte p nennen. Wegen $\mathfrak{p}\pi = \frac{\mathfrak{z}-\zeta}{\gamma}$ und $p\pi = \frac{z-\zeta}{\gamma}$ wird nun aus 14):

$$\Sigma_n[(\mathfrak{z}-\zeta)-(z_k-\zeta)] = \Sigma_n(\mathfrak{z}-z_k) = n\mathfrak{z} - \Sigma z_k = 0,$$

woraus, da die Gleichung 3) sogleich

$$\Sigma_n z_k = -\gamma . \left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}.a + \frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}.b + \mathfrak{B}\right) : \mathfrak{A}$$

$$= -\gamma . \left(\mathfrak{x}.\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \mathfrak{y}.\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \mathfrak{z}.\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} + \mathfrak{B}\right) : \mathfrak{A} + n\mathfrak{z}$$

giebt, für den Punkt $\mathfrak{p}$ die Bedingung entsteht:

$$15)\qquad \mathfrak{x}.\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \mathfrak{y}.\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \mathfrak{z}.\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} + \mathfrak{B} = 0,$$

welche Gleichung denselben blos noch von der Richtung der Geraden 2) abhängig lässt und, da sie für alle mit jener parallelen Geraden dieselbe bleibt, den Ort des Punktes $\mathfrak{p}$ auf diesen Parallelen als eine Ebene bezeichnet. Man hat demnach den Satz:

I. „Wenn man eine Reihe Transversalen zieht, die unter einander parallel sind, und auf jeder von ihnen das arithmetische Mittel der Abstände ihrer Schnittpunkte mit einer algebraischen Fläche von einem beliebigen Punkte der Transversalen von letzterem aus aufträgt, so liegen die anderen Endpunkte dieser arithmetischen Mittel in einer Ebene.“

Die durch die Gleichung 15) ausgedrückte Ebene nennt man die der Transversalenrichtung (α, β, γ) zugehörige Diametralebene.

Dem in I. ausgesprochenen Satz lassen sich noch folgende Bemerkungen anfügen:

a) Der Winkel φ einer Diametralebene mit der ihr zugehörigen Transversalrichtung ist bestimmt durch die Gleichung

$$16)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{\alpha\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \beta\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \gamma\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}}{\sqrt{\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}\right)^2}} \\[2ex] \quad = \dfrac{n\mathfrak{A}}{\sqrt{\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}\right)^2}} \end{cases}$$

welche zeigt, dass im Allgemeinen unendlich viele Transversalrichtungen gegen die zugehörigen Diametralebenen gleich geneigt sind. Zieht man durch irgend einen Punkt π nach allen jenen Richtungen Gerade, welche mit ihrer Diametralebene bezüglich denselben Winkel φ machen, so werden diese Geraden die Seiten eines Kegels vom Grade $2n$ sein, dessen Gleichung man erhält, wenn man in 16) statt α, β, γ die Werthe $\frac{x-\xi}{l}$, $\frac{y-\eta}{l}$, $\frac{z-\zeta}{l}$ setzt, wo $l=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ ist, welche jene Zahlen durch die Coordinaten der Kegelspitze π und eines beliebigen anderen Punktes auf einer Seite des Kegels ausdrücken. Für $\varphi=0$ reducirt sich die Gleichung 16) auf $\mathfrak{A}=0$ oder auf die Gleichung 6), welche die verschiedenen Asymptotenrichtungen der gegebenen Fläche enthält. Da dann auch die Gleichung 15) mit 7) identisch wird, so folgt, dass die irgend einer Asymptotenrichtung einer algebraischen Fläche zugehörige Asymptotenebene zugleich auch den Transversalen dieser Richtung als Diametralebene zugehört. — Ist endlich der Winkel φ ein Rechter, so geht die Gleichung 16) über in:

$$\left(\alpha\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}-\beta\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}\right)^2+\left(\beta\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}-\gamma\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}\right)^2+\left(\gamma\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}-\alpha\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}\right)^2=0,$$

welche Gleichung in die Beziehungen zerfällt:

$$17)\quad \begin{cases} \alpha\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}-\beta\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}=0,\\ \beta\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}-\gamma\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}=0,\\ \gamma\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}-\alpha\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}=0,\end{cases}$$

oder auch

$$\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}:\alpha=\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}:\beta=\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}:\gamma=n\mathfrak{A}.$$

Je zwei dieser Gleichungen, mit welchen auch die dritte erfüllt wird, liefern die Werthe von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$, also die Richtungen der Transversalen in bestimmter, n^2 nicht übersteigender Anzahl. Diese Richtungen, welche gegen die zugehörigen Diametralebenen senkrecht sind, kann man die Hauptrichtungen und die zugehörigen Diametralebenen die Hauptebenen der gegebenen Fläche nennen.

b) Da die Gleichung 15) ebenso wie 7) ausser von den Coefficienten des Polynoms $\mathfrak{A}$ nur noch in dem letzten die Lage der Diametralebene bedingenden Gliede $\mathfrak{B}$ von den verschiedenen Coefficienten B aus der Gleichung 1) abhängt, so ist ersichtlich, dass bei einer Fläche $n$ten Grades von gegebener Asymptotenrichtung, d. h. welche mit einer gegebenen

Fläche desselben Grades von gleicher Asymptotenrichtung ist, durch die zu $\frac{n(n+1)}{2}$ verschiedenen Transversalrichtungen gehörigen Diametralebenen auch für alle übrigen Transversalrichtungen die Diametralebenen bestimmt sind. Während also zwei Flächen $n$ten Grades von gleicher Asymptotenrichtung, wie alle Asymptotenebenen, so auch für jede Transversalenrichtung die Diametralebenen im Allgemeinen bezüglich parallel haben, **haben sie, sobald für beide die zu $\frac{n(n+1)}{2}$ verschiedenen Transversalrichtungen gehörigen Diametral- oder Asymptotenebenen bezüglich dieselben sind, auch die allen übrigen Transversalrichtungen zugehörigen Diametral- und Asymptotenebenen gemeinschaftlich.**

c) Lässt man die Richtung einer Transversalen nach einem gegebenen Gesetze, welches durch eine Gleichung zwischen den Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$ ausgedrückt werden kann, sich ändern, so wird dem entsprechend auch die zugehörige Diametralebene ihre Lage und Neigungen ändern und zwar werden die Durchschnitte je zweier nächst aufeinander folgender Lagen derselben eine Curve berühren, die Diametralebene selbst also in jeder ihrer Lagen Wendungsberührebene einer Curve sein, deren Gleichungen man erhält, wenn man aus der das Aenderungsgesetz der Transversalrichtungen ausdrückenden Gleichung, welche $\frac{\beta}{\gamma}$ als Function von $\frac{\alpha}{\gamma}$ giebt, sodann aus der Gleichung 15) und ihrer ersten und zweiten nach $\frac{\alpha}{\gamma}$ genommenen Ableitung die Quotienten $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$ oder die Zahlen α, β, γ eliminirt. So werden z. B. die Diametralebenen, welche den der Ebene 10) parallelen Transversalen zugehören, Wendungsberührebenen einer Curve sein, deren Gleichungen sich durch die Elimination von α, β, γ aus den Gleichungen

$$18)\quad \left\{\begin{aligned}
&L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,\\
&\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\frac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 0,\\
&\left(M\frac{d}{d\alpha} - L\frac{d}{d\beta}\right)\left[\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\frac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right] = 0,\\
&\left(M\frac{d}{d\alpha} - L\frac{d}{d\beta}\right)^2\left[\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\frac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right] = 0,
\end{aligned}\right.$$

ergeben, von denen die letzten drei bezüglich der Zahlen α, β, γ die Grade $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ haben.

d) Die allen möglichen Transversalenrichtungen zugehörigen Diametralebenen berühren eine Fläche, deren Gleichung man erhält, wenn man aus der Gleichung 15) und ihren partiell nach $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$, oder, was dasselbe giebt, nach α und β genommenen ersten Ableitungen, also aus:

$$19)\quad \begin{cases} \left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=0, \\ \frac{d}{d\alpha}\left[\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\right]=0, \\ \frac{d}{d\beta}\left[\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\right]=0 \end{cases}$$

die Zahlen α, β, γ eliminirt. Die so sich ergebende **Umhüllungsfläche der Diametralebenen** der Fläche 1) ist, wie man sieht, vom Grade $(n-1)(n-2)^2$, kann aber auch von niedrigerem Grade, selbst blos eine in bestimmter Nähe oder unendlich fern liegende Gerade oder ein Punkt sein.

e) Den durch denselben Punkt (p, q, r) gehenden Diametralebenen entspricht eine unendliche Folge von Transversalrichtungen, deren Gesetz man erhält, wenn man in der Gleichung

$$20)\quad p\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}+q\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}+r\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}+\mathfrak{B}=0$$

die Zahlen α, β, γ durch die Werthe $\frac{x-\xi}{l}$, $\frac{y-\eta}{l}$, $\frac{z-\zeta}{l}$ ersetzt. Es stellt dann diese Gleichung einen Kegel vom $(n-1)$ten Grade vor, dessen Seiten die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehenden Transversalen sind, für welche die Diametralebenen den gegebenen Punkt (p, q, r) enthalten.

f) Um die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehenden Transversalen zu erhalten, deren Diametralebenen einer Geraden von der Richtung (λ, μ, ν) parallel sind, setzt man die vorher angegebenen Werthe von α, β, γ in die Gleichung

$$21)\quad \lambda\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}+\mu\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}+\nu\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}=0,$$

welche dann wieder die eines Kegels vom $(n-1)$ten Grade ist, dessen Seiten die Richtungen derjenigen Transversalen angeben, deren zugehörige Diametralebenen der gegebenen Geraden parallel sind.

g) Die Transversalrichtungen, deren Diametralebenen durch eine gegebene Gerade, oder, was desselbe ist, durch zwei gegebene Punkte gehen, ergeben sich aus den Gleichungen

$$22)\quad \begin{cases} p\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}+q\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}+r\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}+\mathfrak{B}=0, \\ p'\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}+q'\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}+r'\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}+\mathfrak{B}=0, \end{cases}$$

welche im Allgemeinen $(n-1)^2$ Werthe von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$, also $(n-1)^2$ Richtungen für diejenigen Transversalen angeben, deren Diametralebenen durch die gegebenen Gerade gehen.

h) Endlich erhält man aus den Gleichungen

$$23)\quad \begin{cases} \lambda \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \mu \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \nu \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} = 0, \\ \lambda' \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} + \mu' \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\beta} + \nu' \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\gamma} = 0, \end{cases}$$

wo λ, μ, ν und λ', μ', ν' die Richtungen zweier Geraden bestimmen, im Allgemeinen $(n-1)^2$ Werthe von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\gamma}$, also $(n-1)^2$ Richtungen für die Transversalen, deren Diametralebenen zwei gegebenen Geraden, also auch einer gegebenen Ebene parallel sind.

i) Während die Bedingung 14) für parallele Transversalen auf die der Richtung derselben zugeordnete Diametralebene führte, werden den mit jener verwandten Bedingungen

$$24)\quad \begin{cases} \Sigma_n (\mathfrak{p}\pi - p_i\pi)(\mathfrak{p}\pi - p_k\pi) = 0, \\ \Sigma_n (\mathfrak{p}\pi - p_h\pi)(\mathfrak{p}\pi - p_i\pi)(\mathfrak{p}\pi - p_k\pi) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

für jene Richtung Diametralflächen höherer Ordnungen entsprechen. Die Gleichungen 24) geben hierfür sogleich

$$\frac{n(n-1)}{2}\mathfrak{z}^2 - (n-1)\mathfrak{z}\,\Sigma_n z_k + \Sigma_n z_i z_k = 0,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\mathfrak{z}^3 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\mathfrak{z}^2\,\Sigma_n z_k + (n-2)\mathfrak{z}\,\Sigma_n z_i z_k - \Sigma_n z_h z_i z_k = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

woraus man durch Einsetzen der aus 3) und 5) folgenden Werthe von $\Sigma_n z_k,\ \Sigma_n z_i z_k, \ldots$

$$-\frac{\gamma D\mathfrak{A} - n\mathfrak{z}\,.\,\mathfrak{A} + \gamma\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\gamma^2 D^2\mathfrak{A} - 2(n-1)\gamma\mathfrak{z}\,.\,D\mathfrak{A} + n(n-1)\mathfrak{z}^2.\,\mathfrak{A}) + \gamma[\gamma D\mathfrak{B} - (n-1)\mathfrak{z}\,.\,\mathfrak{B}] + \gamma^2\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

nach den nöthigen Reductionen:

$$\tfrac{1}{2}D^2\mathfrak{A} + D\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0,$$
$$\tfrac{1}{6}D^3\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}D^2\mathfrak{B} + D\mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder

$$25)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\gamma}\right)^2\mathfrak{A} + \left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0, \\ \tfrac{1}{6}\left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\gamma}\right)^3\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\gamma}\right)^2\mathfrak{B} \\ \qquad + \left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\alpha} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\beta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\gamma}\right)\mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

t, welche Gleichungen Flächen des zweiten, dritten, ... Grades vorn und als Diametralfläche $n$ter Ordnung auf die gegebene Fläche r führen. Von den Eigenschaften dieser Diametralflächen, deren suchung nicht hierher gehört, soll nur die angeführt werden, dass Diametralfläche $k$ter Ordnung der gegebenen Fläche eich Diametralfläche $k$ter Ordnung für alle Diametralhen höherer Ordnung der gegebenen Fläche ist.

II.

Werden auf einer Geraden von einem Punkt aus mehrere Abschnitte cht, so nennt man bekanntlich **harmonisches Mittel** dieser Abtte diejenige Strecke, deren reciproker Werth das arithmetische l der reciproken Werthe der Abschnitte, oder welche selbst die dritte rtionalé zu dem arithmetischen Mittel der mit derselben Mittellinie uirten dritten Proportionalen jener Abschnitte ist, wobei noch die tgegengesetzten Seiten des Punktes liegenden Abschnitte durch entgesetzte Vorzeichen unterschieden werden. Ist nun π oder (ξ, η, ζ) unkt auf der Geraden 2) und sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ wieder die Schnitte dieser Geraden mit der Fläche 1), so giebt, wenn man den anderen unkt des von π aus genommenen harmonischen Mittels der Abschnitte $, p_2, \ldots, p_n$ mit $\mathfrak{p}$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ darstellt, die Bedingung

$$\frac{1}{\pi\mathfrak{p}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\pi p_1} + \frac{1}{\pi p_2} + \ldots + \frac{1}{\pi p_n}\right),$$

e auch in der mit 14) ähnlichen Gestalt:

$$26) \qquad \Sigma_n\left(\frac{1}{\pi\mathfrak{p}} - \frac{1}{\pi p_k}\right)$$

rieben kann, wegen $\pi p = \dfrac{\zeta - z}{\gamma}$ sogleich:

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\zeta - z_1} + \frac{1}{\zeta - z_2} + \ldots + \frac{1}{\zeta - z_n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(\zeta - z_2)\ldots(\zeta - z_n) + (\zeta - z_3)\ldots(\zeta - z_1) + \ldots + (\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_{n-1})}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)\ldots(\zeta - z_n)},$$

wenn man das den Nenner hier bildende Product mit $P_n(\zeta - z_k)$ abund beachtet, dass der Zähler die nach ζ genommene Ableitung des ers ist,

$$\frac{1}{\zeta - \mathfrak{z}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\dfrac{d P_n(\zeta - z_k)}{d\zeta}}{P_n(\zeta - z_k)}.$$

Nun ist das in der Gleichung 3) für $\gamma^n . f\left(\frac{\alpha}{\gamma} z + a, \frac{\beta}{\gamma} z + b, z\right)$ ge- e Polynom offenbar identisch mit dem Producte $\mathfrak{A} . P_n(z - z_k)$, woraus, $z = \zeta$, $\frac{\alpha}{\gamma} z + a = \xi$, $\frac{\beta}{\gamma} z + b = \eta$, sowie $\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\beta}{\gamma}$ wird, folgt:

$$27)\qquad P_n(\zeta - z_k) = \frac{\gamma^n \cdot f(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}}$$

und

$$\frac{d P_n(\zeta - z_k)}{d\zeta} = \frac{\gamma^n \cdot \left[\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{d f(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi} + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{d f(\xi, \eta, \zeta)}{d\eta} + \frac{d f(\xi, \eta, \zeta)}{d\zeta}\right]}{\mathfrak{A}},$$

folglich auch, wenn man noch statt $f(\xi, \eta, \zeta)$ kürzer f schreibt,

$$28)\qquad \frac{1}{\zeta - \mathfrak{z}} = \frac{\alpha \frac{df}{d\xi} + \beta \frac{df}{d\eta} + \gamma \frac{df}{d\zeta}}{n\gamma f}.$$

Lässt man nun die Richtung der durch π gehenden Geraden sich ändern, so wird der Punkt $\mathfrak{p}$ diesen Richtungsänderungen entsprechend auch andere Lagen annehmen und für den Ort dieser Lagen erhält man durch Elimination der Zahlen α, β, γ, welche den Differenzen $\xi - \mathfrak{x}$, $\eta - \mathfrak{y}$, $\zeta - \mathfrak{z}$ proportional sind, aus 28) die Gleichung:

$$(\xi - \mathfrak{x}) \cdot \frac{df}{d\xi} + (\eta - \mathfrak{y}) \cdot \frac{df}{d\eta} + (\zeta - \mathfrak{z}) \cdot \frac{df}{d\zeta} = n f,$$

welche, wenn man in f selbst, um diese Function homogen zu machen, die einzelnen Glieder derselben mit den entsprechenden Potenzen von $\varepsilon (=1)$ multiplicirt, wegen einer in 4) bereits angegebenen Eigenschaft homogener Functionen auch in der Form

$$29)\qquad \cdot \frac{df}{d\xi} + \mathfrak{y} \cdot \frac{df}{d\eta} + \mathfrak{z} \cdot \frac{df}{d\zeta} + \varepsilon \cdot \frac{df}{d\varepsilon} = 0$$

dargestellt werden kann. Sie ist, da sie die Coordinaten des veränderlichen Punktes $\mathfrak{p}$ nur im ersten Grade enthält, die Gleichung einer Ebene und lässt folgenden Satz erkennen:

II. „Wenn man um einen festen Punkt eine Transversale sich drehen lässt, welche eine algebraische Fläche in so viel Punkten schneidet, als der Grad ihrer Gleichung anzeigt, und man in jeder ihrer Lagen von dem festen Punkte aus das harmonische Mittel der durch ihre Schnittpunkte mit der Fläche bestimmten Abschnitte auf derselben aufträgt, so wird der andere Endpunkt dieses Mittels eine Ebene beschreiben.“

Den festen Punkt und die gemäss dieses Satzes ihm bezüglich der Fläche harmonisch zugeordnete Ebene kann man Pol und Polarebene bezüglich dieser Fläche nennen.

Aus dem eben Gefundenen folgt noch weiter:

a) Der in der Richtung (α, β, γ) genommene Abstand des Pols π von seiner Polarebene bezüglich der Fläche 1), der Ebene 29) ist, wie sich aus 28) sogleich ergiebt:

$$30)\qquad \pi\mathfrak{p}=\frac{\zeta-\mathfrak{z}}{\gamma}=\frac{nf}{\alpha\frac{df}{d\xi}+\beta\frac{df}{d\eta}+\gamma\frac{df}{d\zeta}}.$$

Da für einen Punkt der Fläche 1) selbst f oder $f(\xi, \eta, \zeta)$ Null ist, so wird für einen nahe an der Fläche befindlichen Punkt f wenig von Null verschieden sein, und zwar um so weniger, je näher dieser Punkt an der Fläche sich befindet. Damit werden aber zugleich wegen der Gleichung 30) die in irgend welchen Richtungen genommenen Abstände des Punktes π von der Ebene 29), also auch die Abstände desselben von den Punkten der Schnittlinie dieser Ebene mit der Fläche immer kleiner, die Schnittlinie selbst also von allen Seiten an den Punkt π immer mehr herankommen, bis sie sich ganz auf diesen zurückzieht, wenn dieser Punkt auf die Fläche selbst gekommen ist. Die Ebene wird dann die Fläche in der Nähe dieses Punktes nicht mehr schneiden, sondern sie in diesem Punkte berühren, die Gleichung 29) also für Punkte der gegebenen Fläche, oder für $f=0$ die Gleichung der Berührungsebene der Fläche in einem solchen Punkte sein. Die Polarebene eines Punktes einer algebraischen Fläche bezüglich dieser Fläche ist demnach die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkte.

Unendlich wird der Abstand des Pols von seiner Polarebene, in jeder Richtung genommen, in zwei Fällen, nämlich wenn der Zähler des in 30) für einen solchen Abstand gegebenen Ausdrucks unendlich, und wenn der Nenner unabhängig von der Richtung (α, β, γ) Null wird. Der erste Fall, der durch $f=\infty$ angezeigt ist, tritt ein, sobald der Pol selbst unendlich fern liegt, also eine, zwei oder alle drei seiner Coordinaten ξ, η, ζ unendlich gross werden. Dann haben in der Gleichung 29) offenbar blos mehr die mit der höchsten Dimension dieser Coordinaten versehenen Glieder Bedeutung und die Gleichung der Polarebene eines solchen unendlich fernen Punktes reducirt sich dadurch, wenn man die gemeinschaftliche Richtung der diesem Punkte zustrebenden Transversalen durch die Zahlen α', β', γ bestimmt, auf

$$\mathfrak{x}\cdot\frac{d\mathfrak{A}'}{d\alpha'}+\mathfrak{y}\cdot\frac{d\mathfrak{A}'}{d\beta'}+\mathfrak{z}\cdot\frac{d\mathfrak{A}'}{d\gamma'}+\mathfrak{B}'=0,$$

welches die Gleichung der der Richtung (α', β', γ') zugehörigen Diametralebene ist. Die Polarebene eines unendlich fern gelegenen Punktes bezüglich einer algebraischen Fläche ist demnach die Diametralebene dieser Fläche für die durch jenen Punkt bestimmte Transversalrichtung.

Der Nenner des in 30) für $\pi\mathfrak{p}$ gefundenen Ausdrucks wird unabhängig von der Richtung (α, β, γ) zu Null, $\pi\mathfrak{p}$ selbst also unendlich für alle Werthe von ξ, η, ζ, welche die Gleichungen

$$30)\qquad \frac{df}{d\xi}=0,\quad \frac{df}{d\eta}=0,\quad \frac{df}{d\zeta}=0$$

gleichzeitig befriedigen. Da diese Gleichungen bezüglich ξ, η, ζ v $(n-1)$ten Grade sind, so liefern sie die Coordinatenwerthe für im All meinen $(n-1)^3$ Punkte, für welche nach allen Richtungen $\pi\mathfrak{p} = \infty$, $\frac{1}{\pi\mathfrak{p}} = 0$ ist, so dass, wenn man durch einen solchen Punkt na irgend einer Richtung eine Transversale zieht, welche d Fläche in der ihrem Grade entsprechenden Anzahl v Punkten schneidet, die reciproken Werthe der Abschnit die dadurch auf der einen Seite von jenem Punkte auf d Geraden gemacht werden, dieselbe Summe geben, wie d reciproken Werthe der auf der anderen Seite gemacht Abschnitte. Diese der gegebenen Fläche durch eine wesentliche Eig schaft angehörigen Punkte kann man die harmonischen Mitt punkte oder auch die Hauptpunkte der Fläche nennen.

b) Bewegt sich der Pol π auf einer Linie, so berühren die Dur schnitte der je zwei nächst aufeinander folgenden Lagen desselben bez lich der Fläche 1) entsprechenden Polarebenen eine Curve, deren Gl chungen man erhält, indem man aus der Gleichung 29) und ihrer erst und zweiten nach ζ etwa genommenen Ableitung mit Beiziehung der Gl chungen der vom Pol durchlaufenen Linie die Coordinaten ξ, η, ζ des le teren eliminirt. Ist z. B. diese Linie eine Gerade, so ist die Eliminati von ξ, η, ζ auszuführen bei den Gleichungen

$$32)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\lambda}{\nu}\zeta + l, \quad \eta = \dfrac{\mu}{\nu}\zeta + m, \\ \left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\xi} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\zeta} + \varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right) f = 0, \\ \left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\xi} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\zeta} + \varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right) f_1 = 0, \\ \left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\xi} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\zeta} + \varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right) f_2 = 0, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen

$$f_1 = \left(\lambda\frac{d}{d\xi} + \mu\frac{d}{d\eta} + \nu\frac{d}{d\zeta}\right) f,$$
$$f_2 = \left(\lambda\frac{d}{d\xi} + \mu\frac{d}{d\eta} + \nu\frac{d}{d\zeta}\right)^2 f$$

genommen wurde. Die drei letzten der Gleichungen 32) haben die Gr $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ bezüglich der Coordinaten ξ, η, ζ.

c) Bewegt sich der Pol π auf einer Fläche, so wird die Polareb desselben bezüglich der Fläche 1) eine andere Fläche berühren, de Gleichung sich ergiebt, wenn man die Coordinaten dieses Pols aus Gleichung der von ihm beschriebenen Fläche, sowie aus der Gleichung und ihren partiell nach ξ und η genommenen ersten Ableitungen elimin Bewegt sich der Pol z. B. auf einer Ebene, so erhält man die Gleichu der Umhüllungsfläche seiner Polarebenen bezüglich der Fläche 1) durch Elimination von ξ, η, ζ aus den Gleichungen:

$$
33)\quad \begin{cases} L\xi + M\eta + N\zeta + P = 0, \\ \left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\xi} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\zeta} + \varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right)f = 0, \\ \left(N\dfrac{d}{d\xi} - L\dfrac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\xi} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\zeta} + \varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right)f = 0, \\ \left(N\dfrac{d}{d\eta} - M\dfrac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathfrak{x}\dfrac{d}{d\xi} + \mathfrak{y}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{z}\dfrac{d}{d\zeta} + \varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right)f = 0, \end{cases}
$$

wodurch man auf eine Fläche vom im Allgemeinen $(n-1)\,(n-2)^2$ten Grade kommt.

d) Geht eine Ebene durch einen festen Punkt (p, q, r), so unterliegt ihr Pol bezüglich der Fläche 1) der Bedingung

$$
34)\quad \left(p\frac{d}{d\xi} + q\frac{d}{d\eta} + r\frac{d}{d\zeta} + \varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)f = 0,
$$

welche unter Beachtung des ersten Theiles von Zusatz *a*) Folgendes anzeigt: **Bewegt sich eine Ebene um einen festen Punkt, so beschreibt ihr Pol bezüglich einer Fläche *n*ten Grades eine Fläche vom $(n-1)$ten Grade, welche die gegebene Fläche nach jener Linie schneidet, längs welcher die bewegliche Ebene diese Fläche berührt, also nach der Berührungslinie des von dem festen Punkte aus der gegebenen Fläche umschriebenen Kegels.** Diese als Ort des Pols gefundene Fläche kann die dem festen Punkt bezüglich der gegebenen Fläche entsprechende Polfläche heissen.

e) Ist eine Ebene einer festen Geraden von der Richtung (λ, μ, ν) parallel, so ist ihr Pol bezüglich der Fläche 1) bedingt durch die Gleichung

$$
35)\quad \left(\lambda\frac{d}{d\xi} + \mu\frac{d}{d\eta} + \nu\frac{d}{d\zeta}\right)f = 0,
$$

welche offenbar ausser anderen Werthen von ξ, η, ζ auch die aus den Gleichungen 31) sich ergebenden enthält und den Satz ausspricht: **Bewegt sich eine Ebene einer festen Geraden parallel, so beschreibt ihr Pol bezüglich einer Fläche *n*ten Grades eine Fläche $(n-1)$ten Grades, welche durch die Hauptpunkte der gegebenen Fläche geht und dieselbe nach der Berührungslinie des ihr jener festen Geraden parallel umschriebenen Cylinders schneidet.** Diese Fläche $(n-1)$ten Grades möge die der Richtung der festen Geraden bezüglich der gegebenen Fläche entsprechende Polfläche heissen.

f) Geht eine Ebene durch eine die Punkte (p, q, r) und (p', q', r') etwa enthaltende Gerade, so hat man für ihren Pol bezüglich der Fläche 1) die Gleichungen:

$$36)\quad \left\{\begin{array}{l}\left(p\,\frac{d}{d\xi}+q\,\frac{d}{d\eta}+r\,\frac{d}{d\zeta}+\varepsilon\,\frac{d}{d\varepsilon}\right)f=0\\[2mm] \left(p'\frac{d}{d\xi}+q'\frac{d}{d\eta}+r'\frac{d}{d\zeta}+\varepsilon\,\frac{d}{d\varepsilon}\right)f=0,\end{array}\right.$$

welche auf den Satz hinweisen: Dreht sich eine Ebene um eine feste Gerade, so bewegt sich ihr Pol bezüglich einer Fläche n^{ten} Grades auf der Durchschnittslinie zweier Flächen $(n-1)^{ten}$ Grades, welche Linie die gegebene Fläche in den $n(n-1)^2$ Schnittpunkten der Berührungslinien der von zwei Punkten der festen Geraden aus der Fläche umschriebenen Kegel scheidet. Da die für den Ort des Poles, also für die der festen Geraden bezüglich der Fläche 1) entsprechende Pollinie gegebenen Gleichungen 36) offenbar auch für alle anderen Punkte der durch (p, q, r) und (p', q', r') gegebenen Geraden erfüllt werden und die Polcurve selbst die Fläche in nicht mehr als $n(n-1)^2$ Punkten schneiden kann, so folgt ferner, dass alle den Punkten einer Geraden bezüglich einer Fläche n^{ten} Grades entsprechenden Polflächen sich nach derselben Linie, der dieser Geraden entsprechenden Polcurve, schneiden, durch welche auch die der Richtung der Geraden entsprechende Polfläche geht; sowie dass die Berührungslinien aller von Punkten einer Geraden aus derselben Fläche umschriebenen Kegel sich in denselben $n(n-1)^2$ Punkten schneiden, durch welche auch die Berührungslinie des der Fläche in der Richtung der gegebenen Geraden umschriebenen Cylinders geht.

g) Ist eine Ebene einer durch zwei ihrer Richtungen (λ, μ, ν) und (λ', μ', ν') gegebenen Ebene parallel, so bestehen für ihren Pol bezüglich der Fläche 1) die Bedingungen:

$$37)\quad \left\{\begin{array}{l}\left(\lambda\,\frac{d}{d\xi}+\mu\,\frac{d}{d\eta}+\nu\,\frac{d}{d\zeta}\right)f=0\\[2mm] \left(\lambda'\frac{d}{d\xi}+\mu'\frac{d}{d\eta}+\nu'\frac{d}{d\zeta}\right)f=0,\end{array}\right.$$

welche Folgendes aussprechen: Bewegt sich eine Ebene einer festen Ebene parallel, so durchläuft ihr Pol bezüglich einer Fläche n^{ten} Grades die Durchschnittslinie zweier Flächen von $(n-1)^{ten}$ Grade, welche Linie durch die Hauptpunkte der gegebenen Fläche geht und dieselbe in den $n(n-1)^2$ Schnittpunkten der Berührungslinien zweier dieser Fläche der festen Ebene parallel umschriebener Cylinder schneidet. Mittelst derselben Schlussweise, wie vorhin, findet man ferner, dass alle den verschiedenen auf einer Ebene möglichen Richtungen bezüglich einer Fläche n^{ten} Grades entsprechenden Polflächen sich nach derselben Linie, der der Gesammtrichtung der Ebene entsprechenden Polcurve schneiden; sowie dass ferner die Berührungslinien aller derselben Fläche einer gegebenen Ebene parallel umschriebenen Cylinder sich in denselben $n(n-1)^2$ Punkten schneiden.

h) Ist eine Ebene durch drei ihrer Punkte (p, q, r), (p', q', r') und (p'', q'', r'') gegeben, wodurch auch alle anderen Punkte derselben, sowie ihre Richtungen bedingt sind, so hat man für ihren Pol bezüglich der Fläche 1) die Gleichungen:

$$38)\quad \begin{cases} \left(p\dfrac{d}{d\xi}+q\dfrac{d}{d\eta}+r\dfrac{d}{d\zeta}+\varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right)f=0 \\ \left(p'\dfrac{d}{d\xi}+q'\dfrac{d}{d\eta}+r'\dfrac{d}{d\zeta}+\varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right)f=0 \\ \left(p''\dfrac{d}{d\xi}+q''\dfrac{d}{d\eta}+r''\dfrac{d}{d\zeta}+\varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}\right)f=0, \end{cases}$$

welche demselben im Allgemeinen $(n-1)^3$ verschiedene Stellen anweisen, woraus folgt, dass jeder Ebene bezüglich einer Fläche n^{ten} Grades $(n-1)^3$ Punkte als Pole entsprechen. Es ist auch leicht zu schliessen, dass diese $(n-1)^3$ Punkte die gemeinschaftlichen Schnittpunkte aller den verschiedenen Punkten und Richtungen einer solchen Ebene bezüglich jener Fläche entsprechenden Polflächen sind.

i) Da eine Ebene durch drei ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, so genügt es, um die Polarebene eines Punktes bezüglich einer Fläche n^{ten} Grades zu erhalten, dass man die $3n$ Durchschnittspunkte hat, welche auf drei durch jenen Punkt gehenden Geraden durch die gegebene Fläche entstehen, da dadurch auch drei Punkte der Polarebene jenes Punktes gegeben sind. Wenn nun eine zweite Fläche n^{ten} Grades durch dieselben $3n$ Punkte geht, so wird offenbar die Polarebene jenes den drei Geraden gemeinschaftlichen Punktes bezüglich beider Flächen dieselbe sein, was auch noch Geltung hat, wenn die drei Geraden in eine einzige zusammenfallen und also die beiden Flächen in den n gemeinschaftlichen Schnittpunkten auf dieser einzigen Geraden sich berühren. Man kommt so auf folgende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Maclaurin: Wenn eine Fläche n^{ten} Grades von einer Geraden in der ihrem Grad entsprechenden Anzahl, also in n Punkten geschnitten und von einer zweiten durch dieselben n Punkte gehenden Fläche gleichen Grades in diesen Punkten berührt wird, so dass als diese zweite Fläche auch das System der jenen Punkten entsprechenden n Berührungsebenen der ersten Fläche genommen werden kann, so ist für irgend eine durch einen Punkt der gegebenen Geraden gehende Transversale das harmonische Mittel der durch jede der beiden Flächen auf derselben gemachten Abschnitte von gleichem Werthe, also auch die Polarebene irgend eines Punktes jener Geraden beiden Flächen gemeinschaftlich.

k) Sind $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ die Gleichungen zweier Flächen vom n^{ten} Grade, so stellt die Gleichung

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 = 0,$$

wo λ und μ beliebige Constante bedeuten, im Allgemeinen irgend eine Fläche desselben Grades vor, welche durch die Schnittlinie der beiden ersten Flächen geht. Aus dem Bau der Gleichung 29) ist nun sogleich ersichtlich, dass für irgend welche Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welche den Gleichungen der Polarebenen irgend eines Punktes bezüglich der beiden ersten Flächen genügen, auch die Gleichung der Polarebene desselben Punktes bezüglich der dritten obiger Flächen besteht. Es folgt hieraus, dass die Polarebenen desselben Punktes bezüglich aller Flächen n^{ten} Grades, welche durch die Schnittlinie zweier von ihnen gehen, sich alle in derselben Geraden schneiden. Ferner schneiden sich die irgend einem Punkt oder irgend einer Richtung bezüglich aller dieser Flächen entsprechenden Polflächen nach derselben Linie; werden daher obigen Flächen durch einen festen Punkt oder nach einer festen Richtung Kegel oder Cylinder umschrieben, so schneiden sich die auf den Flächen entstehenden Berührungslinien der Kegel oder Cylinder beziehungsweise in denselben $n(n-1)^2$ Punkten.

Für die Fläche

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3,$$

welche durch die n^3 Schnittpunkte der drei Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ geht, wird die Gleichung der Polarebene irgend eines Punktes offenbar durch die Coordinaten des Schnittpunktes der Polarebenen desselben Poles bezüglich jener drei anderen Flächen befriedigt. Wenn daher mehrere Flächen n^{ten} Grades durch dieselben n^3 Punkte gehen, so schneiden sich die Polarebenen eines beliebigen Punktes bezüglich dieser Flächen alle in demselben Punkte; ferner gehen die irgend einem Punkte oder irgend einer Richtung bezüglich derselben Flächen entsprechenden Polflächen alle durch dieselben $(n-1)^3$ Punkte.

l) Während aus der Bedingung 26) für durch denselben Punkt gehende Transversalen sich die Polarebene dieses Punktes bezüglich der Fläche 1) ergab, werden den mit jener verwandten Bedingungen:

$$39)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_n \left(\frac{1}{\pi \mathfrak{p}} - \frac{1}{\pi p_i}\right)\left(\frac{1}{\pi \mathfrak{p}} - \frac{1}{\pi p_k}\right), \\ \Sigma_n \left(\frac{1}{\pi \mathfrak{p}} - \frac{1}{\pi p_h}\right)\left(\frac{1}{\pi \mathfrak{p}} - \frac{1}{\pi p_i}\right)\left(\frac{1}{\pi \mathfrak{p}} - \frac{1}{\pi p_k}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

für den Punkt π Polarflächen höherer Ordnungen entsprechen. Diese Gleichungen geben hierfür sogleich:

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{(\zeta-\mathfrak{z})^2}-(n-1)\frac{1}{\zeta-\mathfrak{z}}\cdot\Sigma_n\frac{1}{\zeta-z_k}+\Sigma_n\frac{1}{(\zeta-z_i)(\zeta-z_k)}=0,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\cdot\frac{1}{(\zeta-\mathfrak{z})^3}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{1}{(\zeta-\mathfrak{z})^2}\Sigma_n\frac{1}{\zeta-z_k}$$
$$+(n-2)\cdot\frac{1}{\zeta-\mathfrak{z}}\cdot\Sigma_n\frac{1}{(\zeta-z_i)(\zeta-z_k)}-\Sigma_n\frac{1}{(\zeta-z_h)(\zeta-z_i)(\zeta-z_k)}=0,$$

. . . .

woraus man durch Einsetzen der Werthe

$$\Sigma_n\frac{1}{\zeta-z_k}=\frac{(\xi-\mathfrak{x})\frac{df}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{df}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{df}{d\zeta}}{(\zeta-\mathfrak{z})\cdot f},$$

$$\Sigma_n\frac{1}{(\zeta-z_i)(\zeta-z_k)}=\frac{\left[(\xi-\mathfrak{x})\frac{d}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{d}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{d}{d\zeta}\right]^2 f}{2(\zeta-\mathfrak{z})^2\cdot f},$$

. . . .

erhält:

$$\frac{n(n-1)}{2}f-(n-1)\cdot\left[(\xi-\mathfrak{x})\frac{d}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{d}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{d}{d\zeta}\right]f$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[(\xi-\mathfrak{x})\frac{d}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{d}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{d}{d\zeta}\right]^2 f=0,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}f-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\left[(\xi-\mathfrak{x})\frac{d}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{d}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{d}{d\zeta}\right]f$$
$$+\frac{n-2}{2}\cdot\left[(\xi-\mathfrak{x})\frac{d}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{d}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{d}{d\zeta}\right]^2 f$$
$$-\frac{1}{2.3}\left[(\xi-\mathfrak{x})\frac{d}{d\xi}+(\eta-\mathfrak{y})\frac{d}{d\eta}+(\zeta-\mathfrak{z})\frac{d}{d\zeta}\right]^3 f=0,$$

. . . .

oder durch Einsetzen der verschiedenen die Function f homogen machenden Potenzen von $\varepsilon(=1)$ als Factoren der Glieder von f, und nach entsprechender Reduction:

$$40)\qquad\left\{\begin{array}{l}\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\xi}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\eta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\zeta}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)^2 f=0,\\ \left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\xi}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\eta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\zeta}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)^3 f=0,\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

welche Gleichungen Flächen des zweiten, dritten, . . . Grades darstellen und als Polarfläche $n$ter Ordnung auf die gegebene Fläche wieder führen. Von den Eigenschaften dieser Polarflächen, deren nähere Untersuchung einer besonderen Abhandlung vorbehalten bleibt, möge nur angeführt werden, dass die Polarfläche irgend einer Ordnung eines unendlich fernen Punktes bezüglich einer algebraischen

Fläche als Diametralfläche gleicher Ordnung der durch die Lage dieses Punktes bestimmten Richtung entspricht. Ferner ist die Polarfläche $k$ter Ordnung eines Punktes bezüglich der gegebenen Fläche zugleich Polarfläche derselben Ordnung dieses Punktes bezüglich aller Polarflächen höherer Ordnungen, welche diesem Punkte bezüglich der gegebenen Fläche entsprechen; endlich berühren sich die einem Punkte der gegebenen Fläche bezüglich dieser zugehörigen Polarflächen aller Ordnungen in diesem Punkte.

III.

Die absolute Länge einer auf der Geraden 2) genommenen Strecke πp ist bekanntlich

$$\pi p = \pm \frac{\zeta - z}{\gamma},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt π in der Richtung der Geraden vor oder hinter dem Punkte p sich befindet. Sind also wieder $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Schnittpunkte der Fläche 1) mit der Geraden 2), so erhält man für den absoluten Werth des Productes der von π aus bis zu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ genommenen Abschnitte mit Beiziehung der Gleichung 27) alsbald:

$$41)\quad \left\{\begin{aligned} \pi p_1 \,.\, \pi p_2 \ldots \pi p_n &= \pm \frac{P_n(\zeta - z_k)}{\gamma^n} \\ &= \pm \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}}, \end{aligned}\right.$$

wo auf der zweiten Seite gemäss der eben gemachten Bemerkung das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl der Punkte p in der Richtung (α, β, γ) vor dem Punkte π sich befinden. Da dann das Product der Abschnitte πp einen positiven Werth erhält, so lässt sich leicht schliessen, dass auch die Ausdrücke $f(\xi, \eta, \zeta)$ und $\mathfrak{A}$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, je nachdem von den Punkten p eine gerade oder ungerade Anzahl vor π gelegen sind. Ferner werden die den Richtungen (α, β, γ) und $(\alpha', \beta', \gamma')$ entsprechenden Ausdrücke $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, je nachdem von den Punkten p und p', welche auf den durch π nach jenen Richtungen gezogenen Transversalen durch deren Schnitt mit der Fläche 1) entstehen, gleichzeitig eine gerade oder ungerade Anzahl vor dem Punkt π liegt, oder nicht; und $f(\xi, \eta, \zeta)$ und $f(\xi', \eta', \zeta')$ werden gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, je nachdem von den Punkten p und r, welche auf den durch die Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') oder π und ϱ in der Richtung (α, β, γ) gezogenen Transversalen sich befinden, gleichzeitig eine gerade oder ungerade Anzahl vor π und ϱ liegt, oder nicht. Diese Bemerkungen gelten auch umgekehrt. Es wird daher bei den aus 41) entstehenden Gleichungen:

$$42)\quad \frac{\pi p_1 \cdot \pi p_2 \ldots \pi p_n}{\pi p'_1 \cdot \pi p'_2 \ldots \pi p'_n} = \pm \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} \text{ und } \frac{\pi p_1 \cdot \pi p_2 \ldots \pi p_n}{\varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \ldots \varrho r_n} = \pm \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{f(\xi', \eta', \zeta')}$$

die Wahl des Vorzeichens auf der zweiten Seite unabhängig sein, in der ersten von der Lage des gemeinschaftlichen Punktes π, und in der zweiten von der gemeinschaftlichen Richtung (α, β, γ). Man erhält sonach für je zwei durch die Punkte π und ϱ nach den Richtungen (α, β, γ) und $(\alpha', \beta', \gamma')$ gezogenen Transversalen die sowohl den Werthen, als den Vorzeichen nach bestehende Beziehung:

$$43)\quad \frac{\pi p_1 \cdot \pi p_2 \ldots \pi p_n}{\pi p'_1 \cdot \pi p'_2 \ldots \pi p'_n} = \frac{\varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \ldots \varrho r_n}{\varrho r'_1 \cdot \varrho r'_2 \ldots \varrho r'_n},$$

welche folgenden Satz enthält:

III. „Wenn man durch irgend einen Punkt nach zwei festen Richtungen, oder nach irgend einer Richtung durch zwei feste Punkte Transversalen zieht, welche eine algebraische Fläche in so viel Punkten schneiden, als der Grad der Fläche anzeigt, so sind die Producte der Abschnitte, welche durch die Fläche auf jeder der Transversalen, von dem Punkt aus gerechnet, durch den dieselbe gezogen ist, gemacht werden, in einem constanten Verhältnisse, welches dasselbe bleibt, wie auch jener beliebige Punkt oder jene beliebige Richtung gewählt werden mag.“

Hieran schliessen sich noch folgende Bemerkungen:

a) Ist $\pi\mathfrak{p}$ das von dem Punkt π aus in der Richtung (α, β, γ) auf der Geraden 2) aufgetragene geometrische Mittel der Abschnitte $\pi p_1, \pi p_2, \ldots, \pi p_n$, so erhält man wegen

$$\alpha = \frac{\mathfrak{x} - \xi}{\pi\mathfrak{p}}, \quad \beta = \frac{\mathfrak{y} - \eta}{\pi\mathfrak{p}}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{z} - \zeta}{\pi\mathfrak{p}}$$

aus der Gleichung 41) für den Ort des Endpunktes $\mathfrak{p}$ entsprechend allen möglichen Richtungen der Transversalen die beiden Gleichungen:

$$44)\left\{\begin{array}{l} A(\mathfrak{z}-\zeta)^n + [A_1(\mathfrak{x}-\xi) + A'(\mathfrak{y}-\eta)](\mathfrak{z}-\zeta)^{n-1} + \ldots + A_n(\mathfrak{x}-\xi)^n + \ldots \\ \qquad + A^{(n)}(\mathfrak{y}-\eta)^n - f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \\ A(\mathfrak{z}-\zeta)^n + [A_1(\mathfrak{x}-\xi) + A'(\mathfrak{y}-\eta)](\mathfrak{z}-\zeta)^{n-1} + \ldots + A_n(\mathfrak{x}-\xi)^n + \ldots \\ \qquad + A^{(n)}(\mathfrak{y}-\eta)^n + f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \end{array}\right.$$

welche sich gegenseitig ausschliessen und ausser den Coordinaten des Punktes $\mathfrak{p}$ auch die des gerade entgegengesetzt und gleichweit von π abstehenden Punktes $\mathfrak{p}'$ enthalten; und zwar so, dass, wenn die eine von diesen Gleichungen durch die Werthe von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ befriedigt wird, bei geradem n ihr auch die Werthe

$$\mathfrak{x}' = 2\xi - \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}' = 2\eta - \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}' = 2\zeta - \mathfrak{z}$$

genügen, bei ungeradem n aber letztere Werthe dann die andere Gleichung erfüllen. Beide Gleichungen zusammen drücken das System zweier

Flächen $n$ten Grades aus, welches die Endpunkte der zu beiden Seiten des Punktes π aufgetragenen geometrischen Mittel der Abschnitte enthält, welche auf allen durch π gehenden Transversalen durch die Fläche 1) gemacht werden. — Jedem Punkt gehört ein solches Flächensystem zu und diese sind, wie der Satz III. sogleich zeigt, alle ähnlich.

Schneidet man das dem Punkt π zugehörige System der Flächen 44) durch die mit demselben concentrische Kugel

$$(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2=c^2,$$

so erhält man, da immer je zwei Punkte der Schnittlinie mit π in einer Geraden liegen, als Schnittcurve die Leitlinie eines Kegels vom Grade $2n$, welcher alle durch π gehenden Transversalen zu Seiten hat, auf welchen das geometrische Mittel der durch die Fläche 1) von π aus gemachten Abschnitte denselben Werth c, also auch das Product dieser Abschnitte denselben Werth c^n hat.

Für diejenigen Arten von Flächen eines geraden Grades, bei welchen die Coefficienten des Polynoms $\mathfrak{A}$ dieselben sind, wie die der Entwickelung von $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{n}{2}}$, reduciren sich die Gleichungen 44) offenbar auf

$$[(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2]^{\frac{n}{2}}\mp f(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

wodurch das in jenen Gleichungen dargestellte Flächensystem als eine Kugel erscheint, deren Mittelpunkt π und der Halbmesser gleich $\sqrt[n]{\pm f(\xi,\eta,\zeta)}$ ist, wo das Zeichen $+$ oder $-$ je nach der Lage des Punktes π zu wählen ist. Es giebt daher unter den verschiedenen Flächenarten desselben geraden Grades immer auch solche, bei welchen das Product der Abschnitte, welche auf einer durch einen beliebigen Punkt gehenden Transversalen durch sie gemacht werden, für jede Richtung dieser Transversalen denselben Werth hat; diese Flächen haben zugleich noch die Eigenschaft, dass zu allen Transversalenrichtungen die zugehörigen Diametralebenen senkrecht sind, wie sich aus der Gleichung 16) alsbald ergiebt.

b) Das Product der Abschnitte, welche auf einer durch einen bestimmten Punkt gehenden Transversalen durch eine algebraische Fläche wie die Fläche 1) gemacht werden, wird im Allgemeinen für verschiedene Richtungen der Transversalen verschiedene Werthe erhalten. Die Gleichung 41) lässt nun sogleich erkennen, dass die grössten und kleinsten Werthe des Productes der Abschnitte auf den durch π gehenden Transversalen, abgesehen von den aus $\mathfrak{A}=0$ folgenden Asymptotenrichtungen, für welche jenes Product unendlich gross wird, in denjenigen Richtungen auftreten werden, bei welchen das Polynom $\mathfrak{A}$ seine kleinsten und grössten Werthe erhält. Es ergeben sich für diese Richtungen durch Nullsetzen der mit Beachtung der Bedingung: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$ partiell nach α und β etwa genommenen ersten Ableitungen von $\mathfrak{A}$ die Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}=0 \text{ und } \frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}=0,$$

welche mit der Gleichung 17) identisch sind und also kundgeben, dass, **wenn man durch irgend einen Punkt nach allen Richtungen Transversalen zieht, welche sämmtlich von einer algebraischen Fläche in der ihrem Grad entsprechenden Anzahl von Punkten geschnitten werden, das Product der in jeder dieser Richtungen von jenem Punkt aus gemachten Abschnitte seine grössten und kleinsten Werthe in den Hauptrichtungen der Fläche erhält.**

Beschränkt man sich blos auf die in einer durch den gegebenen Punkt gehenden Ebene, der Ebene 10) etwa, möglichen Richtungen, so erhält man für diejenigen Richtungen, in welchen das Polynom $\mathfrak{A}$ seine kleinsten und grössten Werthe hat, unter Beachtung der Bedingungen:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \text{ und } L\alpha+M\beta+N\gamma=0$$

die Gleichung:

$$(\beta N-\gamma M)\cdot\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha}+(\gamma L-\alpha N)\cdot\frac{d\mathfrak{A}}{d\beta}+(\alpha M-\beta L)\cdot\frac{d\mathfrak{A}}{d\gamma}=0,$$

welche ausdrückt, dass die der Richtung (α, β, γ) bezüglich der Fläche 1) zugehörige Diametralebene senkrecht ist zu den durch dieselbe Richtung und die Normalen der gegebenen Ebene bestimmten Ebenen. Hieraus folgt, dass, **wenn man in einer Ebene durch einen festen Punkt beliebige Transversalen zieht, das Product der auf einer solchen durch ihr Schneiden mit einer algebraischen Fläche bestimmten Abschnitte seine grössten und kleinsten Werthe in jenen Richtungen erhält, welche mit der Schnittlinie der gegebenen Ebene und ihrer Diametralebene bezüglich jener Fläche rechte Winkel bilden.**

c) Wird die Fläche 1) durch eine Reihe paralleler, etwa in der Richtung (α, β, γ) gehender Transversalen geschnitten, so befinden sich diejenigen Punkte dieser Transversalen, für welche das Product der auf den Transversalen durch die Fläche 1) gemachten Abschnitte denselben Werth c^n hat, gemäss der Gleichung 41) auf den zwei Flächen

45) $$f(\xi, \eta, \zeta)-\mathfrak{A}\cdot c^n=0 \text{ und } f(\xi, \eta, \zeta)+\mathfrak{A}\cdot c^n=0,$$

welche mit der Fläche 1) von gleichem Grade und gleicher Asymptotenrichtung sind. Da die auf einer beliebigen in der Richtung $(\alpha', \beta', \gamma')$ gehenden Transversalen durch die Fläche 1) und die Flächen 45) von einem Punkt $\mathfrak{p}$ aus gemachten Abschnitte für ihr Product die Werthe:

$$\frac{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\mathfrak{A}'}, \quad \frac{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})-\mathfrak{A}\cdot c^n}{\mathfrak{A}'}, \quad \frac{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})+\mathfrak{A}\cdot c^n}{\mathfrak{A}'}$$

haben, so findet man leicht, dass, wenn man die Fläche 1) und die beiden

Flächen 45) durch eine Reihe paralleler Transversalen schneidet, das Product der von irgend einem der Schnittpunkte der Flächen 45) aus durch die Fläche 1), oder von irgend einem der Schnittpunkte der Fläche 1) aus durch eine der Flächen 45) gemachten Abschnitte auf allen jenen Transversalen denselben Werth hat, welcher halb so gross ist, als der Werth des Productes der Abschnitte, welche von irgend einem Schnittpunkte der einen der Flächen 45) aus durch die andere derselben auf einer solchen Transversalen gemacht werden. Ferner ist das Product der von einem beliebigen Punkt aus auf einer Transversalen durch die Fläche 1) gemachten Abschnitte das arithmetische Mittel der beiden Producte der Abschnitte, welche durch die Flächen 45) von demselben Punkt aus auf dieser Transversalen gemacht werden.

d) Abgesehen von unendlich fernen Punkten, für welche das Product der auf irgend einer Transversalen durch die Fläche 1) gemachten Abschnitte unendlich gross wird, und von Punkten dieser Fläche selbst, für welche jenes Product Null ist, ergeben sich für die Punkte, von welchen aus das Product der auf einer in der festen Richtung (α, β, γ) gehenden Transversalen durch die Fläche 1) gemachten Abschnitte seine grössten und kleinsten Werthe erhält, durch Nullsetzen der partiell nach ξ, η, ζ genommenen ersten Ableitungen von $f(\xi, \eta, \zeta)$ die Gleichungen:

$$\frac{df(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi} = 0, \quad \frac{df(\xi, \eta, \zeta)}{d\eta} = 0, \quad \frac{df(\xi, \eta, \zeta)}{d\zeta} = 0,$$

in welchen man die Gleichungen 31) erkennt. Es zeigt sich also, dass von allen Punkten, durch welche man nach irgend einer festen Richtung Transversalen zieht, welche von einer algebraischen Fläche in der dem Grade letzterer entsprechenden Anzahl von Punkten geschnitten werden, die Hauptpunkte der Fläche diejenigen sind, für welche das Product der durch die Fläche auf der Transversalen gemachten Abschnitte seine grössten und kleinsten Werthe erhält.

Wenn man in einer Ebene, wie in der Ebene 10), nach der festen Richtung (α, β, γ) Transversalen zieht, so erhält man die Punkte, für welche das Product der auf der durchgehenden Transversalen durch die Fläche 1) gemachten Abschnitte am grössten oder kleinsten wird, durch Nullsetzen der unter der Bedingung

$$L\xi + M\eta + N\zeta + P = 0$$

nach ξ und η genommenen ersten Ableitungen von $f(\xi, \eta, \zeta)$, also aus den Gleichungen

$$N\frac{df}{d\xi} - L\frac{df}{d\zeta} = 0 \text{ und } N\frac{df}{d\eta} - M\frac{df}{d\zeta} = 0,$$

welche gleichbedeutend sind mit den Gleichungen 37) und demnach kundgeben, dass von allen Punkten einer Ebene, durch welche man nach einer festen Richtung Transversalen zieht, welche von einer algebraischen Fläche geschnitten werden, die Punkte, für welche das Product der auf der durchgehenden Transversalen durch diese Fläche gemachten Abschnitte seine grössten oder kleinsten Werthe erhält, diejenigen sind, in welchen die Ebene von der ihrer Richtung bezüglich der gegebenen Fläche zugehörigen Polcurve geschnitten wird, also jene Punkte dieser Ebene, deren Polarebenen derselben parallel sind.

Diejenigen Punkte einer in der Richtung (α, β, γ) gehenden Geraden endlich, für welche das Product der durch die Fläche 1) auf der Geraden gemachten Abschnitte seine grössten Werthe erhält — die kleinsten Werthe des genannten Productes entsprechen offenbar den Schnittpunkten der Geraden mit der Fläche — findet man durch Nullsetzen der nach der allein unabhängig bleibenden der Veränderlichen ξ, η, ζ genommenen ersten Ableitung von $f(\xi, \eta, \zeta)$, also aus der Gleichung

$$\alpha \frac{df}{d\xi} + \beta \frac{df}{d\eta} + \gamma \frac{df}{d\zeta} = 0,$$

welche gleiche Bedeutung hat, wie die Gleichung 35), und also schliessen lässt, dass die Punkte einer Geraden, für welche das Product der durch eine algebraische Fläche auf der Geraden gemachten Abschnitte seine grössten Werthe erhält, diejenigen Punkte sind, in welchen diese Gerade von der ihrer Richtung bezüglich jener Fläche entsprechenden Polfläche geschnitten wird.

e) Sind $f=0$ und $f'=0$ zwei Flächen desselben Grades und gleicher Asymptotenrichtung, so dass für irgend eine Transversalenrichtung das Polynom $\mathfrak{A}$ bei beiden Flächen denselben Werth erhält, so ist das Verhältniss der Producte der Abschnitte, welche durch diese Flächen auf einer beliebig durch den Punkt π gehenden Transversalen gemacht werden, abgesehen vom Vorzeichen ausgedrückt durch $\frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{f'(\xi, \eta, \zeta)}$, also unabhängig von der Richtung der Transversalen. Es folgt hieraus, dass, wenn zwei algebraische Flächen desselben Grades und gleicher Asymptotenrichtung durch eine Reihe von Transversalen, die durch denselben Punkt gehen, geschnitten werden, die Producte der Abschnitte, welche auf diesen Transversalen durch die eine jener Flächen von dem gegebenen Punkt aus gemacht werden, sich verhalten wie die Producte der durch die andere Fläche auf denselben Transversalen gemachten Abschnitte.

f) Sind $f_1=0$ und $f_2=0$ zwei Flächen zweiten Grades, so ist im Allgemeinen

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 = 0$$

die Gleichung einer Fläche desselben Grades, welche durch die Schnittlinie der beiden ersten Flächen geht. Schneidet man nun diese drei Flächen durch eine in der Richtung (α, β, γ) gehende Transversale, so hat man für die Producte der durch die Flächen auf der Transversalen von einem beliebigen Punkt π derselben aus gemachten Abschnitte, wenn man dieselbe mit P_1, P_2 und P bezeichnet, die Gleichungen

$$P_1 = \frac{f_1(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}}, \quad P_2 = \frac{f_2(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}}, \quad P = \frac{\lambda f_1(\xi, \eta, \zeta) + \mu f_2(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}},$$

aus welchen sogleich

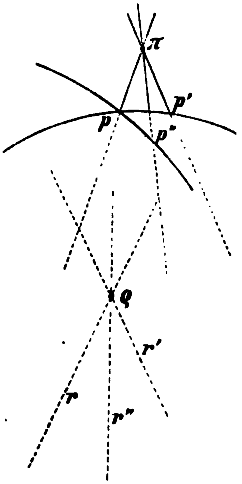
$$P = \lambda P_1 + \mu P_2$$

folgt, welche Gleichung für einen Punkt der dritten der gegebenen Flächen, also für f und P gleich Null

$$\frac{P_1}{P_2} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

giebt. Da sonach das Verhältniss der beiden Producte P_1 und P_2 von der Lage des Punktes π auf der Fläche $f=0$ ebenso als von der Richtung der Transversalen unabhängig ist, so hat man den Satz: *Wenn drei algebraische Flächen desselben Grades durch eine gemeinschaftliche Schnittlinie gehen und durch beliebige Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniss der Producte der Abschnitte, welche durch zwei jener Flächen auf einer Transversalen von einem der Schnittpunkte letzterer mit der dritten Fläche aus gemacht werden, constant und gleich dem irgend einem anderen Schnittpunkt derselben oder irgend einer anderen Transversalen und der dritten Fläche in gleicher Weise entsprechenden Verhältniss. Wenn daher durch irgend zwei Punkte letzterer Fläche je zwei einander paarweise parallele Transversalen gezogen werden, welche die beiden ersten Flächen in der ihrem Grade zukommenden Anzahl von Punkten schneiden, so verhalten sich die Producte der Abschnitte, welche durch die eine Fläche auf den Transversalen der einen Richtung oder durch den einen Punkt der dritten Fläche von diesem aus gemacht werden, wie die Producte der Abschnitte, welche durch die andere Fläche auf den beiden anderen Transversalen entstehen.*

g) In seinem „*Aperçu historique*" (s. Cap. V, No. 26) theilt Chasles ohne Beweis ein Verfahren mit, für einen gegebenen Punkt einer ebenen algebraischen Curve die Tangente, Normale und den Krümmungskreis zu construiren, welches sich auch auf die algebraischen Flächen übertragen und mittelst des Satzes III. leicht begründen lässt. Soll nämlich vorerst an eine Fläche $n$ten Grades etwa im Punkte p derselben eine Berührungsebene gelegt werden, so denke man sich den Punkt p mit einem beliebinahe ausserhalb der Fläche befindlichen Punkt π durch eine Gerade verbunden, welche die Fläche noch in den Punkten $p_2, p_3, \ldots, p_n$ schneiden möge; ferner seien durch π noch zwei andere mit der ersteren nicht in einer Ebene liegende Gerade gezogen, welche die Fläche zunächst in p' und p'', dann aber noch beziehungsweise in den Punkten $p'_2, p'_3, \ldots, p'_n$ und $p''_2, p''_3, \ldots, p''_n$ schneiden. Die durch die Punkte p, p' und p'' gehende Ebene ist offenbar bestimmt durch die Lage eines ihrer Punkte, also des Punktes p, und durch die Verhältnisse der drei Abstände πp, $\pi p'$ und $\pi p''$. Um letztere zu erhalten, ziehe man durch einen ganz beliebigen Punkt ϱ gleichfalls drei Gerade, welche den durch π gehenden bezüglich parallel sind und die Fläche in den Punkten $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $r'_1, r'_2, \ldots, r'_n$ und $r''_1, r''_2, \ldots, r''_n$ schneiden; die Gleichungen



$$\frac{\pi p\,.\,\pi p_2\ldots\pi p_n}{\varrho r_1\,.\,\varrho r_2\ldots\varrho r_n}=\frac{\pi p'\,.\,\pi p'_2\ldots\pi p'_n}{\varrho r'_1\,.\,\varrho r'_2\ldots\varrho r'_n}=\frac{\pi p''\,.\,\pi p''_2\ldots\pi p''_n}{\varrho r''_1\,.\,\varrho r''_2\ldots\varrho r''_n}$$

geben dann alsbald

$$\pi p : \pi p' : \pi p''$$
$$=\frac{\varrho r_1\,.\,\varrho r_2\ldots\varrho r_n}{\pi p_2\ldots\pi p_n}:\frac{\varrho r'_1\,.\,\varrho r'_2\ldots\varrho r'_n}{\pi p'_2\ldots\pi p'_n}:\frac{\varrho r''_1\,.\,\varrho r''_2\ldots\varrho r''_n}{\pi p''_2\ldots\pi p''_n}.$$

Lässt man nun den Punkt π auf der Geraden πp, ohne die Richtungen von $\pi p'$ und $\pi p''$ zu ändern, dem Punkt p näher rücken, so werden auch die Punkte p' und p'' dem Berührungspunkte, die Ebene (p, p', p'') also der Berührungsebene der Fläche in p sich immer mehr nähern und mit diesen beziehungsweise zusammenfallen, sobald π den Punkt p erreicht hat. Da sodann die Abstände πp, $\pi p'$ und $\pi p''$ verschwinden, so erscheinen ihre die Berührungsebene mit bestimmenden Verhältnisse für sich in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und sind dem Werthe nach gemäss dem Obigen:

$$46)\qquad =\frac{\varrho r_1\,.\,\varrho r_2\ldots\varrho r_n}{pp_2\,.\,pp_3\ldots pp_n}:\frac{\varrho r'_1\,.\,\varrho r'_2\ldots\varrho r'_n}{pp'_2\,.\,pp'_3\ldots pp'_n}:\frac{\varrho r''_1\,.\,\varrho r''_2\ldots\varrho r''_n}{pp''_2\,.\,pp''_3\ldots pp''_n}.$$

Um folglich die Berührungsebene einer algebraischen Fläche für einen gegebenen Punkt p derselben zu erhalten, ziehe man durch diesen Punkt nach irgend drei nicht in einer Ebene liegenden Richtungen Transversalen und durch einen beliebigen nicht auf der Fläche befindlichen Punkt ϱ Parallele zu jenen, welche sämmtlich die Fläche in der ihrem Grad zugehörigen Anzahl von Punkten schneiden. Trägt man dann auf jeder der durch p gehenden Transversalen eine Strecke auf, welche dem Producte der auf der Parallelen durch ϱ von diesem Punkt aus durch die Fläche gemachten Abschnitte direct, und dem Producte der auf der bezüglichen Transversalen selbst von p aus durch die

Fläche gemachten Abschnitte verkehrt proportional ist, so liegen die Endpunkte jener Strecken in einer Ebene, welcher die verlangte Berührungsebene parallel ist, während die von p aus auf die Ebene jener Endpunkte gefällte Senkrechte die Normale der Fläche in dem Punkte p bildet.

Zu beachten ist noch, dass, je nachdem man auf den drei durch p gezogenen Geraden die angegebenen drei Längen nach der einen oder anderen Seite von p aus aufträgt, ihre Endpunkte im Ganzen acht verschiedene Ebenen bestimmen, die sich paarweise parallel sind, und es entsteht daher die Frage, welche von diesen Ebenen die Richtung der Berührungsebene angeben wird. Aus dem im Eingange dieses Abschnittes Gesagten ist nun leicht einzusehen, dass, wenn durch irgend zwei Punkte nach verschiedenen Richtungen parallele Transversalen gezogen werden und die auf zwei solchen Parallelen von beiden Punkten aus durch eine algebraische Fläche nach derselben Seite hin gemachten Abschnitte zusammen in gerader oder in ungerader Anzahl auftreten, die Anzahl der in gleicher Weise auf den anderen Paaren von Parallelen gebildeten Abschnitte ebenfalls beziehungsweise gerade oder ungerade sein wird. Dies gilt offenbar auch bezüglich der zur Herleitung obiger Construction benutzten Punkte π und ϱ, von denen man ersteren sich bereits so nahe an p befindlich denken kann, dass die Punkte p, p' und p'' die π am nächsten gelegenen Schnittpunkte der Fläche mit den bezüglichen Transversalen sind. Je nachdem man nun die durch π und ϱ gezogenen Transversalen nach der von π nach p, p' und p'' gehenden Seite nimmt, oder nach der entgegengesetzten Seite, wird durch das Hereinrücken von π nach dem Berührungspunkte p nach allen drei Richtungen je ein Abschnitt verschwinden, oder nach keiner Richtung, und daher auch bezüglich der Punkte p und ϱ die Gesammtzahl der nach derselben Seite der Berührungsebene hin gemachten Abschnitte für die angenommenen drei Richtungen gleichzeitig gerade oder ungerade, nach der entgegengesetzten Seite also ungerade oder gerade bleiben. Man wird folglich die zur Bestimmung der Berührungsebene dienenden drei Längen vom Berührungspunkte p aus jede nach derjenigen Seite ihrer Richtung auftragen, auf welcher von den $2n-1$ Abschnitten, die durch die Fläche auf den beiden durch p und ϱ gezogenen Parallelen gemacht werden, die gerade Anzahl sich befindet, oder alle drei Längen nach der jener entgegengesetzten Seite; den in beiden Fällen durch die drei Endpunkte bestimmten Parallelebenen wird auch die gesuchte Berührungsebene parallel sein.

Schliesslich kann noch bemerkt werden, dass, wenn ein Paar der zur bisher betrachteten Construction gebrauchten parallelen Transversalen asymptotisch gerichtet ist, der sonst ganz beliebige Punkt ϱ auf der durch p gezogenen Transversalen genommen werden muss, wodurch jene beiden Parallelen in eine Gerade zusammenfallen und das Verhältniss der dem unendlich fernen Schnittpunkt p_n der Transversalen und der Fläche entsprechenden Abschnitte pp_n und ϱp_n, das ausserdem unbestimmt bleiben würde, hier der Einheit gleich wird.

Um von der hier gegebenen constructiven Bestimmung der Berührungsebene einer algebraischen Fläche $f(x, y, z)$ oder $f=0$ die Gleichung derselben abzuleiten, seien x, y, z und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Berührungspunktes p und eines beliebigen anderen Punktes der Berührungsebene; ferner ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes ϱ und (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ und $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ die Richtungen der zur Construction verwendeten Transversalen. Nimmt man die Gleichung der Ebene, welche die Endpunkte der von p aus aufgetragenen Strecken enthält, in der Form 10) an, so ist die Gleichung der jener parallelen Berührungsebene

$$L(x-\mathfrak{x})+M(y-\mathfrak{y})+N(z-\mathfrak{z})=0.$$

Nun sind jene Strecken einerseits ausgedrückt durch

$$\frac{Lx+My+Nz+P}{L\alpha+M\beta+N\gamma},\ \frac{Lx+My+Nz+P}{L\alpha'+M\beta'+N\gamma'},\ \frac{Lx+My+Nz+P}{L\alpha''+M\beta''+N\gamma''};$$

andererseits gestalten sich die in 46) gegebenen Verhältnisse derselben wegen

$$\varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \ldots \varrho r_n = \pm \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}},$$

und, wenn man noch die Coordinaten des Punktes π durch x', y', z' darstellt,

$$\begin{aligned} pp_2 \cdot pp_3 \ldots pp_n &= \lim \left(\frac{\pi p \cdot \pi p_2 \ldots \pi p_n}{\pi p}\right)_{\pi \text{ in } p} \\ &= \lim \left(\pm \frac{f(x', y', z')}{\mathfrak{A}} : \frac{z'-z}{\gamma}\right)_{(z'=z)} \\ &= \pm \frac{\alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy} + \gamma \frac{df}{dz}}{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

den Werthen, wie den Vorzeichen nach um in:

$$\frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy} + \gamma \frac{df}{dz}} : \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\alpha' \frac{df}{dx} + \beta' \frac{df}{dy} + \gamma' \frac{df}{dz}} : \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\alpha'' \frac{df}{dx} + \beta'' \frac{df}{dy} + \gamma'' \frac{df}{dz}}.$$

Man erhält hierdurch:

$$\frac{L\alpha+M\beta+N\gamma}{\alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy} + \gamma \frac{df}{dz}} = \frac{L\alpha'+M\beta'+N\gamma'}{\alpha' \frac{df}{dx} + \beta' \frac{df}{dy} + \gamma' \frac{df}{dz}} = \frac{L\alpha''+M\beta''+N\gamma''}{\alpha'' \frac{df}{dx} + \beta'' \frac{df}{dy} + \gamma'' \frac{df}{dz}},$$

was unabhängig von den Richtungen $(\alpha, \beta, \gamma), \ldots$ nur sein kann, wenn

$$L : \frac{df}{dx} = M : \frac{df}{dy} = N : \frac{df}{dz}$$

genommen wird. Sonach ist die gesuchte Gleichung der Berührungsebene der Fläche $f=0$ im Punkte p:

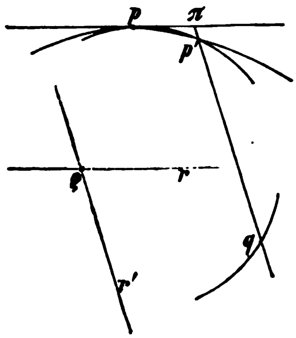
$$\frac{df}{dx}(x-\mathfrak{x})+\frac{df}{dy}(y-\mathfrak{y})+\frac{df}{dz}(z-\mathfrak{z})=0,$$

Uebereinstimmung mit einer bereits früher (II. a) gemachten Bemerkung.

h) Um in einem Punkt einer algebraischen Fläche für einen durch denselben gemachten ebenen Schnitt den Krümmungskreis zu bestimmen, ziehe man für jenen Punkt p die Tangente der Schnittcurve, welche beide sich noch, dem Grade der Fläche entsprechend, in den Punkten $p_3, p_4, \ldots, p_n$, sodann durch den auf der Tangente beliebig nahe an p angenommenen Punkt π in derselben Ebene eine zweite Gerade, welche die genannte Curve zunächst in p', dann noch in den Punkten $p'_2, p'_3, \ldots, p'_n$ schneidet. Ein durch den Punkt p' gehender Kreis, der die Gerade $p\pi$, also auch die Schnittcurve in p berührt, wird die Gerade $p'\pi$ noch in einem zweiten Punkt q schneiden und dann offenbar auch dadurch bestimmt sein, dass er, die Gerade $p\pi$ in p berührend, durch den Punkt q gehen soll. Zur Bestimmung letzteren Punktes hat man

$$\pi q=\frac{(\pi p)^2}{\pi p'},$$

oder, wenn man durch einen ganz beliebigen Punkt ϱr und $\varrho r'$ parallel zu πp und $\pi p'$ zieht und die Schnittpunkte derselben mit der gegebenen Fläche beziehungsweise mit $r_1, r_2, \ldots, r_n$ und $r'_1, r'_2, \ldots, r'_n$ bezeichnet, wegen



$$\frac{\pi p\,.\,\pi p\,.\,\pi p_3\ldots\pi p_n}{\pi p'\,.\,\pi p'_2\ldots\pi p'_n}=\frac{\varrho r_1\,.\,\varrho r_2\ldots\varrho r_n}{\varrho r'_1\,.\,\varrho r'_2\ldots\varrho r'_n}$$

durch Auflösung

$$\pi q=\frac{\varrho r_1\,.\,\varrho r_2\ldots\varrho r_n}{\varrho r'_1\,.\,\varrho r'_2\ldots\varrho r'_n}\cdot\frac{\pi p'_2\,.\,\pi p'_3\ldots\pi p'_n}{\pi p_3\,.\,\pi p_4\ldots\pi p_n}.$$

Lässt man nun den Punkt π auf der Geraden πp, ohne die Richtung von $\pi p'$ zu ändern, dem Punkte p näher zu rücken, so wird auch p' demselben Punkte, und daher der durch p' gehende Berührungskreis für p dem Krümmungskreis des gegebenen Flächenschnitts für denselben Punkt sich immer mehr nähern, und mit diesen beziehungsweise zusammenfallen, sobald π den Punkt p erreicht hat. Da sodann die Strecken πp und $\pi p'$ verschwinden, so erscheint die neuentstandene Sehne pq nach dem ersten der dafür gegegebenen Ausdrücke in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, während der zweite:

$$47)\qquad pq=\frac{\varrho r_1\,.\,\varrho r_2\ldots\varrho r_n}{\varrho r'_1\,.\,\varrho r'_2\ldots\varrho r'_n}\cdot\frac{pp'_2\,.\,pp'_3\ldots pp'_n}{pp_3\,.\,pp_4\ldots pp_n}$$

giebt. Um folglich in einem ebenen Schnitt einer algebraischen Fläche für einen gegebenen Punkt p desselben den Krümmungskreis zu erhalten, ziehe man in diesem Punkt die Tangente der Schnittcurve und in deren Ebene durch ...en Punkt eine zweite Gerade, sowie durch einen beliebigen nicht auf der Fläche befindlichen Punkt ϱ Parallele zu jenen, welche sämmtlich die Fläche in der ihrem Grade entsprechenden Anzahl von Punkten schneiden. Trägt man dann auf der zweiten durch p gehenden Geraden eine Strecke auf, welche den Producten der Abschnitte, welche durch die Fläche auf dieser Geraden selbst und auf der durch ϱ parallel zur Tangente gezogenen in Bezug auf p und ϱ gemacht werden, direct, und den Producten der Abschnitte, welche auf der Tangente und auf der anderen durch ϱ gehenden Transversalen durch die Fläche entstehen, verkehrt proportional ist, so liegt der Endpunkt dieser Strecke auf dem verlangten Krümmungskreis.

Auch hier ist noch zu entscheiden, auf welcher Seite der zweiten durch p gezogenen Transversalen die angegebene Strecke aufzutragen ist. Denkt man sich letztere Transversale noch durch π gehend, so wird von den $2n$ Abschnitten, welche auf ihr selbst und der durch ϱ gehenden Parallelen durch die Fläche gemacht werden, nach derselben Seite von π und ϱ zusammen eine gerade oder ungerade Anzahl liegen, je nachdem auf der Tangente (πp doppelt gerechnet) und ihrer Parallelen durch ϱ nach derselben Seite von π und ϱ hin zusammen eine gerade oder ungerade Anzahl von Abschnitten enthalten ist. Lässt man nun den Punkt π wieder auf p hereinkommen, so werden auf der Tangente nach der einen Seite von p hin zwei Abschnitte zugleich verschwinden, auf der anderen Transversalen blos der nach dem Krümmungskreis zu liegende Abschnitt $\pi p'$, während auf den durch ϱ gehenden Transversalen sich hinsichtlich der Anzahl der auf verschiedenen Seiten von ϱ befindlichen Abschnitte nichts ändert. Es werden daher die Anzahl der Abschnitte auf der Tangente und ihrer Parallelen durch ϱ nach beiden Seiten ihrer Richtung und ebenso auch die Anzahl der Abschnitte auf den beiden anderen Parallelen nach der dem Krümmungskreis abgewendeten Seite immer noch gleichzeitig gerade oder ungerade sein, die Anzahl der Abschnitte aber, welche auf letzteren Parallelen nach der dem Krümmungskreise zugekehrten Seite hin sich befinden, ist dann beziehungsweise ungerade oder gerade. Hiermit ist nun auch umgekehrt die Entscheidung gegeben, nach welcher Seite von p hin die Sehne pq aufgetragen werden muss.

Hat die Tangente oder die andere durch p gezogene Transversale asymptotische Richtung, so muss, wie bei der Bestimmung der Berührungsebene und auch aus demselben Grunde, der Punkt ϱ auf der asymptotisch gerichteten jener beiden Geraden genommen werden.

Um den Krümmungshalbmesser des gegebenen ebenen Schnittes für p gleich unmittelbar zu erhalten, hat man nur die Richtung der zweiten Transversalen durch p senkrecht zur Tangente zu nehmen, wodurch die

Sehne ein Durchmesser des Krümmungskreises und **der gesuchte Krümmungshalbmesser** demnach

$$48) \qquad = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \cdots \varrho r_n}{\varrho r'_1 \cdot \varrho r'_2 \cdots \varrho r'_n} \cdot \frac{pp'_2 \cdot pp'_3 \cdots pp'_n}{pp_3 \cdot pp_4 \cdots pp_n}$$

wird. Nimmt man den Punkt ϱ als fest an, so ergiebt **sich aus diesem** Werthausdrucke für die Krümmungshalbmesser R' und R'', **welche zwei** verschiedenen durch dieselbe Tangente gehenden Schnitten **für den Punkt** p angehören, wenn man noch die auf den entsprechenden **Normalen ausser** p entstehenden Schnittpunkte mit $p'_2, p'_3, \ldots, p'_n$ und $p''_2, p''_3, \ldots, p''_n$ ebenso die auf den Parallelen durch ϱ befindlichen mit $r'_1, r'_2, \ldots, r'_n$ und $r''_1, r''_2, \ldots, r''_n$ bezeichnet, die Beziehung:

$${}'R : {}''R = \frac{\varrho r''_1 \cdot \varrho r''_2 \cdots \varrho r''_n}{pp''_2 \cdot pp''_3 \cdots pp''_n} : \frac{\varrho r'_1 \cdot \varrho r'_2 \cdots \varrho r'_n}{pp'_2 \cdot pp'_3 \cdots pp'_n}.$$

Für die Krümmungshalbmesser $'R$ und $''R$ dagegen, welche zwei verschiedenen durch p gelegten Normalschnitten der gegebenen Fläche angehören, findet man, wenn die auf den zugehörigen Tangenten ausser dem Berührungspunkte p noch befindlichen Schnittpunkte $'p_3, 'p_4, \ldots, 'p_n$ und $''p_3, ''p_4, \ldots, ''p_n$, ferner die auf den Parallelen durch ϱ entstandenen $'r_1, 'r_2, \ldots, 'r_n$ und $''r_1, ''r_2, \ldots, ''r_n$ heissen

$$R' : R'' = \frac{\varrho' r_1 \cdot \varrho' r_2 \cdots \varrho' r_n}{p'p_3 \cdot p'p_4 \cdots p'p_n} : \frac{\varrho'' r_1 \cdot \varrho'' r_2 \cdots \varrho'' r_n}{p''p_3 \cdot p''p_4 \cdots p''p_n}.$$

Um endlich noch aus der Gleichung $f(x, y, z)$ oder $f = 0$ einer algebraischen Fläche einen Werthausdruck für den Krümmungshalbmesser oder allgemeiner für eine Sehne irgend eines durch den Punkt p der Fläche gelegten ebenen Schnittes entsprechend diesem Punkte abzuleiten, seien x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten der Punkte p und ϱ, (α, β, γ) die Richtung der Tangente des Schnittes für den Punkt p, also der Bedingung

$$49) \qquad \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy} + \gamma \frac{df}{dz} = 0$$

unterworfen, und $(\alpha', \beta', \gamma')$ die Richtung der zweiten Transversalen durch p. Während, wie bei Bestimmung der Gleichung der Berührungsebene bereits gefunden wurde,

$$\varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \cdots \varrho r_n = \pm \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}}, \quad \varrho r'_1 \cdot \varrho r'_2 \cdots \varrho r'_n = \pm \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\mathfrak{A}'},$$

$$pp'_2 \cdot pp'_3 \cdots pp'_n = \pm \frac{\alpha' \dfrac{df}{dx} + \beta' \dfrac{df}{dy} + \gamma' \dfrac{df}{dz}}{\mathfrak{A}'}$$

ist, wird, wenn man noch die Coordinaten des in der Nähe von p vorerst angenommenen Punktes π mit x', y', z' bezeichnet,

$$pp_3 \cdot pp_4 \ldots pp_n = lim\left[\frac{(\pi p)^2 \cdot \pi p_3 \cdot \pi p_4 \ldots \pi p_n}{(\pi p)^2}\right]_{\pi \text{ in } p}$$
$$= lim\left[\pm \frac{f(x', y', z')}{\mathfrak{A}} : \frac{(z'-z)^2}{\gamma^2}\right]_{z'=z}$$
$$= \pm \tfrac{1}{2} \frac{\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)^2 f}{\mathfrak{A}}$$

werden, so dass man unter der Bedingung 49) für α, β, γ erhält:

$$50)\qquad pq = \pm 2 \cdot \frac{\alpha'\frac{df}{dx}+\beta'\frac{df}{dy}+\gamma'\frac{df}{dz}}{\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)^2 f},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem pq in der Richtung (α', β', γ') oder gerade entgegengesetzt von p aus gelegen ist. Beachtet man, dass α', β', γ' die Cosinus der Winkel der Geraden pq gegen die Coordinatenachsen und $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ den Cosinus der Winkel proportional sind, welche die Normale der gegebenen Fläche im Punkte p mit denselben Achsen macht, so erhält man auch, wenn ϑ der Winkel der Richtung (α', β', γ') mit jener Normale ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$pq = 2\cos\vartheta \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}}{\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)^2 f}.$$

Da für $\vartheta = 0$ die Sehne pq in der Richtung der Normalen selbst fällt, und dieselbe dadurch ein Durchmesser des Krümmungskreises wird, welcher dem durch die gegebene Tangente gehenden Normalschnitt die Fläche für den Punkt p angehört, so ergiebt sich für den Halbmesser R dieses Kreises:

$$R = \frac{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}}{\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)^2 f}$$

und daher für obige Sehne:

$$pq = 2\cos\vartheta \cdot R.$$

Dieser Ausdruck führt sogleich auf den bekannten Satz von Meusnier, dass die Krümmungskreise aller durch dieselbe Tangente einer Fläche gelegten ebenen Schnitte für den Berührungspunkt der Tangente auf einer Kugel liegen, von welcher der Krümmungskreis des durch die Normale der Fläche und jene Tangente gehenden Schnittes ein grösster Kreis ist.

i) Seien $\pi, \varrho, \ldots \sigma, \tau$ beliebig im Raum gelegene Punkte, etwa [redacted] in der Anzahl, und dieselben durch die Geraden $\pi\varrho, \ldots, \sigma\tau, \tau\pi$, welche die Fläche 1) in den Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, t_1, t_2, \ldots, t_n$ bezüglich schneiden, zu einem Polygon verbunden. Wenn man nun die Werthe, welche das bisher mit $\mathfrak{A}$ abgekürzte Polynom für die Richtungen jener Geraden erhält, mit $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots, \mathfrak{A}^{(k)}$ bezeichnet, so giebt die erste der Gleichungen 42) für das Verhältniss der Abschnitte, welche auf jedem Paar aufeinander folgender Polygonsseiten durch die Fläche gemacht werden, nach einander:

$$\frac{\pi p_1 \cdot \pi p_2 \ldots \pi p_n}{\pi t_1 \cdot \pi t_2 \ldots \pi t_n} = \pm \frac{\mathfrak{A}^{(k)}}{\mathfrak{A}'},$$

$$\frac{\varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \ldots \varrho r_n}{\varrho p_1 \cdot \varrho p_1 \ldots \varrho p_n} = \pm \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}''},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\tau t_1 \cdot \tau t_2 \ldots \tau t_n}{\tau s_1 \cdot \tau s_2 \ldots \tau s_n} = \pm \frac{\mathfrak{A}^{(k-1)}}{\mathfrak{A}^{(k)}}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man alsbald sowo[redacted]l dem Werth, als dem Vorzeichen nach:

$$51) \quad \frac{\pi p_1 \cdot \pi p_2 \ldots \pi p_n \cdot \varrho r_1 \cdot \varrho r_2 \ldots \varrho r_n \ldots\ldots \tau t_1 \cdot \tau t_2 \ldots \tau t_n}{\pi t_1 \cdot \pi t_2 \ldots \pi t_n \cdot \varrho p_1 \cdot \varrho p_2 \ldots \varrho p_n \ldots\ldots \tau s_1 \cdot \tau s_2 \ldots \tau s_n} = 1,$$

welche Gleichung folgende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Carnot ausspricht: Wenn eine algebraische Fläche und ein beliebiges ebenes oder nicht ebenes Polygon sich so schneiden, dass auf jeder Seite des Polygons die dem Grad der Fläche zukommende Anzahl von Schnittpunkten entsteht, so ist das Product der Abschnitte, welche auf den Seiten des Polygons, in ihrer Aufeinanderfolge nach der einen Richtung, von den Ecken des Polygons aus gemacht werden, gleich dem Product der Abschnitte ist, welche der entgegengesetzten Richtung in der Seitenfolge in gleicher Weise entsprechen.

Für besondere Lagen der Ecken und Seiten des Polygons erleidet die Gleichung 51) und damit obiger Satz einige Abänderung, nämlich wenn eine oder mehrere Ecken auf der Fläche selbst liegen, und dann auch, wenn überdies eine der anstossenden Seiten die Fläche berührt. Ist vorerst etwa der Punkt π auf der gegebenen Fläche, so enthält er zugleich auch die Punkte p_1 und t_1, und es wird nach einer Bemerkung in *g*) dem Werthe nach

$$\frac{\pi p_2 \cdot \pi p_3 \ldots \pi p_n}{\pi t_2 \cdot \pi t_3 \ldots \pi t_n} = \frac{\alpha' \frac{df}{dx} + \beta' \frac{df}{dy} + \gamma' \frac{df}{dz}}{\mathfrak{A}'} : \frac{\alpha^{(k)} \frac{df}{dx} + \beta^{(k)} \frac{df}{dy} + \gamma^{(k)} \frac{df}{dz}}{\mathfrak{A}^{(k)}}$$

sein, welche Gleichung, wenn π' und π_1 die Winkel bedeuten, welche die Geraden $\pi\varrho$ und $\pi\tau$ mit der Normale der Fläche für den Punkt π einschliessen, sich umformt in:

$$\frac{\pi p_2 \,.\, \pi p_3 \ldots \pi p_n}{\pi t_2 \,.\, \pi t_3 \ldots \pi t_n} = \frac{\cos \pi'}{\cos \pi_1} \,.\, \frac{\mathfrak{A}^{(k)}}{\mathfrak{A}'}.$$

Ist die Gerade $\pi\varrho$ auch noch Tangente der Fläche in π, so fällt ausser p_1 auch noch p_2 mit π zusammen und es wird nach einer Bemerkung in h)

$$\frac{\pi p_3 \,.\, \pi p_4 \ldots \pi p_n}{\pi t_2 \,.\, \pi t_3 \ldots \pi t_n} = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{\left(\alpha' \frac{d}{dx} + \beta' \frac{d}{dy} + \gamma' \frac{d}{dz}\right)^2 f}{\mathfrak{A}'} : \frac{\alpha^{(k)} \frac{df}{dx} + \beta^{(k)} \frac{df}{dy} + \gamma^{(k)} \frac{df}{dz}}{\mathfrak{A}^{(k)}}$$

sein, woraus sich, wenn Π' den dem Punkt π zugehörigen Krümmungshalbmesser in dem durch $\pi\varrho$ und die Normale der Fläche in π gelegten ebenen Schnitt vorstellt, noch ergiebt:

$$\frac{\pi p_3 \,.\, \pi p_4 \ldots \pi p_n}{\pi t_2 \,.\, \pi t_3 \ldots \pi t_n} = \frac{1}{2 \cos \pi_1 \,.\, \Pi'} \,.\, \frac{\mathfrak{A}^{(k)}}{\mathfrak{A}'}.$$

Sind aber sowohl $\pi\varrho$ als $\pi\tau$ Tangenten der Fläche in π, so erhält man:

$$\frac{\pi p_3 \,.\, \pi p_4 \ldots \pi p_n}{\pi t_3 \,.\, \pi t_4 \ldots \pi t_n} = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{\left(\alpha' \frac{d}{dx} + \beta' \frac{d}{dy} + \gamma' \frac{d}{dz}\right)^2 f}{\mathfrak{A}'} : \tfrac{1}{2} \frac{\left(\alpha^{(k)} \frac{d}{dx} + \beta^{(k)} \frac{d}{dy} + \gamma^{(k)} \frac{d}{dz}\right)^2 f}{\mathfrak{A}^{(k)}}$$

$$= \frac{\Pi_1}{\Pi'} \,.\, \frac{\mathfrak{A}^{(k)}}{\mathfrak{A}},$$

wo Π_1 den zur Tangente $\pi\tau$ gehörigen Krümmungshalbmesser bedeutet.

Durch diese Andeutungen ist nun die Abänderung der Gleichung 51) bestimmt, für den Fall, dass eine oder mehrere der Ecken des Polygons auf der gegebenen Fläche, oder dass überdies noch eine oder mehrere der an diesen Ecken liegenden Seiten Tangenten der Fläche in diesen Ecken sind. Wenn z. B. alle Ecken des Polygons auf der Fläche liegen, das Polygon also der Fläche einbeschrieben ist, so erhält man die merkwürdige Gleichung:

$$52)\quad \frac{\pi p_2 . \pi p_3 \ldots \pi p_n . \varrho r_2 . \varrho r_3 \ldots \varrho r_n \ldots\ldots \tau t_2 . \tau t_3 \ldots \tau t_n}{\pi t_2 . \pi t_3 \ldots \pi t_n . \varrho p_2 . \varrho p_3 \ldots \varrho p_n \ldots\ldots \tau s_2 . \tau s_3 \ldots \tau s_n} = \frac{\cos \pi' . \cos \varrho' \ldots \cos \tau'}{\cos \pi_1 . \cos \varrho_1 \ldots \cos \tau_1},$$

in welcher π' und π_1, ϱ' und $\varrho_1, \ldots$ die Winkel bezeichnen, welche die Seiten $\pi\varrho$ und $\pi\tau$, $\tau\pi$ und $\tau\sigma$ mit den Normalen der Fläche in den Ecken $\pi, \ldots, \tau$ einschliessen. Wie leicht zu sehen, können in dieser Gleichung statt $\cos \pi'$ und $\cos \varrho_1, \ldots$ die Projectionen der Seite $\pi\varrho$ auf die Normalen in π und $\varrho, \ldots$, oder statt $\cos \pi'$ und $\cos \pi_1, \ldots$ die Projectionen eines Stückes der Normalen in π auf die Seiten $\pi\varrho$ und $\pi\tau, \ldots$ genommen werden.

Kleinere Mittheilungen.

XXXV. Zwei Sätze über Determinanten. Von G. ZEHFUSS.

I. Lässt man je für die 1., 2., ... Reihe oder Colonne einer Determinante $n$ten Grades

$$P = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \dots \nu_n$$

die 1., 2., ... Reihe oder Colonne einer anderen Determinante $n$ten Grades

$$Q = \Sigma \pm a_1 b_2 \dots l_n$$

eintreten, so erhält man n^2 verschiedene Determinanten

$$\begin{array}{lll}
\Sigma \pm a_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n, & \Sigma \pm \alpha_1 a_2 \gamma_3 \dots \nu_n, \dots & \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \dots a_n \\
\Sigma \pm b_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n, & \Sigma \pm \alpha_1 b_2 \gamma_3 \dots \nu_n, \dots & \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \dots b_n \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
\Sigma \pm l_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n, & \Sigma \pm \alpha_1 l_2 \gamma_3 \dots \nu_n, \dots & \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \dots l_n,
\end{array}$$

welche als Elemente einer neuen Determinante R betrachtet werden können, deren Werth nunmehr ermittelt werden soll. Zu diesem Ende suche man den Quotienten $Q : P$ in Gestalt einer Determinante

$$Q : P = \Sigma \pm A_1 B_2 C_3 \dots L_n = S$$

darzustellen. Die Grössen A, B, C, ... bestimmen sich daraus, dass $Q = PS$, oder

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ & \dots & & \\ & \dots & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \dots \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots \\ A_3 & B_3 & C_3 & \dots \\ & \dots & & \\ & \dots & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \dots \\ & \dots & & \\ & \dots & & \end{vmatrix}.$$

Bildet man nach der Gauss'schen Regel das Product der beiden letzteren Determinanten rechter Hand und vergleicht die dabei entstehenden Elemente mit den entsprechenden der Determinante zur Linken des Gleichheitszeichens, so entstehen zur Bestimmung der Grössen A_1, B_1, C_1, ... zunächst die Gleichungen

$$\begin{array}{l}
A_1 \alpha_1 + B_1 \beta_1 + C_1 \gamma_1 + \dots + L_1 \nu_1 = a_1 \\
A_1 \alpha_2 + B_1 \beta_2 + C_1 \gamma_2 + \dots + L_1 \nu_2 = a_2 \\
\dots \\
A_1 \alpha_n + B_1 \beta_n + C_1 \gamma_n + \dots + L_1 \nu_n = a_n,
\end{array}$$

woraus

$$A_1 = \frac{\Sigma \pm a_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n}{\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n}, \quad B_1 = \frac{\Sigma \pm \alpha_1 a_2 \gamma_3 \dots \nu_n}{\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n}, \dots L_1 = \frac{\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots a_n}{P}.$$

Aehnlicher Weise findet man

$$A_2 = \frac{\Sigma \pm b_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \nu_n}{P}, \quad B_2 = \frac{\Sigma \pm \alpha_1 b_2 \gamma_3 \dots \nu_n}{P}, \dots L_2 = \frac{\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots b_n}{P}.$$

Fährt man so fort, so ergeben sich die Elemente der Determinante S genau als diejenigen von R, jedoch sämmtlich dividirt durch P. Also ist

$$S = R : P^n,$$

und da

$$Q = P \,.\, S,$$

so ist endlich

$$1) \qquad R = Q \,.\, P^{n-1}.$$

Es sei noch bemerkt, dass die Determinante S auf vier der Form nach verschiedene Arten gebildet werden kann, je nachdem man vor Anwendung der Gauss'schen Regel die Reihen oder Colonnen der Factorendeterminanten passend wechselt, welcher nämliche Umstand vier verschiedene Formen von R veranlasst.

Von dem Satze No. 1) lässt sich ein einfacher Beweis des von Jacobi (Crelle XXII, 11) aufgestellten Theorems ableiten. Setzt man nämlich, wenn k irgend einen Index, l den folgenden bezeichnet,

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_l & \beta_l & \gamma_l & \dots & \varkappa_l & \lambda_l & \mu_l & \dots & \nu_l \\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m & \dots & \varkappa_m & \lambda_m & \mu_m & \dots & \nu_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \dots & \cdot & \lambda_n & \mu_n & \dots & \nu_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_l & \mu_l & \dots & \nu_l \\ \lambda_m & \mu_m & \dots & \nu_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n & \mu_n & \dots & \nu_n \end{vmatrix} = \frac{\partial_k P}{\partial \alpha_1 \, \partial \beta_2 \dots \partial \varkappa_k},$$

so wird die Determinante R, wenn $\frac{\partial P}{\partial \alpha_r}, \frac{\partial P}{\partial \beta_r}, \dots$ durch $A_r, B_r, \dots$ bezeichnet werden,

$$R = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \dots & K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & K_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_k & B_k & C_k & \dots & K_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_l & B_l & C_l & \dots & K_l & P & 0 & \dots & 0 \\ A_m & B_m & C_m & \dots & K_m & 0 & P & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ A_n & B_n & C_n & \dots & K_n & 0 & 0 & \dots & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \dots & K_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & K_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ A_k & B_k & C_k & \dots & K_k \end{vmatrix} . P^{n-k} = Q \, P^{n-1},$$

daher ist endlich

$$\Sigma \pm A_1 B_2 \ldots K_k = P^{k-1} \cdot \frac{\partial^k P}{\partial \alpha_1 \, \partial \beta_2 \ldots \partial \varkappa_k}.$$

II. Jede Determinante, deren Elemente, nach dem gebräuchl Schema eines Quadrates angeordnet, symmetrisch sind in Bezug au Mittelpunkt dieses Quadrates, lässt sich in ein Product zweier andere: terminanten zerlegen. Hinsichtlich des Beweises sind zwei Fälle zu u scheiden, nämlich derjenige, wo die Determinante von gerader, und jenige, wo sie von ungerader Ordnung ist.

1. Ist die Determinante von gerader Ordnung, so lässt sie sich folgendermassen darstellen:

$$P = \begin{vmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \mu_1 & \nu_1 & \nu_1' & \mu_1' & \ldots & \gamma_1' & \beta_1' & \alpha_1' \\
\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \ldots & \mu_2 & \nu_2 & \nu_2' & \mu_2' & \ldots & \gamma_2' & \beta_2' & \alpha_2' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \ldots & \mu_n & \nu_n & \nu_n' & \mu_n' & \ldots & \gamma_n' & \beta_n' & \alpha_n' \\
\alpha_n' & \beta_n' & \gamma_n' & \ldots & \mu_n' & \nu_n' & \nu_n & \mu_n & \ldots & \gamma_n & \beta_n & \alpha_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & \ldots & \mu_2' & \nu_2' & \nu_2 & \mu_2 & \ldots & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\
\alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & \ldots & \mu_1' & \nu_1' & \nu_1 & \mu_1 & \ldots & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1
\end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante addire man, was bekanntlich ihren W nicht ändert, die Glieder der letzten Reihe der Ordnung nach zu den sprechenden der ersten; die Glieder der vorletzten Reihe zu denjer der zweiten u. s. f., wodurch entsteht

$$P = \begin{vmatrix}
\alpha_1 + \alpha_1' & \beta_1 + \beta_1' & \ldots & \nu_1 + \nu_1' & \nu_1 + \nu_1' & \ldots & \beta_1 + \beta_1' & \alpha_1 + \alpha_1' \\
\alpha_1 + \alpha_2' & \beta_2 + \beta_2' & \ldots & \nu_2 + \nu_2' & \nu_2 + \nu_2' & \ldots & \beta_2 + \beta_2' & \alpha_2 + \alpha_2' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n + \alpha_n' & \beta_n + \beta_n' & \ldots & \nu_n + \nu_n' & \nu_n + \nu_n' & \ldots & \beta_n + \beta_n' & \alpha_n + \alpha_n' \\
\alpha_n' & \beta_n' & \ldots & \nu_n' & \nu_n & \ldots & \beta_n & \alpha_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \ldots & \nu_2' & \nu_2 & \ldots & \beta_2 & \alpha_2 \\
\alpha_1' & \beta_1' & \ldots & \nu_1' & \nu_1 & \ldots & \beta_1 & \beta_1
\end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante subtrahire man nun die Glieder der e: Colonne von den entsprechenden der letzten, die Glieder der zweiten lonne von denjenigen der vorletzten u. s. w., wodurch entsteht

$$P = \begin{vmatrix}
\alpha_1 + \alpha_1' & \beta_1 + \beta_1' & \ldots & \nu_1 + \nu_1' & 0 & \ldots & 0 \\
\alpha_2 + \alpha_2' & \beta_2 + \beta_2' & \ldots & \nu_2 + \nu_2' & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n + \alpha_n' & \beta_n + \beta_n' & \ldots & \nu_n + \nu_n' & 0 & \ldots & 0 \\
\alpha_n' & \beta_n' & \ldots & \nu_n' & \nu_n - \nu_n' & \ldots & \alpha_n - \alpha_n' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \ldots & \nu_2' & \nu_2 - \nu_2' & \ldots & \alpha_2 - \alpha_2' \\
\alpha_1' & \beta_1' & \ldots & \nu_1' & \nu_1 - \nu_1' & \ldots & \alpha_1 - \alpha_1'
\end{vmatrix}.$$

Nach einem bekannten Satze zerfällt nun letztere Determinante in Product $P=$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \ldots & \nu_1+\nu_1' \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \ldots & \nu_2+\nu_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n+\alpha_n' & \beta_n+\beta_n' & \ldots & \nu_n+\nu_n' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_1' & \beta_1-\beta_1' & \ldots & \nu_1-\nu_1' \\ \alpha_2-\alpha_2' & \beta_2-\beta_2' & \ldots & \nu_2-\nu_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n-\alpha_n' & \beta_n-\beta_n' & \ldots & \nu_n-\nu_n' \end{vmatrix}.$$

2. Wenn die Determinante von ungerader Ordnung ist, also von der rm

$$P=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots \mu_1 & \nu_1 & \mu_1' & \ldots \beta_1' & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots \mu_2 & \nu_2 & \mu_2' & \ldots \beta_2' & \alpha_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \ldots \mu_{n-1} & \nu_{n-1} & \mu'_{n-1} & \ldots \beta'_{n-1} & \alpha'_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots \mu_n & \nu_n & \mu_n' & \ldots \beta_n' & \alpha_n' \\ \alpha'_{n-1} & \beta'_{n-1} & \ldots \mu'_{n-1} & \nu_{n-1} & \mu_{n-1} & \ldots \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2' & \beta_2' & \ldots \mu_2' & \nu_2 & \mu_2 & \ldots \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \beta_1' & \ldots \mu_1' & \nu_1 & \mu_1 & \ldots \beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix},$$

ergiebt sich durch ein ganz ähnliches Verfahren wie oben unter 1), ss sie in das Product $P=$

$$-1\,.\begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \ldots & \mu_1+\mu_1' & \nu_1 \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \ldots & \mu_2+\mu_2' & \nu_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1}+\alpha'_{n-1} & \beta_{n-1}+\beta'_{n-1} & \ldots & \mu_{n-1}+\mu'_{n-1} & \nu_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots & \mu_n & \nu_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_1' & \beta_1-\beta_1' & \ldots & \mu_1-\mu_1' \\ \alpha_2-\alpha_2' & \beta_2-\beta_2' & \ldots & \mu_2-\mu_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1}-\alpha'_{n-1} & \beta_{n-1}-\beta'_{n-1} & \ldots & \mu_{n-1}-\mu'_{n-1} \end{vmatrix}$$

rlegbar ist.

XXXVI. Anwendungen einer besonderen Determinante. Von G. HFUSS.

1. Man geräth bei verschiedenen mathematischen Untersuchungen f Determinanten von der Form

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a & a_1 & \ldots & a_{n-3} \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a & \ldots & a_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a \end{vmatrix},$$

elche schon mehrfach betrachtet worden sind. Herr Professor Hesse tte die Güte, mir eine aus den dreissiger Jahren herrührende Correondenz mit Bessel zu zeigen, in welcher bereits eine derartige Deterinante erwähnt wird, und vor einigen Jahren theilte Spottiswoode dem Anhange seiner in Crelle's Journal enthaltenen Abhandlung:

„*Elementary Theorems relating to Determinants*“ eine ohne Beweis hingesetz Formel für den Werth von $\triangle$ mit, welcher übrigens noch der Fact $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ beizufügen wäre, da sich Spottiswoode einer anderen A ordnung der Elemente bedient. Später erschien auch in Terquem „*Nouvelles annales*“ eine richtige Ableitung des Werthes von $\triangle$; der Na des Herrn Verfassers ist mir jedoch gegenwärtig nicht im Gedächtnis Ich erlaube mir zunächst, die Werthbestimmung von $\triangle$ noch einmal ku anzugeben, da sie vielleicht nicht allen Lesern gegenwärtig sein dürf Wir multipliciren deshalb die Reihen sowohl, als die Colonnen der Or nung nach beziehungsweise mit $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \ldots \alpha$, und $1, \alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^{n-1}$, wob wenn α eine beliebige Wurzel von $\alpha^n = 1$ vorstellt, der Werth der Det minante nicht geändert wird, indem dies nur einen Factor $(1.\alpha.\alpha^2 \ldots \alpha^n-$ $= 1$ herbeiführt. Man erhält so:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a, & a_1\alpha, & a_2\alpha^2 \ldots, & a_{n-1}\alpha^{n-1} \\ a_{n-1}\alpha^{n-1}, & a, & a_1\alpha \ldots, & a_{n-2}\alpha^{n-2} \\ a_{n-2}\alpha^{n-2}, & a_{n-1}\alpha^{n-1}, & a \ldots, & a_{n-3}\alpha^{n-3} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_1\alpha, & a_2\alpha^2, & a_3\alpha^3 \ldots, & a \end{vmatrix}.$$

Zählt man nun zu jedem Elemente der obersten Reihe der letzten De terminante sämmtliche in derselben Colonne unter ihm stehenden Ele mente, was bekanntlich den Werth von $\triangle$ nicht ändert, so werden alle Elemente der obersten Reihe der resultirenden Determinante einander gleich, und zwar von der Form

$$a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = \varphi(\alpha),$$

mithin wird dieser Ausdruck stets ein Factor von $\triangle$ sein, was, wenn α eine eigentliche Wurzel von $\alpha^n = 1$ vorstellt, gleichfalls stattfinden wird, wenn man α mit $\alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^n$ vertauscht. Mithin ist $\triangle$ durch das Product $\triangle'$ der unter sich theilerfremden Factoren $\varphi(\alpha), \varphi(\alpha^2), (\varphi\alpha^3) \ldots \varphi(\alpha^n)$ theil bar, und da dasselbe, gleichwie die Determinante $\triangle$, hinsichtlich a vom $n$ten Grade ist, so muss $\triangle = \lambda\triangle'$ sein, wo λ einen constanten Factor vor stellt, den man durch Vergleichung der höchsten Glieder von a in $\triangle$ und $\triangle'$ gleich 1 findet. Mithin ist $\triangle = \varphi(\alpha) . \varphi(\alpha^2) . \varphi(\alpha^3) \ldots \varphi(\alpha^n)$, oder

$$\triangle = \left\{ \begin{array}{l} (a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) \\ \times (a + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^4 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{2n-2}) \\ \times (a + a_1\alpha^3 + a^2\alpha^6 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{3n-3}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \times (a + a_1 \quad + a_2 \quad + \ldots + a_{n-1}) \end{array} \right\}.$$

Wie man sieht, ist ein wesentliches Merkmal der Determinante dass jede Reihe sowohl, als jede Colonne sämmtliche Elemente enthält Mittelst eines ähnlichen Verfahrens lassen sich daher auch noch manche andere Determinanten in Factoren zerlegen, z. B.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d).$$

Einige einfache Beispiele für den Hauptsatz sind folgende:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \end{vmatrix} = x^5 + y^5, \qquad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & x+1 \end{vmatrix} = x^n + n x^{n-1},$$

$$\begin{vmatrix} a^3 & a^2 b & a b^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2 b & a b^2 \\ a b^2 & b^3 & a^3 & a^2 b \\ a^2 b & a b^2 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = (a^4 - b^4)^3.$$

2. Wir wollen in der Determinante $\triangle$ beispielsweise $n = 3$ setzen, und erhalten

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Dies ist derselbe Ausdruck, auf welchen Euler bei verschiedenen Gelegenheiten gerathen ist und welchen Eisenstein (Crelle XXVII) zur Grundlage einer Untersuchung über cubische Formen zu machen gesonnen war. Die von Eisenstein angenommene Form

$$x^3 + DD'y^3 + DD''z^3 - 3Dxyz,$$

wo D, D', D'' ganze complexe Zahlen sind und $D = D'D''$ ist, geht aus obiger einfach durch Vertauschung von y mit $y\sqrt[3]{DD'}$ und von z mit $z\sqrt[3]{DD''}$ hervor. Eine noch allgemeinere Form erhält man übrigens aus der einfachsten, wenn man darin x, y, z bezüglich mit $x\sqrt[3]{D''^2 D'''}$, $y\sqrt[3]{D'D'''^2}$, $z\sqrt[3]{D'^2 D''}$ vertauscht, nämlich

$$D''^2 D''' x^3 + D'''^2 D' y^3 + D'^2 D'' z^3 - 3D'D''D''' xyz.$$

Uebrigens möchte sich die Form $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ sehr wohl zu dem von Eisenstein vorgeschlagenen Zwecke eignen, indem vor allen Dingen der Satz bewiesen werden kann, dass das Product zweier solcher Formen wieder ein Ausdruck von derselben Form ist. Dies ergiebt sich sowohl, wenn man unter Benutzung der Gauss'schen Regel beide Formen wie die ursprüngliche multiplicirt, als auch aus dem Umstande, dass das Product der entsprechenden Grundfactoren beider Formen

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(\xi + \alpha v + \alpha^2 \zeta)$$

von derselben Form ist, wie jeder Grundfactor, nämlich

$$(x\xi + y\zeta + zv) + \alpha(xv + y\xi + z\zeta) + \alpha^2(x\zeta + yv + z\xi).$$

Wenn daher Eisenstein am angeführten Orte bemerkt, es fehle ein allgemeines Princip zur Auffindung von Formen, deren Producte Formen von gleichartiger Zusammensetzung sind, so möchte ich glauben, dass die Determinanten ein, wenn auch vielleicht nicht überall, doch in vielen Fällen zum Ziele führendes Mittel zur Erreichung jenes Zweckes darbieten. So hat z. B. Hermite im XL. Bande von Crelle's Journal den betreffenden Euler'schen Satz über die Form $x^2+y^2+z^2+t^2$ mittelst Determinanten bewiesen, und einem von Eisenstein l. c. angeführten Lagrange'schen Ausdrucke lässt sich auf demselben Wege eine ganz neue Seite abgewinnen. Nach Lagrange ist nämlich, wenn

$$P=p'p''-q^2,\quad P'=pp''-q'^2,\quad P''=pp'-q''^2$$
$$Q=q'q''-pq,\quad Q'=qq''-p'q',\quad Q''=qq'-p''q''$$

gesetzt wird,

$$(pp'p''+2qq'q''-pq^2-p'q'^2-p''q''^2)^2$$
$$=PP'P''+2QQ'Q''-PQ^2-P'Q'^2-P''Q''^2.$$

Bemerkt man dagegen, dass der ursprüngliche Lagrange'sche Ausdruck auf die Gestalt der symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} p & q'' & q' \\ q'' & p' & q \\ q' & q & p'' \end{vmatrix}$$

gebracht werden könne, so gelangt man unter Anwendung der Gauss'schen Multiplicationsregel leicht zu dem Satze, dass das Lagrange'sche Theorem noch gelte, wenn

$$P=p^2+q'^2+q''^2,\quad P'=p'^2+q^2+q''^2,\quad P''=p''^2+q^2+q'^2,$$
$$Q=q'q''+qp'+qp'',\quad Q'=qq''+q'p+q'p'',\quad Q''=qq'+q''p+q''p'.$$

Eine Verallgemeinerung des oben für $n=3$ aufgestellten Satzes, welche man auf ähnliche Art beweist, ist der, dass diejenigen Formen $n$ten Grades und von n Variabeln, welche durch eine Determinante von der Form Δ ausgedrückt werden, überhaupt die Eigenschaft haben, dass das Product zweier derselben einen Ausdruck von derselben Form bildet.

3. Eine andere Anwendung der Determinante Δ bot sich mir dar, als ich einen besonderen Fall einer von Jacobi in den Berliner Monatsberichten von 1837 und im XXX. Bande von Crelle's Journal, beidesmal ohne Begründung mitgetheilten Satzes über Kreistheilung zu beweisen suchte. Setzt man nämlich den bekannten Ausdruck

$$x+\alpha x^{g}+\alpha^2 x^{g^2}+\ldots+\alpha^{p-2}x^{g^{p-2}},$$

für welchen Eisenstein im XXVII. Bande von Crelle's Journal, indem er nach Potenzen von x ordnet, die dem Aussehen nach verschiedene Reihe

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \alpha^{\mathrm{Ind}\,k}\, x^k$$

anwendet, gleich $F(\alpha)$, wobei α eine Wurzel von $\alpha^{p-1}=1$, x eine Wurzel von $x^p=1$, p eine Primzahl, g eine primitive Wurzel derselben vorstellt, so besteht die Jacobi'sche Aufgabe darin, den Werth des Products

$$\Delta = F(\alpha)\,F(\alpha^2)\,F(\alpha^3)\ldots F(\alpha^{p-1})$$

zu ermitteln. Dasselbe lässt sich in Gestalt der Determinante Δ folgendermassen anschreiben:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^g & x^{g^2} & \ldots & x^{g^{p-2}} \\ x^{g^{p-2}} & x & x^g & \ldots & x^{g^{p-3}} \\ x^{g^{p-3}} & x^{g^{p-2}} & x & \ldots & x^{g^{p-4}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x^g & x^{g^2} & x^{g^3} & \ldots & x \end{vmatrix}.$$

Da aber die Zahlen $1, g, g^2 \ldots g^{p-2}$ nach dem Modul p sämmtlich verschieden sind und, von der Reihenfolge abgesehen, mit den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-1$ übereinstimmen, so lässt sich diese Determinante sogleich umformen. Macht man deshalb zunächst das erste Element der untersten Reihe zum Anfangselement, indem man die Ordnung der Reihen geradezu umstürzt, was einen Factor $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)(p-2)}$ herbeiführt, so entsteht

$$\Delta = (-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} x^g & x^{g^2} & x^{g^3} & \ldots & x^1 \\ x^{g^2} & x^{g^3} & x^{g^4} & \ldots & x^g \\ x^{g^3} & x^{g^4} & x^{g^5} & \ldots & x^{g^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x & x^g & x^{g^2} & \ldots & x^{g^{p-2}} \end{vmatrix}.$$

Es fangen nun die Reihen bezüglich mit denselben Elementen an, als die Colonnen, und diese Elemente stimmen, abgesehen von der Ordnung, mit $x, x^2, \ldots x^{p-2}$ überein. Wenden wir also eine geeignete Vertauschung der Colonnen an, welche die Anfangselemente derselben auf jene Ordnung zurückführt, wodurch die umgeänderte Determinante einen von der Anzahl m der nöthigen Derangements abhängigen Factor $(-1)^m$ erlangt, so lässt sich nachher eine solche Vertauschung auch auf die Reihen anwenden. Wenn nun die nach Division mit p auf ihre kleinsten Werthe reducirten Exponenten der ersten Reihe, $g, g^2, g^3, \ldots g^{p-2}, 1$, die mit dem kleinsten unter ihnen, 1, schliessen, m Derangements darbieten, so sind nach vorgenommenem Arrangement die Exponenten der ersten Colonne unverändert die zuvor schon mit 1 beginnenden: $1, g, g^2, \ldots g^{p-2}$, welche, da 1 zu Anfang steht, offenbar $p-2$ Derangements weniger zählt als die vorige im Uebrigen übereinstimmende Reihe. Wenden wir also nachher dieselbe Vertauschung auch auf die Reihen an, so haben wir im Ganzen durch die letzten Umordnungen einen Factor $(-1)^{2m-p+2} = -1$ eingeführt, wonach

$$\Delta = -(-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 & \ldots & x^{p-1} \\ x^2 & x^4 & x^6 & x^8 & \ldots & . \\ x^3 & x^6 & x^9 & x^{12} & \ldots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot \\ x^{p-1} & . & . & . & \ldots & . \end{vmatrix}.$$

Diese Formel geht nach einem bekannten Satz von **Vandermonde** über die Darstellung des Productes aller Differenzen einer Anzahl von Grössen durch eine Determinante sogleich in

$$\begin{aligned}\Delta=(-1)^{\frac{p^2-3p}{2}}.\,x\,x^2\,x^3\,..\,x^{p-1}.\,&(x^{p-1}-x)(x^{p-1}-x^2)(x^{p-1}-x^3)\,..\,(x^{p-1}-x^{p-2})\\ &\times(x^{p-2}-x)(x^{p-2}-x^2)\,..\,(x^{p-2}-x^{p-3})\\ &\times(x^{p-3}-x)\,..\,(x^{p-3}-x^{p-4})\\ &\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &\times(x^2-x)\end{aligned}$$

über. In diesem Producte geben nun jedesmal die übereinander stehenden Binomialfactoren, nach Heraussetzung einer geeigneten Potenz von x als Factor, dieselbe Differenz, welche von der Form x^n-1, oder nach weiterer Herausnahme des Factors $2ix^{\frac{n}{2}}$ von der Form

$$\frac{x^{\frac{n}{2}}-x^{-\frac{n}{2}}}{2i}=sin\,\frac{n\pi}{p}$$

ist, wo für den der Wurzel x correspondirenden Bogen dessen kleinster Werth $\frac{2\pi}{p}$ gesetzt wurde. Unter dieser Voraussetzung haben wir, da $x\,.\,x^2\,.\,x^3\,...\,x^{p-1}=\left(x^{\frac{p-1}{2}}\right)^p=1$ ist, da ferner die zur Herstellung der Formen x^{n-1} herausgesetzten Factoren $x^{\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}}$ betragen, und das Product aller zur Herstellung der Sinusform nöthigen

$$=2i^{\frac12(p-1)(p-2)}\,.\,x^{\frac12 p(p-1)(p-2):2.3}$$

ist,

$$\Delta=(-1)^{\frac{p^2-3p}{2}}\,.\,2^{(p-1)(p-2):2}\,.\,i^{(p-1)(p-2):2}\,.\,(x^p)^{(p-1)(p-2):2}\,.\,P,$$

wo P das Product

$$sin\left(\frac{p-2}{p}\pi\right).\,sin^2\left(\frac{p-3}{p}\pi\right).\,sin^3\left(\frac{p-4}{p}\pi\right)...\,sin^{p-2}\left(\frac{\pi}{p}\right)=P$$

vorstellt. Kehren wir hier die Reihenfolge der Factoren um, und vertauschen jeden Bogen mit seiner Ergänzung zu π, so entsteht

$$sin^{p-2}\left(\frac{p-1}{p}\pi\right)sin^{p-3}\left(\frac{p-2}{p}\pi\right)sin^{p-4}\left(\frac{p-3}{p}\pi\right)...\,sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)=P,$$

mithin auch durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen:

$$\left[sin\,\frac{p-1}{p}\pi\,.\,sin\,\frac{p-2}{p}\pi\,.\,sin\,\frac{p-3}{p}\pi\,...\,sin\,\frac{\pi}{p}\right]^{p-2}=P^2,$$

d. h. da das in der Parenthese enthaltene Sinusproduct bekanntlich $=p:2^{p-1}$ ist:

$$P=\pm\,p^{\frac12(p-2)}:2^{\frac12(p-1)(p-2)},$$

wobei offenbar, da alle Sinus des Productes P positiv sind, nur das obere

Zeichen zulässig ist. Wir haben also, da $x^p = 1$ und $\frac{(p-1)}{2}\frac{(p-2)}{}$ eine ganze Zahl ist:

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}p(p-3)}\, i^{\frac{1}{4}(p-1)(p-2)} \,.\, p^{\frac{1}{2}(p-2)} = \varepsilon \,.\, p^{\frac{1}{2}(p-2)},$$

wo ε die Werthe $1, i, -1, -i$ hat, jenachdem p von der Form $8n-3$, $8n+3$, $8n+1$, $8n-1$ ist. Dieses Resultat präsentirt sich unter einer etwas anderen Form, als das des allgemeineren Jacobi'schen Satzes, was daher rührt, dass Jacobi denselben vielleicht mit Zuziehung des Theorems

$$F(\alpha^n) \,.\, F(\alpha^{p-1-n}) = \alpha^{\frac{1}{2}n(p-1)} \,.\, p$$

gefunden und bewiesen hat, wobei, wenn kein unbestimmtes Wurzelzeichen einfliessen soll, die Unterscheidung zweier Fälle nöthig wird, wo nämlich p, welches bei Jacobi keine Primzahl zu sein braucht, gerade ist oder ungerade.

XXXVII. Einfache Ableitung zweier bestimmten Integrale. Von G. Zehfuss.

Die zur Ermittelung der Integrale

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos a x}{1+x^2}\, dx, \quad J_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

angewandten Methoden sind meist mehr oder weniger künstlich. Wir wollen versuchen, sie ganz direct zu bestimmen. Das erstere ist die Grenze des Ausdruckes

$$L = \int_0^n \frac{\cos a x}{1+x^2}\, dx$$

für unendlich wachsendes n. Da nun für alle Werthe von x die Reihe gilt:

$$\cos a x = 1 - \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^4 x^4}{4!} - \ldots,$$

so hat man

$$L = \int_0^n \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{2!}\,\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{a^4}{4!}\,\frac{x^4}{1+x^2} + \frac{a^6}{6!}\,\frac{x^6}{1+x^2} + \ldots\right] dx$$

$$= \int_0^n \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{2!}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{a^4}{4!}\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{a^6}{6!}\left(x^4-x^2+1-\frac{1}{1+x^2}\right) + \ldots\right] dx$$

$$= \left[1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots\right]\frac{\pi}{2} - \frac{n}{1}\left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots\right) + \frac{n^3}{3}\left(\frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots\right) - \frac{n^5}{5}\left(\frac{a^6}{6!} + \ldots\right) + \ldots$$

In diesem Resultate sind die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von n aus der Entwickelung von $\frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ entnommen, nur dass beziehungsweise 1, 3, 5, ... Glieder dieser Entwickelung fehlen, d. h. sie sind die Reste der Entwickelung vom 2., 4., ... Gliede an. Nun ist überhaupt

$$F(a) = F(0) + \frac{a}{1} F'(0) + \frac{a^2}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{a^n}{n!} F^{(n)}(0) + \int_0^a \frac{(a-z)^n}{n!} F^{(n+1)}(z)\, dz,$$

woraus für $F(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ und $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ folgt

$$\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots = \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{2}\, dz,$$

$$\frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} + \ldots = \int_0^a \frac{(a-z)^2}{2!} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{2}\, dz,$$

$$\frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} + \frac{a^{10}}{10!} + \ldots = \int_0^a \frac{(a-z)^4}{4!} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{2}\, dz, \text{ etc.},$$

so dass L auf die Form kommt:

$$\frac{\pi}{4}(e^a + e^{-a}) - \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{2(a-z)} \left[\frac{n(a-z)}{1} - \frac{n^3(a-z)^3}{3!} + \frac{n^5(a-z)^5}{5!} - \ldots\right] dz$$

$$= \frac{\pi}{4}(e^a + e^{-a}) - \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{2(a-z)} \sin n(a-z)\, dz.$$

Setzt man hier $n(a-z) = t$, so kommt

$$1) \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{\pi}{4}(e^a + e^{-a}) + \tfrac{1}{2} \int_0^{na} \left[e^{-a+\frac{t}{n}} - e^{a-\frac{t}{n}}\right] \frac{\sin t}{t}\, dt \\ &= \frac{\pi}{4}(e^a + e^{-a}) + \tfrac{1}{2} e^{-a} \int_0^{na} \frac{\sin t}{t} - \tfrac{1}{2} e^a \int_0^{na} \frac{\sin t}{t}\, dt \\ &\quad + \frac{e^{-a}}{2} \int_0^{na} \left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right) \frac{\sin t}{t}\, dt - \frac{e^a}{2} \int_0^{na} \left(e^{-\frac{t}{n}} - 1\right) \frac{\sin t}{t}\, dt. \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir hier die Grenzwerthe für $n = \infty$, so kommt

$$2) \left\{ \begin{aligned} J &= e^a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{J_1}{2}\right) + e^{-a}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{J_1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{e^{-a}}{2} \lim \int_0^{na} \frac{\sin t}{t}\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right) dt - \frac{e^a}{2} \lim \int_0^{na} \frac{\sin t}{t}\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1\right) dt. \end{aligned} \right.$$

Die Grenzwerthe der beiden letzten Integrale sind aber Null, denn für $t = nx$ transformiren sich dieselben in

$$\lim \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} \sin nx\,dx, \quad \lim \int_0^a \frac{e^{-x} - 1}{x} \sin nx\,dx,$$

welche durch theilweise Integration beide auf die Form

$$3) \qquad \lim \left\{ \frac{1}{n} [P \cos nx]_0^a - \frac{1}{n} \int_0^a \frac{dP}{dx} \cos nx\,dx \right\}$$

gebracht werden können, in welcher man aus der Endlichkeit der Integrationsgrenzen und derjenigen von P und $\frac{dP}{dx}$, $\cos nx$ innerhalb des Integrationsintervalles leicht das Verschwinden fraglicher Werthe erkennt. Aus 2) folgt somit

$$4) \qquad J = e^a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{J_1}{2} \right) + e^{-a} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{J_1}{2} \right).$$

Da nun für $a = \infty$, J verschwindet, was leicht wie unter 3) nachgewiesen wird, so folgt aus der letzten Gleichung für $a = \infty$, dass

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dies in 4) eingesetzt, ergiebt weiter

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

XXXVIII. Ueber die Entstehung des Gewitters. Von Dr. F. Dellmann. — Dass das Gewitter eine elektrische Erscheinung ist, weiss man schon über 100 Jahre. Wie aber die Gewitterelektricität entsteht, dies ist bis jetzt noch nicht ergründet worden. Indess ist man in neuerer Zeit dem seit lange angestrebten Ziele, eine Theorie des Gewitters aufstellen zu können, doch von zwei Seiten her um ein Bedeutendes näher gerückt, nämlich von der Theorie der Imponderabilien aus und durch ein genaueres Studium der Erscheinungen des Gewitters.

Wüsste man, was Elektricität ist, so würde man vielleicht schon sagen können, woher die Gewitterelektricität kommt. So lange man die Imponderabilien für Stoffe hielt, konnte ihre Theorie nur geringe Fortschritte machen. Seit der Zeit man sie für das hält, was sie sind, für Kräfte nämlich, ist der Forschritt bedeutend. Die Theorie des Lichtes ist als gesichert anzusehen. Der vielen Analogien wegen, welche die Wärme mit dem Lichte gemeinsam hat, insbesondere aber die Beobachtungen der Wärmeerscheinungen des Spectrums, lassen uns den Schluss nicht mehr als gewagt erscheinen, dass auch die Wärme eine Erscheinung einer Vibration, entweder des Aethers, oder der Körper-Moleküle ist. Ferner lässt uns die Erfahrung, dass man durch jeden der 4 Imponderabilien die 3 andern hervorrufen kann, mit grosser Wahrscheinlichkeit vermuthen, dass sie alle 4 desselben Ursprungs, dass sie nur Modificationen desselben Grund-Phänomens sind.*) In neuester Zeit hat man zu ihrer Erforschung einen bedeutenden Schritt weiter gethan. Dieser Fortschritt ist durch ein einziges Wort passend bezeichnet worden. Man spricht nicht mehr von einer Hervorrufung, Erzeugung eines der Imponderabilien durch einen anderen, sondern man glaubt sich berechtigt, von einer Umsetzung, Verwandlung des einen in einen anderen reden zu dürfen. Diese Berechtigungen gründet man auf folgende Untersuchungen.

Das Gesetz von der Erhaltung der Kraft, von welchem hier nur beiläufig die Rede sein kann, ist zwar ursprünglich nicht durch Erfahrung gefunden, sondern durch Speculation, dann aber durch Empirir geprüft und als richig befunden worden. Dr. Mayer, Arzt in Heilbronn, hat es zuerst vollständig ausgesprochen.**) Er sagt etwa: Imponderabilien sind Kräfte; Kräfte sind Ursachen, und es muss also auf sie der Grundsatz Anwendung finden, dass die Wirkung der Ursache entspricht, der Ursache gleich ist. Heisst die Ursache A und die Wirkung B, so ist also $A = B$. Ist B wieder die Ursache einer anderen Wirkung, C, so ist $C = B = A$. Mit der Ab- und Zunahme eines Gliedes einer solchen Kette, müssen auch die anderen ab- und zunehmen; und wird eines zu Null, gehen auch die anderen in Null über. Das wusste man längst, aber Mayer ging einen Schritt weiter, indem er behauptete, dass Kräfte wandelbare Objecte sind; das war ein wesentlicher Fortschritt. Darin liegt also, wenn eine Kraft eine Wirkung hervorgerufen, hört die Kraft auf zu sein, sie hat sich in die Wirkung verwandelt. Er war auch nach dem vorigen Satze zu dieser Behauptung vollständig berechtigt. Denn bringt die Kraft A die Wirkung B hervor, so muss

*) Auch was Spiller über die Vibrationstheorie der Elektricität hat drucken lassen, habe ich ohne sonderliche Befriedigung gelesen. Der Verf.

**) Schon öfter hatte ich, z. B. in der Schrift von Helmholtz über das Gesetz von der Erhaltung der Kraft, und im 13. Briefe der neuen Auflage der chemischen Briefe von Liebig, die obige Behauptung gelesen, ohne irgendwo das Citat zu finden, bis ich vor Kurzem eins meiner Notizbücher durchsah und es hier eigenhändig vor 20 Jahren eingeschrieben fand. Damals war mir der kurze Aufsatz von Mayer, was mir beim Ansehen der Notiz erst wieder einfiel, so wichtig erschienen, dass ich sogar ein Paar Sätze abschrieb. Der Aufsatz steht im 42. Bde. S 234 der Annalen von Liebig und Wöhler. Dort sagt Mayer wörtlich: Ursachen sind (quantitativ) unzerstörliche und (qualitativ) wandelbare Objecte. Kräfte sind unzerstörliche, wandelbare, imponderable Objecte (Ursachen). Der Gegensatz ist die Materie, als ein unzerstörliches, wandelbares und ponderables Object. Es ist Gegenstand der Chemie, den zwischen den Materien stattfindenden Causalzusammenhang in Gleichungen zu entwickeln. Ursache und dazu gehörige Wirkung *sind gleichartig*. Der Verf.

aufhören zu sein, weil sonst A wieder zu einer zweiten Erzeugung verandt werden könnte etc., so dass man also im Stande wäre, eine Kraft beebige Mal zu vervielfältigen, was ziemlich gleichbedeutend mit der Erhaffung einer Kraft sein würde. Aber der Mensch kann ebenso wenig twas erschaffen, wie vernichten. An das Vernichten der Kraft z. B. durch eibung hat man lange geglaubt, und so lange man diess glaubte, musste thwendig auch der Gegensatz geglaubt werden, man musste das *perpetuum obile* für möglich halten.

Diese Sätze, welche ursprünglich Denkgesetze sind, haben nun in euerer Zeit ein Naturgesetz erschlossen, welches an Wichtigkeit das Grationsgesetz zu überragen verspricht; es ist das Gesetz von der Erhaltung er Kraft genannt worden.*) Die Imponderabilien sind Kräfte, denn sie tsprechen der Definition, welche die bedeutendesten Mechaniker von der raft gegeben haben; sie sind Ursachen von Bewegungen. Der Verennungsprocess ist ein chemischer Process, z. B. durch welchen Wärme tsteht; der chemische Process setzt sich in Wärme um. Die Wärme verandelt das Wasser in Dampf; die Wärme setzt sich in Elasticität um. Die xpansivkraft des Dampfes setzt die Maschine in Bewegung; die Elasticit setzt sich in Bewegung um. Ein Theil dieser Bewegung geht durch eibung verloren und setzt sich dabei wieder in Wärme um. So kann ein anzer Kreislauf durchgemacht werden.

Zu diesen logisch-metaphischen Speculationen ist nun, dieselben euchtend, die Erfahrung getreten mit der Rechnung im Bunde. Sie haben ie Gültigkeit und Wichtigkeit des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft usser allen Zweifel gesetzt. Je weiter man dieses wichtige Feld der aturwissenschaften bebaut, desto überraschendere Aufschlüsse erhalten ir. Die schönen neueren Untersuchungen auf dem Gebiete der Wärmehre liegen vor als ein Ausfluss dieses Gesetzes. Bereits hat Boscha**) ine mechanische Theorie der Elektrolyse aufgestellt und nachgewiesen, ass die Kräfte, welche dabei ins Spiel kommen, jenem Gesetze gemäss sich erhalten, d. h. einen Umwandlungsprocess durchmachen und dabei an uantität Nichts einbüssen. Die vielen Fälle, in denen man durch Erhrung das Gesetz geprüft hat, geben die Bürgschaft, dass man es in allen euen Fällen bestätigt finden wird, wenn man sich nur vor unabweisbaren erlusten zu hüten versteht.

Strömende Elektricität setzt sich in einen chemischen Process und in Värme um durch die geschlossene galvanische Säule. In der Thermosäule ermögen wir durch Wärme einen elektrischen Strom zu erzeugen; wir üssen nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft hier eine Umetzung von Wärme in Elektricität annehmen. Warum sollte nun nicht

*) Helmholtz nennt es Wechselwirkungen der Naturkräfte. Der Verf.
**) Pogg. Ann. CI. S. 517 ff.; CIII. S. 487 ff.; CV. S. 396 ff.

auch bei einem Gewitter eine Umsetzung von Wärme in Elektricität angenommen werden dürfen? Zwei bedeutende Physiker, Becquerel (*Comt. rend. XLII, S.* 1101 *ff.*) und v. Baumgartner (Berichte der Wiener Ak. XXIII., S. 277 ff.) haben bereits den Versuch gemacht, die Erscheinungen der athmosphärischen Elektricität, Letzterer insbesondere die Gewittererscheinungen dadurch zu erklären; aber noch fehlt der Nachweis in Zahlen, der hier allerdings besondere Schwierigkeiten herbeiführt. Der Verfasser selbst hat es versucht, sich die mit einem Gewitter gewöhnlich verbundene schnelle Entwickelung der Gewitterelektricität und die schnelle Abkühlung der Luft bei einem Gewitter auf diese Weise zu deuten (Fortschritte der Physik, Bd. XII, S. 579). Der neue Weg ist geöffnet, aber noch lange nicht geebnet.

Machen wir nun den Versuch, das Gesetz von der Erhaltung der Kraft auf die Theorie des Gewitters anzuwenden, so werden wir eingestehen müssen, dass, obgleich der Erfolg beim ersten Betreten dieses Gebietes nur noch ein geringer sein kann, doch durch dasselbe einige Punkte, welche die bisherige Wissenschaft als Räthsel stehen lassen musste, eine ziemlich genügende Erledigung finden. Die Ausführung des Versuchs mögen in folgenden kurzen Andeutungen bestehen.

Die blosse Berührung kann keine Elektricitätsquelle sein, da sie ein ganz passiver Zustand ist. Elektricität ist Kraft, kann desshalb auch nur durch Umsetzung einer anderen Kraft oder Entfesselung einer schlummernden erzeugt werden. Die Contacttheorie der Elektricität ist dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft gegenüber nicht haltbar; der Volta'sche Fundamentalversuch muss also anders gedeutet werden.

Das Gleichgewicht der Moleküle kann nicht gestört werden, ohne das elektrische Gleichgewicht aufzuheben, und umgekehrt. Wo die Störung dieses Gleichgewichts mit Elektricitätsentwickelung geschieht, wird keine oder weniger Wärme auftreten; wo sie mit überwiegender Wärmeentwicklung stattfindet, wird keine oder weniger Elektricität sich zeigen.

Betrachten wir nicht bloss die Contacttheorie in der Elektricität, sondern auch den Dualismus in derselben als überwunden, so muss nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft ein Auftreten von Wärme oder von Elektricität als verschiedener Zustände eines und desselben Wesens ein Zurücktreten der anderen bedingen. Wie die beiden Zustände von Wärme und Elektricität sich unterscheiden, wissen wir noch nicht. Der speculative W. Thomson sagt (*On athmospheric electricity*, *p.* 13): „*Whatever electricity is, it seems quite certain that electricity in motion is heat.*"

Gegen diese allgemeinen Sätze sprechen keine Erfahrungen, welche richtig gedeutet werden; dafür alle, welche dabei concurriren. Wir sind also berechtigt, sie zur Erklärungen der Erscheinungen der Gewitterelektricität anzuwenden.

Die Wärme hat an der Erzeugung der Gewitter den allergrössten Anıil, wie nachher näher angedeutet werden soll, wenn wir die Resultate genauern Detailstudiums der Gewittererscheinungen angeben. Beim witter findet eine Zurückführung des Dampfes in Wasser statt; es muss o dabei Wärme frei werden. Und dennoch zeigt sich bei Gewittern eine rke Abkühlung. Wo bleibt die frei gewordene Wärme und die des warn Luftstromes, welcher ebenfalls zur Erzeugung eines Gewitters thathlich nothwendig ist? Man hat zu dem schwachen Erklärungsgrunde, lcher kaum der Erwähnung werth ist, seine Zuflucht genommen, dass die t dem Gewitter eintretende stärkere Verdunstung sie verzehre. Aber Zeit des Gewitters ist gerade die Verdunstung sehr schwach, weil die uchtigkeit gross ist, und jeder Beobachter weiss, dass die Feuchtigkeit h Tage lang nach einem Gewitter höher ist, als vor demselben, also h die Verdunstung schwächer. Dazu kommt, dass die Abkühlung bei em Gewitter fast gleichzeitig mit der Entladung des Gewitters eintritt. eses wichtige Factum musste die bisherige Wissenschaft unerklärt lassen, gegen wir mittelst des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft die Errung bei der Hand haben, indem wir die Wärme in den Zustand der ektricität übertreten lassen. Die Bedingungen dieses Uebertritts können allerdings noch nicht durch einen solchen Versuch nachweisen, welche e directe Anwendung auf den Vorgang des Gewitters gestattete. Indess das Factum, um dessen Erklärung es sich hier handelt, so eklatant, die herige Wissenschaft ihm gegenüber so ohnmächtig, und die Verwandtaft der beiden Kräfte, welche hier concurriren, in dem Sinne, wie er der Erklärung in Anwendung kommt, so ausser allen Zweifel gestellt, s diese Erklärung nicht widerlegt werden kann und eine bedeutende cke in der bisherigen Wissenschaft ausfüllt. Es ist im bisherigen Gange Forschung sogar die Hoffnung begründet, dass sie als Lückenbüsser ht nur nicht bald bei Seite geschoben, sondern sogar immer neue Stütze winnen werde. Nehmen wir noch dazu das Factum, dass die Abkühlung e Zweifel im Sitze der Wolke selbst, und zwar in ihrem Centrum vor h geht, indem gewöhnlich nur aus diesem Hagel herabfällt, dagegen aus Rändern Regen, so gewinnt auch von der Seite des Thatsächlichen aus Erklärung an Wahrscheinlichkeit.

Von der anderen Seite sind wir in neuerer Zeit einer Theorie des Geters entgegen gegangen durch ein genaueres Studium des Thatsächlichen Gewittererscheinungen.

Zuerst sind die Thatsachen der Verbreitung der Gewitter ins Auge zu sen, und zwar zunächst die Verbreitung im Raume. Hauptgesetze sind: Zahl der Gewitter nimmt ab, wie man sich vom Aequator entfernt, und dem Meere giebt es bedeutend weniger Gewitter, als auf dem Lande. Aethiopien hat Abadin in 6 Jahren 1909 Gewitter beobachtet, und oresby hat auf seinen vielen Reisen in die Polarmeere jenseits des Grades der Breite nur zwei Mal ein Gewitter erlebt. Er glaubt nicht, dass man es auf Spitzbergen jemals habe blitzen sehen. In Gegenden, wo der Himmel stets heiter ist, wie in Lima, kann es natürlich auch keine Gewitter geben. In den Culturländern, besonders in Europa hat man erst in neuerer Zeit die Verbreitung der Gewitter genauer studirt. Nach Kuhn giebt es vom 65. bis 60. Gr. der Breite in Europa im Durchschnitt 6,1, vom 60. bis 55. Gr. der Breite 13,0, vom 55. bis 50. Gr. 18,0, vom 50. bis 45. Gr. 21,5, vom 45. bis 40. Gr. 30,1 und unter 40. Gr. Br. 48,0 Gewitter jährlich. Die Verbreitung der Gewitter in der Zeit muss der im Raume entsprechen; desshalb müssen die wärmste Jahres- und Tageszeit die meisten Gewitter aufzuweisen haben. Diess wird durch Beobachtungen bestätigt. Das östliche Europa hat 1,2 Proc. Winter- und 98,8 Proc. Sommer-Gewitter, Mittel- und Süd-Europa von ersteren 6,2 und von letzteren 93,8 Proc., das westliche Europa 19,2 Proc. Winter- und 80,8 Proc. Sommer-Gewitter. Nach Fritsch hat der Tag 2 Maxima der Gewitterzahl und 2 Minima. Das Hauptmaximum muss auf die wärmste Tageszeit, etwa 3 Uhr Nachmittags, das Hauptminimum auf die kälteste Tageszeit von Mitternacht bis Sonnenaufgang fallen. Diess wurde durch die sorgfältigen Beobachtungen in Kremsmünster, Prag und München bestätigt. Wir sehen daraus, dass Wärme die Gewitterbildung begünstigt. In welcher Weise diess geschieht, darüber giebt die zweite Klasse von Erscheinungen, welche beim Auftreten der Gewitter in neuerer Zeit sorgfältiger beobachtet worden, näheren Aufschluss.

Es ist von Fritsch*), Zollinger**), Prestel***), und Krecke†) unwiderleglich dargethan worden, dass Luftströmungen, und zwar der Kampf, das Zusammentreffen zweier in der Temperatur bedeutend verschiedener Luftmassen, einen wesentlichen Antheil an der Gewitterbildung haben. Die Wärme bringt aber die Lufströmungen hervor, und dadurch vermittelt die Wärme die Entstehung der Gewitter.

Es ist eine bekannte Thatsache, und Zollinger macht besonders darauf aufmerksam, dass zur Zeit des Wechsels der beiden Monsoons in Ostindien die Gewitter bei Weitem am häufigsten sind. Eine weitere Thatsache ist es, dass in Süd-Europa, wo bekanntlich, wie z. B. in Italien, im Sommer der NO , der Tramontane vorherrscht und dann den heitern Himmel verursacht, im Winter dagegen der SW. oder Sirocco, dass zur Zeit des Wechsels dieser beiden Hauptluftströme im October und April die Gewitter vorherrschen. Auch im Winter sind in Süd-Europa die Gewitter häufiger als im Sommer, wenn man den eigentlichen Kern beider Jahreszeiten ins Auge fasst, weil im Winter beide Hauptwinde öfter wechseln,

*) Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftl. Klasse der k. k. Ak. der Wissenschaften in Wien. IX. S. 809 ff.

**) Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zürich. 1858, S. 309 ff.

***) Sitzungsbericht der math.-naturwissen. Kl. der k. k. Ak. in Wien. XXIX. S. 533 ff.

†) Meteorolog. Waarnemingen in Nederland. Alle Bde., besonders Bd. 1859 und 1860.

im Sommer dagegen fast unausgesetzt der Tramontane herrscht, um den in der Sahara dann aufsteigenden starken Strom ersetzen zu helfen. In der gemässigten Zone, namentlich in Mittel-Europa, sind die Gewitter im Sommer und Nachmittags am häufigsten, weil dann der aufsteigende Luftstrom am stärksten ist. Die aufgestiegene warme Luft kommt oben mit einem kalten horizontalen Strom in Conflict und erzeugt durch diesen Kampf die Gewitter. Desshalb ist in besonders heissen Thälern oder an besonders heissen Tagen am ersten ein Gewitter zu erwarten; die Wärme ist die Ursache, nicht die Wirkung des Gewitters. Auf dem Meere sind die Gewitter seltener, weil sich kein aufsteigender Strom bilden kann, und die Zahl der Gewitter nimmt mit der Entfernung vom Aequator ab, weil die günstigen Bedingungen (die Erwärmung der Erdoberfläche und der trockene Boden) zur Bildung eines aufsteigenden Stromes immer mehr abnehmen. Zur Erzeugung der Gewitter tragen sowohl die verticalen, als die horizontalen Luftströmungen bei; es ist nur eine Mengung in der Temperatur sehr verschiedener Luftmassen erforderlich. Nehmen wir zur Erklärung der Abkühlung, welche dabei stattfindet, eine Umsetzung von Wärme in Elektricität an, so wird durch Entladung des Gewitters der Erde in Form von Elektricität das zurückgegeben, was sie an Wärme durch den aufsteigenden Strom eingebüsst hat.

Ausser den allgemeinen Thatsachen, welche auf die Entstehung der Gewitter durch Mengung kalter und warmer Luftmassen hindeuten giebt es auch noch eine Menge besonderer; ja es ist die gegründete Hoffnung vorhanden, dass wir durch genaues Studium des Details einer jeden Gewittererscheinung den Einfluss dieser Mengung nachweisen können.

Zuerst hat Prestel die Gewitter des Jahres 1856 im mittlern Europa in ihrem Verlaufe genauer studirt und gefunden, dass jenes Jahr im April 4, im Mai 7, im Juni, Juli, August und September jedesmal 4 Witterungsperioden hatte. Er zeigt, dass jedesmal beim Uebergange aus der einen in die andere Periode Gewitter vorkamen, deren Verbreitung er mit besonderer Sorgfalt verfolgt hat. Diese Perioden gehen natürlich von einem Maximum zu einem Minimum des Barometerstandes, oder umgekehrt. Mit der Umkehr des Barometerstandes ist ein Umsetzen des Windes verbunden und eine Haupttemperaturveränderung. Durch Zusammenstellen aller Thatsachen folgt dann von selbst, dass Gewitter, welche sich über grössere Gebiete erstrecken, durch einen Kampf der beiden Hauptluftströme entstehen, dass sie also von der Grenze dieser Ströme auftreten und bald nach dem Zeitpunkte erscheinen, in welchem das Barometer durch das Mittel des Ortes geht, also bei steigendem Barometer, wenn es etwas über dem Mittel ist, bei fallendem, wenn es etwas unter demselben steht. Die localen Gewitter gehen nach ihm aus dem Kampfe eines aufsteigenden Stromes mit einem horizontalen hervor.

Director Dr. Krecke in Utrecht hat seit einer Reihe von Jahren ein meteorologisches Jahrbuch herausgegeben, die Resultate der Beobachtungen der von ihm geleiteten Anstalt, des königlichen meteorologischen Instituts der Niederlande enthaltend. Ausser den Zahlentabellen finden sich darin auch sehr schätzbare Notizen über den allgemeinen Gang der Witterung jeden Monats. Diese Notizen enthalten vielfache Bestätigungen des Satzes, dass die Gewitter aus dem Kampfe zweier Luftströme hervorgehen. Insbesondere waren in dieser Beziehung interessant der Juni 1859 und der Juli 1860. Die erörternde Zusammenstellung der Thatsachen ergiebt Folgendes.

Während des Mai 1859 herrschte im ganzen Königreich der Niederlande der Polarstrom. Am 1. Juni war der Barometerstand tief und fiel bis zum 2. Nachmittags noch mehr, ein Beweis, dass der Aequatorialstrom in der Höhe war. Dass es diesem schwer wird, besonders wenn er von oben kommt, den Sieg über seinen Gegner zu erringen, das ist in seiner geringen Schwere begründet. So sehen wir den Kampf beider Ströme denn auch bis zum 12. fortgehen. Leicht wird in einem solchen Falle Nachmittags der untere Strom durch die höhere Wärme des Bodens gehoben und dadurch der Kampf herbeigeführt, dessen Folgen Gewitter sind. Diese zeigten sich dann auch schon am 1. Nachmittags in Nymwegen, Delle, Oudega, Slijk-Ewijk, und besonders zu Oosterhuisen, wo sehr viel Regen fiel, ein Beweis, dass hier eine grosse Luftmasse des Aequatorialstromes mit dem Polarstrome sich gemengt hatte. Zu Oudega formten sich am 2. schon Morgens Gewitter, die von O. nach W. zogen, also eine herabgesunkene Masse des Aequorialstromes waren. Erst nach 1 Uhr brach das Gewitter los und dauerte bis nach 3 Uhr. Am 2. trat an vielen Orten eine grosse Veränderung der Windrichtung ein; mehr und mehr gewinnt der Aequatorialstrom Terrain. Abends 7 Uhr formen sich über das ganze Land Gewitterwolken. An vielen Orten treiben die Wolken in sehr verschiedener Richtungen, während der Wind an der Oberfläche anfänglich noch seine Richtung beibehält. Am 3. kommen wieder viele Windrichtungen gleichzeitig vor, der Himmel ist getrübt und es regnet mannichfach; Nachmittags wieder viele Gewitter und die Wolken treiben wieder nach sehr verschiedenen Richtungen; der SW. mit seiner grössern Stärke wirkt bedeutend modificirend auf die Richtung des NO. ein. Den 4. bekommt der NO. wieder mehr die Oberhand, aber auch an diesem Tage viele Gewitter. So geht der Kampf fort bis zum 12., wo der NO. beseitigt wird. Der Schluss stellt sich ein am 12. Abends mit einem interessanten Ereigniss. Zu Oudega war Morgens 7 Uhr der Wind noch O., er wird bald südlich und ist bereits 9 Uhr bis SW. gegangen. Morgens kühl, wird es Nachmittags warm, in O. und NO. bilden sich Gewitterwolken, aus denen es seit 1 Uhr donnert. Gegen 4½ Uhr wird's in NO. drohender, es bildet sich ein gewaltiges Gewitter. Bis 5 Uhr bleiben Wind und Wolkenrichtung SW. Plötzlich bricht das Gewitter los und der schwache SW. wird durch einen höchst gewaltsamen *NO. verdrängt*. Zugleich wird es aussergewöhnlich dunkel und ein schreckcher Regen mit Hagel vermengt stürzt nieder; dabei blitzt und donnert s unaufhörlich. Nach 10 Min. ist der Sturm zu einem mässigen Winde eruntergesunken. Der Regen dauert zwar noch fort, aber Hagel fällt nicht ıehr. Nach 20 Min. ist der NO. wieder durch den SW. verdrängt. Der eobachter hat eine Karte dieser Verbreitung entworfen, aus welcher herorgeht, dass der Bezirk, innerhalb dessen er seine grösste Stärke zeigte nd wo meistens die Fensterscheiben nach NO. zertrümmert wurden, eine llipse zur Form hat, deren grosse Achse von NO. nach SW. gerichtet ist.)ie Ellipse war so klein, dass der Sturm sie in 10 Min. durchlief.

Im Juli 1860 kämpften die nebeneinander hergehenden Hauptströme n Holland mit einander; der Kampf wird dann ein weniger heftiger sein. uf der Grenze werden sich die Massen beider mischen und durch diese lischung Gewitter herbeiführen, wenn der eine gegen den anderen heranückt. In der ersten Hälfte des Monats ging der Polarstrom über das Land; er Gegner ging östlich vorbei. Die Winde waren N. und NW., der Himıel war meist mit schweren Wolken bedeckt, aber zur Gewitterbildung ar die Mengung noch nicht stark genug. In den Tagen vom 11. bis 17. chob sich der Aequatorialstrom immer mehr nach W. vor, in diesen Tagen errschten S. und W., und die Temperatur stieg zuerst an der Ostgrenze es Landes. Am 16. rückte der Polarstrom dem Gegner zu und mischte ich stärker mit ihm. An diesem Tage sind Windrichtungen aus allen vier lauptrichtungen verzeichnet, desshalb treten an diesem Tage auch die rsten Gewitter in diesem Monat auf. Abends sieht man Wetterleuchten n mehreren Orten nach NW., ein Beweis, dass der Polarstrom wieder zuückgeschoben ist. Am 19. und 20. kommt er wieder und viele Gewitter eten ein. Vom 21. bis 25. kommen nur einzelne Gewitter vor, der Aequarialstrom behauptet sich. Am 27. mehren sich wieder die Gewitter, am 9. zeigen sie sich häufig, und endlich gelingt es dem Polarstrom, wieder latz zu greifen. Es kann wohl kaum lehrreichere Facta über die Enttehung der Gewitter geben, als diese.

Diese Thatsachen geben zu dem Schlusse die Berechtigung, dass geaue Beobachtungen jedes einzelne Gewitter aus dem Kampfe zweier Luftströme, welche in der Temperatur eine bedeutende Verschiedenheit zeigen, ervorgegangen darthun werden. Fliessen die Hauptmassen beider Ströme uch nebeneinander, so wird am gemeinsamen Rande doch leicht ein Unterchieben des schwerern unter den leichtern stattfinden. Wird dann dieser chwerere Rand durch Erwärmung des Bodens am Nachmittage gehoben, o wird dadurch leicht ein Kampf, ein Mengen beider veranlasst, wodurch Gewitter entstehen. Oder es wird ein selbständiger aufsteigender Strom Nachmittags sich bilden, welcher mit dem in der Höhe wehenden Strom n Conflict kommt. Im Winter können nur zwei horizontale Ströme den Kampf zeugen, wesshalb im Winter die Gewitter weit seltner sind. Dass n der Tropenzone die Gewitter so häufig sind, hat gewiss zum Theil darin seinen Grund, dass hier, zu beiden Seiten des Gürtels der Calmen, beständig ein Luftstrom, der gewöhnliche Passat, unten weht, der andere in entgegengesetzter Richtung darüber weg, nämlich der obere Passat, der Aequatorialstrom. Ein genaueres Studium der Luftströmungen der Atmosphäre muss nothwendig auch die Theorie des Gewitters fördern, und so hat man denn auch von dieser Seite jener Theorie in neuerer Zeit bedeutend unter die Arme gegriffen. Es ist bekannt, dass hier Dorn die grössten Verdienste hat.

XXXIX. Ueber die Bestimmung des absoluten und specifischen Gewichtes von in Flüssigkeiten suspendirten Niederschlägen.

Die Vermuthung, dass ein Niederschlag sofort nach seiner Erzeugung inmitten der Flüssigkeit, in welcher er hervorgebracht wurde, ein anderes specifisches Gewicht haben möge, als nach dem Auswaschen und Trocknen längere Zeit nachher, hat zur Aufsuchung von Methoden geführt, sein specifisches Gewicht auf indirectem Wege zu finden, wobei man wegen möglicher Beschleunigung der nöthigen Wägungen eine Dichtigkeitsänderung des Niederschlages zu vermeiden glaubte. Ingleichen erschien es als eine Beschleunigung der quantitativen Analyse, wenn man nach Ausfällung eines Salzes auf kurzem, indirectem Wege das Gewicht des ausgefällten Niederschlags bestimmen konnte, ohne die zeitraubenden Operationen des Filtrirens und Aussüssens anwenden zu müssen. Methoden zur Auffindung des absoluten oder specifischen Gewichtes von Niederschlägen auf indirectem Wege haben neuerdings gegeben: Mène (*Comptes rendus* vom Juni 1858, i. Ausz. Dingl. polyt. Il. Bd. 149, S. 274), Fleck (Pogg. Ann. Bd. 113, S. 160), v. Piotrowski (Pogg. Ann. Bd. 114, S. 591). Eine Kritik der Methode von Mène hat Mohr in Pogg. Ann. Bd. 112, S. 420 geliefert. Alle Methoden erfordern mehrere Versuche, aus deren Resultaten vermittelst zwei bis drei Gleichungen die gesuchten Grössen, das absolute oder specifische Gewicht zu finden sind. Alle drei Methoden kann man, ausgehend von folgenden drei Gleichungen, beschreiben.

A. Man denke sich in einem Pyknometer durch Mischen von zwei Flüssigkeiten einen Niederschlag hervorgebracht. Es sei x das absolute Gewicht des Niederschlages, y sein Volumen, α das Volumen der den Niederschlag umgebenden, das Pyknometer bis zu einer Marke ausfüllenden Flüssigkeit, so ist (mit g das Gewicht des Pikometerinhaltes bezeichnet):

1) $$g = \alpha s + x.$$

B. v sei das Volumen des Pyknometerinhaltes bis zur Marke, man kann dann schreiben:

3) $$v = \alpha + y.$$

C. Hebt man nach dem Absetzen des Niederschlages die Flüssigkeit durch einen Heber ab und füllt destillirtes Wasser bis zur Marke nach, findet das Gewicht g_1 des Pyknometerinhaltes durch directe Wägung und das specifische Gewicht s_1 der Flüssigkeit über dem Niederschlag durch einen besonderen Versuch, so erhält man hieraus die neue Gleichung:

$$2)\qquad g_1 = \alpha s_1 + x.$$

I. Fleck bestimmt durch Versuche g, g_1, s, s_1 und v, und berechnet nun aus den drei Gleichungen x, y und die Dichtigkeit $d = \frac{x}{y}$ des Niederschlages.

II. v. Piotrowski bestimmt durch Versuche g, s, v und aus der zuvor abgewogenen, den Niederschlag liefernden Salzmenge mit Hilfe deren chemischer Formel und bekannter Zersetzungsart das Gewicht x des Niederschlages. Gleichung 1) und 3) dient ihm nun zur Berechnung von y und $d = \frac{x}{y}$ oder er setzt $d = \frac{x}{y}$ als bekannt voraus und bestimmt aus den Gleichungen 1) und 3) das absolute Gewicht x.

III. Mène erzeugt den Niederschlag im Pyknometer und süsst denselben durch Decanthiren vollständig aus, bestimmt dann das Gewicht g des Pyknometerinhaltes und hat nun bei bekannt vorausgesetztem $d = \frac{x}{y}$ die Gleichungen, die aus 1) und 3) hervorgehen, indem man $s = 1$ setzt, zur Bestimmung von x.

Der gegenwärtige Aufsatz hat die kritische Beurtheilung der drei vorgeschlagenen Methoden zum Zweck.

I. Methode von Fleck.

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) ergiebt sich:

$$4)\qquad \alpha = \frac{g - g_1}{s - s_1},$$

$$5)\qquad x = \frac{g_1 s - g s_1}{s - s_1},$$

$$6)\qquad y = v - \frac{g - g_1}{s - s_1} = \frac{v(s - s_1) - g + g_1}{s - s_1},$$

$$7)\qquad d = \frac{g_1 s - g s_1}{v(s - s_1) - g + g_1}.$$

Nehmen wir an, dass bei den Bestimmungen der Versuchsgrössen Fehler begangen wurden, welche durch Vorsetzung eines Δ vor die Versuchszahlen bezeichnet werden mögen, nämlich Δg, Δg_1, Δv, Δs und Δs_1, so erscheinen die Totalfehler Δx und Δd in folgender Form:

$$8)\qquad \Delta x = -\frac{s_1}{s - s_1}\Delta g + \frac{s}{s - s_1}\Delta g_1 + \frac{(g - g_1)s_1}{(s - s_1)^2}\Delta s - \frac{(g - g_1)s}{(s - s_1)^2}\Delta s_1,$$

$$9)\quad \begin{cases} \Delta d = \dfrac{(s-s_1)(g_1-v s_1)}{[v(s-s_1)-g+g_1]^2}\,\Delta g - \dfrac{(s-s_1)(g-v s)}{[v(s-s_1)-g+g_1]^2}\,\Delta g_1, \\ \quad - \dfrac{(g-g_1)(g_1-v s_1)}{[v(s-s_1)-g+g_1]^2}\,\Delta s + \dfrac{(g-g_1)(g-v s)}{[v(s-s_1)-g+g_1]^2}\,\Delta s_1 \\ \quad - \dfrac{(g_1 s - g s_1)(s-s_1)}{[v(s-s_1)-g+g_1]^2}\,\Delta v. \end{cases}$$

Die Gleichung 8) zeigt, dass der Fehler in der Bestimmung von x sehr bedeutend werden kann, da nach der Methode von Fleck $s-s_1$ immer nur ein sehr kleiner Bruch sein kann, die Gleichung 9) erregt kein besonderes Bedenken.

Fleck hat bekanntlich zwei Versuche zur Bestimmung des specifischen Gewichts von Chlorsilber gemacht (Pogg. Ann. Bd. 113, S. 160) und merkwürdiger Weise für dasselbe 1,1 und 1,08 gefunden. Mohr (Pogg. Ann. Bd. 113, S. 655) hat diese unerwartet niedrigen Zahlen durch die ungenaue Beobachtungsmethode Fleck's erklären wollen, aus welcher grosse Elementarfehler hervorgegangen sein können. Folgende Betrachtungen haben mich bestimmt, dieselbe Meinung zu hegen, als Mohr. Nimmt man bei Fleck's Versuchen Werthe für die Elementarfehler an, wie sie bei sorgfältigen Versuchen noch vorkommen können und erhält hierdurch für Δd einen mässigen Werth, welcher den von ihm begangenen Fehler lange noch nicht erreicht, so darf man wohl schliessen, dass die von Fleck gewählte Beobachtungsmethode zu bedeutende Elementarfehler geliefert hat, als dass sie anempfohlen werden könnte. Dies ist nun wirklich der Fall und lässt sich aus der ersten Bestimmung des specifischen Gewichtes von Chlorsilber durch Fleck nachweisen, die zweite Bestimmung muss man nämlich ausschliessen. Herr Dr. Fleck hat folgende Versuchszahlen bei Mittheilung seiner Versuche angegeben:

1. Versuch. $v = 53{,}822$ Kbkcm., $g = 56{,}350$ Gr., $g_1 = 54{,}842$ Gr., $s = 1{,}0453$, $s_1 = 1{,}0165$;

2. Versuch. $v = 55{,}001$ Kbkcm., $g = 62{,}505$ Gr., $g_1 = 57{,}625$ Gr., $s = 1{,}1392$, $s_1 = 1{,}10462$;

und findet hieraus durch Berechnung:

1. Versuch. $x = 1{,}8063$ Gr., $d = 1{,}100$, $\alpha = 52{,}180$ Kbkcm.;

2. Versuch. $x = 2{,}7278$ Gr., $d = 1{,}08$, $\alpha = 52{,}473$ Kbkcm.;

während ich aus den Versuchzahlen des Herrn Dr. Fleck berechnete:

1. Versuch. $x = 1{,}80969$ Gr., $d = 1{,}10198$;

2. Versuch. $x = -98{,}262$ Gr., $d = 1{,}14097$.

Um die Rechnungsresultate des Herrn Dr. Fleck beim zweiten Versuche zu bekommen, hätten die Versuchszahlen etwa folgende sein müssen:

2. Versuch. $v = 55{,}001$ Kbkcm., $g = 62{,}505$ Gr., $g_1 = 60{,}6905$ Gr., $s = 1{,}0453$, $s_1 = 1{,}0164$.

Da hiernach beim zweiten Versuche des Herrn Dr. Fleck wahrscheinlich irrthümlicher Weise eine unrichtige Versuchszahl angegeben worden konnte ich bei der Berechnung von Δx und Δd nur die Zahlen des ten Versuches berücksichtigen; ich habe bei ihrer Einführung in Glei- ıng 8) und 9) erhalten:

.0) $\Delta x = -35{,}1696\,\Delta g + 36{,}1696\,\Delta g + 1835{,}14\,\Delta s - 1887{,}33\,\Delta s.$

1) $\Delta d = 1{,}76162\,\Delta g - 1{,}15346\,\Delta g_1 - 0{,}67103\,\Delta v - 91{,}9214\,\Delta s + 60{,}1874\,\Delta s_1.$

Nimmt man nun für die absoluten Werthe der Elementarfehler bei- elsweise an:

$$\Delta g = 0{,}002 \text{ Gr.}, \qquad \Delta g_1 = 0{,}002 \text{ Gr.},$$
$$\Delta v = 0{,}002 \text{ Kbkcm.}, \quad \Delta s = 0{,}001,$$
$$\Delta s_1 = 0{,}001$$

l wählt die Vorzeichen so, dass alle Glieder in 10) und 11) positives rzeichen erhalten, so wird:

$$\Delta x = 3{,}8652 \text{ Gr.},$$
$$\Delta d = 0{,}1595.$$

Der Werth von Δd zeigt, dass das Resultat 1,1 für das specifische Ge- :ht des Chlorsilbers jedenfalls ein Product der ungenauen Ausführung · Methode ist. Der Werth von Δx zeigt die Mangelhaftigkeit der Me- ›de zur Bestimmung des absoluten Gewichtes recht auffällig. Die Me- ›de von Fleck eignet sich zur indirecten Bestimmung des absoluten wichtes gar nicht und darf zur Bestimmung des specifischen Gewichtes .enfalls nur mit der grössten Vorsicht angewendet werden.

II. Methode von v. Piotrowski.

Diese Methode bedarf nur der Gleichungen 1) und 3) und erhält aus en:

ıntweder

12) $$d = \frac{xs}{vs - g + x}, \text{ wenn } x \text{ bekannt ist,}$$

›der

13) $$x = \frac{(g - vs)\,d}{ds}, \text{ wenn } d \text{ bekannt ist.}$$

Die Totalfehler von d und x sind dann:

14) $$\left\{\begin{aligned} \Delta d = & -\frac{s(g-vs)}{(x-g+vs)^2}\Delta x + \frac{xs}{(x-g+vs)^2}\Delta g \\ & -\frac{xs^2}{(x-g+vs)^2}\Delta v - \frac{x(g-x)}{(x-g+vs)^2}\Delta s \\ = & -\frac{(g-vs)\,d^2}{x^2 s}\Delta x + \frac{d^2}{xs}\Delta g - \frac{d^2}{x}\Delta v - \frac{(g-x)}{xs^2}d^2\Delta s. \end{aligned}\right.$$

15) $$\left\{\begin{aligned} \Delta x = & \frac{d}{d-s}\Delta g - \frac{ds}{d-s}\Delta v - \frac{s(g-vs)}{(d-s)^2}\Delta d \\ & -\frac{d(vd-g)}{(d-s)^2}\Delta s. \end{aligned}\right.$$

Diese Fehlergleichungen führen zu den Schlüssen:

Man kann nach der Methode von v. Piotrowski das specifische Gewicht nur dann günstig bestimmen:

1) wenn der Niederschlag kein hohes specifisches Gewicht hat;
2) wenn man das absolute Gewicht x des Niederschlages so hoch als möglich wählt.

Die Methode von v. Piotrowski kann nur dann ein genaues Resultat bei der Bestimmung des absoluten Gewichtes ergeben, wenn der Niederschlag selbst ein hohes specifisches Gewicht besitzt.

Dass bei Versäumung der angegebenen Vorsichtsmassregeln das Endresultat mit einem bedeutenden Fehler behaftet sein kann, ergiebt die Fehlerschätzung bei einem von v. Piotrowski mitgetheilten Versuche. Er füllte im Pyknometer so viel Chlorbarium mit schwefelsaurem Natron, dass der Niederschlag das Gewicht $x = 0{,}0169$ Gr. haben musste. Der Inhalt seines Pyknometers betrug $v = 29{,}2725$ Kbkcm. Das Gewicht des Fällungsinhaltes war $g = 30{,}451$ Gr., das specifische Gewicht der Salzlösung $s = 1{,}0236$. Hieraus ergiebt sich $d = 4{,}8875$ und:

$$\Delta d = -290{,}06\,\Delta x + 37{,}8286\,\Delta g$$
$$-38{,}7213\,\Delta v - 1102{,}56\,\Delta s.$$

Nimmt man nun für die absoluten Werthe der Elementarfehler an: $\Delta x = 0{,}002$ Gr., $\Delta g = 0{,}002$ Gr., $\Delta v = 0{,}002$ Kbkcm., $\Delta s = 0{,}001$, so erhält man für den Totalfehler von d, wenn man die Vorzeichen der Fehler so wählt, dass alle Summanden im Ausdruck von Δd positives Vorzeichen bekommen:

$$\Delta d = 1{,}855.$$

III. Methode von Mène.

Derselbe schreibt in den „*Comptes rendus*“, Juni 1858 (i. Ausz. Dingl. polyt. Il. Bd. 149, S. 274) vor, den Niederschlag erst durch Decanthiren mit Wasser auszusüssen und dann in eine Dichtigkeitsflasche von bekanntem Volumen zu spülen und deren Inhalt zu wägen. Die Methode von Mène unterscheidet sich von der später aufgestellten von v. Piotrowski in der Ausführung nur dadurch, dass sie unbequemer ist. Die Gleichungen 1), 3), 12), 13), 14), 15) gehen in diejenigen zur Beurtheilung der Mène'schen Methode über, wenn man in ihnen $s = 1$ setzt. Die Vorsichtsmassregeln, welche bei Anwendung der Methode von v. Piotrowski anempfohlen werden mussten, gelten daher auch für die Mène'sche Methode. Mohr hat diese Vorsichtsmassregeln bereits speciell für die Mène'sche Methode in Pogg. Ann. Bd. 112, S. 420 ausgesprochen und an Beispielen erläutert.

Dr. Kahl.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Literaturzeitung

der

schrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Siebenter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1862.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Seite

ÄGE, Dr. H., Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung 1

LÖMILCH, O., Handbuch der algebraischen Analysis 40

KEL, Dr. H., Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten 60

LKAMPF, H , Grundzüge der höheren Mathematik nebst Anwendungen derselben auf Mechanik 66

NGER, Prof. Dr., Die Differential- und Integralrechnung, umfassend dargestellt 81

Synthetische und analytische Geometrie.

KLEN, Dr. O., Analytische Geometrie des Raumes, enthaltend die allgemeine Theorie der krummen Flächen u. s. w. 5

SSE, Prof. Dr., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Flächen zweiter Ordnung 17

LLE, Dr. F., Analytische Geometrie der Ebene 25

LÖMILCH, O., Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Mausses 39

EDLEIN, Dr. G., Die Geometrie des Boëthius und die indischen Ziffern . . 59

RES, Dr., Geometrische Untersuchungen über Curven höherer Ordnungen und Classen 70

SCHER, F., Die Lehre von den geometrischen Beleuchtungsconstructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen 72

Mechanik.

HER, Prof., Handbuch der rationellen Mechanik 6

LAUX, Prof., Der Constructeur 53

KEL, Dr., Zur Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten 59

Physik.

P, Prof. Dr., Lehrbuch der Experimentalphysik. 1. Band 10

IC, Prof., Lehrbuch der Physik für Obergymnasien und Oberrealschulen . 21

SWALD, Dr., Lehre von der Thermometrie, Pyrometrie, Hygrometrie u. s. w. 22

S, Dr. J., Der Elektromagnetismus 30

P, Prof. Dr., Lehrbuch der Experimentalphysik. 3. Band 34

NIKOW, Dr., Grundzüge der atomistischen Wärmetheorie 35

TEEL, Dr. F., Ueber die Aufgabe, die Methode und das Ziel der physikalischen Forschung 38

Seite

P. Angelo Secchi, *Interno alla vita e alla opere del P. Giambattista Pianciani* . . 65

Wüllner, Dr A., Lehrbuch der Experimentalphysik 75

Kirchhoff, Prof. Dr , Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente 87

Bibliographie . . . . Seite 12, 23, 42, 62, 78, 89

Mathematisches Abhandlungsregister. Januar bis Juni 1861 . . . 44

" " Juli bis December 1861 . . 92

Literaturzeitung.

Recensionen.

ıeorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung, von Dr. H. DURÈGE, Docent am eidgenössischen Polytechnikum u. a. d. Univers. zu Zürich. Leipzig, B. G. Teubner. 1861.

Trotz der hohen Bedeutung, welche die elliptischen Functionen für e gesammte Analysis, für die analytische Mechanik und selbst für die ıhlentheorie gewonnen haben, existirte doch bisher kein Elementarlehrıch derselben, und der Jünger der Wissenschaft blieb, wie vor 25 Jahren, rauf angewiesen, seine Belehrung aus den Quellen (*Legendre*, *Traité s fonctions elliptiques* und *Jacobi*, *Fundamenta nova funct. ellipt.* nebst einer ossen Zahl einzelner Abhandlungen in *Crelle's* Journal) zu schöpfen. ie Herausgabe des vorliegenden Werkes darf daher als ein glücklicher ədanke bezeichnet werden; und es ist jedenfalls damit eine fühlbare icke der Literatur zum Besten der Studirenden ausgefüllt worden. Dass r Verfasser hierbei wenig Gelegenheit zur Mittheilung eigener neuer ıtersuchungen hatte, liegt in der Natur des Gegenstandes und kann, mentlich dem übrigen Verdienste des Werkes gegenüber, nicht in Beıcht kommen; ebendesswegen muss sich auch eine Besprechung desselben :hr referirend als kritisirend verhalten.

In Abschnitt I. werden die hauptsächlichsten Definitionen, Bezeichngen und einige Grundeigenschaften der elliptischen Functionen feststellt; als Erläuterungen und Anwendungen dienen theils geometrische ıtrachtungen theils die bekannten Formeln für die Pendelbewegung. əschnitt II. handelt von der reellen und imaginären Periodicität der iptischen Functionen. Das Vorhandensein der beiden Perioden beıist der Verfasser auf die Jacobi'sche Weise, obschon diese gegründeten reifeln unterliegt; indessen ist dem Verfasser hieraus kein Vorwurf zu ıchen, da sich Jacobi's Ableitung durch ihre Einfachheit besonders für s erste Studium empfiehlt und überdies im lezten Abschnitte die geuere Theorie von Briot und Bouquet nachgeliefert wird. Die Abhnitte III und IV handeln von der Reduction der elliptischen Integrale auf die Normalform und deren Theilung in drei verschiedene Arten. Besser wäre es vielleicht gewesen, mit diesen Untersuchungen den Anfang zu machen, wie es Legendre gethan hat; die Theorie der eigentlichen elliptischen Functionen würde dann keine Unterbrechung erlitten haben. Die Wahl der Buchstaben o, p, ω, π für die vier Wurzeln der Gleichung $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ erscheint dem Ref. sehr unglücklich, einmal, weil π schon eine feststehende Bedeutung hat, andererseits, weil im ganzen Buche statt der Ziffer 0 der Buchstabe o gesetzt worden ist, was mit dem vorigen o zusammen Missverständnisse geben kann. In Abschn. V findet sich die Quadratur der Ellipse und Hyperbel, jedoch ohne weitere Angabe der Mittel zur numerischen Berechnung der betreffenden Intregale. Wahrscheinlich hat der Verf. dies für überflüssig gehalten, weil in den Lehrbüchern der Analysis die nöthigen Reihen zu finden sind, dagegen ist aber zu erinnern, dass die gewöhnlichen Formeln der Art nur bei kleinen k Vortheil gewähren. Mittelst der Landen'schen Substitution kann man allerdings die elliptischen Integrale leicht berechnen, aber dieselbe eignet sich auch wieder nicht zum analytischen Gebrauche, und es wäre daher im Interesse der Vollständigkeit gewesen, die unendlichen Reihen für $F^1(k)$, $F(k, \varphi)$ etc. aufzunehmen. Abschn. VI beschäftigt sich mit einer Substitution zweiter Ordnung zur Reduction der elliptischen Integrale auf ihre Normalform, und welche nachher dient, um die elliptischen Functionen mit einem die Einheit übersteigenden Modulus oder mit einem imaginären Modulus auf die normalen Functionen zurückzuführen. In Abschn. VII wird nach einer vorbereitenden trigonometrischen Betrachtung das Additionstheorem entwickelt und zwar durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\psi}} = 0$$

mittelst der Methode von Lagrange. Dieser Abschnitt hätte an Kürze gewonnen und die Analogie zwischen den trigonometrischen und den elliptischen Functionen wäre sowohl in der Ableitung als in der Form der Endresultate besser hervorgetreten, wenn sich der Verf. des weit einfacheren Verfahrens von K. Sturm bedient hätte (s. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. I S. 372); selbst eine blosse Verification nach Legendre würde für das erste Studium ausreichend und gewiss kürzer gewesen sein. Als Illustration zu diesem Abschnitte dient der Nachweis des Zusammenhanges der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie (Abschn. VIII). Der nächste Abschnitt enthält die Additionstheoreme für die Functionen zweiter und dritter Gattung. In Abschn. X kommt der Verf. noch einmal auf die Differentialgleichung der elliptischen Functionen zurück, giebt ihr die Form

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

und integrirt sie nach den beiden Methoden von **Lagrange** und **Euler**. Für ein Elementarlehrbuch dürfte dies überflüssig gewesen sein, namentlich dann, wenn der Verfasser Sturm's Verfahren und Legendre's Verification benutzt hätte. Mit besonderer Ausführlichkeit ist die Jacobi'sche Construction des Additionstheoremes behandelt (Abschn. XI), welche durch **Richelot** einige bemerkenswerthe Zusätze erhalten hat; auch die Untersuchung Jacobi's über Vielecke, welche Sehnenvielecke und Tangentenvielecke zugleich sind, findet man nebst Richelot's Erweiterungen vollständig dargestellt. Abschn. XII enthält die Landen'sche Substitution, geometrisch aus dem Vorigen abgeleitet; und deren Anwendungen zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale. Die nächsten vier Capitel beschäftigen sich mit der Entwickelung der elliptischen Functionen in Factorenfolgen und Reihen. Auch diese Untersuchungen hätten sich vielleicht kürzer erledigen lassen, wenn der Verf. eine Arbeit des Ref. benutzt hätte. Da nämlich jede Function innerhalb gegebener Grenzen $u = 0$ und $u = M$ in die Reihen

$$f(u) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\frac{\pi u}{M} + a_2 \cos\frac{2\pi u}{M} + \ldots,$$

$$a_n = \frac{2}{M} \int_0^M f(u) \cos\frac{n\pi u}{M}\, du,$$

$$f(u) = b_1 \sin\frac{\pi u}{M} + b_2 \sin\frac{2\pi u}{M} + b_3 \sin\frac{3\pi u}{M} + \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{M} \int_0^M f(u) \sin\frac{n\pi u}{M}\, du$$

verwandelbar ist, so giebt es zur Entwickelung der elliptischen Functionen offenbar keinen directeren Weg, als den durch die vorstehenden Formeln bezeichneten, und es kommt nur darauf an, die nöthigen Integrationen für den Fall auszuführen, dass $f(u)$ eine elliptische Function ist. Hierzu kann man sich der folgenden vier Sätze bedienen, worin $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ mit $cs\,hp\,x$ und $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ mit $sn\,hp\,x$ bezeichnet ist.

Wenn die Functionen

$$\frac{f(M + iv) - f(M - iv)}{2i} \quad \text{und} \quad \frac{f(iv) - f(-iv)}{2i}$$

für alle zwischen 0 und N liegende v verschwinden, so gelten die beiden Formeln

$$\int_0^M f(u) \cos\frac{n\pi u}{M}\, du = \frac{1}{cs\,hp\,\frac{n\pi N}{M}} \int_0^M \frac{f(u + iN) + f(u - iN)}{2} \cos\frac{n\pi u}{M}\, du$$

$$= - \frac{1}{\ldots\, n\pi N} \int^M \frac{f(u + iN) - f(u - iN)}{2} \sin\frac{n\pi u}{M}\, du;$$

verschwinden dagegen

$$\frac{f(M+iv)+f(M-iv)}{2} \text{ und } \frac{f(iv)+f(-iv)}{2}$$

für alle zwischen 0 und N liegende v, so ist

$$\int_0^M f(u)\sin\frac{n\pi u}{M}\,du = \frac{1}{sn\,hp\,\frac{n\pi N}{M}}\int_0^M \frac{f(u+iN)-f(u-iN)}{2i}\cos\frac{n\pi u}{M}\,du$$

$$= \frac{1}{cs\,hp\,\frac{n\pi N}{M}}\int_0^M \frac{f(u+iN)+f(u-iN)}{2}\sin\frac{n\pi u}{M}\,du,$$

wobei noch zu bemerken ist, dass sowohl $f(u \pm iN)$ und $f(u)$ von $u=0$ bis $u=M$ als $f(M+iv)$ und $f(iv)$ von $v=0$ bis $v=N$ continuirlich bleiben müssen. *)

Den Bedingungen der lezten Formel genügt z. B.

$$f(u) = am\,u - \frac{\pi u}{2K}$$

wenn $M=K$, $N=K^1$ genommen wird, gleichzeitig ist $\frac{1}{2}[f(u+iK^1)+f(u-iK^1)]$ ein algebraischer Ausdruck, und so erhält man

$$am\,u - \frac{\pi u}{2K} = b_1\sin\frac{\pi u}{K} + b_2\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{K}\,\frac{1}{cs\,hp\,\frac{n\pi K^1}{K}}\int_0^K \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{K}{u}\right)\sin\frac{n\pi u}{K}\,du$$

$$= \frac{1}{cs\,hp\,\frac{n\pi K^1}{K}}\cdot\frac{1}{n} = \frac{2}{n}\,\frac{q^n}{1+q^{2n}}.$$

Für die übrigen elliptischen Functionen wird die Sache ebenso einfach. — Die Abschnitte XVII, XVIII u. XIX sind der Jacobi'schen Transcendenten Θ gewidmet und zeigen hauptsächlich, wie alle elliptischen Functionen durch jene Transcendente ausgedrückt werden können. Abschnitt XX giebt die Theorie des sphärischen Pendels, in Abschnitt XXI sind endlich die genaueren Untersuchungen über Functionen complexer Variabelen nach **Cauchy**, **Riemann**, **Briot** und **Bouquet** mitgetheilt.

Wie man aus dieser Inhaltsanzeige ersehen wird, bietet das Werk genug, ja hie und da vielleicht mehr als genug, für das erste Studium der genialen Schöpfungen von **Legendre**, **Abel** und **Jacobi**, und wenn sich Ref. auch mit der Anordnung des Materials nicht durchgängig befreunden kann, so verkennt er auch die Schwierigkeit nicht, welche gerade hierin gelegen haben mag; zum Glücke ist dieser Punkt von

*) Abhandlungen der mathem. phys. Cl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch. ... Hirzel 1855. S. 395.

inem Einfluss auf den Gebrauch des Werkes. Die Darstellung muss als ar deutlich bezeichnet werden und scheint das für ein Lehrbuch nöthige ass der Ausführlichkeit nirgends zu überschreiten; die typographische ısstattung zeigt die bekannte Eleganz der Teubner'schen Verlagsartikel.

SCHLOEMILCH.

ıalytische Geometrie des Raumes, enthaltend die allgemeine Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Curven und der Linien auf den Flächen; die Eigenschaften der (homofocalen) Flächen zweiten Grades und der Linien auf denselben, von DR. OTTO BOEKLEN. Stuttgart, A. Becher's Verlag. 1861.

Der Titel des vorliegenden kleinen Werkes bezeichnet zwar hinreichend ssen Inhalt, ist aber nichts desto weniger etwas ungeschickt gewählt; von ;entlicher analytischer Geometrie findet sich nämlich, §. 1 ausgenommen, ine Spur, vielmehr setzt der Verf. eine völlige Bekanntschaft mit den Gleiıngen der Geraden, Ebenen, Flächen zweiten Grades u. s. w. voraus und chäftigt sich vorzugsweis mit den Anwendungen der höheren Analysis die analytische Geometrie des Raumes. So enthält schon §. 2 die Gleiıngen der Berührungsebene und der Normale einer Fläche, woran sich in nächsten Paragraphen die Untersuchungen über Krümmungslinien und Krümmungshalbmesser der Normalschnitte anschliessen. Dem entspreıd sind in den §§. 12—14 die Tangenten, Normalebenen und Krümmungsbmesser der gewundenen Curven behandelt. Die §§. 15—17 beschäftigen mit Curven auf Flächen, namentlich mit geodätischen Linien. Das Bisige zusammengenommen kann man als den ersten und allgemeinen Theil Schrift bezeichnen, denn es kommen darin nur allgemeine Formeln und ırsätze vor, ohne irgendwelche Anwendungen auf individuelle Flächen r Curven. Mit §. 18 beginnt der zweite und specielle Theil, worin jene gemeinen Formeln auf die Flächen zweiten Grades angewendet werden. n Beschluss macht ein Anhang, der ein volles Hundert Sätze über die ichen zweiten Grades ohne Beweis und nur mit Angabe der Quellen aufrt.

Nach dieser Inhaltsangabe bedarf es kaum der Bemerkung, dass die geınte Schrift auf kleinem Raume ein reichhaltiges Material bietet, welches n anderwärts nicht so leicht beisammen finden wird. Diesem Lobe des ıalts muss freilich Ref. den Tadel der Form gegenüber stellen; die Darllung ist nämlich ebenso unbeholfen in Beziehung auf den Gegenstand als chlässig in stylistischer Hinsicht, auch fehlt es den meisten Figuren an reometrischer Anschaulichkeit, die mit ein wenig Perspective doch so leicht erreichen ist.

Da keine *Vorrede zum* Buche existirt, so weiss man nicht, welchen Leserkreis sich der Verf. gedacht hat; soviel aber ist gewiss, dass es zum Selbststudium für Studirende, ja selbst als Grundlage für Vorlesungen an Universitäten nicht gerade Empfehlung verdient, jedoch kann es Lehrern als Repertorium und Beispielsammlung recht gute Dienste leisten.

SCHLOEMILCH.

Handbuch der rationellen Mechanik. Von Dr. Decher, Professor an der Königl. polytechnischen Schule in Augsburg. Vier Bände. Augsburg, Verlag der Rieger'schen Buchhandlung. 1851—1861.

Wer Bücher nach ihren Vorreden beurtheilen wollte (was nicht so selten geschehen mag), der würde das vorliegende Werk höchst wahrscheinlich ungelesen bei Seite legen, denn die Vorreden zu den vier Bänden sind nichts weiter als ein buntes Gemisch von absprechenden Urtheilen und reichlichem Selbstlob. Mit einer Selbstüberhebung sondergleichen erklärt der Verfasser, dass fast alle bisherigen Begriffe der höheren Analysis sowie der analytischen Mechanik höchst confuser Natur sind und durch andere ersetzt werden müssen; das Unendlichkleine z. B. ist eine „dehnbare Null" folglich Unsinn, die Grenzenmethode „balancirt auf einer Nadelspitze" und ist gleichfalls Unsinn, der Begriff der Dichtigkeit ist unlogisch also Unsinn, über die Reibung herrschen unklare Begriffe u. s. w., kurzum es ist alles Unsinn. Ref. könnte darauf sehr einfach antworten: „wenn Leute wie Gauss, Jacobi, Dirichlet, Laplace, Cauchy etc. vom Unendlichkleinen u. dergl. reden, so wissen sie recht gut, was sie darunter verstehen, und wenn Herr Decher, wie jedes Wort der Vorreden zeigt, dies nicht weiss, so folgt daraus keineswegs die Berechtigung zu absprechenden Urtheilen, sondern vielmehr die Verpflichtung, sich durch weiteres Studium jene Begriffe erst anzueignen" — aus Achtung aber vor dem grossen Fleisse, den der Verf. auf seine Arbeit verwendet hat, wollen wir Herrn Decher weiter nachgehen und ihm namentlich auf dem Gebiete der Analysis zeigen, dass er Splitter in den Augen Anderer zu sehen glaubt während ihm der Balken im eigenen Auge verborgen bleibt.

Den Begriff des Grenzwerthes nimmt der Verf. zu eng; die Grenze kann eine erreichbare sein, wenn Δx den genauen Werth Null erlangt (wie bei der Tangente), sie kann aber auch als unerreichbar nur in der Idee existiren wie z. B. wenn $\Delta x = \frac{k}{n}$ ist, wo k eine Constante und n eine unendlich wachsende Zahl bedeutet. Der letzte Fall kommt u. A. bei einhüllenden Curven*) und in der Integralrechung fast immer vor; kein Wunder also, wenn

*) Gerade die Theorie der einhüllenden Curven macht den Begriff des Differentiales als eines gegen die Null convergirenden Incrementes ausserordentlich klar; vergl. des Ref. Compendium der höheren Analysis, zweite Aufl. S. 132.

man neuerdings viel Gewicht darauf gelegt hat. Der Verf. übersieht den letzten Fall ganz und gar (was übrigens wenig Bekanntschaft mit der Analysis verräth) und gelangt dadurch zu folgender ebenso einseitigen als unrichtigen Darstellung.

Zuerst wird aus dem Umstande, dass $f(x + \Delta x) - f(x)$ für $\Delta x = 0$ verschwindet, geschlossen, dass jene Differenz die Form $f'(x + \alpha \Delta x) . \Delta x$ haben müsse, wo f' irgend eine andere Function und α „irgend eine Verhältnisszahl" bedeutet. Das ist schon eine aus der Luft gegriffene Hypothese; wo kommt denn die Verhältnisszahl α her, warum muss denn der letzte Factor $= \Delta x$ sein, könnte er nicht ebenso gut $\sqrt{\Delta x}$, $\log(1 + \Delta x)$ u. dergl. heissen? Allerdings gilt die Gleichung

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \alpha \Delta x) . \Delta x$$

aber nur, wenn erstens α zwischen 0 und 1 liegt und wenn zweitens $f(x)$ und die derivirte Function $f'(x)$ endlich und stetig bleiben, während x um Δx zunimmt.*) Damit will nun der Verf. beweisen, dass der Quotient

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

für $\Delta x = 0$ einen bestimmten „Anfangswerth" erhält; in der That ein schöner Anfang zur „strengen Begründung" einer Wissenschaft! Da der Verf. die Differentiale nicht entbehren kann, so führt er ausser der Bezeichnung $f'(x)$ noch die zweite $\frac{df(x)}{dx}$ ein und erklärt dx, dy etc. für „blosse Formgrössen ohne irgend denkbare Werthe." Dieser Definition fehlt aller vernünftige Sinn. In der Analysis haben Buchstaben die Bedeutung willkürlicher Zahlen, Zahlen sind reine Quantitäten ohne besondere Form; sublimirt man aus dem Begriffe der Zahl auch noch den Begriff der Quantität d. h. ihres Werthes heraus, so bleibt dieselbe Rarität übrig, die im Lichtenberg'schen Auctionskataloge als Messer ohne Griff und Klinge aufgeführt ist. Dieser Consequenz könnte Hr. Decher nur die Behauptung entgegenstellen, dass seine Formgrössen zwar Grössen aber keine Zahlen seien, dann hat es aber keinen Sinn, damit zu multipliciren u. zu dividiren, wenigstens begreift Ref. nicht, wie z. B. ein Spiegel ohne Glas und Rahmen durch einen Tisch ohne Platte und Beine getheilt werden kann. Wer dächte hier nicht an den nur allzuwahren Ausspruch „und wo uns die Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zu rechter Zeit sich ein."

Fast noch verwirrter ist der Abschnitt über die Integralrechnung. Unter Integration versteht der Verf. den Rückgang vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten, nämlich

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \int f'(x) \quad \text{mithin} \quad \Delta f(x) = \Delta x \int f'(x),$$

wonach $\int$ bei Herrn Decher etwas ganz Anderes bedeutet, als in der übrigen

*) Die geometrische Bedeutung und besonders die Ausnahmefälle des obigen Satzes hat Ref. in seinem Compendium ausführlich erläutert. S. 44.

mathematischen Welt. Darauf sagt der Verf.: „es dürfte das Zweckmässigste sein, den Factor Δx in die Formgrösse dx zu verwandeln und diese als blosses Zeichen zur Andeutung der unabhängigen Veränderlichen unmittelbar hinter das Integralzeichen zu setzen, so dass $\int dx$ zusammen ein einziges Zeichen (der Integration) darstellt." Also mit anderen Worten, aus dem Δx, welches einen beliebig grossen Werth haben kann, wird jeder „irgend denkbare Werth" herausgeblasen, das übrig bleibende gespensterartige Wesen wird mit einem blossen Zeichen zu einem neuen einzigen Zeichen copulirt, (obschon im Widerspruche hiermit bei wirklicher Rechnung $\int dx = x$ also gleich einem Werthe ist), die Stellung von dem in dx verwandelten Δx wird ganz willkürlich geändert — und das Alles geschieht nicht etwa aus mathematischer Nothwendigkeit, sondern bloss aus Zweckmässigkeitsrücksichten. Und von solchen ungeheuerlichen Hypothesen ist Herr Decher „fest überzeugt, dass sie in nicht langer Zeit allgemein als Grundlage für die Differential- und Integralrechnung werden angenommen werden." (Bd. 2, X.).

Es wird vielleicht den Verf. überraschen, wenn wir ihm sagen, wie er zu seinen „neuen Ansichten" gekommen ist. Fast jedem Studirenden der Mathematik drängt sich der Gedanke auf,*) dass man die Differentiale ganz entbehren könnte, wenn man nur mit $f(x)$ und $f'(x)$ rechnete, und weil das in der Differentialrechnung leidlich geht, so meint der Anfänger eine schöne Entdeckung gemacht zu haben. Die Enttäuschung kommt jedoch beim Integral hinterdrein. Man kann nur entweder $\int f'(x) = f(x)$ oder $\int f'(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ setzen, in beiden Fällen aber ist es ganz unmöglich, statt x eine neue Variabele einzuführen, und daran scheitert das Project. Dies ist der Standpunkt unseres Verfassers, es ist ein längst von jedem Einzelnen im Stillen überwundener Standpunkt, und Herr Decher irrt sich sehr, wenn er seine Ansichten deshalb für neu hält, weil er sie nirgends gedruckt findet; diese Experimente haben wir alle schon gemacht, aber wir sahen auch, dass ohne Hypothesen und Willkürlichkeiten nichts dabei herauskommt und desshalb waren wir so klug, unsere Schülerarbeiten in Fidibus zu verwandeln. — Die Unklarheit über die Bedeutung des Integrales rächt sich übrigens in der Mechanik durch den Mangel an Anschaulichkeit. Da nämlich die Differentiation durch Subtraction und Division vermittelt wird, so muss die umgekehrte Operation des Integrirens direct durch Multiplication und Addition ausführbar sein, und daraus folgt bekanntlich die summatorische Bedeutung des bestimmten Integrales. Von dieser will Herr Decher gar nichts wissen, er erklärt sie für die beschränktere, nur bei angenäherter (!) Berechnung zulässige, er decretirt, dass es sogut wie Unsinn sei, wenn Jemand z. B. die

*) *Es ist dem* Ref. und mehreren seiner wissenschaftlichen Freunde so gegangen.

Dichtigkeit mit Θ bezeichnet und sagt: die Masse M ist die Summe aller Massenelemente $\Theta\, dx\, dy\, dz$ nämlich

$$M = \int\int\int \Theta\, dx\, dy\, dz,$$

er belehrt uns vielmehr, dass es heissen muss: die Masse M ist diejenige Function, von welcher das Aenderungsgesetz des Aenderungsgesetzes des Aenderungsgesetzes gleich der Dichtigkeit ist. Dazu kann man nichts weiter sagen, als: Gott stehe den armen Jungen bei, die das Unglück haben, Herrn Decher's Schüler zu sein. —

Gelegentlich möge an dieser Stelle eine Berichtigung erfolgen. In irgend einer Abhandlung hat Ref. bemerkt, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\sin^2 \delta} - \frac{1}{\sin^2 2\delta} = \frac{1}{\sin^2 \delta}\left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 \delta}\right)$$

für $\delta = 0$ nicht verschwindet, sondern unendlich wird; das geht Herrn Decher über alle Begriffe, er ruft verwundert aus (S. 109): „Unendlich für den Unterschied zweier identischen Werthe derselben Function!" und meint wahrscheinlich, $\frac{1}{\sin^2 0} - \frac{1}{\sin^2 0}$ müsse doch $= 0$ sein. Also hält unser Analytiker $\frac{1}{\sin^2 \delta}$ für dieselbe Function wie $\frac{1}{\sin^2 2\delta}$ und die Werthe beider für identisch, obschon bei kleinen δ die erste Function ziemlich genau das Vierfache der zweiten bildet. Herr Decher begleitet seine schülerhafte Verwunderung mit einigen Ausfällen, spricht von den beschränkten Vorstellungen des Ref., von Absurditäten und spitzfindigen Theorieen — Ref. kann darauf nur erwidern, dass die Theorieen des Verf., den obigen Proben zufolge, als äusserst stumpfsinnig zu bezeichnen sind.

Die Grundlegung der Mechanik ist nicht besser gerathen, als jene der Analysis. So wird z. B. das Parallelogramm der Kräfte auf die Functionalgleichung

$$\left[\varphi(\vartheta)\right]^2 + \left[\varphi(\tfrac{1}{2}\pi - \vartheta)\right]^2 = 1$$

zurückgeführt und dann heisst es: „Nun kann es aber für zwei gegebene Kräfte nur eine einzige Resultirende geben, also auch nur einen einzigen Werth von $\varphi(\vartheta)$ und man hat deshalb nothwendig für alle Fälle $\varphi(\vartheta) = \cos\vartheta$." Dieser Schluss entbehrt aller Logik, denn die physische Frage nach der Resultante hat nicht das Geringste mit der analytischen Frage nach der Anzahl der Wurzeln einer Gleichung zu schaffen. Mit demselben Rechte könnte man schliessen wollen: da ein gegebener Winkel ω nur ein einziges und nicht mehrere verschiedene Drittheile haben kann, so darf auch die zur Bestimmung von $\sin\frac{1}{3}\omega = x$ dienende Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ nur eine reelle Wurzel besitzen. Uebrigens genügen der obigen Functionalgleichung unendlich viele Functionen z. B.

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi \cos^2 \vartheta\right).$$

Nach so vielem Tadel erfüllt Ref. gern die Pflicht, auch die guten Seiten des Buches hervorzuheben. Dahin gehört vor Allem eine grosse Vollständigkeit und Ausführlichkeit, die sich schon im ersten Bande (Mechanik des materiellen Punktes) zeigt; so ist z. B. die relative Bewegung eines Punktes mit vieler Sorgfalt behandelt, wie dies bisher in keinem Lehrbuche geschehen sein dürfte. Der zweite Band enthält die Mechanik fester Systeme namentlich Schwerpunkte, Reduction der Kräftesysteme, Theorie der Anziehung,*) Trägheitsmomente, fortschreitende und drehende Bewegungen. Im dritten Bande, Mechanik veränderlicher Systeme, findet sich ein sehr reicher Inhalt, wobei äussere und innere Zustände solcher Systeme, die ebensowohl nichtstetige (Seilpolygon, Waage, Knie etc.) als stetige (Faden, biegsame Fläche etc.) sein können, unterschieden werden. Auch den Formveränderungen und Schwingungen elastischer Körper widmet der Verf. grössere Aufmerksamkeit. Mit gleicher Ausführlichkeit ist der letzte Band bearbeitet, welcher die Mechanik der Flüssigkeiten umfasst. Den principiellen Erörterungen des Verf. kann Ref. nicht überall beistimmen, doch würde ein genaueres Hervorheben der zweifelhaften Punkte zu wahren Abhandlungen führen, da die betreffenden Formeln und Herleitungen ohne grössere Excerpte unverständlich bleiben würden. Hoffentlich findet sich Gelegenheit, darauf zurückzukommen.

Geübten Lesern wird es leicht sein, sich über die kritischen Expectorationen, über die nicht immer glückliche Bezeichnung und über das Gerede von Formgrössen, Aenderungsgesetzen etc. hinwegzusetzen; solchen Lesern können wir das Buch bestens empfehlen, denn es enthält viel des Anregenden und ist namentlich reich an Beispielen, die den Lehrern der Mechanik immer willkommen sein werden.

SCHLOEMILCH.

Lehrbuch der Experimentalphysik von Dr EDMUND KUELP, Professor der Physik und Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt. In vier Bänden. Erster Band, die Statik und Dynamik fester und flüssiger Körper. Mit 166 Abbildungen im Text. Darmstadt 1860. Verlag von Johann Philipp Diehl.

Wir würden uns eine literarische Unterlassungssünde zu Schulden haben kommen lassen, hätten wir das Erscheinen des ersten Bandes dieses

*) Für das Potential V gilt bekanntlich der Satz

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\,\Theta$$

wenn der Punkt xyz im Innern der anziehenden Masse liegt. Da der Gauss'sche Beweis dieser Gleichung auf dem Gebrauche des Unendlichkleinen beruht, so ist natürlich Herr Decher a priori überzeugt, dass sich Gauss gründlich geirrt hat, und da ihm selber kein allgemeiner Beweis gelingt, so schliesst er mit gewöhnlicher Logik, dass der Satz nur *unter sehr* beschränkenden Voraussetzungen richtig sei. (Bd. 2, S. 266).

umfänglichen Werkes, von dem bereits 1857 der zweite Band erschien und im Jahrgang 1858 dieser Zeitschrift von Dr. Witzschel besprochen wurde, mit Stillschweigen übergehen wollen. Das späte Erscheinen dieser Zeilen möge durch Krankheit und Abhaltung anderer Art gütigst entschuldigt werden. — Ist schon im Bericht über den zweiten Band von Dr. Witzschel hervorgehoben worden, dass der experimentelle Theil ebenso ausführlich behandelt worden sei, als im grösseren Pouillet-Müller'schen Werke, so gilt dies umsomehr vom ersten Bande; dies zeigen besonders die Abschnitte vom Messen, von der Wage, von den Wirkungen der Cohäsionskräfte, von der Wurfbewegung, von der Rotationsbewegung, vom Flüssigkeitsausfluss, von der Luftpumpe und vom Luftwiderstand. Ausserdem zeichnet sich das Werk vor Pouillet-Müller durch eine geschicktere Anwendung der elementaren Mathematik aus. Als vorzüglich sind in dieser Hinsicht die Herleitung des Kräfteparallelogrammes mit Hülfe der Grundsätze von der Verlegung der Kräfte und der Unveränderlichkeit des Systemes bei Einführung gleicher und entgegengesetzter Kräfte, die Sätze über die Momente paralleler Kräfte u. s. w. zu nennen. Einen wohlthuenden Eindruck macht es bei Durchlesung des Buches, dass die mechanischen Lehrsätze von der Reduction von Kräften, die an einem Körper wirken, auf eine resultirende Kraft und ein resultirendes Paar die gehörige Berücksichtigung gefunden haben und erkennt man hieraus ebensowohl, wie aus vielen andern Abschnitten des Buches die tiefe Kenntniss, sowie das didaktische Geschick des Herrn Verfassers. Den bisher genannten Vorzügen, welche zu einer warmen Empfehlung des Werkes auffordern, gesellt sich noch die vorzügliche Eleganz in Papier, Druck und Holzschnitt bei. Wer nach gründlichen Kenntnissen in der Physik strebt, den wird die Benutzung des genannten Werkes sicher zum gewünschten Ziele führen, und er wird den angenehmen Eindruck mit sich fortnehmen, dass ihm die Mathematik, wo sich der Herr Verfasser ihrer bedient hat, immer in einem würdigen, einfachen und schönen Gewande entgegengetreten ist.

Dr. Kahl.

Bibliographie

vom 15. October 1861 bis 1. Januar 1862.

Periodische Schriften.

Amtlicher Bericht über die 35. Naturforscherversammlung zu Königsberg, im September 1860. Herausgegeben von Wittich und Wagner. Königsberg, Bon. 5 Thlr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1864. Herausgegeben von Encke, unter Mitwirkung von Wolfers. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgegeben von C. von Littrow. Jahrg. 1860. Wien, Wallishauser. $3^1/_3$ Thlr.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Herausgegeben von Kreil. Jahrgang 1856. Wien, Gerold's Sohn. 8 Thlr.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften. 9. Bd. 1. Abthlg. München, Franz. $2^2/_3$ Thlr.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle, fortgesetzt von Borchardt. Bd. Berlin, Reimer. pr. compl. 4 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik. Herausgegeben von Grunert. 37. Thl. 1. Hft. Greifswald, Koch. pr. compl. 3 Thlr.

Annales de l'observatoire impérial de Paris; publiées par Le Verrier. Tome 15, 1859. Paris, Mallet-Bachelier.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'académie des sciences de St. Petersbourg. Tome III, livr. 5. Leipzig. Voss. 17. Ngr.

Annales de l'observatoire physique central de Russie, publiées par A. Kupffer. 2 ars. et compte rendu annuel. 1859 et 1860. Ebendas. 7 Thlr.

Correspondance météorologique, publication annuelle de l'administration des mines de Russie, redigée par A. Kupffer. 1859. Ebendas. 5 Thlr.

Reine Mathematik.

LOEMILCH, O., Handbuch der algebraischen Analysis. 3. verbesserte und vermehrte Auflage. Jena, Frommann. $2^2/_3$ Thlr.

LÈGE, H., Theorie der elliptischen Functionen; Versuch einer elementaren Darstellung. Leipzig, Teubner. $2^1/_3$ Thlr.

TKEL, H., Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten. Inaug.-Dissert. Leipzig, Voss. 12 Ngr.

[ROEN, L., Logarithmische Tafeln. 2. Stereotypausg. Braunschweig, Vieweg. $1^3/_4$ Thlr.

CHER, R., Briot und Bouquet's Theorie der doppelt periodischen, insbesondere elliptischen Functionen. Halle, Schmidt. $2^1/_2$ Thlr.

AMER, PH., Elementarmathematik für Gymnasien. 1. Abthlg. Arithmetik. 2. Auflage. Augsburg, Rieger. 24 Ngr.

PPE, A., Lehrbuch der Elementaralgebra. Frankfurt a. M., Auffarth. 1 Thlr. 16 Ngr.

SSE, O., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über die Oberflächen zweiter Ordnung. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 12 Ngr.

IASSMANN, H., Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin, Enslin. 2 Thlr.

ENCK, I., Die Geometrie enth. Planimetrie, Stereometrie und ebene Trigonometrie. Leipzig, Klinkhardt. $^1/_2$ Thlr.

YMANN, I. R., Lehrbuch der Mathematik. 1. Thl. Ebene Geometrie. 2. Aufl. Cöln und Neuss, Schwann. $17^1/_2$ Ngr.

ÇNIK, F., Geometrische Anschauungslehre. 2. Abth. 4. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 12 Ngr.

JG, J. C., Die Mathematik in systematischer Behandlungsweise. 1. Bd. enth. Abgebra, abgebraische Analysis, synthetische und analytische Geometrie. Zürich, Zürcher & Furrer. $2^1/_2$ Thlr.

Angewandte Mathematik.

ILD, A., Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. München, Fleischmann. $1^1/_2$ Thlr.

— Die öffentlichen Glücksspiele mit Einschluss der Lotterieanlehen u. s. w. Ebend. $^2/_3$ Thlr.

— Das Roulettespiel, nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beleuchtet. Ebend. 9 Ngr.

CH, Ueber das Risiko der Lebensversicherungen. Tübingen, Fues. $^1/_3$ Thlr.

AERTNER, C., Lehrbuch der darstellenden Geometrie mit An-

leitung zu Schattenconstructionen u. s. w. Wien, Sallma
& Comp. 1 Th

Hieser, J., Lehrbuch der beschreibenden Geometrie, Schatt
lehre u. s. w. Wien, Braumüller. $1^2/_3$ Th

Largiadèr, Vorlagen zum Planzeichnen. Frauenfeld, Huber. 16 N
colorirt $1^1/_3$ Thlr.

Schlieben, A. v., Vollständiges Handbuch der Feldmesskunst,
herausgegeben von J. B. Montag. 5. Auflage. Quedlinburg, Ernst.
$1^2/_3$ Thlr.

Heussi, J., Lehrbuch der Geodäsie. 2. Hälfte. Leipzig, Brockhaus.
2 Thlr.

Schneitler, C. F., Lehrbuch der gesammten Messkunst. 3. Auflage.
Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

— — Die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst u. s. w.
4. Auflage. Leipzig, Teubner. $1^1/_2$ Thlr.

Kulik, J. P., Tafeln zur leichten Bestimmung des Inhalts cylin-
drischer und conischer Gefässe. Prag, Ehrlich. $1^1/_3$ Th

Bruhns, C., Geschichte und Beschreibung der Leipziger Ster
warte. Leipzig, Voigt & Günther. $2^2/_3$ Th

Beckmann, F., Zur Geschichte des Kopernikanischen System.
Braunschweig, Peter. 8 Ng

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, deutsch, heraus
geben von Schlömilch. 2. Auflage. Neue Ausgabe. Leipzig, Teubner
2 Thlr

Weisbach, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik
1. Theil. Theoretische Mechanik. 4. Auflage. Lieferung 1 und 2. Braun-
schweig, Vieweg. 1 Thlr.

Ruehlmann, M., Allgemeine Maschinenlehre. 1. Band. 1. Hälfte
Braunschweig, Schwetschke & Sohn. 1 Thlr.

Wolf, R., Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und
Astronomie. Bern, Dalp. 1 Thlr

Reye, Th., Die mechanische Wärmetheorie und das Spannungs
gesetz der Gase. Inaug.-Dissert. Göttingen, Vandenhoeck & Ru
precht. 8 Ngr

Physik.

Kuelp, E., Lehrbuch der Experimentalphysik. 3. Band. Elek
tricität und Magnetismus. Darmstadt, Diehl. 2 Thl

Zoellner, F., Grundzüge einer allgemeinen Photometrie de
Himmels. Berlin, Mitscher & Rössell. $3^1/_2$ Thl

Kirchhoff, G., Untersuchungen über das Sonnenspectrum und
die Spectra der chemischen Elemente. Berlin, Dümmler's Ver
lag. 1 Thl

Vollständiges Handbuch über die Wärme und deren
endungen, deutsch bearbeitet von Hartmann. 3 Bände. Leipzig,
ard. 2 Thlr. 18 Ngr.

, Grundzüge der atomistischen Wärmetheorie. Erfurt,
ret. $1^1/_6$ Thlr.

E., Maassbestimmung der Polarisation durch das phy-
gische Rheoscop. München, Franz. 18 Ngr.

, *Recherches théoriques et expérimentales sur l'électricité
idérée au point de vue mécanique.* Paris, Masson & Fils.

LLOT, C., *Sur la marche annuelle du thermomètre et du ba-
ètre en Neerlande et èn divers lieux en Europe, déduite
servations simultanées de 1849 à 1859.* Amsterdam, van der
3 Frcs.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, von Dr. OTTO HESSE, ordentlicher Professor an der Universität zu Heidelberg. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1861.

Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Coordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Functionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor Kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studirenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disciplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der im vorigen Jahrgange der Literaturzeitung (S. 44) besprochenen Fiedler'schen Uebertragung des Salmon'schen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Literatur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dass der Verfasser desselben vor Allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Theile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelle's Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft muss Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegendes Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte; er glaubt aber den Lesern dieser Zeitschrift, welchen das Buch noch nicht zu Gesicht gekommen sein sollte, einen nützlichen Dienst zu erweisen, indem er sie durch eine gedrängte Inhaltsangabe auf das reiche darin enthaltene Material aufmerksam macht.

Nach Inhalt der Vorrede verdankt das Lehrbuch seine Entstehung den Universitätsvorträgen, welche der Verfasser in Königsberg, Halle und Heidelberg über die analytische Geometrie des Raumes gehalten hat, um seine Zuhörer in die analytisch-geometrischen Theorien einzuführen und sie zu selbstständigen Untersuchungen in diesem Gebiete zu veranlassen. Entsprechend dieser Entstehung ist dasselbe in dreissig Vorlesungen eingetheilt.

An die in der Vorlesung I. enthaltene Einleitung, welche sich mit der Aufgabe der analytischen Geometrie, dem Begriffe der rechtwinkligen Punktcoordinaten und einigen sich hieran knüpfenden Fundamentalaufgaben beschäftigt, schliesst sich in den Vorlesungen II. bis IV. die Theorie der Ebene im rechtwinkligen Punktcoordinaten-System, wobei unter Anderem das anharmonische und harmonische Verhältniss zweier Ebenenpaare, die Involution von drei Ebenenpaaren und die Pascal'sche Pyramide zur Untersuchung gelangen. Durch Besprechung der Polarfiguren auf der Kugeloberfläche wird hierbei das Princip der Reciprocität vorbereitet. — In der Vorlesung V. wird der Begriff der Ebenencoordinaten mittelst Bestimmung einer Ebene durch die Constanten u, v, w in der Gleichungsform

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

eingeführt. Die doppelte Deutung, welche diese Gleichung als die einer Ebene in Punktcoordinaten oder eines Punktes in Ebenencoordinaten gewinnt, je nachdem man darin x, y, z oder u, v und w als Variabele ansieht, bildet die Grundlage für die Dualität der Behandlungsweise, welche sich durch alle übrigen Theile des Werkes hindurchzieht. Nachdem in der folgenden Vorlesung noch die Homogeneïtät der Gleichungsformen durch Einführung der Verhältnisse $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$ für die Punktcoordinaten x, y, z, sowie der Verhältnisse $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$, $\frac{w}{r}$ für die Ebenencoordinaten u, v, w hergestellt ist, knüpft sich hieran in den Vorlesungen VII. und VIII. die Darlegung der Fundamente der zur Untersuchung solcher Gleichungsformen wichtigen Theorie der Determinanten, namentlich in ihrer besonderen Anwendung auf ganze homogene Functionen.

Die Vorlesungen IX. bis XII. beschäftigen sich mit den allgemeinen Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung, und zwar die beiden ersteren bei hauptsächlicher Anwendung der Punktcoordinaten, während in den beiden letzteren die Ebenencoordinaten in den Vordergrund treten. Nächst der analytischen Bestimmung der Oberflächen zweiter Ordnung einerseits durch Punkte, andererseits durch Tangentenebenen, mit den sich hieran knüpfenden Sätzen über gemeinschaftliche Punkte und gemeinschaftliche Tangentenebenen kommt in diesen Abschnitten hauptsächlich die Theorie der Pole und Polarebenen zur Untersuchung und dabei das *Princip der Reciprocität* zur vollen Entwickelung. Der Fall, dass die

Literaturzeitung.

Recensionen.

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, von Dr. OTTO HESSE, ordentlicher Professor an der Universität zu Heidelberg. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1861.

Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Coordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Functionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor Kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studirenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disciplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der im vorigen Jahrgange der Literaturzeitung (S. 44) besprochenen Fiedler'schen Uebertragung des Salmon'schen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Literatur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dass der Verfasser desselben vor Allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Theile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelle's Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft muss Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegendes Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte; er glaubt aber den Lesern dieser Zeitschrift, welchen das Buch noch nicht zu Gesicht gekommen sein sollte, einen nützlichen Dienst zu erweisen, indem er sie durch eine gedrängte Inhaltsangabe auf das reiche darin enthaltene Material aufmerksam macht.

d. i. die Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene durch den rechtwinkligen Durchschnitt zweier confocaler Kegelschnitte, und eines Punktes im Raume durch den rechtwinkligen Durchschnitt dreier confocaler Oberflächen zweiter Ordnung, wobei insbesondere der Gebrauch dieser Theorie in der Integralrechnung dargelegt wird. — Die in der Vorlesung XXIII. enthaltene Theorie der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid findet wegen ihres Zusammenhanges mit den Durchschnittscurven confocaler Oberflächen (den Krümmungscurven) hier ihre geeignete Stelle. Ebenso reiht sich in der folgenden Vorlesung die Theorie der Focalcurven in naturgemässer Weise an durch Ableitung aus den Grenzflächen der confocalen Oberflächen zweiter Ordnung. — Die Vorlesung XXVI. enthält einige höchst interessante algebraische Untersuchungen, die sich an das aus der Hauptachsenbestimmung hervorgehende analytische Kennzeichen der Rotationsoberflächen zweiter Ordnung anknüpfen.

Nachdem in der Vorlesung XXVII. noch die ebenen Schnitte der Oberflächen zweiter Ordnung, mit besonderer Berücksichtigung der Kreisschnitte, einer tiefer eingehenden Untersuchung unterworfen sind, wendet sich der Verfasser in den letzten Vorlesungen zu einigen allgemeinen Betrachtungen über die Krümmungsradien der ebenen Schnitte beliebiger Oberflächen, nebst der sich hieran anlehnenden Theorie der Krümmungscurven. Den Schluss des Werkes bildet ein zweifacher Beweis eines auf drei Systeme von Oberflächen, die sich rechtwinklig durchschneiden, bezüglichen allgemeinen Theoremes von Dupin, von welchem der Satz, dass die drei Systeme confocaler Oberflächen zweiter Ordnung sich in ihren Krümmungcurven schneiden, einen speciellen Fall bildet.

Was den Leserkreis betrifft, für welchen das vorliegende Werk bestimmt ist, so ist derselbe durch die Vorkenntnisse, auf welche der Verfasser seine Untersuchungen gründet, beschränkt. Die Bekanntschaft mit der Differentialrechnung wird durchgängig vorausgesetzt; an einigen Orten ist von Integralformeln Gebrauch gemacht, ja an einer Stelle ist ein Satz benutzt, der in der Variationsrechnung seine Begründung findet. Wenn auch der letztere Satz an dem betreffenden Orte nur die Stelle einer Definition vertritt und daher von seiner Begründung vorläufig abgesehen werden kann, wenn ferner die im Lehrbuche aufgenommenen Integralformeln überschlagen werden können, ohne dass dadurch der Zusammenhang des Ganzen eine wesentliche Beeinträchtigung erleidet, so dürfte doch das Angeführte genügen, den Nachweis zu liefern, dass das Hesse'sche Werk nicht bestimmt sein kann, zu einer ersten Einführung in die analytische Geometrie des Raumes überhaupt benutzt zu werden. Wiewohl der Verfasser von den ersten Elementen dieser Wissenschaft aus in consequentem Fortschreiten zu den Resultaten seiner Untersuchungen gelangt, so widerstrebt einer solchen Anwendung schon der Umstand, dass *dem ganzen* Buche auf das Hilfsmittel der Anschauung Verzicht geleistet ist. Figuren sind nirgends vorhanden; die Gleichung vertritt überall die Stelle der geometrischen Form. — Für Leser dagegen, welche, mit den nöthigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorien erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden. Nicht allein dem Studirenden der Mathematik bietet es eine reiche Fundgrube des Wissens dar; auch der vorgerücktere Leser wird darin vielfache Anregung zu weiter gehenden Untersuchungen finden. Referent bekennt gern, aus der Durchsicht des Buches, sowohl was seine Form als seinen Inhalt betrifft, vielfache Belehrung geschöpft zu haben, und steht nicht an, dasselbe den vorzüglichsten Erscheinungen der neueren mathematischen Literatur zuzuzählen.

O. Fort.

Lehrbuch der Physik für Ober-Gymnasien und Ober-Realschulen. Von S. Subic, Professor der Physik an der Communal-Oberrealschule in Pesth. (Mit Vorbehalt des Uebersetzungsrechtes.) Pesth 1861. Verlag von Gustav Heckenast.

Wie der Herr Verfasser in der Vorrede erwähnt, will er den Schülern von Gymnasien und Realschulen durch den physikalischen Unterricht nicht nur die wissenswerthen Resultate der Physik überliefert wissen, sondern er beabsichtigt auch, ihre geistige Entwickelung zu befördern und dieselbe allseitiger und harmonischer zu machen. Wenn nun auch der im Titel des Buches genannte Schülerkreis nicht zu dem Bedenken Anlass giebt, als könne die vom Herrn Verfasser durchgängig beabsichtigte mathematische Beweismethode bei der grösseren Zuträglichkeit des sprachlichen Studiums für junge Leute weniger erfolgreich wirken, so erscheint es doch bedenklich, dass der Herr Verfasser die mechanische Naturlehre aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeit entwickelt, aus einem Principe, welches in der Hand des Schülers, dem die Methode der Differentialrechnung noch nicht geläufig ist, immer ein unbequemes und unsicheres Instrument bleiben wird. Ref. will es scheinen, als wenn die Deduction der mechanischen Naturlehre aus dem Kräfteparallelogramm, wie sie in unseren besten Lehrbüchern der Physik zu finden ist, dem Schüler diese Wissenschaft auch als harmonisches Ganze erscheinen liesse und ihm Gelegenheit genug gäbe, die Regeln der Logik praktisch zu erlernen. Lagrange hat sich ein unleugbares Verdienst um die Wissenschaft erworben, indem er in seiner *Mécanique analytique* die gesammte Mechanik aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entwickelt hat, allein für ein Schulbuch kann ein solches Verfahren unmöglich gut geheissen werden. Der Herr Verfasser hat sich natürlich darauf beschränken müssen, die mechanische Naturlehre aus einem einzigen Princip abzuleiten; hätte er z. B. die Optik aus der mechanischen Undulationstheorie entwickeln wollen, so würden die mathematischen Schwierigkeiten unübersteiglich geworden sein.

Was die Menge des durch das Buch gebotenen Lehrstoffes anbelangt, so ist namentlich hervorzuheben, dass sich dasselbe vor anderen Lehrbüchern vortheilhaft durch die Vollständigkeit in der mechanischen Naturlehre unterscheidet. Auch die übrigen Abschnitte zeichnen sich durch eine lobenswerthe Vollständigkeit aus; das Streben des Verfassers nach Präcision und Kürze ist nirgends zu verkennen, hat aber leider mehrmals zu Uebereilungen geführt, die der Deutlichkeit schaden. So z. B. muss den Schüler die flüchtige Definition vom magnetischen Meridian S. 221, 14. Zeile v. u. irre machen, desgleichen die Definition von Einheit des Magnetismus S. 223, 9. Zeile v. u. etc. etc. Da nun dergleichen Mangelhaftigkeiten nur einzeln auftreten, so lässt sich von der Benutzung des Buches im Allgemeinen immer noch Erfolg versprechen. Sehr willkommen werden dem lernbegierigen Leser der am Schlusse angefügte Abriss der Astronomie und die physikalischen Aufgaben sein, welche der Herr Verfasser im Anhange gegeben hat.

Die äussere Ausstattung anlangend, ist das Buch in der jetzt üblichen Weise durch zahlreiche in den Text eingedruckte Holzschnitte für den bequemen Gebrauch eingerichtet; Papier und Letterndruck sind vorzüglich.

Dr. Kahl.

Lehre von der Thermometrie, der Pyrometrie, Hygrometrie, Psychrometrie und Barometrie, in ihrer Gesammtheit dargestellt und nach den Quellen, namentlich auch zum Gebrauch für Techniker bearbeitet. Nebst einem Anhange mit praktischen Erläuterungen von Dr. Hermann Gieswald, Oberlehrer an der St. Johannis-Realschule in Danzig. Mit 14 Quarttafeln. Weimar 1861. Verlag, Druck und Lithographie von Bernh. Friedr. Voigt.

Das genannte Werkchen bildet den 71. Band von den bis jetzt erschienenen 250 Bänden des „Neuen Schauplatzes der Künste und Handwerke". Es sind die in dem Titel erwähnten Theile der Physik sehr eingehend behandelt und jedem Abschnitt ein für die praktischen Bedürfnisse ausgewähltes Literaturverzeichniss beigegeben worden. Seiner ganzen Einrichtung nach ist das Buch bestimmt, dem praktischen Mechaniker und angehenden Physiker als Leitfaden bei der Anfertigung und Prüfung der aus dem Titel hervorgehenden Instrumente und bei mit ihrer Hilfe angestellten Messungen zu dienen; wir zweifeln nicht, dass es als solcher sich bewähren wird, umsomehr, als durch Beispiele im Text und im Anhange am Ende des Buches eine wünschenswerthe Deutlichkeit hervorgebracht wird. Wir wünschen dem Schriftchen eine recht ausgedehnte Benutzung.

Dr. Kahl.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 15. Februar 1862.

Periodische Schriften.

stronomische Nachrichten. 57. Band. No. 1. Hamburg, Perthes-Besser & Mauke in Comm. *pr. compl.* 5 Thlr.

ochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redigirt von Heis. 5. Jahrg. 1862. No. 1. Halle, Schmidt. *pr. compl.* 3 Thlr.

itschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Redigirt von Grashof, Werner etc. Jahrgang 1862. Heft 1. Berlin, Gärtner. *pr. compl.* 6 Thlr.

rtschritte der Physik im Jahre 1859. Jahrg. 15. Redigirt von E. Jochmann. Berlin, Reimer. 4⅓ Thlr.

servations, astronomical and meteorological, made at the Radcliffe observatory, Oxford, in the year 1858, *by* Johnson *and* Main. *Vol. XIX.* Oxford, Parker. 5⅓ Thlr.

nales de l'observatoire impérial de Paris, publiées par Le Verrier. *Mémoires, tome VI.* Paris, Mallet-Bachelier. 27 *frcs.*

Reine Mathematik.

hler, H. G., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 8. Aufl. Leipzig, Tauchnitz. 27 Ngr.

se, Z., Factorentafel für alle Zahlen der siebenten Million mit den darin vorkommenden Primzahlen. Hamburg, Perthes-Besser & Mauke. 6 Thlr.

ppe, A., Resultate nebst Andeutungen zur Auflösung der schwierigeren Aufgaben zum Lehrbuch der Elementaralgebra. Frankfurt a. M., Auffarth. 10 Ngr.

hle, H., Leitfaden des mathematischen Unterrichts für die drei oberen Gymnasialklassen. 1. Heft. Danzig, Anhuth. 20 Ngr.

öckel, L., Die Geometrie der Alten in einer Sammlung von 850 Aufgaben. 6. Aufl. Nürnberg, Bauer & Raspe. 18 Ngr.

DECKER, A., Lehrbuch der Geometrie. 1. Theil: Planimetrie. Troppau, Schüler. 16 Ngr.

SPIEKER, TH., Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben. Potsdam, Riegel. 25 Ngr.

WEISSENBORN, H., Die Projection in der Ebene. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 3 Thlr.

Angewandte Mathematik.

KREUTZER, K. J., Anleitung zum Zeichnen der Krystallflächen und Netze. 2. Ausgabe. Wien, Seidel & Sohn. 1 Thlr.

HAGEN, G., Ueber Wellen auf Gewässern von gleichmässiger Tiefe. Berlin, Dümmler. 1 Thlr.

REULAUX, F., Der Constructeur. Ein Handbuch zum Gebrauche beim Maschinenentwerfen für Ingenieure und technische Lehranstalten. Braunschweig, Vieweg. 3 Thlr.

ARMENGAUD & BARRAULT, Der Tascheningenieur. Sammlung von Formeln aus der reinen und angewandten Mathematik, Physik etc. Nach dem Französischen von HERTEL. 2. Auflage. Weimar, Voigt. 1⅙ Thlr.

RANKINE, W., *A manual of civil engineering. With numerous diagrams.* London, Griffin. 16 *sh.*

CHAMBERS, G. F., *A handbook of descriptive and practical astronomy.* London, Murray. 12 *sh.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

[...]tische Geometrie der Ebene. Von Dr. Fr. Grelle, Lehrer an der polytechnischen Schule zu Hannover. Hannover, Fr. Brecke, 1861.

[...]ie vorliegende Schrift besteht aus zwei getrennten Theilen von un[...]r gleichem Umfange; die 1. Hälfte (134 S.) enthält die gewöhnliche [...]tische Geometrie der Ebene, die 2. Hälfte (122 S.) beschäftigt sich [...]en Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die [...]nlehre; dem Ganzen liegt also eine ähnliche Disposition zu Grunde, [...]en bekannten „Aufgaben etc. von Magnus". Ob eine solche Anord[...]des Materials für ein Lehrbuch passt, wollen wir bei der Besprechung [...]weiten Theiles erörtern; zunächst fassen wir den ersten Theil ins [...]

[...]ass entgegengesetzte Lagen durch entgegengesetzte Vorzeichen aus[...]ckt werden, scheint der Verfasser entweder als etwas sich von selbst [...]hendes oder als etwas Conventionelles anzusehen, denn er sagt [...]er nichts weiter als: „man wird sich, um den Gegensatz in den Rich[...]n darzustellen, derjenigen Zeichen bedienen müssen, welche den [...]gen Gegensatz zweier Zahlen anzeigen, d. h. etc." Damit ist freilich [...]othwendigkeit jener Bezeichnung nicht bewiesen, und dies bleibt [...] ein Fehler, denn gerade solche Principien müssen mit aller Ge[...]keit erörtert werden (vergl. Magnus S. 3; Fort, Analyt. Geom. S. 4 [...]. Weiter heisst es: „Substituirt man in eine Function einer Varia[...] etwa in $y=f(x)$, statt x irgend welche reelle Constante, so werden [...]bstitutionresultate ebenfalls constant sein müssen; man erhält z. B. [...] $=\alpha$, $y=f(\alpha)=a$, für $x=\beta$, $y=f(\beta)=b$ etc." und daraus wird [...]er Satz abgeleitet, dass die Gleichung $y=f(x)$ graphisch als Curve [...]stellt werden kann. Referent hält diesen Anfang für wenig geschickt [...]actischer Beziehung; die analytische Geometrie ist nämlich das erste [...]ium, welches Studenten und Techniker hören, und von so jungen [...]n darf man noch keine Bekanntschaft mit dem sehr allgemeinen, und [...] wegen seiner Allgemeinheit gar nicht so leichten Begriffe der

Function verlangen *). Im Gegentheil dient die analytische Geometrie dazu, um diese Abstraction nach und nach zu bilden, und es dürfte daher viel zweckmässiger sein, die geometrische Bedeutung von $y = f(x)$ am Ende statt am Anfange zu erörtern. Will man aber einige einleitende Worte über Zweck und Mittel der analytischen Geometrie sagen, so reicht es vollkommen aus, nur von Gleichungen zwischen x und y zu reden (vergl. Fort, Analyt. Geom. S. 2). Für eben so unpassend hält es Referent, dass auf Seite 4 die Continuität und Discontinuität der Functionen hereingezogen und dabei von unendlich kleinen Grössen gesprochen wird. Ob eine Curve stetig oder unstetig verläuft, zeigt sich bei ihrer Construction ganz von selber; die Continuität oder Discontinuität einer Function dagegen gehört nicht in die analytische Geometrie. Uebrigens ist das vom Verfasser angegebene Criterium für die Continuität, nämlich

$$Lim\,[f(p+\delta) - f(p-\delta)] = 0,$$

nicht einmal ausreichend, wie schon das Beispiel

$$y = \frac{b^3}{(a-x)^2}, \quad p = a$$

zeigt; es muss heissen

$$Lim\,[f(p+\delta) - f(p+\varepsilon)] = 0,$$

wo δ und ε zwei von einander verschiedene verschwindende Grössen bezeichnen.

Die Lehren von der Geraden, dem Kreise und den übrigen Curven zweiten Grades sind sehr ausführlich und mit grosser Deutlichkeit behandelt; dem Calcül fehlt es indessen an Eleganz, Manches ist sogar ziemlich ungeschickt. So z. B. schreibt der Verfasser

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots = Lim\left(\frac{n^3}{3}\right),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots = Lim\left(\frac{n^4}{4}\right),$$

was gar keinen rechten Sinn hat und höchstens auf das triviale Resultat $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = \infty$ etc. führen könnte; wesentlich anders ist die Sache, wenn man correct schreibt

$$Lim\,\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} = \tfrac{1}{3},$$

denn hier kommt man auf einen bestimmten endlichen asymptotischen Werth ($\frac{1}{3}$). Nicht minder unglücklich sind die für obige Formeln gege-

*) Wie gross das Bedürfniss ist, sich das Allgemeine durch Specielles zu veranschaulichen, sieht man bei Repetitionen. Trotz aller sorgfältigen Auseinandersetzung und trotz vieler Beispiele aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik, welche für die Allgemeinheit des Functionsbegriffes gegeben wurden, denkt sich doch der Eine die Function immer als algebraische, der Andere als *trigonometrische etc.*; erst nach einiger Zeit vollendet sich der Klärungsprocess, der zum *reinen Begriffe führt.*

benen Beweise; sie beruhen auf den weitläufigen Summenformeln für $\Sigma(n^3)$, $\Sigma(n^5)$ etc., wobei es immer fraglich bleibt, ob auch allgemein

$$Lim\,\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k}{n^k}=\frac{1}{k+1}$$

sein wird; die letztere Gleichung lässt sich aber sehr einfach aus dem bekannten Divisionsexempel $(a^m-b^m):(a-b)$ herleiten (siehe des Referenten Geometrie des Maasses, Theil I, 3. Aufl. S. 244, oder Algebraische Analysis, 3. Aufl. S. 57). Bei den Asymptoten (nicht Assymptoten) der Hyperbel S. 87 handelt es sich um die Bestimmung der Grenze, gegen welche

$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

für unendliche wachsende x convergirt; der Verfasser benutzt dazu eine Reihenentwickelung, obschon der allgemeine binomische Satz doch erst im nächsten Cursus gelehrt wird; warum nicht einfacher

$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

woraus das Nöthige augenblicklich folgt. Einem ähnlichen Mangel an Geschick begegnet man auf S. 106, wo der Grenzwerth von

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}-a$$

für den Fall bestimmt werden soll, dass a unendlich wächst und $\dfrac{b^2}{a}=p$ constant bleibt; auch hier weiss sich der Verfasser nur mit einer Reihenentwickelung zu helfen, während die identische Gleichung

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}-a=\frac{p}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{p}{a}}\right)\sqrt{1-\dfrac{p}{a}}}$$

sofort zum gesuchten Grenzwerthe ($\frac{1}{2}p$) führt.

Die Linien höherer Grade sind äusserst dürftig (auf 4 Seiten) behandelt; die transcendenten Curven fehlen ganz. Dieser Mangel ist um so schärfer zu rügen, als gerade mehrere dieser Curven (z. B. die Kreisevolvente und die Cycloiden) für den Techniker Wichtigkeit haben.

Der zweite Theil des Werkes enthält Beispiele für die Regeln, nach welchen Tangenten, Normalen, Krümmungshalbmesser, Evoluten, Curvenflächen, Bogenlängen etc. bestimmt werden, wobei die Bekanntschaft mit den nöthigen Formeln, z. E.

$$tang\,\tau=\frac{dy}{dx}=y',\quad \varrho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$S=\int y\,dx,\quad s=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ etc.},$$

fast durchgängig vorausgesetzt ist. Dies Alles findet man besser und ausführlicher bei Magnus, ja fast in jedem grösseren Lehrbuche der Analysis.

denn jene Beispiele sind meistens die gewöhnlichen (Cissoide, Lemniscate Kettenlinie, Cycloide, Spiralen etc.), und der ganze Unterschied betrifft nur die Eintheilung. In den Lehrbüchen stehen nämlich die Eigenschaften der genannten Curven zerstreut unter den verschiedenen Rubriken. Tangenten, Quadratur, Rectification etc.; hier sind die auf jede einzelne Curve bezüglichen Formeln zusammengestellt. Da man voraussetzen muss, dass Jeder, der höhere Analysis gehört und verstanden hat, die obigen Formeln der Reihe nach auf eine gegebene Curve anzuwenden wissen wird, so kann Referent dem zweiten Theile der vorliegenden Schrift weder ein wissenschaftliches, noch ein didactisches Verdienst zuzuerkennen. Uebrigens finden sich auch hier wieder unnütze Weitläufigkeiten und Ungenauigkeiten. Z. B. braucht man zum Beweise des Satzes

$$Lim \frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta^2} = \tfrac{1}{2}$$

keine unendliche Reihe; dass ferner eine Curve convex oder concav gekrümmt ist, je nachdem y'' das positive oder negative Zeichen hat, kann viel einfacher als auf S. 171, und zwar ohne Taylor'schen Satz, nachgewiesen werden. Will man aber letzteren anwenden, so darf man wenigstens den Rest nicht vernachlässigen, wie es der Verfasser regelmässig thut. Ganz verunglückt ist endlich die auf S. 185 gegebene Ableitung von

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Verfasser betrachtet nämlich e^{-x^2} als Grenzwerth von $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$, setzt ferner

$$1-\frac{x^2}{n} = t^2$$

und schliesst

$$2\int_0^\infty \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = 2\sqrt{n}\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= 2\sqrt{n}\,.\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n+1)},$$

woraus dann für $n=\infty$ die obige Gleichung folgen soll. Dagegen ist erstens zu erinnern, dass die Formel

$$e^{-x^2} = Lim\left\{\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\right\}$$

nur so lange gilt, als x einen endlichen bestimmten Werth hat, dass sie aber ihre Bedeutung verliert, wenn x selber unendliche Werthe annehmen, also z. B. $>n$ werden kann, was bei den Integrationsgrenzen $x=0$ und $x=\infty$ sicher eintreten muss. Ferner sind die für t angegebenen Grenzen unrichtig; für $x=\infty$ folgt nämlich $t^2=-\infty$, also $t=\infty\sqrt{-1}$ (statt $t=0$), und selbst wenn man sich x und n gleichseitig unendlich wachsend denkt, so erhält man doch nur $t^2=1-\frac{\infty}{\infty}$, also eine unbestimmte Integrationsgrenze. Das richtige Verfahren ist folgendes. Bezeichnet m irgend eine ganze positive Zahl, so hat man bei positiven z

$$e^z > \left(1+\frac{z}{m}\right)^m,$$

mithin

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^m};$$

die Integration rechter Hand lässt sich mittelst der Substitution

$$1+\frac{x^2}{m}=\frac{1}{u^2} \text{ oder } x=\sqrt{m}\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

ausführen und giebt, wenn $m=n+1$ gesetzt wird,

$$1)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \sqrt{n+1}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Zweitens ist

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx > \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx,$$

und da für jedes echt gebrochene positive z die Ungleichung

$$e^{-z} > \left(1-\frac{z}{n}\right)^n$$

besteht, so hat man auch

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx > \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx;$$

mit Hilfe der Substitution

$$1-\frac{x^2}{n}=v^2 \text{ oder } x=\sqrt{n}\sqrt{1-v^2}$$

lässt sich die Integration rechter Hand ausführen und giebt

$$2)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx > \sqrt{n}\,\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Die Ungleichungen 1) und 2) liefern, wenn zur Abkürzung

$$\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\varphi(n)$$

gesetzt wird,

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{\varphi(n)}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} > \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx > \varphi(n)\sqrt{\frac{n}{2n+1}};$$

bei unendlich wachsenden n ist nach der Wallis'schen Formel $Lim\ \varphi(n) = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$; die Grössen, zwischen denen das Integral liegt, werden gleich und es bleibt

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Nach diesen Erörterungen dürfte kein Zweifel sein, dass es dem Verfasser noch sehr an derjenigen Gewandtheit und Sicherheit in der Führung des strengen Calcüls fehlt, welche heut zu Tage von einem Schriftsteller des analytischen Faches gefordert werden. Auf der anderen Seite will Referent auch nicht verhehlen, dass ein Theil des Buches, namentlich die ersten acht Capitel, durch ihre klare Darstellung Nutzen stiften können. Vorzüglich gut sind die Figuren gezeichnet und in Holz geschnitten; überhaupt ist die typographische Ausstattung eine sehr elegante.

SCHLÖMILCH.

Der Elektromagnetismus. Von Dr. JULIUS DUB. Mit 120 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1861.

Die physikalische Literatur, insofern sie dem Fortschritt der Wissenschaft dient, ist in Deutschland besser organisirt, als in irgend einem anderen Lande. Zuerst haben wir Zeitschriften für einzelne Originalabhandlungen. Ferner besitzen wir eine Jahresschrift, welche eine Uebersicht liefert über Alles, was die Gesammtliteratur aller Völker in einem Jahre Neues bringt, „die Fortschritte der Physik," herausgegeben von der Berliner physikalischen Gesellschaft. Eine solche Zeitschrift besitzt keine andere Nation; sie ist für den Physiker der Gegenwart unentbehrlich. Denn es erscheinen jährlich gegen 1500 physikalische Abhandlungen, welche Keiner alle lesen, noch weniger studiren kann. Es ist deshalb Bedürfniss, die Quintessenz aus Allem wissenschaftlich zusammengestellt und gesichtet zu haben; dies Bedürfniss sucht genannte Zeitschrift zu befriedigen. Nun bleibt noch eine dritte Classe von Schriften übrig, welche die Aufgabe haben, irgend einen Theil der Physik nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft umfassend und gründlich dargestellt zu liefern. Diese Aufgabe soll die Encyclopädie von Karsten lösen; sie wird es aber wohl schwerlich in dem Maasse, wie es einzelne Werke thun. Denn Werke, wie das von Riess über Reibungselektricität, der Galvanismus etc. von Wiedemann und der Elektromagnetismus von Dub sind *Producte nicht* blos langer Studien und gründlicher eigener Forschungen, sonlern auch der liebevollen Hingabe an ein einzelnes Fach; die Bearbeiter ler Encyclopädie aber werden gewählt und ausgesucht, und es ist die Frage, ob immer der Rechte gefunden wird. Diese schreiben aus Auftrag, ene aus innerem Drange.

Wenn Referent es unternimmt, über das Werk von Dub zu bechten, so soll darin keine Anmaassung liegen; vielmehr fühlt er sich gerungen, Andere an der Freude Theil nehmen zu lassen, welche ihm das tudium des genannten Buches gewährt hat. Wer eine solche Schrift ündlich beurtheilen will, muss selbst bedeutende Studien und eigene orschungen in dem betreffenden Fache gemacht haben, und dem Refenten kam, um seinen Mangel in diesem Punkte wenigstens einigeraassen zu decken, das zu Gute, dass fast gleichzeitig zwei Schriften mlichen Inhalts und fast gleichen Werthes erschienen, welche er nun it einander vergleichen konnte, um so sein Urtheil zu schärfen. Der Band nämlich des Werkes von Wiedemann handelt auch über den Elekomagnetismus, in welcher Disciplin bekanntlich Wiedemann ebenfalls deutend gearbeitet hat.

Herr Dub hat seine Aufgabe vortrefflich gelöst. Er behandelt den ektromagnetismus mit Ausschluss seiner praktischen Anwendung und r elektromagnetischen Rotationen, um so ein scharf abgerundetes Gebiet haben, auf welchem er sich mit voller Freiheit bewegt, weshalb auch s Darstellung eine ganz präcise und höchst klare ist. Das Werk ist deslb Allen, welche sich für diesen Zweig der Physik aus irgend einem :unde interessiren und Freude an einer wahrhaft exacten Darstellung ben, sehr zu empfehlen. Es hat noch einen besonderen Reiz für den iysiker, insofern es zeigt, dass auf diesem Gebiete in den letzten 40 Jaha wohl mehr Fortschritte gemacht worden sind, als in irgend einem anren Theile der Physik; denn in dieser Zeit ist die ganze Disciplin entnden, und die Menge des sicher Erforschten, namentlich so weit es von sem Gebiete aus zu erreichen war, ist gewiss grösser, wie die des noch igewissen. Dem grossen Eifer der Gelehrten kam freilich auch das Zunmentreffen vieler glücklicher Umstände zu Hilfe. Alle Verfasser phyalischer Lehrbücher können nach dem Erscheinen der Werke von Dub d Wiedemann vieles, die meisten wohl das Meiste ihres Capitels über ektromagnetismus streichen. Referent hat sich dies Capitel nach dem idium beider Werke in einigen der besseren Lehrbücher angesehen und tschuldigt die Verfasser gern wegen der vielen Schwachheiten, welche h da vorfinden, wenn sie aus den Originalabhandlungen die Verbesseigen für neue Auflagen zusammensuchen; aber nicht, insofern ihnen ie Fortschritte der Physik" ein passendes Mittel dazu bieten.

Herr Dub berücksichtigt zwar die Literatur nicht in dem ausgedehni Maasse, wie Herr Wiedemann; aber keine Hauptarbeit scheint ihm gangen zu sein. Auch die mathematische Begründung ist bei Wiedemann umfassender und tiefer gehend; aber die Darstellung ist bei Dub weit klarer und correcter*). Dub vermeidet fast ganz den höheren Calcül, und das war gewiss passend, um dem Werke eine möglichst weite Verbreitung zu sichern, welche es so sehr verdient.

Die Eintheilung des Werkes ist eine ganz naturgemässe. Im 1. Abschnitte handelt es von der Nadelablenkung durch den Strom und den Apparaten zur Messung derselben; im 2. Abschnitte von den Elektromagneten im Allgemeinen und einigen Sätzen der Induction; im 3. vom magnetischen Sättigungszustande des weichens Eisens; diese Abschnitte bilden die Einleitung. In den vier folgenden Abschnitten wird der Einfluss der Stromstärke, der galvanischen Spirale, des Durchmessers und der Länge der Elektromagneten auf die Kraft derselben behandelt; diese bilden den eigentlichen Kern des Werkes. Im 8. Abschnitte wird die Form der Elektromagneten und Anker, im 9. der remanente Magnetismus und im 10. der Einfluss der Zeit auf die elektromagnetische Kraft besprochen; sie enthalten Ergänzungen zu den drei vorigen, welche hier unter besonderen Ueberschriften behandelt sind, um den Vortrag dort nicht zu stören. Im 11. werden die Gesetze der Anwendung des Elektromagnetismus festgestellt und der 12. Abschnitt enthält eine Recapitulation des Ganzen.

Jeder Abschnitt des Buches ist eine gründliche Abhandlung historisch-kritischen Inhalts in echt wissenschaftlicher Darstellung. An den geeigneten Stellen finden sich die mathematischen Entwickelungen und theoretischen Betrachtungen eingeflochten. Letztere sind auch öfter von Anderen entlehnt und werden dann in den Worten der Verfasser gegeben, denen Herr Dub seine Ansichten anknüpft. Durch diese theoretischen Excurse erhält das Ganze Abrundung und Klarheit, sowie durch die mathematischen Entwickelungen Festigkeit und Eleganz. Am Ende jedes Abschnittes sind die Resultate in wenige Sätze zusammengedrängt; jedoch liefert der Schlussabschnitt keine Wiederholung dieser Sätze, sondern eine selbstständige, entwickelnde Darstellung des Inhalts des ganzen Buches.

---

*) Wer in diesem Urtheil eine Härte gegen Herrn Wiedemann, der sonst in seinem Werke als ein recht bedeutender und höchst fleissiger Physiker hervortritt, finden möchte, den bitten wir, Folgendes zu berücksichtigen. Wer über rein wissenschaftliche Gegenstände schreiben will, muss doch gewiss, und namentlich in exacten Wissenschaften, die Bedeutung der Wörter, welche er gebraucht, genau kennen. Herr W. aber weiss entweder den Unterschied zwischen perpendiculär (senkrecht) und vertical (lothrecht) nicht, oder er ist zu nachlässig in der Darstellung. Denn, um nur einige Beispiele zu nennen, es findet sich S. 68, Z. 1 v. u. senkrecht für lothrecht; S. 71, Z. 5 v. u. vertical für perpendiculär; S. 86, Z. 3 v. u. vertical für perpendiculär; S. 87, Z. 8 v. u. vertical für perpendiculär; S. 93, Z. 9–10 v. o. vertical für perpendiculär; ebenso Z. 15 und 23 v. o. auf derselben Seite und S. 100, Z. 9 v. u.; S. 101, Z. 15 v. o. senkrecht für lothrecht; ebenso S. 288, Z. 8—9 v. u. und S. 293, Z. 11 v. u., und das sind die Beispiele einer Verwechslung gedachter Ausdrücke lange nicht alle. Andere Nachlässigkeiten finden sich z. B. S. 71, Z. 2 v. o., wo das erste „in“ gestrichen werden muss; ferner S. 299, Z. 10—11 v. o., wo zwei Mal „Magnetismus des Stabes“ in demselben Satze steht. Auch die Ueberschriften S. 284 und S. 323 sind schleppend und schief.

Am Schlusse des 7. Abschnittes sind die Resultate der vier Hauptabschnitte in mathematischen Formeln ausgesprochen, welche hier stehen mögen. Zur Erläuterung sei nur noch bemerkt, dass man unter dem „erregten Magnetismus" die Gesammtmenge desselben, unter „freiem" dagegen nur den nach aussen, in die Entfernung wirkenden Theil versteht. „Tragkraft" ist die Anziehung in Berührung, „Anziehung" dagegen die Anziehung in kleinen Entfernungen, bei Zwischenschiebung einer oder mehrerer Papierdicken zwischen Magnet und Anker. Eine eingehendere Erörterung dieser Ausdrücke würde hier zu weit führen.

Bedeutet also E den in jedem Querschnitte eines Magneten erregten, F den freien Magnetismus der Erdflächen, A die Anziehung eines geraden Elektromagneten und H die eines Hufeisens; ferner s die Stromstärke, w die Windungszahl der Spirale, d den Durchmesser und l die Länge des Kernes, so hat man:

1) $$E = s \,.\, w \,.\, \sqrt{dl}.$$

Derselbe Ausdruck gilt mit einem constanten Factor für den freien Magnetismus der Endflächen.

Bedeutet ferner k den kürzeren Theil des geraden Elektromagneten, so ist der in jedem Querschnitt erregte Magnetismus (E) und die Anziehung (A):

2) $$E = s \,.\, w \,.\, \sqrt{dk};\quad A = E^2 = s^2 \,.\, w^2 \,.\, d \,.\, k.$$

Bezeichnet man mit F_1 den freien Magnetismus an verschiedenen Stellen der Länge des Magneten, so erhält man:

3) $$F_1 = s \,.\, w \,.\, \sqrt{d}\,(\sqrt{l} - \sqrt{k}).$$

Versteht man unter A_1 die Anziehung eines Ankers, wenn er auf verschiedenen Stellen der Länge der Elektromagneten gesetzt wird, so erhält man:

4) $$A_1 = s^2 \,.\, w^2 \,.\, d\,(l - 2\sqrt{lk} + k).$$

Endlich ergiebt sich als Anziehung der Hufeisen:

5) $$H = s^2 \,.\, w^2 \,.\, d.$$

Zur Erzielung dieser Resultate sind die jahrelangen, angestrengten Bemühungen vieler bedeutender Physiker erforderlich gewesen. Manche Arbeiten derselben scheinen jenen Resultaten zu widersprechen; indess hat Herr Dub, ausser seinen vielen eigenen experimentellen Untersuchungen, auch das Verdienst sich um die Wissenschaft erworben, solche zweifelhaften Arbeiten durch eine sorgfältige, oft sehr mühsame Kritik geläutert zu haben, so dass sie dadurch wichtige Stützen der Theorie geworden. Herr Wiedemann wirft ihm zwar an einer Stelle seines Werkes Willkürlichkeit bei dieser Kritik vor; diesen Vorwurf findet Ref. unbegründet*).

*) Wenn Herr Wiedemann in seinem Werke den Elektromagnetismus von Dub mehrfach citirt, wie konnten denn beide Werke fast gleichzeitig erscheinen? Der Widerspruch löst sich durch folgende Bemerkung. Beide Werke tragen auf dem Titel

Ein Deutscher muss sich beim Studium des Dub'schen Buches noch besonders befriedigt fühlen, indem er sieht, dass auf diesem Gebiete bei Weitem am meisten von Deutschen geleistet worden. W. Weber, Gauss, Lenz und Jacobi, J. Müller, Schweigger, Poggendorff, Hankel, Dove, Magnus, Moser, Plücker, Koosen, Werthheim, Ohm, Fechner, Sinsteden, Hipp, Beetz, Dub, Wiedemann, Frick, Du Bois Reymond, Buff und Zaminer, v. Feilitsch, Stöhrer etc. haben mehr oder weniger wichtige Beiträge geliefert, wogegen die Zahl der Ausländer nur gering ist.

Ein kleines Sündenregister können wir Herrn Dub bei aller Anerkennung doch auch nicht vorenthalten. Er hat zwar gut corrigirt, doch sind noch einige Fehler stehen geblieben, so z. B. S. 81, Z. 5 v. o. indicirt für inducirt; S. 157, Z. 11 v. o. ist hinter „bedeckt“ das Komma ausgelassen, wodurch Unsinn entsteht; S. 110, Z. 7 v. o. Elektrometers statt Elektromotors; S. 119, Z. 7 v. o. muss merkbarer für merkbar stehen; S. 163, Z. 19 v. u. muss wohl 12″ statt 12′ stehen. Anderes sind wahrscheinlich keine Druck-, sondern Schreibfehler, so z. B. hätte doch S. 79, Z. 20 v. u. das Citat von Lenz und Jacobi angedeutet stehen sollen, welches später zwei Mal, S. 198 und S. 245, abgedruckt ist; S. 74 fehlt hinter dem Worte „Anzahl“ das Wort „Windungen“; S. 183, Z. 5 u. 7 v. o. muss lothrecht (vertical) für senkrecht stehen; S. 398 ist 12 schon in 11 enthalten und 15 ist unbestimmt.

Des Buches Ausstattung entspricht dem vortrefflichen Inhalte.

F. Dellmann.

Lehrbuch der Experimentalphysik. Von Dr. Edmund Külp, Professor der Physik und Mathematik an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt. In 4 Bänden. 3. Band: Die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus. Mit 100 Abbildungen im Text. Darmstadt 1862. Verlag von Johann Philipp Diehl.

Der vorliegende 3. Band des Lehrbuchs von Külp, von dem bereits die beiden ersten Bände in der Zeitschrift besprochen wurden, besteht aus zwei Abschnitten. Der 1. Abschnitt enthält die Lehre von der Reibungselektricität, der atmosphärischen Elektricität, von dem Galvanismus und von dem Magnetismus. Der 2. Abschnitt beschäftigt sich mit dem Elektromagnetismus, der Elektrodynamik, der Inductionselektricität, der Thermoelektricität, dem Diamagnetismus und den bemerkenswerthesten elektrophysiologischen Erscheinungen. Wie die früher besprochenen Bände zeichnet sich ebenso der 3. Band des Külp'schen Werkes durch die gleichmässige und vollständige Berücksichtigung aller elektrischen und magne-

---

die Jahreszahl 1861, und dennoch erschien das Dub'sche Werk etwa ein Jahr früher. Dadurch ist es Herrn W. möglich gewesen, bei der Ausarbeitung seines Buches auf *den letzten sechs* Bogen (so weit es erschienen) das Dub'sche Werk zu benutzen.

tischen Erscheinungen, sowie durch die richtige und gewandte Herleitung der Lehrsätze aus den angeführten Experimenten aus. Nimmt nun das Lehrbuch durch Auswahl, Quantität und Behandlung des Stoffes für sich ein, so gefällt es nicht minder durch die elegante äussere Ausstattung: das Papier ist vortrefflich, der Druck lässt nichts zu wünschen übrig und die Holzschnitte zeichnen sich ganz vorzüglich durch Sauberkeit in der Ausführung aus. Auch der 3. Band empfiehlt sich daher allem Vorigen gemäss als recht geeignet zum Gebrauch beim physikalischen Unterricht und zum Selbststudium. Dr. Kahl.

Grundzüge der atomistischen Wärmetheorie, mit besonderer Rücksicht auf die specifische Wärme der Körper. Von Dr. Zernikow. Erfurt, Carl Villaret. 1862. 8. 173 S.

Der bereits durch eine Theorie der Dampfmaschinen (Braunschweig 1857) bekannte Verfasser unternimmt es, gegenüber der gegenwärtig fast allgemein angenommenen mechanischen Wärmetheorie eine Darstellung der theoretischen Wärmelehre zu geben, welche von der Hypothese eines Wärmestoffs von unveränderlicher Quantität ausgeht. Ohne uns zunächst durch die Form, in welcher diese „atomistische" Wärmetheorie vom Verfasser vorgetragen wird, abschrecken zu lassen, heben wir die wesentlichen Grundsätze derselben und diejenigen Resultate, welche für die Vergleichung mit der mechanischen Wärmetheorie von Interesse sind, hervor.

Der Verfasser denkt sich, wie bereits vielfach geschehen ist, die Materie zusammengesetzt aus ponderabeln Atomkernen, umgeben von Aetherhüllen, welche durch Anziehung um die Kerne verdichtet sind. Die in dem Körper enthaltene Wärmemenge ist der Quantität des vorhandenen Aethers proportional. Die materiellen Atomkerne ziehen sich gegenseitig an, die Aethertheilchen stossen einander ab und zwar ist die Spannung des Aethers in jedem Punkte seiner Dichtigkeit proportional. Dichtigkeit und Spannung nehmen mit der Entfernung von dem den Aether anziehenden Atomkern ab. Der Spannung an der äusseren Oberfläche der Aetherhülle entspricht der äussere Druck, unter welchem der Körper steht. Die an der Oberfläche des Atomkernes stattfindende Aetherspannung ist die „absolute Temperatur". Das Volumen des ganzen Körpers ist wesentlich von dem Volumen der an einander grenzenden Aetherhüllen bedingt. Soll daher das Volumen zunehmen, während die Temperatur, also die Spannung der Dichte des Aethers an der Oberfläche der Atomkerne, constant bleibt, so muss dem Körper eine der Volumenvergrösserung entsprechende Aether- oder Wärmemenge zugeführt werden. Diese Wärme heisst „latente oder gebundene Wärme". Bei der Volumenzunahme kann nun eine äussere Arbeit geleistet werden, welche der gebundenen Wärmemenge proportional ist. Dieselbe Wärmemenge wird aber auch gebunden, wenn die Expansion ohne Arbeitsleistung erfolgt; der Satz der Aequivalenz der Arbeit und Wärme lautet also so, dass eine gewisse Arbeitsmenge geleistet werden kann, wenn eine gewisse Wärmemenge gebunden wird (S. 12—13). Die Wärmemenge, welche einem Körper zugeführt werden muss, um denselben aus einem bestimmten Anfangszustand in einen bestimmten Endzustand überzuführen, ist daher immer dieselbe und von der Art der Ueberführung unabhängig. Die Herleitung der Fundamentalgleichung 3) auf Seite 36

$$A=\frac{\partial Y}{\partial p}-\frac{\partial X}{\partial v}$$

beruht demnach auf einem einfachen Rechenfehler. Nach der Voraussetzung des Verfassers ist nämlich die zugeführte Wärmemenge

$$dQ=X\,dp+Y\,dv$$

ein vollständiges Differential, und nicht, wie der Verfasser annimmt,

$$dU=X\,dp+(Y-Ap)\,dv,$$

welche letztere Annahme dem Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie entsprechen würde, wonach die Wärmemenge $Ap\,dv$ zur Leistung äusserer Arbeit verbraucht wird.

Es ist mithin nach der Theorie des Verfassers

$$\frac{\partial Y}{\partial p}-\frac{\partial X}{\partial v}=0$$

und die Gleichung 3) nebst allen aus derselben in den folgenden Capiteln gezogenen Folgerungen, die Bestimmung des Wärmeäquivalents u. s. w. sind falsch.

Von besonderem Interesse wird es sein, zu untersuchen, wie sich die Theorie des Herrn Zernikow denjenigen Punkten gegenüber verhält, welche die Mehrzahl der Physiker gegenwärtig zum Aufgeben der stofflichen und zur Annahme der mechanischen Wärmetheorie bestimmt haben. Da die latente Wärme in der Theorie des Verfassers im Allgemeinen an die Stelle der verbrauchten Wärme tritt, so stimmen im Ganzen die Resultate beider Theorien überein, wenn die Verminderung mit Arbeitsleistung erfolgt, weichen hingegen von einander ab, wenn dieselbe ohne Arbeitsleistung stattfindet.

Für den Joule'schen Fundamentalversuch bemüht sich der Verfasser Seite 45 eine gezwungene Erklärung zu geben, indem er zunächst annimmt, dass vor der Herstellung der Verbindung beider Recipienten der leere Raum bereits vor den Gefässwänden Aether, d. h. Wärme aufgenommen habe, was also auf die selbst von der stofflichen Wärmetheorie längst widerlegte Annahme einer Wärmecapacität des leeren Raumes zurückführen würde, und da ihm selbst diese Erklärung nicht zu genügen scheint, nimmt er dann eine weitere Wärmeaufnahme von den Gefässwänden nach dem Einströmen des Gases an. Dem Verfasser scheint nicht *bekannt gewesen* zu sein, dass von Joule auf calorimetrischem Wege nachgewiesen worden ist, dass bei der Expansion ohne Arbeitsleistung kein Wärmeverbrauch stattfindet, indem gerade der die comprimirte Luft enthaltende Recipient aus dem umgebenden Wasser eine gewisse Wärmemenge aufnimmt, während der andere, anfänglich luftleere eine eben so grosse Wärmemenge an das umgebende Wasser abgiebt.

Die Reibungswärme erklärt der Verfasser Seite 21 nach Art der alten Theorie durch die Verdichtung der geriebenen Körper und Compression der zwischen denselben befindlichen Luft. Der Davy'sche Fundamentalversuch wird Seite 22 mit den Worten erwähnt: „Eis enthält noch Wärme; zwar gegen einander geriebene Eisstücke müssen daher Wärme entwickeln — sie können nach Davy dadurch zum Schmelzen gebracht werden.“ Der Verfasser scheint sich die Gründe der Beweiskraft des Davy'schen Versuches nicht hinreichend vergegenwärtigt zu haben. Der Versuch wurde bekanntlich im luftleeren Raume angestellt. Die specifische Wärme des flüssigen Wassers aber ist grösser, als die des festen Eises, was die stoffliche Wärmetheorie schon zur Erklärung der latenten Schmelzwärme annehmen muss.

Sehen wir ferner, was der Verfasser (S. 26) über Wärmestrahlung sagt. Während die Leitung der Wärme in einem Abfliessen des Aethers von einem materiellen Atomkern zu dem benachbarten besteht, wird bei der Strahlung „die Spannung des Aethers von einem Punkte aus fortgepflanzt, ohne dass die Temperatur der einzelnen Theile des Gases geändert wird“. Wie man sich diese Fortpflanzung der Spannung des Aethers ohne den Aether selbst denken soll, bleibt im Unklaren. An ein Abfliessen des Aethers in anderer Weise wie bei der Leitung kann der Verfasser doch wohl nicht gedacht haben. Nach der durchgängigen Analogie der Erscheinungen der Fortpflanzung, Interferenz, Polarisation u. s. w. der Wärme- und Lichtstrahlen wird derselbe nicht umhin können, die Fortpflanzung der strahlenden Wärme durch transversale Aetherschwingungen anzunehmen. Woher kommt nun aber die Temperaturerhöhung des bestrahlten Körpers, da die Temperatur oder, was nach dem Verfasser dasselbe ist, die Spannung der Aetherhüllen nicht vergrössert werden kann, ohne Zuführung von Wärmestoff, eine Wellenbewegung aber weder nicht vorhandenen Wärmestoff erzeugen, noch die Quantität des vorhandenen vergrössern kann?

Aus dem Capitel über den Wasserdampf heben wir das von der mechanischen Wärmetheorie abweichende Resultat (S. 68) hervor, wonach bei Compression gesättigten Dampfes Wasser niedergeschlagen werden, bei der Expansion hingegen der gesättigte Dampf in überhitzten übergehen soll, gleichviel ob er dabei Arbeit leistet oder nicht. Clausius hat bekanntlich aus der mechanischen Wärmetheorie für den Fall, dass die Expansion mit Arbeitsleistung erfolgt, das entgegengesetzte Resultat gefolgert. Die bekannte Erfahrung, dass der aus dem Ventil eines Hochdruckdampfkessels strömende Dampf trocken ist, würde aus beiden Theorien folgen. Gegen die von Clausius gegebene Erklärung dieser Erscheinung macht der Verfasser zwar Einwendungen, erstens die, dass der in die Atmosphäre strömende Dampf doch Arbeit leiste, indem er den Luftdruck überwinde, und zweitens, dass Clausius die Arbeit vernachlässige, welche der Dampf zu seiner eigenen Bewegung verbraucht.

Nachdem wir im Bisherigen die atomistische mit der mechanischen Wärmetheorie in einigen wesentlichen Punkten verglichen, würde es uns obliegen, auf die Darstellung des Verfassers im Einzelnen einzugehen. Leider aber bietet sich hier der Kritik eine solche Fülle von Stoff, dass wir keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit machen, sondern nur einzelne charakteristische Stellen hervorheben können.

Seite 4 finden wir die wenig plausible Annahme, dass die anziehende Kraft der Körperatome gegen den Aether unabhängig ist von der Masse des anziehenden Körpers.

Seite 5 findet der Verfasser, dass die Wirkung der Anziehung eines Körperatoms gegen den Aether nach der dritten Potenz der Entfernung abnimmt und folgert daraus — nach welchen mechanischen Principien? — dass die Spannung des Aethers ebenfalls nach der dritten Potenz der Entfernung vom Anziehungsmittelpunkt des Körperatoms abnehmen müsse. — Was versteht der Verfasser Seite 24 unter einem „Druck rechtwinklig zu jedem Punkte des Volumens?“ Der Beweis des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes S. 28—29 hätte füglich erspart werden können, da dem Aether, dessen Volumen allein das Volumen des Gases bedingt, *ex hypothesi* schon (S. 9) die Eigenschaft beigelegt ist, dass der Druck der Dichte proportional sei, und da die Temperatur Seite 6 mit Hilfe des Gay-Lussac'schen Gesetzes definirt ist. Auf Seite 35 ist davon die Rede, dass die Spannung von der Oberfläche des Atomkernes bis zur Oberfläche der Aetherhülle nach irgend einer „Function des Volumens“ abnehme — soll wohl heissen: des Abstandes vom Mittelpunkt des Atomkernes — doch werden weiterhin S. 38 sogar Integrationen dieser Function des Volumens vorgenommen. Die Formel, welche S. 38—39 als identisch mit dem von Carnot aufgestellten Princip bezeichnet wird, hat mit diesem in der That nicht das Geringste gemein, indem der Carnot'sche Satz sich auf die Wärmemenge bezieht, welche aus einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niederer Temperatur in einen Kreisprocess übergeführt wird, bei welchem der vermittelnde Körper keine bleibenden Veränderungen erleidet, beim Verfasser hingegen von der in dem vermittelnden Körper selbst enthaltenen Wärme die Rede ist, welcher sich ausdehnt und dabei seine Temperatur erniedrigt, also in einen bleibend veränderten Zustand übergeht. Gegen den „unumstösslichen“ Grundsatz, *dass die Quantität* der überhaupt vorhandenen Wärme eine unveränderliche Grösse sei, hat übrigens auch Carnot begründete Zweifel geäussert, wiewohl er denselben in seiner Darstellung beibehalten hat.

Im zweiten Theil der Schrift des Verfassers findet man eine Darstellung der elementaren Grundsätze der Stöchiometrie vereinigt mit den aus der „atomistischen Wärmetheorie" sich ergebenden Folgerungen über den Zusammenhang zwischen der Wärmecapacität, dem Atomvolumen und der chemischen Zusammensetzung der Körper. Eine nähere Beleuchtung dieses Theiles möge nach dem Vorhergehenden dem Berichterstatter erlassen bleiben.

E. Jochmann.

Ueber die Aufgabe, die Methode und das Ziel der physikalischen Forschung; nebst einem Anhange: Einige Beziehungen der Naturwissenschaften zum socialen Leben und zur Philosophie und Theologie. Von Dr. C. F. Dietzel. (Im Programm des Gymnasiums und der Realschule in Zittau 1862).

Der Verfasser legt in der 44 Quartseiten zählenden Abhandlung seinen Berufsgenossen die Früchte eines eifrigen Studiums der Geschichte der inductiven Wissenschaften vor, sowie seine Ideen über die Beziehung der Naturwissenschaften zum socialen Leben, zur Philosophie und Theologie. Demjenigen, der den Verfasser und die Geschichte der Naturwissenschaften kennt, wird das Urtheil nicht unerwartet kommen, dass die eigentliche Abhandlung, die sich über die Aufgabe, die Methode und das Ziel der physikalischen Forschung verbreitet, namentlich durch die Hände des Verfassers zu einer sehr interessanten und lehrreichen Lectüre geworden ist. Im Anhange der Abhandlung weist der Verfasser nach, dass die Selbstüberhebung, welche einzelne naturwissenschaftliche Gelehrte zu religiösem Unglauben geführt hat, keineswegs in der Methode der Naturwissenschaften begründet liegt, und zeigt, wie die letzteren neben ihrem Gebiet der sinnenfälligen Dinge das grosse Gebiet der Ideenwelt erblicken, welches sie eben ihrer Bescheidenheit und Wahrheitsliebe wegen nicht berühren. Wir unterlassen nicht, auf die gediegene Abhandlung aufmerksam zu machen und wünschen von Herzen, dass sie dem nur allzu häufigen Loose von Programmenabhandlungen entgehe, unbeachtet zu bleiben; vielleicht bewahrt sie davor der allgemein interessante Gegenstand, sowie die verständliche, von allem speciellen wissenschaftlichen Apparat freie Deduction.

Dr. Kahl.

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch von Dr. Oscar Schlömilch, Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der königl. sächs. polytechnischen Schule zu Dresden. 2. Theil: Geometrie des

Raumes. Zweite verbesserte Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Eisenach, Verlag von Friedr. Baerecke (Hofbuchhandlung). 8. 1862.

Vorrede zur zweiten Auflage. Obschon das vorliegende Lehrbuch seit einer Reihe von Jahren in mehreren Schulen eingeführt ist, so sind mir doch nur sehr wenige Bemerkungen gegen die Auswahl und Anordnung des Materiales zugekommen, und ich hatte daher keinen Grund, in dieser Beziehung wesentliche Aenderungen vorzunehmen. Dagegen habe ich auf Wunsch mehrerer erfahrener Schulmänner die Deductionen des ersten Capitels strenger gefasst und durch eine grössere Anzahl von Figuren anschaulicher zu machen gesucht. Ferner wurde in §. 10 Steiner's Beweis für den Euler'schen Satz von den Polyedern durch den von August gegebenen Beweis ersetzt, welcher an Einfachheit und Anschaulichkeit jedem anderen überlegen sein dürfte. Auch das Prismatoid und dessen Inhaltsbestimmung sind aufgenommen worden. Eine bedeutende Umarbeitung hat das Capitel von den Kegelschnitten erfahren. Die stereometrische Bedeutung der Directrix veranlasste mich nämlich, die allgemeinen Eigenschaften aller Kegelschnitte voranzustellen (§. 29) und erst nachher die Parabel, Ellipse und Hyperbel einzeln abzuhandeln, wodurch die ganze Lehre an Einfachheit und Uebersichtlichkeit wesentlich gewinnt. Bei der Hyperbel habe ich die Eigenschaften der Asymptoten weiter als früher entwickelt und daran die Quadratur der Hyperbel geknüpft.

Dresden, im April 1862. SCHLÖMILCH.

Handbuch der algebraischen Analysis von Dr. OSCAR SCHLÖMILCH, Professor der höheren Mathematik an der königl. sächs. polytechnischen Schule zu Dresden. Dritte verbesserte und durch einen Anhang vermehrte Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Jena, Druck und Verlag von Fr. Frommann. 8. 1862.

Vorrede zur dritten Auflage. Als ich in der Vorrede zur zweiten Auflage erklärte, dass ich der sogenannten algebraischen Analysis keine eigentliche wissenschaftliche Berechtigung, sondern nur das Interesse zugestehen könne, welches die genauere Bearbeitung jedes bestimmt abgegrenzten Wissensgebietes für sich hat, glaubte ich nicht an die Möglichkeit einer ferneren Auflage des vorliegendes Werkes. Wenn gleichwohl eine dritte Auflage nothwendig geworden ist, so scheint dies zu beweisen, dass jenes Interesse sich über einen grösseren Kreis von Lesern erstreckt, und es hat mich diese Thatsache ermuthigt, noch einmal Hand ans Werk zu legen.

Die Anordnung des Stoffes und der allgemeine Gedankengang sind *ungestört geblieben*; um aber eine kürzere und präcisere Darstellung zu gewinnen und um gleichzeitig den Fortschritten der Wissenschaft Rechnung zu tragen, habe ich die ersten zwölf Capitel fast gänzlich umgearbeitet. Das nächste Zeugniss hiervon giebt Capitel II, worin die hauptsächlichsten Grenzwerthe auf einfachere und elegantere Weise als früher abgeleitet sind. Die geometrischen Anwendungen der Lehre von den Grenzwerthen (Quadraturen und Cubaturen) wurden auf den Begriff des mittleren Werthes einer Function gegründet (Capitel IV), welcher seine Bedeutung auch dann noch behält, wenn man jene Anwendungen weglassen will. In der Lehre von der Convervenz der unendlichen Reihen sind die §§. 27, 29 und 30 hinzugekommen, womit diese Theorie zu einem gewissen Abschlusse gelangt. Bei den unendlichen Reihen in Capitel VI—IX habe ich überall eine Restuntersuchung vorgenommen, einerseits um für die numerische Summirung die Fehlergrenze zu bestimmen, andererseits um nachherige Grenzenübergänge mit Sicherheit ausführen zu können, denn bekanntlich ist der Grenzwerth von der Summe einer unendlichen Reihe nicht immer identisch mit der Summe von den Grenzwerthen der einzelnen Summanden. Dass hierdurch manche neue Betrachtungsweise nothwendig wurde (wie z. B. in den §§. 45 und 46), versteht sich von selbst; hoffentlich sind mit diesen und einigen weiteren Aenderungen in den Capiteln X und XI alle Anforderungen an die wissenschaftliche Strenge befriedigt.

Auf Wunsch mehrerer erfahrener Freunde habe ich anhangsweise die Theorie der höheren Gleichungen so weit entwickelt, als dies auf elementarem Wege geschehen konnte; ich will nur wünschen, dass mein Buch dadurch an Brauchbarkeit gewonnen haben möge.

Dresden, im October 1861. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 15. Februar bis 1. April 1862.

Periodische Schriften.

Monatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1862. 1. Heft. Berlin, Dümmler in Comm. 2 Thlr.

Abhandlungen der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. 4. Band. 1. Lieferung. Frankfurt a. M., Brönner. 1 Thlr. 18 Ngr.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1861. Bern, Huber. 1 Thlr. 8 Ngr.

Verhandlungen der 36. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Speier, vom 17.—24. September 1861. Herausgegeben von G. Schnauss und L. Geenen. Heidelberg, Winter. 16 Ngr.

— — Festgabe dazu. 16 Ngr.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben von Poggendorff. Jahrg. 1862. No. 1. Leipzig, Barth. *pro compl.* 9⅓ Thlr.

Bremiker, C., Nautisches Jahrbuch, oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1864. Berlin, Reimer. ½ Thlr.

Reine Mathematik.

Helmes, J., Die Elementar-Mathematik streng wissenschaftlich dargestellt. 1. Band: Arithmetik und Algebra. Hannover, Hahn. 1 Thlr. 22 Ngr.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 2. Bd. 2. Abth.: Stereometrie. Ebendaselbst. 21 Ngr.

Spitzer, S., Studien über die Integration linearer Gleichungen. 2. Fortsetzung. Wien, Gerold's Sohn. 1 Thlr. 4 Ngr.

Kummer, E. E., Zwei neue Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist. Berlin, Dümmler in Comm. 14 Ngr.

Matzek, F., Siebenstellige gemeine Logarithmen. Stereotypausgabe. Brünn, Winiker. 1 Thlr.

Angewandte Mathematik.

Wild, A., Probleme der Statistik im Zusammenhange mit der politischen Rechnungswissenschaft etc. München, Fleischmann's Separat-Conto. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Wiegand, Cornelius und v. Schmöger, Mathematische und physikalische Geographie nebst Chronologie. 1. Theil: Mathematische Geographie. 5. Aufl. Halle, Schmidt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Förster, W., Joh. Keppler und die Harmonie der Sphären. Ein Vortrag. Berlin, Dümmler. 8 Ngr.

Hunäus, G. C. K., Die geometrischen Instrumente der praktischen Geometrie, deren Theorie, Beschreibung und Gebrauch. 1. Heft. Hannover, Rümpler. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Schellen, H., Die Schule der Elementar-Mechanik und Maschinenlehre. Zum Theil nach Delaunay, *Cours élément. de mécan.* frei bearb. 1. und 2. Lief. Braunschweig, Vieweg. à $\frac{2}{3}$ Thlr.

Schrader, W., Elemente der Mechanik und Maschinenlehre. 2. Thl.: Hydromechanik. Halle, Schrödel & Simon. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Klose, H. A., Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanschen. Hannover, Rümpler. 24 Ngr.

Rankine, W. M., *Manual of civil engineering. 2. Vol. London, Griffin.* 16 *sh.* 6 *d.*

Roger, E., *Recherches sur le système du monde. Paris, Mallet-Bachelier.* 5 *frcs.*

Physik.

Emsmann, A. H., Elemente der Physik zum Gebrauche für die oberen Classen höherer Schulen. Leipzig, O. Wigand. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Dub, J., Ueber den Einfluss der Dimensionen des Eisenkernes auf die Intensität der Elektromagnete. Eine Experimental-Untersuchung. Berlin, Springer. 8 Ngr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1861.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Aerodynamik.

1. *Sur les lois mathématiques de l'écoulement et de la détente de la vapeur.* Curvallo. *Compt rend. LII,* 683, 801.

Analytische Geometrie der Ebene.

2. Ueber einige algebraische Curven, von denen die Lemniscate ein specieller Fall ist. Tortolini. Zeitschr. Math. Phys. VI, 209.
3. Zur Geometrie der Lage. Sattelberger. Zeitschr. Math. Phys. VI, 81.
4. Ueber die Entfernung der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 325.
5. *Sur une courbe du troisième degré, dont la construction dépend d'une parabole.* *Taratte.* *N. ann. math.* XX, 18. — *Housel. ibid.* 142.
6. *Trouver le lieu du point dans un plan d'où deux cotés opposés d'un quadrilatère sont vus sons le même angle. Terquem. N. ann. math. XX,* 44. — *Faure. ibid.* 212.
7. Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. Siebeck. Crelle LIX, 173. [Vergl. Bd. V, No. 248.]
8. Ueber die Bestimmung der Constanten bei der Kettenlinie. Loeffler. Grun. Archiv XXXVI, 323.

   Vergl. Kegelschnitte, Trisection des Winkels.

Analytische Geometrie des Raumes.

9. Ueber Fusspunktcurven und Fusspunktflächen. Magener. Grun. Archiv XXXVI, 375. — Bacaloglo. *ibid.* 379. [Vergl. Bd. VI, No. 248.]
10. Ueber reciproke Linien und Flächen. Bacaloglo. Grun. Archiv. XXXVI, 1.
11. *Note sur les droites normales à une surface. Ossian Bonnet. Compt. rend. LII,* 1081.
12. Gnomonik für jede beliebige Ebene im Raume mit Rücksicht auf die Anwendung der neueren Geometrie zur Ausführung gnomonischer Constructionen. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 101.
13. *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes. Kummer. N. ann. math. XX,* 72. [Vergl. Bd. VI, No. 241.]
14. *Propriétés d'un système de droites menées par tous les points de l'espace suivant une loi quelconque. Abel Transon. Compt. rend. LII,* 245. — *Chasles. ibid.* 1013.
15. *Sur les sections toriques. Cornu. N. ann. math. XX,* 101.
16. Einige merkwürdige Ausdrücke für die dreiseitige Pyramide. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 356. [Vergl. No. 4.]
17. *Sur les projections de trois lignes rectangulaires tournant autour d'une droite fixe. Combescure. N. ann. math. XX,* 92.
18. *Lieu de points tels que le somme de leurs distances aux deux côtés d'un angle droit soit égale à une quantité donnée. Dupain. N. ann. math. XX,* 57.
19. Den Ort zu finden, von welchem aus ein Kegel zweiten Grades unter einem gegebenen schiefen Winkel gesehen wird. Baur. Grun. Archiv XXXVI, 24.

20. Ueber den Umdrehungskörper der Ellipse um eine in ihrer Ebene befindliche Gerade. Baur. Grun. Archiv XXXVI, 27.
Vergl. Oberflächen, Oberflächen zweiter Ordnung, Sphärik.

Astronomie.

21. *Sur le développement des fonctions en séries périodiques.* Houel. *Compt rend. LII,* 512.
22. *Note au sujet d'une lettre de M. Hansen concernant la théorie de la lune.* Delaunay. *Compt rend. LII,* 771.
23. *On the stability of satellites in small orbits and the theory of Saturn's rings.* Vaughan. *Phil. Mag. XXI,* 263.

Attraction.

24. *On Clairaut's theorem.* Hennessy. *Phil. Mag. XXI,* 396.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

25. *On the numbers of Bernoulli and Euler and a new theorem concerning prime numbers.* Sylvester. *Phil. Mag. XXI,* 127.
26. *Sur les nombres de Bernoulli.* Sylvester. *Compt. rend. LII,* 307.

Bestimmte Integrale.

27. Ueber einige Integralformeln. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. VI, 205.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 2. Elliptische Functionen, Integrallogarithmus.

Binomialcoefficienten.

28. *Sur la somme des carrés des coéfficients du binôme.* Beynac. *N. ann. math. XX,* 50.
29. *Somme des coéfficients pris de quatre en quatre dans le binôme* $(x+a)^m$. Beynac. *N. ann. math. XX,* 8. — *Le Tannéac. ibid.* 147.

Binomialreihe.

30. *Application de la formule du binôme au développement de* $(a+b)^{-1}$. Beynac. *N. ann. math. XX,* 11.

C.

Combinatorik.

31. *Sur la marche du cavalier au jeu des échecs.* Polignac. *Compt. rend LII,* 840.
32. *On a problem in tactic which serves to disclose the existence of a fourvalued function of three sets of three letters each.* Sylvester. *Phil. Mag. XXI,* 515.
33. *On the historical origin of the unsymmetrical sixvalued function of six letters.* Sylvester. *Phil. Mag. XXI,* 369.
Vergl. Reihen 142.

Cubatur.

34. Ueber Inhaltsberechnung der Körper. Ligowski. Grun. Archiv XXXVI, 181. [Vergl. Bd. V, No. 36.]
35. Beispiel einer Cubatur und Quadratur nach geometrischen Postulaten. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. VI, 56.

Cubikwurzel.

Vergl. Quadratwurzel.

D.

Determinanten.

36. *On the theory of determinants.* Cayley. *Phil. Mag. XXI,* 180.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

37. *Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre.* Painvin. *N. ann. math. XX,* 177. [Vergl. Bd. V, No. 289.]
38. Ueber Curven vierter Ordnung. Clebsch. Crelle LIX, 125.
39. Ueber Dreiecke und Tetraeder, welche in Bezug auf Curven und Oberflächen zweiter Ordnung sich selbst conjugirt sind. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. VI, 140.

40. *Sur les cônes du second ordre qui passent par six points donnés.* Cayley. *Compt. rend. LII*, 1216.
41. *Relations entre les diamètres conjugués d'une surface du second ordre.* Painvin. *N. ann. math.* XX, 130.
Vergl. Cubatur 34.

Differentialgleichungen.

42. Ueber Jacobi's Methode, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren und ihre Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem. Clebsch. Crelle LIX, 190. [Vergl. Bd. VI, No. 281.]
Vergl. Mechanik 121.

Differenzenrechnung.

43. *Sur les différences successives d'une fonction les valeurs de la variable se suivant en progression de raison différente.* Lemonnier. *N. ann. math.* XX, 197.

E.

Elektricität.

44. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. Kirchhoff. Crelle LIX, 89.

Elimination.

Vergl. Homogene Functionen 89.

Ellipse.

45. *La tangente menée du centre d'une ellipse au cercle circonscrit à un triangle quelconque conjugué à cette ellipse est égale à la corde du quadrant de l'ellipse.* De Jonquières. *N. ann. math.* XX, 25. — Paul Serret. *ibid.* 77.

Ellipsoid.

46. Ueber Länge und Breite, reducirte Länge und reducirte Breite auf dem dreiachsigen Ellipsoid. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 79.
47. Ueber die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogen werden können. Joachimsthal. Crelle LIX, 111.
48. *Propriété de l'ellipsoide.* Farjon et Laurent. *N. ann. math.* XX, 51.
Vergl. Geometrie (descriptive) 54.

Elliptische Functionen.

49. *Sur les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques de la première espèce.* Baehr. Grun. Archiv XXXVI, 125.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 7.

Functionen.

50. *Mémoire sur les nombres de Cauchy et leur application à divers problèmes de mécanique céleste.* Bourget. *Journ. Mathém.* XXVI, 33.
51. *Note sur certains développements.* Vachette. *N. ann. math.* XX, 155.
Vergl. Astronomie 21. Differenzenrechnung. Maxima und Minima 112. 113. Zahlentheorie 160.

G.

Geodäsie.

52. Formeln zur geodätischen Ortsberechnung. Rogg. Zeitschr. Math. Phys. VI, 58.
53. Ueber den mittleren Fehler der Kettenmessung. Winckler. Zeitschr. Math. Phys. VI, 109.

Geometrie (descriptive).

54. Ueber die Abbildung eines ungleichartigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben. C. G. J. Jacobi. Crelle LIX, 74.
55. Ueber die Anwendung der Affinitätsachsen zur graphischen Bestimmung der Ebene. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. VI, 76.
56. *Projection homographique.* Babinet. *N. ann. math.* XX, 149.
Vergl. Perspective.

Geometrie (höhere).

57. *Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace.* Chasles. *Compt. rend. LII*, 77, 189, 487. [Vergl. Bd. VI, No. 301.]
58. *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque.* De Jonquières. *Journ. Mathém. XXVI*, 113.
59. *Théorème fondemental de Desargues.* Poudra. *N. ann. math. XX*, 94.
60. Zwei Hauptsätze der neueren Geometrie. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. VI, 1.
61. Die geometrischen Gesetze der Ortsveränderung starrer Systeme. Küpper. Zeitschr. Math. Phys. VI, 12.
62. *Théorèmes concernant les courbes géométriques planes.* De Jonquières. *N. ann. math. XX*, 83.
63. Eine Figur bewegt sich ohne Veränderung ihrer Gestalt so, dass drei Gerade derselben je eine Kreisevolvente umhüllen; alsdann ist dieses auch bei jeder weiteren Geraden in der Figur der Fall. Boeklen. Grun. Archiv XXXVI, 28.
64. *Etude sur les transformations homographiques planes.* Lucas. *Journ. Mathém. XXVI*, 137.
65. *Lieu géométrique des foyers de coniques assujetties à quatre conditions communes.* De Jonquières. *N. ann. math. XX*, 85.
66. *Sur quelques cubiques décrites par des points d'un quadrilatère plan variable.* De Jonquières. *N. ann. math. XX*, 26.
67. *Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe* n. De Jonquières. *N. ann. math. XX*, 206.
68. *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques.* Mannheim. *N. ann. math. XX*, 220.
69. *Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation.* Sylvester. *Compt. rend. LII*, 741, 815. — Chasles. *ibid.* 745, 1042. — Cayley. *ibid.* 1039.
70. *Sur la surface et sur la courbe à double courbure lieux des sommets des cônes du second ordre qui divisent harmoniquement six ou sept ségments rectilignes pris sur autant de droites de l'espace.* Chasles. *Compt. rend. LII*, 1157.
71. *Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloide à une nappe.* Cremona. *Compt. rend. LII*, 1319.
72. *Sur les 27 droites d'une surface du 3e degré.* Sylvester. *Compt. rend. LII*, 977.
Vergl. Mechanik 118.

Geschichte der Mathematik.

73. *Sur la dénomination du litre.* *N. ann. math. XX*, 16.
74. *Sur l'origine du mot théodolite.* *N. ann. math. XX.* *Bulletin de bibl.* 13, 35.
75. Desargues. *N. ann. math. XX.* *Bulletin de bibl.* 22.
76. *Sur l'extraction abrégée de la racine carrée.* Cantor. *N. ann. math. XX*, 46. Prouhet. *ibid.* 47.
77. *Sur une erreur échappée a Fourier.* Tardy. *N. ann. math. XX*, 120.
78. *Sur un théorème de Salmon.* Terquem. *N. ann. math. XX*, 16. [Vergl. Bd. VI, No. 87.]
Vergl. Combinatorik 33.

Gleichungen.

79. *De la résolution générale des équations algébriques au moyen de séries.* Heegmann. *Compt. rend. LII*, 972. — Dubois. *ibid.* 1218.
80. Ueber das Aufsuchen der reellen Wurzeln eines Gleichungs-Polynoms. Schramm. Grun. Archiv XXXVI, 420.
81. *On transcendental and algebraic solution.* Cockle. *Phil. Mag. XXI*, 379.
82. *Sur la résolution des équations du troisième degré au moyen des tables trigonometriques.* Demongeot. *N. ann. math. XX*, 143.
83. Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. VI, 49.
84. *On quintics.* Jerrard. *Phil. Mag. XXI*, 39, 348. [Vergl. Bd. VI, No. 120.]
85. *Note on the remarks of Mr. Jerrard.* Cockle. *Phil. Mag. XXI*, 90. [Vergl. Bd. VI, No. 120.]
86. *On Mr. Jerrard's researches on the equation of the fifth order.* Cayley. *Phil. Mag. XXI*, 210.
87. *On a theorem of Abel's relating to equations of the fifth order.* Cayley. *Phil. Mag. XXI*, 257.

88. *Sur un système de deux équations du second degré.* De Virieu. *N. ann. math.* XX, 122.
Vergl. Geschichte der Mathematik 77. Homogene Functionen. Kettenbrüche.

H.

Homogene Functionen.

89. Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen. Clebsch. Crelle LIX, 1. [Vergl. Bd. VI, No. 327.]
90. *Théorèmes sur la décomposition en facteurs linéaires des fonctions homogènes entières.* Painvin. *Journ. Mathém.* XXVI, 209.
91. *Théorèmes sur les racines égales.* Painvin. *N. ann. math.* XX, 15.
Vergl. Gleichungen.

Hydrodynamik.

92. *On the equilibrium of a fluid mass revolving freely within a hollow spheroid about an axis which is not its axis of symmetry.* Dahlander. *Phil. Mag.* XXI, 198.
93. *Developpements relatifs au §. 3 des recherches de Dirichlet sur un problème d'Hydrodynamique.* Brioschi. Crelle LIX, 63. [Vergl. Bd. VI, No. 328.]
94. *On ripples and theer relation to the velocities of currents.* Hirst. *Phil. Mag.* XXI, 1, 188.

Hyperbel.

95. *Propriétés segmentaires de l'hyperbole.* *N. ann. math.* XX, 113.

I.

Imaginäres.

96. *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* Marie. *Journ. Mathém.* XXVI, 57, 153. [Vergl. Bd. VI, No. 334.]
97. *Note sur les quantités géométriques et ultra-géométriques.* Polignac. *Compt. rend.* LII, 24.
Vergl. Logarithmen.

Integrallogarithmus.

98. Ueber die Berechnung des Integrallogarithmen und einiger mit ihm zusammenhängenden anderen Functionen. Bretschneider. Zeitschr. Math. Phys. VI, 127.

Interpolation.

99. *On graphical interpolations.* Dittmar. *Phil. Mag.* XXI, 139.
Vergl. Astronomie 21.

K.

Kegelschnitte.

100. *De quelques propositions réciproques relatives à la théorie des courbes et des surfaces du second degré.* Paul Serret. *Journ. Mathém.* XXVI, 9.
101. *Théorème de Newton sur les coniques inscrites à un quadrilatère.* Vannson. *N. ann. math.* XX, 118. — Vieille. *ibid.* 236.
102. *Soit proposé de trouver le lieu des points pour lesquels deux normales à une conique font un angle donné.* *N. ann. math.* XX, 1.
103. *Sur deux coniques du même genre.* Desgranges. *N. ann. math* XX, 126.
104. *Théorème sur l'intersection d'un cercle et d'une conique.* *N. ann. math.* XX, 60.
105. *La polaire réciproque d'un cercle C relativement à un cercle de centre O est une conique de foyer O ayant pour sa directrice la polaire du centre C par rapport au cercle directeur O.* Laquière. *N. ann. math.* XX, 42.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 39. Ellipse. Geschichte der Mathematik 78. Hyperbel. Kreis. Parabel. Sphärik 148.

Kettenbrüche.

106. Anwendung der oscillirenden Kettenbrüche zur gleichzeitigen Bestimmung zweier Wurzelwerthe einer Gleichung. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. VI, 51.

Kreis.

107. *Triangles inscrits et circonscrits au système de deux circonférences.* **Mention.** *N. ann. math.* XX, 96.
Vergl. Maxima und Minima 114. Planimetrie 133. Quadratur.

Krümmungslinien.

108. *Description de lignes de courbure des surfaces du second ordre.* **Aoust.** *Compt. rend.* LII, 1150.

L.

Lagrange's Reihe.

109. *Mémoire sur la série de Lagrange.* **Rouché.** *Compt. rend.* LII, 295. — **Bertrand.** *ibid.* 1301.

Logarithmen.

110. *Prouver que le logarithme népérien de* $\cos x + \sqrt{-1} \, . \, \sin x$ *est* $x \, . \sqrt{-1}$. **Beynac.** *N. ann. math.* XX, 12.

Loxodrome.

111. *Equation et propriétés de la loxodromée.* **Vannson.** *N. ann. math.* XX, 31, 225.

M.

Maxima und Minima.

112. *Trouver la valeur entière de* n *par laquelle* $\sqrt[n]{n}$ *devient un maximum.* **Beynac.** *N. ann. math.* XX, 7.
113. Die Maxima der Function $\frac{\sin x}{x}$. **Bacaloglo.** Grun. Archiv XXXVI, 12.
114. *Sur un angle maximum dont la construction depend de deux cercles concentriques.* **Mourgues.** *N. ann. math.* XX, 22.
115. *Sur l'aire d'une parabole inscrite à un triangle isocèle.* **De Milleville et Hengy.** *N. ann. math.* XX, 91.

Mechanik.

116. Bedingung der Stabilität eines auf dem Gipfel einer Fläche ruhenden Körpers. **Hoppe.** Zeitschr. Math. Phys. VI, 213.
117. Nachträge und Verbesserungen zu der Schrift: Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. **Matthiessen.** Zeitschr Math. Phys. VI, 67.
118. *Sur les six droites qui peuvent être les directions de six forces en équilibre.* **Chasles.** *Compt. rend.* LII, 1094.
119. *Sur un théorème relatif à la transmission du mouvement par contact immédiat.* **Girault.** *Compt. rend.* LII, 1258.
120. *On physical lines of force.* **Maxwell.** *Phil. Mag.* XXI, 161, 281, 338.
121. Ueber die Controverse zwischen Doppler und Petzval bezüglich der Aenderung des Tones und der Farbe durch Bewegung. **Mach.** Zeitschr. Math. Phys. VI, 120.
122. Ueber Magnetismus. **Roch.** Zeitschr. Math. Phys. VI, 182. [Vergl. Bd. V, No. 407.]
123. Berechnung derjenigen mechanischen Arbeit, welche zur Zerlegung einer chemischen Verbindung nothwendig ist. **Mann.** Zeitschr. Math. Phys. VI, 72.
Vergl. Aerodynamik. Analytische Geometrie der Ebene 8. Astronomie. Elektricität. Functionen. Hydrodynamik. Optik.

Methode der kleinsten Quadrate.

Vergl. Geodäsie 53.

O.

Oberflächen.

124. *Théorème sur les surfaces réglées.* **Moutard.** *N. ann. math.* XX, 17.
125. *On a surface of the fourth order.* **Cayley.** *Phil. Mag.* XXI, 491.
Vergl. Mechanik 117.

Oberflächen zweiter Ordnung.

126. *Sur les coniques focales d'une surface du second ordre.* *Cremona.* *N. ann. math.* XX, 95.
127. Ueber den Ort, von welchem aus ein Kegel zweiten Grades unter einem rechten Winkel gesehen wird. Boeklen. Grun. Archiv XXXVI, 22.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 41. Ellipsoid. Kegelschnitte 100. Krümmungslinien.

Optik.

128. Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichtes. Lommel. Grun. Archiv XXXVI, 385.
129. *On the reflexion of light at the boundary of two isotropic transparent media.* *Lorenz.* *Phil. Mag.* XXI, 481.
130. *Dans un rayon polarisé en ligne droite la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation.* *Briot.* *Compt. rend.* LII, 393.

P.

Parabel.

131. *Trouver le lieu géométrique du sommet d'une parabole dont on connait un point et le foyer.* *Gerono.* *N. ann. math.* XX, 233.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 5. Maxima und Minima 115.

Perspective.

132. Beitrag für den Unterricht in der Reliefperspective. Burghardt. Grun. Archiv XXXVI, 437.

Planimetrie.

133. *Dans un triangle les lignes qui joignent les pieds des hauteurs son respectivement, perpendiculaires aux rayons qui joignent les sommets avec le centre du cercle circonscrit.* *Wilkinson.* *N. ann. math.* XX, 153.

Potential.

Vergl. Elektricität.

Q.

Quadratische Formen

134. *Sur la forme* $x^2+3y^2+4z^2+12t^2$. *Liouville.* *Journ. Mathém.* XXVI, 135.
135. *L'équation* $x^2+y^2=pz^2$ *est impossible en nombres rationels,* p *étant de la forme* $4n+3$. *Kaminsky.* *N. ann. math.* XX, 97.
136. *Toute puissance entière d'une somme de deux carrés est elle même une somme de deux carrés.* *Beynac.* *N. ann. math.* XX, 8.
137. Zerlegung eines Productes in eine Summe von Quadraten. Prouhet und Cayley. Grun. Archiv XXXVI, 381.
138. Umwandlung der Differenz zweier Producte in die algebraische Summe von drei Producten. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 382.

Quadratur.

139. *Sur l'aire du cercle.* *Dellach.* *N. ann. math.* XX, 174.
Vergl. Cubatur 35.

Quadratwurzel.

140. *Sur les extraction approchées des racines.* *Genocchi.* *N. ann. math.* XX, 48.
Vergl. Geschichte der Mathematik 76.

R.

Rectification.

141. Ueber die Rectification der Linien auf den Flächen. Boeklen. Grun. Arcivh XXXVI, 32.

Reihen.

142. Ueber eine Reihentransformation Stirling's. Dietrich. Crelle LIX, 163.
143. *Sur certaines séries récurrentes.* *Genocchi.* *N. ann. math.* XX, 53, 54.

144. Zur Summation von Reihen. Bode. Grun. Archiv XXXVI, 382. [Vergl. Bd. VI, No. 187.]
145. *Sur quelques séries infinies.* *Schloemilch.* *N. ann. math.* *XX*, 108. [Vergl. Bd. VI, No. 186.]
146. *Sur la somme d'une série infinie pour* lim $x=0$. *De Virieu.* *N. ann. math.* *XX*, 135.
Vergl. Astronomie 21. Binomialreihe. Lagrange's Reihe. Zahlentheorie 160.

S.

Sphärik.

147. Lagenbestimmungen auf der Kugel; eine Ergänzung der sphärischen Trigonometrie mit besonderer Rücksicht auf Geodäsie. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 51.
148. Ueber sphärische Kegelschnitte. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. VI, 153.
149. *Théorème sur le tétraèdre.* *Mertion.* *N. ann. math.* *XX*, 88.
Vergl. Loxodrome. Trigonometrie 156.

Stereometrie.

150. Bemerkungen über Koppe's Obelisken und Wittstein's Prismatoid. Bretschneider. Grun. Archiv XXXVI, 18.
151. Grösse des den Grundflächen einer abgestumpften Pyramide parallelen Schnittes, welcher die Pyramide nach einem gegebenen Verhältnisse in zwei Theile theilt. Grunert. Grun. Archiv XXXVI, 503.
152. *On the partitions of a close.* *Cayley.* *Phil. Mag.* *XXI*, 424.
153. *Généralisation d'un théorème de M. Roberts.* *Le Besgue.* *N. ann. math.* *XX*, 63. — *Faure.* *ibid.* 222.

T.

Tabellen.

154. *On a new method of arranging numerical tables.* *Dittmar.* *Phil. Mag.* *XXI*, 137.
Vergl. Geodäsie 52. Gleichungen 82. Integrallogarithmus.

Trigonometrie.

155. Sätze über Dreiecke, die einem gegebenen Kreise umschrieben, einem anderen gegebenen Kreise eingeschrieben sind. Boeklen. Grun. Archiv XXXVI, 186.
156. Elegante Ableitung der Formeln für den sphärischen Excess. Werner. Ztschr. Math. Phys. VI, 146.
157. Ableitung der Formeln für den Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel. Schreder. Grun. Archiv XXXVI, 447.

Trisection des Winkels.

158. Ueber eine Trisection des Winkels. Kuhlmey. Grun. Archiv XXXVI, 123.

V.

Variationsrechnung.

159. *Démonstration d'une formule de M. Ostrogradsky relative au calcul des variations des intégrales multiples.* *Sabinine.* Crelle LIX, 185. [Vergl. Bd. VI, No. 208.]

Z.

Zahlentheorie.

160. Ueber einige Eigenschaften der Function Ex. Stern. Crelle LIX, 146.
161. *Sur une propriété des nombres premiers qui se rattache au théorème de Fermat.* *Sylvester.* *Compt. rend.* *LII*, 161, 212, 816.
162. *Sous quelles conditions le quotient* $\frac{(x+1)^m - x^m - 1}{x^2+x+1}$ *est il entier?* *Beynac.* *N. ann. math* *XX*, 9.
163. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $8\mu+1$. *Liouville.* *Journ. Mathém.* *XXVI*, 31.
164. *Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme* $8\mu+1$. *Liouville.* *Journ. Mathém.* *XXVI*, 55.
165. *Théorèmes concernant respectivement les nombres premiers de la forme* $16k+3$ *et les nombres premiers de la forme* $16k+11$. *Liouville.* *Journ. Mathém.* *XXVI*, 97.

166. *Théorèmes concernant les nombres premiers de la forme* $16k+13$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 7.
167. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+1$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 103.
168. *Remarques nouvelles concernant les nombres premiers de la forme* $24\mu+7$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 219.
169. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+13$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 101.
170. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $40\mu+3$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 105.
171. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $40\mu+27$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 107.
172. *Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes* $120k+61$, $120k+109$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 150.
173. *Théorèmes concernant le double d'un nombre premier de la forme* $16k+7$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 28.
174. *Théorèmes concernant le quadruple d'un nombre premier contenu dans l'une ou dans l'autre des deux formes* $8\mu+3$, $8\mu+5$. **Liouville** *Journ. Mathém. XXVI,* 1.
175. *Théorèmes concernant le quadruple d'un nombre premier de la forme* $12k+5$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 93.
176. *Théorèmes concernant le quintuple d'un nombre premier de la forme* $24k+17$. **Liouville** *Journ. Mathém. XXVI,* 147.
177. *Théorèmes concernant le quintuple d'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes* $40\mu+7$, $40\mu+23$. **Liouville.** *Journ. Math. XXVI,* 109.
178. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers l'un de la forme* $8\mu+1$, *l'autre de la forme* $8\nu+1$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 187.
179. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme* $8\mu+3$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 185.
180. *Théorème concernant le produit d'un nombre premier* $8\mu+3$ *par le carré d'un nombre premier* $8\nu+7$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI*; 207.
181. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme* $24\mu+5$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 189.
182. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers egaux ou inégaux de la forme* $24\mu+7$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 191.
183. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers l'un de la forme* $24\mu+3$, *l'autre de la forme* $40\nu+7$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 193.
184. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme* $40\mu+3$, *l'autre de la forme* $40\nu+23$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 197.
185. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme* $40\mu+7$, *l'autre de la forme* $40\nu+27$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 195.
186. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme* $40\mu+23$, *l'autre de la forme* $40\nu+27$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 199.
187. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme* $120\mu+31$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 201.
188. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers, l'un de la forme* $120\mu+31$, *l'autre de la forme* $120\nu+79$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 205.
189. *Théorème concernant le produit de deux nombres premiers égaux ou inégaux de la forme* $120\nu+79$. **Liouville.** *Journ. Mathém. XXVI,* 203.

Vergl. Bernouilli'sche Zahlen.

Zinsrechnung.

190. Bemerkungen zu einem Aufsatz von Dr. Schlechter. **Oettinger.** Grun. Archiv XXXVI, 47. — **Beschorner** *ibid.* 49. [Vergl. Bd. VI, No. 231.]
191. Noch ein Beitrag zur Berechnung des mittleren Zahlungstermins bei Ratenzahlungen. **Schulze.** Grun. Archiv XXXVI, 177.
192. Weitere Ausführung der politischen Arithmetik. **Oettinger.** Grun. Archiv XXXVI, 189, 265, 453.

Literaturzeitung.

Recensionen.

›r Constructeur. Ein Handbuch zum Gebrauche beim Maschinen-Entwerfen, für Maschinen- und Bau-Ingenieure, Fabrikanten und technische Lehranstalten. Von J. REULEAUX, Professor der Maschinenbaukunde am eidgenössischen Polytechnicum in Zürich.

Mit diesem Werke wird dem technischen Publikum meines Wissens m ersten Male ein Handbuch zum Gebrauche beim Maschinen-Entwerfen ergeben. In der Vorrede, welche sehr beachtenswerth ist, hat der Ver›ser sich über die leitenden Ideen und über Zweck und Ziel seiner Ar›it hinreichend ausgesprochen. Es dürfte darin besonders hervorzuheben n, dass über den Gegensatz von Theorie und Praxis, der leider noch im›r zu bestehen scheint, sehr viel Treffendes und Wahres gesagt ist. Das dürfniss, den üblen Einfluss der Ideen von der Unvereinbarkeit der ›eorie und Praxis verschwinden zu machen, ist von bedeutenden Män›rn schon längst anerkannt und öffentlich ausgesprochen worden. Man ›e nur die „*Preliminary Dissertation*“ in dem vortrefflichen Werke: „*A ›nual of applied Mechanics by W. J. M. Rankine.*“ Ferner hat sich ›big bei verschiedenen Gelegenheiten schön und kräftig hierüber ausge›ochen, z. B. wenn er sagt: die Wissenschaft macht die Naturkräfte zu ›enern des Menschen, zu Unterthanen seiner Handlungen. Der Empiri›r stellt sich in gleicher Höhe mit einem untergeordneten und unwissen›n Wesen; er wendet nur einen Theil seiner Macht zum Wohle der ›nschheit an. Sein Wille wird durch die Thatsachen beherrscht, wäh›d er bei wahrer Einsicht in ihre verborgenen Ursachen sie beherrschen ›nnte. Ebenso wenn er sagt: die technischen Schulen sind nicht als eine ›bstitution für die Praxis vorhanden, sondern sind als ein Mittel zu be›chten, die Praxis einsichtsvoller, wirksamer und wohlthätiger zu machen. ›e Förderer und Beschützer der polytechnischen Schulen sind überzeugt, ›s die Saat nicht wachsen wird, wenn das Land durch den praktischen ›ndmann nicht gut bestellt; sie schlagen ihm aber vor, das Land erst zu ›gen, damit beim Pflügen der Dünger in den Boden einziehe und er da›ch fruchtbarer werde.

Das vorliegende Handbuch ist eigentlich noch zu jung, um schon jetzt auf seine praktische Brauchbarkeit geprüft sein zu können. Dazu gehört Zeit und vielfacher Gebrauch des Buches, damit seine Stärken und Schwächen und die Grenzen seiner Brauchbarkeit zum Vorschein kommen. Gleichwohl finde ich mich veranlasst, schon jetzt meine Ansichten über dieses Werk auszusprechen. Einmal weil ich mich schon lange für die Bestrebungen des Verfassers lebhaft interessire, und anderweitig, weil ich bei meinem Unterrichte zuweilen auf des Verfassers älteres Werk: „Die Constructionslehre für den Maschinenbau", Bezug nehme; daher die Anschauungsweisen des Verfassers in seinem neuen Werke mir schon mehr bekannt sind.

Es liegt zwar nahe, den „Constructeur", so ist das Handbuch betitelt, als einen Auszug des älteren Werkes anzusehen; besonders wenn man die dritte und vierte Lieferung des letzteren mit der zweiten Hälfte des neuen Handbuches flüchtig vergleicht. Dem ist aber nicht so und obwohl es etwas sonderbar klingt, so ist es gut, dass der Verfasser keinen Auszug geliefert, sondern viele wichtige Capitel gänzlich neu umgearbeitet oder wesentlich bereichert, respective vereinfacht hat. Der „Constructeur" ist als eine zum Theil neue und verbesserte Arbeit des Verfassers anzusehen, woran man deutlich wahrnehmen kann, wie sehr sich derselbe es hat angelegen sein lassen, Kürze und Klarheit mit bequemer Anwendbarkeit zu verbinden.

Aus dem Inhaltsverzeichnisse ergiebt sich die Anordnung und die Menge des Stoffes, welcher in drei Abschnitten behandelt wird.

Der erste und zweite Abschnitt enthalten das Wichtigste und Wesentlichste des Buches. Es beschäftigt sich der erste Abschnitt mit der Festigkeitslehre, worin die bekannte Anschauungsweise des Verfassers, nämlich die Elasticitätsgrenzen statt der Bruchfestigkeiten in Beziehungen zu bringen, consequent bis auf einige Fälle (Zerknickungsfestigkeit) durchgeführt ist. Theoretisch ist diese Anschauungsweise gewiss die richtigere; praktisch hat sie aber in vielen Fällen keinen höhern Werth, als die noch häufig in Anwendung sich befindliche ältere Anschauungsweise, welche von der Bruchfestigkeit und einem angemessenen, aus guter Construction abgeleiteten Sicherheitsgrade ausgeht. Ich finde daher den Werth dieses ersten Abschnittes weniger in der Durchführung der bezeichneten Anschauungsweise, als in der Reichhaltigkeit und übersichtlichen Darstellung Alles dessen, was bei verschiedenen Anspruchnahmen der Körper in Betracht gezogen werden kann. Es sind sogar einige Fälle der zusammengesetzten Festigkeit aufgenommen. Ich bin kein Freund dieser sogenannten zusammengesetzten Festigkeit und sehe daher diesen Beitrag mehr zur Vervollständigung der systematischen Aufführung vorkommender Fälle, als grossen Nutzen bringend, an.

Der zweite Abschnitt ist der reichhaltigste und behandelt die Constructionen der Maschinenelemente. Der Verfasser giebt in der Vorrede selbst ausführlich an, was als neu, respective umgeändert und eigenthümlich anzusehen ist. So stossen wir zuerst auf die Regeln für die Construction der Zapfen, wobei er die Abnutzung berücksichtigt. Dasselbe Verfahren hat meines Wissens, auch schon Professor Wiebe bei der Berechnung der Zapfenstärken zuerst eingeschlagen. Die Wiebe'schen Formeln geben durchweg grössere Dimensionen. Als Beispiel für die Anwendung der gegebenen Formeln sind die Zapfenstärken der Achse eines vierrädrigen Eisenbahnwagens berechnet. Nach diesen Formeln würde $d = 80^{mm}$ und $l = 160^{mm}$ ($d = 3\frac{1}{16}$ Zoll und $l = 6\frac{1}{8}$ Zoll preuss.) zu nehmen sein. Dies sind nahezu die Dimensionen, welche solche Tragzapfen nach den festgesetzten Normirungen der Eisenbahntechniker in der Wirklichkeit erhalten. Das berechnete Beispiel ist jedoch gar nicht an seiner Stelle. Denn was soll man dazu sagen, wenn unter gleichen Umständen, das heisst bei einer ruhigen Belastung $P = 3775$ Kilogramm und bei $n = 270$ Umdrehungen per Minute, ebenfalls die Stirnzapfen einer Achse dieselben Dimensionen erhalten. Die Zapfen einer Eisenbahnwagenachse sind noch ganz anderen Einwirkungen von Kräften unterworfen, als bei der Ableitung der betreffenden Formeln berücksichtigt wurden.

Der §. 37 über Halszapfen ist sehr unbestimmt gehalten und giebt eigentlich wenig Auskunft über die Dimensionen derselben. Man erfährt allerdings später in §. 47, was mit §. 36 und §. 37 gemeint ist.

Die Bestimmungen über Stützzapfen sind besonders ausführlich gegeben.

Ebenfalls sehr ausführlich werden nun die Tragachsen behandelt, wobei jedoch die Eisenbahnwagen-Achse, Seite 95, nach meiner Ansicht wieder nicht als richtiges Beispiel aufgeführt ist.

Eine sehr nette Behandlung haben die Tragachsen mit kreuz- und sternförmigem Querschnitt erfahren. Die Tabellen erleichtern ungemein das Rechnungswerk.

Ebenso sind die Wellen einer sehr eingehenden Behandlung gewürdigt worden. Die schmiedeeisernen Wellen unter 285^{mm} Durchmesser sind nach derselben Formel berechnet, wie Redtenbacher seine langen schmiedeeisernen Transmissionswellen berechnet. Die stärkeren Wellen erhalten aber geringere Dimensionen als nach Redtenbacher, was als begründet anzusehen ist.

Für lange Triebwellen sind noch besondere Regeln angegeben, um die erforderlichen Correcturen leicht vornehmen zu können.

Gar wichtig ist der §. 64 über die Dimensionsbestimmungen belasteter Wellen. Durch die nicht weiter motivirte Formel (82_a), welche auch gelegentlich auf Seite 237 für die Gegenkurbel Anwendung findet, ist glücklicher Weise die zusammengesetzte Festigkeit eliminirt worden. Beiläufig wird auf den Druckfehler Seite 237 zweite Zeile aufmerksam gemacht. Es soll heissen §. 151.

Sehr reichhaltig sind die Zapfenlager ausgestattet. Ausser den Hauptformen in den §§. 69 bis 73, ferner 81, 82 und 85 kommen sehr hübsche Combinationen vor, die bezüglich der Formgebung als geschmackvoll zu bezeichnen sind. Das grosse Stehlager scheint mir jedoch in Beziehung auf die Festhaltung des Deckels nicht hinreichende Sicherheit bei Vibrationen etc. zu geben.

Ferner sind die Hängelager §§. 81 und 82 für einen bestimmten Werth des Zapfendurchmessers immer für einen bestimmten Deckenabstand construirt; indem nämlich angenommen ist, dass durch zwischengelegte Querhölzer dieser normalmässige Abstand zu erzielen ist. Wie ist aber zu construiren, wenn dieser Abstand nicht eingehalten werden kann und bedeutende Ueberschreitungen vorkommen?

Als besondere Freiheit in der Formgebung sind Fig. 114 und 117 anzusehen.

Die Riemscheiben oder Rollen sind nun wesentlich einfacher und zweckmässiger behandelt worden, als wie in der Constructionslehre. Man erkennt in den Formeln §. 98 eine naturgemässere Abhängigkeit der verschiedenen Grössen, als in der früheren Arbeit. Die Gleichung (96) hätte ihren Geburtsschein aus der Constructionslehre mitbringen können, damit man erfahre, warum das Verhältniss $\left(\frac{b}{R}\right)$ inne gehalten werden soll.

Interessant würde die Zusammenstellung der Formeln sein, welche zur Bestimmung der erforderlichen Anzahl Arme einer Riemscheibe bereits aufgestellt worden sind. Der Verfasser ist im Laufe der Zeit auf zwei Formeln gekommen. Nämlich:

98) $$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\left(5 + \frac{R}{b}\right) \text{ im Constructeur}$$

und

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4}\sqrt{R} \text{ in der Constructionslehre.}$$

Andere Schriftsteller haben wieder andere Formeln und Bezugsgrössen. Alle passen, nach den Versicherungen der Schriftsteller, gut mit den Ausführungen. Dasselbe ist genau so mit der Bestimmung der Armzahl bei verzahnten Rädern. Hier geht es uns, wie schon Lessing sagte: die Wahrheit ist nicht für uns, sondern nur das Streben nach derselben.

Eine bedeutende Ausdehnung hat der Hirn'sche Drahtseilbetrieb im Constructeur erfahren. Interessant ist jedenfalls dieser Betrieb; ich vermag aber zur Zeit noch nicht die Wichtigkeit desselben zu erkennen und glaube daher, dass dieses Capitel zu erschöpfend im Constructeur abgehandelt ist.

Noch intensiver zusammengezogen, vereinfacht und abgerundet hat *der Verfasser* das Capitel über die Zahnräder gegen seine frühere Arbeit hier wiedergegeben. Zum Theil sind auch andere Beziehungen zur Grundlage der Bestimmungsgrössen gewonnen worden. Die Einführung der Stichzahl des Rades ist nicht neu und schon von anderen Schriftstellern benutzt worden. Die Verdeutschung gewisser Curvennamen etc. ist eine besondere Liebhaberei des Verfassers, an die man sich erst gewöhnen muss, um sich ganz behaglich zu fühlen.

Es werden in gedrängter Kürze zunächst die allgemeine cyclische Verzahnung, dann specielle Verzahnungen durchgenommen.

Im §. 125 ist der sinnstörende Druckfehler gleich im ersten Satze zu bemerken.

Es hätte übrigens nichts geschadet, wenn der Verfasser ganz kurz über die Wahl $r_0 = 0{,}875\,t$ sich ausgesprochen hätte. Sehr grossen Werth scheint derselbe auf die Kreisverzahnungen zu legen, welchen ich nach meinen Erfahrungen nie habe finden können. Statt der ausgedehnten Behandlung dieser Kreisverzahnungen hätte wohl das allgemeine Verfahren der Cycloidal- und Evolventenverzahnung aufgeführt werden können.

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes in den §§. 136 bis 147 ist sehr zweckmässig und hinreichend ausführlich gehalten.

Das Gebiet der Hebel, Hebelzapfen, Hebelarme und Hebelachsen, ebenso der verschiedenen Kurbeln und zusammengesetzten Hebel etc. ist völlig genügend behandelt; dies gilt auch für die Pläuelstangen, Querhäupter etc.

Das wichtige Capitel über Röhren und Röhrenverbindungen, worin auch die Dampfkessel, Presscylinder etc. aufgenommen sind, ist im Allgemeinen mit erforderlicher Vollständigkeit gegeben. Die Motive, welche den Verfasser bestimmt haben, zur Berechnung der Wandstärken der Röhren mit starkem inneren Drucke die Brix'sche Formel anzunehmen, sind im Constructeur nicht angegeben. In der Constructionslehre sagt aber der Verfasser, dass er sich dieser Formel bediene, weil dieselbe eine sehr gute Uebereinstimmung mit der Praxis aufweise.

Dieser Grund ist nun freilich sehr eigenthümlicher Natur und mit Hilfe desselben kann man zu den sonderbarsten Resultaten gelangen. Zunächst drängt sich wohl die Frage auf, seit welcher Zeit ist diese Uebereinstimmung vorhanden. Vielleicht von der Zeit an, von welcher die Brix'sche Formel und andere damit verwandte in die Praxis eingeführt werden sind?

Das angeführte Beispiel über die Wandstärke einer hydraulischen Presse zur Hebung der Brittaniabrücke beweist aber gerade, dass die Praxis nicht mit den Ergebnissen der Formel übereinstimmt.

Neuere Untersuchungen und Thatsachen haben aber festgestellt, dass die Brix'sche Formel nur innerhalb gewisser Grenzen, in welche zwar sehr viele Fälle der Praxis hineinfallen, Brauchbarkeit und Zuverlässigkeit besitzt. Ich vermisse deshalb sehr ungern die Resultate neuerer Forschungen und die Angaben zuverlässiger, für die weitesten Grenzen richtigeren Formeln. Der Verfasser scheint selbst das Bedürfniss hierzu in der Schlussbemerkung des §. 188 erkannt zu haben.

Die Röhrenverbindungen selbst sind allerdings sehr mager behandelt und nur einige der häufigst vorkommenden Verbindungen gusseiserner Röhren aufgeführt.

Vollständiger sind schon die Ventile, sowie Dampfkolben und was dazu gehört, aufgenommen.

Die Seile und Ketten, sowie Seil- und Kettenverbindungen sind überflüssig genügend betrachtet.

Der dritte Abschnitt besteht nur aus verschiedenen mathematischen Tafeln, die sehr interessant und nützlich sind.

Den Schluss bildet eine sogenannte Hilftafel für Zahlenrechnungen von bekannter Einrichtung. Die Weglassung des *s* ist als eine neue Abkürzungsweise des Verfassers anzusehen, wobei er aber bald mit dem Landsmann und Landmann in Verwechslung gerathen wird.

Die zahlreichen Tabellen, welche fast jedem Maschinentheil zur schnellen Berechnung seiner Dimensionen etc. beigegeben sind, sowie insbesondere die Formeltafeln, um für preussisches und österreichisches Maass die Umwandlung der Formeln sofort vornehmen zu können, sind überaus nützlich und geben dem Constructeur schon wegen dieser Anordnung einen grossen Vorzug vor ähnlichen Werken, oder besser gesagt: Formelzusammenstellungen und dadurch entschieden grössere Brauchbarkeit.

Ich kann dem noch hinzufügen, dass Schüler, welche auf der hiesigen polytechnischen Schule in den Maschinenbau-Cursus eintreten und vorher weder mit Reuleaux' Constructeur, noch mit Redtenbacher's Resultaten des Maschinenwesens irgendwie bekannt gewesen sind, und mit diesen Hilfsmitteln zum Construiren Anleitung erhalten, sich fast ohne Ausnahme mit dem Constructeur leichter und bequemer forthelfen können.

Die Einführung von Holzschnitten in einem solchen Werke ist immer eine eigenthümliche Sache, der ich nicht sehr zugethan bin. Ich muss jedoch gestehen, dass sie als eine gelungene zu bezeichnen ist, wenn auch hie und da die Schraffirungen zu stark, die Schatten manchmal unrichtig und zu schwarz ausgefallen sind und dadurch der Deutlichkeit Abbruch geschehen ist. Ueberhaupt ist eine gleichmässigere Behandlung der Holzschnitte, namentlich in Beziehung auf Feinheit des Striches, wünschenswerth. Daher auch demnächst die schwarzen Flächen mit den weissen Figuren zu verschwinden haben und durch geeignete Zeichnungen, welche mit der gesammten Darstellungsweise der Maschinentheile correspondiren, zu ersetzen sein werden. Druck, Papier und sonstige Ausstattung *ganz gut.*

SCHNEIDER.

Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern. Ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik von Dr. G. Friedlein. 8. 60 Seiten mit 6 lithographirten Tafeln. Erlangen, Verlag von Theodor Blaesing. 1861.

Hauptzweck der uns hier zur Besprechung vorliegenden Brochüre ist, nachzuweisen, dass, was man in der Regel als Geometrie des Boethius bezeichne, gar nicht von diesem Schriftsteller herrühre. Wäre diese These richtig, so müsste selbstverständlich Alles fallen, was man für die Kenntnisse der Römer aus jener Schrift herzuleiten gesucht hat. Es könnte also beispielsweise nicht behauptet werden, wie Referent es zu verschiedenen Malen ausgesprochen hat, dass die Römer die sogenannten *apices* des Boethius (Zahlzeichen, welche den unsrigen ziemlich nahe stehen) besassen. Statt dessen behauptet der Verfasser, jene Geometrie rühre von Gerbert her, welcher seine Kenntnisse aus arabischen Quellen geschöpft habe. Referent hat versucht, eine Widerlegung dieser Ansicht zusammenzustellen, hat sich jedoch bald überzeugt, dass eine solche nur dann allgemein verständlich und zugleich für den Leser nicht zu ermüdend ausfallen kann, wenn es ihm gestattet ist, neben den Resultaten neuerer Forschungen auch die Ergebnisse seiner früheren Untersuchungen nochmals zu benutzen. Eine solche Besprechung müsste aber nothwendiger Weise den Raum weit überschreiten, den wir ihr in dieser Zeitschrift widmen können. Referent hat sich daher entschlossen, in Gestalt eines eigenen Buches zu antworten, welches aber, um es gleich hier zu bemerken, nicht wesentlich polemischen Inhaltes sein soll, sondern hauptsächlich als Zusammenstellung alles Dessen, was dem Referenten über Zahlzeichen und deren Geschichte bekannt wurde, ihre Berechtigung finden dürfte.

Cantor.

Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Eine von der philosophischen Facultät der Georgia Augusta gekrönte Preisschrift von Hermann Hankel. Göttingen, Dieterich'sche Univ.-Buchdruckerei (Fr. Kästner).

Die von der philosophischen Facultät der Göttinger Universität am 4. Juni gestellte Preisaufgabe lautete: „*Aequationes generales motui fluidorum determinando inservientes duobus modis exhiberi possunt, quorum alter Eulero, alter Lagrangio debetur. Lagrangiani modi utilitates adhuc fere penitus neglecti clarissimus Dirichlet indicavit in commentatione postuma „de problemate quodam hydrodynamico“ inscripta: sed ab explicatione earum uberiore morbo supremo impeditus esse videtur. Itaque postulat ordo theoriam motus fluidorum aequationibus Lagrangianis superstructam eamque eo saltem perductam, ut leges motus rotatorii a clarissimo Helmholtz alio modo erutae inde redundent.*“ — Was die Arbeit des Verfassers betrifft, so glaubt Referent nichts besseres darüber sagen zu können, als die genannte Facultät selbst, nämlich: „Die ausserordentliche mathematisch-physikalische Preisfrage über die Herleitung der Gesetze für die Bewegung von Flüssigkeiten und insbsondere für die Wirbelbewegungen aus den sogenannten Lagrange'schen Gleichungen ist durch eine Abhandlung beantwortet worden, welche das Motto trägt: *tanto utiliores sunt notae, quanto magis exprimunt rerum relationes*. Sie giebt rühmliches Zeugniss von des Verfassers Fleiss, seiner Bekanntschaft mit den von den neueren Mathematikern ausgebildeten Rechnungsmethoden und der erworbenen Gewandtheit in deren Handhabung. Namentlich enthält §. 6 eine elegante Methode, die Grundgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit bei derjenigen Betrachtung dieser Bewegung, welche gewöhnlich nach Lagrange benannt wird, für ein ganz beliebiges Coordinatensystem aufzustellen. Bei der Entwickelung der allgemeinen Gesetze der Wirbelbewegung wird freilich Lagrange's Betrachtungsweise ohne Noth verlassen, was die Folge hat, dass die einzelnen Gesetze durch ganz von einander unabhängige Betrachtungen bewiesen werden müssen und auch ihr Zusammenhang mit den in §. 14, 15 dargestellten Untersuchungen von Clebsch dem Verfasser entgeht. Da jedoch der Verfasser bei seinen Beweisen von den Lagrange'schen Gleichungen ausgeht, so kann man wohl auch die specielle bei der Preisaufgabe gestellte Forderung als durch diese Abhandlung erfüllt ansehen. Die erwähnte Unvollkommenheit und einige leicht zu bessernde Uebereilungsfehler halten daher bei dem mancherlei Guten, was die Abhandlung enthält, die Facultät nicht ab, ihr den Preis zu ertheilen, doch würde der Verfasser verpflichtet sein, sie nach den gemachten Andeutungen verbessert vor dem Drucke noch einmal vorzulegen." — Die ursprünglich lateinische Abhandlung erscheint hier in deutscher Ausgabe mit folgenden Abänderungen: „Der im Obigen angeführte §. 6 stimmt mit §. 5 der folgenden Abhandlung überein. Die citirten §§. 14, 15 enthielten im Wesentlichen das in der Anmerkung S. 45 der vorliegenden Schrift angedeutete; es sind diese Paragraphen weggelassen worden einerseits wegen mangelnden Raumes, andererseits, weil sie bei der jetzigen Darstellung ausser Connex mit dem Uebrigen traten."

Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten. Inauguraldissertetion zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Universität Leipzig; von Hermann Hankel. Göttingen, Dieterich'sche Universitäts-Buchdruckerei (Fr. Kästner).

Ueber den Inhalt seiner Abhandlung sagt der Verfasser Folgendes: „Man nennt eine Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0^{(0)} & \ldots & a_0^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^{(0)} & \ldots & a_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

bekanntlich dann symmetrisch, wenn die symmetrisch gegen eine Diagonale derselben stehenden Glieder einander gleich sind, also $a_i^{(k)} = a_k^{(i)}$

ist. — So häufig nun auch symmetrische Determinanten in den verschiedensten Theilen der Algebra und Analysis erscheinen, so gelingt es doch nur selten, ihren Werth auf eine einfache Weise durch eine Summe oder ein Product darzustellen. Es schien mir daher die Untersuchung einiges Interesse zu beanspruchen, ob nicht eine leichtere Bestimmung möglich sei, wenn die Symmetrie auf irgend eine Weise noch vergrössert würde. Unter den verschiedenen möglichen Annahmen zeichnet sich eine in der Algebra zuweilen auftretende Form durch einen hohen Grad von Symmetrie und Eleganz aus. Setzt man nämlich sämmtliche Elemente, die auf einer Parallelen zu einer Diagonale liegen, gleich, so wird für solche Determinanten somit stets $a_i^{(k)} = a_{i'}^{(k')}$ sein, wenn $i + k = i' + k'$. Die Form dieser symmetrischen Determinanten ist sonach die folgende:

$$1)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1}\; a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

In unmittelbarerem Zusammenhange mit dieser Form, die man wohl als orthosymmetrische bezeichnen kann, steht eine andere; setzt man nämlich:

$$a_k = \alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

so unterscheidet sich die orthosymmetrische Determinante dieser a nur um einen einfachen Factor von:

$$2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1\,\alpha_2 \ldots\ldots (\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2\,\alpha_3 \ldots\ldots (\alpha_2 \ldots \alpha_n) \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3\,\alpha_4 \ldots\ldots (\alpha_3 \ldots \alpha_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n\,\alpha_{n+1} \ldots (\alpha_n \ldots \alpha_{2n-2}) \end{vmatrix}.$$

Es hat sich nun bei der Untersuchung gezeigt, dass auf jede orthosymmetrische Determinante eine eigenthümliche Transformation angewandt werden kann, die in vielen Fällen die Darstellung derselben als einfaches Product möglich macht. An diese Werthbestimmungen von Determinanten schliesst sich die Auflösung linearer orthosymmetrischer Gleichungssysteme nothwendig an. Solche Gleichungssysteme haben ausser dem ganz selbstständigen Interesse noch eine gewisse Wichtigkeit für die Entwickelung einer nach Potenzen einer Variabelen fortschreitenden unendlichen Reihe in einen Kettenbruch, dessen Partialzähler in die erste Potenz der Variabelen multiplicirt sind. Es zeigt sich nämlich, dass die Glieder des Kettenbruches dargestellt werden können als Quotienten orthosymmetrischer Determinanten, deren Elemente die Coefficienten der Potenzreihe sind und dass die Coefficienten der Potenzen der Variabelen in den Näherungsnennern des Kettenbruchs durch die Auflösung orthosymmetrischer linearer Gleichungssysteme bestimmt werden."

$\mathfrak{H}^{**}$

Referent hat hierzu nur zu bemerken, dass der Verfasser sich durchweg als Kenner der Wissenschaft und als gewandter Analytiker zeigt, dessen Untersuchungen vielseitiges Interesse gewähren. Die beiden Erstlingsarbeiten des Verfassers berechtigen übrigens zu der Hoffnung, dass sich derselbe als Mathematiker einen eben so gut begründeten Ruf erwerben wird, wie ihn sein Vater als Physiker längst besitzt.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. April bis 15. Juni 1862.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physikalische Classe. 1861. I und II. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftliche Classe. 20. Band. Wien, Gerold's Sohn. 10 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik. Herausgegeben von J. A. GRUNERT. 38. Theil, 1. Heft. Greifswald, Koch's Verlagsbuchhandlung. *pro compl.* 3 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica: ed. A. ZUCHOLD. 11. Jahrgang. 2. Heft, Juli — December 1861. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅙ Thlr.

Annales de l'observatoire impérial de Paris, publiées par LE VERRIER. *Observations. Tome III*, 1839—1840. *Paris, Mallet-Bachelier.* 40 *frcs.*

Annuario marittimo per l'anno 1862 *compilato dal Lloyd austriaco.* 12. *annata.* Triest, Directorium des Lloyd. 1⅓ Thlr.

Reine Mathematik.

MEHLER, F. G., Hauptsätze der Elementarmathematik zum Gebrauche für Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. Berlin, G. Reimer. ⅓ Thlr.

PARTHE, J., Aufgaben aus der Arithmetik und den Elementen der Algebra für Untergymnasien. Prag, Mercy. ⅓ Thlr.

OHM, M., Kurzer Leitfaden und wissenschaftliche Grundlage der gesammten Elementar-Analysis. Leipzig, Fries. 1 Thlr.

GERLACH, H., Lehrbuch der Mathematik. Theil IV.: Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Dessau, Aue'sche Buchh. Verlags-Conto. ⅓ Thlr.

GIFFHORN, D., Leitfaden der elementaren Mathematik für Gymnasien etc. 2. Abth.: Planimetrie und Trigonometrie. Braunschweig, Schulbuchhandlung. 1 Thlr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. 4. Aufl. Halle, Schmidt. ½ Thlr.

SPITZ, C., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Leipzig, Winter. 24 Ngr.

— — Anhang dazu. Resultate und Andeutung zur Lösung der im Lehrbuche befindlichen Aufgaben. Ebendaselbst. 10 Ngr.

MANN, J., Das ebene und das körperliche Dreieck. Eine mathematische Parallele. Frauenfeld, Huber. ⅓ Thlr.

SARRES, Geometrische Untersuchungen über Curven höherer Ordnungen und Classen. Wittenberg, Herrose. ⅓ Thlr.

STRAUCH, G. W., Das umgekehrte Problem der Brennlinien. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 1 Thlr.

UNFERDINGER, F., Ueber die einhüllende Curve, welche eine constante Länge zwischen zwei sich schneidenden Geraden beschreibt. Ebendaselbst. 4 Ngr.

SCHLÖMILCH, O., *Beginselen der Meetkunde. Vertaald uit de Hoogduitsch door* J. C. EGER. *Eerste Deel. Groningen by Oomkens, J. Zoon.* 1 *fl.* 60.

TODHUNTER, *A History of the progress of the calculus of variations during the* 19. *century. London, Macmillan.* 12 *sh.*

Angewandte Mathematik.

TILSCHER, J., Die Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen. Wien, Gerold's Sohn. 3⅓ Thlr.

BINNS, W., Elementarunterricht über die orthographische Projection. Aus dem Englischen von A. W. HERTEL. 2. Auflage. Weimar, Voigt. 1 Thlr.

HENNIG, E., Einleitung in die Krystallographie. Dresden, Klemm's Verlag. 12 Ngr.

HAGEN, G., Ueber Form und Stärke gewölbter Bögen. Berlin, Ernst & Korn. ⅔ Thlr.

SCHELLEN, H., Die Schule der Elementarmechanik und Maschinenlehre etc. 3 Lief. Braunschweig, Vieweg & Sohn. ⅔ Thlr.

ZAMARA, R., Bewegliche Windrose zur Auflösung der gewöhnlichen Probleme auf Seekarten. Triest, Schubart. 2⅔ Thlr.

SCHRÖDER, G., Sonnenfleckenbeobachtungen im Januar 1861. Inauguraldissertation. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 6 Ngr.

SPÖRER, Beobachtungen von Sonnenflecken und daraus abgeleitete Elemente der Rotation der Sonne. Anclam, Dietze. ½ Thlr.

MÄDLER, J. H. v., Nachtrag zur Abhandlung über totale Sonnenfinsternisse, mit besonderer Rücksicht auf die Finsterniss vom 18. Juli 1860. Jena, Frommann. 2½ Thlr.

SCHÖNFELD, E., Beobachtungen von veränderlichen Sternen. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 24 Ngr.

BIOT, J. B., *Etudes sur l'astronomie indienne et sur l'astronomie chinoise. Paris, Lévy frères.* 7 *fr.* 50 *c.*

ROUVROY, H. DE, *Sur la forme de la partie antérieure des projectiles allongés. Traduit par* RIEFFEL. *Paris, Corréard.* 2 *frcs.*

Physik.

Allgemeine Encyclopädie der Physik, bearbeitet von BRIX, DECHER etc. 11. Lief. Leipzig, Voss. 2⅔ Thlr.

LAUBER, L. M., Die Grundlehren der Physik vom Standpunkte einer idealen Auffassung des Naturlebens. Thorn, Lambek. ⅓ Thlr.

BOEDECKER, C., Die Beziehungen zwischen Dichte und Zusammensetzung bei festen und liquiden Stoffen. 2. Aufl. Leipzig, Arnoldische Buchhandlung. ¼ Thlr.

LANDGREBE, G., Grundzüge der physikalischen Erdkunde. 2. Band: Hydrologie und Atmosphärologie. Leipzig, Fr. Fleischer. 2 Thlr.

HEIS, E., Die Feuerkugel, welche am Abend des 3. December 1861 in Deutschland gesehen worden ist. Halle, Schmidt. 6 Ngr.

LOOFF, F. W., Die Witterungsverhältnisse in Deutschland. Vorträge. Langensalza, Schulbuchhandlung des Thür. L.-V. 6 Ngr.

PRESTEL, M. A. F., Die mit der Höhe zunehmende Temperatur als Function der Windesrichtung. Jena, Frommann. 1½ Thlr.

LAMONT, J., Der Erdstrom und der Zusammenhang desselben mit dem Magnetismus der Erde. Leipzig, Voss. 1⅓ Thlr.

HANKEL, W. G., Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichts. Leipzig, Hirzel. 12 Ngr.

KIRCHHOFF, G., Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. 2. Ausg. Berlin, Dümmler. 1⅓ Thlr.

— — *Researches on the solar spectrum and the spectra of the chemical elements. Translated by* E. ROSCOE. *London, Macmillan.* 5 *sh.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

P. ANGELO SECCHI. *Interno alla vita e alla opere del P. Giambattista Pianciani d. c. d. G. Roma* 1862.

Der Nekrolog eines Lehrers, aus der Feder eines dankbaren Schülers stammend, bietet ein doppeltes Interesse für den Leser, insbesondere wenn der Name des Schülers von gutem Klange in der Wissenschaft ist. Einmal sollte man denken, Niemand sei geeigneter, die Arbeiten des Lehrers zu beurtheilen, als gerade der, welcher aus denselben die Nahrung seines eigenen Geistes zog, dann aber kommt man auch leicht wieder zur entgegengesetzten Ueberzeugung und ist geneigt, an der Unparteilichkeit des Kopfes zu zweifeln, wo das Herz in so gerechtfertigter Weise Partei ergriffen hat. Bei meiner Unbekanntschaft mit den Schriften des Herrn Pianciani (geboren zu Spoleto den 27. October 1784, gestorben zu Rom den 23. März 1862) muss ich also umsomehr mein Urtheil über die vorliegende Erinnerungsrede als ein nur auf ihr selbst als Quelle beruhendes motiviren. Dann scheint aber allerdings die Frage des Herrn Secchi begründet, dass man den Leistungen seines Lehrers und Freundes ausserhalb Italien nicht genügend gerecht geworden sei. Er scheint nämlich schon im Jahre 1833 die principielle Einheit des Lichtes, der Wärme und der Elektricität als Wirkungen eines und desselben Aethers ausgesprochen zu haben, während die ausseritalienischen Gelehrten doch wohl mindestens erst zehn Jahre später ähnliche Ueberzeugungen zu äussern wagten. Im Interesse der Geschichte der Wissenschaft möchte ich deshalb eigentliche Physiker, welche über die Sache selbst ein competenteres Urtheil haben, auf die Schrift aufmerksam machen, welche jenen Prioritätsanspruch begründen soll. Es sind die *Istituzioni fisico-chimiche di G. B. Pianciani. Roma* 1833—34, 4 Bände. 8. Ein nachgelassenes Werk desselben Verfassers ist ein naturwissenschaftlicher Commentar zur Genesis, welcher unter der Presse befindlich, doch wohl eine Nennung eher verdient, als andere derartige Versuche, da Herr Secchi, dessen ernste Liebe zur Wissenschaft hinreichend bekannt ist, ausdrücklich erwähnt, man habe es hier nicht mit einem solchen Werke zu thun, das an die römischen Augurn erinnere, die ohne zu lachen sich gegenseitig nicht betrachten können. CANTOR.

Grundzüge der höheren Mathematik nebst Anwendungen derselben auf Mechanik. Für Techniker dargestellt von H. TELLKAMPF, Eisenbahnbauconducteur zu Hannover. Hannover, C. Rümpler.

Was der Verfasser mit seiner kleinen (10 Bogen umfassenden) Arbeit beabsichtigt hat, zeigen folgende Worte der Vorrede: „Die vorliegende Schrift hat den Zweck, eine möglichst kurze und klare Uebersicht derjenigen Theile der höheren Mathematik zu geben, deren Kenntniss wegen ihrer Anwendung in der Mechanik und Maschinenlehre für den Techniker vorzugsweise wichtig ist. Es sind daher im Nachstehenden alle Betrachtungen und Untersuchungen ausgeschlossen geblieben, welche nur für den Mathematiker von Fach Interesse haben, aber dem Techniker häufig wegen ihrer Schwierigkeit und scheinbaren Nutzlosigkeit das Studium der Wissenschaft nur verleiden. Diese kleine Schrift soll also zeigen, wie einfach und wenig umfassend die Grundzüge der höheren Mathematik sind, insoweit deren Kenntniss für die in der Technik vorkommenden Anwendungen vollständig genügt.“ Wie man sieht, geht der Verfasser von dem Grundsatze aus: „der Techniker braucht nicht mehr Mathematik zu lernen, als der gegenwärtige Zustand der Technik verlangt“ — und es wäre nur consequent, wenn der Verfasser sein Princip verallgemeinerte und sagte: „es ist doch rechter Unsinn, dass die Theologen Lateinisch, Griechisch und gar noch Hebräisch lernen müssen, denn Predigten, Tauf- und Grabreden werden nur in der Muttersprache gehalten; es ist gleichfalls Thierquälerei, den Juristen Griechisch aufzunöthigen, denn Institutionen und Pandekten sind lateinisch, Sachsenspiegel etc. deutsch geschrieben; am tollsten aber ist es bei den Medicinern, die wahrhaftig nur so viel Latein brauchen, um ein Recept verschreiben zu können.“ Dem Verfasser scheint wirklich unbekannt zu sein, dass der Staat jene scheinbar übertriebenen Forderungen aus einem sehr guten Grunde stellt, nämlich im Interesse der allgemeinen Bildung. Wer nicht mehr weiss, als gerade sein specieller Berufszweig erfordert, der ist ein Handwerker in seinem Fach; ein Ingenieur dieses Schlages ist nur ein höherer Maurerpolier, beschränkt in seinem Gesichtskreis, beschränkt in seinem Urtheil. Leider verbietet es der ganze Studiengang der Techniker, letzteren eine classische Bildung beizubringen, man muss sich daher mit einem Surrogate behelfen, und dieses Ersatzmittel ist die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung. Referent weiss recht wohl, dass die Techniker während der Praxis einen guten Theil ihres mathematischen Wissens ebenso verschwitzen, wie der vielbeschäftigte Arzt sein Griechisch, er hält aber trotzdem eine tüchtige *mathematische* Uebung für nothwendig, um die jungen Leute an Abstractionen und an exactes Denken zu gewöhnen. Referent weiss ebenso, dass die Theorien der Planetenbewegung, der gegenseitigen Anziehung etc. dem Maschinenbauer keinen mit Händen greifbaren Vortheil gewähren, er trägt sie aber doch vor, um die Anschauungen der Schüler über den ordinären Kreis des industriell Nützlichen hinaus zu erweitern, und er sieht jedes Jahr mit Vergnügen, dass die Mehrzahl der Zuhörer gerade diesen Partien der analytischen Mechanik besonderes Interesse schenkt und sich freut, die vielleicht saure Mühe der vorhergegangenen mathematischen Studien durch einen so tiefen und verhältnissmässig wenig Sterblichen erreichbaren Einblick in den Bau des Weltalls belohnt zu sehen. Diese Erweiterung des Gesichtskreises aber bleibt, auch wenn der spätere Praktiker die Differentialgleichungen der Centralbewegung nicht mehr so gut integriren kann, als er es im letzten Examen verstand. — Das Princip des Verfassers ist übrigens noch aus einem ganz praktischen Grunde unzulässig. Wenn ein Techniker das für die Technik erforderliche Pensum von Mathematik, Physik etc. normiren will, so nimmt er unwillkürlich den Maassstab hierzu aus der Zeit, in der er gerade lebt, und aus den Anforderungen, die seine Oberbehörde an ihn stellt. So würde z. B. der Verfasser vor 20 Jahren es höchst unbillig gefunden haben, von Eisenbahningenieuren einige Kenntnisse von der Elektricität und dem Magnetismus (etwa das Ohm'sche Gesetz) verlangen zu wollen; heut zu Tage, wo der elektrische Telegraph zu den nothwendigen Requisiten eines Schienenweges gehört, ist das ganz in der Ordnung. Aehnlich verhält es sich mit dem zweiten Punkte. Die vom Verfasser gegebenen 81 Seiten höhere Mathematik reichen vielleicht aus, um königl. hannöverischer Eisenbahnbauconducteur zu werden, ob man es aber damit zum herzogl. braunschweigischen Sectionsingenieur bringen kann, ist eine ganz andere Frage, die Referent im Hinblick auf die vorzügliche mathematische Bildung des braunschweigischen Oberingenieurs (Baurath Scheffler) sehr bezweifeln muss. In der That wird auch der Inhalt der vorliegenden Schrift keinem Techniker genügen, der nicht blos handwerkern, sondern sich durch das Lesen von Zeitschriften fortbilden und *au courant* erhalten will. Die neueren Untersuchungen von Grashof, Winkler etc. über die Festigkeit verlangen weit mehr Mathematik, als der Verfasser giebt (unter Anderem mehrfache Integrale); ja nicht einmal die einfache Theorie der Kurbelbewegung, die ein Maschineningenieur doch ohne Zweifel kennen muss, lässt sich mit des Verfassers Buche erledigen, denn hierzu gehört die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, wovon gar nichts im Buche steht. Ebenso geht es bei verschiedenen anderen ganz gewöhnlichen Partien der Maschinenlehre, von tieferen Untersuchungen (etwa wie Redtenbacher's über die Bewegung der Locomotive) gar nicht zu reden. Nach diesen Beispielen, deren Zahl leicht zu vergrössern wäre, hält sich Referent zu dem Ausspruche berechtigt, dass der Ver-

5*

fasser, obschon er — oder vielleicht, weil er zu sehr — Techniker ist, die Bedürfnisse eines intelligenten und strebsamen Praktikers gar nicht genau genug kennt, um sich mit der Begrenzung und Erfüllung derselben befassen zu dürfen.

Fast noch unglücklicher als der Grundgedanke der Schrift ist die Ausführung der einzelnen mathematischen Lehren, wie die folgenden Proben zeigen werden.

In §. 6 will der Verfasser den Grenzwerth von $\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$ für unendlich wachsende ganze positive u ableiten; er geht zu diesem Zwecke von der Gleichung aus

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = 1+1+\frac{1-\frac{1}{u}}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)}{2.3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)\ldots\left(1-\frac{u-2}{2}\right)}{2.3\ldots(u-1)}$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)\ldots\left(1-\frac{u-1}{u}\right)}{2.3\ldots u}$$

und sagt dann: „wenn darin für u der Werth $+\infty$ substituirt wird, so erhält man

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = 1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots$$

Durch Addition einer hinreichenden Anzahl von Gliedern dieser stark convergenten Reihe erhält man u. s. w.“ Hierin stecken bereits zwei Fehler. Es ist allerdings klar, dass

$$Lim\,\frac{1}{u} = Lim\,\frac{2}{u} = Lim\,\frac{3}{u}\ldots = Lim\,\frac{k}{u} = 0$$

sein muss, aber nur, wenn k nicht von u abhängt; bei den Endgliedern des binomischen Satzes, welche der Verfasser wohlweislich nicht hinschreibt, ist diese Bedingung nicht erfüllt und daher der ganze Beweis illusorisch. Gleich darauf nennt der Verfasser die Reihe $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+$ etc. stark convergent —; was weiss denn der angehende Techniker von der Convergenz einer Reihe? Und wenn nun auch die ersten 10 Glieder derselben $e = 2{,}71828$ liefern, wer bürgt denn dafür, dass die unendlich vielen weggelassenen Glieder zusammengenommen nicht ein paar Hundert Einheiten ausmachen?

Bei der mehrmaligen Differentiation heisst es: „diesen Ausdruck für dy [nämlich $f'(x)\,dx$] kann man nochmals differentiiren, wobei man, der Bequemlichkeit wegen, dx als constant anzunehmen pflegt.“ Dieser Passus beweist schlagend, dass der Verfasser nicht einmal die Grundbegriffe der *Analysis* versteht, denn aus diesen folgt mit Nothwendigkeit, dass dx als constant oder als variabel angesehen werden muss, je nachdem x unabhängig variabel ist oder nicht.

Um den Taylor'schen Satz zu erhalten, benutzt der Verfasser den Satz

$$f(x+n\,dx)=f(x)+\frac{n\,dx}{1}f'(x)+\frac{(n\,dx)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2}f''(x)$$
$$+\frac{(n\,dx)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x)+\dots$$

und sagt: „wenn man die Zahl n unendlich gross nimmt, so wird $n\,dx$ gleich einer endlichen Grösse sein müssen etc.," d. h. mit anderen Worten: jedes Product aus einer unendlich grossen ganzen Zahl und einer unendlich kleinen Zahl ist eine endliche Grösse. — — Gleich darauf erfährt man, dass jede beliebige Function von x mittelst des Maclaurin'schen Satzes in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt werden kann. Was wird denn der Verfasser sagen, wenn ihm ein junger strebsamer Techniker zeigt, dass der Maclaurin'sche Satz bei vielen naheliegenden Functionen, wie z. B. $e^{\sqrt{x}}$, $log\,(1+\sqrt{x})$ etc., zu widersinnigen Resultaten führt?

Die Integration entwickelter Functionen ist auf 4½ Seiten abgemacht; der Integration von Differentialgleichungen ist gerade eine Seite gewidmet, wobei aber nur etwas von den totalen Differentialgleichungen gefaselt wird, die bekanntlich sehr selten vorkommen.

Diese Proben mögen hinreichen. Aus ihnen geht hervor, dass der Verfasser die zahlreichen sehr begründeten Einwendungen, welche seit einer Reihe von Jahren gegen die älteren Methoden gemacht worden sind, entweder gar nicht kennt oder wenigstens nicht verstanden hat, und dass er eben deswegen die strengen Begründungen der Neuzeit für unnütze Haarspaltereien ansieht. Endlich muss es als Unkenntniss der Literatur gerügt werden, wenn der Verfasser seine Methoden für neu halten sollte, wie es fast scheint.

Die Sprache des Handwerkes hat ein gutes und bezeichnendes Wort für den, der sich in ein ihm fremdes Arbeitsgebiet hineinwagt; sie nennt ihn einen Pfuscher. Auch des Verfassers Arbeit ist nichts als eine jämmerliche Pfuscherei, vor welcher hiermit gewarnt sein mag. Dem Verfasser aber geben wir den Rath, bei dem Eisenbahnbau zu bleiben und die mathematische Schriftstellerei den Mathematikern zu überlassen.

Schlömilch.

Geometrische Untersuchungen über Curven höherer Ordnungen und Classen. Von Dr. SARRES. Wittenberg, in Commission bei Herrosée. 1862. 4. 20 Seiten.

Die vorliegende Schrift beschäftigt sich mit der linearen Generation algebraischer ebener Curven, oder vielmehr gewisser, durch die Existenz von vielfachen Punkten ausgezeichneter Arten derselben; sie gehört also zu den nun ziemlich zahlreichen Arbeiten der neueren Zeit, welche für die Theorie und Construction der Curven höherer Grade die Grundvorstellungen der neueren Geometrie verwerthen, die Elementargebilde, welche von Steiner und Chasles in die Wissenschaft eingeführt wurden.

Wenn wir E. de Jonquières' „*Essai sur la Génération des Courbes géométriques*" (*Paris* 1858) als die bedeutendste und keimkräftigste dieser Arbeiten bezeichnen müssen, so verdient doch die gegenwärtige Betrachtung analoger Fragen von einem minder umfassenden Gesichtspunkte aus gleichfalls das Interesse mathematischer Leser. Während nämlich jene den wahrhaft organischen Grundgedanken von Büscheln von Curven, die einander nach gleichem Doppelschnittsverhältniss oder, wie man statt dessen sagen darf, linear entsprechen, überall zur Anwendung bringt, — eine Vorstellung, welche allen Verehrern Steiner'scher Arbeiten längst geläufig ist, — so beschränkt sich die vorliegende Schrift auf die Betrachtung der Elementargebilde erster Stufe, der geradlinigen Punktreihen und Strahlbüschel und verlegt die Quelle höherer Formen in die Art des Entsprechens; dasselbe ist nicht wie dort ein einfaches und lineares, sondern ein vielfaches oder ein Entsprechen von höherem Grade.

Der Verfasser geht aus von den Begriffen eines $n$fachen Strahlbüschels und einer $n$fachen Geraden — für welche letztere wir die Bezeichnung $n$fache Punktreihe vorziehen würden —; er definirt:

> 3. „Wenn ein beweglicher Punkt eine Curve $n$ter Ordnung durchläuft und ein Strahl eines Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt in der Ebene der Curve aber nicht auf derselben liegt, immer durch denselben hindurchgeht, so hat sich der Strahl um $n\pi$ gedreht, wenn der Punkt die ganze Curve durchlaufen hat."
>
> 4. „Schneidet eine bewegliche Tangente einer Curve $n$ter Classe eine Gerade, welche die Curve nicht berührt, in einem Punkt, so durchläuft der Punkt die Gerade $n$mal, während die Tangente die Curve umhüllt."

Bei beiden Definitionen ist erforderlich, imaginäre Punkte und Gerade in Betracht zu ziehen; mit ihnen übersieht man sofort die Richtigkeit des Satzes: 7. Zwei projectivische Strahlbüschel, deren eines $p$fach, das andere $q$fach ist und die sich in schiefer Lage befinden, erzeugen durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen eine Curve von $(p+q)$ter Ordnung, in welcher der Mittelpunkt des ersten ein $q$facher, der des zweiten *Büschels* ein $p$facher Punkt ist. Der ihm dualistisch entsprechende

Satz ist leicht zu bilden. An dem speciellen Falle einer Curve vierter Ordnung wird derselbe einer nützlichen genauern Untersuchung unterworfen, aus welcher hervorgeht, dass die so erzeugten Curven vierter Ordnung solche mit 3 Doppelpunkten oder von sechster Classe sind; sie sind durch 8 Punkte bestimmt, unter denen die 3 Doppelpunkte sich befinden, also durch 11 statt durch 14 einfache Punkte.

Es folgen die Anwendung auf Curven dritter Ordnung und die Entwickelung einer anderen Ausdrucksweise der allgemeinen Sätze, welche wir durch Wiedergabe des Satzes 12) hier repräsentiren wollen: 12. „Berühren die 3 Seiten eines veränderlichen Dreiecks einzeln und der Reihe nach 3 Curven von $p$ter, $q$ter, $r$ter Classe, und bewegen sich dabei 2 Ecken desselben auf 2 Curven von $s$ter und $t$ter Ordnung, so beschreibt die dritte Ecke einer Curve von $2pqrst$ter Ordnung."

Dies Beispiel reicht hin, um zu erkennen, dass die neuen Sätze aus den alten auf dieselbe Weise hervorgehen, wie der bekannte Satz von Maclaurin über die Beschreibung der Kegelschnitte durch Bewegung eines veränderlichen Dreiecks — es ist der Satz 12) für $p=q=r=s=t=1$ — aus der Erzeugung der Kegelschnitte als Durchschnittsort entsprechender Strahlen zweier einfacher Strahlbüschel. Sätze dieser Art, allgemeiner, als die von Maclaurin herrührenden, sind übrigens, wie beiläufig erwähnt werden mag, z. B. schon von G. Salmon im „*Treatise on the higher plane Curves*" 1852 (Art. 267) gegeben worden.

Nützlich ist es, zu bemerken, wie alle diese Betrachtungen die analytische Ausdrucksweise höchst einfach gestalten, ja dieselbe, wie uns bedünken will, verlangen; wenn

$$y-y'=k(x-x') \text{ und } y-y''=l(x-x'') \text{ oder } \alpha=k\beta,\ \alpha=l\gamma$$

zwei Gerade repräsentiren, die durch die festen Punkte (x',y'), (x'',y'') oder (α,β), (α,γ) respective hindurchgehen, so drücken sie insbesondere einfache projectivische Strahlbüschel aus, wenn die unbestimmten Coefficienten k, l durch die allgemeine Relation des ersten Grades

$$Akl+Bk+Cl+D=0$$

verbunden sind, und die Elimination von k und l zwischen den drei entsprechenden Gleichungen liefert die Gleichung des Kegelschnitts, welcher der Durchschnittsort beider Büschel ist. Denkt man das erste Büschel als ein zweifaches, so tritt an Stelle der linearen Relation eine solche, welche in Bezug auf l vom ersten, in Bezug auf k vom zweiten Grade ist und die analoge Elimination liefert die Gleichung der entstehenden Curve dritter Ordnung. Man kann dies analytische Verfahren ebenso leicht weiter fortsetzen, als vielfach modificiren; es ist wohl geeignet, auch bei bekannten Curven neue Resultate zu liefern, sei aber hier nur deshalb angedeutet, weil es in der That neues Licht auf die Grundvorstellungen unseres Verfassers wirft.

Im letzten Abschnitte der Schrift zeigt derselbe, welche Curven entstehen, wenn auf beweglichen Geraden, die von festen Curven oder Geraden geschnitten sind, solche Punkte verzeichnet werden, die mit irgend drei der schon vorhandenen in einem gegebenen Doppelschnittsverhältniss oder im harmonischen Verhältniss stehen; auch der Zusammenhang dieser Erzeugung mit derjenigen, welche Gegenstand des Vorhergehenden ist, wird erörtert. Wir führen nur den letzten und allgemeinsten dieser Sätze an: 20. Schneidet die bewegliche Tangente einer festen Curve $n$ter Classe eine feste Curve $m$ter Ordnung in m Punkten und bestimmt man auf derselben die 3 vierten harmonischen zu je drei von diesen m Punkten, so beschreiben diese so bestimmten Punkte eine Curve von $n.m(m-1)(m-2)$ter Ordnung, während der Umhüllung der Curve $n$ter Classe.

Er zeigt genügend, dass diese Sätze im engsten Zusammenhange mit einer Gruppe von denen stehen, welche Steiner in seiner grossen Arbeit „Ueber algebraische Curven etc." im 47. Bande von Crelle's Journal mitgetheilt hat. (Man vergleiche insbesondere §. 26, 27.) Im 59. Bande desselben Journals hat E. de Jonquières diese Sätze und die von Steiner gelegentlich derselben vorgelegten Aufgaben geometrisch untersucht und ist dabei zu schätzbaren neuen Resultaten gelangt. Auch eine frühere Abhandlung desselben Autors im Aprilheft des Liouville'schen Journals von 1861 bewegt sich in dem reichen Gedankenkreise dieser Steiner'schen Arbeit.

Wer das Studium dieser Abhandlungen mit dem der vorliegenden Schrift verbindet, wird viel von dem Geiste der reinen Geometrie in sich aufnehmen können. WILH. FIEDLER.

Die Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen. Für technische Lehranstalten und zum Selbstunterrichte verfasst von FRANZ TILSCHER. gr. 8. 255 Seiten. Mit einem Atlas von XIV Tafeln. Wien, Gerold. 1862.

Das vorliegende Werk muss als eine wichtige Erscheinung auf dem Gebiete der Anwendungen der darstellenden Geometrie bezeichnet werden. Der wissenschaftliche Sinn, aus welchem es entsprang, verdient ebenso sehr unsere Anerkennung, als der Fleiss und die Sorgfalt der Ausführung. Wenn wir ihm nur eine kurze Besprechung widmen, so geschieht es in der Erwägung, dass Constructionsmethoden angewandt und geübt, mehr als besprochen zu werden verlangen. Wir versuchen aber in der Kürze, seine Stellung unter den in dem behandelten Gebiete concurrirenden Arbeiten und seinen Inhalt zu charakterisiren.

Unter allen Zweigen der darstellenden Geometrie in ihrer Anwendung auf das technische Zeichnen sind unstreitig Schattenconstruction und Perspective am wenigsten gefördert worden; man hat sie immer mehr als Anfänge und Bestandtheile künstlerischer Auffassung denn als Nothwendigkeiten technischer Darstellungen behandelt. Was — um von der Darstellung der Schatten allein zu sprechen — eine sorgsame und feinsinnige Beobachtung der Erscheinungen lehrte, ist in Regeln zusammengestellt worden, nach denen zwar auch nur die Arbeit der von künstlerischem Verständniss geleiteten Hand — und nicht die peinlich genaue Nachachtung allein — Schönes und Wahres hervorbringen kann, deren hoher Werth darum aber doch nicht verkannt werden soll. Die Anwendung derselben auf die Darstellung räumlicher Formen durch die Parallelprojection und die Beschränkung auf sie bei der Ermittelung der Lichtvertheilung in der entsprechenden Schattenconstruction muss jedoch dem Denkenden sofort als total unzulässig erscheinen, schon aus dem einen Grunde — wie noch aus vielen anderen —, weil sie den Beobachtungen des Auges entnommen sind, indess die Parallelprojection selbst nichts weniger, als eine Nachahmung des Sehprocesses und die durch sie geschaffenen Zeichnungen nichts weniger, als eine Wiedergabe gesehener oder sichtbarer Dinge sind. Und wir halten ihre Anwendung in der Perspective, so weit sie nicht dem Künstler dienen soll, für nicht minder verwerflich: Sie ist immer auch da die Verbindung einer empirischen Beobachtung mit einer auf abstracten Voraussetzungen beruhenden Darstellung. Die geometrische Natur der technischen Darstellungsmethoden fordert eine ebenso geometrische Auffassung der an ihnen denkbaren Beleuchtungserscheinungen; die Forderung der Construirbarkeit bedingt die einfachsten Voraussetzungen, die natürliche Fülle der Erscheinungen, wie sie durch die lichtzerstreuende und farbengebende Wirksamkeit der Oberflächen, durch die unvollkommene Durchsichtigkeit der Luft, durch den inneren eigenthümlichen Process der leuchtenden Bewegung selbst etc. hervorgerufen wird, entzieht sich vollständig der geometrischen Construction, ja überhaupt der mathematischen Bestimmung.

Dem Kenner der auf die Schattenconstruction bezüglichen Literatur kann nicht entgehen, dass es ihr, wenn auch nicht an der Aufstellung solcher einfacher Voraussetzungen über den Vorgang der Beleuchtung, doch an ihrer consequenten und ausschliesslichen Durchführung fehlt; er findet überall viel zu früh die Entwickelung solcher Consequenzen verlassen und an ihre Stelle empirische Regeln vorgetragen, die bei aller Trefflichkeit hier nicht Ersatz zu leisten vermögen. Man construirt die Grenze des Selbst- oder Körperschattens und die Form des Schlagschattens, und dazu etwa die hellsten Stellen des beleuchteten Theils; aber nur bei wenigen einfachen Beispielen, wie bei der von einem leuchtenden Punkte beleuchteten Ebene und bei der Kugelfläche, stützt man die Abstufung des Selbstschattens auf die Betrachtung von Linien gleicher Intensitäten; für die numerische Bestimmung derselben als Grundlage der wirklichen Schattengebung und für die Auffindung der Intensitätscurven für gegebene numerische Werthe der Intensität ist ungemein wenig gethan. In der That, dies muss erwähnt werden, waren M. Olivier's Betrachtungen über die Bestimmung von Punkten gleicher und bestimmter Intensität (*Développements de géométrie descriptive, p.* 193) sehr wenig geeignet, zur constructiven Ausführung anzuregen. Für die speciellen Arten krummer Flächen, welche in technischen Anwendungen eine wichtigere Rolle spielen, vereinfacht sich allerdings das Problem beträchtlich und es mögen Lösungen desselben mehrfach als Grundlagen der Schattenconstruction angewendet worden sein, ohne in der Literatur ihren Ausdruck für die Wissenschaft gefunden zu haben; der Unterzeichnete darf in diesem Sinne vielleicht anführen, dass ihm seine schärfere geometrische Entwickelung der Centralprojection und die mit ihr verbundene eigenthümliche Auffassung und Benutzung unendlich ferner Elemente Anlass und Mittel zur Behandlung solcher Fragen wiederholt geboten hat.

Der Verfasser des vorliegenden Werkes hat die Darstellung der Intensitätslinien nach zweckmässig bestimmten Scalen für alle die Flächen vollständig durchgeführt, welche in der Technik eine Rolle spielen. Er geht dabei von deutlichen und einfachen Grundvorstellungen aus und führt dieselben durch das Ganze seines Werkes consequent hindurch; die Entwickelungen sind klar und zweckmässig, nach ihrer Ausdehnung, wie nach ihrem sachlichen Inhalt und ihrer Vortragsform; einzelne sprachliche Eigenheiten stören das Verständniss nicht. In einer ersten Abtheilung wird von der Bestimmung und Darstellung der Beleuchtungserscheinungen im Allgemeinen, in der zweiten, dem Haupttheil des Werkes, von der Bestimmung und Darstellung der Beleuchtungserscheinungen an besonderen gegebenen Objecten gehandelt. Die letztere zerfällt in sechs Capitel, welche überschrieben sind: I. Punkte, Linien, Ebenen und Polyeder. Dazu eine Anmerkung. Nach dem oben Gesagten bedarf es keiner Erläuterung mehr, wenn wir in der Einführung der Modificationslinie mehr eine Concession an das Herkömmliche und an die Erscheinung, als einen wesentlichen Bestandtheil der vorgelegten Beleuchtungsconstructionen erblicken; der geschickten Art derselben gebührt überdies Anerkennung. II. Flächen im Allgemeinen. III. Entwickelbare Flächen: Cylinderflächen, Kegelflächen, entwickelbare Schraubenfläche. IV. Windschiefe Flächen. Allgemeine Methoden, angewendet auf das hyperbolische Paraboloid, das einfache Hyperboloid, eine windschiefe Dachfläche und eine Wendelfläche; besondere Methoden für die Wendelfläche und windschiefe Schraubenfläche. V. Drehungsflächen. Allgemeine Methoden und ihre besondere Anwendung auf die Kugelfläche. VI. Rückungs- und Umhüllungsflächen; insbesondere für Cylinder, Kegel und Kugeln. Anwendung der Theorie zur vollständigen Darstellung eines Säulenfusses und Säulencapitäls.

Nicht minder werthvoll als die Ausführungen des Textes sind die beigegebenen 14 Tafeln, ja sie scheinen dem Unterzeichneten als der wirksamste und wichtigste Theil des schönen Werkes. Die ersten drei derselben (Fig. 1—26) entsprechen dem allgemeinen Theil und dem I. Capitel des speciellen; die Tafeln IV—VI (Fig. 27—45) den abwickelbaren, VII—IX (Fig. 46—57) den windschiefen Flächen. Auf Tafel X und XI (Fig. 58—65) sind Drehungsflächen, auf Tafel XII (Fig. 66—70) Umhüllungs- und Rückungsflächen behandelt, und die letzten Tafeln, XIII und XIV, (in Farbendruck) sind der ausgeführten Darstellung eines attischen Säulenfusses und eines Säulencapitäls gewidmet (Fig. 71, 72). Ueberall sind die Intensitätscurven vollständig und deutlich zur Anschauung gebracht, und die wohlgeleitete, von einer verständigen Erklärung begleitete Anschauung dieser Tafeln muss allein schon zur Bildung des Urtheils des angehenden Zeichners sehr viel beitragen; sie wird auf sichererem Wege dieselbe fördern, als es nach der gewöhnlichen Methode noch so wohl ausgeführte Darstellungen thun können, weil ihnen das feste und fassbare Skelett der Intensitätslinien fehlt.

Das ganze Werk ist eine werthvolle Bereicherung unserer Literatur, es macht seinem Verfasser viel Ehre, und wir wünschen lebhaft, dass es durch seine Wirksamkeit in weiten Kreisen ihm die Freude mache, die sein ernstes ausdauerndes Bestreben verdient. Nicht unerwähnt darf auch das Verdienst der trefflichen Verlagsbuchhandlung bleiben, die Ausstattung ist eine in allen Beziehungen vorzügliche.

Wir begrüssen endlich mit Freuden die ausgesprochene Absicht des Verfassers, die wichtigsten der in den ersten 12 Tafeln vorgeführten Beispiele in vollständiger Ausführung nach Art der Tafeln XIII und XIV als Vorlagen erscheinen zu lassen. Für eine grosse Zahl derselben schiene uns auch die Ausführung genau entsprechender Modelle leicht thunlich und sehr nützlich.

Wilh. Fiedler.

Lehrbuch der Experimentalphysik. Mit theilweiser Benutzung von Jamin's „*Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique*“ bearbeitet von Dr. Adolph Wüllner, Privatdocenten der Physik an der Universität zu Marburg. Vollständig in zwei Bänden. Jeder Band in zwei Abtheilungen. Mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen in Holzschnitt. Ersten Bandes erste Abtheilung. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1862.

Das Vorliegende gehört, wie man sieht, einem grösseren physikalischen Lehrbuche an, welches schon seines beabsichtigten Umfanges wegen die Aufmerksamkeit auf sich lenkt. Ueber die Aufgabe, welche sich der Verfasser bei der Bearbeitung desselben gestellt hat, giebt der Prospectus Aufschluss, welcher der vorliegenden ersten Abtheilung des ersten Bandes vorgedruckt ist. Das ganze Werk soll für diejenigen als Vorschule dienen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, wobei der Verfasser durch elementare mathematische Behandlung der physikalischen Lehren Sorge getragen hat, dasselbe, wie die meisten deutschen physikalischen Lehrbücher, einem grösseren Leserkreis zugänglich zu machen. Wie mir der Verfasser auch privatim mitgetheilt hat, ist er von Seiten eines renommirten Fachgenossen aufgefordert worden, ein Lehrbuch zu bearbeiten, welches wie das von Quintus Icilius eine ernste wissenschaftliche Anregung gewährt, aber gleichzeitig, wie der „*Cours de Physique*“ von Jamin sich mehr zum Selbststudium eignet, als jenes von Quintus Icilius, welches seiner Einrichtung nach vorzüglich zur Benutzung als Leitfaden bei Vorlesungen geeignet ist. Wenn nun der Verfasser zu Anfang der literarischen Arbeit, auf die er eingegangen war, die Idee hatte, Jamin's Lehrbuch mit Berücksichtigung deutscher Arbeiten für deutsche Verhältnisse frei zu bearbeiten, so hat er sich doch schon im Laufe seiner Vorarbeiten auf eigene Füsse gestellt, indem er in der Eintheilung und Anordnung von dem anfänglichen französischen Vorbild abgewichen ist.

Das ganze Werk, wovon das bisher Erschienene bereits 38 Bogen gross Royal-Octav enthält (Preis 2 Thlr. 16 Ngr.), soll nach der Angabe der Verlagshandlung im Jahre 1863 vollendet und der Preis des ganzen Werkes ein verhältnissmässig sehr billiger und keinesfalls höher sein, als bei den verbreitetsten ausführlicheren Lehrbüchern der Physik.

Die Besprechung wird nun hauptsächlich ihre Aufmerksamkeit darauf zu richten haben, wie der Verfasser seine Aufgabe zu lösen gedenkt und bis jetzt gelöst hat, ein vorwiegend für das Selbststudium als Vorschule tieferer physikalischer Studien bestimmtes Werk zu bearbeiten.

Nach dem Prospectus soll das ganze Werk zwei Bände enthalten, in dem ersten soll Mechanik, Akustik und Optik, im zweiten die Lehre von der Wärme und Elektricität vorgetragen werden. Bei dieser Anordnung, die im didaktischen Interesse nur zu billigen ist, sind demnach die Abtheilungen, bei denen die Induction erfolgreicher gewesen ist, vorangestellt worden, während die theoretisch minder entwickelten Lehren nachfolgen. Die Einleitung enthält, durchaus in logischer Verknüpfung, Abhandlungen über Aufgabe und Grenzen der Physik, Methode der Physik, Beschaffenheit der Materie, Maass und Messinstrumente. Einen besonders guten Eindruck hat bei mir die Abhandlung: „Beschaffenheit der Materie“, hervorgebracht, in welcher der Verfasser, ausgehend von den stöchiometrischen Gesetzen und mit Weglassung der manchmal so breiten nutzlosen Betrachtungen früherer Lehrbücher über die allgemeinen Körpereigenschaften, den Leser auf die atomistische Hypothese führt. Mit Recht hat der Verfasser der Beschreibung und Abbildung von Messinstrumenten mehr Raum gegönnt, als dies sonst in physikalischen Lehrbüchern zu geschehen pflegt.

Der erste Abschnitt handelt von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper, als solcher und zwar im ersten Capitel von der *fortschreitenden* Bewegung, im zweiten Capitel von den drehenden Bewegungen und im dritten Capitel von der allgemeinen Gravitation. Nach Durchsicht dieses Abschnittes und reiflicher Ueberlegung bin ich zu der Ueberzeugung gelangt, dass sich der Verfasser die Arbeit ungemein erleichtert haben würde, wenn er hierbei nicht von den Thatsachen ausgegangen wäre, sondern wie im dritten Abschnitt (Wellenlehre) erst die Resultate der Induction vorgetragen und hierauf die Uebereinstimmung der theoretischen Lehrsätze mit der Erfahrung gezeigt hätte. Der Verfasser hat auf dem von ihm gewählten Wege, wie viele seiner Vorgänger, dem Schicksale nicht entgehen können, durch das Bestreben, rasch zum Ziele zu gelangen, bisweilen minder klar zu werden, als man es wohl wünschen möchte. Der Tadel, der hierin liegt, dürfte vielleicht weniger schwer ins Gewicht fallen, wenn man in Erwägung zieht, dass die Beschränkung der mechanischen Naturlehre auf einen geringeren Raum viele Schwierigkeiten darbietet, der auch die Herausgeber älterer deutscher physikalischer Lehrbücher nicht entgangen sind und dass der Verfasser des vorliegenden Lehrbuches am Ende des besprochenen ersten Abschnittes dem Studirenden ein recht gut ausgewähltes Verzeichniss der mechanischen Literatur zur Benutzung darbietet. Es ist überhaupt dem vorliegenden Lehrbuche, so weit es erschienen ist, als Vorzug nachzurühmen, dass dem Leser durch die zwar nicht vollständigen, aber zahlreichen und gut ausgewählten Citate Gelegenheit geboten wird, sein Studium durch Benutzung der wichtigeren Originalartikel zu befördern.

Im zweiten Abschnitt, der die Ueberschrift: „Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Theilen“ hat, wird die Elasticität, Festigkeit, der Stoss und die Reibung der festen Körper, sowie die Lehre von den tropfbaren Flüssigkeiten und Gasen vorgetragen. Dieser Abschnitt gewinnt durch die sorgfältigen Referate über das Experimentelle und ist nach dessen Durchsicht nur die Frage bei mir entstanden, ob, resp. wo der Verfasser die Krystallphänomene zu behandeln gedenkt.

Der dritte Abschnitt von vorwiegend theoretischem Inhalt behandelt in klarer, fasslicher Form die Wellenlehre, wobei der Verfasser auch die Theorie der Interferenzen entsprechend berücksichtigt.

Der vierte und letzte Abschnitt (vom Schalle) kann dem Vorigen gemäss wieder vorwiegend von den Thatsachen handeln, deren Theorie grösstentheils durch die Wellenlehre gegeben wurde.

Das bisher Erschienene zeigt nun, dass Dr. Wüllner durch Anordnung und Eintheilung des Stoffes, durch die vorzügliche Berücksichtigung des experimentellen Theiles, durch passend ausgewählte Citate dahin gewirkt hat, dass sein Lehrbuch besonders zum Selbststudium geeignet werde; berücksichtigt man nun ferner den überall anzutreffenden deutlichen Styl und die von der Verlagshandlung in der Wahl des vorzüglichen Papieres, Letterndruckes und in der sorgfältigen Ausführung der zahlreichen Holzschnitte ausgesprochene Absicht, das literarische Unternehmen des Dr. Wüllner auch äusserlich in würdiger Weise zu unterstützen, so kann man wohl das Prognostikon stellen, dass die physikalische Literatur in Dr. Wüllner's Lehrburch einen recht gediegenen Zuwachs erhalten wird. Dr. Kahl.

Bibliographie

vom 15. Juni bis 15. August 1862.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 9. Band, 2. Abth. München, Franz. 2⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg. 1862. Heft 1 und 2. Wien, Gerold's Sohn. *pro compl.* 16 Thlr.

Astronomische Nachrichten. 58. Band. No. 1. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. *pro compl.* 5 Thlr.

Reine Mathematik.

Kinkelin, H., Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen. Zürich, Meyer & Zeller. ⅓ Thlr.

Tellkampf, H., Grundzüge der höheren Mathematik, nebst Anwendungen derselben. Hannover, Rümpler. ⅚ Thlr.

Dienger, J., Die Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. Stuttgart, Metzler. 7⅓ Thlr.

Beskiba, J., Juristische, politische und kameralistische Arithmetik. 2. Ausg. Wien, Braumüller. 2 Thlr.

Skrivan. G., Grundlehren der Zahlentheorie. Wien, Braumüller. 1 Thlr.

Rummer, F., Die Buchstabenrechnung und die Lehre von den Gleichungen. 1. Theil. 3. Aufl. Heidelberg, Groos. 1⅓ Thlr.

— — 2. Theil. 2. Aufl. Ebendaselbst. 1 Thlr. 6 Ngr.

Zähringer, H., Aufgaben über Buchstabenrechnung und Gleichungslehre. 2. Aufl. Zürich, Meyer & Zeller. 16 Ngr.

Escher, H., Die mathematischen Verhältnisse der Kreislinie *und der* Parabel. Zürich, Meyer & Zeller. ⅓ Thlr.

HELMES, J., Die Elementarmathematik. 2. Abth. Planimetrie. 1. Theil. Hannover, Hahn. 18 Ngr.

WITTSTEIN, TH., Lehrbuch der Elementarmathematik. 1. Band, 2. Abth. Planimetrie. 2. Aufl. Ebendaselbst. ⅚ Thlr.

ASCHENBORN, M., Lehrbuch der Geometrie, mit Einschluss der Coordinatentheorie und der Kegelschnitte. 1. Abschn. Ebene Geometrie. Berlin, Decker. 2 Thlr. 8 Ngr.

BRENNECKE, Lehrbuch der Stereometrie, mit stereoskopischen Illustrationen. Berlin, Enslin. ⅚ Thlr.

KAMBLY, L., Elementarmathematik. 4. Theil. Stereometrie. 3. Aufl. Breslau, Hirt. 12½ Ngr.

LÜBSEN, H. B., Lehrbuch der Elementargeometrie. 6. Auflage. Leipzig, Brandstetter. 1 Thlr.

HECHEL, C., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Dorpat. (Leipzig, Volckmar.) ⅚ Thlr.

— — Anhang dazu. Ebendaselbst. 3 Ngr.

MEYER, C. O., Ueber die Art der durch Punkte und Tangenten bestimmten Kegelschnitte. Königsberg, Gräfe & Unzer. 6 Ngr.

HEILERMANN, H., Sammlung geometrischer Aufgaben. 1. Theil. 2. Aufl. Coblenz, Hölscher. ¼ Thlr.

EULERI, L., *Opera postuma a.* 1844 *detecta, quae ediderunt* P. H. FUSS *et* N. FUSS. 2 *Tomi. Petropoli.* (Leipzig, Voss.) 15 Thlr. 18 Ngr.

Angewandte Mathematik.

BAUERNFEIND, C. M., Elemente der Vermessungskunde. 2. Aufl. 1. Abth. München, literarisch-artistische Anstalt. *pro compl.* 4⅚ Thlr.

— — Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc. München, literarisch-artistische Anstalt. 1 Thlr. 6 Ngr.

BAEYER, J. J., Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Als Erläuterung des Entwurfs zu einer mitteleuropäischen Gradmessung. Berlin, Reimer. 1⅚ Thlr.

KOPP, H., Einleitung in die Krystallographie. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 2⅚ Thlr.

REMY, C. v., Darstellung der Gestalten des oktaedrischen Systems als Drillingsbildungen des pyramidischen Systems. Innsbruck, Wagner. ⅙ Thlr.

SCHELLEN, H., Die Schule der Elementarmechanik und Maschinenlehre. Zum Theil nach Delaunay's „*Cours de mécanique*“ bearbeitet. 4. Lief. Braunschweig, Vieweg. 24 Ngr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 1. Theil. Theoret. Mechan. 4. Aufl. Lief. 3 u. 4. Ebendas. 1 Thlr.

DOMKE, F., Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln. 3. Aufl. Berlin, Decker. 2⅔ Thlr.

RHEINAUER, J., Grundzüge der Photometrie. Halle, Schmidt. ½ Thlr.

Physik.

WÜLLNER, A., Lehrbuch der Experimentalphysik, mit theilweiser Benutzung von Jamin's *„Cours de physique de l'école polytechnique"*. 1. Band, 1. Abtheilung. Mechanik und Akustik. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 16 Ngr.

GERDING, TH., Schule der Physik. Hannover, Rümpler. 1 Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1860. 16. Jahrg. Redigirt von E. JOCHMANN. 1. Abth. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

BAUMGARTNER, A. v., Chemie und Geschichte der Himmelskörper nach der Spectralanalyse. Wien, Gerold's Sohn. 3 Ngr.

NYSTROM, C. A., Rechenaufgaben aus der Elektricitätslehre. Berlin, Springer. 12½ Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Differential- und Integralrechnung. Umfassend und mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt von Dr. J. DIENGER, Prof. d. Math. a. d. polytechn. Schule zu Carlsruhe. Zweite umgearbeitete Auflage. 3 Bände. Stuttgart, Verlag der Metzler'schen Buchhandlung.

An ein mathematisches Werk, das weniger eigene Untersuchungen als vielmehr eine umfassende Darstellung eines sehr grossen Wissensgebietes geben will, stellt man hauptsächlich drei Anforderungen; man verlangt 1) eine logisch begründete übersichtliche Anordnung des Stoffes, 2) klare Ausdrucksweise und 3) Strenge der mathematischen Deduction. Nach diesen Gesichtspunkten betrachtet, macht des Verfassers Arbeit keinen günstigen Eindruck; ein Blick in das Inhaltsverzeichniss lehrt schon, wie wenig Aufmerksamkeit auf eine naturgemässe Anordnung des Materiales verwendet ist, bei näherer Ansicht aber kommt man zu der Ueberzeugung, dass man nur ein wüstes Durcheinander analytischer Lehren vor sich hat, in welchem sich ausser dem Verfasser höchstens noch ein genauer Kenner, keinesfalls aber ein Jünger der Wissenschaft zurecht finden wird. Zur Begründung dieses Urtheils mag die folgende eingehendere Betrachtung des Inhaltes dienen.

§. 1 enthält die Hauptsätze der Potenzenlehre, der Logarithmen, arithmetischen und geometrischen Reihen; Referent hält diess für sehr überflüssig. Daran schliesst sich in §. 2 der Begriff der Function; in §. 3 bespricht der Verfasser die trigonometrischen und cyclometrischen Functionen, vergisst aber dabei die, ohne Zweifel hierher gehörenden Formeln für $arcsin\, \alpha \pm arcsin\, \beta$ etc., welche er dann 100 Seiten später bei den irrationalen Integralen einschaltet, wo sie Niemand suchen wird. §. 4 giebt ein Bruchstück von der Theorie complexer Zahlen; darin ist die Multiplication derselben ungenau dargestellt, die Division aber vergessen; das Fehlende steht im zweiten Bande auf S. III. In §. 5 folgt wieder etwas Reelles, nämlich der binomische Satz für ganze positive Exponenten nebst Ausdrücken für $cos\, n\alpha$ und $sin\, n\alpha$. Die nächsten drei Paragraphen beschäftigen sich mit Grenzwerthen, wobei der binomische Satz ganz unnöthigerweise benutzt wird. In §. 9 kommt die Vieldeutigkeit von $\sqrt[n]{a+bi}$ zur Sprache, welcher Gegenstand doch wohl dahin gehörte, wo von $(a+bi)^m$ die Rede war (§. 4); da hier ferner der Sinn von e^{a+bi} und $log\,(a+bi)$ erörtert wird, so giebt §. 9 ein zweites Bruchstück von der Theorie des Imaginären; das letzte Drittheil, welches $sin\,(\alpha+i\beta)$, $arcsin\,(\alpha+i\beta)$ etc. untersuchen müsste, hat Referent nicht entdecken können. Die Abschnitte II—V (§. 10—25) beschäftigen sich in gewöhnlicher Weise mit den einfachen und mehrfachen Differentiationen der Functionen einer einzigen Variabelen, mit den vieldeutigen Formen $\frac{0}{0}$, $0.\infty$ etc. und mit den grössten und kleinsten Werthen der Functionen einer Variabelen. Es wäre nun nichts natürlicher gewesen, als hierauf den Taylor'schen Satz folgen zu lassen, damit doch wenigstens die Differentialrechnung der Functionen einer Variabelen zum Abschlusse käme, der Verfasser dagegen überrascht in Abschnitt VI den Leser mit einem Stück Integralrechnung (§. 26—38), welches auch wieder unvollständig bleibt, weil nicht gezeigt werden kann, wie man sich in den Fällen, wo die gewöhnlichen Mittel versagen, mit unendlichen Reihen hilft. Abschnitt VII enthält Einiges von den bestimmten Integralen, wobei Hauptsachen, wie näherungsweise Berechnung, Differentiation in Beziehung auf Constanten etc. einstweilen übergangen sind. In Abschnitt VIII findet man diejenigen geometrischen Anwendungen der Integralrechnung, welche nur einfache Integrationen erfordern, also Quadratur, Cubatur etc. Die Rectification ebener Curven (natürlich soweit sie ohne Reihenentwickelungen gelingt), ist in §. 47 angegeben, die Rectification doppelt gekrümmter Curven ist aber vergessen, obschon sie auch nur eine einfache Integration verlangt. Man findet sie in Abschnitt XIII, welcher die Ueberschrift „Vielfache Integrale" trägt! Der neunte Abschnitt sieht so buntscheckig aus wie eine Theatergarderobe; er verdient daher besondere Aufmerksamkeit. Zuerst wird der Taylor'sche Satz bewiesen und zwar auf die allerumständlichste Weise; der Verfasser geht nämlich von der Gleichung

$$f(a+h)-f(a)=\int_0^h f'(a+h-x)\,dx$$

aus und wendet rechter Hand n-mal nach einander die theilweise Integration an. — Und doch hat der Verfasser den weit kürzeren Beweis (mittelst einer einzigen Differentiation) und die vom Referent angegebene allgemeine Restform gekannt, denn er theilt Beides in Zusatz R zu Bd. II mit! An die Sätze von Taylor und Maclaurin knüpfen sich selbstverständlich die gewöhnlichen Reihenverwandlungen, und da die meisten derartigen Reihen unendlich werden, so hätte billigerweise die Lehre von der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen als Vorstudie eingeschaltet werden müssen. Diess ist nicht geschehen, und in Folge davon kommt *jene wichtige Partie* nirgends zu rechter Geltung; es wird bald da bald dort an ungefähr 8—10 verschiedenen Stellen des ganzen voluminösen Werkes eine Notiz über Convergenz oder Divergenz der Reihen beigebracht und es also dem armen Schlucker von Studenten überlassen, aus diesem zerfahrenen Wesen sich das Nöthige zusammenstellen. Sonderbarer Weise erklärt der Verfasser auf S. 208, dass die Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen „ein Gegenstand von minderer Wichtigkeit ist" - - der Verfasser scheint demnach gar nicht zu wissen, dass bei einer Unzahl von physikalischen und mechanischen Problemen den Reihenentwickelungen die Hauptrolle zufällt und dass es z. B. bei sämmtlichen Störungsrechnungen fast ausschliesslich auf die Entdeckung brauchbarer Reihen ankommt. Aus jener irrigen Meinung mag auch die Oberflächlichkeit entsprungen sein, womit der Verfasser den erwähnten Gegenstand behandelt. So sind z. B. sämmtliche Restbetrachtungen des Verfassers grundfalsch, wie Referent nachher zeigen wird; ferner sind die Grenzfälle vergessen, z. B. die Fälle $x=+1$ und $x=-1$ bei den Entwickelungen von $(1+x)^m$ und $l(1+x)$, die erst sehr spät in Bd. II Zusatz A und ganz am Ende im Zusatz zu dem Zusatz A nachgeholt werden; endlich wäre es systematisch gewesen, die Reihenentwickelungen für die einfachen Functionen in einem Zuge und nach einer Methode abzuthun, wogegen der Verfasser die Reihen für $\arcsin x$ und $\arctan x$ durch Integration entwickelt und die Reihen für $\tan x$, $\sec x$ etc. ganz vergessen hat, obschon er eine „umfassende" Darstellung verspricht. — Unmittelbar auf die Reihenentwickelungen folgt in §. 56 ein äusserst umständlicher mit Hülfe von Reihen geführter Beweis für die Gleichung

$$Lim\,\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{d^n y}{d x^n};$$

bei des Verfassers Gedankengange muss man also ein tüchtiges Stück Integralrechnung gelernt haben, um den simpeln Satz einzusehen, dass der Grenzwerth des zweiten Differenzenquotienten gleich dem zweiten Differentialquotienten ist. Dieser Beweis beweist entweder, dass der Verfasser keinen Sinn dafür hat, einfache Fundamentalsätze einfach herzuleiten, oder dass es ihm an Geschick fehlt, die einfache Herleitung zu finden. Derselbe Paragraph enthält noch etwas völlig Heterogenes, nämlich die Formel für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve und überdiess einen Zusatz zu §. 22, die Werthbestimmung von $\frac{0}{0}$ betreffend. — Im nächsten Paragraph (57) kommt wieder ein Brocken Integralrechnung, nämlich die Integration durch unendliche Reihen nebst Zusatz zu §. 48, weil dort die Rectification der Ellipse nicht fertig geworden war. Und das Alles steht unter der Rubrik Taylor'scher Satz! — Wahrscheinlich der Abwechselung wegen beschäftigt sich der nächste Abschnitt mit reiner Differentialrechnung (X. Die Sätze von Bürmann und Lagrange), der folgende mit reiner Integralrechnung (XI. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale), dann Nr. XII mit der Differentiation der Functionen

7*

mehrerer Variabelen, Nr. XIII mit vielfachen Integralen, endlich Nr. XIV mit einfachen Integralen.

Der zweite Band fängt mit 16 verschiedenen Zusätzen zu Bd. 1 an; sie sind ebensoviel Beweise, dass der Verfasser bei der Abfassung des ersten Bandes sich die Sache besser hätte überlegen sollen, ehe er die Feder ansetzte. Die Abschnitte XV bis XVIII enthalten die Lehre von den Differentialgleichungen in der gewöhnlichen Reihenfolge jedoch ohne Sorgfalt für bequeme Uebersicht über das reiche Material. Abschnitt XIX giebt die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange, Nr. XX einen Abriss der Theorie der elliptischen Functionen, Nr. XXI Euler'sche Integrale, Integrallogarithmus etc., Nr. XXII Reduction vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden. Und sowie dieser Band mit Zusätzen angefangen hat, so hört er auch mit einem langen Schweife von Zusätzen auf; es folgen deren nicht weniger als 19, deren letzter wieder einen Zusatz zum ersten Zusatze bildet. — Als Beweis, dass der Verfasser nicht einmal eine kleine Theorie gut abgerundet darzustellen versteht, geben wir den Inhalt dessen, was über die Gammafunctionen gesagt ist, genauer wieder. Den Anfang macht in §. 161 eine, längst als ganz ungenügend anerkannte Herleitung des Satzes

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\ldots;$$

dieser hätte bei einer halbwegs systematischen Anordnung viel früher seine Stelle finden müssen (etwa bei Gelegenheit der Reihe für $\sin mz$), denn er spricht eine Eigenschaft des Sinus, nicht aber der Gammafunctionen aus. §. 162 enthält die Definition und einige Eigenschaften von Γ, gleich darauf wird aber der Vortrag der Theorie durch einen nicht dazu gehörenden Excurs über die Integration der Differentialgleichung

$$xy'' + (a_1 + b_1 x)\, y' + (a_0 + b_0 y) = 0$$

unterbrochen. Dann kommt in §. 163 Einiges über bestimmte Integrale, die sich durch Gammafunctionen ausdrücken lassen, und erst in §. 164 kehrt der Verfasser zu der Theorie zurück, um die numerische Berechnung von $\Gamma(a)$ zu zeigen. Die richtige Disposition wäre gewesen: 1) Theorie, d. h. Definition, Eigenschaften und Berechnung von $\Gamma(a)$, 2) Anwendungen der Γ, denn diese Anwendungen, wie z. B. die Reductionen in §. 163, haben keinen praktischen Werth so lange man nicht weiss, dass sich $\Gamma(a)$ berechnen lässt, und dass wirklich eine Tafel dieser Function existirt. Wie fast in jedem Capitel hat der Verfasser auch hier eine Hauptsache vergessen, nämlich den Legendre'schen Satz über das Product

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right),$$

welcher aus der ersten Formel auf S. 296 (§. 162) unmittelbar folgt. Dem Verfasser fällt diess nachträglich ein und er macht daraus Zusatz B auf S. 372. Sehr merkwürdig ist §. 164 auch dadurch, dass hier erst die Convergenz einer Reihe mit alternirenden Vorzeichen untersucht wird; der Jünger der Wissenschaft muss also bis zur Theorie der Gammafunctionen vordringen, um zu erfahren, dass die Reihe $u_0 - u_1 + u_2 -$ convergirt, wenn $u_0 > u_1 > u_2 > \ldots$ und $Lim\, u_n = 0$ ist!

Etwas mehr Ordnung herrscht im dritten Bande, der sich ausschliesslich mit der Integration der partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, doch giebt es auch hier nachträgliche Zusätze im Innern und zahlreiche Anhängsel vorn und hinten.

Wie unbequem der Gebrauch des Buches sein muss, mögen folgende Beispiele zeigen. Um eine gegebene Reihe auf ihre Convergenz oder Divergenz zu prüfen, hat man nachzuschlagen: IX, §. 53, 54, 57; X, §. 60; XV, §. 92 in der Note, Anhang A und Zusatz zu Anhang A. Die einfache Untersuchung über die Gestalt einer ebenen Curve, ihre Tangenten, Normalen und Krümmungshalbmesser verlangt das Nachsehen auf S. 38, 69—71, 88—89, 221—223, und doch wird damit nicht einmal vollständige Auskunft erlangt, wenigstens hat Referent die Formeln für Subtangente, Subnormale, Asymptoten, die Gleichungen der Tangente und Normale ebensowenig finden können als die bekannte Regel, wonach sich die convexe oder concave Krümmung einer Curve entscheidet. Reinweg vergessen sind auch die Formeln zur Bestimmung der Tangenten, Normalebenen und Krümmungshalbmesser an räumlichen Curven, sowie der Berührungsebenen und Normalen an krummen Flächen. Diess verdient bei einer angeblich umfassenden Darstellung um so schärferen Tadel, als man alle diese Dinge in der Mechanik nothwendig braucht, was der Verfasser doch wissen musste.

Hinsichtlich des zweiten der anfangs aufgestellten Gesichtspunkte ist wenig zu sagen. Die Darstellung ist deutlich, wenn auch ohne stylistische Sorgfalt. In der Orthographie scheint keine rechte Consequenz zu liegen; wer Zylinder statt Cylinder schreibt, sollte folgerichtig auch Differenzial nicht aber Differential schreiben.

Was die Strenge der Deduction anbelangt, so dürfte dieselbe häufig nicht gewahrt sein. Bei dem Taylor'schen Satze z. B. will der Verfasser die Bedingungen aufsuchen, unter welchen der Rest

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\vartheta h)$$

für $n = \infty$ gegen die Null convergirt; er benutzt hierzu den Satz, dass

$$Lim\, \psi(n) = 0 \text{ ist, wenn } Lim \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} < 1$$

und meint nun, die Sache sei in Richtigkeit wenn

$$Lim \frac{\dfrac{h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} f^{(n+2)}(x+\vartheta h)}{\dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\vartheta h)} < 1$$

werde. Er übersieht hierbei, dass der unbekannte echte Bruch ϑ von n abhängt, dass also jener Quotient die Form

$$\frac{h}{n+2} \cdot \frac{f^{(n+2)}(x+\vartheta_2 h)}{f^{(n+1)}(x+\vartheta_1 h)}$$

erhält, worin ϑ_1 und ϑ_2 verschiedene Brüche sind. Für die beabsichtigte Untersuchung macht diess einen gewaltigen Unterschied, weil man nicht so heben kann wie es der Verfasser thut; mit anderen Worten, die vom Verfasser angegebenen Werthe des Bruches $R_{n+2} : R_{n+1}$ sind sammt und sonders falsch. — Dass die Herleitung des unendlichen Productes für *sin x* verfehlt ist, wurde bereits erwähnt; ebenso ungenau ist die Art und Weise, wie der Verfasser die Zerlegung echt gebrochener Functionen in Partialbrüche motivirt. Einige zweifelhafte Punkte bei den bestimmten Integralen muss Referent übergehen, weil deren Auseinandersetzung zu weit führen würde. Zu rügen ist noch, dass der Verfasser kein Wort über die Convergenz und Divergenz der Doppelreihen sagt; allerdings kommt im Buche fast nirgends eine Doppelreihe vor (weil nämlich die Reihen für *tan x*, *cot x* etc. vergessen sind) und da hat natürlich der Verfasser auch nicht daran gedacht — von einer „umfassenden" Darstellung der Analysis muss man aber eine Auseinandersetzung hierüber verlangen, damit der Studirende wisse, wie er sich bei diesem Gegenstande, der mitunter seine eigenthümlichen Schwierigkeiten darbietet, zu verhalten habe.

Schliesslich muss Referent noch eine, leider auch nicht zur Empfehlung dienende Eigenthümlichkeit des Buches hervorheben. So oft nämlich der Verfasser irgend eine Differentialformel, einen Integralwerth oder das Integral einer Differentialgleichung gefunden hat, bringt er auch alle erdenklichen Anwendungen auf Mechanik, Optik, Wärmelehre, Astronomie etc. hinterdrein. Diess liesse sich vertheidigen, wenn z. B. die betreffende Differentialgleichung schlechthin als Beispiel vorgelegt und nur in Parenthese gesagt wäre, dass diese Differentialgleichung bei diesem oder jenem physikalischen Probleme eine Rolle spielt; gar nicht zu entschuldigen aber ist es, dass der Verfasser die zu integrirenden Differentialgleichungen und sonstigen Probleme fremder Wissenschaften *ab ovo* entwickelt. So findet man z. B. in einem und demselben Paragraphen 1) Verticalschwingungen eines an einem elastischen Faden hängenden Körpers, 2) die Curve, welche ein Hund beschreibt, der seinem Herren nachläuft, 3) Bewegung im widerstehenden Mittel, 4) Wärmebewegung in ebenen und Kugelschichten; das Alles ist aber gerade so behandelt wie in einem Lehrbuche der Mechanik oder Wärmetheorie. Wozu diese Razzia's nützen sollen, bleibt dem Referent vollkommen unerklärlich, da sicherlich kein Mensch aus diesem bunt durcheinander gewürfelten Bruchstücken Mechanik, Wärmetheorie etc. lernen wird; in der That dienen sie nur dazu, um die ohnehin vorhandene grosse Confusion in's Colossale zu übertreiben.

Als Ganzes betrachtet, macht des Verfassers Arbeit denselben Eindruck wie eine Bibliothek, deren Bücher so durcheinander geworfen sind, dass das Zusammengehörige nicht mehr beisammen steht. Und sowie eine derartige Bücheranhäufung fast gänzlich unbrauchbar ist, so dürfte auch des Verfassers Arbeit ziemlich nutzlos sein. Wer die Wissenschaft sehr genau kennt, würde sich nach einiger Zeit wohl darin zurecht finden; solche Leute bedürfen aber überhaupt derartiger Werke nicht, sie halten sich einfach an die Originalquellen. Als Lehrbuch ist des Verfassers Opus noch weniger zu brauchen; es würde nur die Schüler confus machen.

Herr Professor Dienger ist offenbar ein äusserst belesener, kenntnissreicher, auch mit der angewandten Mathematik wohl vertrauter Mann, er ist aber leider in dem Irrthume befangen, dass bedeutende Gelehrsamkeit schon ausreichend zum Lehrbücherschreiben befähige, und er hat dem entsprechend gemeint, seine Sache recht gut zu machen, wenn er nur möglichst viel Material zusammenpacke. So wenig aber ein Haufen von Steinen, Balken, Thüren, Fenstern etc. für ein Haus gelten kann, ebensowenig ist eine Sammlung analytischer Lehren ein Lehrbuch der Analysis; vielmehr kommt es hier wie dort ganz wesentlich darauf an, das vorhandene Material in eine zweckmässige und, wenn möglich, auch schöne Form zu bringen. Diese Formgebung ist, wie jede Gestaltung, eine vorzugsweis künstlerische Thätigkeit; zur Kunst aber gehört von Hause aus Talent. — Wer sich die Mühe nicht verdriessen lässt, des Verfassers Darstellung der Analysis anzusehen, der wird mit dem Referent darin übereinstimmen, dass der Verfasser keine Spur jenes gestaltenden Talentes besitzt, und ebendesswegen muss man dem Verfasser in seinem eigenen Interesse rathen, seine Schriftstellerei entweder auf die Abfassung von Monographieen zu beschränken (womit der Verfasser bekanntlich Glück gemacht hat), oder bei grösseren Unternehmungen sich erst von Jemand Anderem eine genaue Disposition entwerfen zu lassen.

SCHLÖMILCH.

Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Von G. KIRCHHOFF. Besonderer Abdruck aus den Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1861. Zweite, durch einen Anhang vermehrte Ausgabe. Mit drei Tafeln. Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz und Gossmann). 1862.

Es ist sehr vortheilhaft, wenn sich das wissenschaftliche Publicum Originalabhandlungen, welche wissenschaftliche Entdeckungen behandeln, auf leichte Weise verschaffen kann. Die Mittheilung des Entwickelungsganges einer Entdeckung führt natürlich von selbst zur Mittheilung der wichtigsten Literatur über den Gegenstand und die klare Einsicht des Entdeckers in den Gegenstand trägt sich meist so auf seine Darstellung über, dass dieselbe zu einer anziehenden Lectüre für den Freund der Wissenschaft wird. Wenn das Gesagte einerseits eine ziemlich allgemeine Giltigkeit besitzt, so hat es andererseits directen Bezug auf die gegenwärtige Schrift, welche dem Physiker vom Fache, sowie dem Lehrer und Freunde dieser Wissenschaft nur willkommen sein wird. Man muss es als einen glücklichen Gedanken ansehen, dass ein besonderer Abdruck der Originalabhandlung über einen Gegenstand von solchem Interesse veranstaltet worden ist, wodurch die Verbreitung der vortrefflichen Abhandlung in weiten Kreisen möglich wird.

Die Schrift enthält: 1) Eine Abhandlung über das Sonnenspectrum, welche mit dem Hinweis auf die Unvollkommenheit der bisherigen Abbildungen des Sonnenspectrums beginnt, hierauf die Beschreibung und Abbildung des ausgezeichneten optischen Apparates von Steinheil giebt, dessen sich der Verfasser zu seinen Beobachtungen des Spectrums bediente, und endlich die Beschreibung des Sonnenspectrums liefert, dessen Abbildung in ausgezeichneter Schärfe und Deutlichkeit und mit Bezeichnung der hellen Linien des Flammenspectrums der chemischen Elemente auf zwei dem Ganzen beigegebenen Steindrucktafeln zur Ansicht gebracht wird (wegen noch nicht beendigter Revision der Beobachtungen erst das Stück *A* bis *G* des Spectrums).

2) Die Resultate der Beobachtungen des Flammenspectrums von Seiten verschiedener Experimentatoren.

3) Die experimentelle Begründung des Satzes, dass gefärbte Flammen das Licht ihrer eigenen Farbe vorzüglich stark absorbiren.

4) Die Anwendung des vorigen Satzes bei der Analyse der Sonnenatmosphäre durch Spectralbeobachtungen.

5) Die damit zusammenhängenden Vorstellungen von der physischen Beschaffenheit der Sonne.

Dem Schlusse der Abhandlung folgt ein Anhang, enthaltend den strengen theoretischen Beweis des Satzes, der in No. 3 experimentell begründet wurde; der Text schliesst dann mit einem Verzeichniss der auf den Steindrucktafeln abgebildeten Streifen.

Wir zweifeln nicht, dass der gegenwärtige besondere Abdruck namentlich auch wegen der werthvollen genauen Abbildungen eine Nachfrage veranlassen wird, welche mit der Wichtigkeit und dem erhöhten Interesse des Gegenstandes selbst im Einklang steht. Die äussere Ausstattung schliesst sich dem Inhalte der Schrift würdig an. Dr. Kahl.

Bibliographie

vom 15. August bis 15. October 1862.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1862. Heft 2 u. 3. München, Franz in Comm. à 16 Ngr.

Mathematische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1862. Berlin, Dümmler in Comm. 1 Thlr.

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1861. Ebendaselbst. 4 Thlr.

Crelle's Journal für Mathematik, herausgegeben von C. W. Borchardt. Band 61, Heft 1. Berlin, Reimer. *pro compl.* 4 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica ed. E. A. Zuchold. 12. Jahrg. 1. Heft, Januar — Juni. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 6 Ngr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin de l'acad. des sciences de St. Pétersbourg. Tome V, livr. 1 *et* 2. Leipzig, Voss. 28 Ngr.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. VII. série. Tome V, Nr. 1 — 4. Ebendaselbst. 3 Thlr. 18 Ngr.

Reine Mathematik.

Koppe, R., Anfanggründe der reinen Mathematik. 1. u. 2. Theil. 6. Aufl. Essen, Bädeker. 1 Thlr. 9 Ngr.

Schmidt, J. P., Die Elemente der Algebra. 4 Theile. Trier, Lintz'sches Verl.-Cont. 1 Thlr.

Gifforn, D., Sammlung derjenigen mathematischen Aufgaben, welche auf den preuss. Gymnasien in den letzten Jahren als Maturitätsaufgaben den Abiturienten gestellt sind. Braunschweig, Schulbuchhdlg. ⅙ Thlr.

Stegemann, M., Grundriss der Differential- und Integralrechnung. 1. Theil. Differentialrechnung. Hannover, Helwing. 2 Thlr.

Neumann, C., Ueber die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art. Halle, Schmidt. 6 Ngr.

ROCH, G., Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molecular-physikalischen Fernwirkungen. Inaug. Dissert. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅓ Thlr.

BURHENNE, H., Die Maxima in der Zins- und Rentenrechnung. Cassel, Krieger. 6 Ngr.

HATTENDORF, K., Ueber die Sturm'schen Functionen. Inaug. Dissert. Hannover, Hahn. ⅔ Thlr.

SCHRADER, W., Neue allgemeine Methode der Bestimmung des Maximums und Minimums. Halle, Schrödel & Simon. ¼ Thlr.

BALTZER, R., Die Elemente der Mathematik. 2. Bd. Planimetrie und Stereometrie. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr.

TEMME, J., Systeme der Geometrie. 1. Theil: Planimetrie. Arnsberg, v. Schilgen. ⅓ Thlr.

MINK, W., Beschreibende und analytische Geometrie als Leitfaden etc. Crefeld, Schüller. 20 Ngr.

ERLER, W., Einleitung in die analytische Geometrie und in die Lehre von den Kegelschnitten. Berlin, Dümmler. ⅓ Thlr.

LISTING, J. B., Der Census räumlicher Complexe, oder: Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern. Göttingen, Dieterich. 1⅓ Thlr.

FERMAT, P. de, *Varia opera mathematica. Tolosae* 1679. *Novo invente usi iterum expresserunt* R. FRIEDLÄNDER *et* FILIUS. Berlin, Friedländer & Sohn. 10 Thlr.

TAYLOR, B., *Methodus incrementorum directa et inversa. Londini* 1717. Ebendaselbst. 3 Thlr.

Angewandte Mathematik.

REULAUX, F., Die Thomas'sche Rechenmaschine. Freiberg, Engelhardt. ⅓ Thlr.

PLANCK, K. C., Grundzüge einer geometrischen Naturwissenschaft oder einer Mathematik der Naturformen etc. Tübingen, Fues. 12½ Ngr.

HANSEN, P. A., Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. 1. Abth. Leipzig, Hirzel. 3 Thlr.

KLINKERFUES, M., Ueber Bahnbestimmungen von Planeten und Kometen aus verschiedenen Combinationen von Beobachtungen, Göttingen, Dieterich. 12 Ngr.

ROUVROY, W. H. v., Theorie der Bewegung der Spitzgeschosse gezogener Feuerwaffen. Dresden, Dietze. ⅔ Thlr.

ZEUNER, G., Die Schiebersteuerungen; mit besonderer Berücksichtigung der Locomotivensteuerungen. 2. Aufl. Freiberg, Engelhardt. 1⅔ Thlr.

REDTENBACHER, F., Der Maschinenbau. 1. Band. Mannheim, Bassermann. 5⅓ Thlr.

SCHEFFLER, H., Ueber Gitter- und Bogenträger und über die Festigkeit der Gefässwände insbesondere der Dampfkessel etc. Braunschweig, Vieweg. 1½ Thlr.

BERNOULLI, J. G., Vademecum des Mechanikers. 11. Auflage bearbeitet von AUTENHEIMER. Stuttgart, Cotta. 14 Ngr.

Astronomical and meteorological observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford in the years 1859 *and* 1860 *of* R. MAIN. *Oxford, Parker.* 5⅓ *Thlr.*

Physik.

MÜLLER, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 3. Auflage. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

— — Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 6. Aufl. Lief. 1 und 2. Ebendaselbst. 1 Thlr.

CRÜGER, F. E. J., Grundzüge der Physik. 8. Aufl. Erfurt, Körner. ½ Thlr.

— — Schule der Physik. 5. Aufl. Ebendaselbst. 2 Thlr.

SPILLER, Ph., Grundriss der Physik. 3. Aufl. Triest, Direction des österreich. Lloyd. 1⅓ Thlr.

SCHMID, E. E., Grundriss der Meteorologie. Leipzig, Voss. 1 Thlr. 18 Ngr.

QUINTIUS ICILIUS, H. v., Abriss der Experimentalphysik. Hannover, Schmorl & v. Seefeld. 1 Thlr.

EVERS, C. M., Einleitung in die Physik und Chemie. Essen, Bädeker. 2 Thlr.

HANTZSCH, R., Goethe's Farbenlehre und die Farbenlehre der heutigen Physik. Dresden, Türk. ⅚ Thlr.

ROBIDA, C., Erklärung der Beugung, Doppelberechnung und Polarisation des Lichts aus den Grundzügen einer naturgemässen Atomistik. Klagenfurt, Leon. 12 Ngr.

WEBER, W., Zur Galvanometrie. Göttingen, Dieterich. 1 Thlr.

Meteorologische waarnemingen in Nederland en zijne bezittingen. Uitgegeven door het kon. ned. meteorolog. Instituut. Utrecht, Kemink & Zoon. 5 *f.*

HIRN, G. A., *Exposition analytique et experimentale de la théorie mecanique de la chaleur; contenant la traduction du livre de* G. ZEUNER: Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. *Paris, Mallet-Bachelier.* 14 *Frcs.*

ARAGO, F., *Oeuvres complètes publiées par A. Barral. Tables.* Leipzig, Weigel. 4 Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1861.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

193. *Notes on trilinear coördinates.* *Slesser.* *Quart. Journ. math. IV.* 134.
194. *Courbes rapportées à des coordonnées polaires.* *Prouhet.* *N. ann. math. XX,* 344.
195. *Applicazione del discriminante nullo alla risolutione di alcuni problemi.* *Azzarelli.* *Annali mat. III,* 16.
196. Geometrische Untersuchungen über einige Curven. Böklen. Grun. Archiv XXXVII, 105.
197. Ueber cyclische Curven. Böklen. Grun. Archiv XXXVII, 118.
198. *Geometrical theorem.* *Salmon.* *Quart. Journ. math. IV,* 152.
191. Von zwei Systemen dreier in gerader Linie liegender Punkte. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 475.
200. *Sur la courbe parallele à l'ellipse* *Cayley.* *Annali mat. III,* 311.
201. *On a property of a plane triangle.* *Walton.* *Quart. Journ. math. IV,* 329.
Vergl. Ellipse, Geschichte der Mathematik 297, 298, Hyperbel, Kegelschnitte, Kreis, Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

202. *On quadriplanar coordinates.* *Salmon.* *Quart. Journ. math. IV,* 231, 271.
203. *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes.* *Kummer.* *N. ann. math. XX,* 255, 359. [Vergl. No. 13.]
204. Ueber eine durch zwei feste Punkte und zwei unter gegebenen Bedingungen bewegliche Geraden bestimmte Kugel. Böklen. Grun. Archiv XXXVII, 253.
205. *Teorema di geometria.* *Dorna.* *Annali mat. III,* 252.
206. *On the cubic centres of a line with respect to three lines and a line.* *Cailey.* *Phil. Mag. XXII,* 433. [Vergl. Bd. VI, No. 246.]
207. *Caractères géometriques des lignes de faîte ou de thalwey.* *Breton (de Champ).* *Compt. rend. LIII,* 808.
208. Ueber eine Aufgabe von der geraden Linie und Ebene im Raume. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 445.
209. *Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe.* *Kessler.* *N. ann. math. XX,* 275.
210. *Sur quelques systèmes de surfaces orthogonales obtenus par la méthode des coordonnées elliptiques.* *Roberts.* *Compt rend. LIII,* 546, 724.
211. *Construction géométrique des surfaces ayant pour lieux des centres de courbure les deux coniques focales d'un système de surfaces homofocales du second degré.* *Roberts.* *Compt. rend. LIII,* 799, 1118. — *Mannheim* *ibid.* 921.
212. *Concerning curves of double curvature.* *Greer.* *Quart. Journ math. IV,* 183.
213. *Description par points d'une manière uniforme des deux courbes à double courbure du quatrième ordre de la courbe à noeud et de la courbe du troisieme ordre.* *Chasles.* *Compt. rend LIII,* 767.

214. *Description des courbes à double courbure de tous les ordres sur les surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre.* Chasles. *Compt rend. LIII*, 884.
215. *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloide à une nappe.* Chasles. *Compt. rend. LIII*, 985.
216. *Propriétés générales des courbes gauche tracées sur l'hyperboloide.* Chasles. *Compt. rend. LIII*, 1077.

Vergl. Ellipsoid, Hyperboloid, Kegelschnitte 324, 332, Krümmung 338, Oberflächen, Oberflächen zweiter Ordnung, Paraboloid, Sphärik 426.

Arithmetische Progression.

217. *Formule barométrique de M. Babinet.* Cuenoud. *N. ann. math. XX*, 356.
218. Ueber Bedeutung und Giltigkeit einer gebrochenen Gliederzahl. Gronau. Grun. Archiv XXXVII, 480. [Vergl. Bd. VI, No. 378.]
219. Zwei Sätze von höheren arithmetischen Reihen. Molitor. Grun. Archiv XXXVII, 244.

Astronomie.

220. *Sur une formule propre à faciliter le développement de la fonction perturbatrice.* Puiseux. *Journ. Mathém. XXVI*, 385.
221. *On the variations of the elements in the planetary theory.* Cheyne. *Quart. Journ. math. IV*, 220, 334.
222. Anfrage an die praktischen Astronomen wegen eines theoretischen Bedenkens, die Beobachtungen Saturns gegen die Zeit seiner Quadratur betreffend. Lehmann. Astr. Nachr. LV, 1, 65.
223. *Examen d'un récent mémoire de M. Plana sur la force répulsive et le milieu résistant.* Faye. *Compt. rend. LIII*, 173, 253.
224. Exacte Berechnung der Gauss'schen Constante *k*. Lehmann. Astr. Nachr. LVI, 321.
225. Ueber die Hypothesen zur Erklärung der Beschleunigung der Umläufe des Encke-schen und Faye'schen Kometen. Moeller. Astr. Nachr. LV, 273, 321.
226. *On Herschel's lunar theory.* Routh. *Quart. Journ math. IV*, 272.
227. Ueber Eble's Stundenzeiger. v. Littrow. Wien. Acad. Ber. XLII, 203. — Grunert. Grun. Arch. XXXVII, 420.

Vergl. Kegelschnitte 324, Mechanik 352.

Attraction.

228. *On certain theorems in the theory of attractions.* Warren. *Quart. Journ math. IV*, 144.

B.

Bestimmte Integrale.

229. Zur Theorie der bestimmten Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. VI, 289.
230. Ueber einige allgemeine Formeln zur Auswerthung bestimmter Integrale. Lommel. Grun. Archiv XXXVII, 433.
231. Methode zur Berechnung einer Transcendenten. Lommel. Grun. Arch. XXXVII, 349. [Vergl. No. 128.]
232. *Sur une certaine transformation des integrales.* Bouniakofski. *Bull. Acad. Petersb. II*, 136.
233. Ueber das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{(z^m-1)\,dz}{\log z}$. Wolfers. Grunert's Archiv XXXVII, 245.
234. *Sur une integrale définie.* Ostrogradski. *Bull. Acad. Petersb. III*, 65.
235. Ueber einige bestimmte Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. VI, 405.
236. *On certain definite integrals.* Sylvester. *Quart. Journ. math. IV*, 319.
237. *On the transformation of certain multiple integrals.* Russel. *Quart. Journ. math. IV*, 163, 316.

Vergl. Reihen 423.

Binomialcoefficienten.

238. *Sommation de certains coefficients binomiaux.* Catalan. *N. ann. math. XX*, 260.
239. *Propriété des coefficients du binome.* Baehr. *N. ann. math. XX*, 417.

C.

Cartographie.

240. *On a projection by balance of errors for maps applying to a verg large extent of the earth's surface, and comparision of this projection with other projections.* Airy. *Phil. Mag.* XXII, 409.

Combinatorik.

241. *Mémoire sur la théorie générale des permutations.* Despeyrous. *Journ. Mathém.* XXVI, 417.
242. Ueber die Anzahl der Geraden, Ebenen und Punkte, welche durch gegebene Punkte, Gerade und Ebenen in der Ebene und im Raume bestimmt werden. Bretschneider. Zeitschr. Math. Phys. VI, 311.
243. *On tactic.* Sylvester. *Phil. Mag.* XXII, 45. [Vergl. No. 32.]
244. *On Kirkman's problem respecting certain triadic arrangements of fifteen symbols.* Woolhouse. *Phil. Mag.* XXII, 510. [Vergl. No. 32.]
245. *Remark on the tactic of 9 elements.* Sylvester. *Phil. Mag.* XXII, 144
246. *On a generalisation of a theorem of Cauchy on arrangements.* Sylvester. *Phil. Mag.* XXII, 378. *rend.* LIII, 644, 722. [Vergl. No. 36.]

Cubatur.

247. *Volume d'un pentaèdre dont quatre faces sont planes et la cinquième un paraboloide.* Cuenoud. *N ann. math.* XX, 314.
248. *Sur l'application du principe de moindre action à la détermination du volume de fluide qui s'écoule d'un déversoir.* Braschmann. *Compt. rend.* LIII, 1112.

Cubische Formen.

249. *The doctrine of cubes.* Elefanti. *Quart. Journ. math.* IV, 339.

D.

Determinanten.

250. *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni.* Brioschi. *Annali mat.* III, 160. [Vergl. Bd. V, No. 287.]
251. *Sur quelques fonctions symmétriques des racines des équations algébriques.* Michael Roberts. *Annali mat.* III, 172.
252. *Théorème Sylvester sur les déterminants* Baehr. *N. ann. math.* XX, 419
Vergl. Zahlentheorie 437, 440.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

253. *Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre.* Painvin. *N. ann. math.* XX, 243, 321. [Vergl. No. 37.]
254. *Sur un problème d'homographie.* Cremona. *N. ann. math.* XX, 452.
255. *Determination of the magnitudes of the axes of a surface of the second degree represented by tetrapedral coordinates.* Ferrers. *Quart Journ. math* IV, 140.
256. *Sopra un problema generale di geometria.* Cremona. *Annali mat.* III, 169.
257. *On the geometrical and statical interpretation of a certain determinant.* Walton. *Quart. Journ. math.* IV, 252.
Vergl. Oberflächen 362, 365.

Differentialgleichungen.

258. *Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées.* Bonnet. *Compt. rend.* LIII, 971.
259. *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* J. A. Serret. *Compt. rend.* LIII, 598, 734.
260. Zur Integration partieller Differentialgleichungen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. VI, 262.
261. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$. C. Neumann. Crelle LIX, 335.

Differentialquotient.

262. *Des dérivées d'ordre supérieur de tg φ.* De Virceu. *N. ann. math.* XX, 434. — *Combelle et Kessler. ibid.* 439.
263. *On fractional differentiation.* Wastchenzo Zachartchenzo. *Quart. Journ. math.* IV, 237.

E.

Ellipse.

264. *Equation entre le deux tangentes menées à une ellipse d'un point donné O, les diamètres parallèles à ces tangentes et les distances de O aux deux foyers.* Kessler. *N. ann. math.* XX, 291.
265. *Expression analytique pour les axes principaux d'une ellipse dans l'espace.* Kessler. *N. ann. math.* XX, 268.
266. *Par un point A d'une ellipse on mène deux cordes rectangulaires A B, A C. La ligne B C passe par un point fixe.* Gérono. *N. ann. math.* XX, 386.
267. *Propriété de deux ellipses homofocales l'une inscrite et l'autre circonscrite au même triangle.* Kessler. *N. ann. math.* XX, 289. — Schnée *ibid.* 433.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 200, Krümmung 339, Rectification 415.

Ellipsoid.

268. *Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoide.* Gérono. *N. ann. math.* XX, 405.
269. Ueber die Gestalt des dreiachsigen Ellipsoids. Grunert. Grunerts Archiv XXXVII, 482.
Vergl. Geschichte der Mathematik 296, Mechanik 351, Oberflächen 372.

Elliptische Functionen.

270. *La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni.* Betti. *Annali mat. III,* 65, 298.
271. *Sur les fonctions elliptiques.* Mathet. *Journ. Mathém. XXVI,* 329.
272. *Transformazione dell' integrale ellittico.* Brioschi. *Annali mat. III,* 216.
273. *Riduzione di un integrale alle funzioni ellittiche.* Tortolini. *Annali mat. III,* 183.
274. *Ricerche geometriche sulle funzioni ellittiche.* Tortolini. *Annali mat. III,* 179.
Vergl. Zahlentheorem 442.

F.

Functionen.

275. *Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables.* Emile Mathieu. *Journ. Mathém.* XXVI, 241.
276. *On a certain system of functional symbols.* Cayley. *Quart. Journ. IV,* 225.
277. *On critical and Spencion functions with remarks upon Spence's theory.* Cockle. *Quart. Journ. math. IV,* 97, 265.
278. Ueber einige Transformationen einer unbestimmten Gleichung. Grunert. Grun. Arch. XXXVII, 124.

G.

Geodäsie.

279. Ueber die Figur der Erde. v. Schubert. Astr. Nachr. LV, 97.
280. Ueber Flächenmessungen. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 485.
281. Ueber die Excentricität der Boussole. Grunert. Grun. Arch. XXXVII, 458.
282. *Sur une nouvelle formule barométrique.* Babinet. *Compt. rend. LIII,* 567.

Geodätische Linie.

283. Elementar-geometrischer Beweis der Grundeigenschaft der kürzesten oder geodätischen Linie auf einer beliebigen Fläche und darauf gegründete Entwickelung der allgemeinen Gleichungen der kürzesten oder geodätischen Linie. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 264.

Geometrie (descriptive).

284. Bemerkung über Curvenconstructionen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. VI, 260. [Vergl. Bd. V, No. 179].
285. *Etant données deux droites A, B dans l'espace construire une troisième droite qui passe avec A un angle donne α et avec B un angle β.* Cherpin et Siacci. *N. ann. math.* XX, 296.

Geometrie (höhere).

286. *Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes.* De Jonquières. Crelle LIX, 313.

287. *Démonstration nouvelle d'un théorème connu.* P. Serret. *Compt. rend. LIII*, 507.
288. *Proposition sur deux transversales d'une conique.* Cremona. *N. ann. math. XX*, 342.
Vergl. Combinatorik 242, Kegelschnitte 329.

Geschichte der Mathematik.

289. *Rapport sur diverses notes de M. Breton (de Champ) relatives à la question des porismes.* J. A. Serret. *Compt. rend. LIII*, 699.
290. *Premier ouvrage d'arithmétique imprimé (1478). N. ann. math. XX. Bull. de bibl.* 52.
291. *Le talmud et Kepler. N. ann. math. XX. Bulletin de bibl.* 63.
292. *Kepler et Wallenstein. N. ann. math. XX. Bulletin de bibl.* 78.
293. *Les trois Clairaut. N. ann. math. XX. Bulletin de bibl.* 49, 87.
294. Nekrolog von Lejenne-Dirichlet. Kummer. *Annali mat. III*, 221, 283.
295. *Nécrologue de Joachimsthal. N. ann. math. XX. Bulletin de bibl.* 67.
296. *Note sur les lignes de courbure de l'ellipsoide.* Dewulf. *N. ann. math. XX*, 424.
297. Prioritätsrechte der Betrachtung inverser Curven. Bellavitis. *Annali mat. III*, 60.
298. *Sulla curva logociclica.* Tortolini. *Annali mat. III*, 317. — *N. ann. math. XX. Bulletin de bibl.* 82.
299. *Les trois Metius et le telescope. N. ann. math. XX. Bulletin de bibl.* 51.
300. Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. VI, 373. [Vergl. Bd. VI, No. 317.]
Vergl. Astronomie 225, Mechanik 352, Operationscalcül 385, Zahlentheorie 441.

Gleichungen.

301. *Exact resolution of algebraical equations in all the solvible cases.* Paxton Young. *Quart. Journ. math. IV*, 341.
302. *Theory of generic equations.* Blissard. *Quart. Journ. math. IV*, 279.
303. *Propriété d'une équation à coefficients commensurables ayant une racine irrationnelle.* Gérono. *N. ann. math. XX*, 403.
304. *Solution d'une équation cubique littérale.* Jaufroid. *N. ann. math. XX*, 295.
305. *Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré. N. ann. math. XX*, 421.
306. Beitrag zur Auflösung cubischer Gleichungen mittelst cyklischer und hyperbolischer Functionen. Matzka. Grun. Archiv XXXVII, 309.
307. Ueber die Gleichungen fünften Grades. Kronecker. Crelle LIX, 306.
308. *Sur l'invariant du 18e ordre des formes du cinquième degré et sur le role, qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré.* Hermite. Crelle LIX, 304.
309. *On the equation of the squares of the differences of the roots of a quintic.* Michael Roberts. *Quart. Journ. math. IV*. 234.
310. *Résolution d'une équation litterale du sixième degré.* De Virieu. *N. ann. math. XX*, 353. — *Darboux. ibid.* 436.
311. Ueber die Auflösung dreier Gleichungen mit drei unbekannten Grössen, von denen wenigstens zwei lineare Gleichungen sind. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 442.
Vergl. Functionen 277, homogene Functionen.

H.

Homogene Functionen.

312. *Sur les covariants des formes binaires du cinquième degré.* Michael Roberts. *Annali mat. III*, 340.
313. *On the covariants of a binary quantic of the n-th degree.* Michael Roberts. *Quart. Journ. math. IV*, 168, 324.
314. *Théorème d'algèbre sur les sommes des puissances des racines.* Michael Roberts. *N. ann. math. XX*, 421. [Vergl. No. 91.]
Vergl. Gleichungen 308.

Hydrodynamik.

315. Ueber die Reibung der Flüssigkeiten. O. E. Meyer. Crelle LIX, 229.
Vergl. Cubatur 248.

Hyperbel.

316. *Proposition sur les distances des foyers d'une hyperbole et d'une ellipse dont elle est tangente.* Jaufroid et Blanché-Arrault. *N. ann. math. XX*, 294.

Hyperboloid.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 215, 216.

I.

Imaginäres.

317. *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* *Marie.* *Journ. Mathém.* *XXVI*, 377. [Vergl. No. 96.]

Instrumentale Arithmetik.

318. *Rapport sur l'arithmographe polychrome de M. Dubois.* *J. A. Serret.* *Compt. rend.* *LIII*, 618.

Integralrechnung.

319. Ueber die Bedingungen der Integrabilität. Kronecker. Crelle LIX, 311.
320. Ableitung einiger einfacher Integralausdrücke. Grunert. Grunert's Archiv XXXVII, 363.
321. *Sur l'intégration de la différentielle* $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}dx$. *Tchebychef.* *Bull. Acad. Petersb. III*, 1.

Interpolation.

322. *Sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton.* *Prouhet.* *N. ann. math.* *XX*, 278.
323. *Rapport sur un Mémoire de M. Hoüel relatif à l'application de l'interpolation au développement des fonctions en séries periodiques.* *J. A. Serret.* *Compt. rend.* *LIII*, 830.

K.

Kegelschnitte.

324. Allgemeine Theorie der Kegelschnitte als Curven im Raume betrachtet nebst deren Anwendung auf die Bestimmung der Bahnen der um die Sonne in Kegelschnitten sich bewegenden Weltkörper und der Proximitäten dieser Bahnen. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 1.
325. Ueber die graphische Bestimmung der Kegelschnitte nach Sätzen von Pascal und Brianchon. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. VI, 415.
326. *Method of obtaining any number of points on a conic section.* *W. . B.* *Quart. Journ. math. IV*, 333.
327. *Investigation of the trilinear coordinates of the foci of a conic section.* *Ferrers.* *Quart. Journ math IV*, 235.
328. *Geometrical demonstration of the anharmonic properties of a conic.* *Horne.* *Quart. Journ math. IV*, 278.
329. *Démonstration du théorème Desargues.* *Poudra.* *N. ann. math. XX*, 419. [Vergl. No. 59.]
330. *L'aire d'un triangle réprésenté par les rayons de courbure d'une conique inscrite aux points de tangence.* *Mention.* *N. ann math. XX*, 302.
331. *Geometrical notes.* *Samuel Roberts.* *Quart. Journ. math IV*, 361.
332. *On a geometrical proposition.* *Taylor.* *Quart. Journ. math IV*, 167.
333. *A theorem in conics.* *Cayley.* *Quart. Journ math IV*, 131.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 211, Geometrie (höhere) 288, Sphärik 428.

Kettenbrüche.

334. *On the conjugate recurrence of continued fractions.* *Walton.* *Quart. Journ. math. IV*, 331.

Kreis.

335. Zum Appollonischen Problem. Kurz. Grun. Archiv XXXVII, 346.
336. *On the six points circle.* *Casey.* *Quart. Journ. math. IV*, 245.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 197, Rectification 414.

Kreistheilung.

337. Ueber die gemeinschaftliche Form aller jener ganzen Zahlen, deren jede so beschaffen ist, dass der Kreis durch rein geometrische Construction in eine ihr gleich grosse Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann. Hessel. Grun. Archiv XXXVII, 269.

Krümmung.

338. Allgemeine Theorie der Krümmungslinien. Grunert. Grun. Arch. XXXVII, 205.
339. Ueber den durch drei Punkte einer Ellipse gehenden Kreis und über den Krümmungskreis der Ellipse. Grunert. Grun. Archiv XXXVII, 255.
340. *Sulla curvatura delle curve a doppia curvatura.* *Chio.* *Annali mat. III*, 353.
Vergl. Geschichte der Mathematik 296, Kegelschnitte 330, Perspective.

L.

Logarithmen.

341. *Série logarithmique très convergente.* *Lehmann.* *N ann math. XX*, 438.

M.

Magnetismus.

342. *On the amount of the direct magnetic effect of the sun or moon on instruments on the earth's surface.* *Johnstone Stoney.* *Phil. Mag. XXII*, 294.

Maxima und Minima.

343. *Quel est le plus grand quadrilatère que l'on puisse former avec quatre côtés donnés.* *Gérono.* *N. ann. math. XX*, 391.
344. *Trouver l'aire maximum d'un triangle dont les trois côtés sont x, y, z à condition de $x^3+y^3+z^3=3m^3$.* *Jaufroid.* *N. ann. math. XX*, 294.
345. *On a geometrical theorem of M. Steiner.* *Ferrers.* *Quart. Journ. math. IV*, 92.
346. *When is Venus brightest?* *Herschel.* *Quart. Journ. math. IV*, 232.

Mechanik.

347. *Théorème sur le polygone funiculaire.* *Tevfik.* *N. ann. math. XX*, 447.
348. *On the motion of a flexible string.* *M.* *Quart. Journ. math. IV*, 178.
349. Ueber die Gleichgewichtscurve einer proportional dem Wege ihres Angriffspunktes sich verändernden Kraft. Noeggerath. Zeitschr. Math. Phys. VI, 332.
350. *Static and dynamic stability in the secondery systems.* *Vaughan.* *Phil. Mag. XXII*, 480.
351. *On a transformation in space of Poinsot's momental ellipsoid.* *Warren.* *Quart. Journ. math. IV*, 191.
352. Ueber Leonhard Euler's *Theoria motuum planetarum et cometarum* und die darin behandelten Elemente der Kometen von 1680 und 1744. Wolfers. Astr. Nachr. LV, 129.
353. *On invariant points, lines and surfaces in space and their physical significance.* *Warren.* *Quart. Journ. math. IV*, 306.
354. *Geometrical demonstration of a theorem of M Poinsot.* *N. M. F.* *Quart. Journ. math. IV*, 384.
355. *Memoria intorno ad alcune questioni matematiche.* *Dorna.* *Annali mat. III*, 5.
356. *Sur le nombre des coefficients inégaux des formules donnant les composantes des pressions dans l'intérieur des solides élastiques.* *de Saint-Venant.* *Compt. rend. LIII*, 1107.
357. *Problem in rigid dynamics.* *H. J. S.* *Quart. Journ. math. IV*, 262.
358. Ueber die Reduction ungleicher Schwingungen an Kater's Pendel. Gauss. Grun Archiv XXXVII, 360.
359. *On the mechanics of boughs and the eccentricity of pith.* *Walton.* *Quart. Journ. math IV*, 378.
360. Ueber die zweckmässigste Form der Spitzgeschosse. v. Rouvroy. Zeitschr. Math. Phys. VI, 235.
361. *Sopra la propagazione delle ordre piane di un gaz.* *Riemann.* *Annali mat. III*, 232.
Vergl. Astronomie. Attraction. Determinanten in geometrischer Anwendung 257. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Potential. Wärmetheorie.

O.

Oberflächen.

362. Zur Lehre von den Raumcurven und Flächen. Bischoff. Crelle LIX, 394.
363. *Sopra la teorica generale delle superficie curve.* *Betti.* *Annali mat. III*, 336.
364. *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprieta delle superficie curve.* *Casorati.* *Annali mat III*, 363.

365. Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung. Clebsch. Crelle LIX, 193.
366. Ueber eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen. Weingarten. Crelle LIX, 382.
367. *Proprieta delle superficie curve, che comprende in se come caso particolare il teorema di Dupin sulle tangenti coniugate.* Cremona. *Annali mat. III*, 325.
368. *Sur une espèce particulière de surface gauche du quatrième degré.* Desgranges. *N. ann. math. XX*, 348.
369. *On a geometrical property of the wave-surface.* Walton. *Quart. Journ. math. IV*, 151.
370. *On the generation of the wave surface by the intersection of two sympathetic surfaces of revolution.* Walton. *Quart. Journ. math. IV*, 310.
371. *Sur la surface (4e degré) des ondes de Fresnel.* Durrande. *N. ann. math. XX*, 456.
372. *Sur la surface parallele à l'ellipsoide.* Cayley. *Annali mat. III*, 345.
373. *Discuter la surface donnée par l'équation polaire* $\varrho^3 (3 \sin \vartheta^2 \cos \psi^2 + m \sin \vartheta^2 - 1) = a^3$. Darboux. *N. ann. math. XX*, 458.
Vergl. Geodätische Linie.

Oberflächen zweiter Ordnung.

374. *Mémoire sur la théorie géométrique des surfaces du second ordre.* Meray. *Annali math. III*, 30.
375. Ueber ein System verwandter Curven und Flächen zweiten Grades. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. VI, 353.
376. *On a property of surfaces of the second order.* Walker. *Quart. Journ. math. IV*, 276.
377. *Relations entre trois diamètres conjugués d'une surface du second degré.* Housel. *N. ann math. XX*, 304.
378. *Sulle superficie di second' ordine omofocali.* Cremona. *Annali mat. III*, 241.
379. *On the curves situate on a surface of the second order.* Cayley. *Phil. Mag. XXII*, 35.
380. *Discussion d'une certaine équation du second degré.* Darbouy. *N. ann. math. XX*, 380, 384.
381. *Déterminer le lieu géométrique des centres des cônes de révolution qui passent par la parabole représentée par* $z=0$, $y^2=2px$. Gérono. *N. ann. math. XX*, 389.
382. *Surface engendrée par une droite glissant sur deux droites données et formant avec l'une toujours le même angle qu'avec l'autre.* Kessler. *N. ann. math. XX*, 297.
383. *Sulle coniche e sulle superficie di second' ordine conginate.* Cremona. *Annali mat. III*, 257.
384. Ueber die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. VI, 418.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 211, Determinanten in geometrischer Anwendung 255, Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid, Sphärik.

Operationscalcül.

385. *On Arbogast's calculus of derivations.* Samuel Roberts. *Quart. Journ. math. IV*, 193.
386. *Sur quelques formules générales dans le calcul de opérations.* Spottiswoode. Crelle LIX, 367.
387. *On a method of expressing the combinations and homogeneous products of consecutive numbers and their powers by means of the differences of nothing.* Jeffery. *Quart. Journ. math. IV*, 364.
388. *On the forms* $\Delta^n 0^m$ *and their congeners.* Horner. *Quart. Journ. math. IV*, 111, 204.

Optik.

389. Geometrischer Beweis der Formel für die Vereinigungsweite bei convexen Spiegeln. Looff. Grun. Archiv XXXVII, 484.
390. *Note on the readings of the graduated arc in spectrumanalysis, and distortion of the spectrum.* Wilson. *Phil. Mag. XXII*, 364.
391. *Experiment in optics.* P. J. H. *Quart. Journ. math. IV*, 181.
392. *Some optical theorems concerning biaxal crystals.* Walton. *Quart. Journ. math. IV*, 147.
393. *On a property of conjugate planes of polarization in a biaxal crystal.* Walton. *Quart. Journ. math. IV*, 243.
Vergl. Refraction.

P.

Parabel.

394. *If the subnormal is constant the curve is a parabola.* W. H. B. Quart. Journ. math. IV, 333.

Paraboloid.

395. *Détermination des éléments d'un paraboloide.* Housel. N. ann. math. XX, 305.
396. *Trouver l'équation générale des paraboloides hyperboliques ayant pour plans directeurs deux plans donnés p, p' et dont une génératrice rectiligne soit la droite donnée α parallèle au plan p.* Gérono. N. ann. math. XX, 402.
397. *L'assemblage des termes du second degré de $F(x, y, z)$ quand $F(x, y, z) = 0$ représenté un paraboloide hyperbolique.* Gérono. N. ann. math. XX, 401.

Perspective.

398. *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective.* Peaucellier. N. ann. math. XX, 427.

Planimetrie.

399. *De la circonscriptibilité de certains polygones.* Blanché-Arrault. N. ann. math. XX, 271.
400. *Construction d'un trapèze sans admettre aucun postulatum relatif aux parallèles.* Lefrançois. N. ann. math XX, 422.
401. *Théorème sur les aires de deux polygones réguliers semblables l'un inscrit, l'autre circonscrit.* Kessler. N. ann. math. XX, 273. — Pigeon ibid. 286.
402. *Démonstration géométrique de l'aire du triangle en fonction des côtés, d'après Héron d'Alexandrie.* N. ann. math. XX, 432.
403. Beweise einiger planimetrischen Lehrsätze. Schwarz. Grunert's Archiv XXXVII, 455.
404. *On a mechanical subdivision of the right angle.* Herschel. Quart. Journ. math. IV, 315.

Potential.

405. *Quaternion investigation of the potential of a closed circuit.* Tait. Quart. Journ. math. IV, 143.

Vergl. Differentialgleichungen 201.

Q.

Quadratische Formen.

406. *Sur un certain genre de decomposition d'un entier en sommes de carrés.* Liouville. Journ. Mathém. XXVI, 233.
407. *Moltiplicazione d'alcune forme quadratiche.* Genocchi. Annali mat. III. 202.
408. *Sur la forme $X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2$.* Liouville. Journ Mathém. XXVI, 324.
409. *Sur les deux formes quadratiques $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$, $x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2)$.* Liouville Journ. Mathém. XXVI, 225.
410. *Sur les deux formes $x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$.* Liouville. Journ. Mathém. XXVI, 410.
411. *Sur la forme $x^2 + \cdot y^2 + 4z^2 + 8t^2$.* Liouville. Journ. Mathém. XXVI, 409.

Quadratur.

412. *Sur les planimètres libres.* Bouniakofski. Bull. Acad. Petersb. II, 567.

Vergl. Kegelschnitte 330. Maxima und Minima 343, 344. Sphärik 429.

R.

Rectification.

413. *Construction d'une valeur approchée de π.* Cornu et Cuenoud. N. ann. math. XX, 283. — Blanché-Arrault. ibid. 301.
414. *On an approximate and graphical rectification of the circle.* Herschel. Quart Journ. math. IV, 165,
415. Bemerkung über die Rectification der Ellipse. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. VI, 330.

Refraction.

416. *On terrestrial refraction.* Babinet. Phil. Mag. XXII, 406. Compt. rend. LIII, 394, 417, 520, 597.

Reihen.

417. *On a direct method of obtaining the expansion of the sine or cosine of multiple arcs in terms of powers of the sines or cosines of the simple arc by means of De Moivre's theorem.* Sylvester. *Quart. Journ. math. IV*, 159.
418. *Théorème sur l'élevation à une puissance d'une certaine progression géométrique.* Garcet. *N. ann. math. XX*, 397.
419. *Sommation de* $\Sigma \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$. Kessler. *N. ann. math. XX*, 266. — Prinz *ibid.* 284. — Le Tannéac *ibid.* 393.
420. *Trouver* $\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p + y^p}{p^2}$ *sachant que* $x+y=1$. Dellac. *N. ann. math. XX*, 375.
421. *Développement de* $a^n + b^n$ *en puissances de* $(a+b)$. Kessler et Verharne. *N. ann math. XX*, 284.
422. *Sur le reste de la série de Lagrange.* Popoff. *Compt. rend. LIII*, 795.
423. Ueber die Lambert'sche Reihe. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. VI, 407.
424. *Connaissant la somme d'une série ordonnée par rapport aux puissances ascendantes d'une variable x trouver la somme d'une quelconque des séries que l'on obtient en prenant les termes de n en n.* Dellac. *N. ann. math. XX*, 366.
Vergl. Arithmetische Progression. Logarithmen.

S.

Sphärik.

425. Allgemein giltige Ableitung der Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie und allgemeiner Beweis des Satzes vom Polardreiecke. Schreder. Grun. Archiv XXXVII, 438.
426. *Notes on the Hexahedron inscribed in a sphere.* Merrifield. *Phil. Mag. XXII*, 382.
427. *On the circle which bisects three sides of a spherical triangle.* Hart. *Quart. Journ. math. IV*, 260.
428. Ueber confocale sphärische Kegelschnitte. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. VI, 326.
429. *Rapport des aires de certaines courbes sur la sphère.* Collat. *N. ann. math. XX*, 430.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 204.

Stereometrie.

430. *Théorèmes sur le cône de révolution.* Woepcke. *Journ. Mathém. XXVI*, 231.

T.

Trigonometrie.

431. Das Sehnenviereck in der Ebene und auf der Kugel als besonderer Fall des allgemeinen Vierecks. Baur. Zeitschr. Math. Phys. VI, 221. [Vergl. Bd. V, No. 227.]

V.

Variationsrechnung.

432. *On a supposed failure of the calculus of variations.* Airy. *Phil. Mag. XXII*, 12. Challis. *ibid.* 108.
Vergl. Cartographie.

W.

Wärmetheorie.

433. *Sur la théorie mécanique de la chaleur.* Marie-Davy. *Compt. rend. LIII*, 904.
434. Ueber die Wärmeveränderungen in den höheren Erdschichten unter dem Einflusse des nicht-periodischen Temperaturwechsels an der Oberfläche. Saalschütz. Astr. Nachr. LVI, 1, 161, 273.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

435. *Quelle est la probabilité que l'angle aigu formé par deux grands cercles tracés au hasard sur une sphère soit compris entre m degrés et n degrés.* Martin. *N. ann. math. XX*, 319.

Z.

Zahlentheorie.

436. Ueber arithmetische Progressionen von Primzahlen. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. VI, 340.
437. *On complex integers. Lanavicensis. Quart. Journ. math. IV*, 94, 124.
438. *Nouveaux théorèmes concernant les fonctions N (n, p, q) et d'autres fonctions qui s'y rattachent. Liouville. Journ. Mathém. XXVI*, 369.
439. Ueber die Anzahl congruenter Divisoren einer Zahl. Traub. Grun. Archiv XXXVII, 277.
440. *On systems of linear indeterminate equations and congruences. Stephan Smith, Phil. Mag. XXII*, 539.
441. *Sopra la teorica dei numeri congrui. Woepcke. Annali math. III*, 206.
442. *Théorie des nombres et fonctions elliptiques. Hermite. Compt. rend. LIII*, 214. — *Liouville ibid.* 228.
443. *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite. Riemann. Annali mat. III*, 52.
444. Ueber die durch 7 messbaren Zahlen. Böhringer. Zeitschr. Math. Phys. VI, 262.
445. *A proof of Prof. Sylvester's theorem of partitions. Samuel Roberts. Quart. Journ. math, IV*, 155.
446. *Sur un exposant minimum. Besge. Journ. Mathém. XXVI*, 239.
Vergl. Cubische Formen, Kreistheilung; Quadratische Formen.

Zinsrechnung.

447. *Intérêt simple et intérêt composé. Oettinger. N. ann. math. XX*, 441. [Vergl. No. 192.]
448. Weitere Ausführung der politischen Arithmetik. Oettinger. Grun. Archiv XXXVII, 125, 365. [Vergl. No. 192.]

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

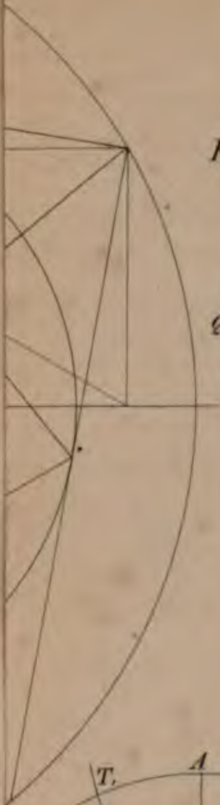


Fig. 7.

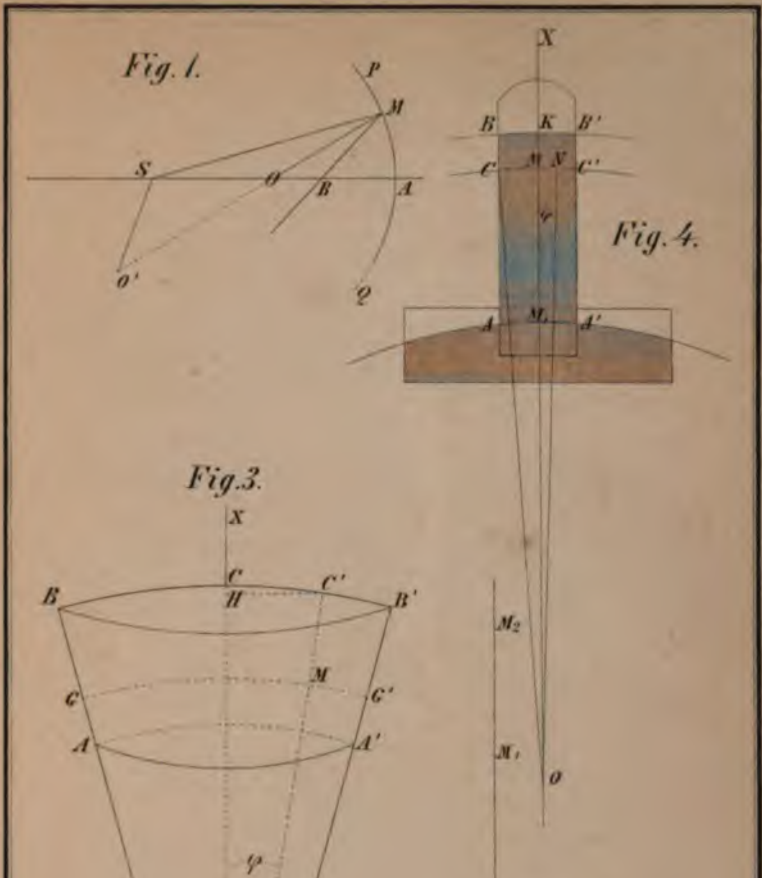


Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 2.