This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

REESE LIBRARY

OF THE

UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Received August , 1898.

Accession No. 72586 . *Class No.*

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Zwanzigster Jahrgang.

Mit 6 lithographirten Tafeln.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1875.

941
Z4
V. 20

72586

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

UNIVERSITY

Inhalt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mechanik und Molecularphysik.

Optik.

I.

Weitere Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften.

Von

Dr. GUSTAV HOLZMÜLLER,
Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen.

(Vergl. Jahrg. XVIII dieser Zeitschr. S. 228 etc.)

§ 1. Ueber Isothermenschaaren, bei denen Symmetrie und Reciprocität auftritt.

Ein bekannter Satz der Functionentheorie lautet folgendermassen:

„Entspricht bei einer analytischen Function einer stetigen Folge reeller Werthe des Arguments eine stetige Folge reeller Werthe der Function, so entsprechen conjugirten Werthen des Arguments conjugirte Werthe der Function.“

Bei der durch eine solche Function vermittelten Abbildung entspricht daher zunächst einem endlichen, continuirlichen Stück der reellen Axe in der Ebene des Arguments ein analoges Stück der reellen Axe in der Ebene der Function; ausserdem aber entsprechen geometrischen Gebilden in der ersteren, welche symmetrisch gegen die reelle Axe liegen, Gebilde von derselben Eigenschaft in der andern Ebene.

Die einfachsten orthogonalen Isothermensysteme in der Ebene der Function sind die den Parametern $x = x_1$ und $y = y_1$ entsprechenden. Sie sind im vorliegenden Falle symmetrisch gegen die reelle Axe, und zwar geht beim Umklappen um dieselbe jedes Individuum der ersten Gruppe in sich selbst über, während jedem Individuum der zweiten Schaar im Allgemeinen ein anderes aus derselben entspricht. Schneidet im speciellen Falle nicht nur das erste, sondern auch das zweite Isothermensystem die reelle Axe orthogonal, so geht auch jede Gruppe der zweiten Art beim Umklappen in sich selbst über.

Dieselben Eigenschaften kommen im Wesentlichen auch den beiden Curvengruppen zu, welche das genannte System unter dem Winkel $\pm 45^{\circ}$

schneiden; nur ist dort jedes der beiden Systeme nicht gegen sich selbst, sondern gegen das andere in Bezug auf die reelle Axe symmetrisch.

Ist nun $f(z)$ eine Function der genannten Art, so lässt sich ohne Schwierigkeit untersuchen, inwiefern jene Symmetrieverhältnisse erhalten bleiben, wenn die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z=(a+bi).f(z)+c+di$$

vermittelt wird, wo a, b, c, d reelle Grössen sind. Denn der Factor $(a+bi)$ bedeutet bekanntlich nur ein Drehungs- und Vergrösserungsverhältniss, während der Zusatz $c+di$ einer Verlegung des Nullpunktes entspricht.

Die Symmetrie gegen die reelle Axe geht ferner in Reciprocität gegen einen Kreis über, sobald Z eine gebrochene Function ersten Grades von $f(z)$ ist.

An Stelle der Function $f(z)$ könnte endlich überall die Function

$$f[(\alpha+\beta i)z+\gamma+\delta i]$$

treten, wobei jedoch nicht die reelle Axe, sondern irgend eine andere Gerade in der Ebene des Arguments als Symmetrieaxe auftreten würde.

Offenbar lässt sich demnach die Betrachtung einer ausgedehnten Gruppe von Functionen leicht auf den im Anfang besprochenen Fall zurückführen. Ueber die dort definirten Functionen soll jetzt eine Reihe allgemeiner Sätze ausgesprochen werden, wobei unter $f(z)$ stets eine Function dieser Art verstanden werden soll.

I. Hat eine der Functionen $f(z)$ die Eigenschaft, dass für reelle Constanten α und $\varkappa$ die Gleichung

$$f(z+\alpha)=\frac{1}{\varkappa.f(z)}$$

besteht, so gehört zu der Isothermenschaar mit dem Parameter $x=x_1$ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, und gegen denselben findet Reciprocität beider Isothermenschaaren statt.

Der Beweis lässt sich folgendermassen führen. Aus der genannten Gleichung folgt zunächst

$$f(z)=\frac{1}{\varkappa f(z+\alpha)},$$

so dass die Function auch der Relation

$$\sqrt{\varkappa}.f(z\pm\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\varkappa}.f(z)}$$

genügt. Da nun

$$\frac{1}{r[\cos\varphi+i\sin\varphi]}=\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)],$$

so leistet die Abbildung $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}.f(z)}$ dasselbe, wie die Reihe folgender Operationen. Man führe zunächst die Abbildung $\sqrt{\varkappa}.f(z)$ durch, transformire dann die Isothermenschaaren mittels des Einheitskreises durch reciproke Radii vectores und klappe endlich die gesammte Zeichnung um die reelle Axe. Das entstandene Gebilde ist dann gleichzeitig das der Abbildung $\sqrt{\varkappa}.f(z \pm \alpha)$ entsprechende. Nach unserer Annahme findet aber Symmetrie gegen die reelle Axe statt, so dass die Operation des Umklappens erspart werden konnte. Es muss demnach jede der y-Curven sich selbst reciprok in Bezug auf den Einheitskreis sein, und da derselbe die ganze Schaar orthogonal schneidet, so gehört er selbst zur andern Isothermenschaar. Jedes Individuum der x-Curven geht durch reciproke Abbildung in ein anderes derselben Gruppe über. Der Einheitskreis kann offenbar nur den Linien $x = \pm \frac{\alpha}{2}$ entsprechen, und für die ursprüngliche Abbildung $Z = f(z)$ geht er über in den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$. (NB. Der Beweis würde ohne die Voraussetzung der Symmetrie nicht streng sein, da der Fall denkbar wäre, dass der Einheitskreis zwar von jeder y-Curve orthogonal durchschnitten würde, dass jedoch jeder Durchschnittspunkt ein Wendepunkt für die entsprechende Curve wäre. Durch die Voraussetzung der Symmetrie ist dieser Fall ausdrücklich ausgeschlossen.)

Beispiel: Aus der Gleichung

$$\Delta am(u \pm K) = \frac{\varkappa'}{\Delta am\, u} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta am(u \pm K)}{\sqrt{\varkappa'}} = \frac{\sqrt{\varkappa'}}{\Delta am(u)}$$

folgt, dass die Δam-Curven reciprok gegen den Kreis mit dem Radius $\sqrt{\varkappa'}$ sind, welcher den Linien $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$ entspricht.

II. **Hat eine der Functionen $f(z)$ die Eigenschaft dass für reelle Constanten β und $\varkappa$**

$$f(z + \beta i) = \frac{1}{\varkappa f(z)}$$

ist, so ist gleichzeitig

$$\sqrt{\varkappa}.f(z \pm \beta i) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}.f(z)},$$

und zu den Isothermen mit dem Parameter $y = y_1$ gehört ein Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, der den Linien $y = \pm \frac{\beta}{2}$ entspricht und gegen den Reciprocität beider Isothermenschaaren stattfindet.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Beispiel: Aus der Gleichung

$$\sqrt{\varkappa}.\sin am(u \pm iK') = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}.\sin am(u)}$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

folgt die Reciprocität der *sinam*-Curven gegen den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, der den Linien $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$ entspricht.

III. Hat eine der Functionen $f(z)$ die Eigenschaft, dass für reelles $\varkappa$

$$f(zi) = \frac{1}{\varkappa f(z)}$$

ist, so findet bei der Abbildung $Z = f(z)$ Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ statt, und zwar gehen die Isothermen der einen Schaar in die der andern über. Der Kreis schneidet demnach beide Schaaren unter $\pm 45^0$.

Beispiel: Für den Modul $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ gilt die Gleichung

$$\cos am(iz) = \frac{1}{\cos am z}.$$

Die durch $\cos am(z) \bmod \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ dargestellten Isothermen sind demnach reciprok gegen den Einheitskreis, der sie unter 45^0 schneidet. Daraus folgt übrigens, dass zu den unter $\pm 45^0$ schneidenden Trajectorien der *sinam*-Curven und Δam-Curven $mod. \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ je eine Lemniscate und eine gleichseitige Hyperbel gehört.

Auch die allgemeinere Gleichung

$$\cos am\, iz = \frac{1}{\cos am(z\varkappa')}$$

lässt sich geometrisch dahin deuten, dass die Transformation der *cosam*-Curven mit dem Modul $\varkappa$ mittels reciproker Radii vectores gegen den Einheitskreis auf die *cosam*-Curven für den Modul $\varkappa'$ führt. Es folgen hieraus Sätze über die Reciprocität der Lemniscate.

Dass dieselben Curven eine ähnliche Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}$ besitzen, folgt aus der Formel

$$\cos am\,(z + K + iK') = \frac{-i\varkappa'}{\varkappa . \cos am z}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich eine Reihe anderer Formeln deuten, z. B.

$$\Delta am\, iz = \frac{1}{\sin coam(z\varkappa')}, \quad \sin am(iz \pm K') = \pm \frac{1}{\Delta am(z\varkappa')}.$$

Die allgemeineren Sätze über $f(z)$, die damit zusammenhängen, sind leicht auszusprechen.

Von einfacheren Functionen mögen noch $Z = e^z$ und $Z = \tan z$ genannt werden.

Aus $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ folgt, dass bei der Abbildung $Z = e^z$ der Linie $x = 0$ der

Einheitskreis entspricht, gegen den Reciprocität stattfindet. Dass unendlich viele concentrische Kreise auftreten, folgt aus der Gleichung

$$e^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-z-b} = \frac{1}{e^{\frac{b}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{z}}.$$

Aus $tan\left[\frac{\pi}{2} - x - yi\right] = \frac{1}{tan(x+yi)}$ folgt die Reciprocität der *tan*-Curven gegen den Einheitskreis, welcher der Linie $x = \frac{\pi}{4}$ entspricht.

§ 2. Einige Bemerkungen über die Kreisverwandtschaft.

In Folgendem soll die involutorische Abbildung

$$1)\qquad Z = \frac{z+1}{z-1}$$

nach einer Methode behandelt werden, welche allerdings etwas künstlich erscheint, jedoch direct auf die Haupteigenschaften führt, welche im folgenden Paragraphen Anwendung finden.

Man betrachte die Punkte ± 1 der z-Ebene als Brennpunkte und bezeichne die von ihnen ausgehenden Strahlen mit p und p_1, die Winkel derselben mit der positiven Richtung der reellen Axe mit ϑ und ϑ_1. Dann ist für diese Transformation

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1^2 &= (1+X+Yi)(1+X-Yi) \\ &= \left(1+\frac{x+yi+1}{x+yi-1}\right).\left(1+\frac{x-yi+1}{x-yi-1}\right) = \frac{4(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}, \\ p^2 &= (1-X-Yi)(1-X+Yi) \\ &= \left(1-\frac{x+yi+1}{x+yi-1}\right).\left(1-\frac{x-yi+1}{x-yi-1}\right) = \frac{4}{(x-1)^2+y^2}. \end{aligned}\right.$$

Folglich:

> Der hyperbolischen Kreisschaar $\frac{p_1}{p} = c$ in jeder der beiden Ebenen entspricht die concentrische Kreisschaar $r = c$ um den Nullpunkt der andern.

Da ferner

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} p \,.\, cos\,\vartheta &= X-1, & p_1 \,.\, cos\,\vartheta_1 &= X+1, \\ p \,.\, sin\,\vartheta &= Y, & p_1 \,.\, sin\,\vartheta_1 &= Y, \end{aligned}\right.$$

so folgt

$$tan(\vartheta - \vartheta_1) = \frac{2Y}{X^2+Y^2-1}.$$

Setzt man hier die aus Gleichung 1) zu berechnenden Werthe von X und Y ein, nämlich

$$X = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}, \qquad Y = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2},$$

so ergiebt sich

$$4)\qquad tan(\vartheta - \vartheta_1) = -\frac{y}{x}.$$

Folglich:

Der elliptischen Kreisschaar $\vartheta_1 - \vartheta = \varphi$ durch die Punkte ± 1 in jeder der beiden Ebenen entspricht das Radiensystem $\frac{y}{x} = \tan\varphi$ in der andern Ebene.

Hat man demnach die Gleichung einer Curvenschaar in Polarcoordinaten, $f(r, \varphi) = 0$, und sucht man die Curvengruppe, welche ihr bei der Transformation $Z = \frac{z+1}{z-1}$ entspricht, so hat man nur $\frac{p_1}{p}$ an Stelle von r und $\vartheta_1 - \vartheta$ an Stelle von φ zu setzen, so dass man als Gleichung des gesuchten Systems erhält

$$f\left(\frac{p_1}{p}, \vartheta_1 - \vartheta\right) = 0.$$

Beispiel: Um die Gleichung der Curvensysteme zu finden, welche die elliptische Kreisschaar durch ± 1 unter constantem Winkel schneiden, hat man statt der Gleichung der logarithmischen Spiralen $r = c\,\varkappa^{\varphi}$ nur zu setzen

$$\frac{p_1}{p} = c \cdot \varkappa^{\vartheta_1 - \vartheta}.$$

Ich behandelte diese Curven im 16. Jahrgange dieser Zeitschrift und bezeichnete sie als logarithmische Doppelspiralen. Sie liessen sich definiren als stereographische Projectionen eines Systems loxodromischer Linien auf der Kugeloberfläche. Ihre dort nicht ausgesprochene Fundamentaleigenschaft ist also folgende:

Das Verhältniss der Radii vectores $\frac{p_1}{p}$ nimmt geometrisch ab oder zu, wenn die Differenz $\vartheta_1 - \vartheta$ arithmetisch ab- oder zunimmt.

Die Abbildung mittels der allgemeinen gebrochenen Function ersten Grades lässt sich auf die soeben behandelte reduciren. In einem der folgenden Paragraphen kommt die Abbildung $Z = \frac{1-iz}{z-i}$ zur Anwendung. Da nun

$$\frac{1-iz}{z-i} = -i\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1}, \text{ wo } Z = i\zeta,$$

so erhält man das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen, wenn man die oben behandelte z-Ebene um $+90^0$, die Z-Ebene um -90^0 dreht.

Daraus ergiebt sich also Folgendes: Bei der Abbildung $Z = \frac{1-iz}{z-i}$ entspricht der concentrischen Kreisschaar $r = c$ der z Ebene die hyperbolische Kreisschaar $\frac{p_1}{p} = c$ über den Punkten $\pm i$ der Z-Ebene, während der Radienschaar $\frac{y}{x} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ die elliptische Kreisschaar $\vartheta_1 - \vartheta = \varphi$ über den Punkten $\pm i$ entspricht. Die Curvenschaar $f(r\varphi)=0$ geht also über in

$$f\left[\frac{p_1}{p}, \vartheta_1-\vartheta-\frac{\pi}{2}\right]=0,$$

wobei jedoch die Strahlen p_1 und p von den Punkten $\pm i$ ausgehen, die als Brennpunkte zu betrachten sind.

§ 3. Ermittelung des Curvensystems, welches die *sin am*-Curven $mod\,\varkappa=3-\sqrt{8}$ unter dem Winkel $\pm 45^0$ schneidet.

Die *sin am*-Curven haben durch einen Aufsatz des Herrn Prof. H. A. Schwarz im 77. Bande des Crelle'schen Journals: „Ueber ebene algebraische Isothermen", eine fundamentale Bedeutung erhalten. Dort wird nämlich gezeigt, dass sämmtliche algebraischen Isothermenschaaren sich durch algebraische Operationen, d. h. durch Abbildungen mit Hilfe algebraischer Functionen, aus drei Fundamentalsystemen herleiten lassen. Letztere sind

1. die beiden Schaaren orthogonaler Parallelen,
2. das System concentrischer Kreise und ihre Radien,
3. das System der *sin am*-Curven für $Mod.\,\varkappa$ positiv, reell und <1.

Es ist von Interesse, auch die Trajectorien dieser Fundamentalsysteme kennen zu lernen. Das erste führt wiederum auf Parallelenschaaren, das zweite auf ein System logarithmischer Spiralen. Eine Anzahl der hierher gehörigen Fälle habe ich im 16. und 18. Jahrgange dieser Zeitschrift behandelt.

Schwieriger gestaltet sich das Problem für das dritte System. Zieht man nämlich in der Ebene des Arguments der elliptischen Function $Z=sin\,am\,z$ eine beliebige Gerade, so werden im Allgemeinen unendlich viele Periodenrechtecke, und zwar jedes in besonderer Weise durchschnitten. Daraus folgt, dass die entsprechende Curve in der Ebene der Function unendlich viele Windungen um die Brennpunkte ± 1 und $\pm\frac{1}{\varkappa}$ vollführt, und dass ihre Gleichung im Allgemeinen transcendent ist. Doppelt unendlich viele „Riemann'sche Blätter" liegen übereinander und die Zeichnungen in denselben decken sich nicht.

Vereinfachungen treten auf, wenn die Geraden den Diagonalen des Periodenrechtecks parallel sind. Dann werden sämmtliche Rechtecke im Wesentlichen in derselben Weise durchschnitten, die Zeichnungen in den einzelnen Blättern decken sich und man erhält zwei Schaaren geschlossener Curven, deren eine die Punkte $+1$ und $-\frac{1}{\varkappa}$ umgiebt, während die andere die Punkte -1 und $+\frac{1}{\varkappa}$ einschliesst.

Dieses „Diagonalsystem" kann direct durch die Abbildung

$$Z = sin\,am\left[(x+yi)\frac{2K \pm iK'}{\sqrt{4K^2+K'^2}}\right]$$

gefunden werden. Von besonderem Interesse sind nur die Fälle, wo die Curven algebraisch sind, in welchen also die Werthe des Periodenverhältnisses $\frac{2K}{K'}$ so beschaffen sind, dass zwischen der genannten Function Z und $sin\,am\,(x+yi)$ ein algebraischer Zusammenhang existirt.

Ebenso ergeben sich Vereinfachungen für den Fall, dass die Trajectorien das Hauptsystem unter $\pm 45^0$ schneiden. Hier werden z. B. die Gleichungen algebraisch, wenn das Periodenverhältniss $\frac{2K}{K'}$ eine der folgenden Grössen ist:

$$\ldots 8, 4, 2, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots.$$

Der Fall $\frac{2K}{K'} = 1$, für welchen der Werth des Moduls $\varkappa = 3 - \sqrt{8}$ ist, soll uns zuerst beschäftigen.

Es ist bekannt, dass die Function

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa}\,.\,sin\,am\,z}{i + \sqrt{\varkappa}\,.\,sin\,am\,z} \qquad mod\,\varkappa$$

die Abbildung des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm K$ und $\pm K + K'i$ auf den Einheitskreis vermittelt, und zwar so, dass die Peripherien und die Mittelpunkte beider Figuren sich entsprechen.* Den genannten Eckpunkten entsprechen dabei die vier Bildpunkte $\pm\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa} \pm i\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$, welche Brennpunkte des isothermischen Systems werden, in welches die Parallelen zur reellen und imaginären Axe übergehen.

Für unsern speciellen Fall $\frac{2K}{K'} = 1$ ist das Rechteck ein Quadrat, und die vier Brennpunkte sind $\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, d. h. sie bilden selbst ein Quadrat, dessen Mitte der Nullpunkt ist.

Jochmann** vereinfacht das Problem mit Hilfe der Landen'schen Transformation, indem er vom Modul $\varkappa$ übergeht zu $\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$, vom Argumente z zu $z(1+\varkappa)$, also von $\varkappa'$ zu $\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ und vom Periodenverhältniss $\frac{K'}{2K}$ zu $\frac{K'}{K}$. Schliesslich setzt er $z - K'i$ an Stelle von z, wodurch die Abbildung 1) übergeht in

---

* Vergl. Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben", Crelle's Journ., Band 70.

** Jochmann: „Zur Abbildung" etc., Jahrg. 14 dieser Zeitschrift.

2) $$Z = \frac{1 - \cos am\, z}{\sin am\, z} \quad mod\ \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa},$$

nur mit dem Unterschiede, dass jetzt die Nullpunkte beider Ebenen sich entsprechen und die Eckpunkte des Rechtecks $\pm K \pm K'i$ auf die Brennpunkte $\pm \varkappa \pm \varkappa' i$ abgebildet werden, die wiederum auf dem Einheitskreise liegen. Für den Fall des Quadrates ist jetzt $\frac{K}{K'} = 1$ und der Modul $\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Setzt man jetzt $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.(z \pm zi)$ an Stelle von z, so erhält man direct die Abbildung, welche auf die Gleichung des Curvensystems führt, welches das ursprüngliche unter $\pm 45^0$ schneidet. Der Factor $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ bedeutet nur ein Vergrösserungsverhältniss in der Ebene des Arguments, kann also vernachlässigt werden. Jochmann bemerkt nun, dass für den Modul $\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$$Z = \frac{1 - \cos am\,(z - zi)}{\sin am\,(z - zi)}$$

übergeht in

3) $$Z = (\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}}) \cos am\,(z - K), \quad mod\,\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

dass also alle Curven, welche den Parallelen zu den Diagonalen des Quadrats entsprechen, die um 45^0 gedrehten *cosam*-Curven sind.

Demnach findet man die entsprechenden Trajectorien der *sinam*-Curven $mod.\,\varkappa = 3 - \sqrt{8}$ auf folgendem Wege:

Die Umkehrung der in 1) enthaltenen Abbildung $Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa}.z}{i + \sqrt{\varkappa}.z}$ ist $z = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} . \frac{1 - Zi}{Z - i}$. Durch die letztere werden die vier Punkte $\pm \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa} \pm i \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ nach ± 1 und $\pm \frac{1}{\varkappa}$ transformirt, während das der Gleichung 1) entsprechende Isothermensystem wieder in die *sinam*-Curven übergeht.

Es ergiebt sich daraus Folgendes:

Die Gleichung der beiden Curvenschaaren, welche die *sinam*-Curven $mod\,\varkappa = 3 - \sqrt{8}$ unter dem Winkel $\pm 45^0$ schneiden, wird direct erhalten, wenn man untersucht, welche Curven den Parallelen zur reellen und imaginären Axe bei der Abbildung

4) $$Z = \frac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}} \; \frac{1 - i\,[\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}] \cos am\, z}{[\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}] \cos am\, z - i} \quad mod\,\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

entsprechen.

Diese Abbildung liefert also im Wesentlichen dasselbe, wie

5) $$Z = \sin am\,[z\,(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}})] \quad mod\ \varkappa = 3 - \sqrt{8}.$$

Die Abbildung 4) soll nicht direct, sondern in einzelnen Stationen durchgeführt werden. Zunächst ist die Gleichung der um 45^0 gedrehten *cosam*-Curven aufzustellen, die bekanntlich für $mod\,\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ zwei congruente Schaaren umfassen. Dann werden dieselben der Transformation $Z = \frac{1 - iz}{z - i}$ unterworfen, was einer bestimmten Transformation mittels reciproker Radii vectores vom Punkte i aus entspricht. Die so erhaltenen Curven müssen die in § 1 besprochene Reciprocität gegen den Einheitskreis zeigen. Schliesslich wäre noch die Transformation $Z = \frac{z}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}}$ anzuwenden.

§ 4. Die Abbildung $Z = cos\,am\,z \quad mod\,\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Die allgemeinen Gleichungen der *cos am*-Curven mit den Brennpunkten ± 1 und $\pm \frac{\varkappa'}{\varkappa}\, i$ sind nach Siebeck*

$$1)\qquad (p_1 + p)^2 \cdot \frac{n^2}{m^2} + (p_1 - p)^2 \varkappa^2 l^2 = 4,$$

$$2)\qquad -(p_1 + p)^2 \cdot \frac{\varkappa^2 \cdot \lambda^2}{\mu^2} + (p_1 - p)^2 \cdot \nu^2 = 4,$$

wo

$$l = sin\,am\,x,\quad m = cos\,am\,x,\quad n = \varDelta\,am\,x \quad mod\,\varkappa;$$
$$\lambda = sin\,am\,y,\quad \mu = cos\,am\,y,\quad \nu = \varDelta\,am\,y \quad mod\,\varkappa'.$$

Für den Modul $\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ gehen die Brennpunkte über in ± 1 und $\pm i$, die Gleichungen selbst in

$$3)\qquad \left.\begin{aligned} (p_1 + p)^2 \cdot \frac{2 - l^2}{1 - l^2} + (p_1 + p)^2 \cdot l^2 &= 8 \\ (p_1 + p)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + (p_1 + p)^2 \cdot (2 - \lambda^2) &= 8 \end{aligned}\right\}\ mod\,.\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Die beiden Curvengruppen sind congruent. Denn setzt man $l^2 = 2 - \lambda^2$, so ist gleichzeitig $\frac{2 - l^2}{1 - l^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$. Es existirt also wirklich zu jeder Curve der einen Schaar eine congruente der andern, und beide Systeme sind gegeneinander um 90° gedreht. Aus den Gleichungen geht ferner hervor, dass jedes System symmetrisch gegen beide Axen ist, folglich liegt jedes System symmetrisch gegen das andere in Bezug auf die Axen $\pm$ 45°.

(Es lässt sich nämlich allgemein folgender Satz aussprechen: Ist ein geometrisches Gebilde symmetrisch gegen zwei aufeinander senkrechte Axen und wird es noch einmal um 90° gedreht gezeichnet, so ist die Gesammtzeichnung symmetrisch gegen die Axen $\pm$ 45°.)

---

* Vergl. Siebeck: „Ueber Curven vierten Grades" etc., Crelle's Journal Band 57; und § 5 meiner Abhandlung „Ueber isogonale Verwandtschaften" im 18. Bande dieser Zeitschrift.

In Polarcoordinaten lassen sich die Gleichungen beider Systeme auf folgende Form bringen:

$$5)\qquad (R^2+1)\cdot\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\cdot\sqrt{(R^2+1)^2-4R^2\cos^2\varphi}=4,$$

$$6)\qquad (R^2+1)\cdot\frac{4\lambda^2-\lambda^4-2}{\lambda^2-1}+\frac{\lambda^4-2\lambda^2+2}{\lambda^2-1}\cdot\sqrt{(R^2+1)^2-4R^2\cos^2\varphi}=4.$$

Für letztere Gleichung kann man auch schreiben

$$6^*)\qquad (R^2+1)\left(\frac{2-\lambda^4}{1-\lambda^2}-4\right)+\frac{\lambda^4-2\lambda^2+2}{1-\lambda^2}\cdot\sqrt{(R^2+1)^2-4R^2\cos^2\varphi}=-4.$$

Setzt man aber in Gleichung 5) $\frac{1}{R}$ an Stelle von R, so geht sie über in

$$7)\qquad (R^2+1)\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\sqrt{(R^2+1)^2-4R^2\cos^2\varphi}=4R^2=4(R^2+1)-4,$$

und bringt man hier die Grösse $4(R^2+1)$ nach links, so stimmt die Gleichung überein mit 6*). Folglich:

> Die eine Isothermenschaar ist in Bezug auf den Einheitskreis reciprok gegen die andere, und beide werden von dem Kreise unter dem Winkel $\pm 45^0$ geschnitten.

So bestätigt sich die in § 1 über diese Curven ausgesprochene Behauptung. Beispielshalber folgt hieraus für diejenige Lemniscate, welche den Einheitskreis unter 45^0 schneidet, dass sie reciprok ist gegen eine ihr congruente, um 90^0 gedrehte Curve.

§ 5. Discussion der Abbildung

$$Z=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}\cdot\frac{1-i\,[\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}]\cos am\, z}{[\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}]\cos am\, z-i}\qquad mod\,\varkappa=\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Der Factor $[\sqrt{\frac{1}{2}}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}}]$ bedeutet eine Drehung der $\cos am$-Curven um $\pm 45^0$. Durch diese Drehungen geht Gleichung 5) des § 4 nach einer geringen Umformung über in

$$(R^2+1)\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\cdot\sqrt{(R^2+1)^2-2R^2(1\mp\sin 2\varphi)}=4$$

Man hat dadurch sofort die beiden orthogonalen Systeme, da die beiden Curvenschaaren congruent waren.

Jetzt führe man die Abbildung $Z=\frac{1-iz}{z-i}$ durch, indem man nach Massgabe des § 2 $\frac{p_1}{p}$ an Stelle von R und $(\vartheta_1-\vartheta-90^0)$ an Stelle von φ setzt. Man erhält

$$\left(\frac{p_1^2}{p^2}+1\right)\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{p_1^2}{p^2}+1\right)^2-2\frac{p_1^2}{p^2}[1\pm\sin 2(\vartheta_1-\vartheta)]}=4.$$

Bedenkt man dabei, dass p_1 und p von den Punkten $\pm i$ ausgehen, so hat man zu setzen

$$\frac{p_1}{p}=\sqrt{\frac{X^2+Y^2+1+2Y}{X^2+Y^2+1-2Y}}, \quad sin(\vartheta_1-\vartheta)=\frac{2X}{\sqrt{(X^2+Y^2+1)-4Y^2}},$$

$$cos(\vartheta_1-\vartheta)=\frac{X^2+Y^2-1}{\sqrt{(X^2+Y^2+1)^2-4Y^2}}.$$

Die Gleichung geht schliesslich nach den entsprechenden Umformungen über in

$$(X^2+Y^2+1)\,l^2+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2+1)^2+2Y^2\mp 2X(X^2+Y^2-1)}$$
$$+4Y=0$$

oder

$$(R^2+1)\,l^2+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}(R^2+1)^2+2R^2 sin^2\vartheta\mp 2R\cos\vartheta\,(R^2-1)}$$
$$+4R\sin\vartheta=0.$$

Vertauscht man hier R mit $\frac{1}{R}$, so bleibt die Gleichung ungeändert, nur wird $\mp$ in $\pm$ verwandelt. Folglich:

Transformirt man das Gebilde reciprok gegen den Einheitskreis, so geht jedes System in das andere über.

Auch die Symmetrieverhältnisse gegen die Axen sind an der Form der Gleichung zu erkennen.

Setzt man schliesslich $R.\sqrt{3-\sqrt{8}}$ an Stelle von R, so geht der Einheitskreis über in den Kreis $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, die Brennpunkte werden ± 1 und $\pm\frac{1}{\varkappa}$, die Curven selbst gehen über in die Trajectorien der $sin\,am$-Curven zu $\pm 45^0$, und zwar für den $mod. 3-\sqrt{8}$. Es ist nur noch zu bemerken, dass der Parameter $l=sin\,am\,x\ mod\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist und durch die Landen'sche Transformation leicht auf die entsprechende Grösse mit $mod. 3-\sqrt{8}$ übergeführt werden kann.

Durch die Transformationen

$$Z=\sqrt{1-z^2} \quad \text{und} \quad Z=\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$$

würde man die Gleichungen der entsprechenden Trajectorien der $cos\,am$- und $\Delta\,am$-Curven $mod. 3-\sqrt{8}$ finden; geometrisch erreicht man dasselbe durch Uebertragung von Hyperbel auf Complementarhyperbel im Sinne meiner bereits citirten Abhandlung, wobei die Kegelschnittsysteme mit den Brennpunkten ± 1, resp. $\pm\frac{1}{\varkappa}$ zu Grunde zu legen sind.

Es sei noch bemerkt, dass die behandelten Curven ausser dem Kreise mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ noch zwei andere Kreise umfassen, welche durch die Punkte

$+1$ und $-\frac{1}{\varkappa}$, resp. -1 und $+\frac{1}{\varkappa}$ gehen. Auch gegen diese Kreise findet Reciprocität statt, und zwar geht jede Curve in sich selbst über. Dies geht hervor aus der Symmetrie der *cos am*-Curven gegen beide Axen.

Aus allen diesen Eigenschaften folgt, dass diejenigen beiden Curven, die durch den Nullpunkt gehen, auch durch die Punkte $+\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ und durch den unendlichen Punkt gehen, und Asymptoten besitzen, welche gegen beide Axen unter 45^0 geneigt sind.

§ 6. Die Trajectorien der *sin am*-, *cos am*- und *Δam*-Curven für $mod\, \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Man erhält die eine Gruppe dieser Trajectorien durch die Untersuchung der Abbildung

$$Z = cos\, am\, [z \,.\, (\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}})] \quad mod\, \varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Dasselbe leistet nach Obigem die Abbildung

$$Z = (\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}) \,.\, \frac{1 + i\sqrt{\varkappa} \,.\, sin\, am\, z}{i + \sqrt{\varkappa} \,.\, sin\, am\, z} \quad mod\,(3-\sqrt{8}).$$

Nach Jochmann führt die Abbildung

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa} \,.\, sin\, am\, z}{i + \sqrt{\varkappa} \,.\, sin\, am\, z} \quad mod\,(3-\sqrt{8})$$

auf das Isothermensystem

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4m^2 \,.\, \left[\frac{cos^2\varphi}{l^2} - \frac{\varkappa^2 sin^2\varphi}{n^2}\right].$$

Man erhält die beiden congruenten Systeme durch die Drehungen $\pm 45^0$, welche dem Factor $(\sqrt{\frac{1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}})$ entsprechen. Die gesuchten Curven haben also die Gleichungen

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4m^2 \,.\, \left[\frac{cos^2(\varphi \pm 45)}{l^2} - \frac{\varkappa^2 sin^2(\varphi \pm 45)}{n^2}\right].$$

Die geometrischen Eigenschaften derselben hat Jochmann untersucht.

Die Transformationen

$$Z = \sqrt{1-z^2} \text{ und } Z = \sqrt{\varkappa'^2 + \varkappa^2 z^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+z^2)},$$

oder auch die Uebertragung von Hyperbel auf Complementarhyperbel mittels der Kegelschnittsysteme um ± 1 und $\pm i\frac{\varkappa'}{\varkappa}$, d. h. $\pm i$, führen auf die entsprechenden Trajectorien der *sin am*- und *Δam*-Curven für den Modul $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Da, wie oben gezeigt, zu der erstgenannten Schaar ein Kreis und die Geraden unter $\pm 45^0$ gehören, so folgt, dass zu den letzten beiden je eine Lemniscate und eine Hyperbel gehören.

Geht man durch die Landen'sche Transformation zu neuen Moduln über, sei es nach der einen oder nach der andern Seite, so gelangt man stets auf elliptische Functionen, die mit $\sin am \bmod \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ oder $3-\sqrt{8}$ algebraisch zusammenhängen. Also sind die Trajectorien der $\sin am$-, $\cos am$- und $\varDelta am$-Curven algebraisch für die Periodenverhältnisse

$$\frac{2K}{K'} = \ldots 8, 4, 2, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots$$

Aehnliches findet statt für die Diagonalcurven der Periodenrechtecke, wie sich mit Hilfe des Additionstheorems an der Abbildung

$$Z = \sin am \left[(x+yi)\left(\frac{2K}{K'} \pm i\right)\right]$$

nachweisen lässt.

§ 7. Die allgemeinen Trajectorien der $\sin am$-Curven für $\bmod \varkappa$ reell, positiv und <1.

Die principielle Lösung der Aufgabe, die allgemeinen Trajectorien der $\sin am$-Curven zu finden, bietet keine besondere Schwierigkeit; explicite Lösungen sind jedoch zunächst nur in speciellen Fällen, wie den oben behandelten, möglich. Die allgemeine Aufgabe kann auf verschiedenen Wegen angegriffen werden. Einer von denselben ist folgender.

Bei der Abbildung $Z = \sin am\, z$ entspricht der Linie $x = x_1$ die Curve

$$1) \qquad (X^2+Y^2)^2 + (X^2+Y^2)\frac{1+\varkappa^2 l^4}{\varkappa^2 l^2} + Y^2.\frac{(1-\varkappa^2 l^4)^2}{\varkappa^2 l^2 m^2 n^2} + \frac{1}{\varkappa^2} = 0,$$

oder nach Siebeck:

$$2) \qquad \frac{S^2(1-\varkappa^2 l^2)}{\varkappa'^2 l^2} - \frac{D^2 \varkappa^2.(1-l^2)}{\varkappa'^2} = 4.$$

Berechnet man aus einer dieser Gleichungen, z. B. der zweiten, den Werth von l, so erhält man

$$l = \pm \sqrt{\frac{S^2\varkappa^2 + D^2\varkappa^2 + 4\varkappa'^2 \pm \sqrt{(S^2\varkappa^2 + D^2\varkappa^2 + 4\varkappa'^2)^2 - 4\varkappa^2 D^2 S^2}}{4\varkappa^2 D^2}}$$

oder auch

$$l = \pm \frac{\sqrt{\varkappa^2(S^2+D^2-4)+4+2\varkappa DS} \pm \sqrt{\varkappa^2(S^2+D^2-4)+4-2\varkappa DS}}{2\varkappa D}.$$

Setzt man jetzt

$$S^2 = (p_1+p)^2 = 2\left[X^2+Y^2+1+\sqrt{(X^2+Y^2+1)^2-4X^2}\right],$$
$$D^2 = (p_1-p)^2 = 2\left[X^2+Y^2+1-\sqrt{(X^2+Y^2+1)^2-4X^2}\right],$$

so ergiebt sich nach den nöthigen Umformungen als Wurzel der genannten Gleichung

$$l = \sin am\, x = \pm \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\sqrt{(1+\varkappa X)^2 + \varkappa^2 Y^2} \pm \sqrt{(1-\varkappa^2 X^2) + \varkappa^2 Y^2}}{\sqrt{(1+X)^2 + Y^2} - \sqrt{(1+X)^2 + Y^2}}.$$

In ähnlicher Weise erhält man als Wurzel der Gleichung des andern Systems

$$3) \qquad \frac{D^2}{1-\lambda^2} - \frac{S^2 \varkappa^2 \lambda^2}{1-\varkappa^2\lambda^2} = 4$$

die Grösse $\lambda = \sin am\, yi$.

Demnach entsprechen allgemein den Geraden

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$$

die durch folgende Gleichung dargestellten Curven:

$$4) \qquad \frac{1}{a}\int_0^l \frac{dz}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\varkappa^2 Z^2)}} \mp \frac{i}{b}\int_0^\lambda \frac{dz}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\varkappa^2 Z^2)}} = 1,$$

wo l und λ die Wurzeln der Gleichungen 2) und 3) sind.

§ 3. Eigenschaften der Diagonalcurven, die bei der Abbildung $Z = \sin am\, z$ auftreten.

Ohne die vorher behandelte Aufgabe explicite durchzuführen, kann man eine Reihe der Eigenschaften der Diagonalcurven ohne Weiteres aus der Kenntniss der Abbildung $Z = \sin am\, z$ herleiten.

1. Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Curve aus jeder der beiden Schaaren. Sie schneiden sich unter demselben Winkel, wie die Diagonalen des Periodenrechtecks. Die ganze Ebene wird in ein System von Parallelogrammen eingetheilt, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben.

2. Die Curven sind geschlossene, sie umgeben entweder die Brennpunkte $+1$ und $-\frac{1}{\varkappa}$, oder -1 und $+\frac{1}{\varkappa}$.

3. Der Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ wird von jeder Curve zweimal geschnitten, und zwar in Punkten auf derselben Seite der x-Axe und in gleicher Entfernung von derselben.

4. Jede Curve der einen Schaar ist reciprok derjenigen der andern Schaar, die den Kreis in denselben beiden Punkten schneidet.

5. Die beiden durch den Nullpunkt gehenden Curven gehen auch durch $\pm\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ und haben Asymptoten. Beide sind congruent. Sonst kommt jede Curvengestalt viermal vor, und zwar in symmetrischer Lage gegen beide Axen.

6. Die durch die Punkte ± 1 und $\pm \frac{1}{x}$ gehenden Curven haben dort Rückkehrpunkte. Sie sind als Doppellinien zu betrachten, obwohl sie scheinbar einfach sind.

7. Bildet man das dreiaxige Ellipsoid auf die ganze Ebene ab, so entsprechen zwei bestimmten Systemen von Trajectorien der Krümmungslinien unsere Diagonalcurven. Bei denjenigen Ellipsoiden also, deren Abbildung auf das Rechteck auf solche Periodenverhältnisse $\frac{2K}{K'}$ führt, für welche die in § 6 angegebenen algebraischen Beziehungen gelten, sind bestimmte Systeme von Trajectorien der Krümmungslinien algebraische Curven. Aehnliches gilt von den Trajectorien der sphärischen Kegelschnitte, deren stereographische Projectionen die von uns behandelten Curven sind.

Ich verweise schliesslich auf die Resultate des Herrn H. Mylord in der Abhandlung: „*Elliptiske Koordinaters. Anvendelse til Bestemmelse etc.*" *Zeuthen Tidsskr.* (3) *I.* 33. Dort werden die Gleichungen der Trajectorien der Krümmungslinien des Ellipsoids in impliciter Form gegeben, während eine explicite Darstellung zunächst nur für die angedeuteten Specialfälle möglich ist.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

II.

Die harmonischen Mittelpunkte für ein Punktsystem von vier Punkten in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Pol.

Von

MILINOWSKI,
Oberlehrer in Weissenburg im Elsass.

Die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte sind bis jetzt nur mit Hilfe der Rechnung ermittelt worden. Für ein System von drei Punkten habe ich im Programm des Tilsiter Gymnasiums vom Jahre 1872 in einer Abhandlung „Die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten", die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte des ersten und zweiten Grades aus einigen Eigenschaften des ebenen Dreiecks, allein mit den Hilfsmitteln, welche die Geometrie der Lage bietet, abgeleitet. Cremona hat (Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven) gezeigt, wie man von Sätzen über harmonische Mittelpunkte zu solchen über Polaren von Curven gelangt. Wenn also die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte für drei Punkte bekannt sind, so lassen sich aus ihnen die der Polaren bezüglich einer allgemeinen Curve dritter Ordnung folgern. Auf demselben Wege kann man weitergehen und mit Hilfe der Sätze über die Polaren der Curven dritter Ordnung die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte eines Systems von vier Punkten aus den Eigenschaften des ebenen Vierseits herleiten und aus ihnen dann die Theorie der Polaren in Bezug auf eine beliebige Curve dritter Ordnung folgern. Es scheint sogar, als ob dieser Weg allgemein zur Theorie der Polaren führt, indem man dieselbe Methode zur Erforschung der Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte eines Systems von fünf Punkten aus denen eines ebenen Fünfseits anwenden kann. Successive gelangt man zu den Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte eines Systems von 6, 7,... Punkten. In den folgenden Blättern wird der Versuch gemacht, auf rein synthetischem Wege die bekannten Sätze über die harmonischen Mittelpunkte eines Systems von vier Punkten herzuleiten. Dazu werden vom Dreieck die folgenden Sätze gebraucht: Verbindet man einen Punkt P in der Ebene eines Dreiecks ABC, dessen Seiten BC, AC, AB mit a, b, c bezeichnet werden mögen, mit den

Ecken, nennt die Schnittpunkte von AP, BP, CP mit den Seiten a, b, c bezüglich α, β, γ, so liegen die harmonischen Gegenpunkte α', β', γ' dieser Punkte in Bezug auf die Eckenpaare BC, AC, AB auf einer Geraden p und umgekehrt. Wenn man p die gerade Polare von P und P den Pol von p bezüglich der dreiseitigen Curve (abc) nennt, so folgt aus projectivischen Beziehungen: 1. die Pole aller Geraden, welche durch einen Punkt P gehen, liegen auf einem Kegelschnitt π, der die conische Polare von P heisst. 2. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden g werden von einem Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ umhüllt, den man die Poloconik von g nennt.

Vier Gerade $abcd$ schneiden sich in sechs Punkten $ABCDEF$, so dass ABF auf a, BCE auf b, CDF auf c, ADE auf d liegen und $ABCDEF$ der Reihe nach die Punkte (ad), (ab), (bc), (cd), (bd), (ac) vorstellen. Die vier Geraden bilden vier Dreiseite (abd) oder ABE, (bcd) oder CDE, (acd) oder ADF, (abc) oder BCF. Dann gilt für die vierseitige Curve $(abcd)$ der Satz:

Die geraden Polaren eines beliebigen Punktes P bezüglich der vier dreiseitigen Curven (abd), (bcd), (acd), (abc) schneiden die Geraden c, a, b, d in vier Punkten einer Geraden.

Ehe dieser Satz in seiner Allgemeinheit bewiesen wird, soll dies zuerst für die drei Fälle geschehen, dass der Punkt P 1. auf einer der vier Seiten $abcd$, 2. auf einer der Geraden, welche eine Ecke des vollständigen Vierecks $abcd$ mit einem der drei Diagonalpunkte verbinden und 3. auf einer der drei Diagonalen liegt.

Es sei 1. P ein Punkt auf der Geraden b, so fallen seine geraden Polaren bezüglich der Dreiseite (abc), (abd), (bcd) mit b zusammen und seine gerade Polare in Bezug auf (acd) schneidet b in einem Punkt P'; da die Schnittpunkte von b mit a, c, d, nämlich die Punkte B, C, E auf b liegen, so liegen die vier Punkte B, C, E, P' in einer Geraden.

Die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits sind AC, BD, EF; sie schneiden sich, und zwar AC und BD in O, AC und EF in O', BD und und EF in O''. Nun liege 2. der Punkt P auf einer der sechs Linien EO, FO, BO', DO', AO'', CO'', etwa auf FO. Um die gerade Polare von P in Bezug auf das Dreieck ABE oder Dreiseit (abd) zu construiren, ziehen wir die Transversalen AP, BP, EP, welche die Seiten BE, AE, AB bezüglich in α, β, ε schneiden, und suchen die harmonischen Gegenpunkte α', β', ε' in Bezug auf die Eckenpaare BE, AE, AB, dann liegen sie in einer Geraden $\mathfrak{p}$, welche c in M schneidet. Auf dieselbe Art construiren wir die gerade Polare $\mathfrak{p}_1$ von P bezüglich der dreiseitigen Curve (bcd), indem wir P mit den Ecken C, D, E verbinden und zu den Schnittpunkten γ, δ, ε_1 der Verbindungslinien mit c, d, b die harmonischen Gegenpunkte γ', δ', ε'_1 in Bezug auf die Eckenpaare DE, CE, CD suchen. Die Polare $\mathfrak{p}_1$ schneide a in M_1. Da nun die drei Punkte E, ε, ε_1 in einer Geraden liegen, so muss dies auch mit den Punkten E, ε', ε'_1 der Fall sein und daher müssen sich wegen der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon'\varepsilon'_1 EF$ die Geraden $\varepsilon\varepsilon'_1$ und $\varepsilon'\varepsilon_1$ in einem Punkt R von FO schneiden. Nach der Construction sind $\beta\beta' AE$ und $\gamma\gamma' DE$ je vier harmonische Punkte, also die Büschel $\varepsilon'(\beta\beta' AE)$ und $\varepsilon'_1(\gamma\gamma' DE)$ harmonische Büschel. Bei ihnen fallen die Strahlen $\varepsilon' E$ und $\varepsilon'_1 E$ in eine Gerade, also liegen die Schnittpunkte R_1 von $\varepsilon'\beta'$ und $\varepsilon'_1\gamma'$, R von $\varepsilon'\beta$ und $\varepsilon'_1\gamma$ und F von $\varepsilon'\varepsilon$ und $\varepsilon'_1\varepsilon_1$ in einer Geraden, die durch O gehen muss, weil FR durch O geht. Daraus folgt dann wieder, dass die Punkte MM_1E in einer Geraden liegen und da die geraden Polaren von P bezüglich der Dreiseite (acd) oder ADF und (abc) oder BCF die Seiten b und d in E schneiden, so ist der oben angeführte Satz auch für diesen zweiten Fall erwiesen.

Wenn 3. P ein Punkt auf einer der Diagonalen, z. B. auf AC ist, so construire man zunächst wieder die beiden geraden Polaren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ von P bezüglich der Dreiseite (abd) oder ABE und (bcd) oder CDE, welche die Seiten abd und cbd in $\varepsilon' C' \beta'$ und $\varepsilon'_1 \delta' A'$ schneiden mögen. Wie vorhin seien $\varepsilon C \beta$ und $\varepsilon_1 \delta A$ die harmonischen Gegenpunkte in Bezug auf die Ecken der Dreiecke ABE und CDE. Da $\varepsilon\varepsilon_1 E$ in einer Geraden liegen, so müssen auch $\varepsilon'\varepsilon'_1 E$ in einer Geraden liegen; diese schneidet AC in P', dann sind $ACPP'$ vier harmonische Punkte. Die harmonischen Büschel $\varepsilon'(\beta\beta' AE)$ und $\varepsilon'_1(AA'DE)$ schneiden sich in drei Punkten RR_1F einer Geraden, da $\varepsilon' E$ und $\varepsilon'_1 E$ zusammenfallen, und zwar sei R der Schnittpunkt von $\varepsilon'\beta$ und $\varepsilon'_1 A$, R_1 der von $\varepsilon'\beta'$ und $\varepsilon' A'$ und F der von $\varepsilon' A$ und $\varepsilon'_1 D$. Im vollständigen Viereck $AP'\varepsilon' RC\varepsilon'_1$ wird die Diagonale $P'R$ durch die Seiten AB und CD harmonisch getheilt, also sind FA, FC, FR, FP' vier harmonische Strahlen. Da auch FA, FC, FP, FP' vier harmonische Strahlen sind, so fallen FR und FP zusammen, also liegen die Punkte RR_1PF in einer Geraden. Deshalb muss auch die Gerade, welche die Schnittpunkte Q von $\varepsilon' R$ und $\varepsilon'_1 R_1$ und Q_1 von $\varepsilon' R_1$ und $\varepsilon'_1 R$ verbindet, durch P' und F gehen, und es sind $QQ_1P'F$ vier harmonische Punkte und also auch $M_1 A\varepsilon' F$ und $MC\varepsilon'_1 F$, wenn M und M_1 die Schnittpunkte von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ mit CD und AB sind. Von den harmonischen Büscheln $P'(M_1 A\varepsilon' F)$ und $P'(MC\varepsilon'_1 F)$ fallen drei Paar Strahlen zusammen, also muss dies auch mit dem vierten Paar der Fall sein, daher fallen die Strahlen $P'M$ und $P'M_1$ zusammen und die drei Punkte MM_1P' liegen in einer Geraden. Es mag diese Gerade die Seiten AD und BC in N_1 und N schneiden, dann sind $E(M_1N_1P'F)$ und $E(MNP'F)$ harmonische Strahlenbüschel, weil $M_1A\varepsilon' F$ und $MC\varepsilon'_1 F$ je vier harmonische Punkte sind. Durch den Punkt P' giebt es aber nur eine einzige Gerade, auf welcher die Schnittpunkte mit AB und AD, sowie mit CB und CD von P' durch EF harmonisch getrennt sind. — Construirt man die geraden Polaren von P' bezüglich der Dreiseite (abc) und (acd), so müssen diese die Seiten d und b in zwei Punkten X_1 und X schneiden, deren Verbindungslinie durch P' geht und dieselbe Eigenschaft hat, wie MM_1. Dieselbe muss daher mit ihr zusammenfallen und also müssen auch X und X_1 mit N und N_1 zusammenfallen. Der obige Satz ist daher auch für Punkte auf einer der drei Diagonalen bewiesen.

Um ihn endlich auch für den Fall eines beliebigen Punktes P nachzuweisen, nehmen wir eine beliebige Gerade g und auf ihr einen variablen Punkt P, dessen ebenfalls variable gerade Polaren bezüglich der Dreiseite (abd) und (bcd) mit p und p_1 bezeichnet werden mögen. Dann werden alle $p\ldots$ von einem Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ und alle $p_1\ldots$ von einem Kegelschnitt $\mathfrak{C}_1$ umhüllt, den Poloconiken von g bezüglich (abd) und (bcd). Lassen wir je zwei Polaren p und p_1 desselben Punktes P einander entsprechen, so erhalten wir zwei krumme projectivische Tangentenbüschel. Die Tangenten $p\ldots$ schneiden die Gerade c in einer Punktreihe $M_1\ldots$; durch jeden Punkt M_1 gehen zwei Tangenten an $\mathfrak{C}$, die geraden Polaren zweier Punkte auf g bezüglich (abd); ihnen entsprechen zwei Tangenten von $\mathfrak{C}_1$, nämlich die Polaren derselben Punkte von g in Bezug auf (bcd) und diese Tangenten schneiden a in zwei Punkten MM'. Es entsprechen also jedem Punkt M_1 von c zwei Punkte MM' von a und ebenso jedem Punkt M von a zwei Punkte $M_1M'_1$ von c. Die Punktreihen $M\ldots$ auf a und $M_1\ldots$ auf c sind also in zwei-zweigliedriger Verwandtschaft. Wenn H der Schnittpunkt von EO mit g ist, so treffen sich die geraden Polaren von H in Bezug auf die beiden Dreiseite (abd) und (bcd) im Punkt F, denn EO schneidet die Geraden a und c in den harmonischen Gegenpunkten von F bezüglich der Ecken A und B auf a und C und D auf c. Daraus folgt, dass der gemeinschaftliche Punkt F der Geraden a und c in der zwei-zweigliedrigen Verwandtschaft sich selbst entspricht und dass also die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter Classe ist, welche auch a und c zu Tangenten hat. Von jedem Punkt auf einer der beiden Geraden, z. B. Q auf a, lassen sich an jene Enveloppe nur zwei Tangenten ziehen, diejenigen Geraden nämlich, welche Q mit den beiden ihm entsprechenden Punkten auf c verbinden. Dem Punkt F entspricht auf a sowohl, wie auf c nur ein Punkt, und deshalb sind a und c einfache Tangenten der Enveloppe und diese ist von der dritten Classe.

Da die geraden Polaren der Schnittpunkte (bg) und (dg) bezüglich der beiden Dreiseite (abd) und (bcd) die Geraden b und d sind, so berührt jene Curve $\mathfrak{C}_3$ alle Seiten der vierseitigen Curve $(abcd)$. — Die conischen Polaren der Punkte von c bezüglich der dreiseitigen Curve (abd) bilden ein Kegelschnittbüschel, welches g in den Punktpaaren einer Involution schneidet; eine zweite Involution wird auf g durch die Schnittpunkte der conischen Polaren der Punkte von a in Bezug auf die dreiseitige Curve (bcd) gebildet. Beide Involutionen haben ein Punktpaar gemein; es sei $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, dann treffen die geraden Polaren $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ beider Punkte bezüglich (abd) und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}'_1$ in Bezug auf (bcd) die Gerade c, resp. a in $\mathfrak{M}_1$, resp. $\mathfrak{M}$; also entspricht dem Punkt $\mathfrak{M}$ von a der Punkt $\mathfrak{M}_1$ auf c doppelt und umgekehrt und die Curve $\mathfrak{C}_3$ hat die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ zur Doppeltangente.

Nehmen wir die beiden Dreiseite (abc) und (acd), so treffen die geraden Polaren der Punkte von g die Seiten d und b in zwei Punktreihen $N_1 \ldots$ und $N \ldots$, die in zwei-zweigliedriger Verwandtschaft sich befinden und den Schnittpunkt E von b und d als sich entsprechenden Punkt besitzen. Die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte ist eine Curve $\mathfrak{C}'_3$ dritter Classe, die ebenso wie $\mathfrak{C}_3$ eine Doppeltangente hat. Beide Curven haben 13 gemeinschaftliche Tangenten: 1. die vier Seiten $abcd$, 2. fallen neun Linien MM_1 mit neun Linien NN_1 zusammen, diejenigen nämlich, welche den Schnittpunkten von g mit den drei Diagonalen und den sechs Geraden EO, FO, BO', DO', AO'', CO'' entsprechen. Daher fällt $\mathfrak{C}'_3$ mit $\mathfrak{C}_3$ zusammen. Lassen wir die Geraden $MM_1 \ldots$ und $NN_1 \ldots$, welche zu demselben Punkt von g gehören, einander entsprechen, so erhalten wir auf $\mathfrak{C}_3$ zwei projectivische Tangentenbüschel, die identisch sein müssen, weil 13 Mal entsprechende Tangenten zusammenfallen. Daraus schliessen wir, dass die zu einem bestimmten Punkt P von g gehörenden Geraden MM_1 und NN_1 in eine Gerade zusammenfallen, und haben also den schon anfangs citirten Satz, der von Cayley herrührt, bewiesen:

1. Construirt man in Bezug auf die Dreiseite (abc), (abd) (acd), (bcd) die geraden Polaren p, p_1, p_2, p_3 eines Punktes P, so liegen die vier Schnittpunkte (dp), (cp_1), (bp_2), (ap_3) in einer Geraden.

Man nennt diese Gerade die dritte oder gerade Polare des Punktes P in Bezug auf die vierseitige Curve ($abcd$) und umgekehrt P den Pol jener Geraden. — Mit Benutzung dieser Bezeichnung lässt sich das vorher erhaltene Resultat in folgenden Satz zusammenfassen:

2. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden g bezüglich der vierseitigen Curve ($abcd$) werden von einer Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter Classe mit einer Doppeltangente umhüllt.

Diese Curve heisst die dritte Polare von g bezüglich ($abcd$).

Die geraden Polaren der Punkte von g bezüglich der Dreiseite (abd) und (bcd) schneiden die Seiten c, resp. a in zwei Punktreihen, die in zwei-zweigliedriger Verwandtschaft stehen und den gemeinschaftlichen Punkt als sich selbst entsprechenden haben. Die Enveloppe der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ist eine Curve, welche a und c zu Tangenten hat, und aus dem Umstand, dass sich von jedem Punkt einer dieser Tangenten noch zwei andere an die Enveloppe ziehen lassen, schlossen wir, dass diese von der dritten Classe ist. Es fehlte der Nachweis, dass sich von jedem Punkt der Ebene drei Tangenten an die Enveloppe ziehen lassen, und dieser soll jetzt gegeben werden. Dabei gehen wir von der reciproken Aufgabe aus und stellen sie gleichzeitig allgemeiner:

Auf zwei Kegelschnitten K und K_1 befinden sich die projectivischen Punktreihen $X \ldots$ und $X_1 \ldots$. Wir verbinden einen beliebigen Punkt P mit allen $X \ldots$ und einen andern P_1

mit allen X_1...; welches ist der Ort der Schnittpunkte von PX... und P_1X_1...?

Wir schneiden die beiden Büschel durch eine Gerade $\mathfrak{g}$ in den Punkten $\mathfrak{Y}$... und $\mathfrak{Y}_1$... und beziehen ein System Σ_1, welchem wir das Büschel (P_1) zuweisen, collinear auf ein anderes Σ' so, dass die Gerade $\mathfrak{g}$ in beiden Systemen sich selbst und der Punkt P_1 in Σ_1 dem Punkt P in Σ' entspricht; dann wird dem Kegelschnitt K_1 ein anderer K' und der Punktreihe X_1... eine projectivische X'... auf K' entsprechen; daher sind auch die Punktreihen X... auf K und X'... auf K' in projectivischer Beziehung. Die Strahlen des Büschels (P) schneiden K in den Punktpaaren einer Involution, welcher auf K' eine andere entspricht, und die Verbindungslinien der einzelnen Punktpaare derselben schneiden sich in einem Punkt P' und bilden hier ein dem Büschel (P) projectivisches Strahlenbüschel (P'). Beide Büschel erzeugen einen Kegelschnitt $[PP']$, welcher K' in vier Punkten schneidet. Ist Q' einer dieser Schnittpunkte, so schneidet die Gerade PQ' den Kegelschnitt K in zwei Punkten, von denen der eine Q dem Punkt Q' projectivisch entspricht. Also giebt es durch P vier Strahlen, welche durch entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen X... auf K und X'... auf K' gehen. Einer dieser Strahlen, PQ, schneide $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{Q}$; wir rechnen $P\mathfrak{Q}$ zum System Σ', dann muss der ihm entsprechende Strahl im System Σ_1 der Strahl $P_1\mathfrak{Q}$ sein, weil die Gerade $\mathfrak{g}$ sich selbst entspricht. Im Punkt $\mathfrak{Q}$ fallen aber entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen $\mathfrak{Y}$... und $\mathfrak{Y}_1$... zusammen, und weil es durch P vier Gerade giebt, welche entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen X... und X'... treffen, so giebt es in der Punktreihe $\mathfrak{Y}_1$ .. vier Punkte, welche mit ihren entsprechenden in der Punktreihe $\mathfrak{Y}$... zusammenfallen. In ihnen schneiden sich entsprechende Strahlen der Büschel (P) und (P_1), und da also auf jeder Geraden vier Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser beiden Büschel liegen, so ist der Ort der Schnittpunkte aller entsprechenden Strahlen eine Curve vierter Ordnung, welche in P und P_1 zwei Doppelpunkte hat. Trifft die Gerade PP_1 die Kegelschnitte K und K_1 in entsprechenden Punkten der projectivischen Punktreihen X... und X_1..., so ist sie selbst ein Theil des Ortes; der übrige ist also eine Curve dritter Ordnung. — Hiermit wäre der verlangte Nachweis geführt.

Die Büschel (P) und (P_1) stehen übrigens in zwei-zweigliedriger Beziehung und das erhaltene Resultat können wir auf folgende Art ausdrücken:

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier Büschel, die in zwei-zweigliedriger Beziehung stehen, ist eine Curve vierter Ordnung, welche die Scheitel zu Doppelpunkten hat. Entspricht der gemeinschaftliche Strahl sich selbst, so ist der Ort eine Curve der dritten Ordnung, welche die Scheitel der Büschel zu einfachen Punkten hat.

Zu dem Satz 1 kann man auch auf folgendem Wege gelangen. Sind $ABCD$ die Ecken eines Tetraeders, ist $\mathfrak{E}$ eine beliebige Ebene, welche die Ebenen ABC oder $\mathfrak{D}$ in δ, ABD oder $\mathfrak{C}$ in γ, ACD oder $\mathfrak{B}$ in β und BCD oder $\mathfrak{A}$ in α schneidet; sind D', C', B', A' der Reihe nach die Pole von δ, γ, β, α bezüglich der Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD, so lässt sich zeigen, dass die Geraden AA', BB', CC', DD' sich in einem Punkt E treffen. Wir können nämlich den Raum, in dem sich das Tetraeder $ABCD$ und die Ebene $\mathfrak{E}$ befinden, collinear auf einen andern Raum so beziehen, dass der Ebene $\mathfrak{E}$ die unendlich entfernte Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ und dem Tetraeder $ABCD$ ein anderes $A_1B_1C_1D_1$ entspricht. Die Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ schneidet jede Seite des letzteren in der unendlich entfernten Geraden derselben, nämlich $A_1B_1C_1$ in δ_∞, $A_1B_1D_1$ in γ_∞, $A_1C_1D_1$ in β_∞ und $B_1C_1D_1$ in α_∞. Die Pole dieser Geraden bezüglich der Dreiecke, welche das Tetraeder begrenzen, sind die Schwerpunkte dieser Dreiecke. Es ist eine bekannte Eigenschaft des Tetraeders, dass die vier Schwerlinien desselben sich in einem Punkt schneiden. Dieser sei in unserem Falle E_1. Ihm entspricht collinear ein Punkt E, in welchem sich die den Schwerlinien entsprechenden Geraden schneiden. Ist D'_1 der Pol von δ_∞ und zugleich der Schwerpunkt von $A_1B_1C_1$, so ist die der Schwerlinie $D_1D'_1$ entsprechende die Gerade, welche D mit dem Pol D' von δ bezüglich des Dreiecks ABC verbindet. Also schneiden sich AA', BB', CC', DD' in dem Punkt E; es folgt:

3. Schneidet man die vier Seiten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ eines Tetraeders $ABCD$ durch eine Ebene $\mathfrak{E}$ in der Geraden α, β, γ, δ und construirt die Pole dieser Geraden in Bezug auf die Dreiecke, in deren Ebenen sie liegen, so treffen sich die Geraden, welche diese Pole mit den gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders verbinden, in einem Punkt E und — umgekehrt.

Man nennt $\mathfrak{E}$ die Polarebene von E und umgekehrt E den Pol von $\mathfrak{E}$ in Bezug auf das Tetraeder $ABCD$.

Je drei in einer Ecke zusammenstossende Ebenen des Tetraeders bilden ein Trieder. Man erhält die Eigenschaften seiner Polarflächen aus denen der Polaren einer dreiseitigen Curve. Betrachten wir das Trieder mit der Spitze A, dann finden wir die Polarebene irgend eines Punktes P, indem wir durch P und die Kanten des Trieders Ebenen legen, die sich also in einer Geraden AP schneiden, ihre Schnittlinien mit den Seitenflächen des Trieders und zu jeder Schnittlinie den harmonischen Gegenstrahl bezüglich der Kanten bestimmen. Die drei harmonischen Gegenstrahlen liegen in einer Ebene $\mathfrak{P}$, welche durch die Spitze A des Trieders geht. Diese Ebene $\mathfrak{P}$ heisst die Polarebene des Punktes P in Bezug auf das Trieder und umgekehrt P der Pol von $\mathfrak{P}$. Unmittelbar folgt, dass jeder Punkt auf der Geraden AP dieselbe Polarebene hat und dass der Schnittpunkt Q von AP und irgend einer Ebene $\mathfrak{Q}$, welche das Trieder in einem Dreieck und $\mathfrak{P}$ in einer Geraden q schneidet, der Pol von q in Bezug auf dieses Dreieck ist. Also:

4. Legt man durch irgend einen Punkt P eine Ebene, welche ein Trieder in einem Dreieck schneidet, so liegt die gerade Polare von P bezüglich dieses Dreiecks in der Polarebene von P in Bezug auf das Trieder.

Dem Satz in 3 lässt sich nun folgende Fassung geben:

5. Sind $ABCD$ die Ecken eines Tetraeders, so schneiden die Polarebenen eines beliebigen Punktes P bezüglich der vier Trieder, deren Spitzen die Ecken A, B, C, D des Tetraeders sind, die diesen Spitzen gegenüberliegenden Seiten desselben in vier Geraden, die in der Polarebene von P bezüglich des Tetraeders liegen.

Wir legen durch P eine beliebige Ebene, welche die Seiten $\mathfrak{ABCD}$ des Tetraeders in den Geraden $abcd$, ferner die Polarebenen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ von P bezüglich der Trieder mit den Spitzen $ABCD$ in $\alpha\beta\gamma\delta$ und die Polarebene $\mathfrak{P}$ von P in Bezug auf das Tetraeder in $\mathfrak{p}$ schneidet, dann müssen die Schnittpunkte $(a\alpha)$, $(b\beta)$, $(c\gamma)$, $(d\delta)$ auf $\mathfrak{p}$ liegen, weil die Ebene $\mathfrak{P}$ die Schnittlinien $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{D}\mathfrak{D}')$ nach 5 enthält. Hiermit ist der Satz 1 nochmals bewiesen.

Der Satz in 3 lässt sich auch direct beweisen, ohne den Satz, dass die Schwerlinien eines Tetraeders sich in einem Punkt schneiden, zu benutzen. Die Ebene $\mathfrak{E}$ schneide die Kanten AB, AC, AD, BC, BD, CD des Tetraeders $ABCD$ in den Punkten M, N, O, P, Q, R, deren harmonische Gegenpunkte M', N', O', P', Q', R' sein mögen, so dass also $ABMM'$, $ACNN'$,... je vier harmonische Punkte sind. Die Ebene $\mathfrak{E}$ schneide die Seiten

$$\begin{array}{lcccc} & ABC, & ABD, & ACD, & BCD \\ \text{in den Geraden} & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha, \\ \text{und es seien} & D', & C', & B', & A' \end{array}$$

die Pole dieser Geraden bezüglich der Dreiecke, in deren Ebenen die Geraden liegen. Der Pol A' von α bezüglich BCD liegt im Schnittpunkt der Geraden DP' und BR'; der Pol B' von β bezüglich des Dreiecks ACD liegt im Durchschnitt von DN' und AR' und der Pol D' von δ in Bezug auf das Dreieck ABC liegt im Durchschnitt der Geraden AP' und BN'. Die Geraden AA' und BB' liegen in der Ebene ABR' und schneiden sich daher in einem Punkt E. Da die Gerade DE die Schnittlinie der Ebenen $AA'D$ und $BB'D$ oder mit anderer Bezeichnung der Ebenen $AP'D$ und $BN'D$ ist, so folgt, dass DE durch den Punkt D' geht. Ebenso lässt sich zeigen, dass die Gerade CC' auch durch E geht und es folgt, dass die vier Geraden AA', BB', CC', DD' sich in einem Punkt schneiden. — Aus diesem Satz lassen sich die hauptsächlichsten Eigenschaften der Polarflächen des Tetraeders und aus ihnen die der harmonischen Mittelpunkte eines Systems von vier Punkten ableiten.

Wir kehren zur Betrachtung der vierseitigen Curve $(abcd)$ zurück. Die gerade Polare p von P bezüglich derselben schneide a in M_1, c in M, b in N, d in N_1, daher müssen die geraden Polaren von P bezüglich der Dreiseite (bcd), (abd), (acd), (abc) durch die Punkte M_1, M, N, N_1 gehen. Umgekehrt liegt der Pol P also auf den conischen Polaren μ_1, μ, ν, ν_1 der Punkte M_1, M, N, N_1 in Bezug auf die genannten Dreiseite. Zwei conische Polaren z. B. μ und μ_1 schneiden sich in P, E und ausserdem noch in zwei Punkten, die entweder beide reell oder beide imaginär sind. Wir nennen sie Q und R; ihre geraden Polaren bezüglich der Dreiseite (bcd) und (abd) müssen durch M und M_1 gehen und daher müssen die geraden Polaren von Q und R bezüglich (acd) und (abc) auch durch N und N_1 gehen oder, mit anderen Worten, die Punkte Q und R haben bezüglich des Vierseits $(abcd)$ dieselbe gerade Polare wie P, oder:

6. Jede Gerade p hat bezüglich einer vierseitigen Curve $(abcd)$ drei Pole.

Von diesen drei Polen ist einer stets reell; die beiden anderen sind zugleich beide reell oder beide imaginär. Da nach dem Vorigen auch die conischen Polaren ν und ν_1 durch die Punkte PQR gehen müssen, so folgern wir noch den Satz:

7. Schneidet man die Seiten $abcd$ eines Vierseits durch eine Gerade p in den Punkten M_1NMN_1, so treffen sich die conischen Polaren $\mu_1\nu\mu\nu_1$ der letzteren bezüglich der Dreiseite (bcd), (acd), (abd), (abc) in drei gemeinschaftlichen Punkten PQR, von denen jeder in Bezug auf $(abcd)$ die Gerade p zur geraden Polare hat.

Durch einen beliebigen Punkt P lege man beliebig viele Gerade $gg'g''\ldots$, so hat jede von ihnen in Bezug auf die vierseitige Curve $(abcd)$ drei Pole. Der Ort dieser Pole soll gefunden werden.

Zu dem Zweck nennen wir die Schnittpunkte von a und c mit jenen Geraden $M_1M'_1M''_1\ldots$ und $MM'M''\ldots$, dann sind die Punktreihen $M_1\ldots$ und $M\ldots$ projectivisch und ebenso die Büschel conischer Polaren $\mu_1\mu'_1\mu''_1\ldots$ von $M_1M'_1M''_1\ldots$ bezüglich (bcd) und $\mu\mu'\mu''\ldots$ von $MM'M''\ldots$ bezüglich des Dreiseits (abd), wenn je zwei conische Polaren einander zugeordnet werden, deren Pole in den projectivischen Punktreihen entsprechende Punkte sind. Je zwei einander entsprechende Kegelschnitte der beiden Büschel schneiden sich in den drei Polen einer durch P gehenden Geraden und da die Curve der Durchschnittspunkte der entsprechenden Kegelschnitte von der vierten Ordnung ist, so ist auch der Ort der Pole aller durch P gehenden Geraden von der vierten Ordnung. Eine der Geraden $g\ldots$ geht durch den Schnittpunkt F von a und c, so dass also in F zwei entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen M. . und $M_1\ldots$ vereinigt sind. Die conischen Polaren φ und φ_1 von F bezüglich der Dreiseite (abd) und (bcd) sind also entsprechende Kegelschnitte. Weil aber φ_1 das Geradenpaar (EO, a) und φ das Geradenpaar (EO, c) ist, so muss jeder Punkt von EO als ein Punkt der Curve vierter Ordnung betrachtet werden. Dieselbe zerfällt also in die Gerade EO und eine Curve π der dritten Ordnung. Dieselbe muss durch die sechs Punkte $ABCDEF$, die Schnittpunkte der vier Geraden $abcd$, gehen, weil CDE drei Basispunkte des Büschels $\mu_1 \ldots$ und ABE drei Basispunkte des Büschels $\mu \ldots$ sind und weil in F die Geraden a und c oder die beiden einander entsprechenden Kegelschnitte φ und φ_1 sich schneiden. Wir folgern daraus den Satz:

8. Die Pole aller Geraden, welche durch einen Punkt P gehen, bezüglich der vierseitigen Curve $(abcd)$, liegen auf einer Curve π der dritten Ordnung, welche durch die sechs Schnittpunkte der vier Geraden $abcd$ geht.

Die Curve π heisst die erste oder cubische Polare des Punktes P und umgekehrt P ihr Pol bezüglich der vierseitigen Curve $(abcd)$.

Wenn der Punkt P sich auf einer Geraden g bewegt, so geht seine cubische Polare π immer durch die drei Pole QRS dieser Geraden und ausserdem durch die sechs Punkte $ABCDEF$. Daher bilden alle cubischen Polaren $\pi \ldots$ der Punkte einer Geraden ein Büschel, da sie neun gemeinsame Punkte haben.

9. Die cubischen Polaren aller Punkte einer Geraden g. bilden ein Büschel von neun gemeinsamen Punkten.

Ist P irgend ein Punkt, π seine cubische Polare, Q ein beliebiger Punkt auf derselben, so ist Q der Pol einer durch P gehenden Geraden oder, was dasselbe, die gerade Polare von Q geht durch P. — Wenn umgekehrt g die gerade Polare eines Punktes Q und P ein Punkt auf g ist, dann muss die cubische Polare π von P durch Q gehen, weil O der Pol von g ist. Daher wird gefolgert:

10. Liegt ein Punkt Q auf der cubischen Polare eines andern P, so liegt dieser auf der geraden Polare des ersten und umgekehrt.

Diesen Satz erhalten wir aus dem Satz 1. Für letzteren sind zwei Beweise gegeben, einen mit Hilfe des Satzes 2, einen andern ohne den Satz 2 zu benutzen, aus stereometrischen Betrachtungen. Vermittelst des letzteren können wir jetzt einen zweiten Beweis des Satzes 2 geben. Ist nämlich g eine beliebige Gerade, P irgend ein Punkt ausser ihr, so schneidet die cubische Polare π desselben die Gerade g in drei Punkten, deren gerade Polaren nach 10. durch P gehen müssen. Von den geraden Polaren aller Punkte von g gehen also nur drei durch einen Punkt, es werden dieselben also von einer Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter Classe umhüllt. Liegt ein Punkt P auf dieser Curve $\mathfrak{C}_3$, so fallen zwei von den drei Tangenten, die sich von jedem Punkt an dieselbe ziehen lassen, mit der Tangente in P zusammen und daher muss die cubische Polare π von P die Gerade g in einem Punkt berühren und in einem andern schneiden, so dass also die Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter

Classe zugleich als Ort der Pole derjenigen cubischen Polaren erscheint, welche g berühren. Um die Ordnung der Curve $\mathfrak{C}_3$ zu finden, suchen wir die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden l. Die cubischen Polaren der Punkte von l bilden ein Curvenbüschel der dritten Ordnung; vier von ihnen berühren die Gerade g und daher giebt es auf l vier Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}_3$, nämlich die vier Pole derjenigen cubischen Polaren der Punkte von l, welche g berühren.

Da $\mathfrak{C}_3$ von der dritten Classe und vierten Ordnung ist, so muss sie eine Doppeltangente haben und wir erhalten somit den Satz 2 zurück, der folgende etwas erweiterte Fassung annimmt:

11. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden g werden von einer Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter Classe vierter Ordnung umhüllt, welche zugleich der Ort der Pole derjenigen cubischen Polaren ist, welche g berühren.

Zunächst suchen wir die Pole einer der vier Seiten $abcd$ der Curve. Die conische Polare von A bezüglich (bcd) ist ein Geradenpaar (dd'), wenn d' die Gerade durch C ist, welche D und E harmonisch von A trennt; die conische Polare von D in Bezug auf ABE ist ein Geradenpaar (dd''), wenn d'' die Gerade ist, welche durch B geht und die Punkte A und E harmonisch von D trennt. Die Pole von d bezüglich $(abcd)$ sind also die Schnittpunkte von (dd') mit (dd''). Von diesen vier Schnittpunkten fällt nur der Schnittpunkt (d', d'') nicht auf d; da d und d sich in jedem Punkt von d scheiden, so hat die Gerade d auf ihr selbst unendlich viele Pole, daher muss die cubische Polare irgend eines Punktes von d aus dieser Geraden und einem Kegelschnitt bestehen. Also:

12. Jede der vier Seiten $abcd$ hat unendlich viele Pole, die auf ihr selbst liegen, und nur einen, der nicht auf ihr liegt; die cubische Polare irgend eines Punktes einer der vier Seiten, z. B. d, besteht aus dieser Seite und einem Kegelschnitt, der durch den Pol (d', d'') und die drei Punkte BCF geht. Daher bilden die cubischen Polaren aller Punkte von d ausser d ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten BCF und (d', d''). Die drei in diesem Kegelschnittbüschel vorkommenden Geradenpaare bilden in Verbindung mit d die cubischen Polaren der drei Doppelpunkte ADE der Curve $(abcd)$, welche auf d liegen, so dass also die cubische Polare eines der sechs Doppelpunkte der Curve $(abcd)$ eine dreiseitige Curve ist, welche die im Doppelpunkt sich schneidenden Seiten gleichfalls zu Seiten hat.

Aus der letzten Eigenschaft folgert man noch:

13. Die gerade Polare eines jeden der sechs Doppelpunkte von $(abcd)$ ist unbestimmt und kann jede Gerade sein.

Um die Pole der Diagonale AC zu finden, suche man die Durchschnitte der conischen Polaren von A in Bezug auf (bcd) und von C in Bezug auf (abd). Erstere ist das Geradenpaar (dd''), die letztere ein Geradenpaar (bb'), wenn b' die Gerade durch A ist, welche B und E harmonisch von C trennt. Ihre Schnittpunkte sind (b, d), (b, d''), (b', d) und (b', d'') oder E, C, A und O'', also sind C, A und O'' die drei Pole von AC. Dies giebt den Satz:

14. Die drei Pole einer Diagonale sind ihre Endpunkte und der Schnittpunkt der anderen beiden Diagonalen,

oder:

Jeder Schnittpunkt zweier Diagonalen hat die dritte zur geraden Polare in Bezug auf $(abcd)$.

Ist P ein beliebiger Punkt von AC, so findet man die Pole aller durch P gehenden Geraden als Durchschnitte der entsprechenden Kegelschnitte zweier projectivischen Kegelschnittbüschel. Drei Basispunkte des ersten Büschels sind ABE, drei des andern CDE. Ein Kegelschnitt des zweiten Büschels geht durch A, ihm entspricht ein anderer im ersten Büschel, dann ist die Tangente in A an letzteren zugleich Tangente in A an die von beiden Büscheln erzeugte Curve, also an die cubische Polare von P. Der durch A gehende Kegelschnitt des zweiten Büschels ist in unserem Falle die conische Polare von A bezüglich (bcd), also das Geradenpaar (dd''); ihr entspricht die conische Polare (bb') von C in Bezug auf (abd). Als Tangente in A an dieses Geradenpaar ist aber b' selbst zu betrachten, daher ist b' die Tangente in A an die cubische Polare π von P; ebenso ist d'' Tangente in C an π. Beide Tangenten schneiden sich in O''. Wir fanden früher, dass die gerade Polare p von P bezüglich der vierseitigen Curve $(abcd)$ durch den Punkt P' von AC geht, welcher P von A und C harmonisch trennt. Daher muss auch die gerade Polare von P' durch P und wegen des Satzes 11. auch die cubische Polare π von P durch P' gehen. Da diese cubische Polare π durch O'' geht und die Geraden $O''A$ und $O''C$ oder b' und d'' Tangenten an dieselbe sind, so lässt sich nachweisen, dass O'' ein Wendepunkt von π und also $O''P'$ auch Tangente an π in P' ist. Die conische Polare von O'' in Bezug auf π muss durch $ACOO'$ gehen, weil A und C Berührungspunkte der von O'' an π gezogenen Tangenten, O und O' aber die harmonischen Gegenpunkte von O'' bezüglich der Punkte BD und EF der Curve π sind. Es liegen aber die vier Punkte $ACOO'$ in einer Geraden, also ist diese ein Theil der conischen Polare von O' bezüglich π; der andere Theil ist daher auch eine Gerade und diese muss, weil O'' ein Punkt von π ist, Tangente in O'' an π, also eine Wendetangente sein; O'' ist daher ein Wendepunkt und $O''P'$ die dritte Tangente von O'' an π. Daraus folgt:

15. Die cubische Polare π eines Punktes P irgend einer der drei Diagonalen, z. B. AC, schneidet diese noch im harmonischen Gegenpunkt P' von P bezüglich der End-

punkte A und C der Diagonale und hat im Schnittpunkt O'' der andern beiden Diagonalen BD und EF einen Wendepunkt.

Wir fanden, dass $O''P'$ die gerade Polare von P bezüglich der Curve $(abcd)$ ist; es lässt sich aber auch zeigen, dass $O''P'$ die gerade Polare von P bezüglich der cubischen Polare π von P ist. Dass die gerade Polare von P bezüglich π durch O'' gehen muss, folgt daraus, dass P auf der harmonischen Polare AC des Wendepunktes O'' bezüglich π liegt, und dass die gerade Polare von P durch P' geht, folgt daraus, dass die Curve π durch die drei Punkte ACP' geht und der letzte durch P von den beiden anderen harmonisch getrennt wird. Also:

16. **Die gerade Polare p eines Punktes P einer der drei Diagonalen bezüglich $(abcd)$ ist zugleich die gerade Polare von P bezüglich seiner cubischen Polare π.**

Die geraden Polaren aller Punkte von FO schneiden sich in E'. Wenn FO die Geraden d und b in F' und F'' schneidet, so ist d die gerade Polare von F' sowohl bezüglich der Curve $(abcd)$, als der cubischen Polare von F', weil die Gerade d ein Theil dieser Polare ist. Gleiches gilt von der geraden Polare von F''. Die cubische Polare von F besteht aus den drei Geraden (a, c, EO); weil die gerade Polare von F bezüglich seiner cubischen Polare, da F ein Doppelpunkt derselben ist, jede Gerade, also auch EO, sein kann, so fällt die gerade Polare von F bezüglich $(abcd)$ mit der geraden Polare von F in Bezug auf seine cubische Polare zusammen. — Ferner finden wir, dass die gerade Polare von O bezüglich (bcd) die Seite a in F und bezüglich (abc) die Seite d in E schneidet, dass also EF die gerade Polare von O in Bezug auf $(abcd)$ ist. Nach dem vorigen Satze ist aber auch EF die gerade Polare von O in Bezug auf die cubische Polare von O. Diese besteht aus der Geraden EF und einem Kegelschnitt, welcher die Geraden $O''A$, $O''C$, $O'B$, $O'D$ in A, C, B, D berührt.

Es bilden die geraden Polaren aller Punkte von FO in Bezug auf $(abcd)$ ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel E und die cubischen Polaren derselben Punkte ein projectivisches Curvenbüschel dritter Ordnung. Ferner bilden die geraden Polaren aller Punkte von FO bezüglich ihrer cubischen Polaren ebenfalls ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel E. Ist nämlich Q ein beliebiger Punkt, so bilden seine conischen Polaren in Bezug auf das Büschel der cubischen Polaren ein diesem projectivisches Kegelschnittbüschel. Letzteres ist daher auch projectivisch zur Reihe der Pole der cubischen Polaren des Büschels und schneidet FO in einer quadratischen Punktinvolution, die zur Reihe der Pole projectivisch ist. Beide Punktreihen haben drei gemeinschaftliche sich selbst entsprechende Punkte und die geraden Polaren dieser Punkte bezüglich ihrer cubischen Polaren sind die einzigen von den geraden Polaren aller Punkte auf FO bezüglich ihrer cubischen Polaren, welche durch Q gehen. Wir folgern daher, dass die geraden Polaren der Punkte von FO in Bezug auf die cubischen Polaren dieser Punkte von einer Curve der dritten Classe umhüllt werden. Da aber durch den Punkt E vier solcher Geraden gehen, so ist E ein Theil dieser Curve. Durch E gehen aber die geraden Polaren der Punkte $FF'F''O$, also gehen die geraden Polaren aller Punkte von FO bezüglich ihrer cubischen Polaren durch E. Wir haben also in E zwei Strahlenbüschel, die beide mit dem Büschel der cubischen Polaren und daher untereinander in projectivischer Beziehung stehen. Dieselben haben vier Paar entsprechende Strahlen gemeinschaftlich, da die geraden Polaren der vier Punkte $FF'F''O$ bezüglich $(abcd)$ mit den geraden Polaren derselben Punkte bezüglich ihrer cubischen Polaren zusammenfallen; also sind die beiden Strahlenbüschel in E identisch und wir erhalten für die Punkte von FO und auf dieselbe Art für die Punkte der fünf Geraden EO, BO', DO', AO'', CO'' den Satz:

17. Die gerade Polare eines Punktes einer der sechs Linien EO, FO, BO', DO', AO'', CO'' bezüglich $(abcd)$ fällt mit der geraden Polare dieses Punktes bezüglich seiner cubischen Polare zusammen.

Beiläufig folgt:

18. Die cubische Polare des Schnittpunktes O zweier Diagonalen besteht aus der dritten Diagonale $O'O''$ und einem Kegelschnitt, welcher die Geraden AO'', CO'', BO', DO' in A, C, B, D berührt.

Durch einen beliebigen Punkt P legen wir eine Gerade g. Die geraden Polaren aller ihrer Punkte in Bezug auf $(abcd)$ werden von einer Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter Classe eingehüllt. Ganz wie im vorigen Beweise lässt sich nachweisen:

19. Die geraden Polaren der Punkte einer beliebigen Geraden g bezüglich ihrer cubischen Polaren werden von einer Curve $\mathfrak{C}'_3$ der dritten Classe eingehüllt.

Denn ist Q ein beliebiger Punkt, so bilden seine conischen Polaren bezüglich des Büschels cubischer Polaren der Punkte von g ein Büschel, welches g in einer zur Punktreihe der Pole der cubischen Polaren projectivischen quadratischen Punktinvolution schneidet. Die geraden Polaren der drei Doppelpunkte jener Punktreihe und dieser Involution bezüglich ihrer cubischen Polaren sind die einzigen, welche durch Q gehen, also ist die Enveloppe der geraden Polaren der Punkte von g bezüglich ihrer cubischen Polaren eine Curve $\mathfrak{C}'_3$ dritter Classe. Die Gerade g schneidet die Geraden a, b, c, d, AC, BD, EF, AO'', CO'', BO', DO', EO, FO und die geraden Polaren dieser 13 Schnittpunkte bezüglich ihrer cubischen Polaren fallen mit den geraden Polaren dieser Punkte in Bezug auf $(abcd)$ zusammen, und da $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{C}'_3$ diese 13 Geraden als gemeinschaftliche Tangenten haben, so müssen sie zusammenfallen, also hat jeder Punkt P von g bezüglich seiner cubischen Polare und bezüglich $(abcd)$ dieselbe gerade Polare. Es folgt der Satz:

20. Die gerade Polare eines Punktes P bezüglich seiner cubischen Polare fällt mit seiner geraden Polare bezüglich der vierseitigen Curve $(abcd)$ zusammen.

Wir stellen jetzt die Frage nach dem Ort der Doppelpole. Nennen wir nämlich die drei Pole einer Geraden in Bezug auf $(abcd)$ verbundene Pole, so kann es vorkommen, dass zwei solcher verbundenen Pole in einen Doppelpol zusammenfallen. Sind $\mu\ldots$ die conischen Polaren der Punkte von c bezüglich der dreiseitigen Curve (abd) und $\mu_1\ldots$ die conischen Polaren der Punkte von a bezüglich (bcd), sind ferner $M\ldots$ und $M_1\ldots$ die Pole dieser conischen Polaren, so sind die drei Punkte, in denen sich zwei conische Polaren, wie μ und μ_1, ausser im gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Geraden b und d, schneiden, die drei Pole der Geraden MM_1. Berühren sich also zwei Kegelschnitte μ und μ_1, so ist der Berührungspunkt ein Doppelpol. Da aber jeder Kegelschnitt μ von vier Kegelschnitten $\mu_1\ldots$ berührt wird, so liegen auf jedem Kegelschnitt μ nur vier Doppelpole und daher ist der Ort der Doppelpole ein Kegelschnitt H^2, welcher die Hesse'sche Curve von $(abcd)$ heisst. Also:

21. Der Ort der Doppelpole oder die Hesse'sche Curve von $(abcd)$ ist ein Kegelschnitt H^2.

Ist X ein beliebiger, aber fester Punkt, und bestimmen wir seine geraden Polaren in Bezug auf alle cubischen Polaren von $(abcd)$, rechnen wir ferner die letzteren zu einem System Σ und die ersteren zu einem anderen System Σ_1, so entspricht also jeder cubischen Polare von Σ eine Gerade von Σ_1 und umgekehrt. Sind $\pi\pi'\ldots$ die cubischen Polaren eines Büschels, welche sich in den drei Punkten $QQ'Q''$ ausser in $ABCDEF$ schneiden, so schneiden sich die geraden Polaren von X bezüglich $\pi\pi'\ldots$ in einem Punkt Q_1. Den drei verbundenen Polen $QQ'Q''$ von Σ entspricht ein Punkt Q_1 in Σ_1 und dem Punkt Q_1 entsprechen jene drei verbundenen Pole $QQ'Q''$.

Die cubischen Polaren aller Punkte einer der vier Seiten, z. B. a, bestehen aus der Geraden a und einem Kegelschnitt $\varkappa$, welcher durch vier feste Punkte $CDE\mathfrak{A}$ geht, so dass also die beiden anderen mit $\mathfrak{A}$ verbundenen Pole $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ auf a liegen, und zwar kann jeder Punkt von a als $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}''$ angesehen werden. Dem Punkt $\mathfrak{A}$ entspricht ein fester Punkt in Σ_1, und jedem Punkt von a entspricht also derselbe Punkt von Σ_1, den wir mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnen wollen. Umgekehrt entspricht dem Punkt $\mathfrak{A}_1$ von Σ_1 jeder Punkt von a und daher diese Gerade selbst. Ebenso giebt es in Σ_1 noch drei Punkte $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$, denen in Σ die drei Geraden bcd entsprechen. — Jeder der sechs Punkte $ABCDEF$ entspricht allen Punkten von Σ_1.

Mit Hilfe der zwischen den Systemen Σ und Σ_1 aufgestellten geometrischen Verwandtschaft lässt sich die Frage nach dem Ort der den Punkten einer Curve verbundenen Pole beantworten.

Wenn g eine beliebige Gerade ist, so entspricht ihr in Σ_1 eine Curve K_1. Da g von jeder cubischen Polare in drei Punkten geschnitten wird und jeder eine Gerade in Σ_1 entspricht, so muss jede dieser Geraden die Curve K_1 in drei Punkten schneiden, also ist auch K_1 von der dritten Ordnung. Einer andern Geraden g' von Σ entspricht eine Curve K'_1 in Σ_1. Die Curven K_1 und K'_1 schneiden sich ausser in $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ noch in fünf Punkten. Dem einen von ihnen entspricht der Schnittpunkt von g und g'; jedem der andern entspricht ein Paar verbundener Pole, von denen der eine auf g, der andere auf g' liegt. Auf jeder Geraden g' liegen also vier Punkte, die mit vier Punkten auf g vier Paare verbundener Pole bilden, oder mit andern Worten:

22. Die den Punkten einer Geraden g verbundenen Pole liegen auf einer Curve C^4 vierter Ordnung, welche auch durch die Schnittpunkte von g und H^2 geht.

Ist K^2 ein beliebiger Kegelschnitt, so entspricht ihm in Σ_1 eine Curve K_1. Da K^2 von jeder cubischen Polare in sechs Punkten geschnitten wird, so muss K_1 von den Geraden, welche diesen cubischen Polaren entsprechen, auch in sechs Punkten geschnitten werden. Also ist K_1 von der sechsten Ordnung und werde mit K_1^6 bezeichnet. Diese Curve hat die Punkte $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ zu Doppelpunkten, weil K^2 jede der Geraden $abcd$ in zwei Punkten schneidet. Einer beliebigen Geraden g entspricht eine Curve K_1^3, die auch durch die Punkte $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ geht. Beide Curven schneiden sich in 18 Punkten; acht von ihnen liegen in $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$. Von den übrigen zehn entsprechen zwei den Schnittpunkten von g und K^2. Den übrig bleibenden acht Schnittpunkten entsprechen in Σ acht Paar verbundener Pole, so dass von jedem Paar der eine Pol auf g, der andere auf K^2 liegt. Daher giebt es acht Punkte auf K^2, deren jeder einen verbundenen Pol auf der beliebigen Geraden g hat. Daraus folgt:

23. Die den Punkten eines Kegelschnittes K^2 verbundenen Pole liegen auf einer Curve achter Ordnung, welche auch durch die vier Schnittpunkte von K^2 und H^2 geht.

Zur Ableitung dieses Satzes benutzten wir den Satz, dass eine Curve dritter Ordnung und eine Curve sechster Ordnung 18 Schnittpunkte haben. Da der letztere Satz synthetisch noch nicht bewiesen ist, so ist ein andere (vergl. Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, Art. 105) vorzuziehen. — Der Ort der den Punkten von g verbundenen Pole ist eine Curve vierter Ordnung, weche K^2 in acht Punkten schneidet. Also ist der Ort der den Punkten von K^2 verbundenen Pole eine Curve achter Ordnung.

Wählen wir H^2 statt K^2, so zerfällt der Ort der ihren Punkten verbundenen Pole in H^2 und eine Curve C^6 sechster Ordnung. Also:

24. Der Ort der den Punkten der Hesse'schen Curve H^2 verbundenen Pole ist eine Curve C^6.

Alle cubischen Polaren, welche durch einen Punkt (QR) von H^2 gehen, berühren sich in diesem Punkt und haben in ihm eine gemeinschaftliche Tangente. Welches ist die Enveloppe aller dieser Tangenten? Da in (QR) sich auch zwei Kegelschnitte μ und ν berühren, so stellt sich die Frage auch nach der Enveloppe der in den Berührungspunkten der Kegelschnitte $\mu \ldots$ und $\nu \ldots$ gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten. Ist P ein beliebiger Punkt, so liegen die Berührungspunkte der von ihm an die Kegelschnitte $\mu \ldots$ und $\nu \ldots$ gezogenen Tangenten auf zwei Curven dritter Ordnung $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, weil alle $\mu \ldots$ ein Büschel bilden, und ebenso alle $\nu \ldots$. Die beiden Curven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ schneiden sich ausser in P noch in acht Punkten, deren Verbindungslinien mit P die acht möglichen Tangenten an die gesuchte Enveloppe sind. Diese ist also von der achten Classe. Sie reducirt sich aber auf einen Kegelschnitt und die sechs Punkte $ABCDEF$. Alle Kegelschnitte μ und ν haben nämlich den Punkt E gemein und es giebt aus jedem Büschel einen, welcher PE berührt. — Die Kegelschnitte $\mu \ldots$ und $\nu \ldots$ sind die conischen Polaren der Punkte von c bezüglich (abd) und von a bezüglich (bcd). Nehmen wir zu ihnen noch die conischen Polaren $\varrho \ldots$ der Punkte von b bezüglich (acd) und $\sigma \ldots$ der Punkte von d bezüglich (abc), so berühren auch zwei Kegelschnitte ϱ und σ die Gerade PE in E, weil es stets vier Kegelschnitte, aus jedem der Büschel $\mu \ldots$, $\nu \ldots$, $\varrho \ldots$, $\sigma \ldots$ einen, giebt, welche sich in denselben drei Punkten schneiden. Daher giebt es auch in jedem der Büschel einen Kegelschnitt, welcher PA in A, PB in $B, \ldots$ berührt und wir haben den Satz:

25. Die Enveloppe der gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten aller cubischen Polaren ist ein Kegelschnitt C_1^2.

Die conischen Polaren der drei Punkte A, E und F in Bezug auf ein Büschel cubischer Polaren bilden drei projectivische Kegelschnittbüschel, wenn man je drei conische Polaren einander entsprechen lässt, die sich auf dieselbe cubische Polare beziehen. Der Ort der Schnittpunkte homologer Kegelschnitte der conischen Polaren von A und E ist eine Curve vierter Ordnung, die aus der Geraden d und einer Curve C^3 dritter Ordnung besteht. Ebenso schneiden sich die homologen Kegelschnitte der conischen Polaren von A und F auf a und einer Curve C_1^3 dritter Ordnung. Die Curven (d, C^3) und (a, C_1^3) haben 16 Schnittpunkte. Rechnen wir hiervon die vier Grundpunkte des Büschels conischer Polaren von A, zu denen A und je ein Punkt auf a und d gehören ab, so bleiben zwölf Schnittpunkte übrig und diese sind bekanntlich die Doppelpunkte derjenigen Curven des Büschels cubischer Polaren, welche solche besitzen. Es giebt im Büschel vier Curven, die aus einem Kegelschnitt und einer Geraden zusammengesetzt sind, also zwei Doppelpunkte haben; also sind in jedem Büschel cubischer Polaren nur vier Curven mit einem Doppelpunkt. Da auf jeder Geraden also vier Pole von solchen cubischen Polaren liegen, welche nur einen

Doppelpunkt haben, so ist der Ort dieser Pole von der vierten Ordnung. Er heisst die Steiner'sche Curve von $(abcd)$ und es folgt der Satz:

26. Der Ort der Pole solcher cubischen Polaren, welche nur einen Doppelpunkt haben, ist eine Curve S^4 vierter Ordnung, welche die Steiner'sche Curve von $(abcd)$ ist.

Wir fanden, dass es auf jeder Geraden vier solche Pole giebt, deren cubische Polaren nur einen Doppelpunkt haben; auf jeder Geraden durch einen der Diagonalpunkte $OO'O''$ giebt es aber nur zwei solcher Punkte, weil jeder dieser Punkte der Pol einer cubischen Polare ist, welche zwei Doppelpunkte hat; also folgt:

27. Die drei Diagonalpunkte $OO'O''$ des Vierseits $(abcd)$ sind drei Doppelpunkte der Steiner'schen Curve S^4.

Ist P ein Punkt von H^2, so berühren sich in ihm unendlich viele cubische Polaren und haben in P die gemeinschaftliche Tangente p zur geraden Polare von P. — Die gerade Polare von P bezüglich irgend einer andern cubischen Polare und daher in Bezug auf alle anderen cubischen Polaren schneidet p in einem Punkt Q. Daher ist H^2 der Ort der Pole, deren gerade Polaren bezüglich der cubischen Polaren von $(abcd)$ durch einen Punkt gehen.

Wenn P ein Doppelpunkt irgend einer cubischen Polare ist, so haben alle cubischen Polaren, welche durch P gehen und ein Büschel bilden, in P zwei gemeinschaftliche Punkte, d. h. sie berühren sich in P und dieser Punkt ist also ein Punkt von H^2, so dass also H^2 der Ort der Doppelpunkte derjenigen cubischen Polaren ist, welche nur einen Doppelpunkt haben. Ausserdem liegen auf H^2 die drei Paare von Doppelpunkten der cubischen Polaren von $OO'O''$; sie sind die Schnittpunkte von H^2 mit den drei Diagonalen $O'O''$, $O''O$, OO'.

Es folgen also die Sätze:

28. Die Hesse'sche Curve H^2 ist der Ort der Pole, deren gerade Polaren bezüglich der cubischen Polaren von $(abcd)$ sich in einem Punkt treffen; sie ist ferner der Ort der Doppelpunkte der cubischen Polaren, welche nur einen Doppelpunkt haben, enthält jedoch auch die drei Paare von Doppelpunkten der cubischen Polaren der Punkte $OO'O''$, der Diagonalpunkte von $(abcd)$, und schneidet in diesen Doppelpunkten die drei Diagonalen $O'O''$, $O''O$, OO'.

Lässt man jedem Punkt P der Hesse'schen Curve H^2, als Doppelpunkt einer cubischen Polare aufgefasst, den Pol Q derselben auf der Steiner'schen Curve S^4 entsprechen, so sind die Punkte P. . auf H^2 und $Q\ldots$ auf S^4 in projectivischer Beziehung. Den drei Doppelpunkten $OO'O''$ von S^4 entsprechen die Schnittpunkte von H^2 mit $O'O''$, $O''O$, OO'. — Nach Obigem schneiden sich in Q die geraden Polaren von P für alle cubischen Polaren. Denn ist p die gemeinschaftliche Tangente der cubischen Polaren

π und π', die sich in P berühren, schneidet ferner die gerade Polare von P bezüglich irgend einer andern cubischen Polare die Tangente p in Q', so treffen sich die geraden Polaren von P in Bezug auf alle cubischen Polaren in Q' und daher schneiden sich die conischen Polaren von Q' in Bezug auf alle cubischen Polaren in P. Ist p' irgend eine gerade Polare des Punktes P, so gehen die conischen Polaren aller ihrer Punkte durch P und P ist daher ein Doppelpunkt einer cubischen Polare. Seine cubische Polare sei π^3, dann muss auch die gerade Polare von P bezüglich π^3 oder, was dasselbe ist, bezüglich $(abcd)$ durch Q' gehen und Q' muss mit Q zusammenfallen. Die Enveloppe der Geraden $PQ, \ldots$ ist daher nach 25) der Kegelschnitt C_1^2 und es folgt:

29. Die Enveloppe der Geraden $PQ, \ldots$, welche entsprechende Punkte P und Q der Hesse'schen und Steiner-schen Curve verbindet, ist der Kegelschnitt C_1^2. (Vergl. 25.)

Eine Tangente q der Steiner'schen Curve berühre dieselbe in Q. Die cubischen Polaren aller Punkte von q berühren sich im entsprechenden Punkt P von Q auf der Hesse'schen Curve, so dass also P ein Pol von q bezüglich $(abcd)$ und q die gerade Polare desselben ist. Daraus folgt für die Steiner'sche Curve:

30. Die Steiner'sche Curve ist die Enveloppe der geraden Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve.

Diese Eigenschaft macht es leicht, die Classe der Steiner'schen Curve zu bestimmen. Ist nämlich R ein beliebiger Punkt, ϱ^3 seine cubische Polare, so gehen durch R die sechs geraden Polaren der Schnittpunkte von ϱ^3 mit der Hesse'schen Curve H^2, woraus folgt, dass die Steiner'sche Curve von der sechsten Classe ist. — Wenn R auf einer der vier Seiten $abcd$, z. B. auf a liegt, so besteht seine cubische Polare aus a und einem Kegelschnitt ϱ^2. Die geraden Polaren der Schnittpunkte von a und H^2 fallen mit a zusammen, so dass also a eine Doppeltangente der Steiner-Curve ist und von jedem ihrer Punkte sich nur noch vier Tangenten an die Curve ziehen lassen. Wir schliessen:

31. Die Steiner'sche Curve ist von der sechsten Classe und hat die vier Seiten $abcd$ der vierseitigen Curve $(abcd)$ zu Doppeltangenten.

Wenn R auf a liegt, so findet man die vier Tangenten, die sich von R an die Steiner'sche Curve legen lassen, als die geraden Polaren der Punkte, in denen H^2 von der conischen Polare μ von R in Bezug auf das Dreiseit (bcd) geschnitten wird. Der Punkt R durchlaufe die Gerade a, so beschreibt die conische Polare μ bezüglich (bcd) ein Kegelschnittbüschel, von dessen Kegelschnitten sechs die Curve H^2 berühren. Von den Polen dieser sechs Kegelschnitte bezüglich (bcd) lassen sich daher an die Steiner'sche Curve S^4 nur je drei Tangenten ziehen. Rechnen wir hierzu die vier in den beiden Berührungspunkten der Doppeltangente a vereinigten

Punkte, so folgt, dass es auf der Doppeltangente a 10 Punkte giebt, von denen sich weniger als vier Tangenten an die Enveloppe der geraden Polaren der Punkte von H^2. ziehen lassen. — Dasselbe Resultat erhalten wir etwas allgemeiner auf folgendem Wege. Es bewege sich ein Punkt R auf einer Geraden g, so beschreibt seine cubische Polare ϱ^3 ein Büschel, dessen einzelne Curven H^2 in Punktgruppen von je sechs Punkten schneiden. Die Gruppen von je 15 Verbindungslinien dieser Punkte werden von einer Curve der fünften Classe eingehüllt, denn von jedem Punkt auf H^2 lassen sich an die Enveloppe jener Verbindungslinien nur fünf Tangenten ziehen, die Geraden nämlich, welche den Punkt mit jenen fünf Punkten verbinden, welche mit ihm eine Gruppe von sechs Punkten bilden. Diese Curve fünfter Classe hat mit H^2 zehn gemeinschaftliche Tangenten, so dass es zehn cubische Polaren ϱ^3 giebt, welche H^2 berühren. Mit anderen Worten: Auf jeder Geraden g giebt es zehn Punkte, von denen sich an die Enveloppe der geraden Polaren der Punkte H^2 nur je fünf Tangenten ziehen lassen. Diese zehn Punkte liegen entweder auf der Steiner'schen Curve S^4 oder auf deren Wendetangenten. Da S^4 von der vierten Ordnung ist, so hat sie sechs Wendetangenten.

Wir schliessen daher:

31. Die Enveloppe der geraden Polaren der Punkte von H^2 besteht aus der Steiner'schen Curve S^4 um deren sechs Wendetangenten. —

Gleichzeitig folgt:

32. Ist Q ein Wendepunkt der Steiner'schen Curve und P der entsprechende Punkt auf der Hesse'schen Curve H^2, so ist PQ die Tangente von H^2 in P. Da es sechs Wendepunkte auf S^4 giebt, so giebt es sechs Büschel cubischer Polaren, deren einzelne Curven sich dreipunktig berühren. Diese Berührungspunkte liegen natürlich auf H^2 und in ihnen wird H^2 von C^6 berührt.

Hat eine cubische Polare eine Spitze, so entspricht ihr eine Spitze der Curve von Steiner. Diese kann aber keine Spitze haben, da sie höchstens drei Doppelpunkte haben kann, wenn sie eine einfache Curve ist. Wenn wir nämlich $OO'O''$, die drei Doppelpunkte von S^4, als Tripelpunkte eines Kegelschnittbüschels betrachten und jedem Punkt den ihm bezüglich des Büschels conjugirten Punkt zuordnen, so stehen alle Punkte der Ebene zu den ihnen conjugirten in einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades, welche Durège die Steiner'sche Verwandtschaft genannt hat. Jedem Kegelschnitt durch die Punkte $OO'O''$ entspricht eine Gerade und umgekehrt. Da jede Gerade g die Steiner'sche Curve S^4 in vier Punkten schneidet, so schneidet der Kegelschnitt γ^2, welcher der Geraden g entspricht, die der Steiner'schen Curve entsprechende Curve in vier Punkten und daher ist letztere ein Kegelschnitt σ^2. Hätte S^4 noch einen vierten

Doppelpunkt Δ, so würden die Kegelschnitte $\delta^2\ldots$, welche den Strahlen durch Δ entsprechen, ein Büschel bilden, dessen Kegelschnitte in dem Punkt Δ', welcher dem Punkt Δ entsprechen soll und auf σ^2 liegt, mit σ^2 zwei zusammenfallende Punkte gemein haben, und dies geht nur, wenn σ^2 in Δ einen Doppelpunkt hat, also in ein Paar gerader Linien zerfällt. In diesem Falle aber wäre die dem Kegelschnitte σ^2 entsprechende Curve vierter Ordnung ein Paar von Kegelschnitten. Es folgt:

33. Eine einfache Curve vierter Ordnung hat höchstens drei Doppelpunkte. Daher giebt es in dem Netz cubischer Polaren von $(abcd)$ keine, welche eine Spitze hat.

Im Obigen fanden wir, dass die gerade Polare eines Punktes bezüglich seiner cubischen Polare zugleich die gerade Polare dieses Punktes in Bezug auf die vierseitige Curve $(abcd)$ ist. Hieran anschliessend, wollen wir unter der conischen Polare eines Punktes bezüglich $(abcd)$ die conische Polare dieses Punktes in Bezug auf seine cubische Polare verstehen und umgekehrt unter jenem Punkt den Pol.

Wir bezeichnen mit $PP_1P_2\ldots$ die Punkte einer Geraden g, mit $\pi^3\pi_1^3\pi_2^3\ldots$ ihre cubischen und mit $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$ ihre conischen Polaren. Von letzteren gehen durch irgend einen Punkt Q nur zwei, denn die geraden Polaren $qq_1q_2\ldots$ von Q in Bezug auf $\pi^3\pi_1^3\pi_2^3\ldots$ bilden ein diesem Büschel cubischer Polaren projectivisches Strahlenbüschel und treffen g in einer Punktreihe $RR_1R_2\ldots$, welche mit der Punktreihe $PP_1P_2\ldots$ in projectivischer Beziehung steht. Da nun zwei Punkte der ersten Reihe mit ihren entsprechenden in der zweiten zusammenfallen, so schneiden sich ihre conischen Polaren bezüglich ihrer cubischen Polaren in Q und ausser ihnen giebt es keinen Punkt auf g, dessen conische Polare bezüglich seiner cubischen Polare durch Q geht. Wir folgern:

34. Die conischen Polaren der Punkte einer Geraden bezüglich der cubischen Polaren dieser Punkte bilden eine Reihe von Kegelschnitten vom Index 2.

Alle diese conischen Polaren haben als Enveloppe eine Curve $\mathfrak{K}$, welche jede Polare in denjenigen vier Punkten berührt, in denen sie von der unendlich benachbarten geschnitten wird. Da durch jeden Punkt Q zwei von diesen conischen Polaren gehen, so müssen sie zusammenfallen, falls Q ein Punkt von $\mathfrak{K}$ ist, also hat jede conische Polare nur vier Punkte mit $\mathfrak{K}$ gemein, in denen sie $\mathfrak{K}$ berührt, und daraus schliessen wir, dass $\mathfrak{K}$ von der vierten Ordnung ist. — Wenn Q auf $\mathfrak{K}$ liegt, so müssen seine geraden Polaren bezüglich $\pi^3\pi_1^3\ldots$ die Gerade g in einer solchen zu $PP_1P_2\ldots$ projectivischen Punktreihe $RR_1R_2\ldots$ schneiden, dass nur ein Punkt der letzteren mit seinem entsprechenden in der ersteren zusammenfällt; oder alle geraden Polaren müssen sich in einem Punkte von g schneiden, d. h. g muss die gerade Polare eines jeden Punktes von $\mathfrak{K}$ in Bezug auf eine der cubischen Polaren $\pi^3\ldots$ sein.

Sind X und Y irgend zwei Punkte von g, dann bilden die conischen Polaren $\xi^2 \xi_1{}^2 \xi_2{}^2 \ldots$ und $\eta^2 \eta_1{}^2 \eta_2{}^2 \ldots$ derselben bezüglich der cubischen Polaren $\pi^3 \pi_1{}^3 \pi_2{}^3 \ldots$ zwei projectivische Kegelschnittbüschel, wenn je zwei Kegelschnitte einander zugeordnet werden, die conische Polaren von X und Y bezüglich derselben cubischen Polare π^3 sind. Der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Kegelschnitte ist eine Curve $\mathfrak{C}^4$ vierter Ordnung, der Ort der Pole von g bezüglich der cubischen Polaren aller Punkte von g. Schneiden sich nämlich ξ^2 und η^2 in $S S_1 S_2 S_3$, dann muss die gerade Polare eines jeden dieser vier Punkte in Bezug auf π^3 sowohl durch X, als durch Y gehen, also die Gerade XY oder g sein, d. h. g ist die gerade Polare eines jeden der vier Punkte $S S_1 S_2 S_3$, oder diese sind die Pole von g bezüglich π^3. Daher müssen sich alle geraden Polaren eines dieser vier Punkte, z. B. S, in einem Punkte $\mathfrak{S}$ von g schneiden. Wir bezeichnen die cubische Polare dieses Punktes mit $\pi_s{}^3$, dann geht die conische Polare von $\mathfrak{S}$ bezüglich der cubischen Polare $\pi_s{}^3$ dieses Punktes durch S und es giebt auf g keinen andern Punkt, dessen conische Polare bezüglich seiner cubischen Polare durch S ginge. Deshalb ist S ein Punkt von $\mathfrak{K}$ und wir erhalten den Satz:

35. Die Enveloppe der conischen Polaren der Punkte einer Geraden bezüglich $(abcd)$ fällt mit dem Ort der Pole dieser Geraden in Bezug auf die cubischen Polaren ihrer Punkte zusammen.

Man erhält dieses Resultat auch noch auf folgendem Wege. Es sei C^3 eine ganz beliebige Curve dritter Ordnung und $\pi^2 \pi_1{}^2 \pi_2{}^2 \ldots$ die conischen Polaren der Punkte $P P_1 P_2 \ldots$ von g bezüglich C^3. — Wir bestimmen in Bezug auf alle $\pi^3 \ldots$ alle conischen Polaren $\lambda^2 \ldots$ aller Punkte $P \ldots$ von g und ebenso in Bezug auf alle $\pi^2 \ldots$ alle geraden Polaren $l \ldots$ derselben Punkte. Dadurch erhalten wir zwei verwandte Systeme Σ^2 und Σ'; in dem ersten liegen alle $\lambda^2 \ldots$, in dem andern alle $l \ldots$. Die geraden Polaren l der Punkte P bezüglich der ihnen entsprechenden conischen Polaren π^2 werden von einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ umhüllt, der Poloconik von g bezüglich C^3; die entsprechenden Kegelschnitte λ^2 also von einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{K}^4$. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ ist aber auch der Ort der Pole von g bezüglich $\pi^2 \ldots$; sind daher X und Y zwei beliebige Punkte von g, $x x_1 x_2 \ldots$ und $y y_1 y_2 \ldots$ ihre Polaren bezüglich $\pi^2 \pi_1{}^2 \pi_2{}^2 \ldots$, so müssen sich xy, $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots$ auf $\mathfrak{K}^2$ schneiden. Die entsprechenden conischen Polaren von X und Y in Bezug auf $\pi^3 \pi_1{}^3 \pi_2{}^3 \ldots$ seien $\xi^2 \xi_1{}^2 \xi_2{}^2 \ldots$ und $\eta^2 \eta_1{}^2 \eta_2{}^2 \ldots$ und müssen sich daher auf der dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ entsprechenden Curve $\mathfrak{K}^4$ schneiden, also ist $\mathfrak{K}^4$ auch der Ort der Pole von g bezüglich der Curven $\pi^3 \pi_1{}^3 \ldots$. Nennen wir diese Curve die zweite Polare von g in Bezug auf $(abcd)$, so folgt nochmals:

Die zweite Polare $\mathfrak{K}^4$ einer Geraden g ist die Enveloppe der conischen Polaren der Punkte dieser Geraden in Bezug auf $(abcd)$ und auch der Ort der Pole dieser Geraden in Bezug auf die cubischen Polaren ihrer Punkte.

Jeder Doppelpunkt Δ des Büschels $\pi^3 \ldots$ der cubischen Polaren muss auf der Curve $\mathfrak{K}^4$ liegen, denn ein solcher hat für alle Curven des Büschels dieselbe gerade Polare, welche g in einem Punkte schneidet, und dieser ist der einzige Punkt von g, dessen conische Polare bezüglich $(abcd)$ durch Δ geht.

Die conischen Polaren der Schnittpunkte von g mit den vier Geraden $abcd$ sind Geradenpaare (aa_1), (bb_1), (cc_1), (dd_1), so dass also sowohl $abcd$, als $a_1 b_1 c_1 d_1$ Doppeltangenten von $\mathfrak{K}^4$ sind.

Unter den Curven $\pi^3 \ldots$ giebt es vier, welche g berühren. Ist M einer der Berührungspunkte, dann ist g die gerade Polare von M bezüglich der in M berührenden cubischen Polare, und daher schneiden sich die geraden Polaren von M bezüglich aller cubischen Polaren $\pi^3 \ldots$ in einem Punkte von g, dessen conische Polare bezüglich seiner cubischen Polare durch M geht. Da durch M keine weitere conische Polare eines Punktes von g bezüglich $(abcd)$ geht, so ist M ein Punkt von $\mathfrak{K}^4$. Daraus folgt:

36. Die zweite Polare $\mathfrak{K}^4$ von g bezüglich $(abcd)$ geht durch die zwölf Doppelpunkte des Büschels $\pi^3 \ldots$ cubischer Polaren und durch die vier Punkte von g, in denen diese Gerade von Curven des Büschels $\pi^3 \ldots$ berührt wird. Sie hat die vier Seiten $abcd$ zu Doppeltangenten und berührt sie in den acht Doppelpunkten cubischer Polaren $\pi^3 \ldots$, welche auf g liegen.

Wir fanden $\mathfrak{K}^4$ als Durchschnitt entsprechender Kegelschnitte der conischen Polaren $\xi^2 \xi_1^2 \ldots$ und $\eta^2 \eta_1^2 \ldots$ zweier Punkte X und Y von g in Bezug auf die cubischen Polaren aller Punkte von g. Auf dieser Curve liegen auch die Grundpunkte der Büschel $\xi^2 \xi_1^2 \ldots$ und $\eta^2 \eta_1^2 \ldots$ oder die conjugirten Punkte von X und Y bezüglich des Büschels cubischer Polaren der Punkte von g. Da $\mathfrak{K}^4$ sich nicht ändert, wenn man statt der Punkte X und Y andere Punkte auf g wählt, so folgt:

37. Der Ort der conjugirten Punkte aller Punkte einer Geraden g in Bezug auf das Büschel der cubischen Polaren dieser Punkte ist die zweite Polare $\mathfrak{K}^4$ von g.

Die cubischen Polaren zweier Punkte P_1 und P_2 von g seien π_1^3 und π_2^3, $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ die Pole von g in Bezug auf diese Curven, endlich $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2$ die conjugirten Punkte von P_1 und P_2 in Bezug auf das durch π_1^3 und π_2^3 bestimmte Büschel. Auf der conischen Polare $\varkappa_1$ von P_1 bezüglich π_1^3 liegen die acht Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ und auf der conischen Polare $\varkappa_2$ von P_2 in Bezug auf π_2^3 liegen die acht Punkte $A_2 B_2 C_2 D_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2$. Da alle 16 Punkte auf $\mathfrak{K}^4$ liegen, diese Curve mit $\varkappa_1$ aber nur vier Punkte gemeinsam hat, so müssen $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ mit $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2$ zusammenfallen. Die conische

Polare $\varkappa_{12}$ von P_1 bezüglich π_2^3 muss durch die conjugirten Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1$ von P_1 und durch die vier Pole $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{D}_2$ von g in Bezug auf π_2^3, also durch die acht Punkte $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{D}_2$ gehen. Durch dieselben acht Punkte geht aber auch die conische Polare $\varkappa_{21}$ von P_2 in Bezug auf π_1^3, so dass also $\varkappa_{12}$ und $\varkappa_{21}$ zusammenfallen. Daraus fliesst der wichtige Satz:

38. Sind $\pi_1^3\,\pi_2^3$ die cubischen Polaren zweier Punkte $P_1\,P_2$ bezüglich der vierseitigen Curve $(abcd)$, so fallen die conischen Polaren $\varkappa_{12}$ von P_1 bezüglich π_2^3 und $\varkappa_{21}$ von P_2 bezüglich π_1^3 in einen Kegelschnitt zusammen. Man nennt ihn die gemischte conische Polare von P_1 und P_2. Sie schneidet die zweite Polare $\mathfrak{K}^4$ der Geraden g in zweimal vier Punkten, in denen sie von den conischen Polaren $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von P_1 und P_2 berührt wird.

Da $\varkappa_1$ und $\varkappa_{12}$ die conischen Polaren von P_1 und P_2 in Bezug auf π_1^3 sind, so fällt die Polare von P_2 bezüglich $\varkappa_1$ mit der von P_1 bezüglich $\varkappa_{12}$ zusammen in die gemischte gerade Polare von P_1 und P_2 in Bezug auf π_1^3. Die Polare von P_1 nach $\varkappa_{12}$ kann man auffassen als die zweite Polare von P_1 nach π_2^3 oder auch als die erste Polare von P_1 bezüglich der ersten Polare von P_2 nach π_1^3 und ebenso die Polare von P_2 nach $\varkappa_1$ als die erste Polare von P_2 bezüglich der ersten Polare von P_1 nach π_1^3. Da aber die erste Polare von P_1 nach π_1^3 die zweite Polare von P_1 nach $(abcd)$ ist, so folgt:

39. Die zweite Polare von P_1 in Bezug auf die erste Polare von P_2 bezüglich $(a\,b\,c\,d)$ fällt mit der ersten Polare von P_2 bezüglich der zweiten Polare von P_1 bezüglich $(abcd)$ in eine Gerade p_{12} zusammen.

Cremona hat für die eben bewiesenen Sätze 38 und 39 einen Beweis gegeben (Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, übersetzt von Curtze, S. 258), der hier nicht unmittelbar anzuwenden war, weil er folgende Sätze voraussetzte:

40. Besteht eine Curve vierter Ordnung aus vier in einem Punkt zusammenlaufenden geraden Linien $(a'b'c'd')$, so besteht die cubische Polare eines jeden Punktes bezüglich $(a'b'c'd')$ aus drei in demselben Punkt zusammenlaufenden Geraden.

41. Schneidet man die vier Seiten $abcd$ der vierseitigen Curve $(abcd)$ durch eine Gerade r und verbindet einen beliebigen Punkt mit diesen vier Punkten, so schneiden die Verbindungslinien die Seiten $abcd$ noch in zwölf Punkten, die auf einer Curve dritter Ordnung liegen.

Um den ersten dieser beiden Sätze zu beweisen, darf man in den vierseitigen Curven $(a\,b\,c\,d)$ nur auf irgend eine Weise die Geraden a und c so verschoben denken, dass der Punkt F mit dem Punkt E zusammenfällt; dann liegen in E die sechs Ecken $ABCDEF$ der vierseitigen Curve vereinigt und jede cubische Polare hat in E mit jeder der vier Seiten $abcd$ drei zusammenfallende Schnittpunkte. Dies geht aber nur, wenn E ein dreifacher Punkt der cubischen Polare ist, diese also aus drei Geraden, die sich in E schneiden, besteht. Beiläufig folgt, dass die cubischen Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf $(a'b'c'd')$ eine cubische Strahleninvolution bilden.

Den zweiten Satz beweisen wir mit Hilfe einer geometrischen Verwandtschaft. In Bezug auf die Kegelschnitte $\lambda^2 \ldots$ eines Netzes nehmen wir die Polaren $l_1 \ldots$ eines Punktes Z. Weisen wir alle $\lambda^2 \ldots$ einem System Σ und alle $l_1 \ldots$ einem System Σ_1 zu, so findet zwischen den Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft statt. In dieser entspricht jedem Kegelschnitt λ^2 des Netzes eine Gerade l_1 und umgekehrt, jeder Geraden l von Σ ein Kegelschnitt λ_1^2 in Σ_1, jedem Kegelschnitt $\varkappa^2$ von Σ eine Curve K_1^4 in Σ_1, welche drei Doppelpunkte hat, u. s. f. Jedem Kegelschnitt $\varkappa_1^2$ von Σ_1 entspricht in Σ eine Curve $\varkappa^4$. Denn denken wir uns $\varkappa_1^2$ erzeugt durch zwei projectivische Strahlenbüschel, so entsprechen diesen zwei projectivische Kegelschnittbüschel von Kegelschnitten des Netzes, welche eine Curve $\varkappa^4$ vierter Ordnung erzeugen. Diese Curve können wir aber auch als Enveloppe von Kegelschnitten des Netzes auffassen, weil wir $\varkappa_1^2$ als Enveloppe von Geraden betrachten können, so dass sie eine ebensolche Curve ist, wie die zweite Polare $\mathfrak{K}^4$ einer Geraden bezüglich $(abcd)$. Auf $\varkappa_1^2$ nehmen wir vier Punkte $P_1 Q_1 R_1 S_1$ und legen durch diese ein Büschel von Kegelschnitten $\varkappa_1^2 \ldots$, so entspricht ihm ein Büschel von Curven $\varkappa^4 \ldots$ vierter Ordnung, deren 16 Grundpunkte vier Gruppen von Grundpunkten von Kegelschnittbüscheln des Netzes sind. Wir bezeichnen diese vier Gruppen mit $PP'P''P'''$, $QQ'Q''Q'''$, $RR'R''R'''$, $SS'S''S'''$. Ebenso findet ein umgekehrtes Entsprechen statt. Wählen wir dann vier Punkte $PQRS$, also aus jeder Gruppe einen, so, dass dieselben auf einer Geraden g liegen, so entspricht ihr ein Kegelschnitt γ_1^2 in Σ, und diesem wieder in Σ eine Curve γ^4 vierter Ordnung, welche aber in die Gerade g und eine Curve γ^3 dritter Ordnung geht. Letztere muss dann durch die zwölf Punkte $P'P''P'''Q'Q''Q'''R'R''R'''$ $S'S''S'''$ gehen und es folgt: Wenn von den 16 Schnittpunkten zweier Curven aus der Schaar $\varkappa^4 \ldots$ vier, aus jeder Gruppe einer, auf einer Geraden liegen, so liegen die übrigen zwölf auf einer Curve dritter Ordnung.

Eine Curve $\varkappa^4$ kann aber in vier Gerade zerfallen. Um dies zu erkennen, denke man sich zwei solche Kegelschnittbüschel des Netzes, dass der Kegelschnitt, welcher beiden gemeinsam ist, in ein Geradenpaar $(g_1 g_{11})$ zerfällt. Die beiden Gruppen von Grundpunkten seien $PP'P''P'''$ und $QQ'Q''Q'''$; die Kegelschnitte der Büschel $P^2 P_1^2 P_2^2 \ldots$ und $Q^2 Q_1^2 Q_2^2 \ldots$. Ferner schneiden sich P^2 und Q^2 in zwei Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ einer Geraden p_1;

auf p_1 nehmen wir noch einen Punkt $\mathfrak{P}_1$; durch ihn gehen die Kegelschnitte P_1^2 und Q_1^2. Ordnen wir dann die Kegelschnitte beider Büschel einander zu, indem wir P^2 und Q^2, P_1^2 und Q_1^2 einander und das beiden Büscheln gemeinsame Geradenpaar $(g_1 g_{11})$ sich selbst entsprechen lassen, so sind die Büschel projectivisch aufeinander bezogen und der Ort ihrer Durchschnittspunkte ist eine Curve $\varkappa^4$ vierter Ordnung, welche drei Gerade $g_1 g_{11} p_1$ und deshalb noch eine vierte p_{11} enthält, also aus den vier Geraden $g_1 g_{11} p_1 p_{11}$ besteht. Sollen diese vier Geraden in einem Punkt zusammentreffen, so ist der Beweis nur soweit abzuändern, dass man von den projectivischen Kegelschnittbüscheln eines wählt, dessen Kegelschnitte sich sämmtlich in einem Punkt berühren.

An den Satz 39 anknüpfend, nehmen wir an, M sei ein Punkt von p_{12}, d. h. er liege auf der Polare p_{12} von P_2 bezüglich $\varkappa_1$; dann muss die Polare von M bezüglich $\varkappa_1$, d. i. die erste Polare von M nach der zweiten Polare von P_1 durch P_2 gehen. Diese fällt aber mit der zweiten Polare von P_1 bezüglich der ersten Polare von M zusammen und daraus folgt:

42. Liegt ein Punkt M auf der zweiten Polare p_{12} eines Punktes P_1 in Bezug auf die erste Polare π_2^3 eines Punktes P_2, so liegt P_2 auf der zweiten Polare von P_1 nach der ersten Polare von M.

Ein Punkt N liege auf der gemischten conischen Polare $\varkappa_{12}$ der Punkte P_1 und P_2. Weil N auf der conischen Polare $\varkappa_{12}$ von P_1 bezüglich der cubischen Polare π_2^3 von P_2 nach $(abcd)$ liegt, so muss P_1 auf der geraden Polare von N bezüglich π_2^3 liegen. Es geht also die zweite Polare von N nach der ersten Polare π_2^3 von P_2 durch P_1 oder, wegen 39, die erste Polare von P_2 bezüglich der zweiten Polare von N geht durch P_1. Hieraus folgt:

43. Liegt ein Punkt N auf der ersten Polare $\varkappa_{12}$ von P_2 in Bezug auf die erste Polare π_1^3 von P_1, d. i. auf der gemischten conischen Polare der Punkte P_1 und P_2, so liegt P_1 auf der ersten Polare von P_2 nach der zweiten Polare ν von N bezüglich $(abcd)$.

Da P_1 auf der Polare von P_2 bezüglich ν liegt, so sind P_1 und P_2 conjugirte Punkte in Bezug auf ν. Also:

44. Die conischen Polaren ν... aller Punkte N.. [bezüglich $(abcd)$] der gemischten conischen Polare $\varkappa_{12}$ zweier Punkte P_1 und P_2 schneiden die Gerade $P_1 P_2$ in zwei Punkten, welche durch P_1 und P_2 harmonisch getrennt sind.

Fallen P_1 und P_2 in einen Punkt P_1 zusammen, so geht die gemischte conische Polare von P_1 und P_2 in die conische Polare von P_1 über. Da der Satz 44 bestehen bleibt, so muss einer der Schnittpunkte der conischen Polare ν von N mit der Geraden $P_1 P_2$ zusammenfallen mit dem Punkte P_1; denn wenn zwei zugeordnete Punkte von vier harmonischen Punkten zusammenfallen, so fällt auch einer der beiden anderen zugeordneten Punkte mit jenen zusammen. Dies giebt den Satz:

45. Liegt ein Punkt N auf der conischen Polare $\varkappa_1$ eines andern P_1, so liegt P_1 auf der conischen Polare ν von N, die conischen Polaren in Bezug auf $(abcd)$ genommen.

Wir bestimmen zunächst die zweite Polare einer der vier Seiten $abcd$, z. B. der Seite a. Die cubischen Polaren aller Punkte von a bestehen aus der Geraden a und einem Kegelschnitt eines Büschels, dessen Grundpunkte man findet, wenn man die Durchschnittspunkte der cubischen Polaren irgend zweier Punkte, etwa A und B bildet. Es ist aber die cubische Polare von A das Dreiseit (a, d, CO'') und die von B das Dreiseit (a, b, DO') und es schneiden sich die Geradenpaare (d, CO'') und (b, DO') in den vier Punkten $CDEG$, von denen CDE drei Ecken der vierseitigen Curve $(abcd)$ sind. Die drei Doppelpunkte des Büschels sind die Schnittpunkte S oder (d, CO''), S_1 oder (b, DO') und S_2 oder (c, EO). Unter den conischen Polaren der Punkte von a versteht man Geradenpaare, deren einer Theil stets a ist, während der andere die Polare des Punktes bezüglich des Kegelschnittes ist, welcher einen Theil der cubischen Polare jenes Punktes bildet. Alle diese zweiten Theile der conischen Polaren der Punkte von a werden von einem Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ umhüllt. Denn ist Q ein beliebiger Punkt, so schneiden sich seine Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels $KK_1K_2\ldots$, welche mit a zusammen die cubischen Polaren der Punkte von a bilden, in einem Punkt $\mathfrak{Q}$, und treffen a in einer zum Kegelschnittbüschel projectivischen Punktreihe, die ihrerseits wieder in projectivischer Beziehung steht zur Punktreihe der Pole der cubischen Polaren (a, K), (a, K_1), …; die beiden projectivischen Punktreihen auf a haben zwei Doppelpunkte und deren Polaren bezüglich der ihnen entsprechenden Kegelschnitte des Büschels $KK_1\ldots$ sind es, welche durch Q gehen. — Wenn wir statt des beliebigen Punktes Q den einen Doppelpunkt S wählen, so hat dieser für alle Kegelschnitte $K\ldots$ dieselbe Polare, und ist $\mathfrak{S}$ der Schnittpunkt derselben mit a, so ist die Polare von $\mathfrak{S}$ bezüglich des ihm entsprechenden Kegelschnittes die einzige, welche durch S geht. Daraus folgt, dass der Doppelpunkt S, und ebenso, dass S_1 und S_2 auf $\mathfrak{M}$ liegen. Dieser Kegelschnitt schneidet die Gerade a in den beiden Punkten M und N, in denen a von zwei Kegelschnitten K_m und K_n des Büschels $K\ldots$ berührt wird, und fällt daher mit dem Polarkegelschnitt von a bezüglich des Büschels $K\ldots$ zusammen, denn SS_1S_2 sind die Pole von a in Bezug auf die drei Geradenpaare des Büschels und MN sind die Pole von a in Bezug auf K_m und K_n. Es folgt:

46. Die conischen Polaren der Punkte einer der vier Seiten $abcd$ haben als Enveloppe einen Kegelschnitt, der zugleich der Polarkegelschnitt dieser Seite in Bezug auf das Büschel der Kegelschnitte $KK_1\ldots$ ist, welche mit dieser Seite zusammen die cubischen Polaren ihrer Punkte bilden.

Wir fanden, dass die conischen Polaren aller Punkte einer Geraden l bezüglich $(abcd)$ eine Kegelschnittreihe vom Index 2 bilden. Wieviele von ihnen berühren eine Gerade g? Weisen wir alle Kegelschnitte der Reihe einem System Σ zu und die Polaren eines Punktes Z bezüglich derselben einem andern System Σ_1, so erhalten wir zwei geometrisch verwandte Systeme. Im System Σ_1 werden alle Polaren von einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^2$ umhüllt, welchem in Σ die Curve $\mathfrak{K}^4$, die Umhüllungscurve aller conischen Polaren der Punkte von l, entspricht. Der Geraden g entspricht in Σ_1 eine Curve γ_1^x. Den Schnittpunkten einer conischen Polare mit g entsprechen in Σ_1 die Schnittpunkte der Polare von Z nach jener conischen Polare mit γ_1^x, also ist γ_1^x von der zweiten Ordnung und werde mit γ_1^2 bezeichnet. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1^2$ und γ_1^2 haben vier gemeinschaftliche Tangenten, welchen in Σ die vier conischen Polaren entsprechen, die g berühren. Also:

47. Unter allen Kegelschnitten einer Reihe vom Index 2 giebt es vier, welche eine bestimmte Gerade berühren, und:

Die Pole aller conischen Polaren, welche dieselbe Gerade berühren, erfüllen eine Curve $\mathfrak{K}^4$ vierter Ordnung.

Da von allen conischen Polaren der Punkte einer Geraden nur zwei durch einen Punkt gehen, so folgt umgekehrt, dass von allen conischen Polaren, welche durch einen Punkt gehen, nur zwei ihre Pole auf irgend einer Geraden haben. Daher:

48. Der Ort der Pole der conischen Polaren, welche durch einen Punkt P gehen, ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}$.

Wählen wir P auf a, dann gehen die conischen Polaren aller Punkte von a durch P, also ist a ein Theil des Ortes $\mathfrak{P}$, der andere Theil ist demnach eine Gerade a_1. Wenn P sich ändert, so ändert sich auch die Gerade a_1; alle diese Geraden $a_1 \ldots$ werden aber von einem Kegelschnitt $\mathfrak{N}$ eingehüllt. Denn gingen durch einen Punkt Q mehr als zwei, etwa drei von den Geraden $a_1 a'_1 a''_1$, so müsste die conische Polare von Q durch die drei diesen Geraden entsprechenden Punkte $PP'P''$ gehen; dies geht aber nicht, da die conische Polare von Q ein Kegelschnitt ist, welcher die Gerade a nicht zu einem Theil hat. Für die Punkte ABF von a sind die Oerter der Pole der durch diese Punkte hindurchgehenden conischen Polaren ausser a die Geraden dbc, also ist der Kegelschnitt $\mathfrak{N}$ dem Dreiseit (bcd) eingeschrieben. Die conische Polare irgend eines Punktes X von d schneidet a ausser in A noch in einem Punkte X', also geht die Gerade x', der Ort der Pole aller conischen Polaren, welche durch X' gehen, durch X. Der Punkt X' ist ferner der Doppelpunkt einer conischen Polare, deren Pol Y auf a liegt; dann ist XY die zweite Tangente von X an $\mathfrak{N}$. Da die conische Polare von S das Geradenpaar (d, AC) ist, welches in A einen Doppelpunkt hat, so ist die zweite Tangente von S an $\mathfrak{N}$ wieder d, d. h. S liegt auf $\mathfrak{N}$ und ebenso liegen die anderen Doppelpunkte S_1 und S_2 auf $\mathfrak{N}$. Jeder der Kegelschnitte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ berührt daher die Geraden bcd in den Punkten $S_1 S_2 S$ und daraus folgt, dass $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zusammenfallen, und wir erhalten für die zweite Polare von a die neue Definition:

49. Ist P ein variabler Punkt einer der vier Seiten, z. B. a, so wird die Gerade a_1, der Ort der Pole der conischen Polaren, welche durch P gehen, von der zweiten Polare von a eingehüllt; denn sie berührt die anderen drei Seiten bcd in den Doppelpunkten der drei Geradenpaare des Büschels $KK_1\ldots$ der Kegelschnitte, welche mit a zusammen die cubischen Polaren der Punkte von a bilden.

Die Pole $PP_1P_2\ldots$ der cubischen Polaren (a, K), (a, K_1), $(a, K_2)\ldots$ sind in projectivischer Beziehung mit den Kegelschnitten $KK_1K_2\ldots.$ Die Polaren $PP_1P_2\ldots$ bezüglich $KK_1K_2\ldots$ seien $pp_1p_2\ldots$; dieselben werden von dem Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ umhüllt; sie mögen a in $P'\,P'_1\,P'_2$ schneiden und es seien $a'a'_1a'_2\ldots$ die Oerter der Pole der conischen Polaren der Punkte, welche durch $P'P'_1\,P'_2\ldots$ gehen. Diese werden von demselben Kegelschnitte eingehüllt und es sind die Tangentenbüschel $p\,p_1\,p_2\ldots$ und $a'a'_1a'_2$ auf $\mathfrak{M}$ in projectivischer Beziehung. Da sie ausserdem drei entsprechend gemeinsame Strahlen, nämlich bcd, besitzen, so sind sie identisch und wir schliessen:

50. Liegt ein Punkt Q auf der conischen Polare (a, p) eines Punktes P der Geraden a, so liegt umgekehrt P auf der conischen Polare des Punktes Q. Oder: Der Ort der Pole der conischen Polaren, welche durch einen Punkt von a gehen, ist die conische Polare (a, p) dieses Punktes.

Sind P und X zwei Punkte von a, (a, p) und (a, x) ihre conischen Polaren, so liegen P und X auf der conischen Polare vom Schnittpunkt (px), und wenn X und P zusammenfallen, also der Schnittpunkt (pp) der Berührungspunkt Q von p und $\mathfrak{M}$ wird, so muss dessen conische Polare die Gerade a in P berühren, und daraus folgt für den Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ noch die Definition:

51. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}$, die zweite Polare der Geraden a, ist der Ort der Pole der conischen Polaren, welche a berühren.

Selbstverständlich gelten die Sätze 50 und 51 auch für die anderen Seiten der vierseitigen Curve $(abcd)$.

Der Ort der Pole aller conischen Polaren, welche durch einen Punkt P gehen, ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}$. Ist P' ein beliebiger anderer Punkt, so ist der Ort der Pole aller durch P' gehenden conischen Polaren ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}'$; beide Kegelschnitte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ schneiden sich in vier Punkten, deren conische Polaren durch P und P' gehen. Auf der Geraden PP' giebt es keinen Punkt von der Lage, dass der Ort der Pole der durch ihn gehenden conischen Polaren durch einen Schnittpunkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ginge; denn wäre P'' ein solcher Punkt, $\mathfrak{P}''$ seine Ortscurve, und ginge diese durch einen Schnittpunkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, so müsste dessen conische Polare durch die drei in gerader Linie liegenden Punkte $PP'P''$ gehen, was unmöglich ist. Dieser Fall könnte nämlich nur dann eintreten, wenn PP' ein Theil der conischen Polare jenes Schnittpunktes von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ wäre. Daraus folgt:

52. Die Ortskegelschnitte der Pole der conischen Polaren, welche durch die Punkte einer Geraden gehen, bilden eine Kegelschnittsreihe vom Index 2.

Alle diese Kegelschnitte werden also von einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{K}''$ eingehüllt, welche jeden Kegelschnitt in den vier Punkten berührt, welche er mit dem unendlich benachbarten gemein hat. Sind P und P' unendlich benachbart auf g und ist P der Schnittpunkt von g und a, so berührt $\mathfrak{K}''$ den Kegelschnitt $\mathfrak{P}$ in den vier Punkten, in denen er von $\mathfrak{P}'$ geschnitten wird. Der Kegelschnitt $\mathfrak{P}$ ist aber die conische Polare (aa') von P bezüglich der vierseitigen Curve $(abcd)$. Da sie auch die Curve $\mathfrak{K}$, die Umhüllungscurve der conischen Polaren aller Punkte von g, in denselben vier Punkten berührt, so haben die Curven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$ dieselben vier Berührungspunkte mit den Doppeltangenten a und a'. Dasselbe gilt von den conischen Polaren (bb'), (cc'), (dd') der Punkte (bg), (cg), (dg). Weil also die Curven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$ die acht Doppeltangenten $abcda'b'c'd'$ in denselben 16 Punkten berühren, so fallen sie zusammen. Denn nehmen wir wieder einen beliebigen Punkt Z und seine Polaren bezüglich der conischen Polaren, welche von $\mathfrak{K}$ eingehüllt werden, und auch bezüglich der Ortskegelschnitte $\mathfrak{P}\ldots$, welche von $\mathfrak{K}''$ eingehüllt werden, so werden die ersteren einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}$, die anderen einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}''$ einhüllen. Beide Kegelschnitte berühren dieselben vier Geraden, nämlich die Polaren von Z bezüglich der Geradenpaare (aa'), (bb'), (cc'), (dd') in denselben vier Punkten und fallen also zusammen. Daher ist dasselbe mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$ der Fall. Wir können uns demnach die Curve $\mathfrak{K}$ auf zwei Arten erzeugt denken, erstens als Enveloppe der Kegelschnitte $\mathfrak{P}\ldots$ und zweitens als Enveloppe der conischen Polaren der Punkte von g. Diese Kegelschnittstangentenbüschel sind in projectivischer Beziehung, und da viermal entsprechende Kegelschnitte zusammenfallen, nämlich die den Punkten (ag), (bg), (cg), (dg) entsprechenden, so fallen alle Paare entsprechender Kegelschnitte zusammen. Ist also P ein Punkt von g, so fällt der Kegelschnitt $\mathfrak{P}$, der Ort der Pole der durch P gehenden conischen Polaren, mit der conischen Polaren von P zusammen. Also:

53. Der Kegelschnitt $\mathfrak{P}$, der Ort der Pole der durch einen Punkt gehenden conischen Polaren, ist die conische Polare dieses Punktes. Oder:

Liegt ein Punkt Q auf der conischen Polare eines andern P, so liegt dieser auf der conischen Polare des ersten.

So wären wir also auf einem andern Wege zu dem Satze 45 gelangt. Gleichzeitig folgt:

54. Der Ort der Pole derjenigen conischen Polaren, welche eine Gerade g berühren, die Curve $\mathfrak{K}'$ (vergl. 47) ist die zweite Polare dieser Geraden.

Es sei nun M ein Punkt der gemischten conischen Polare $\varkappa_{12}$ der Punkte P_1 und P_2, es liege also M auf der conischen Polare von P_2 bezüglich der cubischen Polare von P_1 oder, was dasselbe ist, auf der conischen Polare von P_1 nach der cubischen von P_2, dann muss die gerade Polare von M bezüglich der cubischen von P_2 durch P_1 gehen. Nennen wir π_2^3 die cubische Polare von P_2; da M auf der geraden Polare von P_1 bezüglich π_2^3 liegt, so muss P_1 auf der conischen Polaren von M bezüglich π_2^3 liegen. Daraus folgt:

55. Ist M ein Punkt der gemischten conischen Polare $\varkappa_{12}$ zweier Punkte P_1 und P_2, so liegt P_1 auf der conischen Polare von M bezüglich der cubischen Polare π_2^3 von P_2. Oder:

Geht die conische Polare von P_2 bezüglich der cubischen Polare von P_1 durch M, so geht die gerade Polare von P_2 in Bezug auf die conische Polare von M durch P_1.

Wir nehmen nun an, es habe die cubische Polare π_1^3 von P_1 einen Doppelpunkt P_2, so dass also die conische Polare von M bezüglich π_1^3 durch P_2 geht, dann muss nach dem vorigen Satze auch die Polare von M nach der conischen Polare von P_2 durch P_1 gehen. Die conische Polare von P_1 muss durch P_2 und also auch die conische Polare von P_2 durch P_1 gehen. Es geht also die Polare eines beliebigen Punktes M bezüglich der conischen Polare von P_2 durch P_1, also ist P_1 ein Doppelpunkt derselben und es folgt:

56. Hat die cubische Polare π_1^3 von P_1 einen Doppelpunkt P_2, so hat die conische Polare von P_2 einen Doppelpunkt in P_1. Oder:

Die conischen Polaren aller Punkte P der Curve von von Hesse sind Geradenpaare, deren Scheitel in den entsprechenden Punkten der Curve von Steiner liegen, so dass für diese neue Definition erfolgt:

Die Steiner'sche Curve ist der Ort der Doppelpunkte der conischen Polaren.

Die conische Polare irgend eines Punktes P schneidet die Hesse'sche Curve in vier Punkten, deren conische Polaren in Geradenpaare zerfallen, von denen ein Theil durch P geht; also folgt:

57. Die Enveloppe der conischen Polaren, welche in Geradenpaare zerfallen, ist eine Curve vierter Classe C_4.

Wenn der Punkt P sich auf einer Geraden g bewegt, so durchläuft seine conische Polare π^2 eine Kegelschnittreihe vom Index 2. So oft ein

Kegelschnitt der Reihe die Hesse'sche Curve berührt, so oft wird der Punkt P bei seiner Bewegung auf der Curve C_4 liegen Um die Anzahl dieser Kegelschnitte zu finden, weisen wir alle Kegelschnitte π^2... einem System Σ zu und die Polaren p_1... eines beliebigen Punktes Z in Bezug auf jene einem System Σ_1. Es werden alle Polaren p_1... von einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^2$ umhüllt. Der Hesse'schen Curve H^2 zu Σ gerechnet, entspricht in Σ_1 eine Curve H_1, und soviel gemeinschaftliche Tangenten $\mathfrak{K}_1^2$ und H_1 haben, soviel Kegelschnitte π^2 berühren die Hesse'sche Curve H^2. Da durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte π^2 gehen, so bestimmen sie ein Büschel; alle diese unzähligen Büschel, welche durch je zwei Kegelschnitte π^2 bestimmt werden, bilden ein Netz. Die Tripelcurve dieses Netzes oder die Hesse'sche Curve desselben bezeichnen wir mit H^3 und seine Cayley'sche Curve mit C_3. Zwei von den Kegelschnitten des Netzes, π^2 und π_1^2, bestimmen mit dem Kegelschnitt H^2 ein neues Netz, dessen Hesse'sche Curve H_1^3 und Cayley'sche Curve C'_3 sei. Die beiden Hesse'schen Curven H^3 und H_1^3 haben die drei Tripelpunkte der Kegelschnitte π^2 und π_1^2 gemeinschaftlich und die beiden Cayley'schen Curven C_3 und C'_3 haben die sechs Verbindungslinien der vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels $(\pi^2 \pi_1^2)$ als gemeinsame Tangenten, ausserdem also noch drei gemeinschaftliche Tangenten, sie seien mno. Die Tangente m schneide die Kegelschnitte $H^2 \pi^2 \pi_1^2 \pi_2^2$, wenn π_2^2 eine conische Polare eines Punktes von g ist, in $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} P Q P_1 Q_1 P_2 Q_2$, und da (vergl. Schröter, Steiner's Vorlesungen, § 62) $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} P Q P_1 Q_1$ sowohl, wie $P Q P_1 Q_1 P_2 Q_2$ eine Involution bilden, so gehören die vier Punktpaare $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} P Q P_1 Q_1 P_2 Q_2$ derselben Involution an und haben dieselben Doppelpunkte $M M'$,

Von einem Punkte P eines Kegelschnitts π^2 des ersten Netzes lassen sich an die Cayley'sche Curve C_3 drei Tangenten ziehen, welche π^2 noch in drei Punkten schneiden, welche mit P zusammen vier verbundene Punkte, d. h. Grundpunkte eines Büschels des Netzes bilden. Also gehören PQ, $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$ je zu einer Gruppe verbundener Punkte und alle Punktepaare auf m, welche mit den drei Punktepaaren PQ, $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$ zu einer Involution gehören oder, was dasselbe ist, durch MM' harmonisch getrennt sind, gehören zu einer Gruppe verbundener Punkte. Daher gehören auch $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ zu einer Gruppe verbundener Punkte. Jede der drei Tangenten mno schneidet also H^2 in einem Punktepaar, welches zu einer Gruppe verbundener Punkte gehört. Daher folgt:

58. Auf jedem Kegelschnitt liegen drei Punktpaare, welche zu einer Gruppe verbundener Punkte gehören.

Haben zwei Curven K^3 und K_1^3 zwei Kegelschnitte π^2 und π_1^2 gleichzeitig zu conischen Polaren, so haben ihre Cayley'schen Curven C_3 und C'_3 die sechs Seiten des durch die vier Grundpunkte von π^2 und π_1^2 bestimmten vollständigen Vierecks zu gemeinschaftlichen Tangenten. Auf den anderen drei gemeinschaftlichen Tangenten liegen je zwei Schnittpunkte der Hesse'schen Curven H^3 und $H_{1}{}^3$ und sind für beide conjugirte Punkte.

Es giebt stets 18 Gerade, welche von vier beliebigen Kegelschnitten in den Punktpaaren einer Involution geschnitten werden; denn sind die vier Kegelschnitte $H^2 \pi^2 \pi_1{}^2 \pi_2{}^2$, so lassen sich auf sechs verschiedene Arten je zwei Kegelschnittnetze bilden, die dieselben zwei Kegelschnitte enthalten.

Es liegen also auf H^2 drei Punktpaare, von denen jedes zu einer Gruppe von Grundpunkten, in denen sich zwei Kegelschnitte der Reihe $\pi^2 \ldots$ schneiden, gehört. Die Hesse'sche Curve H^2 von $(abcd)$ rechnen wir zum System Σ, ihr entspricht in Σ_1 die Curve H_1. Eine beliebige Gerade p_1 schneidet H_1 in soviel Punkten, als der entsprechende Kegelschnitt π^2 und H^2 sich schneiden, also in vier Punkten, und daher ist H_1 von der vierten Ordnung und werde mit $H_1{}^4$ bezeichnet. Jedem Punkt von H^2 entspricht dabei ein Punkt von $H_1{}^4$, aber jedem Punkt eines Paares $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, welches zu einer Gruppe verbundener Punkte gehört, entspricht derselbe Punkt von $H_1{}^4$, und da es auf H^2 drei solche Punktpaare giebt, so hat $H_1{}^4$ drei Doppelpunkte. — Ist R_1 ein beliebiger Punkt von Σ_1, so entspricht dem durch ihn gehenden Strahlenbüschel ein Kegelschnittbüschel in Σ, und da sechs Kegelschnitte desselben den Kegelschnitt H^2 berühren, so lassen sich von R_1 sechs Tangenten an $H_1{}^4$ ziehen, also ist $H_1{}^4$ von der sechsten Classe. — Auf H^2 liegen aber noch andere Punktpaare verbundener Grundpunkte, nämlich in jedem der sechs Schnittpunkte von H^2 mit der Hesse'schen Curve H^2 des Netzes ist ein solches Paar vereinigt. Ist R einer dieser Punkte, so giebt es einen Kegelschnitt ϱ^2 des Netzes, welcher H^2 in R berühren mag, und da R ein Punkt von H^3 ist, so müssen alle Kegelschnitte $\varrho^2 \ldots$ des Netzes, welche durch R gehen, sich und H^2 in R berühren. Einer von ihnen wird auch durch den R unendlich benachbarten Punkt auf H^2 gehen, also H^2 dreipunktig berühren oder osculiren.

Es giebt also sechs Kegelschnitte des Netzes, welche einen beliebigen Kegelschnitt H^2 dreipunktig berühren. Im System Σ_1 entspricht jedem dieser Kegelschnitte eine Gerade, welche mit $H_1{}^4$ drei zusammenfallende Punkte gemein hat, also eine Wendetangente. Da es ferner im Kegelschnittnetz vier Kegelschnitte giebt, welche H^2 doppelt berühren, so können wir folgern:

59. **Dem Kegelschnitt H^2 des Systems Σ entspricht im System Σ_1 eine Curve $H_1{}^4$ von der vierten Ordnung und sechsten Classe, welche drei Doppelpunkte, sechs Wendetangenten und vier Doppeltangenten hat.**

In jedem Kegelschnittnetze giebt es sechs Kegelschnitte, welche einen beliebigen Kegelschnitt dreipunktig berühren.

Reciprok hiermit ist der Satz:

Die geraden Polaren der Punkte eines Kegelschnitts in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung umhüllen eine Curve vierter Classe sechster Ordnung, welche drei Doppeltangenten, sechs Wendepunkte und vier Doppelpunkte hat.

Ginge der Kegelschnitt H^2 zufällig durch drei von vier verbundenen Grundpunkten, etwa $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, dann sind die drei Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ die obengenannten drei gemeinschaftlichen Tangenten *mno* der beiden Cayley'schen Curven. In diesem Falle entspricht dem Kegelschnitt H^2 eine Curve $H_{11}{}^4$ mit einem dreifachen Punkt $\mathfrak{P}_1$, so dass der Satz 59 sich ändert in:

60. Geht der Kegelschnitt H^2 des Systems Σ durch drei von vier verbundenen Grundpunkten, so entspricht ihm in Σ_1 eine Curve $H_{11}{}^4$ vierter Ordnung sechster Classe mit einem dreifachen Punkt, welche sechs Wendetangenten und vier Doppeltangenten hat.

Wenn wir der analytischen Geometrie den Satz entnehmen, dass eine Curve zweiter Classe und eine Curve sechster Classe zwölf gemeinschaftliche Tangenten haben, so folgt, dass die Curven $\mathfrak{K}_1{}^2$ und $H_1{}^4$ oder $\mathfrak{K}_1{}^2$ und $H^4{}_{11}$ zwölf gemeinschaftliche Tangenten haben. Also vervollständigen wir den Satz 57 in:

61. Die Enveloppe der conischen Polaren der Curve $(abcd)$, welche in Geradenpaare zerfallen, ist eine Curve C_4 vierter Classe zwölfter Ordnung.

Hiermit wären die Haupteigenschaften der Polaren der Curve $(abcd)$ allein mit den Hilfsmitteln der Geometrie der Lage abgeleitet. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass dieselben ihre Geltung behalten, wenn statt der Curve $(abcd)$ eine allgemeine Curve vierter Ordnung eintritt. Zuvor aber soll der Beweis eines auf S. 26 benutzten Satzes gegeben werden, dass nämlich vier Curven eines Büschels cubischer Polaren von $(abcd)$ eine beliebige Gerade berühren. — Wir denken uns ein festes Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$ und auf einer festen Geraden g eine zu dem Büschel projectivische Punktreihe $P\ldots$. Auf einer zweiten festen Geraden bewege sich ein Punkt X, dann ist das Strahlenbüschel $X(P\ldots)$ in projectivischer Beziehung mit dem Kegelschnittbüschel und erzeugt mit diesem durch die Schnittpunkte homologer Elemente eine Curve dritter Ordnung $\mathfrak{K}^3$. Bei der Bewegung von X auf l durchläuft $\mathfrak{K}^3$ alle Curven eines Büschels. Von den neun Grundpunkten sind vier die Punkte $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$; das Kegelschnittbüschel schneidet g in einer zur Reihe $P\ldots$ projectivischen Punktinvolution, von deren Punkten drei auf die entsprechenden Punkte $P\ldots$ fallen. Diese drei Punkte sind ebenfalls drei Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{K}^3\ldots$ und die letzten beiden endlich sind die Schnittpunkte von l, als gemeinschaftlichem Strahl aller Büschel $X\ldots$ mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitt. Von den neun Grundpunkten liegen also drei auf einer Geraden und die anderen sechs auf einem Kegelschnitt, wie bei einem Büschel cubischer Polaren von $(abcd)$. Eine Transversale t schneidet die Kegelschnitte des Büschels in einer zur Reihe $P\ldots$ auf g projectivischen Punktinvolution $P_1 P_2, \ldots$. Die Enveloppe von $PP_1, PP_2 \ldots$ ist eine Curve dritter Classe vierter Ordnung $\mathfrak{C}_3$, welche t zur Doppeltangente und g zur einfachen Tangente hat. Von X gehen an $\mathfrak{C}_3$ drei Tangenten, welche t in drei Punkten schneiden, und diese sind die Schnittpunkte von t mit der X entsprechenden Curve $\mathfrak{K}^3$. So oft l die $\mathfrak{C}_3$ schneidet, so oft fallen zwei dieser drei Punkte zusammen und so oft berührt eine $\mathfrak{K}^3$ die Transversale t. Da aber $\mathfrak{C}_3$ von der vierten Ordnung ist, so geschieht dies viermal und der Satz ist also bewiesen. (Ueber diesen Beweis siehe Schröter, Steiner's Vorlesungen, § 40.)

Eine Gerade g schneide die Seiten $abcd$ der vierseitigen Curve der Reihe nach in $MNOP$. Wenn man dann durch diese vier Punkte die Seiten eines andern Vierseits legt und auf g einen Punkt Q nimmt, so schneiden sich die geraden Polaren von Q bezüglich der beiden vierseitigen Curven in einem Punkte von g. Um dies zu zeigen, lassen wir von den vier Seiten des ersten Vierseits drei, abd, ungeändert und ziehen durch O beliebige Gerade $c_1 c_2 c_3 \ldots$, so dass also $abcd$; abc_1d, $abc_2d, \ldots$ die verschiedenen Vierseite sind. Die geraden Polaren $qq_1q_2\ldots$ von Q bezüglich der Dreiseite (bdc), (bdc_1), $(bdc_2), \ldots$ schneiden g in demselben Punkte $\mathfrak{Q}$ und a in einer zum Büschel $\mathfrak{Q}(qq_1q_2\ldots)$ projectivischen Punktreihe $RR_1R_2\ldots$, die ihrerseits wieder mit dem Büschel $O(cc_1c_2\ldots)$ projectivisch sein muss; die gerade Polare q' von Q bezüglich des Dreiseits (abd) schneide $cc_1c_2\ldots$ in $TT_1T_2\ldots$, dann ist diese Punktreihe in projectivischer Beziehung mit $RR_1R_2\ldots$ und es sind die Geraden RT, R_1T_1, $R_2T_2, \ldots$ die geraden Polaren von Q bezüglich der Vierseite $(abcd)$, (abc_1d), $(abc_2d)\ldots$. Es werde die Gerade QE durch l von b und d harmonisch getrennt, dann müssen sich die Geraden c und q, c_1 und q_1, c_2 und $q_2, \ldots$ auf l schneiden. Nun sei $\mathfrak{R}$ der Schnittpunkt von a und l, $\mathfrak{c}$ die Gerade $O\mathfrak{R}$, dann muss die gerade Polare $\mathfrak{q}$ von Q bezüglich des Dreiseits $(bd\mathfrak{c})$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ von l und $\mathfrak{c}$ gehen. Durch denselben Schnittpunkt muss auch q' gehen, also sind die projectivischen Punktreihen $a(RR_1R_2\ldots)$ und $q'(TT_1T_2\ldots)$ in perspectivischer Lage, weil ihr gemeinschaftlicher Punkt $\mathfrak{R}$ sich selbst entspricht, und daher schneiden sich die geraden Polaren RT, R_1T_1, $R_2T_2, \ldots$ von Q bezüglich der einzelnen Vierseite in einem Punkte. Um denselben näher zu bestimmen, nehmen wir die Gerade g selbst als eine der Geraden $cc_1c_2\ldots$ an, dann ist die gerade Polare von Q bezüglich des Dreiseits (bdg) die Gerade g selbst, welche a in M schneidet, so dass also M zur Reihe $RR_1R_2\ldots$ gehört. Wenn q' und g sich in $\mathfrak{M}$ schneiden, so gehört $\mathfrak{M}$ zur Reihe $TT_1T_2\ldots$, und zwar sind M und $\mathfrak{M}$ entsprechende Punkte und daher muss der Schnittpunkt aller geraden Polaren von Q bezüglich der Vierseite

$(abcd)$, (abc_1d), (abc_2d), ... auf g liegen. Lassen wir nun bei jedem von den erhaltenen unendlich vielen Vierseiten die Seite d in alle möglichen Lagen $d_1 d_2 d_3$ ... um den Punkt P sich bewegen, so folgt, dass für alle diese doppelt unendlich vielen Vierseite $(abc_x d_y)$ die geraden Polaren von Q sich in demselben Punkte von g schneiden müssen. Und wenn endlich die Geraden a und b alle möglichen Lagen $a_1 a_2 a_3$ ... und $b_1 b_2 b_3$ ... um M und N annehmen, so muss die gerade Polare von Q in Bezug auf jedes der Vierseite $(a_u b_v c_x d_y)$, wenn $uvxy$ jeden der Werthe 1 bis ∞ annehmen, durch denselben festen Punkt von g gehen. Da es aber ausser den durch $(a_u b_v c_x d_y)$ bezeichneten Vierseiten keines giebt, dessen Seiten durch die Punkte $MNOP$ gehen, so folgt der Satz:

62. Sind $MNOP$ vier Punkte einer Geraden g, Q ein fünfter Punkt derselben Geraden, so trifft die gerade Polare von Q in Bezug auf irgend ein Vierseit, dessen Seiten durch die ersten vier Punkte gehen, die Gerade g in einem festen Punkt Q'. Dieser heisst der harmonische Mittelpunkt des ersten Grades der vier Punkte $MNOP$ in Bezug auf Q als Pol. Er ist nur von der gegenseitigen Lage der fünf Punkte $MNOPQ$ abhängig.

Wählen wir von allen Vierseiten zwei aus, $(abcd)$ und $(a_1 b_1 c_1 d_1)$, dann muss die cubische Polare von Q' in Bezug auf jedes der Vierseite durch Q gehen. Sie schneide, nach $(abcd)$ genommen, g in U und V, und nach $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ genommen, g in U_1 und V_1, dann müssen sich die geraden Polaren von UVU_1V_1 in Q' schneiden, sowohl in Bezug auf $(abcd)$, als $(a_1 b_1 c_1 d_1)$, und umgekehrt müssen die beiden cubischen Polaren sich ausser in Q in den vier Punkten UVU_1V_1 von g schneiden; dies geht aber nicht anders, als wenn U und U_1, V und V_1 zusammenfallen, d. h. die cubischen Polaren von Q' in Bezug auf jedes der Vierseite $(abcd)$ und $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ müssen sich in drei Punkten QUV von g schneiden. Dies giebt den Satz:

63. Sind $MNOP$ vier Punkte einer Geraden g, Q' ein fünfter Punkt derselben Geraden, so trifft die cubische Polare von Q' in Bezug auf irgend ein Vierseit, dessen Seiten durch die ersten vier Punkte gehen, die Gerade g in drei festen Punkten QUV. Diese sind nur von der gegenseitigen Lage der fünf Punkte $MNOPQ'$ abhängig und heissen die harmonischen Mittelpunkte des dritten Grades für die vier Punkte $MNOP$ in Bezug auf Q' als Pol.

Unter der conischen Polare des Punktes Q' in Bezug auf $(abcd)$ versteht man die conische Polare von Q' in Bezug auf die cubische Polare von Q' und da diese die Gerade g in drei festen Punkten QUV schneidet, so schneidet die conische Polare von Q' bezüglich $(abcd)$ die Gerade g in zwei festen Punkten $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, den harmonischen Mittelpunkten des zweiten Grades für die drei Punkte QUV in Bezug auf Q' als Pol. In Uebereinstimmung mit der conischen Polare eines Punktes Q' nach $(abcd)$ sollen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ auch die harmonischen Mittelpunkte des zweiten Grades für die vier Punkte $MNOP$ in Bezug auf Q' als Pol heissen. Darin liegt der Satz:

64. Sind $MNOP$ vier Punkte einer Geraden g, Q' irgend ein fünfter Punkt derselben, so schneiden sich die conischen Polaren von Q' in Bezug auf alle Vierseite, deren Seiten durch $MNOP$ gehen, in denselben beiden Punkten von g, die nur von der gegenseitigen Lage der fünf Punkte $MNOPQ'$ abhängen und die harmonischen Mittelpunkte zweiten Grades der vier Punkte $MNOP$ für Q' als Pol heissen.

Aus den Sätzen über die Polaren der vierseitigen Curve folgert man unmittelbar solche über die harmonischen Mittelpunkte von vier Punkten und aus ihnen folgen dann auf dem von Cremona (vergl. Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven) angegebenen Wege die Eigenschaften der Polaren einer allgemeinen Curve vierter Ordnung.

III.

Ueber die Dichtigkeitsverhältnisse des intermolecularen Aethers.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

Seit den Arbeiten Young's und Fresnel's gilt es bei sämmtlichen Physikern, die sich eingehender mit der Theorie des Lichtes beschäftigten, als ausgemacht, dass es einen allenthalben im Universum verbreiteten Stoff gebe, den Aether, der eine ausserordentliche Elasticität besitzt, und dass durch dessen Vibrationen die Erscheinungen des Lichtes hervorgerufen werden, wie dieses bezüglich des Schalles durch die Schwingungen der wägbaren Atome geschieht. Da es auch durchsichtige Körper giebt, ja, da ohne Zweifel alle Körper durchsichtig sind, wenn sie nur in gehörig dünnen Schichten hergestellt werden können, so muss folgerichtig angenommen werden, dass der Aether auch in den Körpern allgemein verbreitet sei. Das Licht bewegt sich durch die Körper in anderer Weise, als durch den allgemeinen Raum, und dieser Umstand lässt darauf schliessen, dass die Körperatome auf den Aether eine Einwirkung üben; weil aber zu jeder Wirkung eine Gegenwirkung gehört, so muss auch der Aether wieder auf die Atome einen Einfluss ausüben. Der Aether spielt demgemäss in den Körpern nicht etwa die Rolle der Luft, die das Spinngewebe durchzieht, sondern die eines constituirenden, zur Feststellung der Eigenthümlichkeit des Körpers wesentlichen Bestandtheiles, und da er in allen Körpern ist, so übertrifft er an Bedeutung jeden der sogenannten chemischen Grundstoffe; denn von diesen ist keiner, der, wie der Aether, in sämmtlichen Körpern sich vorfindet.

Trotz dieser hohen Bedeutung des Aethers lässt sich nicht leugnen, dass seine Naturgeschichte lange nicht so bekannt ist, als es wünschenswerth wäre, und während die Chemiker ihn vollständig ignoriren, wird er, man darf wohl sagen, von der grossen Mehrzahl der Physiker als eine Art von unvermeidlichem *Noli me tangere* betrachtet. Was würden die Chemiker von einem Chemiebuche sagen, welches den Sauerstoff ignorirt? Der

Sauerstoff ist aber nicht in allen Körpern, wie der Aether, und ist darum auch in chemischer Beziehung weit entfernt, mit diesem von gleicher Bedeutung zu sein. Andererseits sind jedem Physiker die elektrischen und magnetischen Fluida geläufig, obwohl ihre Existenz jedenfalls viel problematischer ist, als die des Aethers.

Im Nachstehenden möge mir gestattet sein, die Aufmerksamkeit der Fachmänner zunächst auf die Dichtigkeitsverhältnisse des Aethers in den Körpern zu lenken. Was über diese in den Büchern zu finden ist, ist entweder gar nichts, oder die Angabe, dass der Aether in den Körpern dichter sei, als im allgemeinen Raume, und dass sich um die Atome herum die Aethertheilchen atmosphärenartig in der Weise herumlagern, dass die den Atomen näheren Schichten immer dichter werden, wobei dann regelmässig eine Abbildung der Redtenbacher'schen Dynamide vorgeführt wird.

Ich halte diese Annahme für unrichtig und glaube, dass der Aether in der Nähe der Atome weniger dicht sei, als fern davon. Meine Gründe beruhen auf den Erscheinungen des Lichtes, denn ich gehe von dem Grundsatze aus, dass das Licht, welches uns zuerst die Existenz des Aethers kennen lehrte, auch heutzutage noch die einzige unter den physicalischen Disciplinen sei, die uns über die Beschaffenheit des Aethers zu mehr zu führen vermag, als zu blossen Vermuthungen, die jedenfalls nicht im Stande sind, das zu erschüttern, was bei dem Lichte die Rechnung und die Beobachtung ergeben.

Betrachtet man die allgemein übliche Formel

$$v = c\sqrt{\frac{e}{d}}, \tag{1}$$

in welcher v die Geschwindigkeit einer Welle, in unserem Falle also des Lichtes, c eine Constante, e den Elasticitätscoefficienten des Mediums und d seine lineare Dichtigkeit bedeuten, so ergiebt sich sofort, dass zur Berechnung von v die Kenntniss des Werthes von e unbedingt nothwendig sei.

In jedem Medium giebt es eine Stellung der dasselbe constituirenden Theilchen, in welcher sich befindend die Theilchen in Ruhe sind. Es ist dieses die Stellung, in welcher sämmtliche von den übrigen Theilchen auf ein gegebenes ausgeübten Wirkungen sich aufheben. Rückt man eines derselben aus seiner Ruhelage, so ist die von den umgebenden auf dasselbe bethätigte Wirkung eine andere, das Resultat dieser abgeänderten Thätigkeit ist wenigstens innerhalb bestimmter, der sogenannten Elasticitätsgrenzen, ein Bestreben, das bewegte Theilchen wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen, und dieses Bestreben heisst man Elasticität.

Es stelle $-\frac{b}{r^n}$ die Function dar, nach welcher die Aethertheilchen sich abstossen, wenn man b und n positive Constante, r die Entfernung eines

Aethertheilchens von dem zunächst betrachteten aus der Ruhelage entfernten, und das Zeichen — eine Abstossung bedeuten lässt. Beträgt die Entfernung des Aethertheilchens von der Ruhelage Δr, und macht Δr mit dem Radius vector r den Winkel φ, so ist, wenn man nur die erste Potenz von Δr berücksichtigt, die Kraft, mit welcher das Aethertheilchen auf das bewegte in der Richtung von Δr wirkt, gegeben durch

$$-\left[\frac{b\cos\varphi}{r^n}+((n+1)\cos\varphi^2-1)\frac{b}{r^n}\cdot\frac{\Delta r}{r}\right].$$

Wenn man durch r und φ die sämmtlichen Entfernungen und Winkel repräsentirt denkt, und wenn S eine Summe angiebt, so ergiebt sich als Gesammtwirkung aller Aethertheilchen

$$-S\left[\frac{b\cos\varphi}{r^n}+((n+1)\cos\varphi^2-1)\frac{b}{r^n}\cdot\frac{\Delta r}{r}\right].$$

Hat das Aethertheilchen sich vor der Bewegung nach Δr in der Ruhelage befunden, so ist

2) $$S\frac{b\cos\varphi}{r^n}=0,$$

und es bleibt als beschleunigende Kraft e, welche das Aethertheilchen in die Ruhelage zurückzuführen strebt:

3) $$e=-S((n+1)\cos\varphi^2-1)\frac{b}{r^n}\cdot\frac{\Delta r}{r}.$$

Hätte man in einem andern Falle mit einem Medium zu thun, in dem die Entfernungen der Theilchen ohne eine Aenderung in ihrer Gruppirung, also ohne Aenderung der Winkel φ, sich zu denen im ersteren Medium verhielten wie R zu r, so wäre, wenn

4) $$\frac{\Delta r}{r}=\frac{\Delta R}{R}$$

ist, die neue beschleunigende Kraft:

5) $$E=-S\left(((n+1)\cos\varphi^2-1)\frac{b}{R^n}\right)\frac{\Delta r}{r}.$$

Sind nun in der einen Summe die Werthe der verschiedenen r gegeben durch αr, βr, $\gamma r\ldots$, so sind sie wegen der Gleichartigkeit beider Gruppen in der andern ausgedrückt durch αR, βR, $\gamma R\ldots$ und es wird daher

6) $$\frac{e}{E}=\frac{\frac{1}{r^n}}{\frac{1}{R^n}}\left(\frac{((n+1)\cos\varphi^2-1)\frac{1}{\alpha^n}+((n+1)\cos\varphi_1{}^2-1)\frac{1}{\beta^n}+\ldots}{((n+1)\cos\varphi^2-1)\frac{1}{\alpha^n}+((n+1)\cos\varphi_1{}^2-1)\frac{1}{\beta^n}+\ldots}\right)$$

oder

7) $$\frac{e}{E}=\frac{\frac{1}{r^n}}{\frac{1}{R^n}}.$$

Setzt man $ER^n =$ der Constanten C, so hat man auch

$$8)\qquad e = \frac{C}{r^n},$$

woraus sich ergiebt, dass e der n^{ten} Potenz der linearen Dichtigkeit umgekehrt proportional sei.

Sind in dem Medium ausser den Aethertheilchen noch andere Theilchen zu berücksichtigen, wie dieses bei den wägbaren Körpern der Fall ist, und ist die Wirkung eines Atomes auf die Aethertheilchen ausgedrückt durch

$$9)\qquad f_1(r) = -\left(\frac{\gamma}{r^o} \pm \frac{\delta}{r^p} + \ldots\right);$$

bedeutet dann ψ das, was vorhin φ war, und sind die Entfernungen ausgedrückt durch λr, $\mu r \ldots$, wenn γ, δ, o, p, λ, $\mu \ldots$ positive Constante bedeuten; setzt man ferner

$$((n+1)\cos\varphi^2 - 1)\frac{1}{\alpha^n} + ((n+1)\cos\varphi_1^2 - 1)\frac{1}{\beta^n} + \ldots = N,$$

$$((o+1)\cos\psi^2 - 1)\frac{1}{\lambda^o} + ((o+1)\cos\psi_1^2 - 1)\frac{1}{\mu^o} + \ldots = O,$$

$$((p+1)\cos\psi^2 - 1)\frac{1}{\lambda^p} + ((p+1)\cos\psi_1^2 - 1)\frac{1}{\mu^p} + \ldots = P,$$

so wird

$$10)\qquad \frac{e_1}{E_1} = \frac{\frac{b}{r^n}N + \frac{\gamma}{r^o}O \pm \frac{\delta}{r^p}P + \ldots}{\frac{b}{R^n}N + \frac{\gamma}{R^o}O \pm \frac{\delta}{R^p}P + \ldots} = \frac{\frac{1}{r^n}}{\frac{1}{R^n}}\left(\frac{1 + \frac{\gamma}{b}\frac{O}{N}\frac{r^n}{r^o} \pm \frac{\delta}{b}\frac{P}{N}\frac{r^n}{r^p} + \ldots}{1 + \frac{\gamma}{b}\frac{O}{N}\frac{R^n}{R^o} \pm \frac{\delta}{b}\frac{P}{N}\frac{R^n}{R^p} + \ldots}\right).$$

Die Grösse

$$E_1 R^n\left(1 + \frac{\gamma}{b}\cdot\frac{O}{N}\cdot\frac{R^n}{R^o} \pm \frac{\delta}{b}\cdot\frac{P}{N}\cdot\frac{R^n}{R^p} + \ldots\right)^{-1}$$

kann nun wieder der Constanten C_1 gleichgesetzt werden, und es ergiebt sich

$$11)\qquad e_1 = \frac{C_1}{r^n}\left(1 + \frac{\gamma}{b}\cdot\frac{O}{N}\cdot\frac{r^n}{r^o} \pm \frac{\delta}{b}\cdot\frac{P}{N}\cdot\frac{r^n}{r^p} + \ldots\right).$$

Die Grösse e der Formel 8) ist nun nichts Anderes, als der Werth des Elasticitätscoefficienten e in der Formel 1), wenn von der Wirkung, welche die Atome auf ein isolirtes Aethertheilchen in dem Körper ausüben, abgesehen wird, und wenn man sich die Constante C der Gleichung 8) in der Constanten c der Gleichung 1) enthalten denkt. Der Elasticitätscoefficient des Aethers ist also ausgedrückt durch $\frac{c}{r^n}$, wenn die gegenseitige Abstos-

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY

sung zweier Aethertheilchen durch $-\frac{b}{r^n}$ ausgedrückt wird. In meinem Buche „Die Moleculargesetze" habe ich S. 8 aus der Bedingung des Ausbleibens der Farbendispersion den Satz abgeleitet, dass die Aethertheilchen sich mit einer Kraft abstossen, welche dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional ist; es wäre demgemäss $n=2$ zu setzen. Bei dem Aether des allgemeinen Raumes ist aller Grund zur Annahme vorhanden, dass die Aethertheilchen um ein zunächst betrachtetes derselben etwa so gruppirt sind, wie die Ecken eines holoedrischen tesseralen Krystalles um dessen Mittelpunkt. In diesem Falle ist wegen Verschwindens der ersten zwei Potenzen von $\varDelta r$ die Constante $n=4$ zu nehmen (Mol.-Ges. S. 10). Es ist dieses das Cauchy'sche Gesetz.

In der Formel 1) kann man $d=\frac{\varepsilon}{r}$ setzen (hier handelt es sich nur um die lineare Dichtigkeit), während $e=\frac{C}{r^n}$ genommen werden muss. Betrachtet man die Constanten ε und C als bereits in c enthalten, so ändert sich 1) um in

12) $$r=c\sqrt{\frac{r}{r^n}}.$$

Wird $n=2$, so ergiebt sich, dass die Lichtgeschwindigkeit der Quadratwurzel der Aetherdichtigkeit proportional sei; aber bei Annahme eines andern Werthes von n wird stets die Grösse v mit der Aetherdichtigkeit wachsen, so lange dieser Werth von $n>1$ ist. Bei $n=1$ wird v von der Aetherdichtigkeit unabhängig, und erst wenn $n<1$ wird, geht das Licht in dichterem Aether langsamer, als in dünnerem. Ich kann mich nicht erinnern, irgendwo gelesen zu haben, dass die Aetherwirkung langsamer als umgekehrt der wachsenden Entfernung proportional abnehme; man findet im Gegentheil regelmässig die Ansicht vertreten, dass die Aetherabstossung einer hohen Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sei. Da andererseits von den verschiedenen Annahmen, die man über das Aethergesetz machen kann, nur diejenigen, dass $n=2$ oder $n=4$ sei, der Bedingung des Ausbleibens der Farbendispersion entsprechen, diese aber bei dem Aether des allgemeinen Raumes eintritt, also möglich sein muss, können eigentlich in 12) nur diese Werthe eingesetzt werden, und aus beiden ergiebt sich, dass die Lichtgeschwindigkeit gleichzeitig mit der Aetherdichtigkeit wachse. Das Licht geht, wie ich schon anderwärts erwähnte, durch den Aether nicht hindurch wie eine Kugel durch ein Brett, sondern der Aether ist der Träger des Lichtes.

Es bleibt mir noch übrig, den Fall zu besprechen, der eintritt, wenn ein Medium die Farben zerstreut.

Hier ist in Gleichung 1) statt e der Formel 8) e_1 der Formel 11) zu substituiren. Was nun zunächst das Glied $\frac{\gamma}{b} \cdot \frac{O}{N} \cdot \frac{r^n}{r^o}$ anbelangt, so haben wir nach dem, was ich anderwärts* hierüber bemerkt habe, $o = 2 = n$ zu setzen, und es wird also der Werth $1 + \frac{\gamma}{b} \frac{O}{N}$ constant. Das Glied $\frac{\delta}{b} \cdot \frac{P}{N} \cdot \frac{r^n}{r^p}$ ist gegen die vorhergehenden nur sehr unbeträchtlich, und es vermag wohl, das Ausbleiben der Farbendispersion zu verhindern, weil der Elasticitätscoefficient dem Quadrate der Entfernung nicht mehr genau umgekehrt proportional ist, aber dass um dieses Gliedes willen die Abnahme von e langsamer erfolge als die Zunahme von r, dazu ist es von viel zu untergeordneter Bedeutung. Auch bei den die Farben am stärksten zerstreuenden Körpern ist die Differenz der Farbengeschwindigkeiten gegen die Brechung stets nur klein, und es kann daher die erstere nur als eine Art von kleiner Unregelmässigkeit der letzteren betrachtet werden. Darum ist es auch kaum denkbar, dass für die Medien mit Farbendispersion eine wesentlich andere Norm gelte, als für diejenigen ohne dieselbe, und wenn für letztere das Gesetz gilt, dass die Geschwindigkeit des Lichtes der Quadratwurzel der Dichtigkeit des Aethers proportional sei, so kann man bei den zerstreuenden Medien nur annehmen, dass dieses Gesetz nicht mehr genau erfüllt sei, nicht aber, dass einer grösseren Aetherdichtigkeit eine geringere Lichtgeschwindigkeit entspreche.

Neben der Dichtigkeit der Aethertheilchen eines Mediums ist auch deren Gruppirung zu berücksichtigen. Die Aethertheilchen des allgemeinen Raumes sind so gegeneinander gestellt, dass die auf ein gegebenes derselben von sämmtlichen übrigen ausgeübten Wirkungen sich aufheben, wenn dieses sich in der Ruhelage befindet. Gleichzeitig muss auch die absolute Summe aller dieser Wirkungen ein Minimum sein, denn wäre dieses nicht der Fall, so würde die Ruhe des Aethertheilchens nur der des im labilen Gleichgewichte befindlichen Körpers entsprechen. Das Minimum der Wirkungen kann aber nur dann eintreten, wenn die Entfernungen aller einander benachbarten Theilchen unter sich ganz oder möglichst gleich sind. Sind die Entfernungen ungleich, so ist bei gleichem äusseren Drucke die Dichtigkeit geringer. Wäre die Dichtigkeit der des allgemeinen Raumes gleich, wären aber unter den einzelnen Distanzen mehr Verschiedenheiten, so müsste die absolute Summe der auf ein Aethertheilchen von seiner Umgebung ausgeübten Wirkungen grösser sein, und darum auch die Kraft, welche es in seine Gleichgewichtslage zurückführt, sobald es dieselbe verlässt. Die ungleiche Anordnung der Aethertheilchen würde für sich dahin

* Jahrg. XVIII, 2, 147 dieser Zeitschrift.

führen, dass der Brechungscoefficient des Lichtes abnähme. Die Geschwindigkeit des Lichtes nimmt daher durch ungleiche Entfernung langsamer ab, als es bei gleicher Abnahme der Dichtigkeit ohne Aenderung der Gruppirung der Fall wäre, und es wäre daher sogar möglich, dass selbst bei geringerer Aetherdichtigkeit infolge der Anordnung desselben der Brechungscoefficient kleiner wäre, als im allgemeinen Raume. Die Lichtgeschwindigkeit im allgemeinen Raume ist für die dortige Aetherdichtigkeit ein Minimum, und wenn in einem Körper die Lichtgeschwindigkeit noch geringer ist, so lässt sich mit aller Bestimmtheit auf einen dünneren Aether schliessen, während andererseits bei Vergleichung zweier Körper ein kleinerer Brechungscoefficient nicht nothwendig auf eine grössere Aetherdichtigkeit schliessen lässt, wenn dieses auch im Allgemeinen ziemlich zusammentreffen mag.

Die Beobachtung lehrt, dass in allen Körpern, die untersucht sind, die Lichtgeschwindigkeit kleiner ist, als im allgemeinen Raume, und es muss daher bei ihrer Bildung eine Aetherverdünnung stattgefunden haben. Die Ursache dieser Verdünnung sind offenbar die Atome, denn durch deren Anwesenheit unterscheidet sich ja der Körper von dem allgemeinen Raume, und da jede Wirkung in der Nähe ihrer Quelle am grössten ist, so muss, wenn sich um ein Atom mehrere Schichten von Aether lagern, die Dichtigkeit derselben um so geringer sein, je näher sie an den Atomen sind.

Wir wollen nun annehmen, es sei ein Körper gegeben, in welchem zwar die erwähnte Aethergruppirung um die Atome herum stattfindet, bei dem aber die Atome selbst nach allen Richtungen gleichmässig geordnet sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so muss dieselbe auch für die als Ganze betrachteten Schichten von Aethertheilchen um die Atome gelten, jedoch ohne dass darum die Verschiedenheiten der einzelnen Schichten der Hüllen aufhörten. Dieser Körper wird das Licht einfach brechen, aber um der Verschiedenheit der einzelnen Schichten und darum auch der einzelnen Aetherdistanzen willen wird die Lichtgeschwindigkeit grösser sein, als sie bei der gleichen Aetherdichtigkeit im allgemeinen Raume wäre. Denken wir uns nun die gegenseitige Stellung der Atome in der Weise geändert, dass ohne Aenderung des Gesammtvolumens die in den verschiedenen Horizontalschichten befindlichen auseinander-, die in einer und derselben Schichte liegenden zusammenrücken, so müssten die Aetherschichten die gleiche Bewegung machen, und es entsteht dadurch ausser den bereits vorhandenen Distanzverschiedenheiten der Aethertheilchen eine neue, eine Verschiedenheit nach den Richtungen. Diese Aenderung macht den Körper doppeltbrechend, und ausserdem muss die mittlere Lichtgeschwindigkeit eine grössere sein, als sie ursprünglich war.

Wenn andererseits ein Körper, in welchem eine Verschiedenheit der Zusammensetzung nach den Richtungen vorhanden ist, einer derartigen Aenderung ausgesetzt wird, dass die Verschiedenheit sich vermindert, so folgt unter sonst gleichen Umständen eine Abnahme der Geschwindigkeit des Lichtes.

Glas, welches schlierenfrei und langsam abgekühlt ist, zeigt eine Gruppirung der Moleküle, die nach allen Richtungen die nämliche ist, und dasselbe findet auch für die die Moleküle umgebenden Aetherhüllen statt. Wenn nun ein Lichtstrahl durch dieses Glas geht, so befindet er sich, in welcher Richtung er auch gehen oder schwingen möge, stets unter den gleichen Verhältnissen, er pflanzt sich daher stets mit gleicher Geschwindigkeit fort, das Glas ist einfach brechend.

Uebt man nun auf einen Würfel solchen Glases in der Richtung von oben nach unten einen Druck aus, so werden die senkrecht übereinander befindlichen Schichten des Gases sich gegenseitig nähern, die Theile einer und derselben Horizontalschichte werden sich wegen der Vergrösserung derselben etwas voneinander entfernen. Dasselbe muss auch bei dem im Glase enthaltenen Aether eintreten, und die Dichtigkeit desselben ist je nach der Richtung, die man in dem Glase zieht, eine verschiedene, sie erreicht ein Maximum in verticaler, ein Minimum in horizontaler Richtung.

Geht nun ein Lichtstrahl in horizontaler Richtung durch das Glas, so zerlegt er sich in zwei senkrecht aufeinander polarisirte sichtbare Strahlen, von denen der eine vertical, also in der Richtung der grössten, der andere horizontal, d. i. in der Richtung der kleinsten Aetherdichtigkeit, schwingt.

Geht der Lichtstrahl in verticaler Richtung, und zerlegt er sich wieder in zwei in verschiedenen Ebenen schwingende, so gehen die sichtbaren Schwingungen eines jeden derselben senkrecht auf der Richtung des Druckes, also in der Richtung des kleinsten Aetherdruckes vor sich.

Ist die Richtung des Strahles weder vertical, noch horizontal, so zerlegt er sich ebenfalls in zwei senkrecht aufeinander schwingende. Die Schwingungen des einen vollziehen sich in der Richtung der geringsten Aetherdichtigkeit, die des andern in einer Verticalebene, die durch die Richtung des Strahles geht. In dieser Ebene ist aber die Aetherdichtigkeit nach der auf der Richtung des Strahles senkrecht stehenden Geraden eine verschiedene, und ist ein Minimum, wenn der Strahl vertical, ein Maximum, wenn er horizontal geht.

Es ergiebt sich daraus, dass das Glas durch die Compression eine Aenderung erleidet, welche dasselbe zum Analogon eines einaxigen Krystalles macht, in welchem die Axe senkrecht, also in der Richtung des Druckes steht, und ich will hier zunächst der Annahme folgen, nach welcher derjenige Strahl, dessen Schwingungen horizontal, also senkrecht auf der Axe vor sich gehen, der ordentliche ist, während die Schwingungen des ausserordentlichen Strahles in der Verticalebene sich vollziehen.

Wenn der ausserordentliche Strahl bezüglich seiner Geschwindigkeit sich von dem ordentlichen unterscheidet, so kann daran die Gruppirung der Aethertheilchen Schuld sein, die

a) in der Richtung seiner Fortpflanzung,
b) seitwärts von der Schwingungsebene,
c) in der Schwingungsebene selbst liegen.

ad a). Wenn diejenigen Aethertheilchen maassgebend sind, die in der Fortpflanzungsrichtung des Strahles selbst liegen, so kann eine Verschiedenheit zwischen ordentlichem und ausserordentlichem Strahle nicht eintreten, denn wenn das Licht senkrecht auf die Glasflächen aufgefallen ist, was hier vorausgesetzt werden soll, so ist die Fortpflanzungsrichtung des ausserordentlichen Strahles die nämliche, wie die des ordentlichen.

ad b). Ist die Gruppirung der seitwärts von der Schwingungsebene des Strahles befindlichen Aethertheilchen maassgebend, so pflanzt sich der im Hauptschnitte schwingende Strahl fort unter dem Einflusse des Aethers von der geringsten Dichtigkeit. Geht das Licht parallel der Druckrichtung, so schwingen beide Strahlen unter dem Einflusse von Aether der geringsten Dichtigkeit. Geht das Licht senkrecht auf der Druckrichtung, so hat einer der beiden Strahlen seitwärts seiner Schwingungsebene dünnen, der andere dichten Aether. Während der parallel der Druckrichtung schwingende Strahl stets Aether von der geringsten Dichtigkeit zu seinen Seiten hat, hat der senkrecht auf der Druckrichtung schwingende einen Aether neben sich, der von der grössten Dichtigkeit (bei horizontaler Fortpflanzung) zur kleinsten (bei verticaler Fortpflanzung) variirt.

Das ganze Ergebniss wäre also, dass nicht der oben als ordentlicher Strahl bezeichnete der ordentliche wäre, sondern der im Hauptschnitte schwingende.

Wenn nun, wie ich oben gezeigt habe, Vergrösserung der Aetherdichtigkeit eine Zunahme der Lichtgeschwindigkeit zur Folge hat, so findet man, dass in dem Glase der von der geringeren Aetherdichtigkeit zunächst abhängige ordentliche Strahl langsamer geht, als der ausserordentliche, und das gepresste Glas entspricht also dem negativen einaxigen Krystalle, dessen Axe mit der Richtung des Druckes zusammenfällt.

Gilt der Satz, dass das Licht im dünneren Aether rascher geht, so muss das Analogon des positiven Krystalles zum Vorschein kommen.

ad c). Wenn die Gruppirung des in der Schwingungsebene eines Strahles befindlichen Aethers für die Geschwindigkeit desselben zunächst maassgebend ist, so ist derjenige Strahl der ordentliche, der senkrecht auf der Druckrichtung schwingt. Er vibrirt unter dem Einflusse dünneren Aethers. Der ausserordentliche im Hauptschnitte schwingende Strahl hat in der Richtung seiner Schwingungsebene Aether, dessen Dichtigkeit vom Minimum (wenn die Fortpflanzungsrichtung vertical ist) zum Maximum (bei horizontaler Fortpflanzung) wechselt.

Das Endergebniss ist, wie bei *b)*, dass das Analogon eines negativen Krystalles entstehen muss, wenn Zunahme der Aetherdichtigkeit eine Zunahme der Lichtgeschwindigkeit bedingt; im entgegengesetzten Falle entsteht das Analogon eines positiven Krystalles.

Wird das Glas gedehnt, so wird es im Gegensatze zu dem vorigen Falle einen positiven Krystall repräsentiren, wenn die Lichtgeschwindigkeit mit der Aetherdichtigkeit wächst.

Der Versuch lehrt bekanntlich, dass gedrücktes Glas einen negativen Krystall vorstellt, dessen Hauptaxe mit der Richtung des Druckes zusammenfällt, während gedehntes Glas einen positiven Krystall repräsentirt.*

Wie man sieht, lässt sich die Frage, ob der ordentliche Strahl in dem Hauptschnitte oder senkrecht darauf schwinge, auf die vorstehende Weise nicht entscheiden, wohl aber die Frage, in welchen Beziehungen Lichtgeschwindigkeit und Aetherdichtigkeit zueinander stehen, und diese Frage beantwortet sich dahin, dass die Zunahme der Lichtgeschwindigkeit mit der der Aetherdichtigkeit verbunden sei.

In dem gepressten Glase findet eine gegenseitige Annäherung der Theilchen, also eine grössere Dichtigkeit in der Richtung des Druckes statt, und wenn durch die Compression das Glas zum Analogon des negativen Krystalles wird, so lässt sich schliessen, dass die Dichtigkeit in diesen Krystallen in der Richtung der optischen Axe ein Maximum, senkrecht darauf ein Minimum sei, während bei den positiven Krystallen der entgegengesetzte Fall eintritt.

Es könnte auch die Frage aufgeworfen werden, ob nicht infolge der Compression des Glases eine Abscheidung von Aether stattfinde, was dann die Umänderung des Glases in einen doppeltbrechenden Körper zur Folge hätte. In meinen Moleculargesetzen (S. 65) habe ich gezeigt, dass sich die optischen Beziehungen der Gase ganz einfach durch die Annahme erklären lassen, dass die Luftarten aus Atomen mit ihren Aetherhüllen bestehen, die dann noch ausserdem in freiem Aether zerstreut sind, gewissermassen darin schwimmen. Durch Compression eines Gases wird dann mehr und mehr des freien Aethers abgeschieden und so das optische Verhalten der Gase veranlasst.

Würde bei den festen Körpern ein analoger Vorgang stattfinden, so würde, wenn die Aethertheilchen in der Nähe der Atome weniger dicht beieinander sind, als fern davon, wie ich es angenommen habe, der nach der Compression des Glases bleibende Aetherrest weniger dicht sein, als vor derselben, da durch den Druck offenbar die den Atomen zunächst liegenden Theilchen zuletzt von diesen abgeschieden werden. Die Folge der Com-

* Die meines Wissens neuesten Versuche hierüber finden sich in Mach, Optisch-akustische Versuche.

pression wäre also eine Abnahme der Aetherdichtigkeit, die, wenn sie nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, zunächst die Richtung des Druckes treffen muss. Es müsste also in dem gedrückten Körper in der Druckrichtung dünnerer Aether sein, als senkrecht darauf, es müsste ein positiver Krystall entstehen.

Folgt man der gewöhnlichen Annahme, dass die Dynamiden in der Nähe der Atome dichteren Aether enthalten, als fern davon, so ergiebt sich im Gegensatze zu dem vorigen Falle, dass durch den Druck ein Körper entstehen muss, dessen Aether in der Richtung des Druckes das Maximum der Dichtigkeit erreicht. Nach dieser Annahme bewegt sich aber das Licht in dem dichteren Aether langsamer als im dünneren, und es müsste also auch hier durch Druck ein positiver Krystall zum Vorschein kommen.

Wie man sieht, widerspricht die Annahme der Aetherabscheidung unter allen Umständen der Beobachtung; dasselbe thut aber auch die Annahme, dass der Aether in der Nähe der Atome dichter sei, als fern davon, während das Licht im dichteren Aether langsamer geht. Nur die Voraussetzung, dass der Aether in den Körpern weniger dicht sei, als ausserhalb derselben, und dass das Licht in dichterem Aether schneller gehe, als in dünnerem, harmonirt, wie oben gezeigt mit der Rechnung, so hier mit der Beobachtung.

Eine zweite Art, die Doppeltbrechung des Glases hervorzubringen, ist die, dass man einen Glasstab in longitudinale Schwingungen versetzt. Kundt* hat nachgewiesen, dass die Doppeltbrechung des Glases periodisch sei. Die Theile des Stabes bewegen sich gegen den Knoten hin und von ihm weg, und es entsteht so abwechselnd eine Contraction und eine Dilatation in der Richtung der Längsaxe des Stabes, die im Knoten, in welchem allein eine Doppeltbrechung wahrzunehmen ist, ein Maximum erreicht. Bereits Mach** hat darauf hingewiesen, dass der Stab bei der Contraction optisch negativ, bei der Dilatation positiv werden muss.

Wenn ein Körper erwärmt wird, so dehnt er sich aus, und die gleiche Quantität von Aether ist darum auf einen grösseren Raum verbreitet, er ist also verdünnt, und die Folge davon sollte ein Anwachsen des Brechungscoefficienten sein. Andererseits ist durch die Temperaturerhöhung der Aether in Schwingungen versetzt, und wenn dieses geschieht, so ist damit eine Vergrösserung der von den einzelnen Theilchen, den Atomen sowohl, als von den Aethertheilchen auf ihre Nachbarn ausgeübten Abstossung verbunden. Ist die Wirkung bei der absoluten Temperatur 0° ausgedrückt durch

$$f(r) = -\left[\frac{b}{r^n} + \frac{\gamma}{r^p} + \dots\right], \tag{13}$$

* Pogg. Ann. 123, S. 541.

** A. a. O. S. 34.

so wird sie bei der Temperatur t^0, wie ich anderwärts* gezeigt habe:

$$14)\quad f_1(r) = -\left[\left(\frac{b}{r^n}+\frac{\gamma}{r^p}+\ldots\right)+\frac{(n+1)t}{8r}\left(1+\frac{\gamma p}{b n r^{p-n}}\left(\frac{p-n}{n+1}\right)\right)+\ldots\right].$$

Wird die Abstossung grösser, so wird es auch der Elasticitätscoefficient und mit diesem die Lichtgeschwindigkeit. Wir haben darum einen doppelten Einfluss der Temperatur auf die Lichtgeschwindigkeit; aber die beiden Wirkungen sind in entgegengesetztem Sinne thätig.

Die Gesammtänderung der Lichtgeschwindigkeit beruht auf der Differenz zweier sich entgegengesetzten Wirkungen, und es ist leicht einzusehen, dass unter sonst gleichen Umständen die Abnahme des Brechungscoefficienten um so grösser sein wird, je geringer der Ausdehnungscoefficient eines Körpers ist.

Was die Beobachtungen anbelangt, die hier zu verwenden wären, so sind wir hier nicht am besten daran, denn in der Regel kennt man die Ausdehnungscoefficienten derjenigen Körper nicht, deren Aenderung der Brechungscoefficienten bestimmt ist, oder umgekehrt.

Stefan** hat die Aenderungen der Brechungscoefficienten für einige Stoffe angegeben, und namentlich auf die starke Verminderung derselben für Steinsalz und Sylvin aufmerksam gemacht. Seine Beobachtungen geben die auf die Linie *D* reducirten Aenderungen dn des Brechungscoefficienten für 100° C. Temperaturzunahme:

Steinsalz	$dn =$	$-0{,}00373$,
Sylvin		$-0{,}00345$,
Flussspath		$-0{,}00123$.

Ausserdem hat man nach Fizeau***:

Bergkrystall	$dn_o =$	$-0{,}00054$,
	$dn_e =$	$-0{,}00063$,
Kalkspath	$dn_o =$	$+0{,}00006$,
	$dn_e =$	$+0{,}00108$.

Stefan sagt: „Ob zwischen diesem ausgezeichneten Verhalten des Steinsalzes und des Sylvins und ihrer bekannten grossen Diathermansie eine naheliegende gesetzmässige Beziehung stattfindet, diese Frage zu beantworten ist jetzt noch nicht möglich. Es besitzen diese Körper auch relativ kleine Ausdehnungscoefficienten; sie dehnen sich durch die Wärme nur $\frac{2}{3}$mal so stark aus, als Flussspath, und sticht gegen dieses Verhältniss das der Aenderungen der Brechungscoefficienten, nämlich 3:1, um so bedeutender ab, in demselben Grade, wie die Verschiedenheit in der Diathermansie dieser Substanzen. Und ebenso stellt sich das Verhältniss zwischen Stein-

* Jahrg. XVIII, 2, 154 dieser Zeitschrift.

** Sitzungsber. d. k. k. Akad. d. Wissensch. 1871, Februarheft 7.

*** Pogg. Ann. CXIX, 87 und CXXIII, 515.

salz, Sylvin und Bergkrystall, welche nahe gleiche cubische Ausdehnungscoefficienten besitzen."

Was nun zuerst die von Stefan angedeuteten Beziehungen zwischen Steinsalz und Sylvin einer- und Flussspath andererseits anbelangt, so ergiebt sich leicht die Ursache der stärkeren Aenderung des Brechungscoefficienten bei den beiden ersten Substanzen. Die Ursache ist die geringere Ausdehnung, welche sie infolge der Temperaturerhöhung zeigen, und die von Herrn Stefan bemerkten Verschiedenheiten zwischen dem Verhältnisse der Ausdehnungscoefficienten und der Aenderung der Lichtbrechungscoefficienten sind darauf zurückzuführen, dass letztere auf einer Differenz zweier entgegengesetzten Wirkungen beruht, und darum das Verhältniss derselben leicht ein anderes sein kann, als das der Ausdehnungscoefficienten.

Für uns gilt folgender Satz: Ist bei Steinsalz und Sylvin die Ausdehnung kleiner, so ist es auch diejenige Wirkung, die den Brechungscoefficienten vergrössert, und unter sonst gleichen Umständen muss darum der Brechungscoefficient des Lichtes bei Steinsalz und Sylvin rascher abnehmen (oder langsamer wachsen), als bei dem Flussspath. Würde das Licht in dichterem Aether langsamer gehen, als in dünnerem, so müsste bei kleinerer Ausdehnung eines Körpers der Brechungscoefficient rascher wachsen (oder langsamer abnehmen). Die Beobachtung spricht gegen diese Annahme; sie spricht für die meinige.

Bei dem Quarze beträgt der Brechungscoefficient des ordentlichen Strahles bei gewöhnlicher Temperatur 1,548, der des ausserordentlichen 1,558, und durch Erhöhung der Temperatur um 100° C. nimmt ersterer um 0,00054, letzterer um 0,00063 ab. Durch die Temperaturerhöhung nähert sich also der Bergkrystall den einfach brechenden Körpern, und die Aethergruppirung in seinem Innern wird also bei der Temperaturerhöhung eine gleichartigere. Wenn sich die Aethergruppirung der des allgemeinen Raumes nähert, so nähert sie sich derjenigen, bei welcher aus den oben angeführten Gründen unter sonst gleichen Umständen die Lichtgeschwindigkeit ein Minimum ist, und letztere wächst daher bei dem Uebergange in diese Gruppirung weniger, als man es bei der unbedeutenden cubischen Ausdehnung des Bergkrystalls erwarten sollte. Die Aenderung des Brechungscoefficienten ist bei dem Steinsalze bei gleicher Ausdehnung durch Wärme darum grösser, als bei dem Quarze, weil bei letzterem durch die Veränderung der Gruppirung der Aethertheilchen eine Erscheinung eintritt, die für sich den Brechungscoefficienten vergrössert, während bei dem Steinsalze als einem einfach brechenden Krystalle diese Aenderung der Gruppirung gar nicht oder nur in geringem Maasse vorhanden ist. Auf diese Weise dürfte sich die von Herrn Stefan bemerkte, oben angeführte Anomalie erklären.

Bei dem Kalkspathe ist die nämliche Erscheinung, aber in vergrössertem Maassstabe, vorhanden, wie schon die weitaus stärkere Doppeltbrechung dieses Krystalles erwarten lässt. Nach Fizeau ändert sich, wie bereits erwähnt, der Brechungscoefficient des ausserordentlichen Strahles bei 100° C. Temperaturzunahme um $+0{,}00108$, der des ordentlichen um $+0{,}00006$. Da nun die ursprünglichen Werthe der Coefficienten 1,483 und 1,654 sind, so ergiebt sich hieraus, dass bei der Temperaturerhöhung der Kalkspath sich viel rascheren Schrittes dem einfach brechenden Medium nähert, als der Bergkrystall, und die Folge dieser Aenderung ist, dass die Brechungscoefficienten des Lichtes nicht nur nicht abnehmen, sondern sogar wachsen.

Annäherung an die einfach brechenden Substanzen hat eine Abnahme der Lichtgeschwindigkeit zur Folge, und umgekehrt.

Es möge mir nun gestattet sein, bezüglich des im Vorstehenden besprochenen Uebergehens der Aethergruppirung in die normale etwas abzuschweifen und in ein paar Beispielen nachzuweisen, auf welche Ursache die Umänderung der Gruppirung zurückzuführen sei.

Es sei eines der Tetraeder gegeben, die ich in meiner Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen"* zu Grunde gelegt habe. Das Tetraeder sei ursprünglich so gestellt, dass sein Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt, sein eines Eck in der Axe der Z steht, während ein anderes in der Ebene der XZ ist. Man drehe nun das Tetraeder um die Z-Axe um den Winkel φ, dann um die x-Axe um den Winkel ψ, und die Coordinaten der einzelnen Ecke werden sein:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = r \sin\psi, \quad z_1 = r\cos\psi;$$

$$x_2 = \frac{r}{3}\sqrt{8}\cos\varphi, \quad y_2 = \frac{r}{3}\sqrt{8}\sin\varphi\cos\psi + \frac{r}{3}\sin\psi,$$

$$z_2 = -\frac{r}{3}\cos\psi + \frac{r}{3}\sqrt{8}\sin\varphi\sin\psi;$$

$$x_3 = \frac{r}{3}\sqrt{8}\cos(\varphi+120), \quad y_3 = \frac{r}{3}\sqrt{8}\sin(\varphi+120)\cos\psi + \frac{r}{3}\sin\varphi,$$

$$z_3 = -\frac{r}{3}\cos\psi + \frac{r}{3}\sqrt{8}\cdot\sin(\varphi+120)\sin\psi;$$

$$x_4 = \frac{r}{3}\sqrt{8}\cos(\varphi+240), \quad y_4 = \frac{r}{3}\sqrt{8}\sin(\varphi+240)\cos\psi + \frac{r}{3}\sin\psi,$$

$$z_4 = -\frac{r}{3}\cos\psi + \frac{r}{3}\sqrt{8}\sin(\varphi+240)\sin\psi.$$

Die Mitte des Tetraeders nimmt die Massenkugel ein, an den vier Ecken befindet sich eine Aetherkugel, und r ist die Summe der Radien von Aether- und Massentheilchen. Befindet sich nun in der Z-Axe in der Entfernung R von dem Anfangspunkte ein weiteres Aethertheilchen, und ist

* Jahrg. XVIII, 2 dieser Zeitschrift.

die Einwirkung W zu suchen, welche das Tetraeder auf dieses Aethertheilchen ausübt, so findet man

$$15)\qquad W = -b\left[\frac{1}{R^2} + \frac{8\,\Omega}{\nu}\left(\cos\psi\,(\cos\psi^2 - \tfrac{3}{4}\sin\psi^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\psi^3(\sin\varphi^2 - 3\cos\varphi^2)\right)\frac{r^3}{R^5} + \dots\right]$$

oder, wenn man den Coefficienten von $\frac{r^3}{R^5}$ der Kürze wegen durch A ersetzt:

$$16)\qquad W = -b\left[\frac{b}{R^2} + \frac{Ar^3}{R^5} + \dots\right].$$

Diese Gleichung entspricht ganz der Gleichung 4), die ich in dieser Zeitschrift XVIII, 2, 147 gegeben habe, und sie beruht auch auf den nämlichen Voraussetzungen; man hat in der letzteren Gleichung nur μ, die träge Substanz eines Aethertheilchens, $=1$ und $-\frac{8\,\Omega}{9}b = A$ zu setzen. Die Gleichung 16) entspricht auch der oben angeführten Gleichung 13), und man hat dort nur $n=2$, $p=5$ und $\gamma = Ar^3$ und das dortige $r=R$ zu nehmen; man kann darum auch aus 16) eine der 14) analoge Formel ableiten. Geht nun R in $R+\varDelta r$ über, so erhält man

$$17)\qquad f_1(R+\varDelta R) = -\left[\left(\frac{b}{R^2} + \frac{Ar^3}{R^5} + \dots\right) + \tfrac{3}{8}\frac{t}{R}\left(1 + \frac{5Ar^3}{2bR^3} + \dots\right) + \dots\right] + \left[\left(\frac{2b}{R^3} + \frac{5Ar^3}{R^6} + \dots\right)\varDelta R + \tfrac{3}{8}\frac{t}{R^2}\left(1 + \frac{10Ar^3}{bR^3} + \dots\right)\varDelta R + \dots\right].$$

Man sieht hieraus, dass die mit A multiplicirten Glieder äusserst rasch abnehmen, wenn R wächst. Nun hängt aber der Einfluss, den ein Atom auf die Aethergruppirung im Innern des Krystalles ausübt, gerade von dem Werthe dieser Glieder ab, und die Abnahme desselben ist um so rascher, je kleiner $\frac{r}{R}$ wird. Dieser Ausdruck repräsentirt um so kleinere Grössen, je mehr die Aethertheilchen von dem Atome entfernt sind, und eben dieser Fall tritt bei uns ein, da es sich hier zunächst um die Aethergruppirung der den Atomen ferner stehenden Hüllentheile handelt. Je geringer nun der Einfluss des Atomes auf die Aethergruppirung ist, um so mehr tritt diejenige Aenderung in ihr Recht, welche im allgemeinen Raume stattfindet, und daraus ergiebt sich die Annäherung an den einfach brechenden Körper, wenn durch Temperaturerhöhung eine Ausdehnung des Krystalles hervorgerufen wird.

Wenn in der Gleichung 1) meiner eben citirten Abhandlung $n =$ oder wenig $\gtrless 3$ gesetzt wird, so entsteht, wie ich in meinen Moleculargesetzen gezeigt habe, ein Krystall des Tesseralsystems; ist aber $n =$ oder wenig $\gtrless 2$, so kommt ein Krystall des Hexagonalsystems zum Vorschein. Ein solches Molekül besteht in seiner einfachsten Form aus einer Massenkugel, auf welcher in einem grössten Kreise drei Aetherkugeln je 120° voneinander entfernt sich befinden.

Liegt dieses Molekül ursprünglich in der Ebene XY so, dass das eine der Aetheratome in der X-Axe sich befindet, und dreht man wieder, wie oben, um die Winkel φ und ψ, und sucht man wieder die Einwirkung des Moleküles auf ein in der Z-Axe in der Entfernung R befindliches Aethertheilchen, so erhält man

$$18)\qquad W = -\left[\frac{b}{R^2} - \frac{3}{4}\frac{b\,r^2}{R^4}\left(1 - \frac{3}{2}\sin\psi^2\right) + \ldots\right].$$

Das Ergebniss ist ein dem vorigen Falle ganz analoges.

Es wäre gewagt, aus dem Resultate von zwei Specialfällen einen allgemeinen Schluss zu ziehen und zu sagen, dass bei allen Atomen, welcher Gestalt sie auch sein mögen, der nämliche Erfolg eintreten müsse; was aber gestattet ist, das ist die Annahme, dass das gefundene Verhalten schwerlich vereinzelt dastehen wird, und gerade die zwei Krystalle, bei denen der Uebergang in das einfach brechende Medium bei Temperaturerhöhung eintritt, der Bergkrystall und der Kalkspath, gehören dem Hexagonalsystem an, für welches eben die Thatsache der raschen Abnahme der Einwirkung des Moleküles auf die Aethergruppirung nachgewiesen wurde.

Nach dieser Abschweifung will ich mich wieder den Schlüssen bezüglich der Aetherdichtigkeit zuwenden, zu welchen die Erhöhung der Temperatur des Bergkrystalles und des Kalkspathes führt.

Pfaff* hat gefunden, dass der Bergkrystall bei einer Temperaturerhöhung von 100° C. sich ausdehnt:

in der Richtung der Hauptaxe um 0,0008073,
„ „ „ senkrecht darauf „ 0,0015147.

Der Brechungscoefficient des Lichtes ändert sich bei der gleichen Erwärmung

für den ausserordentlichen Strahl um —0,00063,
„ „ ordentlichen „ „ —0,00054.

Nach dem Obigen ist für den ausserordentlichen Strahl mehr die Aetherdichtigkeit in der Richtung der Axe bestimmend, für den ordentlichen Strahl die Dichtigkeit senkrecht auf der Axe. In der Richtung der Hauptaxe ist die Ausdehnung, also die Verdünnung durch Wärme, kleiner als senkrecht darauf, und da die Verdünnung für sich den Brechungscoefficienten vergrössert, so ist auch die Abnahme desselben in der Hauptaxenrichtung grösser, als senkrecht darauf.

Deutlicher lässt sich der Satz bei dem Kalkspathe nachweisen. Bei diesem ist nach demselben Autor die Ausdehnung

---

* Pogg. Ann. CVII, 150.

in der Richtung der Hauptaxe 0,0026261,
„ „ „ senkrecht darauf —0,0003105.

Die Aenderung des Brechungscoefficienten ist für die gleiche Temperaturerhöhung

für den ausserordentlichen Strahl um 0,00108,
„ „ ordentlichen „ „ 0,00006.

Während bei dem Quarze die den Brechungscoefficienten verkleinernde Wirkung [Anwachsen der Elasticität nach Gleichung 14)] die beiden vergrössernden (Ausdehnung und Uebergang der Aethergruppirung in die normale) überwog, ist bei dem Kalkspathe der entgegengesetzte Fall. Die vergrössernde Wirkung der Ausdehnung tritt ein in der Richtung der Hauptaxe, und der Brechungscoefficient wächst darum auch für den von dem Aether dieser Richtung zunächst abhängigen Strahl für den ausserordentlichen.

Bei der Annahme, dass der Brechungscoefficient mit der Dichtigkeit wachse, müsste in jedem der vorstehenden Fälle das Entgegengesetzte eintreten.

Aus dem Vorstehenden lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. In den wägbaren Körpern ist die Aetherdichtigkeit kleiner, als im allgemeinen Weltenraum.

2. In den positiven hexagonalen Krystallen erreicht die Aetherdichtigkeit in der Richtung der Hauptaxe einen kleinsten, senkrecht darauf einen grössten Werth. Für die negativen Krystalle findet das Entgegengesetzte statt.

3. Die in den Lehrbüchern der Physik vorgeführten Zeichnungen von Dynamiden geben eine ganz unrichtige Vorstellung von der Gruppirung der Aethertheilchen um die Atome, denn erstere sind in der Nähe der letzteren nicht nur nicht dichter, sondern ihre Dichtigkeit nimmt sogar mit der Entfernung von den Atomen ab.

IV.

Ueber die numerische Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Von

H. Zimmermann

in Carlsruhe.

Die beiden Unbekannten x und y seien aus den beiden (algebraischen oder transcendenten) Gleichungen

$$1) \qquad f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

zu bestimmen. Es wird angenommen, dass die Elimination einer der beiden Unbekannten nicht auf einfache Weise zu bewerkstelligen sei und dass drei Paare von Näherungswerthen:

$$x_1 y_1, \; x_2 y_2, \; x_3 y_3$$

bekannt seien. Dann ist die Aufgabe die, mit Hilfe dieser Näherungswerthe und der Gleichungen 1) ohne Zuhilfenahme von Constructionen beliebig genaue Werthe für x und y zu finden.

Lässt man nun $x\,y\,z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume bedeuten, so stellen die Gleichungen

$$2) \qquad z = f(x, y), \quad \zeta = \varphi(x, y)$$

zwei Flächen dar. Nimmt man (des kürzeren Ausdruckes wegen) die xy-Ebene horizontal an, so bedeuten die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

d. h. unsere Gleichungen 1), die Horizontalspuren dieser Flächen. Für alle Durchschnittspunkte beider Horizontalspuren gelten die Gleichungen 1) zusammen. Die gesuchten Werthe von x und y können also als die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Horizontalspuren der Flächen 2) aufgefasst werden.

Setzen wir nun die Näherungswerthe von x und y in die gegebenen Functionen ein, so verschwinden dieselben nicht, sondern ergeben gewisse Werthe z, resp. ζ, die auf folgende Weise bezeichnet werden mögen:

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} z_1 = f(x_1, y_1), & \zeta_1 = \varphi(x_1, y_1); \\ z_2 = f(x_2, y_2), & \zeta_2 = \varphi(x_2, y_2); \\ z_3 = f(x_3, y_3), & \zeta_3 = \varphi(x_3, y_3). \end{array}\right.$$

Wenn die Näherungswerthe nicht sehr stark von den wahren Werthen, beziehungsweise von einander differiren, so liegen die drei Flächenpunkte

$$x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2,\ x_3 y_3 z_3$$

einander nahe, so dass eine Ebene, die man durch dieselben legt, sich der Fläche ziemlich eng anschliesst, also auch für eine kurze Strecke annähernd dieselbe Horizontalspur besitzt. Die Gleichung dieser Ebene sei

$$4)\qquad z = ax + by + c.$$

Dann müssen natürlich die Coefficienten a, b, c den folgenden, zu ihrer Bestimmung hinreichenden Bedingungen genügen, die ausdrücken, dass die Ebene 4) durch die in Rede stehenden drei Flächenpunkte geht:

$$5)\qquad z_1 = ax_1 + by_1 + c,\quad z_2 = ax_2 + by_2 + c,\quad z_3 = ax_3 + by_3 + c.$$

Die Gleichung der Horizontalspur dieser Ebene ist

$$0 = ax + by + c.$$

Legt man durch die drei Flächenpunkte

$$x_1 y_1 \zeta_1,\ x_2 y_2 \zeta_2,\ x_3 y_3 \zeta_3$$

in analoger Weise eine Ebene, deren Gleichung

$$6)\qquad \zeta = \alpha x + \beta y + \gamma$$

sei, dann sind die Bedingungen, denen die Coefficienten α, β, γ genügen müssen, die folgenden:

$$7)\qquad \zeta_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma,\quad \zeta_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma,\quad \zeta_3 = \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma,$$

und die Gleichung der Horizontalspur der Ebene 6) lautet:

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Die beiden Horizontalspuren schneiden sich nun in einem Punkte $x_4 y_4$, dessen Coordinatenwerthe

$$8)\qquad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -\gamma & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} = \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha},\quad y_4 = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ \alpha & -\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} = \frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$$

im Allgemeinen den wahren Werthen von x und y näher liegen werden, als die ursprünglichen drei Paare von Näherungswerthen. Wurden diese nämlich passend gewählt, so fallen die geradlinigen Horizontalspuren der Ebenen 4) und 6) nahezu mit den entsprechenden krummlinigen Spuren der Flächen 2) zusammen, so dass also auch der Schnittpunkt der geradlinigen Horizontalspuren sehr nahe bei dem der krummlinigen liegen muss.

Um nun x_4 und y_4 als Functionen der je drei Näherungswerthe von x und y explicite zu erhalten, wären a, b, c aus 5), α, β, γ aus 7) zu entwickeln und in 8) einzusetzen. Diese Elimination geschieht kurz auf folgende Weise.

Aus 5) und 7) folgt durch Multiplication und Subtraction

$$z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2 = (a\beta - b\alpha)(x_2y_3 - x_3y_2) + (c\alpha - a\gamma)(x_3 - x_2) + (b\gamma - c\beta)(y_2 - y_3).$$

Analog:

$$z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3 = (a\beta - b\alpha)(x_3y_1 - x_1y_3) + (c\alpha - a\gamma)(x_1 - x_3) + (b\gamma - c\beta)(y_3 - y_1)$$

und

$$z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 = (a\beta - b\alpha)(x_1y_2 - x_2y_1) + (c\alpha - a\gamma)(x_2 - x_1) + (b\gamma - c\beta)(y_1 - y_2).$$

Addirt man diese drei Gleichungen und setzt man zur Abkürzung

$$9)\qquad x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 = S,$$

so findet man

$$z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2 + z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3 + z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 = (a\beta - b\alpha)S.$$

Multiplicirt man andererseits die obigen drei Gleichungen der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 und ein anderes Mal mit y_1, y_2, y_3, so ergiebt die Addition die folgenden beiden Gleichungen:

$$x_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + x_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + x_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1) = (b\gamma - c\beta)S,$$
$$y_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + y_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + y_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1) = (c\alpha - a\gamma)S.$$

Aus den letzten drei Gleichungen ergeben sich nun Nenner und Zähler der Brüche, die zufolge 8) die gesuchten Grössen x_4 und y_4 darstellen. Dividirt man die letzten beiden Gleichungen durch die vorhergehende, so kommt

$$10)\qquad \begin{cases} x_4 = \dfrac{x_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + x_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + x_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}{(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + (z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + (z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}, \\[2ex] y_4 = \dfrac{y_1(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + y_2(z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + y_3(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}{(z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2) + (z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3) + (z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)}. \end{cases}$$

Nimmt man zu den so erhaltenen beiden Näherungswerthen wieder zwei Paar wenig davon verschiedener an, oder combinirt man x_4 und y_4 mit den nächstliegenden Paaren der ursprünglichen Näherungswerthe, so kann man durch Wiederholung des ganzen Verfahrens x und y beliebig genau erhalten. — Hiermit wäre die Aufgabe im Princip gelöst.

Der hier gebrachte Entwickelungsgang ist der algebraischen Analysis von Prof. O. Schlömilch entnommen. Es lassen sich dazu einige Bemerkungen machen und bedeutende Vereinfachungen der Formeln 10) vornehmen; namentlich wird es vortheilhaft sein, dieselben so umzugestalten, dass alle Rechnungen mit grossen Zahlen vermieden werden.

Zunächst verdient bemerkt zu werden, dass die Formeln 10) unter Umständen für x_4 und y_4 endliche bestimmte Werthe ergeben können, während thatsächlich diese Werthe unbestimmt sind. Dies kann um so eher zu sehr misslichen Fehlern Veranlassung geben, als man dem Endresultat die Fehlerhaftigkeit nicht ansieht. Es ist nämlich bei der Division, durch welche die Ausdrücke für x_4 und y_4 gebildet werden, der

Factor S im Zähler nur dann mit Recht gegen denselben Factor im Nenner zu streichen, wenn S von Null verschieden ist. Andernfalls ergiebt sich sofort, dass x_4 sowohl, wie y_4 die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, insofern Nenner und Zähler mit $S=0$ multiplicirt sind. Als Bedingung für die Giltigkeit der Gleichungen 10) ist also noch hinzuzufügen

$$S \gtrless 0.$$

Die Nothwendigkeit dieser Bedingung lässt sich übrigens auch leicht durch eine geometrische Betrachtung darthun. Es ist nämlich offenbar

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Nun stellt bekanntlich diese Determinante den doppelten Inhalt des Dreiecks dar, welches, in der xy-Ebene liegend, die drei Punkte mit den Coordinaten

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad x_3 y_3$$

als Eckpunkte hat. Dass dieser Inhalt nicht Null sein darf, wenn die Gleichungen 10) giltig bleiben sollen, heisst natürlich nichts Anderes, als dass die drei Punkte, welche die Näherungswerthe als Coordinaten haben, nicht in gerader Linie liegen dürfen.

Die Nothwendigkeit dieser Bedingung ist aber geometrisch klar; denn fallen die drei Punkte in eine Gerade, so fallen die beiden Ebenen, durch deren Horizontalspuren ein neuer Punkt bestimmt werden soll, zusammen, der Schnitt der Horizontalspuren wird unbestimmt u. s. w.

Die Bedingung $S \gtrless 0$ lässt sich nun auf folgende Form bringen [die vor 9) den Vorzug bequemerer Rechnung hat].

Zunächst ist

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$$
$$= (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1),$$

und wenn dies von Null verschieden sein soll, so muss

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) \gtrless (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

oder

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \gtrless \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} \tag{11}$$

sein. In dieser Form hätte sich die in Rede stehende Bedingung natürlich auch leicht direct auf geometrischem Wege finden lassen.

Die Formeln 10) sind sehr unbequem, besonders wenn die Näherungswerthe grosse Zahlen sind, die eine logarithmische Rechnung erfordern.

Durch die folgenden Transformationen lassen sich nun Gleichungen erzielen, die nur sehr kleine Zahlen enthalten (also directe Ausführung der Multiplicationen oder Anwendung des Rechenstabes u. dergl. gestatten), compendiöser sind, als die Gleichungen 10) und bei kleinerem Zahlenaufwand die gleiche Genauigkeit liefern.

Sind x_1, x_2, x_3 die drei wenig von einander verschiedenen Näherungswerthe von x, so kann man stets eine Grösse m (einen gewissen Mittelwerth von x) so annehmen, dass die aus den Gleichungen

12) $$x_1 = m + \xi_1, \quad x_2 = m + \xi_2, \quad x_3 = m + \xi_3$$

resultirenden Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 sehr klein sind.

Man kann nun offenbar die Gleichungen 10) auch in der Form schreiben:

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}}, \quad y_4 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}}.$$

Setzt man zur Abkürzung für die Determinante im Nenner $\varDelta$, und für $x_1\, x_2\, x_3$ die Werthe aus 12), so kommt

$$x_4 \cdot \varDelta = \begin{vmatrix} m+\xi_1 & m+\xi_2 & m+\xi_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

oder, da der Factor von m die Determinante $\varDelta$ ist:

13) $$x_4 = m + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\varDelta}.$$

Ganz analog erhält man mit

14) $$y_1 = n + \eta_1, \quad y_2 = n + \eta_2, \quad \eta_3 = n + \eta_3:$$

15) $$y_4 = n + \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\varDelta}.$$

Hier ist wieder zu bemerken, dass die Gleichungen 13) und 15) nur so lange gelten, als die Bedingung erfüllt ist:

16) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \gtrless 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_1 - \eta_1} \gtrless \frac{\xi_3 - \xi_2}{\eta_3 - \eta_2}.$$

Diese Bedingung ergiebt sich nämlich sofort aus der früheren 11), wenn man darin für die Näherungswerthe von x und y ihre Werthe aus 12) und 14) einführt.

Jetzt kommen in den Formeln zur Berechnung von x_4 und y_4 die möglicherweise sehr grossen Zahlen x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 nicht mehr vor, sondern nur deren Unterschiede gegen die Mittelwerthe m, resp. n. Die Werthe von z und ζ sind natürlich um so kleiner, je weiter schon die Näherung gediehen ist.

Die obigen Formeln sind jedoch noch einer weiteren Vereinfachung fähig; denn es hindert durchaus Nichts, einen der Werthe x, resp. y selbst als Mittelwerth anzunehmen. Nähme man gar zwei gleiche Werthe von x, resp. y an, so träte eine noch grössere Reduction der Formeln ein. Es ergiebt sich dies leicht aus dem blossen Anblick der im Folgenden übersichtlich geordneten Regeln. Die Rechnungsweise I dürfte sich besonders eignen, wenn man ein Paar verbesserter Näherungswerthe mit zwei Paaren der ursprünglichen zu einer neuen Rechnung combiniren will, während II vorzuziehen wäre, wenn man nach Berechnung eines Paares genauerer Werthe zwei Paare naheliegender willkürlich annehmen und damit die Rechnung wiederholen will.

I.

Gegeben (oder angenommen)

$$x_1, x_2, x_3; \quad y_1, y_2, y_3.$$

Gesucht ein Paar Werthe $x_4 \quad y_4$,

die die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

mit grösserer Annäherung erfüllen, als die gegebenen Werthe.

Man bestimme zunächst ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 aus

$$x_1 = m + \xi_1, \quad x_2 = m + \xi_2, \quad x_3 = m,$$
$$y_1 = n + \eta_1, \quad y_2 = n + \eta_2, \quad y_3 = n.$$

Dann muss sein

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1} \gtrless \frac{\xi_2}{\eta_2}.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird

$$x_4 = x_3 + \xi_1 \frac{z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2}{\varDelta} + \xi_2 \frac{z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3}{\varDelta},$$

$$y_4 = y_3 + \eta_1 \frac{z_2\zeta_3 - z_3\zeta_2}{\varDelta} + \eta_2 \frac{z_3\zeta_1 - z_1\zeta_3}{\varDelta},$$

wo

$$\varDelta = (z_2 - z_1)(\zeta_3 - \zeta_2) - (\zeta_2 - \zeta_1)(z_3 - z_2)$$

und $\begin{Bmatrix} z_1, & z_2, & z_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{Bmatrix}$ die Beträge, um welche $\begin{Bmatrix} f(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{Bmatrix}$ von Null abweicht, wenn man die Näherungswerthe x_1, y_1; x_2, y_2 und x_3, y_3 einsetzt. — Die Bequemlichkeit gleicher Coefficienten von ξ_1 und η_1, sowie ξ_2 und η_2 motivirt die Wahl zusammengehöriger Werthe x, y als Mittelwerthe.

II.

Gegeben (oder angenommen)

$$x_1, \ x_2 = x_3; \quad y_1 = y_2, \ y_3.$$

Gesucht

$$x_4 \qquad y_4.$$

Hier ist die Grundbedingung $S \gtrless 0$ immer erfüllt. Man bestimme ξ_1 und η_3 aus

$$x_1 = m + \xi_1, \quad x_2 = m, \quad x_3 = m,$$
$$y_1 = n, \quad y_2 = n, \quad y_3 = n + \eta_3.$$

Dann wird

$$x_4 = x_3 + \xi_1 \frac{z_2 \zeta_3 - z_3 \zeta_2}{\Delta},$$

$$y_4 = y_2 + \eta_3 \frac{z_1 \zeta_2 - z_2 \zeta_1}{\Delta},$$

wo Δ, z und ζ dieselbe Bedeutung haben, wie früher.

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich direct geometrisch deuten. Sie stellen gewissermassen die auf den Raum übertragene *Regula falsi* in einfachster Form dar.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber die Integration der vollständigen Differentialgleichung $Zdz + Ydy + Xdx = 0$.

Ich nehme an, die Coefficienten der Gleichung $Zdz + Ydy + Xdx = 0$ erfüllen diejenige Bedingung, der zufolge das Integral eine Function der Veränderlichen zyx ist. Diese Gleichung ist schon von Euler integrirt worden. In der neueren Zeit sind noch andere Integrationsverfahren aufgestellt worden, welche neben dem Euler'schen insofern Berechtigung haben, als dieselben gewisse Eigenthümlichkeiten aufweisen, welche dem Euler'schen Verfahren fremd sind. Ich erwähne die Methoden der Herren Natani und P. du Bois-Reymond. Das Verhältniss dieser Methoden zu der Euler'schen giebt Anlass zu weiteren Erörterungen. Ich werde nachstehend einige Rücksichten hervorheben, von welchen mir nicht bekannt ist, dass sie anderswo in Erwägung gebracht seien.

§ 1. Die Integration der vollständigen Differentialgleichung $Zdz + Ydy + Xdx = 0$ nach Euler.

Das Integral der vollständigen Differentialgleichung sei dargestellt durch die Gleichung $\varphi(zyx) = c$. Die Function φ muss so bestimmt werden, dass sie gleichzeitig den beiden Differentialgleichungen

$$\text{a)} \qquad Z\frac{d\varphi}{dy} - Y\frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad Z\frac{d\varphi}{dx} - X\frac{d\varphi}{dz} = 0$$

genügt.

Man integrire die Gleichung

$$\text{1)} \qquad Zdz + Ydy = 0,$$

in welcher x als beständige Grösse gedacht wird. Das Integral sei $\alpha = a$, wo α eine bestimmte Function der Veränderlichen zyx, und a eine willkürliche Beständige ist. Man macht die erste der Gleichungen a) zu einer identischen, indem man $\varphi = \alpha$ setzt. Auch der Werth $\varphi = x$ genügt dieser Gleichung, und man erhält deren allgemeines Integral, indem man φ einer willkürlichen Function von α und x gleichsetzt.

Es soll nun φ als Function von α und x auch der andern Gleichung a) genügen. Wollte man eine Function von zyx bestimmen, welche der zweiten Gleichung a) Genüge leistet, so würde man die Gleichung

$$2)\qquad Z\,dz + X\,dx = 0$$

integriren, in welcher y als beständige Grösse aufgefasst wird. Nun aber setzt man die neue Veränderliche α an die Stelle von z in die zweite Gleichung a) ein. Dieselbe geht über in

$$Z\frac{d\varphi}{dx} + \left(Z\frac{d\alpha}{dx} - X\frac{d\alpha}{dz}\right)\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass die vollständige Differentialgleichung ein Integral $\varphi(zyx) = c$ habe, gestalten sich die Coefficienten der vorliegenden Gleichung als Function von α und x, da nämlich durch die Elimination von z mittels α auch die Veränderliche y hinausgebracht wird. Man integrire die Gleichung

$$2')\qquad Z\,d\alpha - \left(Z\frac{d\alpha}{dx} - X\frac{d\alpha}{dz}\right)dx = 0,$$

und das Integral der vollständigen Differentialgleichung liegt in der Form $\varphi(\alpha x) = c$ vor.

Dies ist das gewöhnliche, schon von Euler aufgestellte Verfahren zur Integration der vollständigen Differentialgleichung.

§ 2. Die Methode des Herrn Natani.

In dem 58. Bande des Crelle'schen Journals S. 304 hat Herr Natani ein anderes Verfahren zur Integration der vollständigen Differentialgleichung $Zdz + Ydy + Xdx = 0$ mitgetheilt. Setzt man

$$Z = f(zyx),\quad Y = f_1(zyx),\quad X = f_2(zyx),$$

so schreibt sich die Gleichung 1)

$$f(zyx)\,dz + f_1(zyx)\,dy = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung sei $\psi(zyx) = \alpha$. Anstatt nun das Integral der vollständigen Differentialgleichung als Function von $\alpha = \psi(zyx)$ und x darzustellen, denkt sich Herr Natani dasselbe nach α aufgelöst und giebt demselben demzufolge die Form

$$\psi(zyx) = \varphi(xc),$$

wo φ eine noch unbestimmte Function ist. Setzt man $y = 0$, so bestimmt sich aus dem Integrale der vollständigen Differentialgleichung die Veränderliche z als Function von x. Indem man diese Function von x mit z_1 bezeichnet, erhält man die Gleichung

$$\psi(z_1 0 x) = \varphi(xc).$$

Es soll dieselbe zur Bestimmung von φ verwendet werden. Das Integral der vollständigen Differentialgleichung ist daher

$$\psi(zyx) = \psi(z_1 0 x).$$

Man setze $y=0$ in die Gleichung

$$2)\qquad f(zyx)\,dz+f_2(zyx)\,dx=0$$

ein, und man führt dieselbe über in

$$2')\qquad f(z_1 0 x)\,dz_1+f_2(z_1 0 x)\,dx=0.$$

Das Integral $\psi_1(z_1 x)=c$ ist diejenige Gleichung, durch welche die Veränderliche z_1 als Function von x bestimmt ist.

Ich habe die Natani'sche Methode hauptsächlich deshalb hier mitgetheilt, weil dieselbe der dritten Methode, von welcher in dem folgenden Paragraphen die Rede sein soll, zur Grundlage dient. Was deren Verhältniss zur Euler'schen Methode betrifft, so liegt der Unterschied in der Darstellungsweise der Gleichung 2'). Wenn $\alpha=a$ das Integral der Gleichung 1) ist, so gestaltet sich das vollständige Integral als Function von α und x. Auf Grund dieser Transformation wird nach der Euler'schen Methode die Gleichung 2) in die Gleichung 2') übergeführt. Der Natani-schen Methode zufolge setzt man $y=0$ in die Gleichung 2) ein, um aus derselben die Gleichung 2') herzuleiten. Als ein Vorzug der letzteren Methode wird der Umstand angesehen, dass man die Gleichung 2') integriren kann, ohne vorher die Integration der Gleichung 1) ausgeführt zu haben.

Bei der Vergleichung der beiden Methoden darf indessen eine Rücksicht nicht unerwähnt bleiben, welche Veranlassung sein kann, in der Natani'schen Methode die Gleichung 2') einer Transformation zu unterwerfen. Es ist durch die Euler'sche Methode erwiesen, dass das Integral der Gleichung 2) die Form $\varphi(\alpha x)=c$ hat, wenn $\alpha=a$ das Integral der Gleichung 1) ist. Daraus folgt, dass in der Natani'schen Methode das Integral der Gleichung

$$2')\qquad f(z_1 0 x)\,dz_1+f_2(z_1 0 x)\,dx=0$$

in der Form $\varphi(\alpha_0 x)=c$ geschrieben werden kann. Es ist $\alpha_0=\psi(z_1 0 x)$, wenn $\alpha=\psi(zyx)$ gesetzt wird. Ich fasse den Fall ins Auge, dass die Grösse $\psi(z_1 0 x)$ eine nicht ganz einfache Function von z_1 und x ist. Unzweifelhaft wird in diesem Falle eine Vereinfachung der Gleichung 2') erzielt, wenn man anstatt z_1 die neue Veränderliche α_0 einführt. Die in solcher Weise transformirte Gleichung 2') ist identisch mit der Gleichung 2') der Euler'schen Methode, nachdem man dort α_0 an die Stelle von α gesetzt hat. Der Natani'schen Methode zufolge schreibt sich dann das Integral der vollständigen Differentialgleichung in der Form $\alpha=\alpha_0$, wo α_0 bestimmt ist durch die Gleichung $\varphi(\alpha_0 x)=c$. Meine Absicht war zu zeigen, dass diese Methode in die Euler'sche übergeht, sobald man veranlasst ist, von der Function $\alpha_0=\psi(z_1 0 x)$, welche aus dem Integrale der Gleichung 1) hergeleitet ist, die angegebene Verwendung zu machen.

§ 3. Die Methode des Herrn P. du Bois-Reymond.

Die in § 2 auseinandergesetzte Methode hat ein merkwürdiges Resultat geliefert. Man hat die Integration der vollständigen Differentialgleichung mit drei Veränderlichen auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen zurückgeführt. Der Natani'schen Methode zufolge schreibt man das Integral der vollständigen Differentialgleichung in der Form

$$\psi(zyx) = \psi(z_1\, 0\, x),$$

wo z_1 zu eliminiren ist mittels der Gleichung $\psi_1(z_1 x) = c$. Die letztere ist das Integral der Gleichung

$$2') \qquad f(z_1\, 0\, x)\, dz_1 + f_2(z_1\, 0\, x)\, dx = 0.$$

Es kann nun der Fall eintreten, dass der Ausdruck $f_2(z_1\, 0\, x)$ verschwindet. Aus der Gleichung 2') folgt dann $z_1 = c$, und das Integral der vollständigen Differentialgleichung ist in diesem Falle

$$\psi(zyx) = \psi(c\, 0\, x).$$

Zur Bestimmung dieses Integrals bedarf es nur der einen Gleichung

$$1) \qquad f(zyx)\, dz + f_1(zyx)\, dy = 0.$$

Der hier vorgesehene Fall, dass die Gleichung $\psi_1(z_1 x) = c$ in die einfachere $z_1 = c$ übergeht, beruht auf einer Eigenthümlichkeit der vollständigen Differentialgleichung, welche zwar nicht immer von vornherein gegeben ist, aber durch eine einfache Transformation jedenfalls hergestellt wird. In dem 70. Bande des Crelle'schen Journals S. 307 führt Herr P. du Bois-Reymond, um die vollständige Differentialgleichung mit drei Veränderlichen auf eine einzige Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen zurückzuführen, anstatt x die neue Veränderliche $u = \frac{x}{y}$ ein. Die vollständige Differentialgleichung geht über in

$$f dz + (f_1 + u f_2)\, dy + y f_2\, du = 0,$$

und der Augenschein lehrt, dass die Gleichung

$$2) \qquad f dz + y f_2\, du = 0,$$

wenn $y = 0$ gesetzt wird, übergeht in $dz_1 = 0$. Deren Integral ist $z_1 = c$, und man bedarf, um das Integral der vollständigen Differentialgleichung zu bestimmen, im Uebrigen nur der einen Gleichung

$$1') \qquad f dz + (f_1 + u f_2)\, dy = 0.$$

Freilich ist, um die von Herrn du Bois-Reymond gegebene Regel aufrechthalten zu können, die Voraussetzung gemacht, dass der Ausdruck $f_2 : f$, nachdem man in denselben $x = uy$ und alsdann $y = 0$ gesetzt hat, nicht den Werth ∞ annehme. Nur unter dieser Voraussetzung folgt $z_1 = c$ aus 2'). Wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, so vervollständigt Herr du Bois-Reymond seine Regel in der Weise, dass er anstatt x die neue Veränderliche $u = \frac{x - x_0}{y - y_0}$ einführt. Die vollständige Differentialgleichung geht dann über in

$$f dz + (f_1 + u f_2)\, dy + (y - y_0) f_2\, du = 0,$$

und es steht nun Nichts im Wege, die Beständigen y_0 und x_0 so zu wählen, dass der Ausdruck $f_2:f$, nachdem man $x=x_0+u(y-y_0)$ und alsdann $y=y_0$ gesetzt hat, einen endlichen Werth behält.

§ 4. Ist die Auffindung des Integrals durch die Methode des Herrn P. du Bois-Reymond gefördert?

Wenn die beiden Differentialgleichungen

$$1)\ 2)\qquad f\,dz+f_1\,dy=0,\quad f\,dz+f_2\,dx=0$$

gegeben sind, und man aus denselben die Veränderlichen x und y als Function der dritten Veränderlichen z bestimmen soll, so darf man die Aufgabe als wesentlich vereinfacht ansehen, sobald es gelungen ist, diese beiden Differentialgleichungen durch eine einzige Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen zu ersetzen. Denn man hat dann eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung auf eine der ersten Ordnung zurückgeführt. In dem vorliegenden Falle, welcher von der Voraussetzung ausgeht, dass es eine Function der drei Veränderlichen zyx gebe, welche den Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig genügt, muss die Reduction auf eine einzige Differentialgleichung anders beurtheilt werden. Denn hier wird jedesmal diejenige Veränderliche, deren Differential in der zu integrirenden Gleichung nicht vorkommt, als Beständige betrachtet.

Das Integral der vollständigen Differentialgleichung $f\,dz+f_1\,dy+f_2\,dx=0$ genügt auch den beiden Gleichungen

$$1)\ 2)\qquad f\,dz+f_1\,dy=0,\quad f\,dz+f_2\,dx=0.$$

In diesen Gleichungen ist mehr gesagt, als man nöthig hat, um das Integral aufstellen zu können. Anstatt der Gleichung 2) kann man, wie Herr Natani bemerkt hat, eine andere Gleichung gebrauchen, welche weniger allgemein ist, da man an die Stelle der Veränderlichen y, deren Differential in dieser Gleichung nicht vorkommt, irgend einen beständigen Werth y_0 setzen darf. Man darf die Gleichung

$$2')\qquad f(z_1 y_0 x)\,dz_1+f_1(z_1 y_0 x)\,dx=0$$

an deren Stelle setzen. Es ist schon in § 2 gezeigt worden, dass die Gleichungen 1) und 2') ausreichend sind, um das Integral der vollständigen Differentialgleichung zu bestimmen.

Wollte man vermittelst der Gleichungen 1) und 2') die Gleichung 2) wiederherstellen, so wäre dies erst dann möglich, nachdem man das Integral der vollständigen Differentialgleichung aufgestellt hätte. Selbstverständlich kann man, wenn das Integral vorliegt, durch eine partielle Differentiation die Gleichung 2) wiederfinden. Man ist zu dem Schlusse berechtigt, dass die Gleichungen 1) und 2) über gewisse Eigenschaften des Integrals der vollständigen Differentialgleichung im Voraus einen Aufschluss geben, welchen die Gleichungen 1) und 2'), so lange deren Integral noch unbekannt ist, nicht geben können. Es wird eine andere Eigenschaft des Integrals sein,

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

durch welche die Integration vermittelt wird, wenn man der Integration eine Transformation der Veränderlichen vorausgehen lässt.

Herr P. du Bois-Reymond bedient sich der Transformation

$$y-y_0=u(x-x_0),$$

worin die Beständigen y_0 und x_0 in geeigneter Weise bestimmt werden. Es ergeben sich die Gleichungen

$$1) \qquad f\,dz+(f+uf_2)\,dy=0,$$

$$2) \qquad f\,dz+(y-y_0)f_2\,du=0.$$

Setzt man $y=y_0$ in die Gleichung 2) ein, so hat man die Gleichung 2'), deren Integral $z_1=c$ ist. Das Integral der vollständigen Differentialgleichung hat dann die Eigenschaft, dass die Veränderliche u daraus verschwindet, wenn $y=y_0$ gesetzt wird. Das Integral hat jedenfalls die Form

$$(y-y_0)\,F(zyu)+f(zy)=c,$$

deren erstes Glied für den Fall $y=y_0$ verschwindet. Zu dessen Herleitung bedarf es nur der Gleichung 1).

Wenn man die erwähnte Forderung, dass die eine Veränderliche aus dem Integrale der vollständigen Differentialgleichung verschwinde, sobald die zweite Veränderliche einen beständigen Werth erhält, an dasselbe nicht stellt, so kann leicht der Fall eintreten, dass das Integral der Gleichung 1) einfacher ist, als das Integral der vollständigen Differentialgleichung, da sich das erstere als ein Bestandtheil des andern darstellt. Dies ist unzweifelhaft eine Erleichterung der Integrationsaufgabe. Man muss auch die Gleichung 2) integriren; aber es ist gerade diese Verwerthung der Gleichungen 1) und 2), was im Allgemeinen der Euler'schen Integrationsmethode den Vorzug sichert, weil dann die Integrationsschwierigkeiten in zwei einfachere Aufgaben aufgelöst sind.

Mannheim. A. Weiler.

II. Ueber die Integration des vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen von linearer Form.

Es soll die Function φ bestimmt werden, welche den partiellen Differentialgleichungen

$$1) \qquad A_1\frac{d\varphi}{dx_1}+A_2\frac{d\varphi}{dx_2}+A_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\ldots+A_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}}=0,$$

$$2) \qquad B_1\frac{d\varphi}{dx_1}+B_2\frac{d\varphi}{dx_2}+B_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\ldots+B_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}}=0$$

Genüge leistet. Bekanntlich giebt es $n+1$ verschiedene Functionen der Veränderlichen $x_1x_2x_3\ldots x_{n+2}$, welche an der Stelle von φ der Gleichung 1) genügen. Bezeichnet man dieselben mit $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n+1}$, so erhält man die allgemeine Lösung der Gleichung 1), indem man φ einer willkürlichen

Function von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n+1}$ gleichsetzt. Diese Function soll nun so bestimmt werden, dass auch die Gleichung 2) befriedigt ist. Man betrachte deshalb in der Gleichung 2) die Grösse φ nicht mehr als Function von $x_1 x_2 x_3 \dots x_{n+2}$, sondern als Function von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n+1}$. Durch die Einführung der neuen Veränderlichen entsteht die Gleichung

$$3)\quad B(\alpha_1)\frac{d\varphi}{d\alpha_1} + B(\alpha_2)\frac{d\varphi}{d\alpha_2} + B(\alpha_3)\frac{d\varphi}{d\alpha_3} + \dots + B(\alpha_{n+1})\frac{d\varphi}{d\alpha_{n+1}} = 0,$$

worin man abkürzend gesetzt hat

$$B(\alpha_i) = B_1\frac{d\alpha_i}{dx_1} + B_2\frac{d\alpha_i}{dx_2} + B_3\frac{d\alpha_i}{dx_3} + \dots + B_{n+2}\frac{d\alpha_i}{dx_{n+2}}.$$

Die Lösungen der Gleichung 3) sind zugleich die den Gleichungen 1) und 2) gemeinsamen Lösungen.

Das System der Gleichungen 1) und 2) hat höchstens n verschiedene Lösungen. Bezeichnet man dieselben mit $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_n$, so erhält man die allgemeine Lösung des Systems, indem man φ einer willkürlichen Function von $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_n$ gleichsetzt. In dem Folgenden gehe ich von der Voraussetzung aus, dass das zu integrirende System n verschiedene Lösungen habe, und werde ich dasselbe in diesem Falle ein vollständiges System nennen. Das vollständige System zeigt gewisse Eigenthümlichkeiten, und es sind verschiedene Methoden aufgestellt worden, dieselben bei der Integration des Systems zu verwerthen. Meine Absicht ist, eine kurze Darlegung dieser Methoden zu geben, und deren Verhältniss zu einander einer Beurtheilung zu unterwerfen.

§ 1. Jacobi's Methode zur Integration des vollständigen Systems.

Man schreibe die partiellen Differentialgleichungen

$$1)\quad A_1\frac{d\varphi}{dx_1} + A_2\frac{d\varphi}{dx_2} + A_3\frac{d\varphi}{dx_3} + \dots + A_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0,$$

$$2)\quad B_1\frac{d\varphi}{dx_1} + B_2\frac{d\varphi}{dx_2} + B_3\frac{d\varphi}{dx_3} + \dots + B_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0$$

abkürzend $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$. Unter $A[B(\varphi)]$ ist dann derjenige Ausdruck zu verstehen, welcher entsteht, wenn man in $A(\varphi)$ an die Stelle von φ die Grösse $B(\varphi)$ setzt, und unter $B[A(\varphi)]$ derjenige Ausdruck, welcher entsteht, wenn man in $B(\varphi)$ anstatt φ die Grösse $A(\varphi)$ setzt. In seinen Vorlesungen über Dynamik, S. 258, hat Jacobi gezeigt, dass die Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ ein vollständiges System bilden, wenn die identische Gleichung

$$A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = 0$$

besteht. Die Differentialquotienten der zweiten Ordnung von φ heben sich in derselben identisch auf. Es bleiben nur die Differentialquotienten der ersten Ordnung von φ übrig; und es soll nun der Coefficient von $\frac{d\varphi}{dx_i}$, wo

i jede der Zahlen zwischen 1 und $n+2$ ist, identisch gleich Null sein. Aus dieser Forderung ergeben sich $n+2$ Bedingungsgleichungen

$$A(B_i)-B(A_i)=0,$$

welche zwischen den Coefficienten der Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ bestehen sollen.

Die Richtigkeit der Jacobi'schen Aufstellung erweist sich leicht. Es sei $\varphi=\alpha_i$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$. Setzt man $\varphi=\alpha_i$ in die Gleichung $A[B(\varphi)]-B[A(\varphi)]=0$ ein, so geht dieselbe wegen $A(\alpha_i)=0$ über in $A[B(\alpha_i)]=0$. Wenn also $\varphi=\alpha_i$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$ ist, so ist auch $\varphi=B(\alpha_i)$ eine Lösung. Da man dann alle Coefficienten der Gleichung

$$3)\quad B(\alpha_1)\frac{d\varphi}{d\alpha_1}+B(\alpha_2)\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+B(\alpha_3)\frac{d\varphi}{d\alpha_3}+\ldots+B(\alpha_{n+1})\frac{d\varphi}{d\alpha_{n+1}}=0$$

als Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ anzusehen hat, so versteht es sich, dass es n verschiedene Functionen von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n+1}$ giebt, welche der Gleichung 3) an Stelle von φ genügen, dass also die Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ein vollständiges System bilden.

Aus dem Vorstehenden folgt auch, dass man, um die Gleichung 3) aufstellen zu können, nur eine einzige Lösung der Gleichung $A(\varphi)$ durch Integration zu bestimmen braucht. Denn wenn eine Lösung $\varphi=\alpha_1$ bekannt ist, so findet man die übrigen Lösungen $\varphi=\alpha_2$, $\varphi=\alpha_3\ldots\varphi=\alpha_{n+1}$ der Gleichung $A(\varphi)=0$ durch Differentiation gegebener Functionen. Man erhält dieselben der Reihe nach in der Form

$$\alpha_2=B(\alpha_1),\ \alpha_3=B(\alpha_2)\ldots\alpha_{n+1}=B(\alpha_n).$$

Die Gleichung $A(\varphi)=0$ hat im Ganzen $n+1$ verschiedene Lösungen. Es folgt daraus, dass der Ausdruck $B(\alpha_{n+1})$ nicht eine neue Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$ sein kann, sondern sich als Function der schon bekannten Lösungen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n+1}$ darstellt. In der Regel wird nicht erst der Coefficient $B(\alpha_{n+1})$, sondern schon irgend einer der vorausgehenden Coefficienten der Gleichung 3), also $B(\alpha_{i+1})$ als eine Function der schon bekannten Lösungen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{i+1}$ vorliegen. Die noch fehlenden Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ sind aber entbehrlich, wenn es sich darum handelt, eine Lösung des vollständigen Systems aufzustellen. Denn die Gleichung

$$3)\quad B(\alpha_1)\frac{d\varphi}{d\alpha_1}+B(\alpha_2)\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+B(\alpha_3)\frac{d\varphi}{d\alpha_3}+\ldots+B(\alpha_{i+1})\frac{d\varphi}{d\alpha_{i+1}}=0$$

hat i verschiedene Lösungen, von denen jede zugleich eine Lösung des vollständigen Systems ist.

Für den Fall, dass sich schon $B(\alpha_1)$ als eine Function von α_1 darstellt, ist die Kenntniss der einen Lösung $\varphi=\alpha_1$ nicht mehr ausreichend zur Herleitung der übrigen Lösungen; denn die Gleichung 3) ist in diesem Falle eingliedrig, und giebt in solcher Gestalt nicht mehr ein Integral des Systems.

Man ist dann allerdings genöthigt, eine zweite Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$ durch Integration zu bestimmen.

In dem Vorstehenden ist gezeigt worden, dass die Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ein vollständiges System bilden, wenn die identische Gleichung $A[B(\varphi)]-B[A(\varphi)]=0$ besteht. Nicht aber kann man behaupten, dass umgekehrt diese Gleichung identisch bestehe, wenn die Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ein vollständiges System bilden. Denn geht man von solchen Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ aus, welche die geforderte Bedingung erfüllen, und giebt man denselben veränderliche Factoren, oder schreibt man die Gleichungen $K(\varphi)=0$ und $L(\varphi)=0$, indem man lineare Functionen der vorliegenden Gleichungen bildet, so hat man jedesmal wieder ein vollständiges System. Man dürfte aber nicht annehmen, dass die Bedingungsgleichung $K[L(\varphi)]-L[K(\varphi)]=0$ Bestand habe. Es ist vielmehr leicht zu sehen, dass sich in diesem Falle die linke Seite der Bedingungsgleichung als eine lineare Function der Ausdrücke $K(\varphi)$ und $L(\varphi)$ darstellen wird.

Das vollständige System partieller Differentialgleichungen ist von Herrn Clebsch ein Jacobi'sches genannt worden, wenn dasselbe jene Bedingungsgleichung erfüllt. Für diesen Fall hat Jacobi das vollständige System integrirt. Herr Clebsch hat gezeigt (vergl. Bd. 65 des Crelleschen Journals, S. 259), wie man das vollständige System der Gleichungen $K(\varphi)=0$ und $L(\varphi)=0$ in ein Jacobi'sches verwandeln kann. Um nach der Regel des Herrn Clebsch zu verfahren, bestimme man die Werthe $A(\varphi)$ und $B(\varphi)$ aus den Gleichungen

$$K(\varphi)=K(\varphi_\beta)\,A(\varphi)+K(\varphi_\alpha)\,B(\varphi),$$
$$L(\varphi)=L(\varphi_\beta)\,A(\varphi)+L(\varphi_\alpha)\,B(\varphi),$$

wo unter φ_α und φ_β zwei beliebige Functionen von $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n+2}$ zu verstehen sind. Die Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ erfüllen die Bedingungsgleichung $A[B(\varphi)]-B[A(\varphi)]=0$, und bilden daher ein Jacobisches System. Durch die Auflösung der obigen Gleichungen erhält man

$$A(\varphi)=\frac{L(\varphi_\alpha)K(\varphi)-K(\varphi_\alpha)L(\varphi)}{L(\varphi_\alpha)K(\varphi_\beta)-K(\varphi_\alpha)L(\varphi_\beta)},$$
$$B(\varphi)=\frac{L(\varphi_\beta)K(\varphi)-K(\varphi_\beta)L(\varphi)}{L(\varphi_\beta)K(\varphi_\alpha)-K(\varphi_\beta)L(\varphi_\alpha)},$$

und man ersieht daraus, dass $\varphi=\varphi_\alpha$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$ und $\varphi=\varphi_\beta$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$ ist, dass also für jede Gleichung dieses Jacobi'schen Systems zugleich eine Lösung gegeben ist.

Setzt man $\varphi_\alpha=x_1$ und $\varphi_\beta=x_2$, so hat man die einfacheren Werthe

$$A(\varphi)=\frac{L_1 K(\varphi)-K_1 L(\varphi)}{L_1 K_2-K_1 L_2},$$
$$B(\varphi)=\frac{L_2 K(\varphi)-K_2 L(\varphi)}{L_2 K_1-K_2 L_1},$$

woraus folgt, dass das vollständige System der Gleichungen $K(\varphi)=0$ und $L(\varphi)=0$ in ein Jacobi'sches System übergeht, wenn man das eine Mal $\frac{d\varphi}{dx_1}$ eliminirt, und die neue Gleichung durch den Coefficienten von $\frac{d\varphi}{dx_2}$ theilt, das andere Mal $\frac{d\varphi}{dx_2}$ eliminirt, und die neue Gleichung durch den Coefficienten von $\frac{d\varphi}{dx_1}$ theilt.

§ 2. Eine andere Methode zur Integration des vollständigen Systems.

Die Integration des vollständigen Systems

1) $$A_1\frac{d\varphi}{dx_1}+A_2\frac{d\varphi}{dx_2}+A_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\dots+A_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}}=0,$$

2) $$B_1\frac{d\varphi}{dx_1}+B_2\frac{d\varphi}{dx_2}+B_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\dots+B_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}}=0$$

lässt sich auf eine andere Betrachtung gründen, welche unabhängig ist von der Kenntniss der im vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungsgleichung. Man führe die $n+1$ Lösungen $\varphi=\alpha_1,\ \varphi=\alpha_2\dots\varphi=\alpha_{n+1}$ der Gleichung $A(\varphi)=0$ als neue Veränderliche in die Gleichung $B(\varphi)=0$ ein. Man erhält, nachdem man die transformirte Gleichung durch $B(\alpha_1)$ getheilt hat, die Gleichung

3) $$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}+\frac{B(\alpha_2)}{B(\alpha_1)}\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+\frac{B(\alpha_3)}{B(\alpha_1)}\frac{d\varphi}{d\alpha_3}+\dots+\frac{B(\alpha_{n+1})}{B(\alpha_1)}\frac{d\varphi}{d\alpha_{n+1}}=0.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung liegen zunächst als Function der $n+2$ Veränderlichen $x_1x_2x_3\dots x_{n+2}$ vor. Bringt man die neuen Veränderlichen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n+1}$ an die Stelle von $x_2x_3x_4\dots x_{n+2}$, so wird auch x_1 aus den Coefficienten hinausfallen.

Dieser Satz folgt ohne Weiteres aus der Annahme, dass die beiden Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ein vollständiges System bilden, dass es also n verschiedene Functionen von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n+1}$ giebt, welche an der Stelle von φ der Gleichung 3) genügen. Wollte man annehmen, dass die Veränderliche x_1 neben den neuen Veränderlichen $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n+1}$ in den Coefficienten der Gleichung 3) übrig bliebe, so würde durch die Differentiation dieser Gleichung nach x_1 eine zweite partielle Differentialgleichung entstehen, welcher dieselben n Lösungen entsprechen, was unmöglich ist. Nach der Voraussetzung ist φ als unabhängig von x_1 zu betrachten. Die Differentiation der Gleichung 3) nach x_1 erstreckt sich deshalb nur über die Coefficienten, und man erhält

$$\frac{d\frac{B(\alpha_2)}{B(\alpha_1)}}{dx_1}\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+\frac{d\frac{B(\alpha_3)}{B(\alpha_1)}}{dx_1}\frac{d\varphi}{d\alpha_3}+\dots+\frac{d\frac{B(\alpha_{n+1})}{B(\alpha_1)}}{dx_1}\frac{d\varphi}{d\alpha_{n+1}}=0,$$

eine Gleichung, welche wegen des fehlenden $\frac{d\varphi}{d\alpha_1}$ mit der Gleichung 3) nicht identisch sein kann. Die Coefficienten der vorliegenden Gleichung müssen einzeln genommen gleich Null sein, und es folgt daraus die Richtigkeit der obigen Behauptung, dass die Coefficienten der Gleichung 3) von x_1 unabhängig sind.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt auch, dass man aus zwei Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ noch weitere Lösungen dieser Gleichung durch Differentiation herleiten kann. Wenn $\varphi=\alpha_1$ und $\varphi=\alpha_2$ zwei Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ sind, so ergeben sich weitere Lösungen $\varphi=\alpha_3$, $\varphi=\alpha_4\ldots$, indem man

$$\alpha_3=\frac{B(\alpha_2)}{B(\alpha_1)},\quad \alpha_4=\frac{B(\alpha_3)}{B(\alpha_1)}\ldots$$

setzt. Man kann auch die Rechnung so einrichten, dass man nur eine Lösung durch Integration zu bestimmen braucht, da man alsdann die übrigen Lösungen der Gleichung durch Differentiation aus dieser Lösung ableiten kann. Man eliminire $\frac{d\varphi}{dx_1}$ aus $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$. Es entsteht die neue Gleichung

$$C_2\frac{d\varphi}{dx_2}+C_3\frac{d\varphi}{dx_3}+C_4\frac{d\varphi}{dx_4}+\ldots+C_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}}=0,$$

oder abkürzend $C(\varphi)=0$, eine lineare Verbindung von $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$, welche die Lösung $\varphi=x_1$ hat. Durch Integration bestimme man die Lösung $\varphi=\alpha_1$, und man erhält die übrigen Lösungen $\varphi=\alpha_2$, $\varphi=\alpha_3\ldots$ $\varphi=\alpha_i$, indem man

$$\alpha_2=\frac{B(\alpha_1)}{B(x_1)},\quad \alpha_3=\frac{B(\alpha_2)}{B(x_1)}\ldots \alpha_i=\frac{B(\alpha_{i-1})}{B(x_1)}$$

setzt. Die Schlussgleichung des Systems, oder diejenige Gleichung, aus welcher das Integral des vollständigen Systems bestimmt wird, ist dann

$$4)\qquad \frac{d\varphi}{dx_1}+\frac{B(\alpha_1)}{B(x_1)}\frac{d\varphi}{d\alpha_1}+\frac{B(\alpha_2)}{B(x_1)}\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+\ldots+\frac{B(\alpha_i)}{B(x_1)}\frac{d\varphi}{d\alpha_i}=0.$$

Man kann übrigens die lineare Verbindung von $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ in solcher Weise herstellen, dass nicht $\varphi=x_1$, sondern eine beliebige Function der Veränderlichen $\varphi=\varphi_\alpha$ der neuen Gleichung entspricht. Setzt man

$$C(\varphi)=B(\varphi_\alpha)\,A(\varphi)-A(\varphi_\alpha)\,B(\varphi),$$

so ist in der That $\varphi=\varphi_\alpha$ eine Lösung der Gleichung $C(\varphi)=0$. Wenn eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung bekannt ist, so führt man dieselbe als neue Veränderliche in die Differentialgleichung ein, weil sich dann die Anzahl der Veränderlichen um die Einheit vermindert. Diese Rücksicht ist bei der Aufstellung der Gleichung $C(\varphi)=0$ in Betracht zu nehmen, und es möchte die erstere Annahme, wornach die Lösung $\varphi=x_1$ in die Gleichung $C(\varphi)=0$ aufgenommen wird, vor der andern Annahme aus diesem Grunde den Vorzug haben.

Die hier besprochene Methode zur Integration des vollständigen Systems beruht auf einer andern Grundlage, als die im vorigen Paragraphen dargestellte. Dieselbe bietet der Integration dieselben Vortheile, wie die Jacobi'sche, ohne dass die Gleichungen $B(\varphi)=0$ und $C(\varphi)=0$ ein Jacobi'sches System bilden. Indem Herr Clebsch das vollständige System der Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ auf ein Jacobi'sches zurückführt, setzt er zwei neue Gleichungen an deren Stelle, was sich als überflüssig erweist, da es schon ausreichend ist, nur die eine Gleichung $A(\varphi)=0$ durch die neue Gleichung $C(\varphi)=0$ zu ersetzen. Ich habe diese Methode schon vor elf Jahren veröffentlicht. Der Jahrgang 1863 dieses Journals enthält einen Aufsatz über die Integration partieller Differentialgleichungen, und habe ich dort in den §§ 4 und 5 meine Methode mitgetheilt.

Die Schlussgleichung des vollständigen Systems, deren Aufstellung sich die besprochenen Methoden zur Aufgabe machen, lässt sich leicht in eine Differentialgleichung der i^{ten} Ordnung mit zwei Veränderlichen umwandeln. In der obigen Schlussgleichung 4) ist

$$\alpha_2=\frac{B(\alpha_1)}{B(x_1)},\quad \alpha_3=\frac{B(\alpha_2)}{B(x_1)}\dots$$

und der letzte Coefficient $\frac{B(\alpha_i)}{B(x_1)}$ ist als Function von $x_1\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_i$ zu betrachten. Man schreibt dieselbe deshalb in der Form

$$\frac{d\varphi}{dx_1}+\alpha_2\frac{d\varphi}{d\alpha_1}+\alpha_3\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+\dots+\psi(x_1\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\dots\alpha_i)\frac{d\varphi}{d\alpha_i}=0.$$

Um derselben zu genügen, darf man

$$\alpha_2=\frac{d\alpha_1}{dx_1},\quad \alpha_3=\frac{d\alpha_2}{dx_1}\dots\psi=\frac{d\alpha_i}{dx_1}$$

setzen; denn man findet aus diesen Gleichungen durch die Elimination von $\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_i$ die Differentialgleichung der i^{ten} Ordnung

$$\frac{d^i\alpha_1}{dx_1{}^i}=\psi\left(x_1\,\alpha_1\,\frac{d\alpha_1}{dx_1}\,\frac{d^2\alpha_1}{dx_1{}^2}\dots\frac{d^{i-1}\alpha_1}{dx_1{}^{i-1}}\right).$$

Andererseits hat man, um die i ersten Integrale dieser Gleichung zu bestimmen, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dx_1}+\frac{d\alpha}{dx_1}\,\frac{d\varphi}{d\alpha_1}+\frac{d\alpha_2}{dx_1}\,\frac{d\varphi}{d\alpha_2}+\dots+\frac{d\alpha_i}{dx_1}\,\frac{d\varphi}{d\alpha_i}=0,$$

welche identisch ist mit der obigen Schlussgleichung des vollständigen Systems. Insofern sich ein erstes Integral der Differentialgleichung der i^{ten} Ordnung leichter angeben lässt, als eine Function φ der obigen Schlussgleichung des Systems, mag es gerechtfertigt sein, die Differentialgleichung der i^{ten} Ordnung an die Stelle der andern Gleichung zu setzen.

§ 3. Die Methode des Herrn A. Mayer.

Wenn das Integral der vollständigen Differentialgleichung $Zdz + Ydy + Xdx = 0$ als Function der drei Veränderlichen zyx vorausgesetzt werden darf, so ist die Aufgabe, diese Gleichung zu integriren, als ein besonderer Fall der oben gelösten Aufgabe zu betrachten. Denn man kann diese Gleichung durch das vollständige System der Gleichungen

$$Z\frac{d\varphi}{dy} - Y\frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad Z\frac{d\varphi}{dx} - X\frac{d\varphi}{dz} = 0$$

ersetzen, und es handelt sich also um den Fall $n = 1$ der oben gelösten Aufgabe. Herr P. du Bois-Reymond hat gezeigt, wie man eine einzige Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen aufstellen kann, deren Integration das Integral der vollständigen Differentialgleichung giebt. In gleicher Weise kann man zeigen, dass die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung ausreichend ist, wenn das Integral des vollständigen Systems der Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ bestimmt werden soll.

Aus den beiden partiellen Differentialgleichungen eliminire man das eine Mal $\frac{d\varphi}{dx_2}$, das andere Mal $\frac{d\varphi}{dx_1}$. Es ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + A_3\frac{d\varphi}{dx_3} + A_4\frac{d\varphi}{dx_4} + \ldots + A_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_2} + B_3\frac{d\varphi}{dx_3} + B_4\frac{d\varphi}{dx_4} + \ldots + B_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0.$$

An die Stelle von x_2 führe man eine neue Veränderliche u ein, welche sich aus der Gleichung $x_2 - x_2^0 = u(x_1 - x_1^0)$ bestimmt. Man setze also, da x_2^0 und x_1^0 als Beständige gedacht werden sollen:

$$\frac{d\varphi}{dx_2} = \frac{d\varphi}{du}\,\frac{1}{x_1 - x_1^0}, \quad \frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{d\varphi}{du}\,\frac{u}{x_1 - x_1^0}.$$

Die partiellen Differentialgleichungen gehen über in

$$\frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{d\varphi}{du}\,\frac{u}{x_1 - x_1^0} + A_3\frac{d\varphi}{dx_3} + A_4\frac{d\varphi}{dx_4} + \ldots + A_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{du}\,\frac{1}{x_1 - x_1^0} + B_3\frac{d\varphi}{dx_3} + B_4\frac{d\varphi}{dx_4} + \ldots + B_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0.$$

An die Stelle der ersteren bringe man diejenige Gleichung, welche durch die Elimination von $\frac{d\varphi}{du}$ entsteht. Das neue System besteht aus den Gleichungen

1) $$\frac{d\varphi}{dx_1} + (A_3 + uB_3)\frac{d\varphi}{dx_3} + (A_4 + uB_4)\frac{d\varphi}{dx_4} + \ldots + (A_{n+2} + uB_{n+2})\frac{d\varphi}{dx_{n+2}} = 0,$$

$$2)\qquad \frac{d\varphi}{du}+(x_1-x_1^0)\left(B_3\frac{d\varphi}{dx_3}+B_4\frac{d\varphi}{dx_4}+\ldots+B_{n+2}\frac{d\varphi}{dx_{n+2}}\right)=0,$$

welche abgekürzt mit $K(\varphi)=0$ und $L(\varphi)=0$ bezeichnet sein sollen. Ueber die Beständigen x_2^0 und x_1^0 ist in solcher Weise Verfügung getroffen, dass die Coefficienten $B_3 B_4 \ldots B_{n+2}$ endliche Werthe behalten, wenn $x_1=x_1^0$ gesetzt wird. Die Gleichung 2) geht dann für diesen Fall über in $\frac{d\varphi}{du}=0$, und das Integral des vollständigen Systems hat die Eigenschaft, dass es, wenn $x_1=x_1^0$ gesetzt wird, von u unabhängig ist.

Um das Integral des vollständigen Systems der Gleichungen 1) und 2) zu erhalten, verfährt man zunächst ganz nach dem Bisherigen. Man bestimme eine Lösung $\varphi=\varkappa_1$ der Gleichung $K(\varphi)=0$. Wenn diese Lösung für den Fall $x_1=x_1^0$ von u unabhängig ist, so darf dieselbe als eine Lösung des Systems angesehen werden. Im Allgemeinen aber wird eine Lösung der Gleichung 1) nicht auch eine Lösung des Systems sein. Man erhält aus derselben weitere Lösungen $\varphi=\varkappa_2$, $\varphi=\varkappa_3 \ldots \varphi=\varkappa_i$ der Gleichung 1), indem man $\varkappa_2=L(\varkappa_1)$, $\varkappa_3=L(\varkappa_2)\ldots \varkappa_i=L(\varkappa_{i-1})$ setzt. Wenn man die Lösungen der Gleichung 1) als neue Veränderliche in die Gleichung 2) einführt, so ergeben sich durch die Integration der transformirten Gleichung 2) die Lösungen des Systems. In den Mathematischen Annalen Bd. V S. 463 hat Herr A. Mayer gezeigt, wie man die Lösung des Systems ohne weitere Integration unmittelbar aus den Lösungen der Gleichung 1) herleiten kann, wenn man jene Eigenschaft des Integrals zu Hilfe nimmt, der zufolge dasselbe von u unabhängig ist, wenn $x_1=x_1^0$ gesetzt wird.

Es handelt sich hier um eine Lösung der Gleichung 1), welche als Function von $x_1\, u\, x_3\, x_4 \ldots x_{n+2}$ aufgefasst, die Eigenschaft besitzt, von u unabhängig zu sein, wenn $x_1=x_1^0$ gesetzt wird. Diejenigen Lösungen des vollständigen Systems, welche sich durch die Integration der transformirten Gleichung 2) ergeben würden, seien ausgedrückt durch

$$\varphi=\mu_1,\quad \varphi=\mu_2\ \ldots\ \varphi=\mu_i.$$

Da dieselben auf diesem Wege als Function von $u\, \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_i$ gefunden werden, so darf man auch umgekehrt die Lösungen der Gleichung 1) als Function von $u\, \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i$ auffassen. Die den bekannten Lösungen entsprechenden Integrale der Gleichung 1) schreibe man in der Form

$$\varkappa_1=c_1,\quad \varkappa_2=c_2\ \ldots\ \varkappa_i=c_i,$$

wo $c_1 c_2 \ldots c_i$ willkürliche Beständige sind. Setzt man $x_1=x_1^0$, so gehen dieselben über in

$$\varkappa_1^0=c_1,\quad \varkappa_2^0=c_2\ \ldots\ \varkappa_i^0=c_i,$$

und es lassen sich aus denselben höchstens i verschiedene Functionen von $x_3 x_4 \ldots x_{n+2}$, entsprechend jenen Lösungen $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i$ des vollständigen Systems, als Function von u und der Beständigen $c_1 c_2 \ldots c_i$ herleiten. Gesetzt, man habe eine dieser Functionen

$$f(x_3 x_4 \ldots x_{n+2})=\psi(u\, c_1 c_2 \ldots c_i)$$

aufgefunden. An die Stelle der Beständigen $c_1 c_2 \ldots c_i$ setze man jene Lösungen $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_i$, und man hat auf der rechten Seite der vorliegenden Gleichung eine Lösung der Gleichung 1), welche die Eigenschaft besitzt, von u unabhängig zu sein, wenn $x_1 = x_1^0$ gesetzt wird. Denn für diesen Fall geht dieselbe identisch in $f(x_3 x_4 \ldots x_{n+2})$ über. Die verlangte Lösung des vollständigen Systems ist $\varphi = \psi(u\, \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_i)$.

Wenn zwei partielle Differentialgleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ integrirt werden sollen, welche ein vollständiges System bilden, so ist der eine Theil der Integrationsarbeit selbstverständlich als erledigt zu betrachten, sobald die Lösungen der Gleichung $A(\varphi) = 0$ aufgefunden worden sind, da dann nur noch die Integration der Gleichung $B(\varphi) = 0$ auszuführen ist, deren Integral sich als Function jener Lösungen darstellt. Wenn aber die Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ durch jene Gleichung $K(\varphi) = 0$ ersetzt werden, welche allein integrirt zu werden braucht, um das Integral des vollständigen Systems aufstellen zu können, so ist man nicht ohne Weiteres anzunehmen berechtigt, dass damit eine Erleichterung der Integrationsarbeit gegeben sei; denn es ist die Integration einer partiellen Differentialgleichung unter erschwerenden Umständen gefordert. Man gebe dem Integrale des Systems nicht die oben verlangte Eigenschaft, wornach eine Veränderliche aus demselben verschwindet, wenn eine zweite Veränderliche einen passend gewählten beständigen Werth erhält, und man ist zu der Annahme berechtigt, dass es eher gelingen könne, jene beiden Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ nacheinander zu integriren, als die eine Gleichung $K(\varphi) = 0$. Wenn das Integral der Gleichung $K(\varphi) = 0$ einmal aufgefunden ist, so giebt die Methode des Herrn A. Mayer allerdings eine Abkürzung der weiteren Rechnung, weil dann die Integration der zweiten Gleichung $L(\varphi) = 0$ durch eine algebraische Operation ersetzt ist. Aus dem vorher angegebenen Grunde aber kann dieselbe im Allgemeinen nicht jene andere Methode ersetzen, welche verlangt, dass die beiden Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ nacheinander integrirt werden.

Mannheim. A. Weiler.

III. Ueber die Dispersion der Farben in Gasen.

Arago und Biot veröffentlichten im Jahre 1806 in den Memoiren der Pariser Akademie bekanntlich Versuche über die Brechung des Lichtes in Gasen bei verschiedener Dichte und fanden das Gesetz, dass die brechende Kraft der Gase bei verschiedenen Dichtigkeiten diesen proportional und für Licht aller Farben constant sei, dass sich also im Luftprisma keine Dispersion der Farben darbiete. Dulong benutzte dieses Gesetz zur Bestimmung der Brechungsexponenten einer Reihe von Gasen. Er fand in Uebereinstimmung mit jenen beiden Physikern und Delambre den absoluten

Brechungsexponenten für atmosphärische Luft gleich 1,000294 bei der Temperatur 0° und dem Drucke 760 Mm. Der dabei beobachtete gänzliche Mangel an Farbendispersion würde nun voraussetzen, dass in dem Werthe 1,000294, der auch für Wasserdampf gilt, zum Mindesten die fünfte Decimale noch genau sei. Denn setzen wir allgemein die Dichtigkeit der Luft in dem Prisma gleich d und den Brechungsexponenten bei dem Uebergange des Lichtes aus Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit in diese gleich n, den absoluten Brechungsexponenten der Luft von der als 1 angenommenen Dichtigkeit bei mittlerem Drucke gleich n_1, so wird

$$\frac{(n n_1)^2-1}{d}=n_1^2-1\,,\quad n_1=\sqrt{\frac{d-1}{d-n^2}}.$$

Wenn wir nun nach dem Vorgange von Cauchy allgemein

$$n=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10^6\lambda^2}+\frac{\alpha_2}{10^{12}\lambda^4}+\dots$$

setzen, so erhalten wir mit Berücksichtigung des zweiten Gliedes

$$n_1=\sqrt{(d-1):\left[d-\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10^6\lambda^2}\right)^2\right]}$$

und für starke Compressionen bis zum Flüssigwerden des Gases

$$n_1=1+\frac{1}{2d}\left(\alpha_0^2-1+\frac{2\alpha_0\alpha_1}{10^6\lambda^2}\right).$$

Für Wasser ist nun

$$\alpha_0=1,32332\,,\quad \alpha_1=0,003781\,,\quad d=773:0,625=1237,$$

also

$$n_1=1,0003036+\frac{0,00000405}{10^6\lambda^2}.$$

Für die Wellenlänge des rothen Lichtes B, nämlich $\lambda_r=0,0006874$ Mm., ist also $n_r=1,000312$; für die Wellenlänge des violetten Lichtes $\lambda_v=0,0003929$ Mm. ist $n_v=1,000329$. Die Beobachtungen liefern mit einer geringen Abweichung sämmtlich den Werth 1,000294. Die Berechnung giebt für beide Farbengrenzen noch einen Unterschied von 1,7 in der fünften Decimale. Es ist also nicht sehr unwahrscheinlich, dass die Gase bei starker Compression eine Farbendispersion deutlich zu erkennen geben, weil sonst der Coefficient α_1 sich gegen α_0 ändern müsste, was bis jetzt noch nicht erwiesen ist. Dulong giebt indess an, dass sich noch die sechste Decimale bis auf den Fehler einer Einheit genau bestimmen lasse; ob er Licht verschiedener Farbe bei seinen Versuchen angewandt hat, ist unbekannt. Es würde also von grossem Interesse sein, die Brechungsverhältnisse der Gase in der Nähe des flüssigen Aggregatzustandes zu untersuchen, so namentlich die des Schwefeläthers bei 187° C., da, wo der flüssige Aggregatzustand desselben an den Molecularzustand des gasförmigen grenzt Schwefeläther wird sich auch besonders seines grossen absoluten Brechungsexponenten wegen zu dieser Untersuchung eignen. Für Schwefelkohlenstoff stellt sich jene Differenz am grössten heraus. Für diesen ist nämlich

$$n = 1{,}5876 + \frac{0{,}01292}{10^6 \lambda^2} + \frac{0{,}000728}{10^{12} \lambda^4},$$

mithin für Roth $n_r = 1{,}00214$, für Violett $n_v = 1{,}00234$.

Die Dulong'schen Beobachtungen geben den kleineren Werth $n = 1{,}00150$, woraus man geschlossen hat, dass die brechende Kraft einer Substanz im flüssigen Zustande im Allgemeinen grösser sei, als die im luftförmigen. Die Genauigkeit des von Dulong angegebenen Werthes würde allerdings voraussetzen, dass der Raum, in welchem sich der untersuchte Dampf befand, durchaus frei von jeder andern Gasart gewesen sei, namentlich von Luft und Wasserdampf, wodurch der wahre Werth beträchtlich verkleinert werden muss. Es bedarf dieses der Bestätigung durch wiederholte Beobachtungen.

Das Arago'sche Gesetz erstreckt sich mit geringen Abweichungen auch auf die festen Aggregatzustände. Es ist dem Gesetze gemäss

$$d : d_1 = (n^2 - 1) : (n_1^2 - 1),$$

also

$$n_1^2 - 1 = \frac{d_1}{d} (n^2 - 1).$$

Für Wasser gesetzt $d = 1$, $n = 1{,}3360$, so ist für Eis $d_1 = 0{,}905$ und demgemäss $n_1 = 1{,}308$. Die Beobachtungen ergeben $n_1 = 1{,}310$. Für Cassiaöl von 10° C. gesetzt $d = 1$, ferner der Ausdehnungscoefficient gleich dem anderer ätherischer Oele 1,0009 und nach Baden-Powell $n = 1{,}6249$, so ergiebt sich aus obiger Formel für 22,5° C. $n_1 = 1{,}6193$. Die Beobachtungen ergeben für Cassiaöl von 22,5° C. den Werth $n_1 = 1{,}6174$.

Für Wasser von 18,8° C. ist $n = 1{,}3358$ (Fraunhofer) und $d = 1 : 1{,}001396$; ferner ist bei 15,8° C. $d_1 = 1 : 1{,}000869$, also nach Arago's Formel $n_1 = 1{,}3370$. Nach Baden-Powell ist $n = 1{,}3366$.

Baden-Powell hat für die Farbendispersion des Lichtes die Formel

$$n = \alpha_0 \frac{\frac{\pi \varrho}{\lambda}}{\sin \frac{\pi \varrho}{\lambda}}$$

aufgestellt, wobei er den Deductionen Cauchy's folgt. Sie trifft aber in dieser Form nur für wenige Substanzen in erster Annäherung zu und bringt die partielle Dispersion nicht zum Ausdruck, da sie mit der allgemeineren Formel von Cauchy nur in den beiden ersten Gliedern übereinstimmt, die partielle Dispersion aber hauptsächlich von dem dritten und allen folgenden Gliedern abhängig ist. Entwickelt man die obige Function bis zum dritten Gliede, so erhält man

$$n = \alpha_0 \frac{\frac{\pi \varrho}{\lambda}}{\sin \frac{\pi \varrho}{\lambda}} = \alpha_0 + \frac{\pi^2 \varrho^2 \alpha_0}{6 . 10^6 \lambda^2} + \frac{7 \pi^4 \varrho^4 \alpha_0}{360 . 10^{12} \lambda^4}.$$

Vergleicht man Glied für Glied mit der Formel von Cauchy

$$n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10^6\lambda^2} + \frac{\alpha_2}{10^{12}\lambda^4},$$

so müsste also stets $\alpha_1^2 = 1{,}428\,\alpha_0\alpha_2$ sein. Es ist nun bei allen bisher untersuchten Substanzen α_0 positiv, α_2 hingegen bald positiv, bald negativ im Widerspruche mit der Function von Baden-Powell. Da dieselbe Function schon bei der Intensitätsbestimmung des gebeugten Lichtes vorkommt, so ist es gerathen, sie aus der Theorie der Dispersion gänzlich zu verbannen, da man jede beliebige andere dafür setzen kann, z. B.

$$sec\frac{\pi\varrho}{\lambda} \text{ oder } lognat\left(1-\frac{\varrho}{\lambda^2}\right):\frac{\varrho}{\lambda^2}.$$

Beispielsweise setze ich einige von mir für die partielle Dispersion berechnete Formeln her.

Wasser: $n = 1{,}32332 + \frac{0{,}003781}{10^6\lambda^2} - \frac{0{,}0000868}{10^{12}\lambda^4}$ (nach Fraunhofer),

Quarz: $n = 1{,}53270 + \frac{0{,}004160}{10^6\lambda^2} - \frac{0{,}0000232}{10^{12}\lambda^4}$ (nach Esselbach),

Schwefelkohlenstoff: $n = 1{,}5876 + \frac{0{,}012919}{10^6\lambda^2} + \frac{0{,}0007278}{10^{12}\lambda^4}$ (nch. Baden-Powell),

Cassiaöl: $n = 1{,}5667 + \frac{0.00594}{10^6\lambda^2} + \frac{0{,}002240}{10^{12}\lambda^4}$ (nch. Baden-Powell),

Anisöl: $n = 1{,}5299 + \frac{0{,}007259}{10^6\lambda^2} + \frac{0{,}000751}{10^{12}\lambda^4}$ (nch. Baden-Powell),

Gelbes Flintglas: $n = 1{,}75014 + \frac{0{,}008635}{10^6\lambda^2} + \frac{0{,}0002989}{10^{12}\lambda^4}$ (nach Dutirou),

Salzsäure: $n = 1{,}3924 + \frac{0{,}006351}{10^6\lambda^2} - \frac{0{,}0001766}{10^{12}\lambda^4}$ (nch. Baden-Powell).

Bezeichnet man die tausendfachen Wellenlängen der Fraunhoferschen Linien B, E, H mit l_1, l_2 und l_3, ihre Brechungsexponenten mit n_1, n_2 und n_3, so sind die Constanten α_0, α_1 und α_2 berechnet mittels der Formeln

$$\alpha_0(l_1^2-l_3^2) = n_2(l_1^2-l_3^2) - (n_2-n_1)\frac{l_1^4}{l_1^2-l_2^2} + (n_3-n_2)\frac{l_3^4}{l_2^2-l_3^2},$$

$$\alpha_1(l_1^2-l_3^2) = (n_2-n_1)\,l_1^4\frac{l_2^2+l_3^2}{l_1^2-l_2^2} - (n_3-n_2)\,l_3^4\frac{l_1^2+l_2^2}{l_2^2-l_3^2},$$

$$\alpha_2(l_1^2-l_3^2) = -(n_2-n_1)\,l_1^4\frac{l_2^2\,l_3^2}{l_1^2-l_2^2} + (n_3-n_2)\,l_3^4\frac{l_1^2\,l_2^2}{l_2^2-l_3^2}.$$

Sehr wahrscheinlich ist die partielle Farbendispersion abhängig von dem Lichte, welches die Substanzen durchlassen und absorbiren. Die Substanzen zerstreuen diejenigen Farben am meisten, welche sie bei dem Durchgange am meisten absorbiren. So lässt Wasser am besten Blau und Violett durch, am wenigsten Roth; dagegen zerstreuen und absorbiren Cassiaöl und andere ätherische Oele am wenigsten die rothen und gelben

Lichtstrahlen, am meisten Blau und Violett. Hiermit steht das Vorzeichen des dritten Gliedes in innigem Zusammenhange. Bei blauen Flüssigkeiten ist das Vorzeichen negativ, bei rothgelben positiv. Es wäre von besonderem Interesse, die Farbendispersion von Kupferoxyd-Ammoniak und von chromsaurem Kali in schwach gefärbten Lösungen zu untersuchen.

Setzt man $n = f(\lambda)$, so wird die partielle Dispersion ausgedrückt durch $\frac{\partial n}{\partial \lambda} = f'(\lambda)$. Diese Function kann Maxima und Minima innerhalb des Spectrums erhalten, wenn α_2 negativ ist. Ja es ist nicht undenkbar, dass die Function negativ werden kann, für Werthe von λ nämlich, welche kleiner sind, als die positiven reellen Wurzeln der Gleichung $f'(\lambda) = 0$. Das Spectrum muss sich an dieser Stelle umkehren und zum Theil das Vorangehende decken. Vor wenigen Jahren wurde diese Eigenschaft von Prof. Kundt an alkoholischen Lösungen von Fuchsin entdeckt; es würde von Interesse sein, die Formel für die Brechungsexponenten dieser Substanz aufzustellen.

Rostock. Prof. Ludwig Matthiessen.

V.

Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilfremden Coefficienten.

Von

Dr. K. Weihrauch,

Docent an der Universität Dorpat.

1.

Die Frage nach der Zahl der Lösungen, welche eine unbestimmte Gleichung vom ersten Grade besitzt, ist sicherlich eine der interessantesten im ganzen Gebiete der unbestimmten Analysis, aber, wie es scheint, bisher weder beantwortet, noch überhaupt behandelt worden. Es soll im Folgenden der Versuch gemacht werden, die Aufgabe, für eine grosse Classe von diophantischen Gleichungen wenigstens, zu lösen, wobei sich freilich das Resultat zeigen wird, dass die Darstellung der Lösungszahl durch Coefficienten und Absolutglied der Gleichung, wie sie erwartet werden müsste, nicht vollständig gelungen ist, aber, so scheint es nach weiteren Untersuchungen, auch nicht vollständig gelingen kann. Selbstverständlich kann hier immer nur von Gleichungen mit positiven ganzzahligen Constanten die Rede sein, da offenbar ein einziger negativer Coefficient genügt, um die Anzahl der Lösungen unendlich gross werden zu lassen. Ehe wir die eigentlichen Untersuchungen vorlegen, mag folgende theoretische Lösung der Aufgabe Erwähnung finden.

Heisst die zu behandelnde Gleichung

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_k x_k = A,$$

so entwickele man das Product

$$\prod_{k=1}^{k=n} \sum_{b=1}^{b=\infty} z^{b a_k}$$

nach Potenzen von z; wird dann erhalten

$$\prod_{k=1}^{k=n}\sum_{b=1}^{b=\infty} z^{b a_k} = \sum_{i=1}^{i=\infty} c_i z^i, \tag{2}$$

dann ist offenbar c_A die Anzahl der Auflösungen für 1). Vielleicht gelingt es einmal, diesen Coefficienten durch ein bestimmtes Integral darzustellen und damit die ganze Frage zu erledigen.

Für den allgemeinsten Fall, in dem je 2, 3, ... $(n-1)$ der Coefficienten a_k gemeinsame Theiler besitzen, sind die Untersuchungen noch nicht zum Abschluss gekommen; der Gang der Rechnung und die Gestalt der Resultate compliciren sich, wie uns die Behandlung der allgemeinsten Gleichung mit 3, 4 und 5 Unbekannten ergab, in sehr bedeutendem Grade. Wir sind deshalb genöthigt, anzunehmen, dass in allen auf ihre Lösungszahl zu untersuchenden Gleichungen je zwei Coefficienten theilfremd seien. Wir werden unter dieser Voraussetzung für eine Gleichung mit 2, 3, 4, 5 Unbekannten das Resultat ableiten, dabei die Methode gewinnen, wie man zu der Formel für eine Gleichung mit n Unbekannten gelangt, wenn die für eine Gleichung mit $n-1$ Unbekannten bereits vorliegt, und schliesslich eine Darstellung jener Formel geben.

Vorausgehen lassen wir einige abkürzende Bezeichnungen und folgenden bekannten, beständig zu gebrauchenden Satz aus der Zahlentheorie:

Sind m, a, π bestimmte positive Zahlen, a und π theilfremd, und hat man die Congruenz

$$m - ha \equiv \nu_h \,(\mathrm{mod}\,\pi), \quad \nu_h \begin{smallmatrix}<\pi\\ >0\end{smallmatrix}, \tag{3}$$

so fallen, wenn h die Reihe der Zahlen von 1 bis π durchläuft, die Werthe ν_1 bis ν_π mit dieser nämlichen Zahlenreihe in einer gewissen Ordnung zusammen, so dass

$$\sum_{h=1}^{h=\pi} (\nu_h)^i = \sum_{k=1}^{k=\pi} k^i \tag{4}$$

und ferner, wenn h bis $p\pi$ geht, wegen der Wiederkehr der nämlichen Reste

$$\sum_{h=1}^{h=p\pi} (\nu_h)^i = p\sum_{k=1}^{k=\pi} k^i. \tag{5}$$

Wir setzen die Gleichung 1) voraus und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = P, \quad \prod_{k=1}^{k=n-1} a_k = \pi, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k{}^i = S_i, \quad \sum_{k=1}^{k=n-1} a_k{}^i = \sigma_i. \tag{7}$$

Die Anzahl der Auflösungen für die Gleichung 1) stellen wir durch $f_n(A)$ vor.

2.

Es soll nun zunächst für die Gleichung

8) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 = A$$

$f_2(A)$ bestimmt werden. Findet sich als Form für dieselbe

9) $$x_1 = \alpha_1 - a_2 t_1, \quad x_2 = \alpha_2 + a_1 t_1,$$

so folgt aus den Bedingungen $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ sofort, dass

$$t_1 < \alpha_1 : a_2, \quad t_1 > -\alpha_2 : a_1.$$

t_1 wird also im Ganzen $\frac{\alpha_1}{a_2} - \left(-\frac{\alpha_2}{a_1}\right) = \frac{A}{a_1 a_2} = \frac{A}{P}$ Werthe annehmen können, d. h. $f_2(A)$ wird gleich $A:P$ sein. Der Ausdruck ist allerdings nicht correct; $f_2(A)$ muss eine ganze Zahl sein, und es kann sich sehr wohl treffen, dass die in $A:P$ enthaltenen Ganzen um eine Einheit vermehrt oder (falls $A = qP$) vermindert werden müssen, um $f_2(A)$ darzustellen; die Correction wird später angegeben werden. Auf geometrischem Wege lässt sich das Resultat folgendermassen ableiten. 8) stellt eine gerade Linie vor, welche in orthogonalen Coordinaten die Axenabschnitte $A:a_1$ und $A:a_2$ liefert. Zertheilt man den ganzen ersten Quadranten durch Normalen, die in den Entfernungen 1, 2, 3, ... vom Ursprung auf den Axen errichtet werden, in Quadrate, so stellen die Coordinaten aller Quadratecken, durch welche 8) hindurchläuft, mit Ausschluss der etwa auf den Axen liegenden, die sämmtlichen Lösungen vor; die Fusspunkte der dazu gehörigen x_2-Coordinaten sind auf der Strecke $A:a_1$ der x_1-Axe vom Ursprung an gleichmässig im Abstande a_2 vertheilt, man hat also wieder $f_2(A) = A:a_1 a_2 = A:P$, mit derselben Incorrectheit, wie früher. Wir nehmen aus dem Bisherigen Veranlassung, zwei um Vielfache von P verschiedene A hinsichtlich der f zu untersuchen.

Es sei

10) $$A \equiv m (\mathrm{mod}\, P), \quad m \begin{smallmatrix} \leqq P \\ > 0 \end{smallmatrix}$$

und

11) $$\frac{A-m}{P} = p.$$

Hat man für die Gleichung I $a_1 x_1 + a_2 x_2 = m$ die Form gefunden

12) $$x_1 = \beta_1 - a_2 t_1, \quad x_2 = \beta_2 + a_1 t_1,$$

so genügt der Gleichung II $a_1 x_1 + a_2 x_2 = A = pP + m$ offenbar die Form

13) $$x_1 = \beta_1 - a_2 s_1, \quad x_2 = \beta_2 + a_1 p + a_1 s_1.$$

Man sieht augenblicklich, dass s_1 in 13) genau p Werthe mehr annehmen darf, als t_1 in 12), d. h.:

14) $$f_2(A) = p + f_2(m).$$

Weiter lässt sich, wie es scheint, die Sache nicht verfolgen; die Bestimmung von $f_2(m)$ durch a_1, a_2 und m ist wahrscheinlich theoretisch unmöglich. Als Beispiel diene die Gleichung $21x_1+29x_2=100000$. Man erhält

$$P=609,\quad 100000\equiv 124 (mod\, 609),\quad p=164,$$

mithin

$$f_2(100000)=164+f_2(124).$$

Man findet nun leicht, dass die Gleichung $21x_1+29x_2=124$ keine Lösung besitzt, dass die oben vorgelegte Gleichung also genau 164 Lösungen hat. Auf geometrischem Wege lässt sich 14) ebenfalls leicht ableiten, was wir der Kürze wegen übergehen. Derselbe Weg giebt über einen Ausdruck, der später auftreten wird, Aufschluss. Nehmen wir auf der x_1-Axe die Strecke a_2, auf der x_2-Axe die Strecke a_1 vom Ursprung an und verbinden die Endpunkte, so stellt die Linie die Gleichung $a_1x_1+a_2x_2=a_1a_2=P$ vor. Denkt man sich den ersten Quadranten wie früher in Quadrate zerlegt, so zeigt sich sofort, dass diese Gleichung keine Lösung haben kann; denn die Diagonale des Rechtecks aus den Seiten a_1 und a_2 kann durch kein Quadrateck gehen (die auf den Axen liegenden Ecken sind ja ausgeschlossen), weil das Verhältniss $a_1:a_2$ nicht in kleineren ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann. Für eine Linie $a_1x_1+a_2x_2=m$, wo m den Bedingungen in 10) unterliegt, werden die Axenabschnitte kleiner, als a_1 und a_2, d. h. die Linie ist im ersten Quadranten ganz innerhalb des durch die Diagonale des obigen Rechtecks gebildeten Dreiecks mit dem Ursprung als dritter Ecke gelegen; sie ist der Diagonale parallel, kann also höchstens eine Quadratecke treffen, was wie oben bewiesen wird. Umgekehrt entspricht jede innerhalb des erwähnten Dreiecks liegende Quadratecke einer Linie $a_1x_1+a_2x_2$ mit ganz bestimmtem Werthe von m; die Anzahl dieser Ecken ist $\frac{(a_1-1)(a_2-1)}{2}$. Unter sämmtlichen P Gleichungen

15) $$a_1x_1+a_2x_2=m,\quad m=1,2,3,\dots P$$

befinden sich also nur $\frac{(a_1-1)(a_2-1)}{2}=\frac{P-S_1+1}{2}$, welche eine Lösung haben; den übrigen fehlt eine solche. $f_2(m)$ ist also 0 oder 1 und man erhält die später zu benutzende Formel

16) $$\sum_{m=1}^{m=P} f_2(m)=\frac{P-S_1+1}{2}.$$

Es ist leicht, die Summation weiter, etwa bis zu pP, auszudehnen. Einen algebraischen Weg zur Ableitung von 16) werden wir später kennen lernen. Als Beispiel möge die Gleichung $4x_1+5x_2=m$ dienen; es wird hier

$$\Sigma f_2(m)=6;$$

in der That liefern nur die Werthe $m=9$, 13, 14, 17, 18, 19 eine Lösung.

3.

Es liege nun die Gleichung

17) $$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=A$$

vor. Es lässt sich beweisen, dass, wie von vornherein zu vermuthen war, als Eintheilungsprincip für die A wieder $P = a_1 a_2 a_3$ gelte. Die Entwickelung des Products

$$\sum_{b=1}^{b=\infty} z^{b a_1} . \sum_{b=1}^{b=\infty} z^{b a_2}$$

liefert nur Theilsätze von der Form $f_2(d) . z^d$. Tritt der Factor $\sum_{b=1}^{b=\infty} z^{b a_3}$ hinzu, so muss in dem Resultate $f_3 z . f_3(e) . z^e$ der Ausdruck $f_3(e)$ ein Aggregat von Ausdrücken wie $f_2(d)$ sein. Zwei dieser $f_2(d)$ lassen sich aber nur dann auf einmal zurückführen, wie aus dem vorhergehenden Abschnitte erhellt, wenn die betreffenden d um Vielfache von $\pi = a_1 a_2$ unterschieden sind. Beim Hinzutreten des dritten Factors werde der Ausdruck

$$f_2(\nu\pi + \mu) . z^{\nu\pi + \mu}$$

das eine Mal mit $z^{v a_3}$, das andere Mal mit $z^{w a_3}$ multiplicirt; sollen die Coefficienten der neuen Potenzen $z^{\nu\pi + \mu + v a_3}$ und $z^{\nu\pi + \mu + w a_3}$ aufeinander reducirbar sein, so muss

18) $$\nu\pi + \mu + v a_3 \equiv \nu\pi + \mu + w a_3 \; (mod\, \pi),$$

19) $$v = w + \pi t$$

sein. Wir schliessen daraus, dass eine Reduction nur bei denjenigen Potenzen möglich ist, deren Exponenten um Vielfache von πa_3, d. h. P voneinander verschieden sind, sehen uns also veranlasst, die Zahlen A in Classen von je P Gliedern abzutheilen. Es sei nun für

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = A:$$

20) $$A \equiv m \; (mod\, P), \quad m \begin{smallmatrix} < P \\ > 0 \end{smallmatrix},$$

21) $$A - m = pP.$$

Dann ergiebt sich

22) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 = pP + m - a_3 x_3,$$

folglich

23) $$f_3(A) = {}_h\sum f_2(pP + m - a_3 h),$$

wo h vom Werthe 1 beginnend so lange wachsen muss, bis $pP + m - a_3 h$ eben negativ werden will. Man erkennt leicht, dass in 23) folgende Zerlegung stattfinden kann:

$$f_3(A) = \sum_{h=1}^{h=p\pi} f_2(pP + m - a_3 h) + \sum_{h=1} f_2(m - a_3 h),$$

wo die zweite Summation bis zum Abbrechen fortzusetzen ist; sie ist indessen, wie man rasch beim Vergleich mit 22) erkennt, genau $f_3(m)$, mithin

25) $$f_3(A) = f_3(m) + \sum_{h=1}^{h=p\pi} f_2(pP + m - a_3 h).$$

Um diese Summation auszuführen, setzen wir gemäss 10)

$$26)\qquad pP + m - a_3 h \equiv v_h \,(mod\,\pi), \quad v_h \overset{\leqq \pi}{\underset{> 0}{}},$$

wo an Stelle von A, m; P und p in 10) die Ausdrücke $pP + m - a_3 h$, v_h, π und $\frac{pP + m - a_3 h - v_h}{\pi}$ getreten sind.

Man hat dann nach 14)

$$27)\qquad f_3(A) = f_3(m) + \sum_{h=1}^{h=p\pi} \left(\frac{pP + m - a_3 h - v_h}{\pi} + f_2(v_h)\right).$$

Berücksichtigt man, dass

$$28)\qquad \sum_{h=1}^{h=p\pi} h = \frac{p\pi\,(p\pi + 1)}{2},$$

ferner nach 5)

$$29)\qquad \sum_{h=1}^{h=p\pi} v_h = p \sum_{k=1}^{k=\pi} k = \frac{p\pi\,(\pi+1)}{2}$$

und analog mit Zuziehung von 16)

$$30)\qquad \sum_{h=1}^{h=p\pi} f_2(v_h) = p \sum_{h=1}^{h=\pi} f_2\,(v_h) = \frac{p\,(\pi - \sigma_1 + 1)}{2}$$

[$\sigma_1 = a_1 + a_2$ nach 7)], so entsteht aus 27) nach einiger Reduction, wenn $a_3 \pi$ in P, $a_3 + \sigma_1$ in S_1 zusammengezogen wird, als Endresultat

$$31)\qquad f_3(A) = \frac{p^2 P}{2} + p\left(m - \frac{S_1}{2}\right) + f_3(m).$$

Als Zahlenbeispiel wählen wir die Gleichung

$$5x_1 + 7x_2 + 18x_3 = 1403,$$

$$P = 630, \quad m = 143, \quad p = 2, \quad S_1 = 30,$$

mithin

$$f_3\,(1403) = \frac{4.630}{2} + 2.128 + f_3\,(143).$$

Um die Anzahl der Lösungen für die Gleichung $5x_1 + 7x_2 + 18x_3 = 143$ zu finden, hat man f_2 für folgende Gleichungen nach 14) aufzusuchen:

$$\begin{aligned}
5x_1 + 7x_2 &= 143 - 18 = 125\; f_2\,(125) = 3 + f_2\,(20) = 3\\
&= 143 - 36 = 107\; f_2\,(107) = 3 + f_2\,(2) = 3\\
&= 143 - 54 = 89\; f_2\,(89) = 2 + f_2\,(19) = 3\\
&= 143 - 72 = 71\; f_2\,(71) = 2 + f_2\,(1) = 2\\
&= 143 - 90 = 53\; f_2\,(53) = 1 + f_2\,(18) = 1\\
&= 143 - 108 = 35\; f_2\,(35) \qquad\qquad = 0\\
&= 143 - 126 = 17\; f_2\,(17) \qquad\qquad = 1\\
\hline
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f_3(143) = 13.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $5x_1 + 7x_2 + 18x_3 = 1403$ hat also 1529 Lösungen. Nach Analogie des in 16) gewonnenen Resultates müssten wir versuchen, die

Summation $\sum_{m=1}^{m=P} f_3(m)$ auszuführen. Auf stereometrischem Wege, wornach die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = P$ eine Ebene mit den Axenabschnitten $a_2 a_3$, $a_1 a_3$, $a_1 a_2$ bedeutet und man den ganzen ersten Octanten in Würfel zerfällt, deren Eckcoordinaten, wenn die Ecke in jene Ebene und nicht zugleich in die Coordinatenebenen fällt, Lösungen der Gleichung vorstellen, scheint ein Resultat schwer erzielbar. Dasselbe gilt von einer rein algebraischen Behandlung. Da nun die besprochene Summation voraussichtlich ebenso bei der Untersuchung der Gleichung mit vier Unbekannten auftreten wird, wie der Ausdruck $\sum_{h=1}^{h=\pi} f_2(\nu_h)$ in 27), so liesse sich die Bestimmung von $\sum_1^P f_3(m)$ auf den nächsten Abschnitt verschieben, wenn sich ein Princip ermitteln lässt, wornach der Werth von $\sum_{h=1}^{h=\pi} f_2(\nu_h)$ aus 27) heraus, ohne Kenntniss von 16), dargestellt werden kann. Entwickelt man 27) mit Hilfe der darauf folgenden Gleichungen ohne Rücksicht auf 16), so entsteht, wenn noch

$$\sum_{h=1}^{h=\pi} f_2(\nu_h) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_2(\mu)$$

gesetzt wird, was nach 4) geschehen darf:

$$32)\quad f_3(A) = f_3(m) + (pP + m)\,p - \frac{a_3 p\,(p\pi + 1)}{2} - p\,\frac{(\pi+1)}{2} + p\sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_2(\mu).$$

Ordnet man nach Potenzen von p, so erhält man

$$33)\qquad f_3(A) = f_3(m) + \frac{p^2 P}{2} + p\left(m - \frac{a_3}{2} - \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_2(\mu)\right).$$

Nun lässt sich ohne Weiteres behaupten, dass der Coefficient von p hinsichtlich der Grössen a_1, a_2, a_3 symmetrisch sein muss, der Ausdruck $\Sigma f_2(\mu)$ muss also hinsichtlich der a_1, a_2, a_3 so beschaffen sein, dass er die übrigen Theilsätze zu symmetrischen Grössen abrundet, er muss mithin zunächst enthalten

$$-\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2},$$

wodurch der Theilsatz $-\frac{a_3}{2}$ in $-\frac{S_1}{2}$ übergeht. Da ferner $\pi = a_1 a_2$ durch $a_1 a_3 + a_2 a_3$ symmetrisch gemacht wird, $\Sigma f_2(\mu)$ aber nur a_1 und a_2 enthalten kann, so muss diese Summation auch liefern $+\frac{\pi}{2}$, wodurch in 33) $-\frac{\pi}{2}$ verschwindet, und es leuchtet von selbst ein, dass die Summation auch noch den numerischen Theilsatz $-\frac{1}{2}$ zum Verschwinden bringen muss; es wird also schliesslich

34) $$\sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_2(\mu) = \frac{\pi-\sigma_1+1}{2},$$

wie in 16).

4.

Bei der Gleichung mit vier Unbekannten

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = A$$

lassen sich dieselben Reflexionen über die Eintheilung der A wie in 3) wiederholen. Für $P = a_1a_2a_3a_4$ wird man setzen

35) $$A \equiv m \ (mod P), \quad m \begin{smallmatrix}\overline{<} P\\ > 0\end{smallmatrix},$$

36) $$A - m = pP,$$

und hat dann

37) $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = pP + m - a_4x_4$$

und

38) $$f_4(A) = {}_h\sum f_3(pP+m-a_4h),$$

39) $$f_4(A) = \sum_{h=1}^{h=p\pi} f_3(pP+m-a_4h) + \sum_{h=1} f_3(m-a_4h),$$

wenn jetzt $\pi = a_1a_2a_3$, und

40) $$f_4(A) + f_4(m) + \sum_{h=1}^{h=p\pi} f_3(pP+m-ha_4).$$

Setzt man wieder

$$pP + m - ha_4 \equiv \nu_h \ (mod \pi), \quad \nu_h \begin{smallmatrix}\overline{<} \pi\\ > 0\end{smallmatrix},$$

so müssen an Stelle von A, p, P, m, S_1 in 31) die Ausdrücke $pP+m-ah_4$, $\frac{pP+m-ah_4-\nu_h}{\pi}$, π, ν_h, $\sigma_1 = a_1+a_2+a_3$ treten. Man gewinnt so durch 31)

$$f_4(A) = f_4(m) + \sum_{h=1}^{h=p\pi} \left(\frac{(pP+m-ha_4-\nu_h)^2}{2\pi} + \frac{(pP+m-ah_4-\nu_h)}{\pi}\right)\left(\nu_h - \frac{\sigma_1}{2}\right)$$
$$+ f_3(\nu_h)$$

41) $$= f_4(m) + \sum_{h=1}^{h=p\pi} \left\{\frac{1}{\pi}\left[\frac{(pP+m)^2}{2} + \frac{(pP+m)\sigma_1}{2} - a_4\left(pP+m-\frac{\sigma_1}{2}\right)h\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{a_4^2h^2}{2} + \frac{\sigma_1\nu_h}{2} - \frac{\nu^2_h}{2}\right] + f_3(\nu_h)\right\}.$$

Berücksichtigt man, dass

42) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=p\pi} h = \frac{p\pi(p\pi+1)}{2}, \quad \sum_{h=1}^{h=p\pi} h^2 = \frac{p\pi(p\pi+1)(2p\pi+1)}{6}, \\ &\sum_{h=1}^{h=p\pi} \nu_h = p\sum_{k=1}^{k=\pi} k = \frac{p\pi(\pi+1)}{2} \text{ nach 5)}, \end{aligned}\right.$$

$$42)\quad \begin{cases} \sum\limits_{h=1}^{h=p\pi} \nu^2_h = p\sum\limits_{k=1}^{k=\pi} k^2 = \dfrac{p\pi(\pi+1)(2\pi+1)}{6}, \\ \sum\limits_{h=1}^{h=p\pi} f_3(\nu_h) = p\sum\limits_{h=1}^{h=\pi} f_3(\nu_h) = p\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_3(\mu), \end{cases}$$

so geht nach einigen leichten Reductionen 41) über in

$$43)\quad \begin{aligned} f_4(A) &= f_4(m) + \frac{p^3P^2}{6} + \frac{p^2P}{2}\left(m - \frac{S_1}{2}\right) \\ &+ p\left(\frac{m^2}{2} - \frac{mS_1}{2} + \frac{a_4^2}{12} + \frac{\sigma_1 a_4}{4} - \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\sigma_1}{4} + \frac{\sigma_1}{4} - \frac{1}{12} + \sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_3(\mu)\right), \end{aligned}$$

wobei noch $S_1 = \sigma_1 + a_4$, $P = \pi a_4$ benutzt wurde.

Gemäss dem am Schlusse von 3. entwickelten Princip der Symmetrie muss nun $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_3(\mu)$ construirt sein, wie folgt.

Die Summation muss die Theilsätze im Coefficienten von p

$$-\frac{\pi^2}{6},\quad -\frac{\pi}{4},\quad +\frac{\pi\sigma_1}{4},\quad +\frac{\sigma_1}{4},\quad -\frac{1}{12}$$

vernichten. Sie muss $\frac{a_4^2}{12}$ durch $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{12} = \frac{\sigma_2}{12}$ und

$$\frac{a_4\sigma_1}{4} = \frac{a_4a_1 + a_4a_2 + a_4a_3}{4} \text{ durch } \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3}{4} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2}{8}$$

symmetrisch ergänzen zu $\frac{S_2}{12}$ und $\frac{S_1^2 - S_2}{8}$.

Man hat also

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_3(\mu) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma_1}{4} + \frac{\sigma_1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{\sigma_2}{12} + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2}{8}$$

oder nach einigen Reductionen

$$44)\quad \sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_3(\mu) = \frac{3(\pi - \sigma_1 + 1)^2 + (\pi^2 - \sigma_2 - 1)}{24}.$$

Der Coefficient von p in 43) wird dann

$$\frac{m^2}{2} - \frac{mS_1}{2} + \frac{S_2}{12} + \frac{S_1^2 - S_2}{8} \text{ oder } \tfrac{1}{2}\left(m - \frac{S_1}{2}\right)^2 - \frac{S_2}{24},$$

so dass schliesslich

$$45)\quad f_4(A) = \frac{p^3P^2}{6} + \frac{p^2P}{2}\left(m - \frac{S_1}{2}\right) + p\left[\frac{1}{2}\left(m - \frac{S_1}{2}\right)^2 - \frac{S_2}{24}\right] + f_4(m)$$

wird.

Zur Verification von 45) wählen wir ein sehr einfaches Beispiel. Es liege vor

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20.$$

Es ist $P=6$, $S_1=7$, $S_2=15$, $m=2$, $p=3$, also

$$f_4(20)=\frac{27.36}{6}-\frac{9.6}{2}\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}-\frac{15}{24}\right)+f_4(2),$$

$$f_4(2)=0,\quad f_4(20)=123.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung wirklich 123 Lösungen besitzt.

Um für 44) ein Beispiel zu geben, sei

$$x_1+3x_2+5x_3=\mu,\quad \mu=1,2,\ldots 15,$$
$$\pi=15,\quad \sigma_1=9,\quad \sigma_2=35,$$

also

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=15} f_3(\mu)=\frac{3.7^2+189}{24}=14.$$

In der That ist

$$\begin{aligned} f_3(\mu)&=0 \text{ für } \mu=1,2,3,4,5,6,7,8,\\ &=1 \quad ,, \quad \mu=9,10,11,\\ &=2 \quad ,, \quad \mu=12,13,\\ &=3 \quad ,, \quad \mu=14,\\ &=4 \quad ,, \quad \mu=15.\end{aligned}$$

5.

Aus dem Bisherigen ist der weiter einzuschlagende Gang vorgezeichnet. Die Rechnungen gewinnen indessen so sehr an Umfang, dass wir dieselben nicht hierher setzen und uns mit der Angabe der Hauptresultate begnügen.

Für die Gleichung

46) $$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=A$$

wird

47) $$A\equiv m\,(mod\,P),\quad m\begin{matrix}<P\\>0\end{matrix},\quad P=a_1a_2a_3a_4a_5,$$

48) $$A-m=pP,$$

49) $$f_5(A)=\sum_{h=1}^{h=p\pi} f_4(pP+m-ha_5)+f_5(m),\quad \pi=a_1a_2a_3a_4.$$

Die Summation lässt sich ausführen, nachdem an Stelle der Grössen A, p, P, m, S_1, S_2 in 45) die Ausdrücke $pP+m-ha_5$, $\frac{pP+m-ha_5-\nu_4}{\pi}$, π, ν_h, σ_1, σ_2 getreten sind, wo immer

50) $$pP+m-ha_5\equiv \nu_h\,(mod\,\pi).$$

Durch das Princip der Symmetrie gewinnt man als Nebenresultat für die Gleichung $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=\mu$ die Formel ($\pi=a_1a_2a_3a_4$, $\sigma_1=a_1+a_2+a_3+a_4$, $\sigma_2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$)

51) $$\sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_4(\mu)=\frac{(\pi-\sigma_1+1)^3+(\pi-\sigma_1+1)(\pi^2-\sigma_2-1)}{48}$$

und weiter für die Gleichung mit fünf Unbekannten

52) $$f_5(A)=\frac{p^4P^3}{24}+\frac{p^3P^2}{6}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)+\frac{p^2P}{2}\left[\frac{1}{2}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^2-\frac{S_2}{24}\right] +p\left[\frac{1}{6}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^3-\left(m-\frac{S_1}{2}\right).\frac{S_2}{24}\right]+f_5(m).$$

Für die Gleichung mit sechs Unbekannten

53) $$\sum_{k=1}^{k=6} a_k x_k = A$$

wird, wenn

54) $$A\equiv m\,(mod P),\quad m\,{\overline{\overline{<}}\,P \atop >0},\quad P=a_1a_2a_3a_4a_5a_6,$$

55) $$A-m=pP,$$

56) $$f_6(A)=\frac{p^4P^4}{120}+\frac{p^3P^3}{24}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)+\frac{p^3P^2}{6}\left[\frac{1}{2}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^2-\frac{S_2}{24}\right] +\frac{p^2P}{2}\left[\frac{1}{6}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^3-\left(m-\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_2}{24}\right] +p\left[\frac{1}{24}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^2.\frac{S_2}{24}+\frac{S_2^{\,2}}{1152}+\frac{S_4}{2880}\right]+f_6(m).$$

Als Nebenproduct wird dabei für die Gleichung $\sum_{k=1}^{k=5} a_k x_k=\mu$ gewonnen

57) $$\sum_{\mu=1}^{\mu=\pi} f_5(\mu) =\frac{15(\pi-\sigma_1+1)^4+30\,(\pi-\sigma_1+1)^2(\pi^2-\sigma_2-1)+5\,(\pi^2-\sigma_2-1)^2-2\,(\pi^4-\sigma_4-1)}{5760}.$$

Die Ausdrücke 51) und 57) lassen sich durch die Gleichungen $\sum_{k=1}^{k=4} x_k=1$ und $\sum_{k=1}^{k=5} x_k=1$, für welche die Summationen Null ergeben müssen, leicht verificiren.

6.

Um einen genaueren Einblick in den Bau der Formeln zu gewinnen und so die Construction der Formel für die Gleichung mit n Unbekannten zu ermöglichen, stellen wir die bisherigen Resultate für die Gleichungen von $2\ldots6$ Unbekannten zusammen, indem wir abkürzend

58) $$R=m-\frac{S_1}{2}$$

einführen und soviel als möglich Facultäten schreiben.

Es sei für die jedesmalige Gleichung $\Sigma a_k x_k = A$

59) $$\left.\begin{array}{l} A \equiv m \pmod{P}, \quad m \overset{\textstyle <}{\underset{\textstyle >}{=}} \begin{array}{l}P\\0\end{array}, \\ A - m = pP, \end{array}\right\}$$

Dann hat man

$$f_2(A) = \frac{p}{1!} + f_2(m),$$

60) $$\left\{\begin{array}{l} f_3(A) = \frac{p^2}{2!}P + \frac{p}{1!}R + f_3(m), \\ f_4(A) = \frac{p^3}{3!}P^2 + \frac{p^2}{2!}PR + \frac{p}{1!}\left(\frac{R^2}{2!} - \frac{S_2}{24}\right) + f_4(m), \\ f_5(A) = \frac{p^4}{4!}P^3 + \frac{p^3}{3!}P^2R + \frac{p^2}{2!}P\left(\frac{R^2}{2!} - \frac{S_2}{24}\right) + p\left(\frac{R^3}{3!} - R.\frac{S_2}{24}\right) + f_5(m), \\ f_6(A) = \frac{p^5}{5!}P^4 + \frac{p^4}{4!}P^3R + \frac{p^3}{3!}P^2\left(\frac{R^2}{2!} - \frac{S_2}{24}\right) + \frac{p^2}{2!}P\left(\frac{R^3}{3!} - R.\frac{S_2}{24}\right) \\ \qquad + p\left[\frac{R^4}{4!} - \frac{R^2}{2!}.\frac{S_2}{24} + \frac{1}{2!}\left(\frac{S_2}{24}\right)^2 + \frac{S_4}{2880}\right] + f_6(m). \end{array}\right.$$

Daraus geht hervor, dass jede Potenz, die von P ausgenommen, beständig die Facultät ihres Exponenten als Divisor mit sich führt, dass p^ν mit $P^{\nu-1}$ verknüpft erscheint, dass die Coefficienten von $p^\nu P^{\nu-1}$ homogene, nach Potenzen von R absteigende Ausdrücke vom Grade $n-\nu-1$ sind. Man sieht ferner, dass der Uebergang von f_2 auf f_3, von f_4 auf f_5 sehr leicht ist, dass überhaupt zum Weitergehen immer nur die Kenntniss des Coefficienten von p^1 in der Formel für das nächste gerade n erforderlich ist. Für $f_8(A)$ hätte man als Coefficient für p^2 der Analogie nach

61) $$\frac{R^6}{6!} - \frac{R^4}{4!}.\frac{S_2}{24} + \frac{R^2}{2!}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{S_2}{24}\right)^2 + \frac{S_4}{2880}\right] - Z,$$

wo Z noch zu bestimmen wäre. Z muss offenbar vom sechsten Grade sein und aus den Ausdrücken S_2, S_4, S_6 bestehen, kann also enthalten S_2^3, S_2S_4 und S_6; bemerkt man, dass S_2 und S_4 constant mit den Divisoren 24 und 2880 versehen sind, so wird man schliessen müssen, es sei

62) $$Z = \frac{1}{3!}\left(\frac{S_2}{24}\right)^3 + \left(\frac{S_2}{24}\right)\left(\frac{S_4}{2880}\right) + \frac{S_6}{u}.$$

Der Divisor u ist noch zu bestimmen und das kann wieder am leichtesten durch ein besonderes Beispiel geschehen. Man zeigt leicht, dass für die Gleichungen von der Form

63) $$\Sigma x_k = q$$

64) $$\left\{\begin{array}{lll} f_2(q) = q-1 & \text{(oder, da hier immer } p = q-1 \text{ wird)} & = (p)_1, \\ f_3(q) = \frac{(q-1)(q-2)}{2!} & & = (p)_2, \\ f_4(q) = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{3!} & & = (p)_3, \\ f_n(q) = \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{(n-1)!} & & = (p)_{n-1} \end{array}\right.$$

in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise der Binomialcoefficienten.

Entwickelt man den Ausdruck $(p)_{n-1}$, so erhält p^1 für ein gerades n den Coefficienten $\frac{1}{n-1}$. Wir hätten also im obigen Falle bei f_8 zu setzen

$$R = m - \frac{S_1}{2} = 1 - 4 = -3, \quad S_2 = S_4 = S_6 = 8,$$

und der ganze Ausdruck 61) müsste $= \frac{1}{7}$ werden, wodurch es leicht wird, den Werth von u in 62) zu berechnen; man findet

$$65) \qquad u = 181440,$$

so dass S_6 beständig auftritt in der Form $\frac{S_6}{181440}$.

Führt man die analoge Rechnung für S_8 und S_{10} durch, so zeigt sich, dass diese Grössen immer erscheinen als $\frac{S_8}{9676800}$ und $\frac{S_{10}}{479001600}$.

Es fragt sich zunächst, welches das Bildungsgesetz dieser constanten Divisoren ist. Der Umstand, dass bei der Ableitung der Formeln Summationen der natürlichen Zahlenreihe vorkommen, führte darauf, die Bernouilli'schen Zahlen als in den Constanten vorhanden zu vermuthen, und es zeigt sich in der That, dass die Grössen S, soweit wir sie bis jetzt kennen, mit ihren Constanten geschrieben werden dürfen:

$$\frac{S_2}{2.2!\,6}, \quad \frac{S_4}{4.4!\,30}, \quad \frac{S_6}{6.6!\,42}, \quad \frac{S_8}{8.8!\,30}, \quad \frac{5\,S_{10}}{10.10!\,66},$$

wo man in den Factoren $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}$ die Bernouilli'schen Zahlen B_1, B_3, B_5, B_7, B_9 erkennt. Da uns ein allgemeiner Beweis der Endformel bis jetzt nicht gelang, so verstatten wir es uns, fortwährend nach Analogien zu schliessen; numerische Prüfungen haben die Richtigkeit der Schlüsse stets bewährt. Aus dem für die Grössen S_2 bis S_{10} Gezeigten folgern wir, dass allgemein $S_{2\nu}$ auftritt in der Gestalt

$$66) \qquad \frac{S_{2\nu} B_{2\nu-1}}{2\nu \, . \, (2\nu)!} = C_{2\nu},$$

und gehen zu der Art und Weise über, wie die Grössen C zur Bildung der Coefficienten von R herangezogen werden. Diese Coefficienten mögen durch D bezeichnet werden und den Namen „diophantische Summen" tragen; sie sind homogene Functionen der Coefficienten a vom geraden Grade; für ihre Bildung ergiebt sich leicht folgende Regel.

Man stelle alle Combinationen der geraden Zahlen zur Summe $2s$ auf; D_{2s} wird dann gewonnen, indem man die geraden, in einer Complexion vorkommenden Zahlen zu Indices der C macht, die neuen Complexionen als Producte auffasst, gleiche Factoren zu Potenzen zusammenzieht, jeder Potenz die Facultät ihres Exponenten als Divisor beigiebt und alle so behandelten Complexionen addirt. Hätte man z. B.

$$2\alpha + 4\beta + 6\gamma + 8\delta \ldots = 2s$$

als eine der Combinationen, dann ist das entsprechende Glied der diophantischen Summe D_{2s} gleich

$$\frac{C_2^{\alpha}}{\alpha!}\cdot\frac{C_4^{\beta}}{\beta!}\cdot\frac{C_6^{\gamma}}{\gamma!}\cdot\frac{C_8^{\delta}}{\delta!}\cdots$$

Wir lassen eine Anzahl diophantischer Summen folgen:

$$67)\quad\left\{\begin{aligned}
D_2 &= C_2,\\
D_4 &= \frac{C_2^2}{2!}+C_4,\\
D_6 &= \frac{C_2^3}{3!}+C_2C_4+C_6,\\
D_8 &= \frac{C_2^4}{4!}+\frac{C_2^2}{2!}C_4+C_2C_6+\frac{C_4^2}{2!}+C_8,\\
D_{10} &= \frac{C_2^5}{5!}+\frac{C_2^3}{3!}C_4+\frac{C_2^2}{2!}C_6+C_2\frac{C_4^2}{2!}+C_2C_8+C_4C_6+C_{10},\\
D_{12} &= \frac{C_2^6}{6!}+\frac{C_2^4}{4!}C_4+\frac{C_2^3}{3!}C_6+\frac{C_2^2}{2!}\frac{C_4^2}{2!}+\frac{C_2^2}{2!}C_8+C_2C_4C_6+C_2C_{10}+\frac{C_4^3}{3!}\\
&\quad +C_4C_8+\frac{C_6^2}{2!}+C_{12}
\end{aligned}\right.$$

u. s. f.

Liegt nun

$$68)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_k x_k = A$$

vor, wo die a unter einander theilfremd sind, und ist, wie früher

$$69)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\equiv m\,(mod\,P),\quad m\,\substack{\overline{<}\,P\\ >0},\\ &A-m=pP,\end{aligned}\right.$$

so schliessen wir aus allen bisherigen Bemerkungen, dass die Theilsätze, welche $f_n(A)$ zusammensetzen, von der Gestalt sind $\left(R=m-\frac{S_1}{2}\right)$:

$$\frac{p^{n-\nu-1}P^{n-\nu-2}}{(n-\nu-1)!}\left(\frac{R^{\nu}}{\nu!}-\frac{R^{\nu-2}}{(\nu-2)!}D_2+\frac{R^{\nu-4}}{(\nu-4)!}D_4-\ldots\right)$$

oder, wenn $\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ die Anzahl der in den $\frac{\alpha}{\beta}$ enthaltenen Ganzen bezeichnet

$$70)\qquad \frac{p^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!}P^{n-\nu-2}\sum_{q=0}^{q=\varepsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)}(-1)^q\frac{R^{\nu-2q}}{(\nu-2q)!}D_{2q},$$

wobei $D_0=1$, $0!=1$ gerechnet ist. Man erhält dann sofort

$$71)\quad f_n(A)=f_n(m)+\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}\frac{p^{n-\nu-1}P^{n-\nu-2}}{(n-\nu-1)!}\sum_{q=0}^{q=\varepsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)}(-1)^q\frac{R^{\nu-2q}D_{2q}}{(\nu-2q)!}$$

als endgiltiges Ergebniss, das sich folgendermassen aussprechen lässt:

Nimmt in einer gegebenen diophantischen Gleichung von theilfremden Coëfficienten das Absolutglied Werthe an, welche Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung mit einer Differenz gleich dem Producte aller Coefficienten sind, so bilden die zugehörigen Lösungsanzahlen Glieder einer arithmetischen Reihe bestimmt höherer Ordnung, deren sämmtliche Differenzen bekannt sind; in jedem besondern Falle braucht nur das Anfangsglied ermittelt zu werden, für welches sich, wie es scheint, keine allgemeine Darstellung geben lässt.

Wir verzichten auf die Wiedergabe der Formeln für 7, 8, 9... Unbekannte, da in den Ausdrücken 67) das Material zum Aufbau derselben bis zu einer Gleichung mit 15 Unbekannten vollständig gegeben ist, und behalten uns für eine weitere kleine Abhandlung die Untersuchung des Ausdruckes $\sum_{\mu=1}^{\mu=P} f_n(m)$, sowie der Art und Weise, wie die Formel 71) umgestaltet werden kann, vor.

VI.

Ueber die Ausdrücke $\Sigma f_n(m)$ und die Umgestaltungen der Formel für die Lösungsanzahlen; Anwendung der Formel in der Combinationslehre.

Von

Dr. K. Weihrauch,

Docent an der Universität Dorpat.

1.

Bezeichnet $f_n(m)$ wieder die Anzahl der Lösungen für die mit theilfremden Coefficienten behaftete Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k x_k = m \tag{1}$$

und hat man

$$\left\{\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{k=n} a_k = P, \\ &m \begin{smallmatrix} \leqq P \\ > 0 \end{smallmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

so ist im vorigen Artikel durch die Gleichungen 16), 44), 51), 57) gezeigt worden, dass $\sum_{m=1}^{m=P} f_n(m)$ für $n = 2, 3, 4, 5$ darstellbar ist durch P und die Grössen

$$S_i = \sum_{k=1}^{k=n} (a\ )^i. \tag{3}$$

Um in ähnlicher Weise, wie in V, 6., ein allgemeines Resultat abzuleiten, stellen wir die in V gewonnenen Ergebnisse in etwas anderer Ordnung, als dort, zusammen und fügen noch den direct berechneten Werth der Summation für $n = 6$, der in V fehlt, bei. Man hat so

$$\sum_{m=1}^{m=P} f_2(m) = \frac{P - S_1 + 1}{2}, \tag{4}$$

$$
4)\quad\left\{\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{m=P} f_3(m) &= \frac{1}{2!}\left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)^2 - \frac{S_2-P^2+1}{2.2!\,6},\\
\sum_{m=1}^{m=P} f_4(m) &= \frac{1}{3!}\left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)\left(\frac{S_2-P^2+1}{2.2!\,6}\right),\\
\sum_{m=1}^{m=P} f_5(m) &= \frac{1}{4!}\left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2!}\left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)^2\left(\frac{S_2-P^2+1}{2.2!\,6}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{S_2-P^2+1}{2.2!\,6}\right)^2 + \frac{S_4-P^4+1}{4.4!\,30},\\
\sum_{m=1}^{m=P} f_6(m) &= \frac{1}{5!}\left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!}\left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)^3\left(\frac{S_2-P^2+1}{2.2!\,6}\right)\\
&\quad + \left(\frac{P-S_1+1}{2}\right)\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{S_2-P^2+1}{2.2!\,6}\right)^2 + \frac{S_4-P^4+1}{4.4!\,30}\right].
\end{aligned}\right.
$$

Der Aufbau dieser Formeln ähnelt sehr dem der Coefficienten von P in V, Gleichung 60), wenn an Stelle der dortigen R und S_t die Grössen $\frac{P-S_1+1}{2}$ und $\frac{S_t-P^t+1}{2}$ gesetzt werden; wir verstatten uns deshalb dieselben Schlüsse, wie *l. c.*, setzen

$$5)\qquad \frac{P-S_1+1}{2} = H,$$

$$6)\qquad \frac{(S_{2q}-P^{2q}+1)\,B_{2q-1}}{2q.(2q)!} = J_{2q},$$

wo B_{2q-1} wieder die q^{te} Bernouilli'sche Zahl ist. Man hätte so z. B.

$$7)\qquad \sum_{m=1}^{m=P} f_2(m) = \frac{H^6}{6!} - \frac{H^4}{4!}J_2 + \frac{H^2}{2!}\left(\frac{J_2^2}{2!}+J_4\right) - \left(\frac{J_2^3}{3!}+J_2J_4+J_6\right),$$

eine Formel, die man durch die Gleichung $\sum_{k=1}^{k=2} x_k = 1$, für welche Null als Resultat entstehen muss, leicht verificirt. Dem System 67) in V entsprechend setzen wir

$$
8)\quad\left\{\begin{aligned}
G_2 &= J_2,\\
G_4 &= \frac{J_2^2}{2!} + J_4,\\
G_6 &= \frac{J_2^3}{3!} + J_2J_4 + J_6,\\
G_8 &= \frac{J_2^4}{3!} + \frac{J_2^2}{2!}J_4 + J_2J_6 + \frac{J_4^2}{2!} + J_8\\
&\text{u. s. w.},
\end{aligned}\right.
$$

wo die G sich ebenso aus den J zusammensetzen, wie in V die D aus den C. Man hat dann für die Gleichung 1) ganz allgemein

$$9)\qquad \sum_{m=1}^{m=P} f_n(m) = \sum_{q=0}^{q=\epsilon\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^q \frac{H^{n-1-2q}}{(n-1-2q)!} G_{2q},$$

wo $G_0 = 1$ gerechnet werden muss.

2.

Zwei Umstände waren es, die zu einer erneuten Behandlung der Formel 71) in V, welche die Lösungsanzahl darstellt, aufforderten; einmal der, dass in der obigen Gleichung 9) eine ganze Summe solcher Lösungsanzahlen durch eine einzige Summation dargestellt erscheint, während in V, 71) für den Ausdruck $f_n(A)$ eine doppelte Summation erforderlich ist; dann aber musste man *a priori* vermuthen, dass, falls in V, 71) die Grössen p, P und R vermittelst der Gleichungen II, 69) und 58), soweit thunlich, ersetzt würden, bei der schliesslichen Entwickelung der Binomialpotenzen die Grössen A und m vollständig getrennt nicht in demselben Product als Factoren auftreten müssten, dass also, wenn $\varphi_\nu(a_k)$ bestimmte, noch abzuleitende Functionen der Coefficienten a_k bedeutet, V, 71) dürfe umgestaltet werden in

$$10)\qquad f_n(A) - f_n(m) = {}_\nu\sum (A^\nu - m^\nu)\, \varphi_\nu(a_k).$$

Wir setzen der Deutlichkeit wegen den Ausdruck V, 71) nochmals hierher, indem wir hinsichtlich der Bedeutung der Grössen D, welche nur aus den a_k gebildet sind, auf V verweisen. Für die Gleichung mit theilfremden Coefficienten

$$11)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_k x_k = A$$

findet sich als Lösungszahl $f_n(A)$

$$12)\qquad f_n(A) = f_n(m) + \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \frac{p^{n-\nu-1} P^{n-\nu-2}}{(n-\nu-1)!} \sum_{q=0}^{q=\epsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)} (-1)^q \frac{R^{\nu-2q} D_{2q}}{(\nu-2q)!},$$

wo

$$13)\qquad \left\{\begin{aligned} &A \equiv m \,(mod\, P), \quad m \lesseqgtr {P \atop 0}, \\ &A - m = pP, \\ &R = m - \frac{S_1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Benutzt man die beiden ersten Gleichungen 13), so gelangt man zu

$$14)\qquad f_n(A) = f_n(m) + \frac{1}{P} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \frac{(A-m)^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} \sum_{q=0}^{q=\epsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)} (-1)^q \frac{R^{\nu-2q} D_{2q}}{(\nu-2q)!}.$$

Wollte man hier noch R durch $m - \frac{S_1}{2}$ ersetzen und die Potenzirungen ausführen, so dürfte es nur schwer gelingen nachzuweisen, dass die Coefficienten aller Ausdrücke wie $A^u m^v$, in denen u und v gleichzeitig von Null verschieden sind, verschwinden; auf folgendem Umwege, der zugleich auf die einfachste und kürzeste Form für $f_n(A)$ führt, gelangt man leichter zu dem erstrebten Ziele. Stellt man in 12) alle Theilsätze zusammen, in denen D_{2q} vorkommt, so entsteht

$$D_{2q}\sum_{\nu=2q}^{\nu=n-2}\frac{P^{n-\nu-2}p^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!}(-1)^q\frac{R^{\nu-2q}}{(\nu-2q)!}$$

oder

$$\frac{(-1)^q D_{2q}}{P(n-1-2q)!}\sum_{\nu=2q}^{\nu=n-2}\frac{(n-1-2q)!}{(n-\nu-1)!\,(\nu-2q)!}(Pp)^{n-\nu-1}R^{\nu-2q}.$$

Setzt man $\nu-2q=v$, so entsteht

$$(-1)^q\frac{D_{2q}}{P\,(n-1-2q)!}\sum_{v=0}^{v=n-2-2q}(n-1-2q)_v(Pp)^{n-1-2q-v}R^v$$

oder

$$(-1)^q\frac{D_{2q}}{P.(n-1-2q)!}\left[(Pp+R)^{n-2-1q}-R^{n-1-2q}\right].$$

Wird hier 13) berücksichtigt, so erhält man

$$f_n(A)=f_n(m)+\frac{1}{P}\sum_{q=0}^{q=\varepsilon\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{(-1)^q D_{2q}}{(n-1-2q)!}\left[\left(A-\frac{S_1}{2}\right)^{n-1-2q}-\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^{n-1-2q}\right]. \tag{15}$$

Hier ist nun $f_n(A)$ durch eine einfache Summation dargestellt und es erscheinen A und m ganz voneinander getrennt, wie es oben vermuthet wurde. Zur Ausrechnung ist 15) wohl am bequemsten. Aus diesem Getrenntsein von A und m und aus 15) erschliessen wir sofort, dass 14) sich in folgende Gestalt muss bringen lassen, wenn an Stelle von R der Werth aus 13) eingesetzt wird:

$$f_n(A)=f_n(m)+\frac{1}{P}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}(-1)^\nu\frac{(A^{n-1-\nu}-m^{n-1-\nu})}{(n-\nu-1)!}\sum_{q=0}^{q=\varepsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)}(-1)^q\left(\frac{S_1}{2}\right)^{\nu-2q}.\frac{D_{2q}}{(\nu-2q)!}, \tag{16}$$

so dass wir also im Ganzen die drei Darstellungen 12), 15), 16) für die Anzahl der Lösungen einer diophantischen Gleichung mit theilfremden Coefficienten besitzen. Wir geben noch, der Bequemlichkeit beim Rechnen wegen, die Gestalt von 15) für die speciellen Fälle $n=2, 3, 4, 5$.

Für die Gleichung $a_1x_1+a_2x_2=A$ wird

$$f_2(A)=f_2(m)+\frac{A-m}{P}.$$

Für $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=A$ wird

$$f_3(A)=f_3(m)+\frac{1}{P}\left[\frac{1}{2}\left(A-\frac{S_1}{2}\right)^2-\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^2\right].$$

Für $a_1x_2 + a_2x_2 + a_3x_2 + a_4x_4 = A$ wird

$$f_4(A) = f_4(m) + \frac{1}{P}\left[\frac{1}{6}\left(\left(A - \frac{S_1}{2}\right)^3 - \left(m - \frac{S_1}{2}\right)^3\right) - \frac{S_2}{24}(A-m)\right].$$

Für $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = A$ wird

$$f_5(A) = f_5(m) + \frac{1}{P}\left[\frac{1}{24}\left(A - \frac{S_2}{2}\right)^4 - \left(m - \frac{S_1}{2}\right)^4\right] - \frac{S_6}{48}\left[\left(A - \frac{S_1}{2}\right)^2 - \left(m - \frac{S_1}{2}\right)^2\right].$$

Als Zahlenbeispiel diene

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 20,$$

$$P = 6, \quad m = 2, \quad \frac{S_1}{2} = 4, \quad S_2 = 16, \quad A = 20,$$

$$f_5(20) = f_5(2) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{24}(16^4 - 2^4) - \frac{16}{48}(16^2 - 2^2\right),$$

also, da $f_5(2) = 0$:

$$f_5(20 = 441.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung in der That 441 Lösungen besitzt.

3.

Die Formel 12) kann benutzt werden, um die Summe der Combinationen aller Zahlen von 1 bis n zur h^{ten} Classe, falls die Complexionen als Producte aufgefasst werden und die Wiederholung ausgeschlossen ist, in einer Weise darzustellen, welche von der durch Prof. Schlömilch gegebenen* wesentlich abweicht. Es mag jene Summe durch $\mathfrak{C}^h{}_{(1,n)}$ bezeichnet werden. Liegt nun die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k = p+1$$

vor, so hat man, wenn für dieselbe $f_n(p+1)$ bestimmt werden soll (s. V):

$$18) \quad \left\{ \begin{aligned} &A = p+1, \quad P = 1, \quad p = p, \quad m = 1, \quad S_i = n, \\ &R = \frac{2-n}{2}, \quad C_{2\nu} = \frac{n\,B_{2\nu-1}}{2\nu.(2\nu)!}, \end{aligned} \right.$$

woraus sich die Grössen $D_{2\nu}$ leicht finden lassen, und es folgt dann nach 12) mit leichter Modification wegen des negativen Zeichens von R, da ausserdem $f_n(1) = 0$:

$$19) \quad f_n(p+1) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \frac{(-1)^\nu p^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} \sum_{q=0}^{q=\left(\frac{\nu}{2}\right)} (-1)^q \left(\frac{n-2}{2}\right)^{\nu-2q} \frac{D_{2q}}{(\nu-2q)!}.$$

Aus V, 64) folgt aber, dass $f_n(p+1)$ auch dargestellt werden kann durch

$$20) \quad f_n(p+1) = (p)_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} (-1)^\nu \frac{p^{n-\nu-1}}{(n-1)!} \mathfrak{C}^\nu{}_{(1,n-2)},$$

---

* Compendium der höheren Analysis, Bd. II, Abschnitt „Höhere Differentialquotienten“.

woraus sich, da 19) und 20) identisch sein müssen, sofort ergiebt

$$21)\qquad \mathfrak{C}^{\nu}{}_{(1,n-2)} = \frac{(n-1)!}{(n-\nu-1)!}\sum_{q=0}^{q=e\left(\frac{\nu}{2}\right)} (-1)^q \left(\frac{n-2}{2}\right)^{\nu-2q} \frac{D_{2q}}{(\nu-2q)!},$$

ein Ausdruck, der die verlangte Darstellung liefert. Es ist offenbar nur nöthig, falls $\mathfrak{C}^{\nu}{}_{(1,n)}$ gefordert wird, hier $n-2$ durch n zu ersetzen. Dies ist in den späteren Beispielen überall geschehen. Wir geben einige der Grössen D, wie sie in 21) zur Verwendung kommen und aus V, 66) und 67) leicht abgeleitet werden.

$$22)\qquad \begin{cases} D_2 = \dfrac{n}{4!}, \\ D_4 = \dfrac{n^2}{2!\,(4!)^2} + \dfrac{n}{4!\,5!}, \\ D_6 = \dfrac{n^3}{3!\,(4!)^3} + \dfrac{n^2}{5!\,(4!)^2} + \dfrac{n}{(3!)^2\,7!}, \\ D_8 = \dfrac{n^4}{(4!)^5} + \dfrac{n^3}{2!\,5!\,(4!)^3} + \dfrac{n^2}{4!\,(3!)^2\,7!} + \dfrac{n^2}{2!\,(4!\,5!)^2} + \dfrac{n}{2!\,5!\,8!}. \end{cases}$$

Mit Hilfe von 22) findet man aus 21) mit leichter Mühe

$$\mathfrak{C}^1{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$\mathfrak{C}^2{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)n(n-1)(3n+2)}{2^3 . 3},$$

$$\mathfrak{C}^3{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)}{2^4 . 3},$$

$$\mathfrak{C}^4{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8)}{2^7 . 3^2 . 5},$$

$$\mathfrak{C}^5{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(3n^2-n-6)}{2^8 . 3^2 . 5},$$

$$\mathfrak{C}^6{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-5)(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)}{2^{10} . 3^4 . 5 . 7},$$

$$\mathfrak{C}^7{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)\ldots(n-6)(9n^4-18n^3-57n^2+34n+80)}{2^{11} . 3^4 . 5 . 7},$$

$$\mathfrak{C}^8{}_{(1,n)} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-7)(135n^7-315n^6-1575n^5+735n^4+5320n^3+2820n^2-1936n-1152)}{2^{15} . 3^5 . 5^2 . 7}$$

u. s. w.

VII.

Ueber das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und den linearen Strahlencomplex.

Von

Dr. Silldorf

in Magdeburg.

Die folgende Abhandlung bietet in systematischer Entwickelung zunächst die Beweise sämmtlicher Lehrsätze, welche von Herrn Prof. Reye im 69. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik in der Abhandlung: „Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und den linearen Strahlencomplex" ohne Beweis aufgestellt sind; sodann auch neue Lehrsätze, welche denselben Gegenstand betreffen und mit den Reye'schen Lehrsätzen bei meiner Entwickelungsart aus gemeinsamer Quelle fliessen. In dieser Arbeit ist Alles mein Eigenthum, mit Ausnahme erstens der angeführten Lehrsätze des Herrn Reye, zweitens der Lehrsätze und Beweise, welche im Anhang zu desselben Verfassers Geometrie der Lage in den Nummern 155 bis 163 enthalten sind. Ich konnte mich auf diese Nummern nicht unmittelbar beziehen, weil ich die Eigenschaften eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe von Neuem entwickeln musste bei Zugrundelegung der allgemeineren Definition von Nr. 163. Was endlich die Beweise betrifft, welche Herr Reye im § 4 seiner Abhandlung über „collineare Grundgebilde und ihre Erzeugnisse" im 74. Bande des Journals f. d. r. u. a. M. für die Eigenschaften eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe giebt, so habe ich dieselben erst kennen lernen, nachdem ich selbst die diesen Gegenstand betreffenden Entwickelungen vollendet hatte. Ich werde nicht unterlassen, auf die citirte Abhandlung an gehöriger Stelle zu verweisen. Schliesslich sei noch gestattet, zu erwähnen, dass die Nummern 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 34 diejenigen Lehrsätze enthalten, welche von mir selbst aufgefunden sind.

---

1. Ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe besteht aus sämmtlichen Strahlen, welche die Schnittlinien sind entsprechender Ebenen zweier collinearen Strahlenbündel, welche die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechend gemein haben, ohne dass aber jede

ihnen gemeinsame Ebene auch eine entsprechend gemeinsame ist. Seien S und S_1 die Mittelpunkte der collinearen Strahlenbündel, in welchen $\overline{SS_1}$ sich selbst entspricht. Ist P ein beliebiger Punkt des Raumes, so ziehen wir $\overline{SP}$ und denken uns die Ebene von S_1 bestimmt, welche durch P geht und den Strahl enthält, welcher dem Strahle $\overline{SP}$ in S_1 entspricht. Dieser Ebene entspricht eine Ebene des Ebenenbüschels $\overline{SP}$, welche mit ihr den einzigen durch P gehenden Strahl des Strahlensystems erzeugt. Ist andererseits π eine beliebige Ebene des Raumes, so schneidet dieselbe die beiden collinearen Strahlenbündel in zwei collinearen ebenen Systemen, welche den Schnittpunkt von $\overline{SS_1}$ und π entsprechend gemein haben. Ausserdem müssen sie noch eine nicht durch diesen Punkt gehende Gerade entsprechend gemein haben, denn im Allgemeinen haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme die Seiten und Ecken eines Dreiecks entsprechend gemein, von welchem aber auch zwei Seiten und Ecken imaginär werden können. Dies muss hier stattfinden, da, wie wir soeben gesehen haben, im Allgemeinen durch keinen Punkt zwei Strahlen des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe gehen. Doch müssen wir ein r Ausnahme Erwähnung thun. Wenn nämlich die beiden ineinanderliegenden projectivischen Ebenenbüschel $\overline{SS_1}$ zwei Ebenen α und β entsprechend gemein haben, so erkennt man sofort, dass in α und β je eine Gerade u und v sich befinden, welche erzeugt werden durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von S und S_1. Sei P ein ganz beliebiger Punkt von u, Q ein ebensolcher von v; ziehen wir $\overline{PQ}$, so entsprechen den Strahlen $\overline{SP}$, $\overline{SQ}$ die Strahlen $\overline{S_1P}$, $\overline{S_1Q}$ von S_1, und der Ebene $\overline{PSQ}$ entspricht die Ebene $\overline{PS_1Q}$, so dass also die Gerade $\overline{PQ}$ als Strahl des Systems erscheint. Jede Gerade mithin, welche zwei Punkte von u und v verbindet, ist ein Strahl des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe. Jede Ebene γ von S schneidet auf u und v zwei Punkte P und Q aus, durch welche die entsprechende Ebene γ_1 von S_1 gehen muss; daher gilt auch die Umkehrung des vorigen Satzes: Jeder Strahl des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe schneidet u und v.

2. Es kann auch der Fall eintreten, dass die Ebenenbüschel $\overline{SS_1}$ nur eine Ebene α entsprechend gemein haben, in welcher alsdann eine Gerade u sich befindet, erzeugt durch zwei perspectivische Strahlenbüschel. Jeder Punkt P von u ist Mittelpunkt eines Strahlenbüschels erster Ordnung von Strahlen des Strahlensystems, dessen Ebene π durch u gehen muss. Wenn der Punkt P das gerade Gebilde u durchläuft, beschreibt die zugehörige Ebene π einen zu diesem projectivischen Ebenenbüschel erster Ordnung mit u als Axe. Verbinden wir zum Beweise P mit S und S_1, dann sind die Ebenenbüschel erster Ordnung $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ in perspectivischer Lage und erzeu-

gen einen Strahlenbüschel erster Ordnung mit P als Mittelpunkt. Aber die Ebene dieses Strahlenbüschels muss durch u gehen. In der That, greifen wir einen beliebigen Strahl p dieses Strahlenbüschels heraus und verbinden ihn mit u durch eine Ebene $\overline{pu} = \pi$. Diese Ebene schneidet die beiden collinearen Strahlenbündel S und S_1 in zwei collinearen ebenen Systemen Σ und Σ_1, welche die Gerade u Punkt für Punkt entsprechend gemein haben. Mithin müssen sie auch die Strahlen eines Strahlenbüschels erster Ordnung entsprechend gemein haben, dessen Mittelpunkt in diesem Falle nur auf u selbst liegen kann, weil andernfalls sich zwei entsprechende Strahlen der Bündel S, S_1 ausserhalb der Ebene α schnitten. Dieser Mittelpunkt ist der Punkt $p \cdot u = P$, also liegt der Strahlenbüschel erster Ordnung, den die Strahlen des Systems, welche durch P gehen, erfüllen, in der Ebene π. — Seien g, g_1 zwei entsprechende Strahlen der Bündel S und S_1, so giebt es eine Regelschaar von Strahlen des Systems, welche g, g_1, u zu Leitstrahlen hat. Durch P geht immer nur ein Strahl p dieser Regelschaar, welcher die Ebene $\overline{pu} = \pi$ bestimmt. Die Strahlen der Regelschaar vermitteln die projectivische Beziehung der Reihe der Punkte P und der Ebenen π.

3. Wir können nun zusammenfassend sagen: Durch einen Punkt des Raumes geht **ein** Strahl eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe und in einer Ebene des Raumes liegt **ein** Strahl desselben, ausgenommen die Punkte und Ebenen zweier oder einer bisweilen existirenden Geraden, zu welchen ein Strahlenbüschel erster Ordnung von Strahlen des Systems gehört. (Reye, Journal f. d. r. u. a. M., Bd. 74.)

4. Denken wir jetzt durch $\overline{SS_1}$ zwei beliebige Ebenen σ und σ_1 gelegt, welche Träger zweier ebenen Systeme seien. Durch jeden Punkt von σ geht ein Strahl des Systems und trifft σ_1 in einem Punkte, welcher dem ersteren zugewiesen werden soll. Eine Gerade g von σ schneide SS_1 in A und werde von S aus durch einen Strahlenbüschel erster Ordnung projicirt, welchem ein ebensolcher im Strahlenbündel S_1 entspricht, der natürlich auch projectivisch ist zu dem geraden Gebilde g. Dem Punkte A entspricht der Strahl $\overline{S_1 S}$ des Strahlenbüschels S_1, welcher also durch den ihm entsprechenden Punkt des geraden Gebildes geht. Die Ebenen, welche die Punkte von g mit den entsprechenden Strahlen des Büschels S_1 verbinden, bilden daher einen Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Axe durch S_1 geht. Diesem entspricht im Strahlenbündel S ein ebensolcher, und beide erzeugen die Strahlen des Strahlensystems, welche durch die Punkte von g gehen. Diese Strahlen, welche g schneiden, bilden daher eine Regelschaar, zu welcher auch $\overline{SS_1}$ gehört. Da nun $\overline{SS_1}$ auch in σ_1 liegt, so muss in derselben Ebene noch ein Leitstrahl g_1 der Regelschaar liegen, welcher der Geraden g in σ entspricht. Dem Punkte A entspricht der Punkt A_1 in σ_1, in welchem g_1 die

Gerade $\overline{SS_1}$ schneidet. Somit ist erwiesen, dass die ebenen Systeme σ und σ_1 durch die Strahlen des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe collinear aufeinander bezogen werden (a. a. O.).

5. Nehmen wir nunmehr zwei beliebige Punkte T, T_1 auf $\overline{SS_1}$ an, so können wir jeder Ebene von T die Ebene von T_1 zuweisen, welche den in jener enthaltenen Strahl des Systems projicirt. Wir sahen soeben, dass die Strahlen des Systems, welche einer Geraden g begegnen, die durch T geht, eine Regelschaar bilden, von welcher ein Leitstrahl g_1 auch durch T_1 gehen muss. Von g und g_1 aus wird diese Regelschaar durch zwei Ebenenbüschel erster Ordnung projicirt, woraus hervorgeht, dass jedem Ebenenbüschel von T ein ebensolcher von T_1 entspricht. Die Strahlenbündel T und T_1 werden daher durch das Strahlensystem collinear aufeinander bezogen (a. a. O.).

6. Weisen wir jedem Punkte P des vorerwähnten ebenen Systems σ die Ebene π von S zu, welche den durch P gehenden Strahl des Systems projicirt, und bedenken wir, dass die Strahlen, welche eine Gerade g von σ schneiden, eine Regelschaar bilden, von welcher auch ein Leitstrahl durch S gehen muss, so erkennen wir, dass das ebene System σ durch das Strahlensystem reciprok auf den Strahlenbündel S bezogen ist (a. a. O.).

7. Sei nun g eine beliebige Gerade des Raumes. Von S aus projiciren wir dieselbe durch einen Strahlenbüschel erster Ordnung, welchem ein ebensolcher von S_1 entspricht. Der letztere erzeugt mit dem zu ihm projectivischen geraden Gebilde g einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welchem ein ebensolcher von S entspricht. Beide Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welche perspectivisch sind zum geraden Gebilde g, erzeugen die Strahlen des Strahlensystems, welche g schneiden. Legen wir nun durch $\overline{SS_1}$ die beiden beliebigen ebenen Systeme σ und σ_1. Der Ebenenbüschel erster Ordnung, welcher g zur Axe hat, bestimmt in σ einen Strahlenbüschel erster Ordnung, welchem mittels der collinearen Beziehung zwischen σ und σ_1 ein ebensolcher in σ_1 entspricht. Dieser letztere erzeugt mit dem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel g eine Curve zweiter Ordnung, welcher eine ebensolche in σ entspricht. Beide Curven zweiter Ordnung sind perspectivisch zum Ebenenbüschel g und erzeugen ebenfalls die Strahlen des Systems, welche g schneiden. Aber der Strahlenbündel S ist reciprok bezogen auf das ebene System σ, daher ist der Ebenenbüschel zweiter Ordnung mit S als Mittelpunkt projectivisch zu der Curve zweiter Ordnung, welche in σ liegt. Daraus aber folgt, dass das gerade Gebilde g projectivisch ist zu dem Ebenenbüschel g in Ansehung der Punkte und Ebenen, welche demselben Strahle des Strahlensystems angehören, und dass die Curve zweiter Ordnung in σ projectivisch ist zu dem geraden Gebilde g. Beide haben aber

einen Punkt entsprechend gemein und erzeugen somit eine Regelschaar. Also: Die Strahlen des Strahlensystems, welche eine beliebige Gerade des Raumes schneiden, bilden eine Regelschaar (a. a. O.).

8. Wenn s ein beliebiger Strahl des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe ist, P ein beliebiger Punkt auf demselben und π eine beliebige Ebene, welche denselben enthält, so soll jedem Punkte A von π die Ebene von P zugewiesen werden, welche den durch A gehenden Strahl des Systems projicirt. Eine Gerade g in π wird von Strahlen des Systems geschnitten, welche eine Regelschaar bilden, zu welcher auch s gehört. Durch P muss ein Leitstrahl g_1 dieser Regelschaar gehen, und von g und g_1 aus wird die letztere durch Ebenenbüschel erster Ordnung projicirt, woraus hervorgeht, dass der Strahlenbündel P auf das ebene System π reciprok bezogen ist durch die Strahlen des Strahlensystems (a. a. O.).

9. Wählen wir auf s einen zweiten Punkt P_1 und legen durch s eine zweite Ebene π_1, so ist mit Rücksicht darauf, dass alle Strahlen des Systems, welche eine Gerade g schneiden, eine Regelschaar bilden, sofort klar, dass die Strahlenbündel P und P_1, sowie die ebenen Systeme π und π_1 durch das Strahlensystem collinear aufeinander bezogen werden (a. a. O.).

10. Hier ist der Ort, einen Satz und seinen Beweis anzuführen, welcher sich findet im Anhang zu Reye's Geometrie der Lage, Nr. 159, und folgendermassen lautet: „Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe ist bestimmt durch vier seiner Strahlen, wenn von diesen weder drei sich gegenseitig schneiden, noch zwei in einer Ebene liegen, auf welcher auch die übrigen beiden sich schneiden, noch endlich alle vier zu einer und derselben Regelschaar gehören. Wenn nämlich zwei von den vier Strahlen sich schneiden, so muss ihre Ebene durch die eine Axe des Systems gehen und ihr Schnittpunkt auf der andern liegen; diese Axen können also construirt werden, weil jede derselben auch die übrigen beiden Strahlen schneiden muss. Wenn aber keine zwei von den vier Strahlen in einer Ebene liegen, so beziehe man zwei ebene Systeme, welche durch einen s dieser vier Strahlen gehen, collinear aufeinander, so dass sie den Strahl s entsprechend gemein haben und von jedem der übrigen drei Strahlen in zwei homologen Punkten geschnitten werden. Diese collinearen Systeme erzeugen dann das Strahlensystem miteinander."

11. Wie wir wissen, führt jede Gerade g des Raumes, welche kein Strahl des Strahlensystems ist, zu einer Regelschaar, welche gebildet wird von allen Strahlen des Systems, die von den Punkten der Geraden g auslaufen. Nehmen wir einmal an, das Strahlensystem besitze zwei Axen u

und v, welche natürlich für alle möglichen Regelschaaren, die aus den Strahlen des Systems gebildet werden können, Leitstrahlen sind. Zu irgend einem gegebenen Punkte P des Raumes kann man leicht einen andern P_1 finden, welcher jenem conjugirt ist in Bezug auf alle möglichen Flächen zweiter Ordnung, welche Träger der erwähnten Regelschaaren sind. Man braucht nämlich nur die einzige immer existirende Gerade zu ziehen, welche durch P geht und sowohl u als v schneidet, und auf ihr den Punkt zu bestimmen, welcher durch u und v von P harmonisch getrennt ist. Dieser so erhaltene Punkt muss der Polarebene von P in Bezug auf irgend eine der genannten Flächen angehören. Durchläuft P eine Gerade g, so beschreibt der Strahl $\overline{PP_1}$ eine Regelschaar, welche g, u, v zu Leitstrahlen hat, und der Punkt P_1 bewegt sich auf dem Strahle g_1 der Leitschaar, welcher durch u und v von g harmonisch getrennt ist. Sei h eine zweite Gerade, welcher in der angegebenen Weise die Gerade h_1 entspricht. Von einem Punkte A aus projiciren wir h durch einen Strahlenbüschel erster Ordnung, von dessen Strahlen g ein Repräsentant sein soll. Den Schnittpunkten der Geraden g und h müssen entsprechen die Schnittpunkte der Geraden g_1 und h_1, so dass also der Punkt P_1, während P nacheinander alle Geraden g durchläuft, mithin alle Punkte der Ebene $\overline{gh}$ überstreicht, sämmtliche Punkte der Ebene $\overline{g_1h_1}$ durchwandern muss. Die Ebene $\overline{gh}$ muss die Axen u, v in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungslinie ein Strahl des Strahlensystems ist und auch, wie sofort ersichtlich, der Ebene $\overline{g_1h_1}$ angehören muss.

12. Wenn das Strahlensystem nur eine Axe u besitzt, entstehen die Regelschaaren und -Flächen auf folgende Weise. Sei g eine beliebige gegebene Gerade des Raumes, welche von der Axe u aus durch einen Ebenenbüschel erster Ordnung projicirt wird. Oben ist gezeigt, dass zu diesem Ebenenbüschel das gerade Gebilde u projectivisch ist und dass der einer Ebene π entsprechende Punkt P der Mittelpunkt des Strahlenbüschels erster Ordnung ist, welcher alle in der Ebene π befindlichen Strahlen des Systems enthält. Verbinden wir den Punkt P mit dem Schnittpunkte von π und g, so geht durch die projectivischen Gebilde u und g eine Regelschaar hervor, und die Fläche zweiter Ordnung, welche derselben als Träger dient, wird in P von der Ebene π berührt. Mithin berühren sich längs u sämmtliche existirenden Regelflächen. Sucht man zu einem gegebenen Punkte P_1 den in Bezug auf alle diese Flächen conjugirten, so legt man durch P_1 und u eine Ebene π, deren auf u liegender entsprechender Punkt P der gesuchte ist. Umgekehrt sind dem Punkte P als Berührungspunkt der Ebene π mit allen Regelflächen sämmtliche Punkte der Ebene π conjugirt.

13. Endlich habe das Strahlensystem keine Axen. Durch einen gegebenen Punkt P des Raumes geht ein und nur ein Strahl s des Systems. Durch s legen wir zwei ebene Systeme σ und σ_1, welche durch das Strahlen-

system collinear aufeinander bezogen werden, und deren Träger in Bezug auf eine der Regelflächen des Strahlensystems, welche F heissen und den Strahl s nicht enthalten soll, conjugirt sein sollen. Sind S_1, S die Pole von resp. σ, σ_1 in Bezug auf F, so liegt S auf σ und S_1 auf σ_1. Die Punkte S, S_1 sind zugleich die Pole von s in Bezug auf die beiden Kegelschnitte k, k_1, welche die Regelfläche F auf σ und σ_1 ausschneidet; denn $\overline{SS_1}$ ist in Bezug auf F die reciproke Polare von s. Die Pole entsprechender Geraden in collinearen Systemen sind entsprechende Punkte, also entsprechen S, S_1 einander in den collinearen Systemen σ, σ_1. Dreht sich in der Ebene σ eine Gerade g um den Punkt S, so muss sich ihre reciproke Polare g_1 in Bezug auf F in der Ebene σ_1 um den Punkt S_1 drehen. Diese Geraden aber sind entsprechende in den collinearen ebenen Systemen. In der That, schneide g den Kegelschnitt k in M und N, so gehen von M und N Strahlen des Strahlensystems aus, welche auf σ_1 die Punkte M_1 und N_1 bestimmen, die M und N entsprechen. Da MSN in gerader Linie liegen, so befinden auch $M_1 S_1 N_1$ sich in gerader Linie. Die eine der Ebenen, welche die Regelfläche F in M und N berühren, enthält den Strahl $\overline{MM_1}$, die andere den Strahl $\overline{NN_1}$; beide aber müssen sich in der reciproken Polaren g_1 von g schneiden, ihre Schnittlinie muss also in der Ebene σ_1 liegen und $\overline{M_1 N_1}$ sein; $\overline{M_1 N_1}$ ist also wirklich g_1. Die Punkte G und G_1, in welchen g und g_1 die Gerade s schneiden, sind entsprechende in σ und σ_1 und conjugirt in Bezug auf F, also haben die auf s ineinander liegenden projectivischen geraden Gebilde involutorische Lage, und je zwei zugeordnete Punkte dieser Involution sind zugleich conjugirt in Bezug auf die Regelfläche F. Bemerken wir, dass das involutorische gerade Gebilde (GG_1) keine Ordnungspunkte haben kann, weil s keinen Punkt mit F gemein hat, da das Strahlensystem im gegenwärtigen Falle keine Axen besitzt; und dass je zwei zugeordnete Punkte des involutorischen geraden Gebildes (GG_1) auch in Bezug auf die Kegelschnitte k, k_1 conjugirt sind. Man kann dies kurz so ausdrücken: Die Kegelschnitte k, k_1 schneiden s in denselben zwei imaginären Punkten.

14. Sei jetzt Φ eine andere Regelschaar des Systems, welche die Kegelschnitte l und l_1 auf σ und σ_1 ausschneide. Die Curven l und l_1 entsprechen einander collinear in den ebenen Systemen σ und σ_1 in Ansehung der Punkte, welche demselben Strahle der Regelschaar Φ angehören. Die Regelfläche Φ — so sagen wir kurz statt: die von der Regelschaar Φ erzeugte Regelfläche — ruft auf s ein involutorisches gerades Gebilde hervor, dessen zugeordnete Punkte in Bezug auf Φ, also auch in Bezug auf die Kegelschnitte l und l_1 conjugirt sind (denn Φ spielt hier dieselbe Rolle, wie F in der vorigen Nummer). Seien A und B ein Paar solcher in Bezug auf l conjugirter Punkte, welche wir zu σ rechnen wollen. Ihnen müssen in σ_1 zwei Punkte A_1 und B_1 auf s entsprechen, welche ebenfalls conjugirt sind in

Bezug auf l_1; dann sind sie es aber auch in Bezug auf l, die Punktepaare AB und $A_1 B_1$ gehören also der oben besprochenen Involution conjugirter Punkte an. Bedenken wir auch, dass diese Involution Ordnungspunkte nicht besitzen kann, dass also AB und $A_1 B_1$ einander trennen müssen $(AA_1\, BB_1)$. Nun aber gehören nach dem Früheren auch AA_1 und BB_1 als Punktpaare einer Involution ohne Ordnungspunkte an, nämlich der durch die collineare Beziehung der ebenen Systeme σ, σ_1 auf s hervorgerufenen; also müssen auch AA_1 und BB_1 einander trennen. Dies ist aber unmöglich, so lange man von der Annahme ausgeht, dass $ABA_1 B_1$ vier räumlich verschiedene Punkte sind; es bleibt allein die Annahme übrig, dass A_1 mit B und B_1 mit A zusammenfällt $\left(\frac{A \quad B}{B_1 \quad A_1}\right)$. Hieraus folgt, dass die Involution der in Bezug auf Φ conjugirten Punkte identisch ist mit der durch die collineare Beziehung von σ und σ_1 auf s hervorgerufenen. Oder, mit anderen Worten: Sind zwei Punkte des Strahles s in Bezug auf **eine** Regelfläche des Strahlensystems conjugirt, so sind sie es in Bezug auf **alle**. Oder, noch anders: Alle Kegelschnitte, welche von den sämmtlichen Regelflächen des Strahlensystems auf der Ebene σ ausgeschnitten werden, haben den Strahl s dieser Ebene zur ideellen gemeinschaftlichen Secante. Leicht ist zu bemerken, dass die Regelflächen, welche den Strahl s enthalten und bisher von der Betrachtung ausgeschlossen wurden, keineswegs eine Ausnahme machen, da jedem Punkte von s in Bezug auf eine dieser Flächen jeder Punkt desselben Strahles conjugirt ist u. s. w.

15. Kehren wir noch einmal zu der Regelfläche Φ und den von ihr auf σ und σ_1 ausgeschnittenen Kegelschnitten l und l_1 zurück. Die Pole T und T_1 von s in Bezug auf l und l_1 sind entsprechende Punkte in σ und σ_1, also $\overline{TT_1}$ ein Strahl des Strahlensystems. Von einem Punkte A des Strahles s aus legen wir zwei Tangenten an l, welche C und D zu Berührungspunkten haben. Die Verbindungslinie $\overline{CD}$ geht durch T und trifft s in einem Punkte, der B heissen soll. A und B sind conjugirt in Bezug auf l. Denken wir uns jetzt die der vorigen entsprechende Figur in σ_1 construirt, so muss der dem Punkte A entsprechende Punkt A_1 auf B, und der dem B entsprechende B_1 auf A fallen (14.), und ebenso, wie $CTDB$, liegen $C_1 T_1 D_1 B_1$ in derselben Geraden. Eine Ebene, welche die Tangente $\overline{AC}$ und den Strahl $\overline{CC_1}$ enthält, berührt Φ und schneidet σ_1 in der Geraden $\overline{B_1 C_1}$; eine zweite Ebene, welche durch die Tangente $\overline{AD}$ und den Strahl $\overline{DD_1}$ bestimmt wird, berührt ebenfalls Φ und trifft σ_1 in $\overline{B_1 D_1}$. Nach dem Vorigen sind aber $\overline{B_1 C_1}$ und $\overline{B_1 D_1}$ identisch, andererseits ist die Schnittlinie der soeben verwendeten Berührungsebene von Φ die reciproke Polare der Geraden $\overline{CD}$, welche die Berührungspunkte verbindet; mithin ist $\overline{C_1 D_1}$ (oder $\overline{B_1 C_1}$ oder $\overline{B_1 D_1}$)

die reciproke Polare von $\overline{CD}$ in Bezug auf Φ. Dreht sich CD um T, so dreht sich $\overline{C_1 D_1}$ um T_1, folglich ist T_1 der Pol von σ und T der Pol von σ_1 in Bezug auf die Regelfläche Φ, oder die Ebenen σ und σ_1, welche in Bezug auf die Regelfläche F conjugirt sind, sind es auch in Bezug auf jede Regelfläche Φ des Strahlensystems. — Dass das Ausgesprochene auch für die durch s selbst gehenden Regelflächen zutrifft, bedarf kaum der Erwähnung.

16. Wir haben uns jetzt zu überzeugen, dass der zuvor mit T bezeichnete Punkt mit jedem Punkte der Ebene σ zusammenfallen kann. In der That, denken wir uns T irgendwo in σ, so muss er der Pol von s in Bezug auf einen Kegelschnitt l sein, für welchen die zugeordneten Punkte des auf s befindlichen involutorischen geraden Gebildes (GG_1) conjugirt sind (13.). Solcher Kegelschnitte l giebt es unendlich viele; man erhält nur einen, wenn man festsetzt, dass er durch einen gegebenen Punkt gehen soll.* Sei nun ein solcher Kegelschnitt l construirt, so entspricht ihm in σ_1 ein Kegelschnitt l_1, welcher T_1 und s zu Pol und Polare hat und s in denselben imaginären Punkten schneidet, wie l. Es fragt sich nun, ob die Strahlen des Strahlensystems, welche die entsprechenden Punkte von l und l_1 verbinden, einer Regelschaar Φ angehören. Greifen wir drei Punkte PQR von l heraus, dann kann l durch diese drei Punkte und die Involution conjugirter Punkte auf s als eindeutig bestimmt betrachtet werden (Reye, Geometrie der Lage, I, S. 145); ebenso ist l_1 durch $P_1 Q_1 R_1$ und die Involution auf s bestimmt. Die Strahlen $\overline{PP_1}$, $\overline{QQ_1}$, $\overline{RR_1}$ bestimmen eine Regelfläche des Strahlensystems, welcher nach dem Früheren die Involution auf s zu-

* Die Involution conjugirter Punkte auf s wollen wir, wie früher, mit (GG_1) bezeichnen, indem wir ein Paar GG_1 als repräsentirendes herausheben. Sei A der Punkt, durch welchen der gesuchte Kegelschnitt l gehen soll. Wir ziehen $\overline{AT}$, welche s in C schneide, bestimmen sodann den Punkt B, welcher durch T und C von A harmonisch getrennt ist. Dann liegt B auf dem gesuchten l. Verbinden wir noch A und B mit C_1, dem C zugeordneten Punkte auf s, so müssen $\overline{AC_1}$ und $\overline{BC_1}$ die Tangenten von l in A und B sein. Projiciren wir die Reihe der Punkte G von A, die Reihe der conjugirten Punkte G_1 von B aus, so erhalten wir zwei projectivische Strahlenbüschel erster Ordnung, welche einen Kegelschnitt erzeugen, der durch A und B geht und $\overline{AC_1}$ und $\overline{BC_1}$ zu Tangenten hat. Denn wenn der Strahl $\overline{AG}$ zu $\overline{AC}$ wird, also die Mittelpunkte A und B der projectivischen Strahlenbüschel verbindet, wird der entsprechende Strahl zu $\overline{BC_1}$, also zur Tangente in B u. s. w. Dass T und s Pol und Polare sind für den so erzeugten Kegelschnitt, sowie dass C und C_1 in Bezug auf ihn conjugirt sind, ist ersichtlich. Ziehen wir ausser $\overline{AG}$ und $\overline{BG_1}$ noch $\overline{BG}$ und $\overline{AG_1}$, so erhalten wir ein dem erzeugten Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck, dessen Diagonalpunkte TGG_1 sind, womit bewiesen ist, dass auch GG_1 conjugirte Punkte sind in Bezug auf den durch die Strahlenbüschel A und B erzeugten Kegelschnitt. Dieser ist also der gesuchte l.

gehört. Die Kegelschnitte, welche diese Regelfläche auf σ und σ_1 ausschneidet, gehen durch PQR, resp. $P_1 Q_1 R_1$ und die imaginären Ordnungspunkte der Involution auf s, sind also mit l und l_1 identisch. Auch die durch die Regelschaar ($\overline{PP_1}, \overline{QQ_1}, \overline{RR_1}$) bewirkte projectivische Beziehung der Curven l und l_1 ist dieselbe, wie früher, weil jetzt, wie vorher, die Punkte PQR und $P_1 Q_1 R_1$ einander entsprechen. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte der Kegelschnitte l und l_1 bilden also eine Regelfläche Φ des Strahlensystems, so dass T, T_1, l, l_1, Φ jetzt genau dieselbe Bedeutung haben, wie in Nr. 15. Mithin ist auch jetzt der conjugirte Punkt von T, welcher auf dem durch T gehenden Strahle des Systems liegt, der Punkt T_1 in σ_1. Durchläuft daher ein Punkt T die Ebene σ, so durchläuft der Punkt T_1, welcher dem ersteren in Bezug auf alle Regelflächen Φ des Strahlensystems conjugirt ist, die der Ebene σ conjugirte Ebene σ_1.

17. Bedenken wir, dass wir bei unserer Untersuchung von einem beliebigen Strahle s des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe und einer beliebigen durch denselben gelegten Ebene σ ausgegangen sind, so können wir die in den Nummern 11 bis 16 enthaltenen Ergebnisse mit den Worten des Herrn Reye (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 69) aussprechen, wie folgt: „Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P in Bezug auf alle im Strahlensysteme enthaltenen Flächen zweiter Ordnung schneiden sich in einem Punkte P_1, und zwar ist die Gerade $\overline{PP_1}$ ein Strahl des Systems. Und die sämmtlichen Pole einer Ebene hinsichtlich jener Flächen liegen in einer zweiten Ebene, welche die erstere in einem Strahle des Systems schneidet. Die Punkte, sowie die Ebenen des Raumes sind also paarweise einander conjugirt in Bezug auf alle diese Flächen.

Hat das Strahlensystem nur eine Axe u, so ist jedem beliebigen Punkte ein Punkt von u, und jedem Punkte von u sind die sämmtlichen Punkte einer durch u gehenden Ebene conjugirt. Besitzt dagegen das System entweder zwei oder keine Axen, so bilden die Paare conjugirter Punkte und Ebenen ein involutorisches räumliches System. Beschreibt nämlich ein Punkt eine Ebene, so beschreibt zugleich sein conjugirter Punkt die conjugirte Ebene. Jeder Strahl des Strahlensystems entspricht in dem involutorischen Systeme sich selbst, und seine Punkte und Ebenen sind involutorisch gepaart, indem sie einander paarweise conjugirt sind. Keine Gerade des Raumes, ausser den Strahlen und Axen des Strahlensystems, hat mit ihrer entsprechenden einen Punkt gemein. Wenn zwei Axen vorhanden sind, so trennen dieselben je zwei conjugirte Punkte oder Ebenen harmonisch voneinander."

18. Wir nehmen zwei beliebige Punkte S und T im Raume an. Durch S gehe der Strahl s, durch T der Strahl t des vorliegenden Strahlensystems. Durch s legen wir beliebig eine Ebene σ_1, welche von der Regelschaar, welche die $\overline{ST}$ schneidenden Strahlen des Systems bilden, einen Leitstrahl g_1 enthält. Die Ebene, welche g_1 und t bestimmen, heisse τ_1. Dann werden die Strahlenbündel S und T auf die ebenen Systeme σ_1 und τ_1 durch das Strahlensystem reciprok bezogen, jedoch so, dass dem S und T gemeinsamen Ebenenbüschel $\overline{ST}$ oder g das den ebenen Systemen σ_1 und τ_1 gemeinsame gerade Gebilde g_1 entspricht. Hierdurch ist die reciproke Beziehung zweier räumlichen Systeme festgestellt; dem einen derselben gehören die Strahlenbündel S und T, dem andern die ebenen Systeme σ_1 und τ_1 an. Projiciren wir von S und T aus irgend einen Strahl l des Strahlensystems durch zwei Ebenen α und β, so entsprechen denselben die Punkte A_1 und B_1, in welchen l σ_1 und τ_1 schneidet. Der Strahl l entspricht daher sich selbst, also liegt jeder Punkt von l auf der ihm entsprechenden Ebene. Durch jeden Punkt des Raumes geht aber ein Strahl des Strahlensystems, daher liegt j e d e r Punkt auf der ihm entsprechenden Ebene. Dies ist aber das Charakteristische eines N u l l s y s t e m s. Wenn ein Nullsystem als die Gesammtheit aller seiner Leitstrahlen aufgefasst wird, führt es den Namen „linearer Strahlencomplex" oder kurz „Complex", wenn Verwechselung nicht möglich ist. Wir werden beide Bezeichnungen brauchen. Was beim Nullsystem „Leitstrahl", ist beim linearen Strahlencomplex „Complexstrahl" oder auch kurz „Strahl". Das Vorstehende fassen wir zusammen in dem Satz: Z u e i n e m g e g e b e n e n S t r a h l e n s y s t e m e r s t e r O r d n u n g u n d e r s t e r C l a s s e k a n n a u f u n e n d l i c h v i e l e A r t e n e i n l i n e a r e r S t r a h l e n c o m p l e x c o n s t r u i r t w e r d e n, w e l c h e r d a s S t r a h l e n s y s t e m e n t h ä l t.

19. Denken wir uns jetzt zwei lineare Strahlencomplexe C_1 und C_2 gegeben, welche einander durchdringen. Irgend einem Punkte P kommen in den beiden als Nullsysteme aufgefassten Complexen zwei Ebenen π_1 und π_2 als Polarebenen zu, welche durch P selbst gehen und sich in einem Strahle p schneiden, welcher beiden Complexen angehört. Die Pole irgend einer Ebene, welche durch den Strahl p geht, liegen auf p selbst, so dass also p auch als Verbindungslinie der Pole einer und derselben Ebene erscheint. Kurz können wir sagen: p ist ein solcher Strahl, dass die beiden Polarebenen von jedem seiner Punkte sich in ihm schneiden und dass die beiden Pole von jeder durch ihn gehenden Ebene auf ihm liegen. Diese Eigenschaften kommen jedem gemeinschaftlichen Strahle beider linearen Complexe zu. Bezeichnen wir mit L die Gesammtheit dieser Strahlen. Zunächst ist evident, dass durch jeden Punkt des Raumes nur ein Strahl von L geht und dass in jeder Ebene nur ein Strahl von L liegt. Greifen wir einen

beliebigen Strahl p unseres Systems heraus und nehmen auf demselben einen Punkt S an. In jeder Ebene des Strahlenbündels S liegt ein und nur ein Strahl von L. Den sämmtlichen Ebenen von S entsprechen in dem ersten Complexe die Punkte eines ebenen Systems Σ_1 und in dem zweiten Complexe die Punkte eines ebenen Systems Σ_2. Beide ebenen Systeme sind collinear, weil beide reciprok sind zu S. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte von Σ_1 und Σ_2 sind die Strahlen von L, welche in den Ebenen von S liegen. Dem Ebenenbüschel p von S entsprechen in beiden Complexen zwei gerade Gebilde mit dem gemeinsamen Träger p, daher müssen die beiden ebenen Systeme Σ und Σ_1 in p sich schneiden und die Gerade p als Strahl entsprechend gemein haben. Diese Erzeugung des Strahlensystems L ist aber dieselbe, wie die in Nr. 4 angegebene des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe, mithin besteht der Satz: Die gemeinsamen Strahlen zweier linearen Strahlencomplexe bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe. In dem besondern Falle, dass den Ebenen des Ebenenbüschels p des Strahlenbündels S in beiden Complexen dieselben Pole zukämen, wenn also die ineinanderliegenden geraden Gebilde p jeden ihrer Punkte entsprechend gemein hätten, würde das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe nur eine Axe, nämlich den Strahl p, besitzen.

20. Bezeichnen wir mit X irgend einen Punkt und mit ξ_1 die ihm entsprechende Ebene eines linearen Strahlencomplexes. Ausserdem gehe durch X der Strahl x des Strahlensystems, mit dessen Zugrundelegung der lineare Strahlencomplex nach Nr. 18 erzeugt worden ist. Dem Punkte S des Strahles s wurde damals die Ebene σ_1 als Polarebene zugewiesen, daher muss dem Ebenenbüschel $\overline{SX}$ das gerade Gebilde $\overline{\sigma_1 \xi_1}$ entsprechen, dessen Träger ein Leitstrahl der Regelschaar ist, welche gebildet wird von den Strahlen des Systems, welche $\overline{SX}$ schneiden. Dreht sich nun σ_1 um s, während S festgehalten wird, so wird natürlich der lineare Complex ein anderer, weil dem Punkte S nunmehr eine andere Ebene entspricht, und auch die Ebene ξ_1 muss sich um x drehen. Beide Ebenen σ_1 und ξ_1 projiciren aber gleichzeitig denselben Leitstrahl der unveränderlichen Regelschaar, deren Strahlen dem Strahlensystem angehören und $\overline{SX}$ schneiden. Daher durchlaufen σ_1 und ξ_1 projectivische Ebenenbüschel erster Ordnung mit den Axen s und x. Wir können daher den Satz aussprechen: Weist man einem Punkte S, der auf dem Strahle s des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe liegt, eine durch s gehende Ebene σ_1 als entsprechende zu, so ist dadurch jedem Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet und ein linearer Strahlencomplex bestimmt, zu dessen Strahlen sämmtliche Strahlen des Strahlensystems gehören. Dreht sich σ_1 um s, so beschreibt gleichzeitig jede Ebene ξ_1, welche einem Punkte X zugeordnet ist,

einen Ebenenbüschel erster Ordnung, welcher projectivisch ist zu dem von σ_1 beschriebenen, und dessen Axe der durch den Punkt X gehende Strahl x des Strahlensystems ist.

21. Wir können aber auch anstatt des Punktes S die durch ihn gehende Ebene σ_1 festhalten, in welcher der Strahl s des Systems liegt. Irgend eine andere Ebene ξ_1 schneide σ_1 in g_1 und enthalte den Strahl x des Systems. Die g_1 treffenden Strahlen des Systems bilden eine Regelschaar, zu welcher auch s und x gehören. Ein Leitstrahl g muss durch S gehen und x in einem Punkte X treffen. Dieser Punkt ist es, welcher der Ebene ξ_1 in dem schon durch S und σ_1 bestimmten Nullsysteme (linearen Strahlencomplexe) als Pol entspricht. Bewegt sich S auf s, so bewegt sich gleichzeitig X auf x und beschreibt ein gerades Gebilde, welches projectivisch ist zu dem von S durchlaufenen, weil s und x als Strahlen der erwähnten Regelschaar durch deren Leitstrahlen projectivisch aufeinander bezogen sind. Daher der Satz: Weist man einer Ebene σ_1, welche durch den Strahl s des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe geht, einen auf s liegenden Punkt S als entsprechenden zu, so ist dadurch jeder Ebene des Raumes ein in derselben liegender Punkt zugeordnet und ein linearer Strahlencomplex bestimmt, zu dessen Strahlen sämmtliche Strahlen des Strahlensystems gehören. Bewegt sich S auf s, so beschreibt gleichzeitig jeder Punkt X, welcher einer Ebene ξ_1 zugeordnet ist, ein gerades Gebilde, welches projectivisch ist zu dem von S beschriebenen, und dessen Träger der in der Ebene ξ_1 enthaltene Strahl x des Systems ist.

22. Wie zuvor, seien s und t zwei beliebige Strahlen des Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe und σ_1, τ_1 zwei beliebige durch je einen derselben gehende Ebenen, welche sich in der Geraden g_1 schneiden. g_1 ist Leitlinie einer Regelschaar Φ des Strahlensystems, zu deren Strahlen auch s und t gehören. Weist man der Ebene σ_1 einen Punkt S von s als Pol zu, so ist hierdurch, wie wir wissen, ein linearer Strahlencomplex (Nullsystem) bestimmt, und den Punkt T, welcher der Pol der Ebene τ_1 ist, findet man dadurch, dass man den durch S gehenden Leitstrahl g der Regelschaar Φ zieht, welcher t in dem gesuchten Punkte trifft. Werden die Ebenen σ_1 und τ_1 festgehalten und durchläuft S das gerade Gebilde s, so bewegt sich T derart auf t, dass die beiden geraden Gebilde s und t projectivisch sind. Halten wir noch einen Punkt A auf s fest, so werden demselben in den verschiedenen Nullsystemen, welche durch die Lage von S bedingt werden, andere und andere Ebenen α_1 entsprechen. Bekanntlich wird der Strahlenbündel T durch das Strahlensystem reciprok auf das ebene System τ_1 bezogen — eine Beziehung, welche oben zur Constituirung des Nullsystems verwendet wurde. Dem Strahle $\overline{TA}$ muss im Nullsystem die

Gerade a_1 von τ_1 entsprechen, welche der in dieser Ebene befindliche Leitstrahl der Regelschaar ist, welche dem Strahlensystem angehört und $\overline{TA}$ zum Leitstrahl hat. Die Ebene, welche A mit a_1 verbindet, ist die Polarebene von A in dem Nullsystem, welches durch die augenblickliche Lage des Punktes T hervorgerufen wird. Wenn T sich auf t bewegt, beschreibt der Strahl $\overline{AT}$ einen zum geraden Gebilde t projectivischen Strahlenbüschel erster Ordnung mit A als Mittelpunkt. Die Ebene $\overline{\underline{At}}$ dieses Strahlenbüschels wird auf die Ebene τ_1 durch das Strahlensystem collinear bezogen, so dass dem Strahlenbüschel A ein projectivischer in τ_1 entspricht, dessen Mittelpunkt der Punkt $s\cdot\tau_1$ ist, und dessen Strahlen aus den Geraden a_1 bestehen. Der Ebenenbüschel, welcher von A aus diesen letzteren Strahlenbüschel projicirt, hat s zur Axe, besteht aus den Polarebenen α_1 von A und ist in letzter Instanz, wie leicht zu sehen, projectivisch zu dem geraden Gebilde, welches S durchläuft.

Sei jetzt β_1 irgend eine Ebene von s, welche wir unbeweglich denken wollen. In jedem Nullsystem hat diese Ebene einen andern Pol B, und es fragt sich, wie B sich mit S bewegt. Um B zu finden, schneiden wir τ_1 durch β_1 in b_1, welche durch den Punkt $s\cdot\tau_1$ geht. Die Regelschaar des Strahlensystems, von welcher b_1 ein Leitstrahl ist, hat auch s und t zu Strahlen, welche daher von ihrer Leitschaar projectivisch geschnitten werden. Derjenige Strahl dieser Leitschaar, welcher von T ausgeht, schneidet s in dem gesuchten Punkte B, dem Pol der Ebene β_1. Sofort ist ersichtlich, dass B ein gerades Gebilde auf s beschreibt, welches projectivisch ist zu dem von S beschriebenen.

Wir können alle Nullsysteme oder linearen Strahlencomplexe, welche das betrachtete Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe enthalten, auch erzeugen dadurch, dass wir dem oben mit A bezeichneten Punkte der Reihe nach die Ebenen α_1 als Polarebenen zuweisen; dann durchläuft der Punkt S, welcher von einer festen Ebene σ_1 der Pol ist, ein gerades Gebilde, das projectivisch ist zum Büschel der Ebene α_1. Zusammenfassend sprechen wir die Sätze aus:

Weist man einer Ebene σ_1, welche durch einen Strahl s eines gegebenen Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe geht, nacheinander jeden auf s liegenden Punkt S als Pol zu, so werden hierdurch alle linearen Strahlencomplexe oder Nullsysteme bestimmt, welche das gegebene Strahlensystem enthalten. Die Ebenen, welche einem festgehaltenen Punkte A von s der Reihe nach in diesen Nullsystemen als Polaren entsprechen, erfüllen einen Ebenenbüschel erster Ordnung mit s als Axe, welcher projectivisch ist zu dem von S durchlaufenen geraden Gebilde s. Ebenso durchlaufen die Punkte B, welche nacheinander einer festgehaltenen Ebene β_1 von s als Pole entsprechen, ein gerades Gebilde mit s als Träger, welches projectivisch ist zur Reihe der Punkte S. Werden die erwähnten Nullsysteme durch Zuweisung eines festen Punktes S von s und einer um s rotirenden Ebene σ_1 als Pol und Polare erzeugt, so beschreiben die Polarebenen eines festen Punktes von s einen Ebenenbüschel, und die Pole einer festen Ebene von s ein gerades Gebilde, welche projectivisch sind zum Büschel der Ebenen σ_1.

23. Halten wir diesen Lehrsatz mit den in 20 und 21 ausgesprochenen zusammen, so bemerken wir, dass durch die allmälige Zuweisung der Punkte des Strahles s und der Ebene σ_1 als Pol und Polare zwischen allen geraden Gebilden, deren Träger, und allen Ebenenbüscheln erster Ordnung, deren Axen die sämmtlichen Strahlen des Systems sind, Projectivität waltet, insofern die geraden Gebilde von dem Pol einer festen Ebene, die Ebenenbüschel von der Polarebene eines festen Punktes des Trägers oder der Axe durchlaufen werden. Die Gesammtheit aller linearen Complexe, welche ein gegebenes Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe enthalten, wollen wir einen Büschel linearer Strahlencomplexe, oder kurz: Complexbüschel nennen. Ein solcher enthält ebenso viele lineare Complexe, als eine Gerade Punkte. Vier Complexe, welche dadurch hervorgehen, dass vier harmonische Punkte eines Strahles s der durch denselben gehenden festen Ebene σ_1 der Reihe nach als Pole zugewiesen werden, sollen vier harmonische Complexe heissen.

Zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe S und T wollen wir als gegeben denken. Aus dem ersteren greifen wir einen Strahl s, aus dem letzteren einen Strahl t heraus und beziehen die geraden Gebilde s und t projectivisch aufeinander. Alsdann legen wir durch s eine Ebene σ_1, durch t eine Ebene τ_1 und weisen diesen beiden als fest betrachteten Ebenen nach der Reihe je zwei entsprechende Punkte der projectivischen geraden Gebilde s und t als Pole zu. Die durch diese Zuweisung hervorgerufenen linearen Complexe sollen entsprechende heissen, wenn ihre „erzeugenden Pole" — so wollen wir kurz sagen — entsprechende Punkte der geraden Gebilde s und t sind. Wir erhalten so zwei projectivisch aufeinander bezogene Büschel linearer Strahlencomplexe, insofern je vier harmonischen Complexen des einen Büschels vier ebensolche des andern entsprechen. Je zwei entsprechende Complexe derselben haben ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe gemein (19), die Gesammtheit aller dieser Strahlensysteme soll das Erzeugniss der projectivischen Complexbüschel sein.

Sei P ein beliebiger Punkt des Raumes. Durch denselben geht von jedem der „fundamentalen Strahlensysteme" S und T, wie wir sie nennen wollen, ein Strahl. Diese Strahlen seien a und b. Die Polarebenen des

Punktes P bilden zwei projectivische Ebenenbüschel mit den Axen a und b, in denen je zwei Ebenen einander entsprechen, welche in entsprechenden Complexen die Polarebenen des Punktes P sind. Die Schnittlinie zweier solcher Ebenen ist offenbar ein gemeinsamer Strahl der beiden entsprechenden Complexe, mithin ein Strahl des Erzeugnisses der beiden projectivischen Complexbüschel. Wir haben daher den Satz:

Die Strahlen des Erzeugnisses zweier projectivischen Complexbüschel, welche durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehen, bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Andererseits enthält eine gegebene Ebene π des Raumes von jedem der fundamentalen Strahlensysteme S und T einen Strahl. Wenn c und d diese Strahlen sind, so werden die Pole der Ebene $\overline{cd}$ auf c und d zwei projectivische gerade Gebilde beschreiben, wenn solche Pole einander entsprechen, welche der Ebene $\overline{cd}$ in entsprechenden Complexen zukommen. Jede Verbindungslinie zweier solchen Pole ist ein Strahl des Erzeugnisses der projectivischen Complexbüschel, daher der Satz:

Die Strahlen des Erzeugnisses zweier projectivischen Complexbüschel, welche in einer gegebenen Ebene π des Raumes liegen, bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

Hiernach verdient das Erzeugniss zweier projectivischen Büschel linearer Strahlencomplexe den Namen: Strahlencomplex zweiter Ordnung und zweiter Classe. Bemerkenswerth ist die Analogie zwischen der Erzeugung dieses Gebildes und derjenigen einer Curve zweiter Ordnung. Die projectivischen Strahlenbüschel, welche die letztere erzeugen, sind hier die projectivischen Complexbüschel, die Mittelpunkte der Strahlenbüschel sind hier die fundamentalen Strahlensysteme S und T, ein Punkt der Curve als Schnittpunkt entsprechender Strahlen der erzeugenden Büschel ist hier ein Strahlensystem des Erzeugnisses als gemeinsamer Bestandtheil entsprechender Complexe der Büschel. Kurz gesagt, es stehen einander gegenüber: Punkt, Gerade, Curve zweiter Ordnung und zweiter Classe, und: Strahlensystem, linearer Complex, Complex zweiter Ordnung und zweiter Classe.

24. Denken wir uns auf die oben angegebene Weise (18.) ein Nullsystem hergestellt, zu dessen Leitstrahlen die Strahlen eines gegebenen Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe gehören, so wird einer beliebigen Geraden g des Raumes im Nullsystem eine Gerade g_1 entsprechen. Wird g als gerades Gebilde aufgefasst, so liegt der Ebenenbüschel g_1 zu demselben perspectivisch, und umgekehrt. Aber einem Punkte A von g entspricht diejenige Ebene α_1 von g_1, welche den durch A gehenden Strahl a des Strahlensystems enthält, und wir wissen, dass a als Leitstrahl des

Nullsystems, weil er die eine g von zwei entsprechenden Geraden schneidet, auch die andere g_1 schneiden muss (Reye, Geometrie der Lage, II, S. 66). Daher müssen alle Strahlen des Strahlensystems, welche von den Punkten von g ausgehen und eine Regelschaar bilden, auch g_1 schneiden, welche somit zu einem Leitstrahl dieser Regelschaar wird.

Mag noch dem Punkte B von g in dem Nullsystem die Ebene β_1 von g_1 entsprechen, welche den durch B gehenden Strahl b des Strahlensystems enthält. Lassen wir nach und nach alle möglichen Nullsysteme (linearen Strahlencomplexe) entstehen (20), welche die sämmtlichen Strahlen des gegebenen Strahlensystems als Leitstrahlen enthalten, so beschreiben die den als fest gedachten Punkten A und B entsprechenden Ebenen α_1 und β_1 projectivische Ebenenbüschel mit den Axen a und b, und immer ist die Gerade $\overline{\alpha_1\beta_1}$ die der fest gedachten g entsprechende Gerade g_1. Aber wir sahen soeben, dass g_1 mit g stets auf einer Regelschaar des Strahlensystems liegen muss, welche mit demselben zugleich als unveränderlich gegeben ist; daher erzeugen die projectivischen Ebenenbüschel a und b die Leitstrahlen jener Regelschaar und sind projectivisch zu der von ihnen erzeugten Leitschaar. Ist g' irgend eine andere Gerade des Raumes, und haben g'_1, A', B', a', b', α'_1, β'_1 gleiche Bedeutung wie g_1, A, B, a, b, α_1, β_1, so ist die von g'_1 durchlaufene Leitschaar der durch g' und g'_1 gehenden Regelschaar projectivisch zu der von g_1 durchlaufenen Leitschaar, weil die Ebenenbüschel a' und b' projectivisch sind zu den Ebenenbüscheln a und b. Also:

Werden alle Nullsysteme construirt, welche die sämmtlichen Strahlen eines gegebenen Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe zu Strahlen haben, so sind die einer festen Geraden g entsprechenden Geraden g_1 die Leitstrahlen der Regelschaar, welche dem Strahlensystem angehört, und von deren Leitstrahlen g selbst einer ist. Entspricht der Geraden x die Gerade x_1, so ist die von x_1 durchlaufene Regelschaar projectivisch zu der von g_1 durchlaufenen in Ansehung der Geraden x_1 und g_1, welche in demselben Nullsystem den Geraden x und g entsprechen; und alle diese Regelschaaren sind projectivisch zu dem Ebenenbüschel, welchen die einem festen Punkte zugeordnete Polarebene beschreibt.

25. Aus dem vorstehenden Satze geht hervor, dass ein Nullsystem vollkommen bestimmt ist, wenn es sämmtliche Strahlen eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe zu Leitstrahlen haben soll, und entweder die einer Geraden g entsprechende g_1 gegeben ist (welche aber auf der durch g gehenden Regelschaar des Strahlensystems gewählt werden muss), oder eine Gerade g ein Leitstrahl des Nullsystems sein soll (in diesem Falle ist g_1 mit g zusammenfallend zu denken).

Bedenken wir, dass man ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe durch zwei Axen l und l_1 geben kann, welche in einem Nullsystem, dem das Strahlensystem angehört, entsprechende Gerade sein müssen. In der That, alle Strahlen, welche von einem Punkte P der einen Axe aus die andere Axe projiciren, sind Leitstrahlen des Nullsystems und liegen in einer Ebene π_1, welche dem Punkte P entsprechen muss. Durchläuft P die eine Axe, so dreht sich π_1 um die andere, also sind beide Axen einander entsprechende Gerade. (Wenn nur eine Axe existirt, so entspricht sie sich selbst, ist also ein Leitstrahl des Nullsystems; denn zu jedem ihrer Punkte gehört eine Ebene, welche durch sie selbst geht.) Hiernach können wir den Satz aussprechen: Ein Nullsystem ist durch zwei Paare entsprechender Geraden l, l_1 und g, g_1 bestimmt, welche derselben Regelschaar angehören müssen, oder durch ein Paar entsprechender Geraden und einen sie nicht schneidenden Leitstrahl (Reye, im Journal f. d. r. u. a. M., Bd. 69).

26. Andererseits ist aber auch nach Nr. 10 unter den dort angeführten Bedingungen ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe durch vier seiner Strahlen bestimmt, so dass wir den Satz aussprechen können:

Ein linearer Strahlencomplex ist durch fünf seiner Strahlen im Allgemeinen vollkommen bestimmt (Reye, a. a. O.).

Seien a, b, c, d, e fünf gegebene Strahlen eines linearen Strahlencomplexes, so darf man hiernach alle möglichen Combinationen zu vieren aus diesen Strahlen bilden und die Strahlen des durch jede Combination bestimmten Strahlensystems zu dem linearen Complex rechnen. Weiter darf man Strahlen verschiedener Strahlensysteme zu vieren combiniren und die Strahlen der durch diese Combination bestimmten Strahlensysteme zum Strahlencomplex rechnen. Gäbe es eine Gerade u, welche a, b, c, d, e schnitte, so müsste u die einzige Axe jedes der Strahlensysteme sein, welche durch irgend eine Combination der Strahlen a, b, c, d, e zu vieren und durch alle späteren möglichen Combinationen entstehen. Da durch einen beliebigen Punkt X des Raumes unzählig viele Strahlen gehen, welche den erzeugten einaxigen Strahlensystemen angehören, so müssen alle durch X gehenden Strahlen des Complexes die Gerade u schneiden, d. h. jede Gerade, welche u schneidet, ist ein Strahl des Complexes (Reye, a. a. O.).

27. Hier wäre die Stelle, den Satz: „Die Paare von Einzelkräften, welche ein gegebenes räumliches Kräftesystem völlig ersetzen, sind entsprechende Gerade eines Nullsystems", welchen Herr Reye a. a. O. ausspricht, zu beweisen; aber mit Rücksicht auf desselben Verfassers Geometrie der Lage, II, S. 66, Anm., wo dieser Gegenstand schon behandelt ist, kann dies füglich unterbleiben.

Zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe können, ohne identisch zu sein, höchstens drei Strahlen gemein haben. Diese seien

a, b, c. Dann haben die Strahlensysteme sämmtliche Strahlen gemein, welche der durch a, b, c bestimmten Regelschaar angehören. Greifen wir aus dem ersten Strahlensystem einen Strahl d_1, aus dem zweiten einen Strahl e_2 heraus, so bestimmen die fünf Strahlen a, b, c, d_1, e_2 einen linearen Strahlencomplex (26), welchem beide Strahlensysteme angehören. Hieraus geht hervor, dass zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe, welche drei Strahlen gemein haben, Bestandtheile eines und desselben linearen Strahlencomplexes sind. Dieser Satz lässt sich umkehren, nämlich: Zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe haben im Allgemeinen eine Regelschaar gemein, wenn sie Bestandtheile eines linearen Strahlencomplexes sind (a. a. O.). — Nennen wir den linearen Strahlencomplex C_2, welchem die Strahlensysteme S und T angehören. Nach Nr. 18 construiren wir zwei lineare Complexe C_1 und C_3, von denen der erstere das Strahlensystem S, der andere das Strahlensystem T enthält. Jeder Strahl, welchen die drei Complexe C_1, C_2, C_3 gemein haben, ist auch ein gemeinsamer Strahl der Strahlensysteme S und T. Nehmen wir eine beliebige Ebene π an, so kommen derselben in den drei Complexen (Nullsystemen) drei Pole zu: P_1, P_2, P_3. Durchläuft ein Punkt X die Ebene π, so drehen sich seine drei Polarebenen ξ_1, ξ_2, ξ_3 um P_1, P_2, P_3 und beschreiben drei collineare Strahlenbündel. Wenn die drei einander entsprechenden Ebenen sich in derselben Geraden g schneiden, so ist diese offenbar ein Strahl, der allen drei Complexen angehört. Drei collineare Strahlenbündel erzeugen aber im Allgemeinen eine Fläche dritter Oordnung, welche im gegenwärtigen Falle in die Ebene π und eine Fläche zweiter Ordnung zerfallen muss. Denn je drei entsprechende Ebenen ξ_1, ξ_2, ξ_3 der drei collinearen Bündel P_1, P_2, P_3 müssen durch ihren gemeinsamen, auf π befindlichen Pol X gehen. Wenn die Fläche zweiter Ordnung nicht imaginär ist, so muss sie eine Regelfläche sein. Denn wenn drei entsprechende Ebenen sich in einem ausserhalb π gelegenen Punkte schneiden, so müssen sie, da sie auch auf π ihren Pol gemein haben, sich in derselben Geraden schneiden. Wir können also sagen: Zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe haben im Allgemeinen eine Regelschaar gemein, wenn sie Bestandtheile eines linearen Strahlencomplexes sind. Oder, was dasselbe ist: Drei lineare Strahlencomplexe haben im Allgemeinen eine Regelschaar gemein.

Sollen zwei Strahlensysteme nicht demselben linearen Strahlencomplexe angehören, so dürfen sie im Allgemeinen höchstens zwei Strahlen gemein haben. Wenn aber jedes von zwei Strahlensystemen zwei Axen hat, und ein Paar Axen fallen zusammen, während die anderen sich schneiden, so haben die Systeme einen Strahlenbüschel gemein (a. a. O.). Demselben linearen Strahlencomplexe können sie nicht angehören, weil jedem Punkte der Doppelaxe zwei verschiedene Ebenen zugeordnet sein würden.

28. In jedem Nullsystem ist der unendlich fernen Ebene einer ihrer Punkte als Pol zugeordnet. Alle durch diesen Pol gehenden Geraden g sind parallel, und ihre entsprechenden g_1 liegen in der unendlich fernen Ebene. Eine Ebene, welche senkrecht ist zu allen jenen Geraden g, schneidet in der unendlich fernen Ebene eine Gerade aus, welcher eine bestimmte n entspricht, die mithin auf allen ihr conjugirten Ebenen senkrecht steht. Diese Gerade n soll die Hauptlinie des Nullsystems heissen.

Das Nullsystem kann erzeugt werden durch die Gerade n und zwei zugeordnete Gerade g und g_1. Lassen wir eine Gerade an n, g, g_1 entlang gleiten, so muss sie auch n_1 schneiden, da sie ein Leitstrahl ist, d. h. sie muss senkrecht sein zu n. Umgekehrt: eine Gerade, die senkrecht ist zu n und g schneidet, muss, da sie ein Leitstrahl ist, auch g_1 schneiden. Dass übrigens n, g, g_1 auf einem Paraboloid liegen, ist evident. Die eine unendlich ferne Gerade des Paraboloids ist n_1, die andere ist eine Senkrechte zu n; eine Ebene, welche die letztere enthält, muss mithin parallel zu n, also senkrecht auf allen Ebenen sein, welche n_1 enthalten. Wir können also sagen, dass das Paraboloid mit der unendlich fernen Ebene zwei aufeinander senkrechte Gerade gemein hat (Reye, im 69. Bande des Journals f. d. r. u. a. M.).

Legen wir durch g_1 eine Ebene γ parallel zu g, so muss in dieser Ebene ein Leitstrahl s des Nullsystems enthalten sein, welcher n schneidet, senkrecht ist zu n und zu der Regelschaar von Leitstrahlen des Nullsystems gehört, welche durch n, g, g_1 hervorgerufen wird, indem auf diesen drei Geraden ein Leitstrahl der Nullsystems gleiten muss. Da nun der in γ liegende Leitstrahl s auch g schneiden muss, so muss er, falls er im Endlichen liegt, parallel sein zu g, d. h. g muss senkrecht sein zu n, was im Allgemeinen nicht zutrifft, da man g vollkommen willkürlich annehmen kann. Also kann der Leitstrahl s im Endlichen nicht liegen, sondern muss die unendlich ferne Gerade der Ebene γ sein. Da diese Gerade von n und g getroffen werden soll, so müssen beide parallel zur Ebene γ sein. Construiren wir die Linie der kürzesten Entfernung von g und n, so muss diese Linie als Leitstrahl des Nullsystems auch g_1 schneiden, weswegen sie auch in Bezug auf g und g_1 die Linie der kürzesten Entfernung ist. Daher der Satz: Die Linie der kürzesten Entfernung irgend zweier entsprechenden Geraden g und g_1 wird von der Hauptlinie n rechtwinklig geschnitten (a. a. O.).

29. Sei l ein beliebiger gegebener Leitstrahl des Nullsystems, welcher n nicht schneidet. Durch einen Punkt A von l ziehen wir eine Gerade g, welche n nicht trifft, und welcher die Gerade g_1 entspreche. Da l die Gerade g schneidet, muss er auch g_1 treffen. Durch g und n ist aber eine Regelschaar von Leitstrahlen des Nullsystems bestimmt, zu deren Leitschaar g, g_1, n gehören. Weil l den Strahl g dieser Leitschaar trifft, muss

er noch einen Strahl derselben treffen, und dies ist g_1. g_1 wird also durch l bestimmt. Durch n, g und g_1 ist aber das Nullsystem vollkommen bestimmt, also: Ein Nullsystem (linearer Strahlencomplex) ist völlig bestimmt durch seine Hauptlinie n und einen sie nicht schneidenden Strahl (a. a. O.).

Durch diesen Satz sind die nothwendigen Data eines Nullsystems wohl auf das Einfachste angegeben.

30. Sei α eine Ebene senkrecht zur Hauptlinie n und A_1 ihr Schnittpunkt mit derselben, welcher zugleich ihr Pol ist, wie leicht ersichtlich. Um A_1 als Mittelpunkt beschreiben wir einen Kreis k. Den Punkten des Kreises als Polen sind im Nullsystem Ebenen als Polaren zugeordnet, welche einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung bilden, dessen Mittelpunkt A_1 ist. Einer Tangente t des Kreises entspricht ein Berührungsstrahl t_1 des Ebenenbüschels zweiter Ordnung. Verbindet man den Berührungspunkt T von t mit A_1, so muss t_1 senkrecht auf $\overline{TA_1}$ stehen, wie oben bewiesen worden ist. Denken wir uns die drei Geraden t, $\overline{TA_1}$, t_1 starr miteinander verbunden und lassen $\overline{TA_1}$ mit einem beliebigen andern Radius des Kreises k zusammenfallen. In dieser neuen Lage heissen t, T, t_1 resp. t', T', t'_1. Das vorliegende Nullsystem, in welchem n die Hauptlinie und t, t_1 entsprechende Gerade sind, ist durch diese drei Geraden vollkommen bestimmt. Ein zweites Nullsystem wird durch die drei Geraden n, t', t'_1 bestimmt. Wir können aber das erste Nullsystem auch bestimmen durch n und einen Strahl, welcher t und t_1 schneidet, ohne n zu treffen. Aehnliches gilt von der Bestimmung des zweiten Nullsystems. Nun aber lehrt eine einfache Betrachtung*, dass die Ebene der Geraden t_1 und t'_1 durch die Halbirungslinie des Winkels der Geraden $\overline{TA_1}$ und $\overline{T'A_1}$ gehen und den Schnittpunkt von t und t' enthalten muss, mithin giebt es einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen sämmtliche Strahlen sowohl t und t_1 als auch t' und t'_1 schneiden und somit Strahlen beider Nullsysteme sind. Daraus aber folgt die Identität beider Nullsysteme, welche schon aus der Gemeinsamkeit der Hauptlinie n und eines dieselbe nicht schneidenden Strahles geschlossen werden kann. Mit anderen Worten heisst dies:

Den Tangenten eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Hauptlinie des Nullsystems liegt, und dessen Ebene senkrecht zu derselben ist, sind zugeordnet die Strahlen eines

---

* Schneiden wir von A_1 aus auf t_1 und t'_1 gleiche Strecken ab bis M, resp. M', und projiciren das gleichschenklige Dreieck MA_1M' orthogonal auf die Ebene des Kreises k. Dann erkennt man sehr leicht, dass die Projection von $\overline{MM'}$, also auch $\overline{MM'}$ selbst parallel ist zu der Geraden, welche A_1 mit dem Schnittpunkte von t und t' verbindet, woraus folgt, dass die Ebene des Dreiecks MA_1M', d. i. die Ebene $\overline{t_1t'_1}$ dieKreisebene in der Geraden schneidet, welche A_1 mit dem Punkte $t't_1$ verbindet.

Rotationskegels, welcher mit dem Kreise den Mittelpunkt gemein hat, und dessen Axe die Hauptlinie ist.

31. Legen wir durch t eine Ebene ε parallel zu n, so hat dieselbe ihren Pol in dem unendlich fernen Punkte der Geraden t_1, und alle Leitstrahlen, welche die Ebene ε enthält, laufen parallel zu t_1. Alle durch die Tangenten des Kreises k parallel zu n gelegten Ebenen sind die Tangentenebenen eines Rotationscylinders, dessen Axe n ist; und alle Strahlen des Nullsystems, welche diesen Cylinder berühren, bilden denselben Winkel mit der Hauptlinie, nämlich den Winkel, welchen ein Strahl des Rotationskegels mit der Hauptlinie bildet. Bewegen wir einen Strahl des Nullsystems, welcher den Cylinder berührt, um denselben, so dass jeder seiner Punkte in derselben zu n senkrechten Ebene bleibt, so wird sein Berührungspunkt eine Schraubenlinie beschreiben. Daher der Satz:

Ein linearer Strahlencomplex enthält unendlich viele Schraubenlinien, deren sämmtliche Tangenten Strahlen des Complexes sind, und welche auf Rotationscylindern liegen, deren gemeinsame Axe die Hauptlinie ist.

Zwei unendlich nahe Tangenten der Schraubenlinie bestimmen eine Schwingungsebene derselben; die Tangenten aber sind Strahlen des Complexes. Also:

Jedem Punkte einer Schraubenlinie des linearen Complexes oder Nullsystems ist seine Schwingungsebene zugeordnet.

Ferner ist die Senkrechte, welche von einem Punkte der Schraubenlinie auf die Hauptlinien gefällt werden kann, ein Complexstrahl. Daher:

Die Schwingungsebene eines Punktes einer Schraubenlinie des linearen Strahlencomplexes oder Nullsystms wird bestimmt durch die Tangente des Punktes und die Senkrechte, welche von ihm aus auf die Hauptlinie gefällt werden kann.

Da die Annahme von n, t und t_1 das Nullsystem bestimmt, und da diese Geraden nur der Bedingung unterliegen, dass t senkrecht ist zu n, und t_1 senkrecht ist zur Linie der kürzesten Entfernung von t und n in dem Punkte, wo diese Linie n schneidet, so erkennt man, dass jede auf einem Rotationscylinder liegende Schraubenlinie durch Strahlen eines linearen Complexes oder Nullsystems erzeugt werden kann, weswegen der soeben ausgesprochene Satz von jeder einem Rotationscylinder aufgeschriebenen Schraubenlinie gilt.

Denken wir uns eine solche Schraubenlinie nebst dem mit ihr zugleich bestimmten Nullsystem. Eine Ebene π schneide die Schraubenlinie, und in den Schnittpunkten werden die Schwingungsebenen derselben construirt, welche in dem Nullsystem nach dem soeben Bewiesenen zugleich die Polarebenen jener Schnittpunkte sind, also sich in dem Pole der Ebene π, der auf ihr selbst liegt, schneiden müssen. Hierin liegt der schöne Satz, welchen Herr Reye entdeckt und im 15. Bande dieser Zeitschrift mitgetheilt hat. Zugleich bewähren sich die von demselben Herrn a. a. O. ausgesprochenen Worte: „Synthetisch und ohne alle Rechnung lässt sich der obige Satz leicht aus Nr. 13 meiner „„Lehrsätze über ... den linearen Strahlencomplex““ (im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 69) ableiten.“

32. Kehren wir noch einmal zurück zur Betrachtung der Geraden t und t_1 (30). Wenn die Gerade t parallel mit sich selbst in einer zu n senkrechten Ebene verschoben wird, so dass sie einen Parallelstrahlenbüschel beschreibt, so muss t_1 einen zu demselben projectivischen Strahlenbüschel beschreiben, dessen Mittelpunkt auf n liegt in dem Punkte, den wir oben A_1 nannten (Fig. 1 und 2).

Fig. 1.

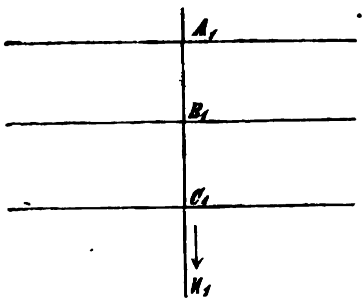
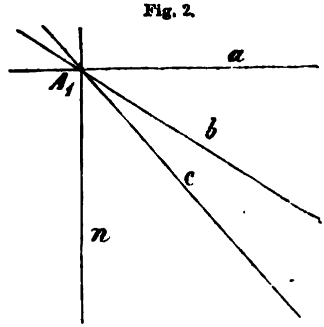


Fig. 2.



Von A_1 aus fällen wir eine Senkrechte auf sämmtliche Strahlen t des Parallelstrahlenbüschels, dann ist das gerade Gebilde, dessen Träger diese Senkrechte ist, projectivisch zum Büschel A_1 der Geraden t_1. Dem Punkte A_1 entspricht der Strahl a, welcher senkrecht ist zu n; dem unendlich fernen Punkte N_1 entspricht n. Zwei beliebigen Punkten B_1, C_1 mögen die Strahlen b, c entsprechen. Die Gleichheit der Doppelverhältnisse liefert

$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_1 C_1}} : \frac{\overline{B_1 N_1}}{\overline{C_1 N_1}} = \frac{\sin(ab)}{\sin(ac)} : \frac{\sin(bn)}{\sin(cn)}.$$

Es ist aber $\frac{\overline{B_1 N_1}}{\overline{C_1 N_1}} = 1$, mithin:

$$\overline{A_1 B_1} : \overline{A_1 C_1} = \frac{\sin(cn)}{\sin(ac)} : \frac{\sin(bn)}{\sin(ab)} = \operatorname{tang}(cn) : \operatorname{tang}(bn)$$

oder

$$\overline{A_1 B_1} \,.\, \operatorname{tang}(bn) = \overline{A_1 C_1} \operatorname{tang}(cn).$$

Ist l irgend ein Strahl des Nullsystems (linearen Strahlencomplexes), welcher n nicht schneidet, so construiren wir die Linie der kürzesten Entfernung von l und n. Diese Linie schneide l in T und n in A_1. Senkrecht zu n und $\overline{A_1 T}$ ziehen wir durch T die Gerade t, dann muss derselben die durch A_1 parallel zu l gezogene Gerade t_1 entsprechen. Dreht sich l um n, ohne seine Entfernung von ihr und seinen Winkel mit ihr zu ändern, so bewegt sich t als Tangente um einen Kreis, und t_1 beschreibt einen Rotationskegel, dessen Strahlen mit n denselben Winkel bilden wie l. Nennen wir a die kürzeste Entfernung von l und n, und α den Winkel, welchen l mit n bildet, so geht mit Rücksicht auf das Nächstvorhergehende der Satz hervor:

Für alle Strahlen des linearen Strahlencomplexes ist das Product $a . tang \alpha$ unveränderlich (a. a. O.). Und:

Ist die Hauptlinie eines linearen Strahlencomplexes und die Constante, welcher $a . tang \alpha$ gleich ist, gegeben, so ist der Strahlencomplex vollkommen bestimmt (a. a. O.).

Ist h die Ganghöhe einer Schraubenlinie, α der Winkel, den ihre Tangente mit der Axe des Schraubencylinders bildet, und a der Radius dieses Cylinders, so besteht die Gleichung $h=\frac{2a\pi}{tang\,\alpha}$. Setzen wir die das Nullsystem bestimmende Constante $=2c$, so haben wir nach dem Obigen die Relation $a . tang\,\alpha = 2c$. Durch Elimination von α folgt $h=\frac{a^2\pi}{c}$ oder $c=\frac{a^2\pi}{h}$, d. h.:

Für alle in einem Nullsystem enthaltenen Schraubenlinien ist der Quotient aus dem Querschnitt des Schraubencylinders und der Höhe des Schraubenganges constant (vgl. Reye, diese Zeitschrift, Bd. 15).

Drehen wir das Nullsystem um die Hauptlinie oder verschieben wir es in der Richtung der Hauptlinie oder thun wir Beides zugleich, so wird ein Strahl l um den ihm zukommenden Rotationscylinder entweder sich drehen oder an ihm entlang gleiten oder Beides zugleich thun, auf jeden Fall aber die Lage eines andern Strahles des ursprünglichen Nullsystems annehmen, so dass also die beschriebene Bewegung das Nullsystem nur in sich selbst übergehen lässt (Reye, Journal f. d. r. u. a. M., Band 69).

33. Ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe liege gegeben vor. Einem Punkte S, der auf dem Strahl s desselben liegt, weisen wir eine durch s gehende Ebene σ_1 als entsprechende zu, so ist dadurch, wie oben (20) bewiesen, jeder Ebene des Raumes ein in derselben liegender Punkt zugeordnet und ein linearer Strahlencomplex bestimmt, zu dessen Strahlen sämmtliche Strahlen des Strahlensystems gehören. Der unendlich fernen Ebene entspreche der Punkt U. Legen wir eine Ebene senkrecht zur Richtung der Geraden, welche den Punkt U im Unendlichen enthalten, so schneidet dieselbe auf der unendlich fernen Ebene eine Gerade n_1 aus, deren entsprechende in dem Nullsystem, welches durch den linearen Complex mit gegeben ist, die sogenannte Hauptlinie n des Complexes ist und

senkrecht steht auf allen Strahlen des Strahlensystems, welche sie schneiden. Denn diese Strahlen sind ja auch Strahlen des Complexes, und alle Strahlen desselben, welche die Hauptlinie schneiden, stehen auf derselben senkrecht.

Lassen wir nunmehr den Punkt S das gerade Gebilde s durchlaufen, halten aber die Ebene σ_1 fest, so wird auch U ein unendlich fernes gerades Gebilde u beschreiben, dessen Träger der einzige im Unendlichen gelegene Strahl des Strahlensystems ist. Die Gerade n wird sich parallel zu den Ebenen bewegen, welche die Gerade u enthalten, und nacheinander alle Punkte des geraden Gebildes u projiciren. Insofern jede Gerade n_1 in einer Ebene liegt, welche senkrecht ist zu der zugehörigen n, werden sämmtliche Geraden n_1 von einem Ebenenbüschel erster Ordnung projicirt werden, dessen Axe nach dem unendlich fernen Punkte gerichtet ist, welchen alle Geraden n_1 gemein haben. Durch diesen Punkt geht ein vollkommen bestimmter Strahl v des Strahlensystems, welcher, da er alle n_1 schneidet, auch alle n schneiden muss. Die Richtung von v ist allen den Ebenen gemein, welche auf den Hauptlinien n senkrecht stehen, daher schneidet v sämmtliche Hauptlinien senkrecht.

Greifen wir eine beliebige Hauptlinie n heraus und legen durch dieselbe eine Ebene ν senkrecht zu dem Strahle v. Die unendlich ferne Ebene und ν werden durch das Strahlensystem collinear aufeinander bezogen, so dass jeder Geraden, welche dem Büschel der Geraden n_1 angehört, ein Leitstrahl der Regelschaar entspricht, deren Strahlen n_1 schneiden. Der Büschel dieser Leitstrahlen hat den Punkt $v\nu$, welchen wir N nennen wollen, zum Mittelpunkt. Bezeichnen wir noch den unendlich fernen Punkt von v mit N_1, so können wir kurz sagen: Die Strahlenbüschel N und N_1 sind projectivisch in Ansehung der Strahlen, welche Leitstrahlen derselben Regelschaar des Strahlensystems sind. Seien n'_1 und n' irgend ein Paar entsprechender Strahlen dieser Büschel. Weisen wir jeder Geraden n'_1 die Ebene von v zu, welche auf der n'_1 projicirenden Ebene von v senkrecht steht, so erhalten wir einen Ebenenbüschel, welcher auf der Ebene ν einen zum Strahlenbüschel n_1, also auch zum Strahlenbüschel N projectivischen Strahlenbüschel ausschneidet. Dieser ist mit N concentrisch; den Strahl, welcher dem Strahle n' von N entspricht, wollen wir m' nennen und mit M den Mittelpunkt des Büschels bezeichnen, so dass also M und N räumlich denselben Punkt bezeichnen. Erinnern wir uns, dass der Strahl n des Strahlenbüschels N eine der Hauptlinien ist und senkrecht steht auf der Ebene, welche den ihm entsprechenden Strahl n_1 von N_1 projicirt. Also fällt n mit dem entsprechenden Strahl m des Büschels M zusammen. Haben aber zwei in derselben Ebene befindliche concentrische Strahlenbüschel, welche projectivisch sind, so wie M und N, einen Strahl $m(n)$ entsprechend gemein, so müssen sie noch einen zweiten $m^0(n^0)$ entsprechend gemein haben. Nun aber ist n^0 ein Leitstrahl der Regelschaar, deren Strahlen $n_1{}^0$ schneiden, und zugleich (als m^0) senkrecht auf der Ebene, welche n_1^0 projicirt; mithin ist n^0 eine Hauptlinie, und wir erkennen, dass eine Ebene, welche senkrecht zu v ist und eine Hauptlinie enthält, noch eine zweite solche enthalten muss, oder, mit anderen Worten: dass die Hauptlinien sich paarweise schneiden.

Hat ein Strahlensystem eine seiner Axen im Unendlichen, und denkt man eine Gerade n senkrecht zu den parallelen Ebenen, welche durch diese Axe gehen, so erzeugt n als Leitstrahl eine Regelschaar, deren Strahlen hervorgehen, indem man in jeder der erwähnten parallelen Ebenen die Punkte verbindet, welche von n und der Axe im Endlichen ausgeschnitten werden. Da n senkrecht steht auf den Strahlen dieser Regelschaar, so ist sie eine Hauptlinie. Fassen wir das Vorstehende mit Herrn Reye's Worten (a. a. O.) zusammen.

Zu einem Strahlensystem S erster Ordnung und erster Classe können unendlich viele Hauptlinien construirt werden, d. h. Gerade, welche auf allen sie schneidenden Strahlen von S senkrecht stehen. Jede derselben ist die Hauptlinie eines durch S gehenden linearen Complexes, und ihr Abstand von einem beliebigen Strahle s des Systems, multiplicirt mit der Tangente ihres mit s gebildeten Neigungswinkels, ist constant (32). Diese Hauptlinien schneiden sich paarweise und werden sämmtlich von einem bestimmten Strahle des Systems S rechtwinklig geschnitten. Jedoch in dem besondern Falle, in welchem das System eine unendlich ferne Axe u hat, ist jede Gerade, welche auf den durch u gehenden Ebenen senkrecht steht, eine Hauptlinie von S.

34. Die Hauptlinien n sind offenbar die Erzeugenden einer Fläche, deren Ordnung wir ermitteln wollen. Untersuchen wir zu diesem Zwecke, wieviele der Geraden n von einer vollkommen beliebigen Geraden g des Raumes getroffen werden können, denn in ebenso vielen Punkten wird g die von den Hauptlinien erzeugte Fläche schneiden. In jedem der Nullsysteme (linearen Strahlencomplexe), welchen das gegebene Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe angehört, entspricht der als fest gedachten Geraden g eine bestimmte Gerade g_1, welche, wenn g die Hauptlinie n des Nullsystems schneidet, die der letzteren entsprechende Gerade n_1 im Unendlichen schneiden muss. Suchen wir also die sämmtlichen einer festen Geraden g in allen Nullsystemen, die das gegebene Strahlensystem enthalten, entsprechenden Geraden g_1 und ermitteln, wie oft es vorkommt, dass eine der letzteren die demselben Nullsystem angehörige Gerade n_1 schneidet, und wir werden die Ordnungszahl der Fläche der Hauptlinien erhalten. In Nr. 24 aber ist gezeigt worden, dass die Geraden g_1 eine Regelschaar erfüllen, welche projectivisch ist zu dem Ebenenbüschel, welchen die

Polarebene eines festen Punktes beschreibt, also auch projectivisch zu dem geraden Gebilde u, welches der Pol U der Ebene im Unendlichen durchläuft. Zu dem geraden Gebilde u ist, wie wir wissen, projectivisch der Büschel der Geraden n_1, also ist zu allerletzt die Regelschaar der Geraden g_1 projectivisch zu dem Büschel der Geraden n_1. Wenn nun die feste Gerade g -- von der die Strahlen des Strahlensystems auslaufen, welche die Regelschaar bilden, deren Leitschaar die Schaar der Geraden g_1 ist -- den Strahl u im Unendlichen nicht schneidet, so wird die Regelschaar der Geraden g_1 die Ebene im Unendlichen in einer zum Büschel der Geraden n_1 projectivischen Curve zweiter Ordnung schneiden, von welcher nach einem bekannten Satze höchstens drei, mindestens aber ein Punkt auf den entsprechenden Strahlen des Büschels n_1 liegen. Schneidet g die Gerade u, so fällt ein Strahl der Regelschaar g_1 ganz in die unendlich ferne Ebene, während die übrigen Strahlen nur ihren auf u gelegenen Punkt mit dieser Ebene gemein haben. Auch in diesem Falle erkennt man sofort, dass höchstens drei, mindestens aber ein Strahl der Regelschaar g_1 die entsprechenden Geraden n_1 treffen. Die von den Hauptlinien n erzeugte Fläche ist also von der dritten Ordnung. Leicht wird noch erkannt, dass diese Fläche in dem Strahle v sich selbst schneidet und die Gerade u im Unendlichen ganz enthält.

35. Denken wir uns irgend eine Regelschaar und construiren zu zwei beliebigen Strahlen l und m derselben die Linie des kürzesten Abstandes n. Ein beliebiger dritter Strahl der Schaar sei p. Dann bestimmen n als Hauptlinie und p als Strahl ein Nullsystem, welchem auch l und m als Strahlen angehören, da sie senkrecht stehen auf n. Aber diesem Nullsystem gehören alle Strahlen der Regelschaar als Strahlen an. Denn ziehen wir eine Gerade g, welche l, m, p schneidet, so muss die derselben im Nullsystem zugeordnete Gerade g_1 auch l, m, p schneiden. Nun aber schneiden alle Strahlen der Regelschaar sowohl g als g_1, weswegen sie Strahlen des Nullsystems sind, da alle Gerade, welche zwei zugeordnete Gerade des Nullsystems schneiden, Strahlen desselben sind. Sind demnach a und a_1 die Abstände von irgend zwei Strahlen der Regelschaar von n und α, α_1 die Winkel, welche sie mit n bilden, so ist nach dem Früheren (32):

$$a \,.\, tang\, \alpha = a_1 \,.\, tang\, \alpha_1 = const.$$

Durch das Nullsystem werden die Strahlen der Leitschaar der Regelschaar involutorisch gepaart. Die Linie des kürzesten Abstandes zwischen n und irgend einem Strahle der Leitschaar muss daher den zugeordneten Strahl der Leitschaar rechtwinklig schneiden, so dass die Strahlen der Leitschaar paarweise mit n auf gleichseitigen Paraboloiden liegen (a. a. O.).

VIII.

Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen.

Von

R. A. Mees,

Professor der Physik an der Universität Groningen.

Wir bekannt ist, kann man bei der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer Reihe von Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ihn ableiten aus der Summe irgend einer Potenz der begangenen Fehler. Nur in diesem Falle bekommt man aber auf diese Weise den genauen Werth, wenn die Anzahl der Beobachtungen sehr gross, eigentlich unendlich gross ist, weil dann die Fehler verschiedener Grösse gerade in der Weise vorkommen, wie bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate vorausgesetzt wird. In diesem Falle ist es hinsichtlich der Genauigkeit des berechneten Werthes des wahrscheinlichen Fehlers ganz gleichgiltig, welche Potenz der begangenen Fehler bei der Berechnung benutzt wird.

Im Allgemeinen giebt diese Methode nicht mehr den genauen Werth, sondern nur einen Näherungswerth, wenn die Zahl der Beobachtungen eine endliche ist, und verdient der Werth, den man alsdann bekommt, desto weniger Zutrauen, je kleiner jene Zahl ist. Gauss hat gezeigt,* dass man in diesem Falle nicht durch jede Potenz der begangenen Fehler den gleichen Grad der Annäherung bei der Berechnung erreicht, und dass der wahrscheinliche Fehler sich dann am Vortheilhaftesten aus den Quadraten der Fehler finden lässt. Dieser Beweis findet sich auch bei Encke** und in mehreren anderen Werken über diesen Gegenstand, u. A. bei

---

* Zeitschrift für Astronomie, von B. v. Lindenau und J. G. F. Bohnenberger, 1. Band, Heft für März und April 1816; oder Gauss' Werke, 4. Band, S. 113 bis 116.

** Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1834, S. 289—294.

Sawitsch*. Das Werk des Letzteren benutze ich als Leitfaden bei meinen Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate an der hiesigen Universität. Jedesmal, wenn ich diesen Gauss'schen Beweis vortrug, wurde meine Aufmerksamkeit auf etwas Fehlerhaftes gelenkt, das dem Beweise anhaftet, und schon vor längerer Zeit theilte ich meinen Zuhörern den schwachen Punkt mit, den ich darin zu entdecken meinte.

Die Beweisführung von Gauss ist nämlich die folgende. Bei der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren Werthe der m^{ten} Potenzen der begangenen Fehler einer endlichen Zahl von Beobachtungen setzt man in der Formel diesen mittleren Werth statt desjenigen, welchen man erhalten hätte, wenn die Fehler gerade in der Weise vorgekommen waren, wie es die Wahrscheinlichkeitsfunction für die Fehler verschiedener Grösse voraussetzt. Daher begeht man einen Fehler in jenem mittleren Werthe der m^{ten} Potenzen; Gauss sucht den mittleren Werth des Quadrates dieses Fehlers und berechnet aus diesem den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels aus den m^{ten} Potenzen. Aus diesem findet er sodann den wahrscheinlichen Fehler des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen für den Fall, dass dieser aus den m^{ten} Potenzen berechnet ist. Er kommt auf diese Weise zum Schlusse, dass der berechnete Werth des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen den kleinsten wahrscheinlichen Fehler hat, wenn man ihn aus den Fehlerquadraten ableitet. Würde man einen gleich zuverlässigen Werth des wahrscheinlichen Fehlers aus den ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten Potenzen der Fehler ableiten wollen, dann braucht man dazu nach der Gauss'schen Rechnung resp. 114, 100, 109, 133, 178, 251 Beobachtungen. Die zweiten Potenzen liefern daher den zuverlässigsten Werth.

Dieser Schluss ist, wie es mir scheint, nicht durch das Vorhergehende gerechtfertigt. Weshalb muss bei der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers, der in dem theoretischen Mittel aus den m^{ten} Potenzen der Fehler zu erwarten ist, wenn man statt dessen das Mittel nimmt aus den m^{ten} Potenzen der Fehler einer endlichen Zahl von Beobachtungen, gerade die Formel benutzt werden, welche diesen Fehler aus dem mittleren Werthe der zweiten Potenzen ableitet? Wenn dies gethan wird, setzt man dann nicht wesentlich *a priori* voraus, dass diese Berechnungsart des wahrscheinlichen Fehlers die genannte ist? Man könnte mit gleichem Rechte den mittleren Werth der dritten Potenzen des Fehlers berechnen und aus diesem den wahrscheinlichen Fehler ableiten. Sehen wir, zu welchem Schlusse dies uns führen wird.

Seien $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ die begangenen Fehler bei n Beobachtungen, $S_m = 2\int_0^\infty \varphi(\Delta)\Delta^m \, d\Delta$ das Mittel aus den m^{ten} Potenzen der Fehler bei

* A. Sawitsch, Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie u. s. w., deutsch bearbeitet von C. G. Lais, § 19, S. 42—45.

einer unendlichen Zahl von Beobachtungen, $\sigma_m = \frac{[\Delta^m]}{n}$ dasselbe für unsere n Beobachtungen. Für eine Summe ähnlicher Glieder werden wir der Bequemlichkeit wegen nur ein Glied derselben zwischen eckigen Klammern schreiben.

Setzt man σ_m statt S_m, so wird ein Fehler begangen:

$$\omega = \sigma_m - S_m.$$

Die dritte Potenz von ω ist

$$\omega^3 = \sigma^3_m - 3\sigma^2_m S_m + 3\sigma_m S^2_m - S^3_m.$$

Der mittlere Werth von ω^3 oder $\overline{\omega^3}$ — denn wir werden nach einer üblichen Schreibweise den mittleren Werth einer Grösse durch einen horizontalen Strich über die Grösse andeuten — ist

$$\overline{\omega^3} = \overline{\sigma^3_m} - 3\overline{\sigma^2_m}S_m + 3\overline{\sigma_m}S^2_m - S^3_m.$$

Es ist aber

$$\sigma^3_m = \frac{[\Delta^m]^3}{n^3} = \frac{(\Delta_1^m + \Delta_2^m + \Delta_3^m + \ldots + \Delta_n^m)^3}{n^3}$$

$$= \frac{[\Delta^{3m}]}{n^3} + 3\frac{[\Delta_i^{2m}\Delta_k^m]}{n^3} + 6\frac{[\Delta_i^m\Delta_k^m\Delta_l^m]}{n^3},$$

$$\overline{[\Delta^{3m}]} = n S_{3m},$$

$$\overline{[\Delta_i^{2m}\Delta_k^m]} = n(n-1)\,S_{2m}S_m,$$

$$\overline{[\Delta_i^m\Delta_k^m\Delta_l^m]} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}S^3_m,$$

folglich

$$\overline{\sigma^3_m} = \frac{S_{3m}}{n^2} + 3\frac{n-1}{n^2}S_{2m}S_m + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}S^3_m.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$\overline{\sigma^2_m} = \frac{\overline{[\Delta^{2m}]}}{n^2} + 2\frac{\overline{[\Delta_i^m\Delta_k^m]}}{n^2} = \frac{S_{2m}}{n} + \frac{n-1}{n}S^2_m$$

und

$$\overline{\sigma_m} = \frac{\overline{[\Delta^m]}}{n} = S_m.$$

Setzen wir diese Werthe von $\overline{\sigma^3_m}$, $\overline{\sigma^2_m}$ und $\overline{\sigma_m}$ in die Formel für $\overline{\omega^3}$, so erhalten wir

$$\overline{\omega^3} = \pm\left(\frac{S_{3m}}{n^2} - 3\frac{S_{2m}S_m}{n^2} + 2\frac{S^3_m}{n^2}\right)$$

und

$$\omega_3 = \sqrt[3]{\overline{\omega^3}} = \pm\frac{S_m}{\sqrt[3]{n^2}}\sqrt[3]{\left(\frac{S_{3m}}{S^3_m} - 3\frac{S_{2m}}{S^2_m} + 2\right)}.$$

Möge ϱ_m der wahrscheinliche Fehler sein, der in S_m zu erwarten ist, wenn man σ_m statt S_m nimmt, so ist

$$\varrho_m = \alpha\,\omega_2 = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{n^2}} S_m \sqrt[3]{\frac{S_{3m}}{S^3_m} - 3\frac{S_{2m}}{S^2_m} + 2},$$

wenn für die Zahl 0,57719 der Buchstabe α gesetzt wird.

Der wahrscheinliche Werth von S_m ist folglich nach einer üblichen Schreibweise

$$\sigma_m \pm \varrho_m \quad \text{oder} \quad \sigma_m\left(1 \pm \frac{\varrho_m}{\sigma_m}\right),$$

und der von $\sqrt[m]{S_m}$

$$\sqrt[m]{\sigma_m}\left(1 \pm \frac{\varrho_m}{\sigma_m}\right)^{\frac{1}{m}},$$

oder angenähert

$$\sqrt[m]{\sigma_m}\left(1 \pm \frac{1}{m}\cdot\frac{\varrho_m}{\sigma_m}\right) \quad \text{oder} \quad \sqrt[m]{\sigma_m}\left(1 \pm \frac{1}{m}\cdot\frac{\varrho_m}{S_m}\right).$$

Aus dem bekannten Ausdrucke für S_m ergiebt sich

$$\frac{S_{6m}}{S^3_{2m}} = \frac{1.3.5.7\ldots(6m-1)}{\{1.3.5.7\ldots(2m-1)\}^3},$$

$$\frac{S_{6m+3}}{S^3_{2m+1}} = \frac{1.2.3.4\ldots(3m+1)}{\{1.2.3.4\ldots m\}^3}.\pi,$$

$$\frac{S_{4m}}{S^2_{2m}} = \frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(4m-1)}{1.3.5.7\ldots(2m-1)},$$

$$\frac{S_{4m+2}}{S^2_{2m+1}} = \frac{1.3.5.7\ldots(4m+1)}{\{1.2.3.4\ldots m\}^2}.\frac{\pi}{2^{2m+1}},$$

und folglich

$$\frac{S_3}{S_1^3} = \pi, \quad \frac{S_6}{S_2^3} = \frac{1.3.5}{1}, \quad \frac{S_9}{S_3^3} = \frac{1.2.3.4}{1}.\pi \quad \text{u. s. w.},$$

$$\frac{S_2}{S_1^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{S_4}{S_2^2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{S_6}{S_3^2} = \frac{1.3.5}{1}.\frac{\pi}{8} \quad \text{u. s. w.}$$

Nennen wir r_m den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen, abgeleitet aus den m^{ten} Potenzen der Fehler, so finden wir mittels der bekannten Beziehung zwischen r_m und S_m für den wahrscheinlichen Werth von r_m

$$r_1 = 0{,}84535\ \sigma_1 \left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^2}} \sqrt[3]{2 - \frac{\pi}{2}}\right) = 0{,}84535\ \sigma_1 \left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^2}} \sqrt[3]{0{,}4292037}\right),$$

$$r_2 = 0{,}67449 \sqrt{\sigma_2}\left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = 0{,}67449 \sqrt{\sigma_2}\left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^2}} \sqrt[3]{1{,}0000000}\right),$$

$$r_3 = 0{,}57719 \sqrt[3]{\sigma_3}\left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^2}}.\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{147}{8}\pi + 2}\right)$$

$$= 0{,}57719 \sqrt[3]{\sigma_3}\left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^2}} \sqrt[3]{2{,}2121024}\right)$$

u. s. w.

Mögen n_1, n_2, n_3 die Zahl der Beobachtungen sein, welche man braucht, damit der wahrscheinliche Fehler bei der Berechnung aus σ_1, σ_2, σ_3 gleich genau sei, so erhalten wir

$$n_1^2 : n_2^2 : n_3^2 = 4292 : 10000 : 22121$$

oder

$$n_1 : n_2 : n_3 = 65{,}5 : 100 : 149$$

nahezu.

Die Berechnung von r aus den ersten Potenzen der Fehler ergiebt sich hier als die genaueste; ein ganz anderes Resultat, als das frühere. Hätten wir zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers von r eine höhere Potenz von ω, als die dritte, benutzt, so würden wir wahrscheinlich ein wieder abweichendes Resultat erhalten haben. Welches dieser verschiedenen Resultate das richtige ist, lässt sich nicht ohne Hilfe anderer Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie entscheiden, wenn man nicht einer der Berechnungsarten des wahrscheinlichen Fehlers schon *a priori* den Vorzug giebt. Dass, wenn man der Berechnung aus den zweiten Potenzen den Vorzug gegeben hat, diese sich auch wesentlich als die genaueste ergiebt, während, wenn man der Berechnung aus den dritten Potenzen den Vorzug gegeben hat, nicht diese, sondern die Berechnung aus den ersten Potenzen für die zuverlässigste Berechnungsart gefunden wird, möge vielleicht dem Satze, dass die Ableitung aus den zweiten Potenzen die genaueste ist, einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit geben; bewiesen ist dadurch der Satz nicht. Was von Sawitsch zum Beweise dieses Satzes angeführt wird, ist mindestens unvollständig.

Man kann aber die Betrachtungen von Sawitsch vervollständigen, wenn man auf andere Weise zeigt, dass der wahrscheinlichste Werth des wahrscheinlichen Fehlers aus den Fehlerquadraten gefunden wird. Gauss* hat für diesen Satz einen Beweis geliefert, welcher auch von Encke** erwähnt wird, für den Fall, dass die wirklich begangenen Fehler einer endlichen Zahl von Beobachtungen genau bekannt sind. Der Beweis kann aber leicht auf den Fall ausgedehnt werden, wenn man nicht die wirklichen, sondern nur die wahrscheinlichen Werthe des Fehlers kennt; in der Formel für die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren Fehlerquadrate braucht alsdann statt des nicht bekannten wahren Werthes nur der wahrscheinliche Werth dieses mittleren Fehlerquadrates gesetzt zu werden. Gauss dehnt aber seinen Beweis nicht auf diesen Fall aus, obgleich er auch dafür giltig ist, wie Encke eingesehen zu haben scheint.

Beide, Gauss und Encke, lassen wenige Seiten weiter auf diesen Beweis die von mir betrachtete Beweisführung folgen, dass, wenn nur die

---

* *l. c.* in Gauss' Werke, S. 111, und in der Zeitschr. f. Astronomie u. s. w.

** *l. c.* S. 270—280. Auch bei Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, 2. Ausg., S. 50, und bei Klinkerfues, Theoretische Astronomie, S. 354, findet sich dieser Beweis.

wahrscheinlichen Werthe der Fehler bekannt sind, bei einer endlichen Zahl von Beobachtungen der wahrscheinliche Fehler sich genau finden lässt aus der zweiten, also aus jeder andern Potenz der Fehler. Sie geben diese letztere Beweisart für einen ganz selbstständigen Beweis und bringen die beiden Beweise gar nicht miteinander in Verbindung. Dies, glaube ich, ist unrichtig. Der letztere Beweis von Gauss ist kein Beweis, der erstere wohl. Hat man aber vorher auf die erstere Weise bewiesen, dass der wahrscheinliche Werth des wahrscheinlichen Fehlers der ist, welcher aus den Fehlerquadraten abgeleitet wird, und wird alsdann gefunden, dass, wenn man zur Beurtheilung der Genauigkeit der Summe der m^{ten} Fehlerpotenzen den mittleren Werth der zweiten Potenz des Fehlers dieser Summe benutzt, derjenige Werth des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtungen sich als der genaueste ergiebt, welcher aus den Fehlerquadraten abgeleitet ist, so ist diese letztere Beweisführung kein neuer Beweis des Satzes, sondern nur eine Bestätigung desselben; denn in der zweiten Beweisführung benutzt man den durch die erstere schon bewiesenen Satz. Nur als Bestätigung der Richtigkeit des Satzes hat diese letztere Betrachtung Werth; aber sie für einen selbstständigen Beweis anzugeben, ist nicht erlaubt.

Auch in einem Buche von Helmert*, das mir vor Kurzem zu Gesicht kam, findet sich derselbe Fehler, wie bei Sawitsch. Auch Helmert beweist auf die zweite Gauss'sche Art, dass der wahrscheinliche Fehler sich genauer berechnen lässt aus den zweiten, als aus den ersten Potenzen der Fehler; die höheren Potenzen werden nicht von ihm behandelt und er spricht über die Berechnung aus diesen nur im Vorbeigehen. Es scheint aber, dass Helmert selbst die Beweisführung nicht ganz gefällt, denn in einer Note auf S. 26 sagt er: „Wir können hier nicht unerwähnt lassen, dass eine strengere Untersuchung erst feststellen müsste, ob man die Genauigkeit der Berechnung von ϑ und μ** nach den mittleren Fehlern (13) beurtheilen darf. Denn die Fehler in S_m befolgen, wie (4*) zeigt, offenbar ein Gesetz, welches von der in § 3, I angenommenen Form des Fehlergesetzes abweicht, so dass (8) und (9) jenes Paragraphen nicht unmittelbar auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen werden dürfen. Eine genauere Untersuchung, die nicht einfach ausfällt, würde uns zu weit führen."

Obgleich Helmert zu einem ähnlichen Schlusse kommt, wie ich, glaube ich jedoch, dass dem Grunde, weshalb Helmert an der Giltigkeit des Gauss'schen Beweises zweifelt, soweit sich dieser aus der angeführten Note schliessen lässt, nicht von mir beigestimmt werden kann. Der Aus-

---

* F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, S. 21—26.

** ϑ ist das arithmetische Mittel aus den absoluten Fehlerwerthen, μ^2 dasjenige aus den Fehlerquadraten.

druck (4*), wovon bei Helmert die Rede ist, wird von ihm auf die folgende Weise abgeleitet. Setzt man für S_m das arithmetische Mittel aus den m^{ten} Potenzen der Fehler oder σ_m, so begeht man einen Fehler in S_m, dessen Quadrat ist

$$(\sigma_m - S_m)^2 = \left(\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^m}{n} - S_m\right)^2.$$

Jedes Δ kann alle Werthe annehmen zwischen Null und dem grösstmöglichen Werthe eines Fehlers, den Helmert mit a bezeichnet. Das Fehlerquadrat von S_m schwankt daher zwischen

$$(a^m - S_m)^2 \text{ und } S^2_m,$$

welche Grenzfälle eintreten für

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = a, \text{ resp. } \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = 0.$$

Dies ist der Ausdruck (4*), worauf Helmert verweist, und auf diesen basirt er den in der Note angeführten, nach meiner Meinung irrigen Schluss. Wie kommt er zu jenem Schlusse? Das ist mir unbekannt. Dieser Ausdruck (4*) zeigt gar nicht offenbar an, dass die Vertheilung der Fehler in S_m nothwendig eine andere sein muss, als in der Wahrscheinlichkeitsrechnung angenommen wird. Um meine Meinung zu begründen, werde ich aber vorher den Ausdruck (4*) in besserer Form schreiben. Die Form dieses Ausdruckes, wie sie von Helmert gegeben wird, ist nämlich verkehrt und könnte den Leser leicht irre führen. Durch sie sollte man meinen können, dass ein Werth des Fehlerquadrats gleich Null nicht vorkommen könnte, denn der Werth Null liegt ausserhalb der angegebenen Grenzen; und wäre dies der Fall, so würden wesentlich die Fehler in S_m ein ganz anderes Gesetz befolgen, als in der Wahrscheinlichkeitsrechnung für das Vorkommen der Fehler angenommen wird; denn nach diesem Gesetze ist gerade der Fehler Null derjenige, dessen Wahrscheinlichkeit den grössten Werth hat.

Die Grenzen für das Fehlerquadrat von S_m sind aber nicht die von Helmert angegebenen, sondern diese:

$$(a^m - S_m)^2 \text{ und } 0,$$

welche Grenzfälle eintreten für

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = a, \text{ resp. } \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta^2_n}{n} = S_m.$$

Und von allen diesen Fällen, die in S_m vorkommen können, hat der kleinste oder Null die grösste, der grösste oder $(a^m - S_m)^2$ die kleinste Wahrscheinlichkeit, in völliger Uebereinstimmung mit dem, was bei der Methode der kleinsten Quadrate für die Wahrscheinlichkeit der Fehler verschiedener Grösse vorausgesetzt wird. Denn derjenige Werth von $\frac{[\Delta^m]}{n}$ hat die grösste Wahrscheinlichkeit, wobei die Fehler Δ das in der Wahrscheinlichkeitstheorie angenommene Gesetz befolgen, folglich der Werth S_m, indem derjenige Werth von $\frac{[\Delta^m]}{n}$ die kleinste Wahrscheinlichkeit hat, wobei alle begangenen Fehler Δ gerade den grösstmöglichen Werth a besitzen, folglich a^m.

Wäre Helmert's Schluss richtig, so würde die zweite Gauss'sche Beweisführung nicht einmal für eine Bestätigung des durch Gauss' ersten Beweis gefundenen Satzes angesehen werden können, indem dies wohl geschehen darf, wenn die Fehler in S_m das in der Wahrscheinlichkeitstheorie angenommene Gesetz befolgen. Dass dies Letztere nicht der Fall ist, folgt aber gar nicht offenbar aus dem Ausdrucke (4*) von Helmert, wie ich zu zeigen versucht habe.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Zur Theorie des Kegelschnittbüschels.

Bei der gleichzeitigen Betrachtung von zwei ternären quadratischen Formen wird man auf einige Combinanten geführt, über deren geometrische Bedeutung und gegenseitigen Zusammenhang die folgende Note handelt.

§ 1. Definitionen.

Die beiden gegebenen Kegelschnitte seien, in Uebereinstimmung mit der von Salmon-Fiedler angewandten Bezeichnungsweise*, dargestellt durch

$$S \equiv a_{11}\, x_1^2 + 2a_{12}\, x_1 x_2 + \ldots + a_{33}\, x_3^2 = 0\,,$$
$$S' \equiv a'_{11} x_1^2 + 2a'_{12} x_1 x_2 + \ldots + a'_{33} x_3^2 = 0.$$

Die Determinante von $\varkappa S + \lambda S'$ setzen wir

$$\Sigma \pm \varkappa a_{11} + \lambda a'_{11} \quad \varkappa a_{22} + \lambda a'_{22} \quad \varkappa a_{33} + \lambda a'_{33} = \Delta \varkappa^3 + \Theta \varkappa^2 \lambda + \Theta' \varkappa \lambda^2 + \Delta' \lambda^3$$
$$= G(\varkappa \lambda) = G$$

und

$$H(\varkappa, \lambda) = \tfrac{1}{18}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa^2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa\, \partial \lambda}\right)^2\right],$$
$$Q(\varkappa, \lambda) = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial G}{\partial \varkappa}\,\frac{\partial H(\varkappa\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\,\frac{\partial H(\varkappa, \lambda)}{\delta \varkappa}\right).$$

Bedeuten ferner A_{ik} und A'_{ik} die Coefficienten von a_{ik} und a'_{ik} in den Determinanten Δ und Δ', so nehmen wir an

$$\Sigma = A_{11}\, \xi_1^2 + 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + \ldots + A_{33} \xi_3^2,$$
$$\Sigma' = A'_{11}\, \xi_1^2 + 2A'_{11} \xi_1 \xi_2 + \ldots + A'_{33} \xi_3^2,$$
$$\Phi = (a_{22} a'_{33} + a_{33} a'_{22} - 2\, a_{23} a'_{23})\, \xi_1^2$$
$$+ 2\,(a_{13} a'_{12} + a_{12} a'_{13} - a_{11} a'_{23} - a_{23} a'_{11})\, \xi_2 \xi_3 + \ldots,$$
$$F = (A_{22} A'_{33} + A_{33} A'_{22} - 2 A_{23} A'_{23})\, x_1^2$$
$$+ 2\,(A_{13} A'_{12} + A_{12} A'_{13} - A_{11} A'_{23} - A_{23} A'_{11})\, x_2 x_3 + \ldots.$$

---

* Analytische Geometrie der Kegelschnitte, nach Salmon frei bearbeitet von Fiedler. 3. Aufl. 1873.

§ 2. **Bestimmung der sechs Kegelschnitte, für welche die vier Grundpunkte ein gegebenes Doppelverhältniss bilden.**

Zieht man von irgend einem Punkte einer bestimmten Curve $\varkappa S + \lambda S' = 0$ des durch die Basen S und S' erzeugten Kegelschnittbüschels nach den vier Grundpunkten Strahlen, so werden diese letzteren ein gewisses Doppelverhältniss bilden, das sogenannte Doppelverhältniss der vier Grundpunkte für den Kegelschnitt $\varkappa S + \lambda S' = 0$. Welche Bedingung muss $\frac{\varkappa}{\lambda}$ erfüllen, damit dasselbe einer gegebenen Zahl s gleich werde? Lässt man den willkürlich wählbaren Punkt auf $\varkappa S + \lambda S'$ mit einem der Grundpunkte zusammenfallen, so bestehen die vier zu betrachtenden Strahlen aus der Tangente von $\varkappa S + \lambda S'$ in diesem Grundpunkte und aus den drei durch denselben gehenden Geraden des Kegelschnittbüschels. Die Zahl s muss also identisch werden mit dem Doppelverhältniss der vier Wurzeln, welche die in $\frac{\varrho}{\sigma}$ biquadratische Gleichung

$$(\varDelta \varrho^3 + \Theta \varrho^2 \sigma + \Theta' \varrho \sigma^2 + \varDelta' \sigma^3)(\varkappa \varrho - \lambda \sigma) = 0$$

besitzt. Da dieses Doppelverhältniss durch eine lineare Transformation nicht geändert wird, so kann man vor der Berechnung in $G(\varrho, \sigma) . (\varkappa \varrho - \lambda \sigma)$ an Stelle von ϱ und σ zunächst die neuen Veränderlichen τ und v vermöge der Substitution einführen

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial \varkappa}\varrho + \frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial \lambda}\sigma\right) = \tau \text{ und } \varkappa\varrho - \lambda\sigma = v,$$

und erhält hierdurch

$$G^2(\varkappa\lambda) . G(\varrho, \sigma)(\varkappa\varrho - \lambda\sigma) = \{\tau^3 + \tfrac{3}{4} H(\varkappa\lambda)\,\tau v^2 + Q(\varkappa\lambda)\, v^3\}\, v.^*$$

Bedeutet ferner $\tau - \omega v$ einen linearen Factor der Klammergrösse rechter Hand und setzt man

$$\tau - \omega v = \varphi,$$

so erhält man eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} v[\tau^3 + \tfrac{3}{4} H(\varkappa\lambda)\,\tau v^2 + Q(\varkappa\lambda)\, v^3] &= v . \varphi . (\varphi - \omega_1 v)(\varphi - \omega_2 v) \\ &= v\varphi^3 - (\omega_1 + \omega_2)\, v^2 \varphi^2 + \omega_1 \omega_2 v^3 \varphi. \end{aligned}$$

Bedenkt man, dass die absoluten Invarianten der beiden biquadratischen Formen auf der rechten und linken Seite dieser Gleichung identisch, und dass $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ gleich dem gesuchten Doppelverhältniss s der vier Wurzeln, so hat man sofort die Beziehung

$$-\frac{H^3(\varkappa\lambda)}{Q^2(\varkappa\lambda)} = \frac{(1 - s + s^2)^3}{(1+s)^2(2-s)^2(1-2s)^2}.$$

---

* Ueber einen einfachen Beweis dieser Gleichung vergl. Borchardt's Journal Bd. 74, S. 87—89.

In Worten:

Die Gleichung sechsten Grades für $\frac{\varkappa}{\lambda}$:

$$H^3(\varkappa\lambda)(1+s)^2(2-s)^2(1-2s)^2+Q^2(\varkappa\lambda).(1-s+s^2)^3=0,$$

bestimmt diejenigen sechs Kegelschnitte $\varkappa S+\lambda S'=0$, für welche die vier Grundpunkte des Büschels das gegebene Doppelverhältniss s bilden.

Als specielle Fälle ergeben sich hieraus die Sätze:

$H(\varkappa\lambda)=0$ liefert die zwei äquianharmonischen Kegelschnitte des Büschels, d. h. diejenigen, für welche das Doppelverhältniss der vier Grundpunkte gleich einer imaginären Cubikwurzel aus -1.

$Q(\varkappa\lambda)=0$ bestimmt die drei harmonischen Kegelschnitte $\varkappa S+\lambda S'=0$, für welche das Doppelverhältniss der Grundpunkte gleich -1 ist.

Eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, dass jede dieser drei harmonischen Curven zweiten Grades sich einer Ecke des gemeinsamen Polardreiecks (Diagonaldreiecks) in bestimmter Weise zuordnet.

Durch jeden Scheitel des Diagonaldreiecks gehen nämlich zwei Diagonalen und ein Geradenpaar des Büschels. Diese zwei Strahlenpaare bestimmen eine Involution, deren Doppelstrahlen den zugeordneten harmonischen Kegelschnitt in dessen Schnittpunkten mit der dritten Diagonale berühren.

§ 3. Genauere Untersuchung der äquianharmonischen Kegelschnitte.

Man gelangt zu den äquianharmonischen Kegelschnitten auch bei der Bestimmung der beiden Curven

$$\varkappa_1 S+\lambda_1 S'=0,\quad \varkappa_2 S+\lambda_2 S'=0,$$

deren zwei einfachste simultane Invarianten verschwinden, d. h. für welche

$$\Theta_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\ \varkappa_2 S+\lambda_2 S'}=0,\quad \Theta'_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\ \varkappa_2 S+\lambda_2 S'}=0,$$

wofern $\Theta_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\ \varkappa_2 S+\lambda_2 S'}$ (bez. $\Theta'_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\ \varkappa_2 S+\lambda_2 S'}$) aus Θ (bez. Θ') vermöge Ersetzung von a_{ik} und a'_{ik} durch $\varkappa_1 a_{ik}+\lambda_1 a'_{ik}$ und $\varkappa_2 a_{ik}+\lambda_2 a'_{ik}$ hervorgeht. Die beiden letzten Beziehungen sind gleichbedeutend mit

$$\varkappa_2\frac{\partial G(\varkappa_1\lambda_1)}{\partial\varkappa_1}+\lambda_2\frac{\partial G(\varkappa_1\lambda_1)}{\partial\lambda_1}=0,\quad \varkappa_1\frac{\partial G(\varkappa_2\lambda_2)}{\partial\varkappa_2}+\lambda_1\frac{\partial G(\varkappa_2\lambda_2)}{\partial\lambda_2}=0,$$

d. h. mit denjenigen, welche aussagen, dass $G(\varkappa\lambda)$ vermöge der Substitutionen

$$\varkappa=\varkappa_1 K+\varkappa_2 \varDelta,\quad \lambda=\lambda_1 K+\lambda_2 \varDelta$$

in $\alpha K^3 + \beta \Delta^3$ übergeführt wird. Nach einem bekannten Theoreme* sind also $\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}, \frac{\varkappa_2}{\lambda_2}$ die Wurzeln der Gleichung $H(\varkappa\lambda) = 0$. In Worten:

Die beiden äquianharmonischen Kegelschnitte des Büschels sind gleichzeitig diejenigen, deren zwei einfachste simultane Invarianten verschwinden.

Für zwei solche Kegelschnitte ist bekanntlich** die Curve zweiter Ordnung $(F_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\, \varkappa_2 S+\lambda_2 S'})$, welche durch die acht Berührungspunkte ihrer gemeinsamen Tangenten geht, identisch mit der Curve zweiter Classe $(\Phi_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\, \varkappa_2 S+\lambda_2 S'})$, welche die acht Tangenten ihrer Schnittpunkte berührt. Offenbar ist die Gleichung dieser letzteren Curve zweiter Classe

$$2\varkappa_1\varkappa_2\Sigma + (\varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\lambda_1)\Phi + 2\lambda_1\lambda_2\Sigma' = 0$$

oder, vermöge der berechneten Coefficienten von $H(\varkappa\lambda)$:

$$2(3\Delta\Theta' - \Theta^2)\Sigma - (9\Delta\Delta' - \Theta\Theta')\Phi + 2(3\Theta\Delta' - \Theta'^2)\Sigma' = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die einfachste simultane Invariante der beiden in $\varkappa$ und λ quadratischen Formen

$$H(\varkappa\lambda) \quad \text{und} \quad \varkappa^2\Sigma + \varkappa\lambda\Phi + \lambda^2\Sigma'$$

und somit eine Combinante des Büschels.*** Da nach einem allgemeinen Theoreme Gordan's † die Gesammtheit der Combinanten von S und S' identisch mit dem Formensystem der biternären Grundform

$$\tfrac{1}{4}\left(\Sigma \pm \frac{\partial S}{\partial x_1}\,\frac{\partial S'}{\partial x_2}\,u_3\right) = N^2{}_x\,u_n = N'^2{}_x\,u_{n'} = \ldots,$$

so ist $F_{\varkappa_1 S+\lambda_1 S',\, \varkappa_2 S+\lambda_2 S'}$ höchst wahrscheinlich, bis auf einen constanten Factor, identisch mit der Combinante

$$\psi = N_x N'_x N_{n'} N'_n.$$

In der That bestätigt sich die Richtigkeit dieser Vermuthung auf folgendem Wege. Vermittelst einer kleinen symbolischen Rechnung †† erhält man

* Vergl. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, bearbeitet von Fiedler, S. 136.

** Vergl. Rosanes in Math. Annal. Bd. II S. 552, sowie Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, S. 473, Aufg. 3.

*** Eine Form φ heisst bekanntlich eine Combinante von S und S', wenn sie gebildet für

$$\lambda S + \mu S' \text{ und } \nu S + \varrho S' \text{ (anstatt für } S \text{ und } S'),$$

sich, abgesehen von einer Potenz der Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu$, reproducirt, wenn also

$$\varphi_{\lambda S+\mu S',\, \nu S+\varrho S'} = \varphi\cdot(\lambda\varrho - \mu\nu)^\alpha.$$

† Math. Annal. Bd. V, S. 116—117.

†† Setzt man symbolisch $S = a^2{}_x = b^2{}_x = \ldots$, $S' = \alpha^2{}_x = \beta^2{}_x = \ldots$, so ist

$$\psi = -\tfrac{1}{4}(\chi - 2\chi' + \chi''),$$

worin

$$\chi = (ab\beta)(ab\alpha)\,\alpha_x\beta_x,\quad \chi' = (ab\beta)(\alpha\beta a)\,\alpha_x b_x,\quad \chi'' = (\alpha\beta a)(\alpha\beta b)\,a_x b_x.$$

$$\psi = -\tfrac{1}{3}(S\Theta' + S'\Theta - 3F)$$

und somit für beliebige Werthe von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ_1 und λ_2

$$\begin{aligned} & -2\psi(\varkappa_1\lambda_2 - \varkappa_2\lambda_1)^2 \\ & = (\varkappa_1 S + \lambda_1 S')\,\Theta'_{\varkappa_1 S + \lambda_1 S',\, \varkappa_2 S + \lambda_2 S'} + (\varkappa_2 S + \lambda_2 S')\,\Theta_{\varkappa_1 S + \lambda_1 S',\, \varkappa_2 S + \lambda_2 S'} \\ & \qquad - 3F_{\varkappa_1 S + \lambda_1 S',\, \varkappa_2 S + \lambda_2 S'}. \end{aligned}$$

Sind insbesondere $\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}$, $\frac{\varkappa_2}{\lambda_2}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $H(\varkappa\lambda) = 0$, so folgt

$$3F_{\varkappa_1 S + \lambda_1 S',\, \varkappa_2 S + \lambda_2 S'} = 2\psi(\varkappa_1\lambda_2 - \varkappa_2\lambda_1)^2,$$

q. e. d.

Durch Einführung dieser Combinante ψ an Stelle von F nimmt die bekannte* Formel für $\left(\Sigma \pm \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S'}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2$ die einfache Gestalt an

$$\tfrac{1}{64}\left(\Sigma \pm \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S'}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)^2 = \tfrac{8}{27}\psi^3 + 3\psi \,.\, H(-S', S) + Q(-S', S),$$

woraus unmittelbar folgt, dass $\psi = 0$ von jedem der drei harmonischen Kegelschnitte doppelt berührt wird, mit den Seiten des Diagonaldreiecks als Berührungssehnen.

Fasst man sämmtliche bis jetzt entwickelte Ergebnisse über den Kegelschnitt ψ noch einmal zusammen, so folgt:

Die Curve

$$\psi = N_x N'_x N_{x'} N'_n = -\tfrac{1}{3}(S'\Theta + S\Theta' - 3F)$$

ist eine Combinante des Büschels $\varkappa S + \lambda S' = 0$. Sie wird eingehüllt von allen Geraden, welche die beiden äquianharmonischen Kegelschnitte nach harmonischen Punktepaaren schneiden, und ist gleichzeitig der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus sich an dieselben beiden Kegelschnitte harmonische Tangentenpaare legen lassen. Die zwei äquianharmonischen Curven und ψ bilden ein System dreier Kegelschnitte, von welchen je zwei einander in Bezug auf den dritten als Directrix polar entsprechen. Jeder der drei harmonischen Kegelschnitte hat mit ψ eine doppelte Berührung, wobei die Berührungssehnen mit den Seiten des Diagonaldreiecks zusammenfallen, und die drei Tangentenpaare die am Ende von § 2 näher be-

---

Da

$$2\chi' = 2\Theta S' - \chi = 2S\Theta' - \chi'' = 2F,$$

so wird

$$\psi = -\tfrac{1}{3}\{S\Theta' + S'\Theta - 3F\}.$$

Die hier angedeutete Rechnung stimmt vollkommen mit einer in den Math. Annal. VI, S. 480, ausgeführten überein.

* Salmon-Fiedler's Kegelschnitte, 3. Ausg., S. 494.

zeichnete Eigenschaft besitzen. Die zwei Tangenten eines Grundpunktes p an die beiden äquianharmonischen Kegelschnite berühren ψ und die conische Polare von p in Bezug auf das Diagonaldreick* in den nämlichen zwei Punkten, welche auf der geraden Polare von p in Bezug auf das Diagonaldreieck liegen.

Die im letzten Satze ausgesprochene und noch nicht bewiesene Eigenschaft von ψ folgt ohne Weiteres aus dem obigen Ausdrucke für $\left(\Sigma \pm \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S'}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)^2$, wenn man darin die willkürlichen x_i durch $\xi_i + \lambda y_i$ ersetzt, die Coefficienten von λ und λ^2 vergleicht und ξ_i die Coordinaten des betreffenden Grundpunktes bedeuten lässt.

§ 4. Ueber die Curvenschaar $\mu\Sigma + \nu\Sigma' = 0$.

Die bisher angestellten Betrachtungen über das Curvenbüschel zweiter Ordnung $\varkappa S + \lambda S' = 0$ lassen sich ohne Mühe auf die Curvenschaar zweiter Classe $\mu\Sigma + \nu\Sigma' = 0$ übertragen.

Die drei Punktepaare der Schaar werden erhalten durch Auflösung der cubischen Gleichung

$$\Gamma(\mu, \nu) \equiv \Delta^2\mu^3 + \Delta\Theta'\mu^2\nu + \Delta'\Theta\mu\nu^2 + \Delta'^2\nu^3 = 0.$$

Da vermöge der linearen Substitution

$$\varkappa = \Delta'\nu, \quad \lambda = \Delta\mu$$

die binäre Form $G(\varkappa\lambda)$ übergeht in

$$G(\varkappa\lambda) = \Delta\Delta'\Gamma(\mu, \nu) = \Delta\Delta'\Gamma,$$

so wird nach der charakteristischen Eigenschaft der Covarianten und mit Berücksichtigung des Werthes $(-\Delta\Delta')$ der Substitutionsdeterminante:

$$H(\varkappa\lambda) = \frac{1}{18}\left[\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\mu^2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\nu^2} - \left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\mu\,\partial\nu}\right)^2\right],$$

$$Q(\varkappa\lambda) = -\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\mu}\frac{\partial H}{\partial\nu} - \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\frac{\partial H}{\partial\mu}\right).$$

Man hat also:

Die Gleichung

$$\frac{H^3(\Delta'\nu, \Delta\mu)}{Q^2(\Delta'\nu, \Delta\mu)} = \frac{(1-s+s^2)^3}{(1+s)^2(2-s)^2(1-2s)^2}$$

bestimmt die sechs Curven zweiter Classe $\mu\Sigma + \nu\Sigma' = 0$, für welche die vier gemeinsamen Grundtangenten der Schaar das Doppelverhältniss s bilden.**

---

* Vergl. Salmon, Höhere ebene Curven, bearbeitet von Fiedler, S. 173 bis 174.

** Sieht man umgekehrt μ und ν als gegeben an, so liefert die obige Relation die sechs Doppelverhältnisse, welche die vier Grundtangenten für diese bestimmte

Insbesondere liefert also $Q(\Delta'\nu, \Delta\mu) = 0$ die drei Curven $\mu\Sigma + \nu\Sigma' = 0$, für welche die vier gemeinsamen Tangenten der Schaar harmonische sind, während $H(\Delta'\nu, \Delta\mu) = 0$ die beiden äqnianharmonischen Kegelschnitte der Schaar bestimmt.

Diese beiden letzteren bilden zusammen mit dem Kegelschnitte

$$\Psi = \Delta'\Theta\Sigma + \Delta\Theta'\Sigma' - 3\Delta\Delta'\Phi = 0$$

ein System von drei Curven, von denen je zwei einander in Bezug auf den dritten als Directrix polar entsprechen u. s. w.

Die Gleichung von Ψ in Punktcoordinaten wird erhalten, indem man die simultane Invariante der beiden (in μ und ν) quadratischen Formen

$$H(\Delta'\nu, \Delta\mu) \text{ und } \Delta S\mu^2 + F\mu\nu + \Delta' S'.\nu^2$$

gleich Null setzt, d. h. nach Unterdrückung des Factors $\Delta\Delta'$

$$2(3\Delta\Theta' - \Theta^2)\Delta' S - (9\Delta\Delta' - \Theta\Theta')F + 2(3\Delta'\Theta - \Theta'^2)\Delta S' = 0.$$

Diese Curve Ψ und einige ihrer Eigenschaften hat, wie ich aus Salmon-Fiedler's Kegelschnittwerk, S. 474—475, ersehe, bereits Ferrers untersucht in dem *Quarterly Journal* Bd. VII S. 20 flgg. Das Vorhergehende zeigt jedoch, dass nicht diese Combinante der Schaar $\mu\Sigma + \nu\Sigma' = 0$, sondern die entsprechende ψ des Büschels $\varkappa S + \lambda S' = 0$ von hervorragendem Interesse ist. Während die erstere eine ziemlich complicirte Combination von Formen niedrigerer Ordnung, ist die letztere selbst eine fundamentale Covariante, durch deren Einführung die verschiedenen Beziehungen zwischen den Formen des simultanen Systems S und S' sich überaus einfach gestalten.

Tübingen, im Mai 1874. S. GUNDELFINGER.

V. Arithmetische Kleinigkeiten.

I. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

hat bekanntlich die unendlich vielen ganzzahligen Auflösungen

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

wenn unter m, n irgendwelche ganzen Zahlen verstanden werden. Ist nun z. B. $m = 2$, $n = 1$, so wird $x = 3$, $y = 4$, und es ist

$$9 + 16 = 25.$$

Curve $\mu\Sigma + \nu\Sigma'$ bilden. Für den speciellen $\mu = 0$ folgt hieraus das interessante Theorem: Die vier Grundpunkte des Büschels bilden für $S' = 0$ dasselbe Doppelverhältniss, wie die vier Grundtangenten der Schaar $\mu\Sigma + \nu\Sigma' = 0$ für $\Sigma = 0$, d. h. für $S = 0$.

Es wird gefragt: **Giebt es noch andere Systeme x, y, bei welchen x, y zwei aufeinander folgende ganze Zahlen sind,** also $x-y$ entweder $+1$ oder -1 ist? — Für solche muss

$$m^2-n^2-2mn=\pm 1$$

sein. Betrachten wir erstens den Fall

$$m^2-n^2-2mn=+1.$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden

$$(m-n)^2-2n^2=+1.$$

Sind nun t, u alle ganzen Zahlen, welche der Gleichung

$$t^2-2u^2=1 \tag{2}$$

genügen, so hat man nur zu setzen

$$m-n=t, \quad n=u,$$

also

$$m=t+u, \quad n=u$$

und

$$x=t^2+2tu, \quad y=2tu+2u^2. \tag{3}$$

Ist dagegen zu erfüllen

$$m^2-n^2-2mn=-1,$$

so schreibe man diese Gleichung so:

$$(m+n)^2-2m^2=+1;$$

dann braucht man nur zu setzen

$$m+n=t, \quad m=u,$$

also

$$m=u, \quad n=t-u$$

und

$$x=-t^2+2tu, \quad y=2tu-2u^2. \tag{4}$$

Die kleinsten positiven Zahlen, welche der Gleichung 2) genügen, sind $t=3$, $u=2$; aus dieser fundamentalen Lösung findet man aber bekanntlich alle anderen, wenn man in der Formel

$$t+u\sqrt{2}=\pm(3+2\sqrt{2})^k$$

k jedem positiven oder negativen ganzzahligen Werthe, und dann die rationalen und die irrationalen Theile rechts und links einander gleichsetzt. Wir wollen versuchen, in die Formeln 3) und 4) die Fundamentalauflösung einzuführen.

Setzt man

$$t'+u'\sqrt{2}=(t+u\sqrt{2})^2,$$

so findet sich aus 3)

$$x+y=t'+2u', \quad z=t'+u'$$

und daraus

$$x+y+z\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)(t+u\sqrt{2})^2,$$

während $x-y=1$ ist.

Desgleichen erhält man aus 4)

$$x+y=-t'+2u', \quad z=t'-u'$$

und folglich

$$x+y+z\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)(t+u\sqrt{2})^2,$$

während $y-x=1$ ist.

Da aber x, y in der Gleichung 1) symmetrisch vorkommen, können wir folgendes Resultat aussprechen:

Man findet alle ganzzahligen Auflösungen der Gleichung 1), bei welchen

5) $$x-y=1$$

und $z>0$ ist, indem man in der Gleichung

$$x+y+z\sqrt{2} = (\sqrt{2}\pm 1)(3+2\sqrt{2})^{2k}$$

für jeden ganzzahligen Werth des k das Rationale vom Irrationalen trennt und sie mit der Gleichung 5) verbindet.

II. In dem Jahrgange 1874 der *Nouv. annales de mathém., par Mr. Gérono*, wird — scheinbar aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet — von Catalan folgender Satz aufgestellt:

Der Quotient

$$\frac{1.2.3\ldots 2a.\ 1.2.3\ldots 2b}{1.2.3\ldots a.\ 1.2.3\ldots (a+b).\ 1.2.3\ldots b}\ (Q)$$

ist einer ganzen Zahl gleich,

und verlangt, ihn arithmetisch zu beweisen. Das soll im Folgenden geschehen.

Bezeichnet $E\left(\frac{a}{p^i}\right)$ die grösste, in dem Bruche $\frac{a}{p^i}$ enthaltene ganze Zahl, und p^m die höchste, in dem Producte $1.2.3\ldots a$ aufgehende Potenz einer Primzahl p, so ist bekanntlich

$$m = E\left(\frac{a}{p}\right) + E\left(\frac{a}{p^2}\right) + \ldots.$$

Wird a in die Form gesetzt

1) $$a = \alpha_0 p^k + \alpha_1 p^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} p + \alpha_k,$$

in welcher

2) $$0 \overline{\gtrless} \alpha_i \overline{\gtrless} p-1,$$

so findet man einfach

3) $$m = \frac{a-\alpha_0-\alpha_1-\ldots}{p-1}.$$

Aus 1) folgt aber

$$2a = 2\alpha_0 . p^k + 2\alpha_1 . p^{k-1} + \ldots + 2\alpha_{k-1} p + 2\alpha_k$$

und

$$\frac{2a}{p} = 2\alpha_0 . p^{k-1} + 2\alpha_1 . p^{k-2} + \ldots + 2\alpha_{k-2} p + 2\alpha_{k-1} + \frac{2\alpha_k}{p},$$

also, wenn

$$\alpha'_k = E\left(\frac{2\alpha_k}{p}\right)$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

gesetzt wird:

$$E\left(\frac{2a}{p}\right)=2\alpha_0 p^{k-1}+2\alpha_1 p^{k-2}+\ldots+2\alpha_{k-2}p+2\alpha_{k-1}+\alpha'_k.$$

Da der Ungleichheit 2) zufolge $2\alpha_k$ nicht grösser als $2p-2$, also α'_k höchstens gleich 1 sein kann, erreicht $2\alpha_{k-1}+\alpha'_k$ höchstens den Werth $2p-1$; setzt man daher

$$\alpha'_{k-1}=E\left(\frac{2\alpha_{k-1}+\alpha'_k}{p}\right),$$

so ist α'_{k-1} nicht grösser als Eins, und man findet

$$E\left(\frac{2a}{p^2}\right)=2\alpha_0 p^{k-2}+2\alpha_1 p^{k-3}+\ldots+2\alpha_{k-2}+\alpha'_{k-1},$$

worin $2\alpha_{k-2}+\alpha'_{k-1}$ wieder nicht grösser als $2p-1$ sein kann. Wenn folglich

$$\alpha'_{k-2}=E\left(\frac{2\alpha_{k-2}+\alpha'_{k-1}}{p}\right)$$

gesetzt und $\alpha'_{k-3},\ldots$ ähnlich definirt werden — Zahlen, die niemals grösser als Eins sein können —, und wenn endlich p^r die höchste in $1.2.3\ldots 2a$ aufgehende Potenz von p bezeichnet, so findet man, der Gleichung 3) analog:

$$r=\frac{2a-2\alpha_0-2\alpha_1-\ldots}{p-1}+\alpha'_k+\alpha'_{k-1}+\alpha'_{k-2}+\ldots.$$

Desgleichen wollen wir b in die Form setzen

$$b=\beta_0 p^k+\beta_1 p^{k-1}+\ldots+\beta_{k-1}p+\beta_k$$

und unter $\beta'_k, \beta'_{k-1}, \beta'_{k-2},\ldots$ die Werthe von

$$E\left(\frac{2\beta_k}{p}\right),\quad E\left(\frac{2\beta_{k-1}+\beta'_k}{p}\right),\quad E\left(\frac{2\beta_{k-2}+\beta'_{k-1}}{p}\right),\ldots$$

resp. verstehen; dadurch ergeben sich die Formeln

$$n=\frac{b-\beta_0-\beta_1-\ldots}{p-1},\quad s=\frac{2b-2\beta_0-2\beta_1-\ldots}{p-1}+\beta'_k+\beta'_{k-1}+\beta'_{k-2}+\ldots$$

für die Exponenten der höchsten Potenzen von p, welche in den Producten $1\,2.3\ldots b$ und $1\,2.3\ldots 2b$ resp. enthalten sind. Und endlich, wenn γ'_k, $\gamma'_{k-1}, \gamma'_{k-2},\ldots$ resp. für

$$E\left(\frac{\alpha_k+\beta_k}{p}\right),\quad E\left(\frac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}+\gamma'_k}{p}\right),\quad E\left(\frac{\alpha_{k-2}+\beta_{k-2}+\gamma'_{k-1}}{p}\right),\ldots$$

geschrieben werden, findet sich für den Exponenten t der höchsten, in $1.2.3\ldots(a+b)$ aufgehenden Potenz von p der Werth

$$t=\frac{(a+b)-(\alpha_0+\beta_0)-(\alpha_1+\beta_1)-\ldots}{p-1}+\gamma'_k+\gamma'_{k-1}+\gamma'_{k-2}+\ldots.$$

Aus diesen Werthen schliesst man

$$(r+s)-(m+n+t)=(\alpha'_k+\beta'_k-\gamma'_k)+(\alpha'_{k-1}+\beta'_{k-1}-\gamma'_{k-1})$$
$$+(\alpha'_{k-2}+\beta'_{k-2}-\gamma'_{k-2})+\ldots.$$

Die einzelnen gleichartigen Theile dieses Ausdrucks können aber, wie jetzt gezeigt werden soll, niemals negativ sein.

In der That: Erstens ist wenigstens eine der Zahlen $2\alpha_k$, $2\beta_k$ nicht kleiner als $\alpha_k+\beta_k$, also wenigstens eine der Zahlen α'_k, β'_k nicht kleiner als γ'_k, und daher $\alpha'_k+\beta'_k-\gamma'_k \overline{\overline{>}} 0$.

Zweitens ist von den beiden Zahlen $2\alpha_{k-1}$, $2\beta_{k-1}$, wenn sie ungleich sind, eine, z. B. $2\beta_{k-1} \overline{\overline{>}} \alpha_{k-1}+\beta_{k-1}+1$; dann ist aber, da γ'_k nie grösser als Eins ist, sicher $2\beta_{k-1}+\beta'_k \overline{\overline{>}} \alpha_{k-1}+\beta_{k-1}+\gamma'_k$, und folglich $\beta'_{k-1} \overline{\overline{>}} \gamma'_{k-1}$. Ist aber $2\alpha_{k-1}=2\beta_{k-1}=\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}$, so wird wenigstens eine der Zahlen $2\alpha_{k-1}+\alpha'_k$, $2\beta_{k-1}+\beta'_k$ nach dem zuerst Bewiesenen nicht kleiner als $\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}+\gamma'_k$ und folglich eine der Zahlen α'_{k-1}, β'_{k-1} nicht kleiner als γ'_{k-1} sein. In beiden Fällen schliesst man

$$\alpha'_{k-1}+\beta'_{k-1}-\gamma'_{k-1} \overline{\overline{>}} 0.$$

In gleicher Weise kann man aber fortfahren und findet so

$$\pi=(r+s)-(m+n+t) > 0.$$

Da nun offenbar p^π die höchste, im Quotienten (Q) nach möglichster Reduction verbleibende Potenz der Primzahl p bedeutet, so erkennt man, dass in der That jede im Nenner desselben enthaltene Primzahl durch Division sich heraushebt, der Quotient also, was zu beweisen war, einer ganzen Zahl gleich sein muss.

Breslau. Prof. Dr. Bachmann.

VI. Ueber eine allgemeine Classe von Flächen und die Flächen dritter Ordnung insbesondere.

1. Hat man das Büschel von speciellen Flächen r^{ten} Grades

1) $A m\alpha^r+Bn\beta^r+Cp\gamma^r+Dq\delta^r+k(Am_1\alpha^r+Bn_1\beta^r+Cp_1\gamma^r+Dq_1\delta^r)=0$,

sowie das projectivische Ebenenbüschel

$$m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta+k(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta)=0, \tag{2}$$

so erhält man als geometrischen Ort des Durchschnittes einer Fläche des ersten Büschels mit der entsprechenden Ebene des zweiten eine Fläche $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades von der Gleichung

$$\begin{aligned}&(Am\alpha^r+Bn\beta^r+Cp\gamma^r+Dq\delta^r)(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta)\\&=(Am_1\alpha^r+Bn_1\beta^r+Cp_1\gamma^r+Dq_1\delta^r)(m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta),\end{aligned} \tag{3}$$

welche verschiedene bemerkenswerthe Eigenschaften besitzt und, wie später gezeigt werden soll, die allgemeine Fläche dritten Grades (für $r=2$) als speciellen Fall in sich begreift.

Aus bekannten Sätzen, sowie auch unmittelbar aus der Gleichung 3) geht hervor, dass die entstandene Fläche sowohl die Durchschnittslinie des Ebenenbüschels

$$4)\qquad m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta=0,\quad m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta=0,$$

als auch die Basis des Flächenbüschels

$$5)\quad Am\alpha^r+Bn\beta^r+Cp\gamma^r+Dq\delta^r=0,\quad Am_1\alpha^r+Bn_1\beta^r+Cp_1\gamma^r+Dq_1\delta^r=0$$

enthält. Die letztere ist unter allen Curven r^{2ter} Ordnung durch die Eigenschaft charakterisirt, dass sich durch dieselbe vier Kegel r^{ter} Ordnung legen lassen, deren Scheitel in den Ecken des Fundamentaltetraeders sich befinden. Diese vier Ecken gehören auch der Fläche 3) an und es ist z. B. die Gleichung der im Punkte $\alpha=\beta=\gamma=0$ an dieselbe geführten Tangentialebene

$$6)\qquad q_1(m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta)=q(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta).$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen der übrigen Tangentialebenen geht hervor, dass sich diese Ebenen in der geraden Linie 4), der Basis des Ebenenbüschels, durchschneiden. Die fernere Durchschnittslinie der Ebene 6) mit der Fläche 3) liegt auf der Fläche

$$7)\quad q_1(Am\alpha^r+Bn\beta^r+Cp\gamma^r+Dq\delta^r)=q(Am_1\alpha^r+Bn_1\beta^r+Cp_1\gamma^r+Dq_1\delta^r),$$

d. i. auf einem Kegel, der seinen Scheitel im Berührungspunkte der Ebene 6) hat; jene Durchschnittslinie zerfällt daher in r gerade Linien, welche sich sämmtlich im Berührungspunkte schneiden. Die vier Fundamentalpunkte sind somit so beschaffen, dass jede Ebene, welche durch einen von ihnen geht, die Fläche in einer Curve schneidet, deren Tangente in ihm mit der Curve r zusammenfallende Punkte gemein hat. Der Kegel 7) und die drei entsprechenden Kegel gehören zum Büschel 1) und sind nicht allein, wie schon erwähnt, die einzigen Kegel desselben, sondern überhaupt die einzigen zu demselben gehörigen Flächen mit Knotenpunkten. Ihr Durchschnitt mit der Fläche 3) besteht aus der Curve 5) und aus r geraden Linien.

2. Die Oberfläche enthält ausser den Fundamentalpunkten noch eine Anzahl bemerkenswerther Punkte. Zunächst liegen auf ihr diejenigen $(r-1)^3$ Punkte, deren Coordinaten der Proportion

$$8)\qquad \alpha^{r-1}:\beta^{r-1}:\gamma^{r-1}:\delta^{r-1}=A^{-1}:B^{-1}:C^{-1}:D^{-1}$$

genügen. Bildet man von irgend einem dieser Punkte die Polarebenen in Bezug auf sämmtliche Flächen des Büschels 1), so erhält man die Ebenen des Büschels 2); die fraglichen Punkte sind daher die $(r-1)^3$ Pole der Ebenen 2) in Bezug auf die entsprechenden Flächen 1). Die Entstehungsweise unserer Fläche hat somit die grösste Aehnlichkeit mit der sogenannten dritten Steiner'schen Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung. (Vergl. z. B. Sturm, Synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung, S. 16 flgg.)

Verbindet man einen der Punkte 8) mit einem Fundamentalpunkte, so schneidet die Verbindungslinie die gegenüberliegende Tetraederebene in einem Punkte, welche ebenfalls ein Punkt der Fläche ist. Man erhält so im Ganzen $4(r-1)^2$ Punkte der Fläche, von welchen die auf der Ebene $\delta=0$ liegenden durch die Gleichung dargestellt sind

$$9)\qquad \alpha^{r-1}:\beta^{r-1}:\gamma^{r-1}:\delta^{r-1}=A^{-1}:B^{-1}:C^{-1}:0.$$

Legt man dagegen durch einen Punkt 8) und eine Kante des Fundamentaltetraeders eine Ebene, so schneidet diese die gegenüberliegende Tetraederkante in einem Punkte, welcher wiederum auf der Fläche liegt. Auf diese Weise ergeben sich $6(r-1)$ Punkte der Fläche, von denen die auf der Kante $\gamma=0$, $\delta=0$ liegenden Punkte durch die Gleichung dargestellt werden

$$10)\qquad \alpha^{r-1}:\beta^{r-1}:\gamma^{r-1}:\delta^{r-1}=A^{-1}:B^{-1}:0:0.$$

Auch die Punkte 9) und 10) stehen in einfacher Beziehung zur Fläche 1); jeder der Punkte 9) ist nämlich ein $(r-1)$-facher Pol der Ebene

$$m\alpha+n\beta+p\gamma+k(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma)=0$$

in Bezug auf die Fläche 1), und jeder der Punkte 10) ein $(r-1)^2$-facher Pol der Ebene

$$m\alpha+n\beta+k(m_1\alpha+n_1\beta)=0$$

in Bezug auf dieselbe Fläche.

3. Aus der oben dargelegten Bedeutung der Punkte 8) geht unmittelbar hervor, dass jede der Tangentialebenen, die man in ihnen an die Fläche 3) legen kann, durch die gerade Linie 4) geht. Sehr leicht erkennt man dies auch daraus, dass die Gleichung der Tangentialebene in einem beliebigen dieser Punkte, dessen Coordinaten der Kürze halber mit α_1, β_1, γ_1, δ_1 bezeichnet werden mögen, auf die Form gebracht werden kann

$$11)\qquad \begin{aligned}&(m_1\alpha_1+n_1\beta_1+p_1\gamma_1+q_1\delta_1)(m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta)\\&=(m\alpha_1+n\beta_1+p_1\gamma+q\delta_1)(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta).\end{aligned}$$

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass man durch die Gerade 4) ausser den $(r-1)^2$ Ebenen 11) und den bereits oben gefundenen, die Fundamentalpunkte enthaltenden Ebenen keine weiteren Berührungsebenen an die Fläche legen kann. Bekanntlich können aber durch eine Gerade einer Fläche n^{ten} Grades

$$(n+2)(n-2)^2$$

Ebenen gelegt werden, deren jede die Fläche in einem ausserhalb der Geraden liegenden Punkte berührt; es geht daraus hervor, dass jede der vier Ebenen 6), welche die Fläche ausser in der Geraden 4) noch in r sich in einem Punkte schneidenden Geraden trifft, für $(r-1)^2$ Berührungsebenen zählt, da

$$(r-1)^2+4(r-1)^2=(r+3)(r-1)^2.$$

Legt man weiter in einem der Punkte 9) an die Fläche eine Berührungsebene, so ist, wenn α_1, β_1, γ_1 ähnliche Bedeutung haben, wie vorher, die Gleichung derselben

$$12)\quad \begin{aligned}&(m_1\alpha_1+n_1\beta_1+p_1\gamma_1)\,[(r-1)(m\alpha+n\beta+p\gamma)-q\delta]\\&=(m\alpha_1+n\beta_1+p\gamma_1)\,[(r-1)(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma)-q_1\delta].\end{aligned}$$

Sonach schneiden sich auch alle die Tangentialebenen, die man in sämmtlichen derselben Tetraederfläche (z. B. $\delta=0$) angehörigen Punkten 9) an die Fläche legen kann, in einer und derselben Geraden, deren Gleichung z. B. für die Punkte auf $\delta=0$ ist

$$13)\quad (r-1)(m\alpha+n\beta+p\gamma)-q\delta=0,\quad (r-1)(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma)-q_1\delta=0.$$

Es giebt vier derartige Gerade; jede derselben schneidet die auf der Fläche liegende Basis des Ebenenbüschels, und zwar auf einer Tetraederfläche, und liegt ausserdem in einer der Tangentialebenen, die man an die Fläche in den Fundamentalpunkten legen kann. Die Linie 13) trifft z. B. die Gerade 4) in einem Punkte der Ebene $\delta=0$ und liegt ausserdem in der Ebene 6).

Endlich hat die Tangentialebene, welche man in einem der Punkte 10) an die Fläche legen kann, die Gleichung

$$14)\quad \begin{aligned}&(m_1\alpha_1+n_1\beta_1)\,[(r-1)(m\alpha+n\beta)-(p\gamma+q\delta)]\\&=(m\alpha_1+n\beta_1)\,[(r-1)(m_1\alpha+n_1\beta)-(p_1\gamma+q_1\delta)].\end{aligned}$$

Sonach schneiden sich auch sämmtliche Berührungsebenen, die den auf einer und derselben Tetraederkante gelegenen Punkten 10) zugehören, in einer Geraden, deren Gleichung für die Punkte auf $\gamma=0$, $\delta=0$ ist

$$15)\quad \left\{\begin{aligned}&(r-1)(m\,\alpha+n\,\beta)-(p\,\gamma+q\,\delta)=0,\\&(r-1)(m_1\alpha+n_1\beta)-(p_1\gamma+q_1\delta)=0.\end{aligned}\right.$$

Dieser analog giebt es noch fünf weitere gerade Linien, und nur wenn $r=2$, fallen je zwei der sich so ergebenden sechs geraden Linien zusammen. Jede dieser Geraden 15) schneidet zwei der Geraden 13) und jede dieser Linien drei von jenen. Die zwölf Schnittpunkte liegen in den Tetraederflächen.

Bestimmt man ferner den Punkt, in welchem die Ebene 14) von der Basis 4) des Ebenenbüschels geschnitten wird, so stellt sich heraus, dass derselbe auf der Ebene

$$\alpha\beta_1=\beta\alpha_1$$

liegt. Es schneiden sich daher die Ebene, welche einen der Punkte 10) mit der gegenüberliegenden Tetraederkante verbindet, seine Tangentialebene und die Basis des Ebenenbüschels in einem und demselben Punkte.

4. Ist α', β', γ', δ' ein Punkt auf der geraden Linie 4), so nimmt die Gleichung seiner ersten Polaren in Bezug auf die Fläche 3) die einfache Gestalt an

$$16)\quad \begin{aligned}&(Am\alpha'\alpha^{r-1}+Bn\beta'\beta^{r-1}+Cp\gamma'\gamma^{r-1}+Dq\delta'\delta^{r-1})(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta)\\&=(Am_1\alpha'\alpha^{r-1}+Bn_1\beta'\beta^{r-1}+Cp_1\gamma'\gamma^{r-1}+Dq_1\delta'\delta^{r-1})(m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta).\end{aligned}$$

Diese erste Polare besitzt grosse Aehnlichkeit mit der ursprünglichen Fläche; sie enthält wie diese die Gerade 4) und wird in ähnlicher Weise wie diese erzeugt; es muss dabei nur das Büschel der Flächen 1) ersetzt werden durch das Büschel der ersten Polaren des angenommenen Punktes in Bezug auf diese Flächen. Die ersten Polaren aller Punkte der Geraden bilden ein Flächenbüschel, dessen Basis die $(r-1)^3$ Punkte 8) und die vier Fundamentalpunkte enthält und jene Gerade als einen Theil in sich fasst. Aehnliches gilt für die übrigen Polaren eines beliebigen Punktes der Geraden; die Gleichung der quadratischen Polaren insbesondere ist

$$\begin{aligned}&(Am\alpha'^{r-1}\alpha+Bn\beta'^{r-1}\beta+Cp\gamma'^{r-1}\gamma+Dq\delta'^{r-1}\delta)(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta)\\ =&(Am_1\alpha'^{r-1}\alpha+Bn_1\beta'^{r-1}\beta+Cp_1\gamma'^{r-1}\gamma+Dq_1\delta'^{r-1}\delta)(m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta),\end{aligned}$$

und diejenige der Polar- oder Tangentialebene

$$17)\quad \begin{aligned}&(Am\alpha'^{r}+Bn\beta'^{r}+Cp\gamma'^{r}+Dq\delta'^{r})(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma+q_1\delta)\\ =&(Am_1\alpha'^{r}+Bn_1\beta'^{r}+Cp_1\gamma'^{r}+Dq_1\delta'^{r})(m\alpha+n\beta+p\gamma+q\delta).\end{aligned}$$

Nebenbei sei erwähnt, dass man sehr leicht die Punkte bestimmen kann, in welchen die gerade Linie 4) der Kernfläche von 3) begegnet. Die oben dargestellte quadratische Polare wird nämlich zu einem Kegel, wenn

$$\begin{vmatrix} Am\alpha'^{r-1} & Bn\beta'^{r-1} & Cp\gamma'^{r-1} & Dq\delta'^{r-1}\\ Am_1\alpha'^{r-1} & Bn_1\beta'^{r-1} & Cp_1\gamma'^{r-1} & Dq_1\delta'^{r-1}\\ m & n & p & q\\ m_1 & n_1 & p_1 & q_1\end{vmatrix}=0.$$

Sieht man α', β', γ', δ' als Coordinaten eines beliebigen Punktes an, so stellt diese Gleichung eine Fläche $2(r-1)^{\text{ten}}$ Grades dar, welche auf der Geraden 4) die verlangten Punkte bestimmt. Die Anzahl derselben ist nicht, wie vielleicht vermuthet werden könnte, gleich dem Grade der Kernfläche, also $4(r-1)$, sondern nur halb so gross, da ein bekannter Satz sagt, dass jede auf einer Fläche liegende Gerade die Kernfläche derselben in allen gemeinsamen Punkten berührt.

Doppelpunkte hat die Fläche im Allgemeinen nicht. Wären nämlich solche zunächst ausserhalb der Geraden 4) vorhanden, so könnte jede Ebene, welche durch einen derselben und diese Gerade gelegt werden kann, als Tangentialebene der Fläche angesehen werden. In § 3 ist aber gesagt, dass man ausser den Ebenen 6) und 11) keine weiteren Berührungsebenen durch die Gerade 4) an die Fläche legen kann, und keine dieser Ebenen berührt bekanntlich in einem Doppelpunkte. Auf der Geraden 4) kann dagegen kein Doppelpunkt liegen, denn die Gleichung 17) der Tangentialebene eines in dieser Geraden befindlichen Punktes wird nur dann unbestimmt, wenn

$$\begin{aligned}Am\alpha'^{r}+Bn\beta'^{r}+Cp\gamma'^{r}+Dq\delta'^{r}&=0,\\ Am_1\alpha'^{r}+Bn_1\beta'^{r}+Cp_1\gamma'^{r}+Dq_1\delta'^{r}&=0,\end{aligned}$$

d. h. wenn die Gerade und die Basis 5) des Flächenbüschels einander schneiden. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall.

Wenn aber beide Basen einander in einem Punkte schneiden, so ist der Schnittpunkt ein Doppelpunkt der Fläche; seine Polarebene ist alsdann zwar unbestimmt, seine quadratische Polare dagegen bestimmt, und zwar ein Kegel; berührt die Gerade 4) die Curve 5), so wird die quadratische Polare ein Ebenenpaar, welches sich in der Tangente schneidet.

Wenn die gerade Linie durch einen der Punkte 8) geht, so berührt sie zugleich die Basis 5) des Flächenbüschels; in diesem Falle wird jedoch auch die quadratische Polare unbestimmt und der betreffende Punkt ein dreifacher Punkt der Oberfläche.

5. Die vorangehenden Betrachtungen setzten voraus, dass r eine positive ganze Zahl und grösser als 1 ist. Für $r=1$, in welchem Falle die entstehende Fläche vom zweiten Grade ist, und für ein negatives ganzes r ändern sich die aufgefundenen Eigenschaften vollständig; doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

Dagegen soll auf einige Eigenschaften der Curve aufmerksam gemacht werden, in welcher unsere Fläche eine der Fundamentalebenen durchschneidet. Ist diese schneidende Ebene $\delta=0$, so ist die Gleichung der Durchschnittscurve

$$18)\qquad \begin{aligned} &(Am\alpha^r+Bn\beta^r+Cp\gamma^r)(m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma)\\ &=(Am_1\alpha^r+Bn_1\beta^r+Cp_1\gamma^r)(m\alpha+n\beta+p\gamma). \end{aligned}$$

Diese Linie hat in den drei auf jener Ebene liegenden Fundamentalpunkten Tangenten, die mit ihr r zusammenfallende Punkte gemein haben und sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, welcher auf der Curve liegt und in welchem sich die zwei geraden Linien

$$m\alpha+n\beta+p\gamma=0,\quad m_1\alpha+n_1\beta+p_1\gamma=0$$

treffen. Von diesem Punkte aus kann man an die Curve noch $(r-1)^2$ weitere Tangenten legen und die Coordinaten der zugehörigen Berührungspunkte genügen sämmtlich der Proportion

$$\alpha^{r-1}:\beta^{r-1}:\gamma^{r-1}=A^{-1}:B^{-1}:C^{-1}.$$

Werden diese sämmtlichen Berührungspunkte mit einem Eckpunkte des Fundamentaldreiecks verbunden, so bestimmen die Verbindungslinien auf der gegenüberliegenden Seite desselben $(r-1)$ Punkte, von denen z. B. die auf der Kante $\gamma=0$ liegenden der Bedingung genügen

$$\alpha^{r-1}:\beta^{r-1}:\gamma^{r-1}=A^{-1}:B^{-1}:0.$$

Die Tangenten, welche man an die Curve in diesen $r-1$ Punkten legen kann, schneiden sich sämmtlich in einem Punkte.

Die Curve hat im Allgemeinen keine Doppelpunkte. Es gilt nämlich jede der Tangenten, welche, von dem oben mehrfach besprochenen Punkte ausgehend, in den Fundamentalpunkten mit der Curve r zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich haben, für $r-1$ einfache Tangenten; diese und die $(r-1)^2$ weiteren Berührenden geben deren zusammen

$$(r-1)^2+3(r-1)=(r-1)(r+2).$$

Soviel kann man aber von einem beliebigen Punkte einer Curve $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades ausser seinèr eigenen Tangente nur dann an dieselbe legen, wenn keine Doppelpunkte vorkommen. Der Punkt dagegen selbst kann nur dann zum Doppelpunkte werden, wenn zugleich die Curven

$$Am\alpha^r+Bn\beta^r+Cp\gamma^r=0, \quad Am_1\alpha^r+Bn_1\beta^r+Cp\gamma^r=0$$

durch ihn gehen.

Für $r=2$ stellt 18) eine Curve dritten Grades dar, und zwar eine allgemeine Curve dieser Art, da die Gleichung derselben auf unendlich viele Weisen auf die Form 18) gebracht werden kann. (Vergl. z. B. meine Note im 13. Bande dieser Zeitschrift, S. 263). Für $r=3$ dagegen erhält man Curven vierten Grades, welche jeden Fundamentalpunkt zum Inflexionspunkt haben und bereits von Sardi (Battaglini's *Giornale di Matematiche*, Bd. 6) untersucht worden sind.

6. Statt der Gleichung 3) kann man auch die verwandte Gleichung

$$19)\quad \begin{aligned}&(m\alpha^r+n\beta^r+p\gamma^r+q\delta^r)(Am_1\alpha+Bn_1\beta+Cp_1\gamma+Dq_1\delta)\\ &=(m_1\alpha^r+n_1\beta^r+p_1\gamma^r+q_1\delta^r)(Am\alpha+Bn\beta+Cp\gamma+Dq\delta)\end{aligned}$$

zu Grunde legen, welche aus jener durch eine einfache Veränderung der Constanten (z. B. Vertauschung von m mit Am, von A mit A^{-1} u. s. w.) hervorgeht. Die hier gewählte Form hat dabei vor der früheren den Vortheil, dass man die auf der Fläche liegende Gerade 4) durch einen Fundamentalpunkt legen kann, ohne dass dabei die Fläche ein Kegel wird. Die Gerade geht nämlich durch den Punkt $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, sobald

$$D=0$$

ist, und die Gleichung der Fläche wird

$$20)\quad \begin{aligned}&(m\alpha^r+n\beta^r+p\gamma^r+q\delta^r)(Am_1\alpha+Bn_1\beta+Cp_1\gamma)\\ &=(m_1\alpha^r+n_1\beta^r+p_1\gamma^r+q_1\delta^r)(Am\alpha+Bn\beta+Cp\gamma).\end{aligned}$$

In dem fraglichen Fundamentalpunkt schneiden sich dann $r+1$ in einer Ebene liegende Gerade der Fläche. Die Punkte 8) fallen, da $D=0$, sämmtlich in die Ebene $\delta=0$ und mit einer Gruppe der Punkte 9) zusammen; die drei anderen Gruppen dieser Punkte liegen in den Kanten des in derselben Ebene liegenden Fundamentaldreiecks. Die erste Polarfläche des Punktes $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ hat die Gleichung

$$\delta^{r-1}[q_1(Am\alpha+Bn\beta+Cp\gamma)-q(Am_1\alpha+Bn_1\beta+Cp_1\gamma)]=0$$

und zerfällt somit in die $(r-1)$-fache Ebene $\delta=0$ und die Tangentialebene des betreffenden Punktes. Der Kegel, welcher über der Schnittcurve unserer Fläche mit dieser Ebene $\delta=0$ steht und den betreffenden Punkt zum Scheitel hat:

$$\begin{aligned}&(m\alpha^r+n\beta^r+p\gamma^r)(Am_1\alpha+Bn_1\beta+Cp_1\gamma)\\ &=(m_1\alpha^r+n_1\beta^r+p_1\gamma^r)(Am\alpha+Bn\beta+Cp\gamma),\end{aligned}$$

berührt somit die Fläche $(r-1)$-fach längs jener Durchschnittslinie (d. h. jede Erzeugende hat r zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein) und schneidet sie überdies in den $(r+1)$ geraden Linien, welche die Tangentialebene

$$q\,(A m_1 \alpha + B n_1 \beta + C p_1 \gamma) = q_1 (A m \alpha + B n \beta + C p \gamma)$$

mit der Fläche gemeinsam hat und welche — bis auf die Gerade 4) — auf dem Kegel

$$q\,(m_1 \alpha^r + n_1 \beta^r + p_1 \gamma^r + q_1 \delta^r) = q_1 (m \alpha^r + n \beta^r + q \gamma^r + r \delta^r)$$

liegen.

Wenn in der Gleichung 19) zwei der Coefficienten, z. B. C und D, verschwinden, und die Gleichung der Fläche somit die Form annimmt

$$\text{21)}\quad \begin{aligned} &(m \alpha^r + n \beta^r + p \gamma^r + q \delta^r)(A m_1 \alpha + B n_1 \beta) \\ &= (m_1 \alpha^r + n_1 \beta^r + p_1 \gamma^r + q_1 \delta^r)(A m \alpha + B n \beta), \end{aligned}$$

so fällt die auf der Fläche liegende Gerade 4) in die Kante $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Zwei der zu den Fundamentalpunkten gehörigen Tangentialebenen fallen in die beiden Tetraederebenen, welche in dieser Kante zusammenstossen, während die beiden übrigen

$$\begin{aligned} p\,(A m_1 \alpha + B n_1 \beta) &= p_1 (A m \alpha + B n \beta), \\ q\,(A m_1 \alpha + B n_1 \beta) &= q_1 (A m \alpha + B n \beta) \end{aligned}$$

sind.

Die Berührungspunkte der ausserdem noch durch die Kante $\alpha=0$, $\beta=0$ gehenden Tangentialebenen liegen sämmtlich in der gegenüberliegenden Kante $\gamma=0$, $\delta=0$.

7. Von besonderer Wichtigkeit ist sowohl im Allgemeinen, als auch unter den im vorigen Paragraphen gemachten besonderen Voraussetzungen der Fall $r=2$. Es lässt sich nämlich zeigen, dass auf die Form

$$\text{22)}\quad \begin{aligned} &(A m \alpha^2 + B n \beta^2 + C p \gamma^2 + D q \delta^2)(m_1 \alpha + n_1 \beta + p_1 \gamma + q_1 \delta) \\ &= (A m_1 \alpha^2 + B n_1 \beta^2 + C p_1 \gamma^2 + D q_1 \delta^2)(m \alpha + n \beta + p \gamma + q \delta). \end{aligned}$$

oder auch auf eine zu 19) entsprechende Form die Gleichung jeder Fläche dritten Grades gebracht werden kann. Wenn eine Fläche dritten Grades die vier Fundamentalpunkte enthalten und in diesen resp. die Tangentialebenen

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 0$$

haben soll, so muss die Gleichung der Fläche die Form haben

$$A \alpha^2 E_1 + B \beta^2 E_2 + C \gamma^2 E_3 + D \delta^2 E_4 + k_1 \beta \gamma \delta + k_2 \gamma \delta \alpha + k_3 \delta \alpha \beta + k_4 \alpha \beta \gamma = 0.$$

Sollen dabei die sämmtlichen Tangentialebenen sich in der Geraden

$$m \alpha + n \beta + p \gamma + q \delta = 0, \quad m_1 \alpha + n_1 \beta + p_1 \gamma + q_1 \delta = 0$$

schneiden, so muss z. B.

$$E_1 \equiv m_1 (m \alpha + n \beta + p \gamma + q \delta) - m (m_1 \alpha + n_1 \beta + p_1 \gamma + q_1 \delta) \text{ u. s. w.}$$

sein. Soll endlich diese Gerade auf der Fläche selbst liegen, so muss sie auch in der Fläche

$$k_1\beta\gamma\delta + k_2\gamma\delta\alpha + k_3\delta\alpha\beta + k_4\alpha\beta\gamma = 0$$

zu finden sein, was, sobald die Gerade willkürlich liegt, unmöglich ist. Denn die Durchschnittslinie dieser Fläche mit einer beliebigen Tetraederebene zerfällt in die drei in dieser Ebene liegenden Tetraederkanten, während der Durchgangspunkt unserer Geraden durch jene Ebene beliebig liegt. Es müssen daher die Coefficienten k verschwinden und die Gleichung der Fläche erhält dadurch die Form 22). Dieselbe stellt somit eine Fläche dritten Grades dar, welche die Gerade 4) enthält, und zwar so, dass vier der durch diese Gerade an die Fläche gelegten Tangentialebenen dieselbe in den Fundamentalpunkten berühren. Bekanntlich sind aber durch eine Gerade der Fläche fünf anderwärts berührende Ebenen möglich; der fünfte Berührungspunkt, der einzige Punkt, welcher die Gruppe 8) ausmacht, wird dargestellt durch

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = A^{-1} : B^{-1} : C^{-1} : D^{-1}.$$

Die Punkte 9) und 10) dagegen sind die zehn Punkte, in welchen die Verbindungslinien je zweier der Berührungspunkte mit der Fläche nochmals zusammentreffen.

Aus den Gleichungen, welche hierzu gehören, ergeben sich ohne Weiteres folgende Lehrsätze:

Wenn man durch eine Gerade einer Fläche dritten Grades an dieselbe die möglichen fünf Tangentialebenen führt und durch drei der Berührungspunkte dieser Ebenen eine Ebene legt, so schneidet diese die Verbindungslinie der zwei anderen Berührungspunkte auf der Fläche.

Wenn man unter jenen fünf Berührungspunkten vier aussucht, diese zu Ecken eines Tetraeders wählt und die Punkte verbindet, in welchen je zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders der Fläche nochmals begegnen, so schneiden sich die drei so entstehenden Linien gegenseitig im fünften Berührungspunkte.

Wenn man zu jedem der Punkte, in welchem die Kanten dieses Tetraeders der Fläche nochmals begegnen, den zugehörigen harmonischen Theilpunkt bestimmt, so liegen die sechs Theilpunkte in einer Ebene.

Der Schlusssatz in § 3 nimmt folgende Form an:

Wenn man zwei der fünf Berührungspunkte verbindet und in dem Punkte, in welchem die Verbindungslinie der Fläche nochmals begegnet, eine Tangentialebene an die Fläche legt, so schneiden diese, sowie die Ebene durch die drei übrigen Berührungspunkte und die auf der Fläche gewählte Gerade sich in einem Punkte.

Die Gleichung 20) stellt für $r=2$ eine Fläche dritten Grades dar, auf welcher sich drei Gerade in einem Punkte schneiden und in einer Ebene liegen. Die Sätze des § 6 lauten daher:

Wenn drei gerade Linien einer Fläche dritten Grades in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Berührungspunkte der zwölf Ebenen, welche man durch jene Geraden noch an die Fläche legen kann, in einer Ebene. In dieser Ebene liegt auch die Berührungscurve des Tangentialkegels, welchen man vom Schnittpunkt jener Geraden aus noch an die Fläche legen kann.

Der betreffende Schnittpunkt vertritt bei den Flächen dritten Grades in gewisser Beziehung dieselbe Stelle, wie ein Wendepunkt bei den ebenen Curven dritten Grades.

Wenn die Berührungspunkte von vier der Tangentialebenen, welche man durch eine Gerade einer Fläche dritten Grades an dieselbe legen kann, in einer Ebene liegen, so liegt der Berührungspunkt der fünften Tangentialebene in der Geraden selbst und diese Ebene schneidet in drei sich in einem Punkte treffenden Geraden.

Wenn die Berührungspunkte von zwei durch eine Gerade einer Fläche dritten Grades gehenden Tangentialebenen in der Geraden selbst liegen, so liegen die Berührungspunkte der drei übrigen Tangentialebenen in einer Geraden, und umgekehrt.

Chemnitz. Dr. F. E. Eckardt.

VII. Ueber die Beziehung der mittleren Bewegungsintensität der Atome eines beliebigen festen Complexes zu dessen absoluter Temperatur.

Zur Ermittelung des fraglichen Zusammenhanges betrachten wir zunächst einen zweiatomigen Complex, dessen Bestandtheile sich ursprünglich in der Distanz x in einem stabilen Gleichgewicht befanden, jedoch zu Beginn der Zeit t kleine Verschiebungen σ_1, σ_2 in der Richtung ihrer Verbindungslinie erhielten, und suchen den mittleren Abstand und die mittleren Bewegungsintensitäten beider Atome auf analytischem Wege zu bestimmen. Hierbei setzen wir vorläufig voraus, dass zwischen beiden Atomen eine Kraft von der Form

$$K=\frac{\varepsilon m_1 m_2}{r^2}\cos\frac{\alpha}{r}$$

wirksam sei, also x einen der Werthe

$$\frac{2\alpha}{\pi},\ \frac{2\alpha}{5\pi},\ \frac{2\alpha}{9\pi},\ \cdots\ \frac{2\alpha}{(4k+1)\pi}\cdots$$

besitze, und machen ferner die Annahme, dass in den die Bewegung derselben charakterisirenden Gleichungen

$$m_1 s_1 + m_2 s_2 = m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2, \quad (M = m_1 + m_2,$$
$$\frac{d^2 u}{d t^2} = -\frac{\varepsilon M}{(\varkappa + u)^2} \cos \frac{\alpha}{\varkappa + u}, \qquad u = s_2 - s_1)$$

dritte und höhere Potenzen von u ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können. Die zur Auffindung von u dienende Differentialgleichung besitzt dann die Form

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = -\frac{\alpha \varepsilon M}{\varkappa^4} u \left(1 - \frac{3u}{\varkappa}\right)$$

und liefert unter Anwendung eines bekannten Verfahrens sofort t in Function von u

$$t = \frac{\varkappa^2 \sqrt{\varkappa}}{\sqrt{2 \alpha \varepsilon M}} \int_u^\sigma \frac{du}{\sqrt{u^3 - \frac{1}{2} \varkappa u^2 + \sigma^2 (\frac{1}{2} \varkappa - \sigma)}}$$

$$= \frac{\varkappa^2 \sqrt{\varkappa}}{\sqrt{2 \alpha \varepsilon M}} \int_u^\sigma \frac{du}{\sqrt{(\sigma - u) \{ \sigma (\frac{1}{2} \varkappa - \sigma) + (\frac{1}{2} \varkappa - \sigma) u - u^2 \}}}$$

$$= \frac{\varkappa^2 \sqrt{2 \varkappa}}{\sqrt{\alpha \varepsilon M}} \int_0^{\sqrt{\sigma - u}} \frac{dy}{\sqrt{\sigma (\varkappa - 3\sigma) - (\frac{1}{2} \varkappa - 3\sigma) y^2 - y^4}}.$$

Diese Relation erhält nach Einführung der Constanten

$$y_1^2 = \frac{\varkappa - 6\sigma + \sqrt{\varkappa^2 + 4 \varkappa \sigma - 12 \sigma^2}}{4} = \frac{\varkappa}{2} \left(1 - \frac{2\sigma}{\varkappa} - \frac{4\sigma^2}{\varkappa^2}\right),$$

$$y_2^2 = \frac{6\sigma - \varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + 4 \varkappa \sigma - 12 \sigma^2}}{4} = 2\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\varkappa}\right),$$

die Gestalt

$$t = \frac{\varkappa^2 \sqrt{2 \varkappa}}{\sqrt{\alpha \varepsilon M}} \int_0^{\sqrt{\sigma - u}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + y_1^2)(y_2^2 - y^2)}}$$

und verwandelt sich, wenn wir

$$y = \sqrt{2\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\varkappa}\right)(1 - z^2)}, \quad v = \sqrt{\frac{\sigma \left(1 - \frac{2\sigma}{\varkappa}\right) + u}{2\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\varkappa}\right)}}, \quad k = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa} \left(1 - \frac{3\sigma}{\varkappa}\right)}$$

setzen, in

$$t = \frac{\varkappa^2 \sqrt{2 \varkappa}}{\sqrt{\alpha \varepsilon M (y_1^2 + y_2^2)}} \int_v^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

$$= \frac{2 \varkappa^2}{\sqrt{\alpha \varepsilon M}} \left(1 - \frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{11 \sigma^2}{2 \varkappa^2}\right) \left[K - \int_0^v \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\right],$$

woraus

$$\int_0^v \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K - \frac{\sqrt{\alpha\varepsilon M}}{2\varkappa^2}\left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}-\frac{9\sigma^2}{2\varkappa^2}\right)t = K - at,$$

$$v = \sin am\,(K-at) = \frac{\cos am\,(at)}{\Delta\, am\,(at)}$$

folgt. Die diesem Werthe von v entsprechende Lösung für u lautet

$$u = 2\sigma\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\frac{1-\sin^2 am\,(at)}{1-k^2\sin^2 am\,(at)} - \sigma\left(1-\frac{2\sigma}{\varkappa}\right)$$

und soll nun noch auf eine praktisch brauchbarere Form gebracht werden. Da nämlich die Grössen

$$\frac{K-E}{K} = \frac{k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}} = \frac{2\sigma}{\varkappa}\left(1-\frac{5\sigma}{2\varkappa}\right),$$

$$\begin{aligned} K' &= -\frac{2}{\pi}K\log k - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ &= -\frac{2}{\pi}K\log k + \frac{4}{\pi}\left\{K\log 2 - \frac{\pi\sigma}{4\varkappa}\left(1-\frac{3\sigma}{8\varkappa}\right)\right\} \\ &= -\frac{K}{\pi}\log\left(\frac{k^2}{16}\right) - \frac{\sigma}{\varkappa}\left(1-\frac{3\sigma}{8\varkappa}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{K'\pi}{K} = -\log\left(\frac{k^2}{16}\right) - \frac{2\sigma}{\varkappa}\left(1-\frac{11\sigma}{8\varkappa}\right)$$

von der ersten Ordnung der Kleinheit sind, so können wir auf die für u gefundene Integralgleichung unmittelbar die bekannte Reihenentwickelung für $\sin^2 am\,u$

$$\sin^2 am\,u = \left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2\left\{\frac{4K}{\pi^2}(K-E) - 8\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{K}\right\},$$

$$\left[q = e^{-\frac{K'\pi}{K}} = \frac{k^2}{16}e^{\frac{2\sigma}{\varkappa}\left(1-\frac{11\sigma}{8\varkappa}\right)} = \frac{\sigma}{4\varkappa}\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\right]$$

anwenden und erhalten so

$$2\sigma\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\{1-\sin^2 am\,(at)\} = \sigma\left(1-\frac{3\sigma}{2\varkappa}\right) + \sigma\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\cos\frac{a\pi t}{K} + \frac{\sigma^2}{2\varkappa}\cos\frac{2a\pi t}{K},$$

$$1-k^2\sin^2 am\,(at) = \left(1-\frac{2\sigma}{\varkappa}+\frac{5\sigma^2}{\varkappa^2}\right)\left\{1+\frac{2\sigma}{\varkappa}\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\cos\frac{a\pi t}{K} + \frac{\sigma^2}{\varkappa^2}\cos\frac{2a\pi t}{K}\right\},$$

$$u = \frac{3\sigma^2}{2\varkappa} + \sigma\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\cos\frac{a\pi t}{K} - \frac{\sigma^2}{2\varkappa}\cos\frac{2a\pi t}{K}.$$

Hiernach erhält u für $t=0$ seinen Maximalwerth $u'=\sigma$, verschwindet für

$$t=\tfrac{1}{2}\tau'=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{3\sigma}{2\varkappa}+\frac{27\sigma^2}{8\varkappa^2}\right)}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{3\sigma}{2\varkappa}+\frac{9\sigma^2}{2\varkappa^2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{a}\left[\tfrac{1}{2}K+\frac{\sigma}{\varkappa}+\frac{6\sigma^2}{\varkappa^2}\right]$$

$$=\left\{\left(1+\frac{15\sigma^2}{4\varkappa^2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{2\sigma}{\varkappa}\left(1+\frac{5\sigma}{\varkappa}\right)\right\}\frac{\varkappa^2}{\sqrt{\alpha\varepsilon M}},$$

wird für

$$t=\tfrac{1}{2}\tau=\left(1+\frac{15\sigma^2}{4\varkappa^2}\right)\frac{\pi\varkappa^2}{\sqrt{\alpha\varepsilon M}}$$

zu einem Minimum

$$u''=-\sigma\left(1-\frac{2\sigma}{\varkappa}\right)=-\frac{\varkappa\sigma}{\varkappa+2\sigma}$$

und erreicht für $t=\tau$ abermals die Grösse σ. — Die Einführung von τ, der gemeinsamen Schwingungsdauer der beiden Atome in die u bestimmende periodische Reihe ergiebt dann

$$u=\sigma\left\{\frac{3\sigma}{2\varkappa}+\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\cos\frac{2\pi}{\tau}t-\frac{\sigma}{2\varkappa}\cos\frac{4\pi}{\tau}t\right\}$$

und für den mittleren Abstand

$$r_m=\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau(\varkappa+u)\,dt$$

der Atome während einer Schwingungsdauer den einfachen Ausdruck

$$r_m=\varkappa+\frac{3\sigma^2}{2\varkappa},$$

weil die Integrale

$$\int\limits_0^\tau\cos\frac{2\pi}{\tau}t\,dt,\quad\int\limits_0^\tau\cos\frac{4\pi}{\tau}t\,dt$$

verschwinden. Aus den bekannten Geschwindigkeiten

$$v_1=\quad\frac{2m_2\pi\sigma}{M\tau}\left\{\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\sin\frac{2\pi}{\tau}t-\frac{\sigma}{\varkappa}\sin\frac{4\pi}{\tau}t\right\},$$

$$v_2=-\frac{2m_1\pi\sigma}{M\tau}\left\{\left(1-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\sin\frac{2\pi}{\tau}t-\frac{\sigma}{\varkappa}\sin\frac{4\pi}{\tau}t\right\}$$

der Elemente des Complexes erhalten wir ferner für deren Schwingungsintensitäten die Ausdrücke

$$i_1=\frac{m_1m_2^2\pi^2}{M^2\tau^2}\sigma^2,\quad i_2=\frac{m_2m_1^2\pi^2}{M^2\tau^2}\sigma^2$$

oder

$$i_1=\frac{\alpha\varepsilon m_1m_2^2}{4M\varkappa^4}\sigma^2,\quad i_2=\frac{\alpha\varepsilon m_2m_1^2}{4M\varkappa^4}\sigma^2,$$

so dass — unter μ', μ'' zwei lediglich von der speciellen Beschaffenheit des gegebenen Systems abhängige Constante verstanden — zwischen r_m und i_1, resp. i_2 die Beziehungen stattfinden

$$r_m = x + \mu' i_1 = x + \mu'' i_2.$$

Ihre Differentiation führt, da x eine unveränderliche Grösse darstellt, auf die Gleichungen $dr_m = \mu' di_1$, resp. $dr_m = \mu'' di_2$.
welche sich unter die allgemeine Formel

$$dr_m = \mu\, di \tag{1}$$

subsumiren lassen, wenn wir mit i die **mittlere** Bewegungsintensität beider Atome bezeichnen. Dieselbe gilt, wie man sich leicht überzeugen kann, bei entsprechender Veränderung von μ auch für jedes andere Kraftgesetz

$$K = kmm' F(r, \alpha),$$

wenn nur $F(r, \alpha)$ eine continuirliche, innerhalb des Intervalles 0 bis ∞ überall endliche Function von r ist, welche für $r = x + u$ negativ, für $r = x - u$ positiv wird und sich für beide Werthe dieser Veränderlichen in eine convergente unendliche Reihe von der Form

$$a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots \textit{ in inf.} \quad (a_1, a_2 \gtrless 0)$$

entwickeln lässt.

Das in ihr enthaltene Gesetz kann kurz in folgender Weise ausgesprochen werden:

Jede relativ kleine Aenderung der mittleren Bewegungsintensität der Bestandtheile eines zweiatomigen Complexes verursacht eine ihr proportionale Aenderung des mittleren Abstandes seiner Atome.

Nun lehrt die Erfahrung, dass die Volumveränderung, welche irgend ein fester, aus einer **beliebigen** Anzahl von Atomen gebildeter Complex infolge einer relativ geringen Erhöhung oder Erniedrigung seiner absoluten Temperatur T erleidet, in geradem Verhältnisse zu dieser Temperaturveränderung steht, d. h. es muss speciell für ein zweiatomiges System neben der Gleichung 1) auch eine Relation von der Form

$$dr_m = \nu\, dT \tag{2}$$

existiren. Hieraus folgt mit Rücksicht auf 1):

Die absolute Temperatur jedes zweiatomigen festen Complexes ist proportional der mittleren Bewegungsintensität seiner Elemente.

Dass dieser Satz allgemein auf n zu einem festen Körper verbundene Atome übertragen werden kann, lässt sich dann leicht apagogisch nachweisen, indem jede andere Annahme über die Beziehung von T zu i in ihrer Anwendung auf den Specialfall $n = 2$ auf ein widersprechendes Resultat führen würde.

Wien. Dr. O. Simony.

IX.

Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes.

Von

Dr. Oscar Simony

in Wien.

(Als Fortsetzung zu Jahrg. XIX, Heft 4, S. 299—323.)

---

§ 8.

Anknüpfend an jene Untersuchungen des § 7, welche sich auf die möglichen Bewegungserscheinungen dreier gesonderter Atome für den Fall relativ sehr kleiner Verschiebungen ihrer Centren bezogen, wird die Hauptaufgabe des vorliegenden darin bestehen, dasselbe Problem auch für solche Verschiebungen zu behandeln, deren höhere Potenzen nicht insgesammt ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden dürfen. Wir wollen also vorläufig annehmen, dass in den allgemeinen Bewegungsgleichungen der drei Atome ausser den ersten auch die zweiten Potenzen von s_1, s_2, s_3, resp. $\xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2;\ \xi_3, \eta_3$ in Rechnung zu ziehen seien, und in Analogie mit § 7 zunächst jenen Fall untersuchen, in welchem ursprünglich alle Atomcentren eine gemeinsame Centrallinie besassen und deren anfängliche Verschiebungen σ_1, σ_2, σ_3 sämmtlich in der Richtung der letzteren liegen. — An die Stelle der Relationen 99) treten dann die folgenden:

$$140)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 s_1}{dt^2} &= a m_2 (s_2 - s_1)\left\{1 - \frac{3(s_2 - s_1)}{\varkappa_{1,2}}\right\} + b m_3 (s_3 - s_1)\left\{1 - \frac{3(s_3 - s_1)}{\varkappa_{1,3}}\right\},\\
\frac{d^2 s_2}{dt^2} &= -a m_1 (s_2 - s_1)\left\{1 - \frac{3(s_2 - s_1)}{\varkappa_{1,2}}\right\} + c m_3 (s_3 - s_2)\left\{1 - \frac{3(s_3 - s_2)}{\varkappa_{2,3}}\right\},\\
\frac{d^2 s_3}{dt^2} &= -b m_1 (s_3 - s_1)\left\{1 - \frac{3(s_3 - s_1)}{\varkappa_{1,3}}\right\} - c m_2 (s_3 - s_2)\left\{1 - \frac{3(s_3 - s_2)}{\varkappa_{2,3}}\right\},
\end{aligned}\right.$$

aus welchen sich für die Elongationsdifferenzen

$$141)\qquad d_2 - d_1 = u, \quad d_3 - d_1 = v$$

der Atome leicht die Differentialgleichungen

$$142)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}=3\left(\dfrac{aM_1}{\varkappa_{1,2}}-\dfrac{cm_3}{\varkappa_{2,3}}\right)u^2+\dfrac{6\,cm_3}{\varkappa_{2,3}}\,uv+3m_3\left(\dfrac{b}{\varkappa_{1,3}}-\dfrac{c}{\varkappa_{2,3}}\right)v^2 \\ \qquad -(aM_1+cm_3)u-(b-c)\,m_3 v, \\ \dfrac{d^2v}{dt^2}=3m_2\left(\dfrac{a}{\varkappa_{1,2}}+\dfrac{c}{\varkappa_{2,3}}\right)u^2-\dfrac{6\,cm_2}{\varkappa_{2,3}}\,uv+3\left(\dfrac{bM_2}{\varkappa_{1,3}}+\dfrac{cm_2}{\varkappa_{2,3}}\right)v^2 \\ \qquad -(a-c)\,m_2 u-(bM_2+cm_2)v \end{cases}$$

ableiten lassen. Um hieraus u und v zu bestimmen, setzen wir, unter a_1, a_3; b_1, b_3 vorläufig unbestimmte Grössen von der Ordnung σ, unter a_0, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8; b_0, b_2, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8 solche von der Ordnung σ^2 verstehend:

$$143)\quad \begin{cases} u=a_0+(a_1+a_2)\cos\mu_1 t+(a_3+a_4)\cos\mu_2 t \\ \quad +a_5\cos(\mu_1+\mu_2)\,t+a_6\cos(\mu_1-\mu_2)\,t+a_7\cos 2\mu_1 t+a_8\cos 2\mu_2 t, \\ v=b_0+(b_1+b_2)\cos\mu_1 t+(b_3+b_4)\cos\mu_2 t \\ \quad +b_5\cos(\mu_1+\mu_2)\,t+b_6\cos(\mu_1-\mu_2)\,t+b_7\cos 2\mu_1 t+b_8\cos 2\mu_2 t, \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{aligned} u^2 &= \tfrac{1}{2}(a_1^2+a_3^2)+a_1a_3\cos(\mu_1+\mu_2)\,t+a_1a_3\cos(\mu_1-\mu_2)\,t \\ &\quad+\tfrac{1}{2}a_1^2\cos 2\mu_1 t+\tfrac{1}{2}a_3^2\cos 2\mu_2 t, \\ uv &= \tfrac{1}{2}(a_1b_1+a_3b_3)+\tfrac{1}{2}(a_3b_1+a_1b_3)\cos(\mu_1+\mu_2)\,t \\ &\quad+\tfrac{1}{2}(a_3b_1+a_1b_3)\cos(\mu_1-\mu_2)\,t+\tfrac{1}{2}a_1b_1\cos 2\mu_1 t+\tfrac{1}{2}a_3b_3\cos 2\mu_2 t, \\ v^2 &= \tfrac{1}{2}(b_1^2+b_3^2)+b_1b_3\cos(\mu_1+\mu_2)\,t+b_1b_3\cos(\mu_1-\mu_2)\,t \\ &\quad+\tfrac{1}{2}b_1^2\cos 2\mu_1 t+\tfrac{1}{2}b_3^2\cos 2\mu_2 t, \end{aligned}$$

und substituiren diese Ausdrücke in 142). Beide Gleichungen erhalten demzufolge die Form

$$P+Q\cos\mu_1 t+R\cos\mu_2 t+S\cos(\mu_1+\mu_2)\,t+T\cos(\mu_1-\mu_2)\,t+U\cos 2\mu_1 t \\ +V\cos 2\mu_2 t=0$$

und liefern, weil sie für jeden Werth von t bestehen sollen, unmittelbar 18 Relationen zwischen jenen unbestimmten Coefficienten $a_0 \dots a_8$, $b_0 \dots b_8$ und den Constanten von 142). Hierzu treten dann noch als Anfangsbedingungen für $t=0$ die vier weiteren Beziehungen

$$144)\quad \begin{cases} a_1+a_3=\sigma_2-\sigma_1, \quad b_1+b_3=\sigma_3-\sigma_1, \\ a_0+a_2+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=0, \\ b_0+b_2+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8=0, \end{cases}$$

so dass hiernach zur Bestimmung der 20 Unbekannten $a_0 \dots a_8$; $b_0 \dots b_8$; μ_1, μ_2 im Ganzen 22 untereinander verschiedene Gleichungen erhalten werden. Die Lösung des Problems durch die Formeln 143) ist also nur in dem Falle möglich, dass von diesen 22 Relationen zwei als eine nothwendige Folge der übrigen erscheinen. — Dass diese Bedingung hier thatsächlich erfüllt wird, zeigt eine nähere Betrachtung der ersten acht Gleichungen, welche die Coefficienten von $\cos\mu_1 t$, $\cos\mu_2 t$ in 142) nach Sonderung der Grössen von der Ordnung σ von jenen von der Ordnung σ^2 liefern:

$$\begin{aligned} (aM_1+cm_3-\mu_1^2)\,a_1+m_3(b-c)\,b_1&=0, \\ m_2(a-c)\,a_1+(bM_2+cm_2-\mu_1^2)\,b_1&=0; \end{aligned}$$

$$(aM_1 + cm_3 - \mu_1^2)\,a_2 + m_3\,(b-c)\,b_2 = 0,$$
$$m_2\,(a-c)\,a_2 + (bM_2 + cm_2 - \mu_1^2)\,b_2 = 0;$$
$$(aM_1 + cm_3 - \mu_2^2)\,a_3 + m_3\,(b-c)\,b_3 = 0,$$
$$m_2\,(a-c)\,a_3 + (bM_2 + cm_2 - \mu_2^2)\,b_3 = 0;$$
$$(aM_1 + cm_3 - \mu_2^2)\,a_4 + m_3\,(b-c)\,b_4 = 0,$$
$$m_2\,(a-c)\,a_4 + (bM_2 + cm_2 - \mu_2^2)\,b_4 = 0.$$

Dieselben lehren, dass die Verhältnisse $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, beziehungsweise $\frac{b_3}{a_3}$, $\frac{b_4}{a_4}$ einander gleich sind, und liefern für jedes derselben zwei verschiedene Werthe, deren Gleichstellung zur Kenntniss von μ_1^2, μ_2^2 führt. Hierbei erscheinen diese beiden Unbekannten als die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{(b-c)\,m_3}{aM_1 + cm_3 - x} = \frac{bM_2 + cm_2 - x}{(a-c)\,m_2}$$

oder

$$x^2 - (aM_1 + bM_2 + cM_3)\,x + M\,(abm_1 + acm_2 + bcm_3) = 0$$

und coincidiren daher völlig mit den Ausdrücken 105). Drücken wir ferner mit Hilfe der nunmehr bekannten Quotienten

$$\frac{\mu_1^2 - (aM_1 + cm_3)}{(b-c)\,m_3} = \frac{bM_2 + cm_2 - \mu_2^2}{(b-c)\,m_3} = p,$$
$$\frac{\mu_2^2 - (aM_1 + cm_3)}{(b-c)\,m_3} = \frac{bM_2 + cm_2 - \mu_1^2}{(b-c)\,m_3} = q$$

b_1, b_3 in Function von a_1, a_3 aus und substituiren die so erhaltenen Gleichungen

$$b_1 = p\,a_1, \quad b_3 = q\,a_3$$

in die zweite der Anfangsbedingungen 144), so liefert deren Combination mit

$$a_1 + a_3 = \sigma_2 - \sigma_1$$

unter Berücksichtigung der Beziehung

$$pq = -\frac{(a-c)\,m_2}{(b-c)\,m_3}$$

alle fraglichen Constanten von der Ordnung σ

$$a_1 = \frac{(q-1)\,\sigma_1 - q\,\sigma_2 + \sigma_3}{p-q}$$
$$= \frac{[\mu_2^2 - (aM_1 + bm_3)]\,\sigma_1 - [\mu_2^2 - (aM_1 + cm_3)]\,\sigma_2 + (b-c)\,m_3\sigma_3}{\mu_1^2 - \mu_2^2},$$
$$a_3 = -\frac{(p-1)\,\sigma_1 - p\,\sigma_2 + \sigma_3}{p-q}$$
$$= -\frac{[\mu_1^2 - (aM_1 + bm_3)]\,\sigma_1 - [\mu_1^2 - (aM_1 + cm_3)]\,\sigma_2 + (b-c)\,m_3\sigma_3}{\mu_1^2 - \mu_2^2};$$
$$b_1 = \frac{(pq-p)\,\sigma_1 - pq\,\sigma_2 + p\,\sigma_3}{p-q}$$
$$= \frac{[\mu_2^2 - (am_2 + bM_2)]\,\sigma_1 + (a-c)\,m_2\sigma_2 - [\mu_2^2 - (bM_2 + cm_2)]\,\sigma_3}{\mu_1^2 - \mu_2^2},$$

$$b_3 = -\frac{(pq-q)\,\sigma_1 - pq\sigma_2 + q\sigma_3}{p-q}$$
$$= -\frac{[\mu_1^2-(am_2+bM_2)]\,\sigma_1 + (a-c)\,m_2\sigma_2 - [\mu_1^2-(bM_2+cm_2)]\,\sigma_3}{\mu_1^2-\mu_2^2}.$$

Die bisher verwendeten zehn Bedingungsgleichungen lassen folglich zwölf Constante vorläufig unbestimmt, indem aus ihnen ausser den sechs soeben aufgezählten Unbekannten a_1, a_3; b_1, b_3; μ_1, μ_2 lediglich die Verhältnisse

$$\frac{b_2}{a_2} = p, \quad \frac{b_4}{a_4} = q$$

berechnet werden können, und hiermit ist der Beweis für die richtige Wahl der Ausdrücke 143) geliefert, denn es bleiben, entsprechend den zwölf Unbekannten

$$a_0, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8;\ b_0, b_5, b_6, b_7, b_8$$

nach Abzug jener zehn Relationen noch deren zwölf übrig, welche nach Einführung der Abkürzungen

$$3\left(\frac{aM_1}{\varkappa_{1,2}} - \frac{cm_3}{\varkappa_{2,3}}\right) = A_1, \quad \frac{3cm_3}{\varkappa_{2,3}} = A_2, \quad 3m_3\left(\frac{b}{\varkappa_{1,3}} - \frac{c}{\varkappa_{2,3}}\right) = A_3,$$
$$aM_1 + cm_3 = A_4, \quad m_3(b-c) = A_5;$$
$$3m_2\left(\frac{a}{\varkappa_{1,2}} + \frac{c}{\varkappa_{2,3}}\right) = B_1, \quad \frac{3cm_2}{\varkappa_{2,3}} = B_2, \quad 3\left(\frac{bM_2}{\varkappa_{1,3}} + \frac{cm_2}{\varkappa_{2,3}}\right) = B_3,$$
$$m_2(a-c) = B_4, \quad bM_2 + cm_2 = B_5$$

folgende Schreibweise gestatten:

$$A_4a_0 + A_5b_0 = \tfrac{1}{2}A_1(a_1^2+a_3^2) + A_2(a_1b_1 + a_3b_3) + \tfrac{1}{2}A_3(b_1^2+b_3^2),$$
$$B_4a_0 + B_5b_0 = \tfrac{1}{2}B_1(a_1^2+a_3^2) - B_2(a_1b_1 + a_3b_3) + \tfrac{1}{2}B_3(b_1^2+b_3^2);$$
$$[A_4 - (\mu_1+\mu_2)^2]\,a_5 + A_5b_5 = A_1a_1a_3 + A_2(a_1b_3 + a_3b_1) + A_3b_1b_3,$$
$$B_4a_5 + [B_5 - (\mu_1+\mu_2)^2]\,b_5 = B_1a_1a_3 - B_2(a_1b_3 + a_3b_1) + B_3b_1b_3;$$
$$[A_4 - (\mu_1-\mu_2)^2]\,a_6 + A_5b_6 = A_1a_1a_3 + A_2(a_1b_3 + a_3b_1) + A_3b_1b_3,$$
$$B_4a_6 + [B_5 - (\mu_1-\mu_2)^2]\,b_6 = B_1a_1a_3 - B_2(a_1b_3 + a_3b_1) + B_3b_1b_3;$$
$$(A_4 - 4\mu_1^2)\,a_7 + A_5b_7 = \tfrac{1}{2}A_1a_1^2 + A_2a_1b_1 + \tfrac{1}{2}A_3b_1^2,$$
$$B_4a_7 + (B_5 - 4\mu_1^2)\,b_7 = \tfrac{1}{2}B_1a_1^2 - B_2a_1b_1 + \tfrac{1}{2}B_3b_1^2;$$
$$(A_4 - 4\mu_2^2)\,a_8 + A_5b_8 = \tfrac{1}{2}A_1a_3^2 + A_2a_3b_3 + \tfrac{1}{2}A_3b_3^2,$$
$$B_4a_8 + (B_5 - 4\mu_2^2)\,b_8 = \tfrac{1}{2}B_1a_3^2 - B_2a_3b_3 + \tfrac{1}{2}B_3b_3^2;$$
$$a_2 + a_4 = -(a_0 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8),$$
$$pa_2 + qa_4 = -(b_0 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8).$$

Dieselben zerfallen offenbar in sechs Paare von Gleichungen, welche stets je zwei Unbekannte enthalten* und daher eine so einfache Bestimmung

* Das hier benützte Verfahren zur Integration der Gleichungen 142) ist das einzige, welches auf eine einfache Art zu einer allen Anforderungen genügenden Lösung derselben führt, und jenem durch periodische Reihen von der Gestalt

derselben ermöglichen, dass wir uns darauf beschränken können, ausschliesslich a_0 und b_0 in expliciter Form darzustellen, weil die Kenntniss dieser beiden Grössen zu einer klaren Einsicht in die durch 142) charakterisirten Bewegungserscheinungen in erster Linie erfordert wird. — Berechnen wir nämlich die mittleren Abstände

$$\overline{\varkappa_{1,2}},\ \overline{\varkappa_{1,3}},\ \overline{\varkappa_{2,3}}$$

der drei Atome während der ganzen Dauer ihrer Bewegungen, so erhalten wir mit Rücksicht auf die für jedes reelle k giltige Beziehung

$$\lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t \cos kt\,dt}{t} = \lim_{t=\infty} \frac{\sin kt}{kt} = 0:$$

145) $$\overline{\varkappa_{1,2}} = \lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t (\varkappa_{1,2}+u)\,dt}{t} = \varkappa_{1,2} + a_0$$

$$u_0 + u_1 \cos x + u_2 \cos 2x + \ldots + u_n \cos nx + \ldots$$

deshalb vorzuziehen, weil hierbei die unbestimmten Coefficienten $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ keineswegs im Verhältnisse steigender Potenzen von σ abnehmen, und bereits die Quadrirung eines derartigen Ausdruckes auf die unendliche Doppelreihe

$$\begin{aligned}
&u_0^2 + \tfrac{1}{2}u_1^2 + \tfrac{1}{2}u_2^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}u_n^2 + \ldots \\
&+ (2u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots)\cos x \\
&+ (2u_0u_2 + \tfrac{1}{2}u_1^2 + u_1u_3 + u_2u_4 + \ldots)\cos 2x \\
&\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
&+ \left(u_0u_{2p} + \sum_{m=0}^{m=p-1} u_m u_{2p-m} + \tfrac{1}{2}u_p^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n u_{2p+n}\right)\cos 2px \\
&+ \left(u_0u_{2p+1} + \sum_{m=0}^{m=p} u_m u_{2p+1-m} + \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n u_{2p+n+1}\right)\cos(2p+1)x \\
&\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots
\end{aligned}$$

führen würde. Uebrigens besteht zwischen beiden Verfahren insofern ein Zusammenhang, als sich $\cos\mu_1 t$, $\cos\mu_2 t$, $\cos(\mu_1+\mu_2)t, \ldots$ unter Benutzung der bekannten Entwickelung

$$\cos\mu x = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2\mu} + \frac{\mu\cos x}{1^2-\mu^2} - \frac{\mu\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{\mu\cos 3x}{3^2-\mu^2} - \ldots\right\}$$

immer in unendliche Reihen von der gewünschten Form verwandeln lassen. Was endlich die dritte, gewöhnliche Methode zur Auflösung simultaner Differentialgleichungen anbelangt, so ist dieselbe nicht einmal auf die einfachsten Specialfälle von 142) anwendbar. So erhielte man z. B. für

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Av^2, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = Bu^2$$

zur Bestimmung von u und v die nicht integrabeln Eliminationsgleichungen

$$4\left(\frac{d^2u}{dt^2}\frac{d^4u}{dt^4}\right)^2 - 4\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)^2\frac{d^4u}{dt^4} + \left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)^4 - 16AB^2u^4\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^3 = 0,$$

$$4\left(\frac{d^2v}{dt^2}\frac{d^4v}{dt^4}\right)^2 - 4\frac{d^2v}{dt^2}\left(\frac{d^3v}{dt^3}\right)^2\frac{d^4v}{dt^4} + \left(\frac{d^3v}{dt^3}\right)^4 - 16A^2Bv^4\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^3 = 0.$$

und analog

$$\overline{\varkappa_{1,3}} = \varkappa_{1,3} + b_0, \quad \overline{\varkappa_{2,3}} = \varkappa_{2,3} + b_0 - a_0,$$

woraus die Nothwendigkeit einer genauen Discussion von a_0, b_0, resp. $b_0 - a_0$ deutlich hervorgeht.

Hierbei erscheint es vortheilhaft, drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Grössen a, b, c einander gleich, oder theilweise oder insgesammt voneinander verschieden sind.

Im ersten Falle, für welchen μ_1, μ_2 gleichzeitig den gemeinsamen Werth

$$\mu = \sqrt{a M}$$

erhalten, und demzufolge u und v in die merkwürdigen Ausdrücke

146) $$\left\{ \begin{aligned} u &= a_0 + (\sigma_2 - \sigma_1 - \tfrac{2}{3} a_0) \cos \mu t - \tfrac{1}{3} a_0 \cos 2 \mu t, \\ v &= b_0 + (\sigma_3 - \sigma_1 - \tfrac{2}{3} b_0) \cos \mu t - \tfrac{1}{3} b_0 \cos 2 \mu t \end{aligned} \right.$$

übergehen, bestimmen sich a_0, b_0 aus den ziemlich einfachen Gleichungen

147) $$\left\{ \begin{aligned} a_0 = \frac{3}{2M} \Big\{ & \left(\frac{M_1}{\varkappa_{1,2}} + \frac{m_3}{\varkappa_{1,3}}\right) \sigma_1^2 + \left(\frac{M_1}{\varkappa_{1,2}} - \frac{m_3}{\varkappa_{2,3}}\right) \sigma_2^2 + m_3 \left(\frac{1}{\varkappa_{1,3}} - \frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right) \sigma_3^2 \\ & - \frac{2 M_1}{\varkappa_{1,2}} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{2 m_3}{\varkappa_{1,3}} \sigma_1 \sigma_3 + \frac{2 m_3}{\varkappa_{2,3}} \sigma_2 \sigma_3 \Big\}, \\ b_0 = \frac{3}{2M} \Big\{ & \left(\frac{M_2}{\varkappa_{1,3}} + \frac{m_2}{\varkappa_{1,2}}\right) \sigma_1^2 + m_2 \left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}} + \frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right) \sigma_2^2 + \left(\frac{M_2}{\varkappa_{1,3}} + \frac{m_2}{\varkappa_{2,3}}\right) \sigma_3^2 \\ & - \frac{2 m_2}{\varkappa_{1,2}} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{2 M_2}{\varkappa_{1,3}} \sigma_1 \sigma_3 - \frac{2 m_2}{\varkappa_{2,3}} \sigma_2 \sigma_3 \Big\}, \end{aligned} \right.$$

welche sich offenbar unter die allgemeinen Formen

148) $$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= l \sigma_1^2 + m \sigma_2^2 + n \sigma_3^2 + p \sigma_1 \sigma_2 + q \sigma_1 \sigma_3 + r \sigma_2 \sigma_3, \\ b_0 &= l' \sigma_1^2 + m' \sigma_2^2 + n' \sigma_3^2 + p' \sigma_1 \sigma_2 + q' \sigma_1 \sigma_3 + r' \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right.$$

subsumiren lassen. Dieselben enthalten ausser einer Reihe constanter, den Relationen

149) $$\left\{ \begin{aligned} l + m + n + p + q + r &= 0, \\ l' + m' + n' + p' + q' + r' &= 0 \end{aligned} \right.$$

Genüge leistenden Coefficienten im Ganzen drei veränderliche Elemente σ_1, σ_2, σ_3, und es entsteht jetzt die Frage, ob wir dieselben unter gewissen Voraussetzungen über l, l'; m, m'; ... vielleicht so wählen können, dass a_0 und b_0 gleichzeitig verschwinden. Um hierüber zu entscheiden, setzen wir der Kürze wegen

150) $$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = x, \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = y$$

und bilden hierauf, von den als coexistirend angenommenen Beziehungen

151) $$\left\{ \begin{aligned} m x^2 + r x y + n y^2 + p x + q y + l &= 0, \\ m' x^2 + r' x y + n' y^2 + p' x + q' y + l' &= 0 \end{aligned} \right.$$

ausgehend, die ihnen correspondirenden Eliminationsgleichungen

$$152)\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix} mx^2+px+l & n \\ m'x^2+p'x+l' & n'\end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} rx+q & n \\ r'x+q' & n'\end{vmatrix}\begin{vmatrix} mx^2+px+l & rx+q \\ m'x^2+p'x+l' & r'x+q'\end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} ny^2+qy+l & m \\ n'y^2+q'y+l' & m'\end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} ry+p & m \\ r'y+p' & m'\end{vmatrix}\begin{vmatrix} ny^2+qy+l & ry+p \\ n'y^2+q'y+l' & r'y+p'\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

zur Bestimmung von x und y. Ihre weitere Entwickelung zeigt, dass, sobald $l, l'; m, m'; \ldots$ den Bedingungen

$$153)\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & p \\ l' & p'\end{vmatrix}\begin{vmatrix} m & p \\ m' & p'\end{vmatrix} \gtrless 0, \\ \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & q \\ l' & q'\end{vmatrix}\begin{vmatrix} n & q \\ n' & q'\end{vmatrix} \gtrless 0, \\ \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & r \\ m' & r'\end{vmatrix}\begin{vmatrix} n & r \\ n' & r'\end{vmatrix} \gtrless 0\end{array}\right.$$

nachkommen, x und y jederzeit zwei Gleichungen vierten Grades zu befriedigen haben, deren jede lauter reelle Coefficienten und demzufolge entweder ausschliesslich complexe, resp. imaginäre, oder mindestens zwei reelle Wurzeln besitzen muss, indem ja nicht reelle Wurzeln in ihnen nur paarweise vorkommen können.

Nun bestehen aber für die Constanten der Grundgleichungen 151) andererseits die Relationen 149), nach welchen die Formeln 148) und mit ihnen beide biquadratische Resolventen verschwinden, falls

$$154)\qquad x = 1, \quad y = 1$$

wird, d. h. falls alle Atome gleichgrosse, gleichgerichtete Verschiebungen erleiden. Es müssen mithin wenigstens noch zwei weitere, reelle Werthe dieser Verhältnisse vorhanden sein, welche, wenn die nach Potenzen von x, resp. y zu ordnenden Polynome 152) nicht durch

$$(x-1)^2, \text{ beziehungsweise } (y-1)^2$$

ohne Rest theilbar sind, stets von der Einheit verschieden ausfallen und daher a_0, b_0 der Null gleich machen, obwohl für

$$\sigma_1 \gtrless \sigma_2 \gtrless \sigma_3$$

jederzeit Bewegungen von Atomen eintreten.

Wir können übrigens indirect nachweisen, dass die zuletzt über 152) gemachte Voraussetzung thatsächlich nie erfüllt wird. Denn schreiben wir den Werth von b_0 in der Form

$$b_0 = \frac{3}{2M}\left\{m_2\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)(\sigma_1-\sigma_2)^2 - \frac{2m_2}{\varkappa_{2,3}}(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3) + \left(\frac{M_2}{\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{\varkappa_{2,3}}\right)(\sigma_1-\sigma_3)^2\right\},$$

so wird sofort ersichtlich, dass derselbe für alle von der Einheit verschiedene x und y immer grösser bleibt, als der wesentlich positive Ausdruck

$$\frac{3\sigma_1^2}{2M}\Big\{m_2\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)(1-x)^2+\left(\frac{M_2}{\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{\varkappa_{2,3}}\right)(1-y)^2$$
$$-\frac{2m_2}{\varkappa_{2,3}}(1-x)(1-y)\sqrt{\left(1+\frac{\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}}\right)\left(1+\frac{M_2\varkappa_{2,3}}{m_2\varkappa_{1,3}}\right)}\Big\}$$
$$=\frac{3\sigma_1^2}{2M}\left\{(1-x)\sqrt{m_2\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)}-(1-y)\sqrt{\frac{M_2}{\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{\varkappa_{2,3}}}\right\}^2.$$

Ertheilt man demnach den Elementen eines durch die Gleichungen

$$a=b=c$$

charakterisirten dreiatomigen Complexes derartige centrale Verschiebungen σ_1, σ_2, σ_3, dass erst deren dritte Potenzen ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden dürfen, so erhält der mittlere Abstand seiner Grenzatome unter allen Umständen einen positiven Zuwachs b_0, während einer der beiden übrigen mittleren Abstände $\overline{\varkappa_{1,2}}$, beziehungsweise $\overline{\varkappa_{2,3}}$ gleichzeitig unverändert bleiben, ja sogar verkleinert werden kann. So verschwindet z. B. a_0 für

$$\frac{M_1}{m_3}=\frac{\varkappa_{1,2}}{\varkappa_{2,3}},\quad \sigma_1=\sigma_3\gtrless\sigma_2$$

und erhält, sobald das erste und zweite Atom um gleiche Strecken verschoben werden, den zufolge der Relation

$$\varkappa_{1,3}=\varkappa_{1,2}+\varkappa_{2,3}$$

unbedingt negativen Werth

$$a_0=-\frac{3m_3}{2M}\left(\frac{1}{\varkappa_{2,3}}-\frac{1}{\varkappa_{1,3}}\right)(\sigma_1-\sigma_3)^2.$$

Es lässt sich ferner leicht die Ueberzeugung gewinnen, dass der soeben ausgesprochene Satz auch für den allgemeinsten Fall

$$a\gtrless b\gtrless c,$$

in welchem a_0, b_0 durch die complicirten Quotienten

$$155)\quad\begin{cases} b_0=\dfrac{3}{2\left(\frac{m_3}{a}+\frac{m_2}{b}+\frac{m_1}{c}\right)}\Big\{\frac{m_2}{b}\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)(a_1^2+a_3^2)-\frac{2m_2}{b\varkappa_{2,3}}(a_1b_1+a_3b_3)\\ \qquad+\left(\frac{m_1}{c\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{b\varkappa_{2,3}}+\frac{m_3}{a\varkappa_{1,3}}\right)(b_1^2+b_3^2)\Big\},\\ a_0=\dfrac{3}{2\left(\frac{m_3}{a}+\frac{m_2}{b}+\frac{m_1}{c}\right)}\Big\{\left(\frac{m_1}{c\varkappa_{1,2}}+\frac{m_2}{b\varkappa_{1,2}}-\frac{m_3}{a\varkappa_{2,3}}\right)(a_1^2+a_3^2)\\ \qquad+\frac{2m_3}{a\varkappa_{2,3}}(a_1b_1+a_3b_3)+\frac{m_3}{a}\left(\frac{1}{\varkappa_{1,3}}-\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)(b_1^2+b_3^2)\Big\}\end{cases}$$

charakterisirt werden, seine Giltigkeit behauptet.

Denn der kleinste mögliche Werth von b_0, welcher für

$$a_1b_1,\quad a_3b_3>0,\quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1},\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\gtrless 1$$

eintreten kann, erscheint immer noch grösser als die positive Summe

$$\left\{\frac{m_2}{b}\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)a_1^2-\frac{2m_2}{b\varkappa_{2,3}}a_1b_1\sqrt{\left(1+\frac{\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}}\right)\left(1+\frac{b}{a}\frac{m_3\varkappa_{2,3}}{m_2\varkappa_{1,3}}+\frac{b}{c}\frac{m_1\varkappa_{2,3}}{m_2\varkappa_{1,3}}\right)}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m_1}{c\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{b\varkappa_{2,3}}+\frac{m_3}{a\varkappa_{1,3}}\right)b_1^2\right\}$$
$$+\left\{\frac{m_2}{b}\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)a_3^2-\frac{2m_2}{b\varkappa_{2,3}}a_3b_3\sqrt{\left(1+\frac{\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}}\right)\left(1+\frac{b}{a}\frac{m_3\varkappa_{2,3}}{m_2\varkappa_{1,3}}+\frac{b}{c}\frac{m_1\varkappa_{2,3}}{m_2\varkappa_{1,3}}\right)}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m_1}{c\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{b\varkappa_{2,3}}+\frac{m_3}{a\varkappa_{1,3}}\right)b_3^2\right\},$$

d. h. als die Summe der beiden Quadrate

$$\left\{a_1\sqrt{\frac{m_2}{b}\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)}-b_1\sqrt{\frac{m_1}{c\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{b\varkappa_{2,3}}+\frac{m_3}{a\varkappa_{1,3}}}\right\}^2$$
$$+\left\{a_3\sqrt{\frac{m_2}{b}\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)}-b_3\sqrt{\frac{m_1}{c\varkappa_{1,3}}+\frac{m_2}{b\varkappa_{2,3}}+\frac{m_3}{a\varkappa_{1,3}}}\right\}^2,$$

während a_0, resp. b_0-a_0 infolge des Auftretens negativer Glieder bei

$$a_1^2+a_3^2,\ \text{resp.}\ b_1^2+b_3^2$$

in ganz analoger Weise wie für $a=b=c$ variiren können. Ausserdem liefert eine vollständige Berechnung der Aggregate

$$a_1^2+a_3^2,\quad a_1b_1+a_3b_3,\quad b_1^2+b_3^2$$

den Beweis, dass die für die früher untersuchten specielleren Werthe von a_0 und b_0 gefundenen Eigenschaften 148) und 149) unmittelbar auf die Formeln 155) übertragen werden dürfen, indem aus denselben nach Anwendung der Gleichungen

$$\mu_1^2+\mu_2^2=aM_1+bM_2+cM_3,$$
$$\mu_1^4+\mu_2^4=a^2M_1^2+b^2M_2^2+c^2M_3^2+2abm_2m_3+2acm_1m_3+2bcm_1m_2$$

gleichfalls alle Wurzelgrössen verschwinden.

In jenem Falle endlich, wo zwei der Constanten a, b, c, z. B. a und c einander gleich sind, treten an die Stelle von 155) die einfacheren Beziehungen

$$a_0=\frac{3\left\{\left(\frac{am_2}{\varkappa_{1,2}}+\frac{bm_1}{\varkappa_{1,2}}-\frac{bm_3}{\varkappa_{2,3}}\right)(a_1^2+a_3^2)+\frac{2bm_3}{\varkappa_{2,3}}a_3b_3+bm_3\left(\frac{1}{\varkappa_{1,3}}-\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)b_3^2\right\}}{2(am_2+bM_2)},$$

$$b_0=\frac{3\left\{am_2\left(\frac{1}{\varkappa_{1,2}}+\frac{1}{\varkappa_{2,3}}\right)(a_1^2+a_3^2)-\frac{2am_2}{\varkappa_{2,3}}a_3b_3+\left(\frac{am_2}{\varkappa_{2,3}}+\frac{bM_2}{\varkappa_{1,3}}\right)b_3^2\right\}}{2(am_2+bM_2)},$$

$$\left(a_1=\frac{M_2\sigma_2-m_1\sigma_1-m_3\sigma_3}{M_2},\quad a_3=\frac{m_3}{M_2}(\sigma_3-\sigma_1),\quad b_3=\sigma_3-\sigma_1\right),$$

aus welchen für $m_1=m_2=m_3$ die auffallenden Relationen

$$a_0=\tfrac{1}{2}b_0$$

156) $$=\frac{3\{(a+b)\sigma_1^2+2a\sigma_2^2+(a+b)\sigma_3^2-2a\sigma_1\sigma_2-2b\sigma_1\sigma_3-2a\sigma_2\sigma_3\}}{4\varkappa(a+2b)}$$

hervorgehen. Bei drei congruenten Atomen findet also jederzeit eine Vergrösserung sämmtlicher mittlerer Abstände der Atome statt, welche sich auf $\overline{\varkappa_{12}}$ und $\overline{\varkappa_{23}}$ gleichmässig vertheilt und von deren Massen unabhängig erscheint.

Hiermit haben jene Untersuchungen ihren Abschluss gefunden, welche zu einem klaren Verständnisse der Variabelen u und v erforderlich waren, und es erübrigt nur noch, auch die Elongationen d_1, d_2, d_3 und Bewegungsintensitäten i_1, i_2, i_3 der Atome in Function der Zeit darzustellen. Um die drei erstgenannten Unbekannten zu finden, beziehen wir dieselben, wie in § 7, auf die um S verschobenen stabilen Gleichgewichtslagen der Atome und combiniren die unter dieser Voraussetzung giltige Gleichung

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 = 0$$

mit 141). So ergeben sich die Beziehungen

$$157) \quad d_1 = -\frac{m_2 u + m_3 v}{M}, \quad d_2 = \frac{M_2 u - m_3 v}{M}, \quad d_3 = \frac{M_1 v - m_2 u}{M},$$

d. h. die Elongationen der Atome bestehen, falls man auch die zweiten Potenzen von σ_1, σ_2, σ_3 berücksichtigen muss, regelmässig aus je zwei Bestandtheilen, einer constanten, lediglich von a_0, b_0, m_1, m_2, m_3 abhängigen Grösse und einem mit t variirenden Ausdrucke, welcher im Allgemeinen aus sechs einfach periodischen Bewegungen von den Schwingungsdauern

$$158) \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\mu_1}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\mu_2}, \quad \tau_3 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 + \tau_1}, \quad \tau_4 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad \tau_5 = \tfrac{1}{2}\tau_1, \quad \tau_6 = \tfrac{1}{2}\tau_2$$

gebildet wird. Hierbei erscheinen die Amplituden A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 jener Schwingungen, welche den Factoren $\cos\mu_1 t$, $\cos\mu_2 t$ zugehören, unter der allgemeinen Form

$$159) \quad \begin{cases} f\sigma_1^2 + g\sigma_2^2 + h\sigma_3^2 + l\sigma_1\sigma_2 + m\sigma_1\sigma_3 + n\sigma_2\sigma_3 + p\sigma_1 + q\sigma_2 + r\sigma_3, \\ (f+g+h+l+m+n=0, \quad p+q+r=0), \end{cases}$$

während p, q, r für alle übrigen periodischen Glieder verschwinden. Es wird daher immerhin möglich sein, σ_1, σ_2, σ_3 so zu wählen, dass von den sechs genannten Coefficienten ausschliesslich drei wegfallen, indem dieselben, gleich Null gesetzt, nicht, wie die Relationen 108), die relativen Verhältnisse der Verschiebungen, sondern diese selbst bestimmen. Hingegen lassen sich irgend drei andere Amplituden A, B, C von der Ordnung σ^2 nur unter der Bedingung aus d_1, d_2, d_3 eliminiren, wenn ihre periodischen Factoren gleiche Argumente besitzen, in welchem Falle jede der Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

eine nothwendige Folge der beiden anderen ist. Dies hat darin seinen Grund, dass derartige Beziehungen nach Division durch σ_1^2 ausser den Verhältnissen x und y keine willkürlichen Grössen enthalten.

Was schliesslich die Berechnung von i_1, i_2, i_3 betrifft, so gelingt dieselbe mit Hilfe der Ausdrücke

$$i_1 = \frac{m_1}{2M^2} \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t [(a_1 m_2 + b_1 m_3)\, \mu_1 \sin \mu_1 t + (a_3 m_2 + b_3 m_3)\, \mu_2 \sin \mu_2 t]^2\, dt,$$

$$i_2 = \frac{m_2}{2M^2} \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t [(a_1 M_2 - b_1 m_3)\, \mu_1 \sin \mu_1 t + (a_3 M_2 - b_3 m_3)\, \mu_2 \sin \mu_2 t]^2\, dt,$$

$$i_3 = \frac{m_3}{2M^2} \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t [(a_1 m_2 - b_1 M_1)\, \mu_1 \sin \mu_1 t + (a_3 m_2 - b_3 M_1)\, \mu_2 \sin \mu_2 t]^2\, dt$$

ohne Schwierigkeit und liefert der Reihe nach

$$160)\quad \left\{ \begin{aligned} i_1 &= \frac{m_1}{4M^2} [\mu_1^2 (a_1 m_2 + b_1 m_3)^2 + \mu_2^2 (a_3 m_2 + b_3 m_3)^2], \\ i_2 &= \frac{m_2}{4M^2} [\mu_1^2 (a_1 M_2 - b_1 m_3)^2 + \mu_2^2 (a_3 M_2 - b_3 m_3)^2], \\ i_3 &= \frac{m_3}{4M^2} [\mu_1^2 (a_1 m_2 - b_1 M_1)^2 + \mu_2^2 (a_3 m_2 - b_3 M_1)^2]. \end{aligned} \right.$$

i_1, i_2, i_3 besitzen demnach dieselbe allgemeine Form wie a_0, b_0, $b_0 - a_0$, so dass der Quotient aus je zwei dieser Grössen immer eine endliche, bei gegebenem σ_1, σ_2, σ_3 constante Zahl bleibt, und mit Rücksicht auf die aus 147) und 155) gezogenen Schlüsse folgender Satz ausgesprochen werden kann:

Erleiden drei ursprünglich stabil ruhende Atome mit gemeinsamer Centrallinie relativ kleine centrale Verschiebungen σ_1, σ_2, σ_3, so ist die hierdurch bewirkte lineare Ausdehnung des Complexes stets der Bewegungsintensität jedes seiner Elemente proportional.*

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung jener Bewegungserscheinungen, welche aus einer kleinen Störung einer beliebigen stabilen Gleichgewichtsfigur dreier Atome resultiren können, sobald in die Differentialgleichungen 121) auch sämmtliche Glieder von der Ordnung σ^2 aufzunehmen sind. Die letzteren ergeben sich leicht mittels jener Reductionsformeln, welche den beiden allgemeinen Beziehungen

---

* Setzen wir in der ersten der Gleichungen 146) und in den in 160) für i_1, i_2 [er]haltenen Formeln $m_3 = 0$, so folgt

$$u = \frac{3(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{2\varkappa} + (\sigma_2 - \sigma_1)\left(1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varkappa}\right) \cos \mu t - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{2\varkappa} \cos 2\mu t,$$

$$i_1 = \frac{m_1 m_2^2}{4M^2} \mu^2 (\sigma_2 - \sigma_1)^2, \quad i_2 = \frac{m_1^2 m_2}{4M^2} \mu^2 (\sigma_2 - \sigma_1)^2,$$

[w]elche Ergebnisse bis auf Grössen von der Ordnung σ^3 vollständig mit jenen übereinstimmen, welche wir a. O. unter Benützung elliptischer Integrale und Functionen auf [e]inem ziemlich complicirten Wege gewonnen haben, und unsern Satz auch für den [sp]eciellen Fall eines zweiatomigen Complexes verificiren.

$$\frac{\varkappa\cos\vartheta+\varDelta\xi}{r^3}\cos\frac{\alpha}{r}=\frac{\alpha}{\varkappa^4}\Big\{\varDelta\xi\cos^2\vartheta+\varDelta\eta\sin\vartheta\cos\vartheta+\frac{3(1-3\cos^2\vartheta)\cos\vartheta}{2\varkappa}\varDelta^2\xi$$
$$+\frac{(1-9\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}{\varkappa}\varDelta\xi\varDelta\eta+\frac{(1-9\sin^2\vartheta)\cos\vartheta}{2\varkappa}\varDelta^2\eta\Big\}$$
$$=\frac{\alpha}{\varkappa^4}\{\varDelta\xi\cos^2\vartheta+\varDelta\eta\sin\vartheta\cos\vartheta+\varphi(\vartheta)\varDelta^2\xi$$
$$+\psi(\vartheta)\varDelta\xi\varDelta\eta+\chi(\vartheta)\varDelta^2\eta\},$$

$$\frac{\varkappa\sin\vartheta+\varDelta\eta}{r^3}\cos\frac{\alpha}{r}=\frac{\alpha}{\varkappa^4}\Big\{\varDelta\xi\sin\vartheta\cos\vartheta+\varDelta\eta\sin^2\vartheta+\frac{(1-9\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}{2\varkappa}\varDelta^2\xi$$
$$+\frac{(1-9\sin^2\vartheta)\cos\vartheta}{\varkappa}\varDelta\xi\varDelta\eta+\frac{3(1-3\sin^2\vartheta)\sin\vartheta}{2\varkappa}\varDelta^2\eta\Big\}$$
$$=\frac{\alpha}{\varkappa^4}\{\varDelta\xi\sin\vartheta\cos\vartheta+\varDelta\eta\sin^2\vartheta+\varphi'(\vartheta)\varDelta^2\xi$$
$$+\psi'(\vartheta)\varDelta\xi\varDelta\eta+\chi'(\vartheta)\varDelta^2\eta\}$$

für

$$\alpha=\alpha_{1,2},\quad \varkappa=\varkappa_{1,2},\quad \vartheta=\vartheta_1,\quad \varDelta\xi=\xi_2-\xi_1,\quad \varDelta\eta=\eta_2-\eta_1;$$
$$\alpha=\alpha_{1,3},\quad \varkappa=\varkappa_{1,3},\quad \vartheta=\vartheta_2,\quad \varDelta\xi=\xi_3-\xi_1,\quad \varDelta\eta=\eta_3-\eta_1;$$
$$\alpha=\alpha_{2,3},\quad \varkappa=\varkappa_{2,3},\quad \vartheta=\vartheta_3,\quad \varDelta\xi=\xi_3-\xi_2,\quad \varDelta\eta=\eta_3-\eta_2$$

entspringen, und liefern zunächst zu der ersten Relation in 121) folgende Ergänzung:

$$\{am_2\varphi(\vartheta_1)+bm_3\varphi(\vartheta_2)\}\xi_1^2+\{am_2\psi(\vartheta_1)+bm_3\psi(\vartheta_2)\}\xi_1\eta_1$$
$$+\{am_2\chi(\vartheta_1)+bm_3\chi(\vartheta_2)\}\eta_1^2+am_2\varphi(\vartheta_1)(\xi_2^2-2\xi_1\xi_2)$$
$$+bm_3\varphi(\vartheta_2)(\xi_3^2-2\xi_1\xi_3)+am_2\psi(\vartheta_1)(\xi_2\eta_2-\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$$
$$+bm_3\psi(\vartheta_2)(\xi_3\eta_3-\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1)+am_2\chi(\vartheta_1)(\eta_2^2-2\eta_1\eta_2)$$
$$+bm_3\chi(\vartheta_2)(\eta_3^2-2\eta_1\eta_3).$$

Jene für die zweite derselben folgt jetzt unmittelbar durch Vertauschung der Functionen φ, ψ, χ mit φ', ψ', χ', so dass die horizontalen Componenten der Atomkräfte stets dieselben Combinationen von ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 wie deren verticale enthalten. Zugleich wird ersichtlich, dass in den auf diese Weise vervollständigten Gleichungen für $\frac{d^2\xi_1}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta_1}{dt^2}$ von den 21 Amben mit Wiederholungen, welche sich aus den sechs erwähnten Variabelen bilden lassen, nur 17 vorhanden sind, denn die Producte

$$\xi_2\xi_3,\ \eta_2\eta_3,\ \xi_2\eta_3,\ \xi_3\eta_2\ .$$

fehlen in beiden Zusätzen. In ähnlicher Weise ermangeln die entsprechend ergänzten Ausdrücke für

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2},\ \frac{d^2\eta_2}{dt^2};\quad \frac{d^2\xi_3}{dt^2},\ \frac{d^2\eta_3}{dt^2}$$

der Combinationen

$\xi_1\xi_3$, $\eta_1\eta_3$, $\xi_1\eta_3$, $\xi_3\eta_1$, beziehungsweise $\xi_1\xi_2$, $\eta_1\eta_2$, $\xi_1\eta_2$, $\xi_2\eta_1$,

zeigen jedoch im Uebrigen einen völlig analogen Bau mit den Bewegungsgleichungen des ersten Atoms, so dass es überflüssig erscheint, sie hier anzuführen.

Um nun eine brauchbare Lösung dieser sechs verwickelten Beziehungen anzubahnen, benutzen wir wieder die Substitutionen 122), 123), welche die definitive Bestimmung aller Verschiebungsprojectionen von jener der vier Hilfsgrössen $\xi'_1, \eta'_1; \xi'_2, \eta'_2$ abhängig machen, und gelangen so schliesslich zu vier simultanen Differentialgleichungen für

$$\frac{d^2\xi'_1}{dt^2}, \frac{d^2\eta'_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2\xi'_2}{dt^2}, \frac{d^2\eta'_2}{dt^2},$$

deren Integration das vorgelegte Problem erledigen wird. Dieselben stimmen natürlich bezüglich ihrer Glieder von der Ordnung σ mit den Relationen 124) überein, während sich jene von der Ordnung σ^2 insgesammt aus der allgemeinen Form

$$A\xi'^2_1 + B\xi'^2_2 + C\eta'^2_1 + D\eta'^2_2 + E\xi'_1\xi'_2 + F\eta'_1\eta'_2 + G\xi'_1\eta'_1 + H\xi'_2\eta'_2 \\ + J\xi'_1\eta'_2 + K\xi'_2\eta'_1$$

ableiten lassen, wenn man die Constanten derselben der Reihe nach mit den Coefficienten

$$A_5, A_6, \ldots A_{13}, A_{14}; \quad B_5, B_6, \ldots B_{13}, B_{14};$$
$$C_5, C_6, \ldots C_{13}, C_{14}; \quad D_5, D_6, \ldots D_{13}, D_{14}$$

vertauscht. In diesen Relationen ersetzen wir ξ'_1 durch das Aggregat

$$\xi'_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{k=4} [(a_{2k-1} + a_{2k}) \cos \mu_k t + a_{k+20} \cos 2\mu_k t]$$
$$+ a_{19} \cos(\mu_3 + \mu_4) t + \sum_{k=2}^{k=4} [a_{2k+5} \cos(\mu_1 + \mu_k) t + a_{2k+6} \cos(\mu_1 - \mu_k) t]$$
$$+ a_{20} \cos(\mu_3 - \mu_4) t + \sum_{k=3}^{k=4} [a_{2k+9} \cos(\mu_2 + \mu_k) t + a_{2k+10} \cos(\mu_2 - \mu_k) t],$$

in welchem 20 verschiedene Cosinusse und 29 vorläufig unbestimmte Grössen

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; \quad a_0, a_1, \ldots a_{23}, a_{24}$$

vorkommen, deren Vertauschung mit

$$b_0, \ldots b_{24}; \; c_0, \ldots c_{24}; \; d_0, \ldots d_{24}$$

unmittelbar die correspondirenden Annahmen bezüglich ξ'_2, η'_1, η'_2 darbietet. Die Substitution dieser Aggregate in das zu integrirende Gleichungssystem liefert dann 100 Bestimmungsgleichungen für die erwähnten 104 Constanten, welche ausserdem noch die acht Anfangsbedingungen

$$\sum_{k=1}^{k=4} a_{2k-1} = K_0, \quad \sum_{k=1}^{k=4} b_{2k-1} = K_1, \quad \sum_{k=1}^{k=4} c_{2k-1} = K_2, \quad \sum_{k=1}^{k=4} d_{2k-1} = K_3, *$$
$$\sum_{k=1}^{k=4} a_{2k-2} + \sum_{k=8}^{k=24} a_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=4} b_{2k-2} + \sum_{k=8}^{k=24} b_k = 0,$$

---

* Die Werthe von K_0, K_1, K_2, K_3 sind bereits aus § 7, S. 316, bekannt.

$$\sum_{k=1}^{k=4} c_{2k-2} + \sum_{k=8}^{k=24} c_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=4} d_{2k-2} + \sum_{k=8}^{k=24} d_k = 0$$

zu erfüllen haben.

Dass aber dessenungeachtet an diese Grössen nur 104 wesentlich voneinander verschiedene Forderungen gestellt werden, lehrt eine nähere Betrachtung der von den Coefficienten der Cosinusse

$$\cos\mu_1 t, \ \cos\mu_2 t, \ \cos\mu_3 t, \ \cos\mu_4 t$$

herrührenden Beziehungen, deren erste Gruppe durch die Relationen

$$\begin{gathered}(A_1-\mu_1^2)\,a_1 + A_2 b_1 + A_3 c_1 + A_4 d_1 = 0,\\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ D_1 a_1 + D_2 b_1 + D_3 c_1 + (D_4-\mu_1^2)\,d_1 = 0;\\ (A_1-\mu_1^2)\,a_2 + A_2 b_2 + A_3 c_2 + A_4 d_2 = 0,\\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ D_1 a_2 + D_2 b_2 + D_3 c_2 + (D_4-\mu_1^2)\,d_2 = 0\end{gathered}$$

gebildet wird und unmittelbar zur Kenntniss der drei übrigen Gleichungssysteme führt, wenn wir in ihr

$$\begin{array}{ccc} \mu_1^2;\ a_1,\ldots d_1;\ a_2,\ldots d_2 & \text{durch} & \mu_2^2;\ a_3,\ldots d_3;\ a_4,\ldots d_4 \\ \text{resp.} & & \text{resp.} \\ \mu_3^2;\ a_5,\ldots d_5;\ a_6,\ldots d_6; & & \mu_4^2;\ a_7,\ldots d_7;\ a_8,\ldots d_8 \end{array}$$

ersetzen. Eliminiren wir nämlich aus denselben die Verhältnisse

$$\begin{gathered}\frac{b_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_1}, \frac{d_1}{a_1}; \quad \frac{b_2}{a_2}, \frac{c_2}{a_2}, \frac{d_2}{a_2},\\ \frac{b_3}{a_3}, \frac{c_3}{a_3}, \frac{d_3}{a_3}; \quad \frac{b_4}{a_4}, \frac{c_4}{a_4}, \frac{d_4}{a_4},\\ \ldots \quad \ldots\\ \frac{b_7}{a_7}, \frac{c_7}{a_7}, \frac{d_7}{a_7}; \quad \frac{b_8}{a_8}, \frac{c_8}{a_8}, \frac{d_8}{a_8},\end{gathered}$$

so erhalten wir für μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2, μ_4^2 stets dieselbe Resolvente 125), d. h. für $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ die Werthe

$$\mu_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \ \mu_2 = \sqrt{\varepsilon_2}, \ \mu_3 = \sqrt{\varepsilon_3}, \ \mu_4 = \sqrt{\varepsilon_4},$$

im Uebrigen jedoch nur diese 24 Quotienten, so dass im Ganzen noch ebensoviele Unbekannte als Gleichungen (76) übrig bleiben. Hierbei ergeben sich für je zwei dieser Brüche

$$\begin{gathered}\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}; \quad \frac{c_1}{a_1}, \frac{c_2}{a_2}; \quad \frac{d_1}{a_1}, \frac{d_2}{a_2};\\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ \frac{b_7}{a_7}, \frac{b_8}{a_8}; \quad \frac{c_7}{a_7}, \frac{c_8}{a_8}; \quad \frac{d_7}{a_7}, \frac{d_8}{a_8}\end{gathered}$$

stets dieselben Formeln und schliesslich aus der Combination der nunmehr bekannten Verhältnisse von ungeradem Index mit den vier ersten Anfangsbedingungen sämmtliche Coefficienten von der Ordnung σ.

Da ferner die Bestimmungsgleichungen für a_0, b_0, c_0, d_0 der Reihe nach aus der allgemeinen Beziehung

$$\begin{aligned} & P_1 a_0 + P_2 b_0 + P_3 c_0 + P_4 d_0 \\ = -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=4} & (P_5 a^2_{2k-1} + P_6 b^2_{2k-1} + P_7 c^2_{2k-1} + P_8 d^2_{2k-1} + P_9 a_{2k-1} b_{2k-1} \\ & + P_{10} c_{2k-1} d_{2k-1} + P_{11} a_{2k-1} c_{2k-1} + P_{12} b_{2k-1} d_{2k-1} \\ & + P_{13} a_{2k-1} d_{2k-1} + P_{14} b_{2k-1} c_{2k-1}) \end{aligned}$$

mittels der Substitutionen

$$P = A,\ P = B,\ P = C,\ P = D$$

gewonnen werden können, so enthalten sie jetzt linker Hand lauter bekannte Grössen und gestatten daher eine sehr einfache Berechnung dieser wichtigen Constanten, welche im Allgemeinen aus allen 21 Gliedern des Quadrates

$$(\sigma_{1,x} + \sigma_{2,x} + \sigma_{3,x} + \sigma_{1,y} + \sigma_{2,y} + \sigma_{3,y})^2$$

zusammengesetzt erscheinen.

Dieselbe setzt uns in den Stand, unter Anwendung der allgemeinen Formel

$$\bar{x} = x + \Delta x = x + \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \Delta\xi \cos\vartheta + \Delta\eta \sin\vartheta + \frac{(\Delta\xi \sin\vartheta - \Delta\eta \cos\vartheta)^2}{2x} \right\} dt$$

auch die mittleren Abstände $\bar{x}_{1,2}$, $\bar{x}_{1,3}$, $\bar{x}_{2,3}$ der Atome während der ganzen Dauer ihrer Bewegungen aufzufinden, welche nach Einführung der Abkürzungen

$$161)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_s = a_s - b_s, \quad g_s = c_s - d_s; \\ & k_s = \frac{M_2}{m_3} a_s + \frac{m_2}{m_3} b_s, \quad l_s = \frac{M_2}{m_3} c_s + \frac{m_2}{m_3} d_s; \\ & p_s = \frac{m_1}{m_3} a_s + \frac{M_3}{m_3} b_s, \quad q_s = \frac{m_1}{m_3} c_s + \frac{M_3}{m_3} d_s \end{aligned} \right.$$

folgende Darstellungsweise gestatten:

$$162)\quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_{1,2} &= x_{1,2} - f_0 \cos\vartheta_1 - g_0 \sin\vartheta_1 + \frac{1}{4x_{1,2}} \sum_{m=1}^{m=4} (f_{2m-1} \sin\vartheta_1 - g_{2m-1} \cos\vartheta_1)^2, \\ \bar{x}_{1,3} &= x_{1,3} - k_0 \cos\vartheta_2 - l_0 \sin\vartheta_2 + \frac{1}{4x_{1,3}} \sum_{m=1}^{m=4} (k_{2m-1} \sin\vartheta_2 - l_{2m-1} \cos\vartheta_2)^2, \\ \bar{x}_{2,3} &= x_{2,3} - p_0 \cos\vartheta_3 - q_0 \sin\vartheta_3 + \frac{1}{4x_{2,3}} \sum_{m=1}^{m=4} (p_{2m-1} \sin\vartheta_3 - q_{2m-1} \cos\vartheta_3)^2. \end{aligned} \right.$$

Die vollständige Entwickelung dieser Aggregate führt in Analogie mit dem zuerst behandelten einfacheren Probleme zu dem Ergebnisse, dass sich $\bar{x}_{1,2}$, $\bar{x}_{1,3}$, $\bar{x}_{2,3}$ nur für

$$\frac{\sigma_{2,x}}{\sigma_{1,x}} = \frac{\sigma_{3,x}}{\sigma_{1,x}} = 1, \quad \frac{\sigma_{2,y}}{\sigma_{1,y}} = \frac{\sigma_{3,y}}{\sigma_{1,y}} = 1$$

auf $\varkappa_{1,2}$, $\varkappa_{1,3}$, $\varkappa_{2,3}$ reduciren, weil für jedes andere reelle Werthsystem von

$$\sigma_{1,x}, \sigma_{2,x}, \sigma_{3,x}; \quad \sigma_{1,y}, \sigma_{2,y}, \sigma_{3,y}$$

mindestens eine der Differenzen $\Delta\varkappa_{1,2}$, $\Delta\varkappa_{1,3}$, $\Delta\varkappa_{2,3}$ von der Null verschieden ausfällt.

Ertheilt man demnach drei eine stabile dreiseitige Gleichgewichtsfigur constituirenden Atomen relativ kleine beliebig gerichtete Verschiebungen, so erfolgt, falls deren Quadrate noch eine Berücksichtigung erfordern, unter allen Umständen eine bleibende Aenderung (Zu- oder Abnahme) der von ihren Centrallinien begrenzten Fläche F, deren Werth aus der Gleichung

$$\text{163)} \quad \begin{aligned} \Delta F = \frac{F}{2}\Bigg(& \frac{\Delta\varkappa_{1,2}+\Delta\varkappa_{1,3}+\Delta\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}+\varkappa_{1,3}+\varkappa_{2,3}} + \frac{\Delta\varkappa_{1,2}+\Delta\varkappa_{1,3}-\Delta\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}+\varkappa_{1,3}-\varkappa_{2,3}} \\ & + \frac{\Delta\varkappa_{1,2}-\Delta\varkappa_{1,3}+\Delta\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}-\varkappa_{1,3}+\varkappa_{2,3}} + \frac{\Delta\varkappa_{1,3}+\Delta\varkappa_{2,3}-\Delta\varkappa_{1,2}}{\varkappa_{1,3}+\varkappa_{2,3}-\varkappa_{1,2}}\Bigg) \end{aligned}$$

ersichtlich wird. Die allgemeine Form dieser Grösse stimmt, wie man sich leicht überzeugen kann, mit jener von a_0, b_0, c_0, d_0 überein und steht mithin zu den mittleren Energien i_1, i_2, i_3 der Atome in einem analogen Verhältnisse, wie in dem früher behandelten speciellen Falle der Zuwachs $\Delta\varkappa_{1,3}$ zu deren Bewegungsintensitäten.

Denn bestimmen wir mit Hilfe der für sämmtliche drei Werthpaare ξ'_1, η'_1; ξ'_2, η'_2; ξ'_3, η'_3 giltigen Beziehung

$$i_k = \frac{m_k}{2} \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \left(\frac{d\xi'_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta'_k}{dt}\right)^2 \right\} dt$$

i_1, i_2, i_3, so ergeben sich die Ausdrücke

$$\text{164)} \quad \left\{ \begin{aligned} i_1 &= \frac{m_1}{4} \sum_{k=1}^{k=4} (a^2_{2k-1} + c^2_{2k-1})\, \mu^2_k, \\ i_2 &= \frac{m_2}{4} \sum_{k=1}^{k=4} (b^2_{2k-1} + d^2_{2k-1})\, \mu^2_k, \\ i_3 &= \frac{1}{4 m_3} \sum_{k=1}^{k=4} [(a_{2k-1} m_1 + b_{2k-1} m_2)^2 + (c_{2k-1} m_1 + d_{2k-1} m_2)^2]\, \mu^2_k, \end{aligned} \right.$$

welche, wie ΔF, von der Ordnung σ^2 und bei gegebenem $\sigma_{1,x}, \sigma_{2,x}, \sigma_{3,x}$; $\sigma_{1,y}, \sigma_{2,y}, \sigma_{3,y}$ constant sind.

Die Flächenänderung ΔF ist also gleichfalls der Bewegungsintensität jedes einzelnen Atoms proportional.

Um endlich auch die Bestimmungsweise der übrigen Constanten möglichst übersichtlich darzulegen, setzen wir abkürzend

$$\begin{aligned} f(x, r, s) = {} & a_r a_s x_5 + b_r b_s x_6 + c_r c_s x_7 + d_r d_s x_8 \\ & + \tfrac{1}{2} [(a_r b_s + a_s b_r)\, x_9 + (c_r d_s + c_s d_r)\, x_{10} + (a_r c_s + a_s c_r)\, x_{11} + (b_r d_s + b_s d_r)\, x_{12} \\ & + (a_r d_s + a_s d_r)\, x_{13} + (b_r c_s + b_s c_r)\, x_{14}], \end{aligned}$$

$$\varphi(x,r) = \tfrac{1}{2}(a^2{}_r x_5 + b^2{}_r x_6 + c^2{}_r x_7 + d^2{}_r x_8 + a_r b_r x_9 + c_r d_r x_{10} + a_r c_r x_{11} + b_r d_r x_{12} + a_r d_r x_{13} + b_r c_r x_{14})$$

und subsumiren die zur Berechnung von a_9 bis d_{24} dienenden Relationen unter folgende drei Gruppen:

$$165)\quad \begin{cases} [A_1 - (\mu_m + \mu_n)^2]\,a + A_2 b + A_3 c + A_4 d = -f(A, 2m-1, 2n-1), \\ \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ D_1 a + D_2 b + D_3 c + [D_4 - (\mu_m + \mu_n)^2]\,d = -f(D, 2m-1, 2n-1); \end{cases}$$

$$166)\quad \begin{cases} [A_1 - (\mu_m - \mu_n)^2]\,a + A_2 b + A_3 c + A_4 d = -f(A, 2m-1, 2n-1), \\ \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ D_1 a + D_2 b + D_3 c + [D_4 - (\mu_m - \mu_n)^2]\,d = -f(D, 2m-1, 2n-1); \end{cases}$$

$$167)\quad \begin{cases} (A_1 - 4\mu^2{}_k)\,a + A_2 b + A_3 c + A_4 d = -\varphi(A, 2k-1), \\ \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ D_1 a + D_2 b + D_3 c + (D_4 - 4\mu^2{}_k)\,d = -\varphi(D, 2k-1). \end{cases}$$

Treffen wir nunmehr in 165) der Reihe nach die Substitutionen

$$m=1,\ n=2,\ a=a_9,\ \ldots\ d=d_9;\quad m=1,\ n=3,\ a=a_{11},\ \ldots\ d=d_{11};$$
$$m=1,\ n=4,\ a=a_{13},\ \ldots\ d=d_{13};\quad m=2,\ n=3,\ a=a_{15},\ \ldots\ d=d_{15};$$
$$m=2,\ n=4,\ a=a_{17},\ \ldots\ d=d_{17};\quad m=3,\ n=4,\ a=a_{19},\ \ldots\ d=d_{19}$$

und setzen ebenso in 166), beziehungsweise 167) successive

$$m=1,\ n=2,\ a=a_{10},\ \ldots\ d=d_{10};\quad m=1,\ n=3,\ a=a_{12},\ \ldots\ d=d_{12};$$
$$m=1,\ n=4,\ a=a_{14},\ \ldots\ d=d_{14};\quad m=2,\ n=3,\ a=a_{16},\ \ldots\ d=d_{16};$$
$$m=2,\ n=4,\ a=a_{18},\ \ldots\ d=d_{18};\quad m=3,\ n=4,\ a=a_{20},\ \ldots\ d=d_{20},$$

resp.

$$k=1,\ a=a_{21},\ \ldots\ d=d_{21};\quad k=2,\ a=a_{22},\ \ldots\ d=d_{22};$$
$$k=3,\ a=a_{23},\ \ldots\ d=d_{23};\quad k=4,\ a=a_{24},\ \ldots\ d=d_{24},$$

so resultiren im Ganzen 16 lineare, von einander unabhängige Gleichungssysteme mit je vier Unbekannten, deren Auflösung zur Kenntniss der 64 Coefficienten

$$a_9,\ b_9,\ c_9,\ d_9;\ \ldots\ a_{24},\ b_{24},\ c_{24},\ d_{24}$$

führt. Sind dieselben einmal bekannt, so liefern die vier letzten Anfangsbedingungen im Verein mit den früher gefundenen Gleichungen

$$b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2,\ \ldots\ b_8 = \frac{b_7}{a_7} a_8;\quad c_2 = \frac{c_1}{a_1} a_2,\ \ldots\ c_8 = \frac{c_7}{a_7} a_8;$$
$$d_2 = \frac{d_1}{a_1} a_2,\ \ldots\ d_8 = \frac{d_7}{a_7} a_8$$

auch die Grössen a_2, a_4, a_6, a_8, womit sämmtliche Factoren der Cosinusse in den von uns aufgestellten Integralgleichungen eindeutig determinirt sind.

Diese Factoren zerfallen in zwei Classen, insofern die Coefficienten von $\cos \mu_1 t$, ... $\cos \mu_4 t$ ausser den 21 Amben mit Wiederholungen von $\sigma_{1,x}$, ... $\sigma_{3,y}$ noch je einen Zusatz von der Form 129) besitzen, welcher bei allen übrigen Amplituden fehlt. Daher können durch eine passende Wahl der anfänglichen Verschiebungen jedesmal sechs verschiedenen Cosinussen angehörige Coefficienten der ersten, beziehungsweise fünf der zweiten Art aus den allgemeinen Formeln für ξ'_1, η'_1; ξ_2, η'_2; ξ_3, η'_3 eliminirt werden, sobald sich für

$$\sigma_{1,x},\ \sigma_{2,x},\ \ldots\ \sigma_{3,y} \text{ resp. } \frac{\sigma_{2,x}}{\sigma_{1,x}},\ \frac{\sigma_{3,x}}{\sigma_{1,x}},\ \ldots\ \frac{\sigma_{3,y}}{\sigma_{1,x}}$$

Eliminationsgleichungen von gerader Ordnung ergeben. Sind jedoch die letzteren vom dritten, fünften, ... Grade, so ist es ebenso gut möglich, dass ihnen ausser dem Werthsysteme 130) keine weiteren reellen Wurzeln zukommen, d. h. bei heterogenen Verschiebungen höchstens fünf, resp. vier Amplituden gleichzeitig verschwinden können.

Hiernach bestehen unter Zulassung von Grössen zweiter Ordnung die Projectionen der veränderlichen Verschiebungen gewöhnlich aus je einem constanten und 20 variablen Gliedern, welche ebensoviele einfach periodische Bewegungen repräsentiren, deren Schwingungszahlen $n_1 \ldots n_{20}$, wie das vorliegende Schema

$$168)\quad \left\{\begin{array}{l} n_1 = \frac{\mu_1}{2\pi},\ \ldots\ n_4 = \frac{\mu_4}{2\pi}; \\ n_5 = n_1 + n_2,\ n_6 = n_1 - n_2;\quad n_7 = n_1 + n_3,\ n_8 = n_1 - n_3; \\ n_9 = n_1 + n_4,\ n_{10} = n_1 - n_4;\quad n_{11} = n_2 + n_3,\ n_{12} = n_2 - n_3; \\ n_{13} = n_2 + n_4,\ n_{14} = n_2 - n_4;\quad n_{15} = n_3 + n_4,\ n_{16} = n_3 - n_4; \\ n_{17} = 2n_1,\ \ldots\ n_{20} = 2n_4 \end{array}\right.$$

zeigt, ausnahmslos Functionen von n_1, n_2, n_3, n_4 sind.

Was schliesslich die Modificationen der bisher gewonnenen Resultate in solchen Fällen anbelangt, bei welchen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 theilweise der Null oder einander gleich sind, so wollen wir uns hier mit der Untersuchung jener Abänderungen derselben begnügen, welche für

$$\mu_2 = \mu_3,\quad \mu_4 = 0,$$

also z. B. bei drei congruenten Atomen eintreten. Die wichtigste dieser Aenderungen betrifft hierbei die nicht periodischen Glieder der Verschiebungsprojectionen, indem, wenn irgend eine der Wurzeln von 125) verschwindet, mindestens in zwei der für ξ'_1, η'_1 etc. resultirenden Formeln Constante von der Ordnung σ erscheinen. Bezeichnen wir derartige Grössen allgemein mit p, solche von der Ordnung σ^2 mit q, so werden demnach ξ'_1, η'_1 etc. speciell in dem von uns gewählten Ausnahmsfalle die gemeinsame Gestalt

$$p_0 + q_0 + (p_1 + q_1)\cos\mu_1 t + (p_2 + q_2)\cos\mu_2 t + q_3\cos(\mu_1 + \mu_2)t$$
$$+ q_4\cos(\mu_1 - \mu_2)t + q_5\cos 2\mu_1 t + q_6\cos 2\mu_2 t$$

besitzen, d. h. der Reihe nach durch die Ausdrücke

$$\xi'_1 = a_0 + a_1 + (a_2 + a_3)\cos\mu_1 t + \ldots + a_9\cos 2\mu_2 t,$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$
$$\eta'_3 = f_0 + f_1 + (f_2 + f_3)\cos\mu_1 t + \ldots + f_9\cos 2\mu_2 t$$

wiedergegeben werden können. Aus ihnen folgen für die mittleren Abstände $\bar{x}_{1,2}$, $\bar{x}_{1,3}$, $\bar{x}_{2,3}$ und die Schwingungsintensitäten der Atome die Beziehungen

$$\overline{\varkappa}_{1,2} = F(\varkappa_{1,2}, \vartheta_1, a, b, d, e) = \varkappa_{1,2} - [(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)] \cos\vartheta_1$$
$$- [(d_0 - e_0) + (d_1 - e_1)] \sin\vartheta_1 + \frac{[(a_0 - b_0)\sin\vartheta_1 - (d_0 - e_0)\cos\vartheta_1]^2}{2\varkappa_{1,2}}$$
$$+ \frac{[(a_2 - b_2)\sin\vartheta_1 - (d_2 - e_2)\cos\vartheta_1]^2 + [(a_4 - b_4)\sin\vartheta_1 - (d_4 - e_4)\cos\vartheta_1]^2}{4\varkappa_{1,2}},$$
$$\overline{\varkappa}_{1,3} = F(\varkappa_{1,3}, \vartheta_2, a, c, d, f),$$
$$\overline{\varkappa}_{2,3} = F(\varkappa_{2,3}, \vartheta_3, b, c, e, f);$$
$$i_1 = \frac{m_1}{4}[(a_2^2 + c_2^2)\mu_1^2 + (a_4^2 + c_4^2)\mu_2^2] = \Phi(m_1, a, c),$$
$$i_2 = \Phi(m_2, b, d), \quad i_3 = \Phi(m_3, e, f),$$

welche bezüglich der Verhältnisse der drei letztgenannten Grössen zu $\varDelta F$ [163)] noch folgenden auffallenden Satz exemplificiren:

Verschwinden eine oder mehrere der Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, so sind $\varDelta F$ und i_1, resp. i_2, i_3 nicht unbedingt von derselben allgemeinen Form und Grössenordnung, indem $\varDelta F$ dann auch erste Potenzen der anfänglichen Verschiebungen enthalten, d. h. der Quotient

$$\frac{\varDelta F}{\Phi} = k$$

unendlich gross werden kann, sobald $\sigma^2_{1,x}, \ldots \sigma^2_{3,y}$; $\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}, \ldots \sigma_{2,y}\sigma_{3,y}$ gegen $\sigma_{1,x}, \ldots \sigma_{3,y}$ vernachlässigt werden müssen. — Das Gesetz der Proportionalität von $\varDelta F$ und Φ besitzt daher nur eine beschränkte Giltigkeit.

Im Anschluss hieran wollen wir nunmehr untersuchen, inwiefern unser Integrationsverfahren einer Erweiterung bedürftig wird, sobald die Bewegungsgleichungen der Atome noch dritte und höhere Potenzen von s_1, resp. ξ_1, η_1 etc. enthalten. Um hierbei möglichst rasch zum Ziele zu gelangen, empfiehlt es sich, vorläufig den einfachsten Specialfall

$$m_1, m_2 > 0, \quad m_3 = 0$$

ins Auge zu fassen, d. h. zunächst ein passendes Integral der Differentialgleichung 18) aufzusuchen, falls z. B. noch dritte und vierte Potenzen von ξ in sie aufzunehmen sind. Dieselbe gestattet unter diesen Voraussetzungen die Darstellungsweise

169) $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\alpha\varepsilon M}{\varkappa^4}\left\{1 - \frac{3\xi}{\varkappa} + \frac{6}{\varkappa^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{36\varkappa^2}\right)\xi^2 - \frac{10}{\varkappa^3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{12\varkappa^2}\right)\xi^3\right\}\xi$$
$$= -A\xi + B\xi^2 - C\xi^3 + D\xi^4,$$

und lässt sich, wenn wir unter h, k, l Grössen von der Ordnung ξ^2, ξ^3, ξ^4 verstehen und der Kürze wegen

170) $$(1 + h + k)\sqrt{A} = \mu$$

setzen, stets durch ein Integral von der Form

171) $$\xi = h_0 + k_0 + l_0 + (\sigma + h_1 + k_1 + l_1)\cos\mu t + (h_2 + k_2 + l_2)\cos 2\mu t$$
$$+ (k_3 + l_3)\cos 3\mu t + l_4 \cos 4\mu t$$

befriedigen. Denn die Substitution dieses Ausdruckes in 169) liefert mit Rücksicht auf die Formeln

$$\xi^2 = \tfrac{1}{2}\sigma^2 + h_1\sigma + (h_0^2 + \tfrac{1}{2}h_1^2 + \tfrac{1}{2}h_2^2 + k_1\sigma) + [(2h_0 + h_2)\sigma$$
$$+ (2h_0h_1 + h_1h_2 + 2k_0\sigma + k_2\sigma)]\cos\mu t + [h_2\sigma + (h_1h_2 + k_2\sigma)]\cos 3\mu t$$
$$+ [\tfrac{1}{2}\sigma^2 + h_1\sigma + (2h_0h_2 + \tfrac{1}{2}h_1^2 + k_1\sigma + k_3\sigma)]\cos 2\mu t + (\tfrac{1}{2}h_2^2 + k_3\sigma)\cos 4\mu t,$$

$$\xi^3 = \tfrac{3}{2}(h_0 + \tfrac{1}{2}h_2)\sigma^2 + \tfrac{3}{4}(\sigma + 3h_1)\sigma^2\cos\mu t + \tfrac{3}{2}(h_0 + h_2)\sigma^2\cos 2\mu t$$
$$+ \tfrac{1}{4}(\sigma + 3h_1)\sigma^2\cos 3\mu t + \tfrac{3}{4}h_2\sigma^2\cos 4\mu t,$$

$$\xi^4 = \tfrac{3}{8}\sigma^4 + \tfrac{1}{2}\sigma^4\cos 2\mu t + \tfrac{1}{8}\sigma^4\cos 4\mu t,$$

$$-\frac{1}{A}\frac{d^2\xi}{dt^2} = [\sigma + h_1 + (k_1 + 2h\sigma) + (l_1 + 2hh_1 + 2k\sigma)]\cos\mu t$$
$$+ 4[h_2 + k_2 + (l_2 + 2hh_2)]\cos 2\mu t + 9(k_3 + l_3)\cos 3\mu t + 16 l_4\cos 4\mu t$$

im Verein mit den Anfangsbedingungen drei voneinander isolirte Systeme von Gleichungen zur Bestimmung der Constanten

$$h_0,\ h_1,\ h_2;\ h,\ k_0,\ \ldots\ k_3;\ k,\ l_0,\ \ldots\ l_4:$$

I.

$$Ah_0 - \tfrac{1}{2}B\sigma^2 = 0,\quad 3Ah_2 + \tfrac{1}{2}B\sigma^2 = 0,\quad h_0 + h_1 + h_2 = 0;$$

II.

$$2Ah + B(2h_0 + h_2) - \tfrac{3}{4}C\sigma^2 = 0,^{*}\quad Ak_0 - Bh_1\sigma = 0,$$
$$3Ak_2 + Bh_1\sigma = 0,\quad 8Ak_3 + Bh_2\sigma - \tfrac{1}{4}C\sigma^3 = 0,$$
$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0;$$

III.

$$2A(hh_1 + k\sigma) + B(2h_0h_1 + h_1h_2 + 2k_0\sigma + k_2\sigma) - \tfrac{9}{4}Ch_1\sigma^2 = 0,$$
$$Al_0 - B(h_0^2 + \tfrac{1}{2}h_1^2 + \tfrac{1}{2}h_2^2 + k_1\sigma) + \tfrac{3}{2}C(h_0 + \tfrac{1}{2}h_2)\sigma^2 - \tfrac{3}{8}D\sigma^4 = 0,$$
$$A(3l_2 + 8hh_2) + B(2h_0h_2 + \tfrac{1}{2}h_1^2 + k_1\sigma + k_3\sigma) - \tfrac{3}{2}C(h_0 + h_2)\sigma^2 + \tfrac{1}{2}D\sigma^4 = 0,$$
$$8Al_3 + B(h_1h_2 + k_2\sigma) - \tfrac{3}{4}Ch_1\sigma^2 = 0,$$
$$15Al_4 + B(\tfrac{1}{2}h_2^2 + k_3\sigma) - \tfrac{3}{4}Ch_2\sigma^2 + \tfrac{1}{8}D\sigma^4 = 0,$$
$$l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 0,$$

aus welchen sich für dieselben folgende Werthe ergeben:

---

* Setzt man $C=0$, so folgt für h aus dieser Gleichung der Quotient

$$h = -\frac{B}{A}(h_0 + \tfrac{1}{2}h_2) = -\frac{15\sigma^2}{4\varkappa^2},$$

so dass die Schwingungsdauer τ der beiden Atome unter dieser Annahme die Grösse

$$\tau = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\sqrt{A}}(1 - h) = \frac{2\pi}{\sqrt{A}}\left(1 + \frac{15\sigma^2}{4\varkappa^2}\right)$$

besitzt, wie wir bereits a. O. gefunden haben.

$$
172) \left\{
\begin{aligned}
& h_0 = \frac{3\sigma^2}{2\varkappa}, \quad h_1 = -\frac{\sigma^2}{\varkappa}, \quad h_2 = -\frac{\sigma^2}{2\varkappa}; \\
& h = -\frac{3\sigma^2}{2\varkappa^2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{24\varkappa^2}\right), \quad k_0 = -\frac{3\sigma^3}{\varkappa^2}, \quad k_1 = \frac{13\sigma^3}{8\varkappa^2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{312\varkappa^2}\right), \\
& k_2 = \frac{\sigma^3}{\varkappa^2}, \quad k_3 = \frac{3\sigma^3}{8\varkappa^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{72\varkappa^2}\right); \\
& k = \frac{3\sigma^3}{\varkappa^3}\left(1 + \frac{\alpha^2}{24\varkappa^2}\right), \quad l_0 = \frac{6\sigma^4}{\varkappa^3}\left(1 + \frac{\alpha^2}{384\varkappa^2}\right), \\
& l_1 = -\frac{23\sigma^4}{8\varkappa^3}\left(1 + \frac{\alpha^2}{184\varkappa^2}\right), \quad l_2 = -\frac{5\sigma^4}{3\varkappa^3}\left(1 + \frac{\alpha^2}{60\varkappa^2}\right), \\
& l_3 = -\frac{9\sigma^4}{8\varkappa^3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{72\varkappa^2}\right), \quad l_4 = -\frac{\sigma^4}{3\varkappa^3}\left(1 - \frac{7\alpha^2}{192\varkappa^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Aus diesem Schema wird ersichtlich, dass die Argumente der in 171) auftretenden Cosinusse so lange von den anfänglichen Verschiebungen der Atomcentren unabhängig bleiben, als die Gleichung 18) bereits mit ξ^2 abschliesst. Enthält dieselbe hingegen auch höhere Potenzen von ξ, wie ξ^3, $\xi^4, \ldots \xi^n$, so erscheinen in μ gleichzeitig Glieder von der Ordnung $\sigma^2, \sigma^3, \ldots \sigma^{n-1}$, und hierin besteht der Hauptunterschied aller solchen complicirteren Fällen entsprechenden Integralformeln für ξ von jenen, welche die Relationen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\xi, \text{ resp. } \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\xi + B\xi^2$$

befriedigen. Es liegt daher nahe, wenn wir jetzt von einem Atompaare zu drei Atomen übergehen und vor Allem nach einer genügenden Lösung der simultanen Differentialgleichungen 142) fragen, falls dieselben rechter Hand z. B. noch durch die Ausdrücke

$$A_6 u^3 + 3A_7 u^2 v + 3A_8 uv^2 + A_9 v^3, \text{ resp. } B_6 u^3 + 3B_7 u^2 v + 3B_8 uv^2 + B_9 v^3$$

ergänzt werden, den Grössen μ_1, μ_2 analoge Eigenschaften wie dem Factor μ beizulegen, d. h. speciell für diesen Fall in leicht verständlicher Bezeichnungsweise μ_1, μ_2 durch

$$\mu'_1 = \mu_1(1 + h_1), \text{ resp. } \mu'_2 = \mu_2(1 + h_2)$$

zu ersetzen. Die fraglichen Integrale für u und v lassen sich dann unmittelbar aus dem Aggregate

$$
\begin{aligned}
& p_0 + p_9 + (p_1 + p_2 + p_{10}) \cos\mu'_1 t + (p_3 + p_4 + p_{11}) \cos\mu'_2 t \\
& + (p_5 + p_{12}) \cos(\mu'_1 + \mu'_2)t + (p_6 + p_{13}) \cos(\mu'_1 - \mu'_2)t \\
& + (p_7 + p_{14}) \cos 2\mu'_1 t + (p_8 + p_{15}) \cos 2\mu'_2 t + p_{16} \cos(2\mu'_1 + \mu'_2)t \\
& + p_{17} \cos(2\mu'_1 - \mu'_2)t + p_{18} \cos(\mu'_1 + 2\mu'_2)t + p_{19} \cos(\mu'_1 - 2\mu'_2)t \\
& + p_{20} \cos 3\mu'_1 t + p_{21} \cos 3\mu'_2 t
\end{aligned}
$$

durch die Specialisirungen

$$p = a, \text{ beziehungsweise } p = b$$

ableiten, und man überzeugt sich nach deren Substitution in die vervollständigten Gleichungen 142) leicht, dass hierbei die Veränderung von μ_1, μ_2 in μ'_1, μ'_2 auf die Constanten

$$\mu_1, \mu_2; \; a_0, b_0; \; a_1, b_1; \ldots a_8 b_8$$

keinen Einfluss genommen hat. Da diese Grössen mithin als bekannt anzusehen sind, so können nunmehr auch h_1, h_2 vollständig bestimmt werden. Denn dividiren wir die erste und dritte der h_1, h_2 enthaltenden Relationen

$$\begin{aligned}
&(A_4-\mu_1^2)a_{10}+A_5 b_{10}=2a_1\mu_1^2 h_1+A_1(2a_0a_1+a_1a_7+a_3a_5+a_3a_6)\\
&+A_2[2(a_0b_1+a_1b_0)+a_1b_7+a_7b_1+a_3b_5+a_5b_3+a_3b_6+a_6b_3]\\
&+A_3(2b_0b_1+b_1b_7+b_3b_5+b_3b_6)+\tfrac{3}{2}A_6(a_3^2+\tfrac{1}{2}a_1^2)a_1\\
&+3A_7[a_1a_3b_3+\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2}a_1^2+a_3^2)b_1]+3A_8[a_3b_1b_3+\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2}b_1^2+b_3^2)a_1]\\
&+\tfrac{3}{2}A_9(b_3^2+\tfrac{1}{2}b_1^2)b_1=2a_1\mu_1^2h_1+f_1(A),\\
&\qquad B_4a_{10}+(B_5-\mu_1^2)b_{10}=2b_1\mu_1^2h_1+f_1(B);\,^*\\
&(A_4-\mu_2^2)a_{11}+A_5b_{11}=2a_3\mu_2^2h_2+A_1(2a_0a_3+a_3a_8+a_1a_5+a_1a_6)\\
&+A_2[2(a_0b_3+a_3b_0)+a_3b_8+a_8b_3+a_1b_5+a_5b_1+a_1b_6+a_6b_1]\\
&+A_3(2b_0b_3+b_3b_8+b_1b_5+b_1b_6)+\tfrac{3}{2}A_6(a_1^2+\tfrac{1}{2}a_3^2)a_3\\
&+3A_7[a_1a_3b_1+\tfrac{1}{2}(a_1^2+\tfrac{3}{2}a_3^2)b_3]+3A_8[a_1b_1b_3+\tfrac{1}{2}(b_1^2+\tfrac{3}{2}b_3^2)a_3]\\
&+\tfrac{3}{2}A_9(b_1^2+\tfrac{1}{2}b_3^2)b_3=2a_3\mu_2^2h_2+f_2(A),\\
&\qquad B_4a_{11}+(B_5-\mu_2^2)b_{11}=2b_3\mu_2^2h_2+f_2(B)
\end{aligned}$$

durch A_5, die zweite und vierte derselben durch

$$B_5-\mu_1^2, \text{ resp. } B_5-\mu_2^2,$$

so ergeben sich mit Rücksicht auf die früher erhaltenen Resultate

$$\frac{A_4-\mu_1^2}{A_5}=\frac{B_4}{B_5-\mu_1^2}=-\frac{b_1}{a_1}=-p,\quad \frac{A_4-\mu_2^2}{A_5}=\frac{B_4}{B_5-\mu_2^2}=-\frac{b_3}{a_3}=-q$$

die beiden Beziehungen

$$\frac{f_1(A)+2a_1\mu_1^2h_1}{A_5}=\frac{f_1(B)+2b_1\mu_1^2h_1}{B_5-\mu_1^2}=P,$$

$$\frac{f_2(A)+2a_3\mu_2^2h_2}{A_5}=\frac{f_2(B)+2b_3\mu_2^2h_2}{B_5-\mu_2^2}=Q,$$

folglich für h_1, h_2 die Ausdrücke

$$173)\left\{\begin{aligned}
h_1&=\frac{(B_5-\mu_1^2)f_1(A)-A_5f_1(B)}{2(\mu_1^2+A_5p-B_5)a_1\mu_1^2}=\frac{(B_5-\mu_1^2)f_1(A)-A_5f_1(B)}{2(\mu_1^2-\mu_2^2)a_1\mu_1^2},\\
h_2&=\frac{(B_5-\mu_2^2)f_2(A)-A_5f_2(B)}{2(\mu_2^2+A_5q-B_5)a_3\mu_2^2}=-\frac{(B_5-\mu_2^2)f_2(A)-A_5f_2(B)}{2(\mu_1^2-\mu_2^2)a_3\mu_2^2}.
\end{aligned}\right.$$

Ebenso einfach gestaltet sich im Allgemeinen die Berechnung von $a_9, b_9; a_{12}, b_{12}; \ldots a_{20}, b_{20}; a_{21}, b_{21}$, indem a_9, b_9 den Bedingungen

$$\begin{aligned}
A_4a_9+A_5b_9=A_1(a_1a_2+a_3a_4)&+A_2(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4+a_4b_3)\\
&+A_3(b_1b_2+b_3b_4)=\varphi_9(A),
\end{aligned}$$

---

* Der Uebergang von A zu B erfolgt hier durch Vertauschung von
$A_1, A_2, A_3, \ldots A_9$ mit $B_1, -B_2, B_3, \ldots B_9$.

LIBRARY UNIVERSITY OF CALIFORNIA

$$B_4 a_9 + B_5 b_9 = \varphi_9(B)$$

genügen, und die Coefficienten der Cosinusse

$$\cos(\mu'_1 + \mu'_2)t, \ldots \cos 3\mu'_1 t, \cos 3\mu'_2 t$$

bezüglich der übrigen Constanten $a_{12}, b_{12}; \ldots a_{20}, b_{20}; a_{21}, b_{21}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
[A_4 - (\mu_1 + \mu_2)^2] a_{12} + A_5 b_{12} &= A_1(a_1 a_4 + a_2 a_3) + A_3(b_1 b_4 + b_2 b_3) \\
&+ A_2(a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) = \varphi_{12}(A), \\
B_4 a_{12} + [B_5 - (\mu_1 + \mu_2)^2] b_{12} &= \varphi_{12}(B); \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
(A_4 - 9\mu_1^2) a_{20} + A_5 b_{20} &= A_1 a_1 a_7 + A_2(a_1 b_7 + a_7 b_1) + A_3 b_1 b_7 \\
&+ \tfrac{1}{4}(A_6 a_1^3 + 3A_7 a_1^2 b_1 + 3A_8 a_1 b_1^2 + A_9 b_1^3) = \varphi_{20}(A), \\
B_4 a_{20} + (B_5 - 9\mu_1^2) b_{20} &= \varphi_{20}(B); \\
(A_4 - 9\mu_2^2) a_{21} + A_5 b_{21} &= A_1 a_3 a_8 + A_2(a_3 b_8 + a_8 b_3) + A_3 b_3 b_8 \\
&+ \tfrac{1}{4}(A_6 a_3^3 + 3A_7 a_3^2 b_3 + 3A_8 a_3 b_3^2 + A_9 b_3^3) = \varphi_{21}(A), \\
B_4 a_{21} + (B_5 - 9\mu_2^2) b_{21} &= \varphi_{21}(B)
\end{aligned}$$

liefern. Combiniren wir hierauf die Relationen

$$b_{10} - p a_{10} = P, \quad b_{11} - q a_{11} = Q$$

mit

$$a_{10} + a_{11} = -a_9 - \sum_{k=12}^{k=21} a_k, \quad b_{10} + b_{11} = -b_9 - \sum_{k=12}^{k=21} b_k,$$

so gelangen wir schliesslich zur Kenntniss von $a_{10}, b_{10}; a_{11}, b_{11}$, womit das vorgelegte Problem bis auf die Ausnahmefälle

$$a_1 = 0, \ b_1 = 0; \quad a_3 = 0, \ b_3 = 0$$

erledigt erscheint. Dieselben erfordern deshalb eine besondere Untersuchung, weil aus den Formeln 173) unter solchen Umständen für h_1, resp. h_2 unendlich grosse Werthe resultiren,* indem, entgegen unseren bisherigen Voraussetzungen über diese Constanten, im ersten Falle h_1, im zweiten h_2 eine Grösse von der Ordnung σ vorstellt. Infolge dessen erleiden die Bestimmungsgleichungen von

$$h_1; \ a_{10}, b_{10}; \ a_{12}, b_{12}; \ a_{13}, b_{13}; \ a_{14}, b_{14},$$

resp.

$$h_2; \ a_{11}, b_{11}; \ a_{12}, b_{12}; \ a_{13}, b_{13}; \ a_{15}, b_{15}$$

eigenthümliche Modificationen, welche übrigens einander so ähnlich sind, dass wir uns hier auf die Mittheilung jener Abänderungen beschränken können, welche der Annahme

---

* Für $\mu_1 = \mu_2$ verschwindet zwar die Differenz $\mu_1^2 - \mu_2^2$, aber die Nenner von h_1, h_2 bleiben zufolge der Gleichung

$(\mu_1^2 - \mu_2^2) a_1 = -(\mu_1^2 - \mu_2^2) a_3 = [\mu^2 - (a M_1 + b m_3)]\sigma_1 - [\mu^2 - (a M_1 + c m_3)]\sigma_2 + (b - c) m_3 \sigma_3$

dessenungeachtet endlich.

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0$$

entsprechen. Setzen wir hierbei abkürzend

$$P_1(a_3a_5 + a_3a_6) + P_2(a_3b_5 + a_5b_3 + a_3b_6 + a_6b_3) + P_3(b_3b_5 + b_3b_6) = f'_1(P),$$
$$P_1a_2a_3 + P_2(a_2b_3 + a_3b_2) + P_3b_2b_3 = \varphi(P),$$

so gewinnen die fraglichen Relationen für h_1; a_{10}, b_{10}; ... a_{14}, b_{14} folgende Gestalt:

$$(A_4 - \mu_1^2)a_{10} + A_5b_{10} = 2a_2\mu_1^2h_1 + f'_1(A),$$
$$B_4a_{10} + (B_5 - \mu_1^2)b_{10} = 2b_2\mu_1^2h_1 + f'_1(B);$$
$$[A_4 - (\mu_1 + \mu_2)^2]a_{12} + A_5b_{12} = 2a_5h_1\mu_1(\mu_1 + \mu_2) + \varphi(A),$$
$$B_4a_{12} + [B_5 - (\mu_1 + \mu_2)^2]b_{12} = 2b_5h_1\mu_1(\mu_1 + \mu_2) + \varphi(B);$$
$$[A_4 - (\mu_1 - \mu_2)^2]a_{13} + A_5b_{13} = 2a_6h_1\mu_1(\mu_1 - \mu_2) + \varphi(A),$$
$$B_4a_{13} + [B_5 - (\mu_1 - \mu_2)^2]b_{13} = 2b_6h_1\mu_1(\mu_1 - \mu_2) + \varphi(B);$$
$$(A_4 - 4\mu_1^2)a_{14} + A_5b_{14} = 8a_7h_1\mu_1^2,$$
$$B_4a_{14} + (B_5 - 4\mu_1^2)b_{14} = 8b_7h_1\mu_1^2,$$

so dass hiernach die Coefficienten a_{12}, b_{12}; a_{13}, b_{13}; a_{14}, b_{14} ausnahmsweise von h_1 abhängig werden. Zugleich zeigt sich, dass der den beiden ersten Beziehungen entspringende Ausdruck für h_1

174) $$h_1 = \frac{(B_5 - \mu_1^2)f'_1(A) - A_5f'_1(B)}{2(\mu_1^2 - \mu_2^2)a_2\mu_1^2}$$

unmittelbar aus 173) abgeleitet werden kann, wenn wir daselbst im Zähler des ersten Quotienten $a_1 = b_1 = 0$ setzen und im Nenner a_1 mit a_2 vertauschen. Führen wir ferner auch im zweiten Falle die analogen Rechnungen durch und bezeichnen das Aggregat

$$p_1\sigma_1^3 + p_2\sigma_2^3 + p_3\sigma_3^3 + (p_4\sigma_1 + p_5\sigma_2)\sigma_1\sigma_2 + (p_6\sigma_1 + p_7\sigma_3)\sigma_1\sigma_3$$
$$+ (p_8\sigma_2 + p_9\sigma_3)\sigma_2\sigma_3 + p_{10}\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

allgemein mit $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, so lassen sich die Hauptergebnisse unserer letzten Betrachtungen in folgender Weise zusammenfassen:

Erfüllen die drei stabilen Atomen mit gemeinsamer Centrallinie ertheilten anfänglichen Verschiebungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ eine der beiden Gleichungen

175) $$\left\{\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{(aM_1 + bm_3 - \mu_1^2)\sigma_1 - (aM_1 + cm_3 - \mu_1^2)\sigma_2}{(b-c)m_3}, \\ \sigma_3 &= \frac{(aM_1 + bm_3 - \mu_2^2)\sigma_1 - (aM_1 + cm_3 - \mu_2^2)\sigma_2}{(b-c)m_3}, \end{aligned}\right.$$

so besitzen die von ihnen abhängigen Zusätze der Factoren μ_1, μ_2 jederzeit die voneinander abweichenden Formen

176) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3}, \quad (q_1 + q_2 + q_3 = 0), \\ &\frac{f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{q'_1\sigma_1^2 + q'_2\sigma_2^2 + q'_3\sigma_3^2 + q'_4\sigma_1\sigma_2 + q'_5\sigma_1\sigma_3 + q'_6\sigma_2\sigma_3}, \\ &(q'_1 + q'_2 + q'_3 + q'_4 + q'_5 + q'_6 = 0), \end{aligned}\right.$$

während sie in jedem andern Falle unter die erste derselben subsumirt werden können, d. h. insgesammt Grössen von der Ordnung σ^2 repräsentiren. Sobald jedoch dritte und höhere Potenzen der veränderlichen Verschiebungen vernachlässigt werden dürfen, erscheinen derartige Zusätze vollkommen überflüssig, also die Schwingungszahlen der in d_1, d_2, d_3 vorkommenden Elementarbewegungen constant, wie immer man auch σ_1, σ_2, σ_3 innerhalb der angedeuteten Grenzen variiren mag.

Schreiten wir nun zur Untersuchung der analogen Differentialgleichungen für drei nicht in einer geraden Linie liegende Atome, so werden die im Verlaufe derselben erforderlichen Rechnungen allerdings noch bedeutend weitläufiger, lassen sich aber im Ganzen nach denselben Grundsätzen, wie die ergänzten Beziehungen 142) behandeln. Es ist sogar, wie wir im Folgenden auseinandersetzen wollen, durch eine entsprechende Erweiterung unseres Integrationsverfahrens möglich, die allgemeinen Differentialgleichungen

$$177)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{\varepsilon_{1,2}m_2}{r^3_{1,2}}(x_2-x_1)\cos\frac{\alpha_{1,2}}{r_{1,2}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{1,n}m_n}{r^3_{1,n}}(x_n-x_1)\cos\frac{\alpha_{1,n}}{r_{1,n}},\\
&\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\
\frac{d^2x_n}{dt^2} &= \frac{\varepsilon_{1,n}m_1}{r^3_{1,n}}(x_1-x_n)\cos\frac{\alpha_{1,n}}{r_{1,n}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n-1,n}m_{n-1}}{r^3_{n-1,n}}(x_{n-1}-x_n)\cos\frac{\alpha_{n-1,n}}{r_{n-1,n}};\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= \frac{\varepsilon_{1,2}m_2}{r^3_{1,2}}(y_2-y_1)\cos\frac{\alpha_{1,2}}{r_{1,2}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{1,n}m_n}{r^3_{1,n}}(y_n-y_1)\cos\frac{\alpha_{1,n}}{r_{1,n}},\\
&\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\
\frac{d^2y_n}{dt^2} &= \frac{\varepsilon_{1,n}m_1}{r^3_{1,n}}(y_1-y_n)\cos\frac{\alpha_{1,n}}{r_{1,n}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n-1,n}m_{n-1}}{r^3_{n-1,n}}(y_{n-1}-y_n)\cos\frac{\alpha_{n-1,n}}{r_{n-1,n}};\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= \frac{\varepsilon_{1,2}m_2}{r^3_{1,2}}(z_2-z_1)\cos\frac{\alpha_{1,2}}{r_{1,2}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{1,n}m_n}{r^3_{1,n}}(z_n-z_1)\cos\frac{\alpha_{1,n}}{r_{1,n}},\\
&\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\
\frac{d^2z_n}{dt^2} &= \frac{\varepsilon_{1,n}m_1}{r^3_{1,n}}(z_1-z_n)\cos\frac{\alpha_{1,n}}{r_{1,n}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n-1,n}m_{n-1}}{r^3_{n-1,n}}(z_{n-1}-z_n)\cos\frac{\alpha_{n-1,n}}{r_{n-1,n}}
\end{aligned}\right.$$

mit beliebiger Genauigkeit zu integriren, vorausgesetzt, dass sich alle n Atome ursprünglich in einem stabilen Gleichgewichte befanden und deren anfängliche Verschiebungen σ_1, σ_2, ... σ_n nicht etwa Oscillationen derselben um andere Gleichgewichtslagen bedingen. Wir nehmen ausserdem an, dass die Coordinaten x'_1, y'_1, z'_1; ... x'_n, y'_n, z'_n, welche die Atomcentren vor der Störung ihres Gleichgewichtes besassen, bekannt, folglich auch die ihnen entsprechenden Centrallinien $\varkappa_{1,2}$, ... $\varkappa_{n-1,n}$ und deren Richtungscosinusse

$$c'_{1,2},\ c''_{1,2},\ c'''_{1,2};\ \ldots\ c'_{n-1,n},\ c''_{n-1,n},\ c'''_{n-1,n}$$

bezüglich der drei Coordinatenaxen gegeben seien.

Um ferner das vorgelegte Problem möglichst zu vereinfachen, erscheint es zweckmässig, statt x_1, y_1, z_1; ... x_n, y_n, z_n neue Veränderliche u_1, u_2, u_3, ... u_{3n-2}, u_{3n-1}, u_{3n} einzuführen, welche mit jenen durch die Relationen

$$178)\quad \begin{cases} x_1 = \Xi + x'_1 + u_1, & y_1 = H + y'_1 + u_2, & z_1 = Z + z'_1 + u_3; \\ x_2 = \Xi + x'_2 + u_4, & y_2 = H + y'_2 + u_5, & z_2 = Z + z'_2 + u_6; \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n = \Xi + x'_n + u_{3n-2}, & y_n = H + y'_n + u_{3n-1}, & z_n = Z + z'_n + u_{3n} \end{cases}$$

zusammenhängen,* und alle Ausdrücke von den Formen

$$\frac{x_p - x_q}{r^3_{p,q}} \cos\frac{\alpha_{p,q}}{r_{p,q}}, \quad \frac{y_p - y_q}{r^3_{p,q}} \cos\frac{\alpha_{p,q}}{r_{p,q}}, \quad \frac{z_p - z_q}{r^3_{p,q}} \cos\frac{\alpha_{p,q}}{r_{p,q}}$$

in Potenzreihen zu verwandeln, was mittels der Formeln

$$r_{p,q} = \varkappa_{p,q} \Big\{ 1 + \frac{2}{\varkappa_{p,q}} [c'_{p,q}(u_{3p-2} - u_{3q-2}) + c''_{p,q}(u_{3p-1} - u_{3q-1})$$

$$+ c'''_{p,q}(u_{3p} - u_{3q})] + \frac{1}{\varkappa^2_{p,q}} [(u_{3p-2} - u_{3q-2})^2 + (u_{3p-1} - u_{3q-1})^2 + (u_{3p} - u_{3q})^2] \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \varkappa_{p,q}(1 + U_{p,q})^{\frac{1}{2}} = \varkappa_{p,q} \Big\{ 1 + \tfrac{1}{2} U_{p,q} - \frac{1}{2.4} U^2_{p,q} + \frac{1.3}{2.4.6} U^3_{p,q} - \ldots \Big\}$$

$$= \varkappa_{p,q} + \varDelta r_{p,q}$$

$$\cos\frac{\alpha_{p,q}}{r_{p,q}} = \frac{\alpha \varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}(\varkappa_{p,q} + \varDelta r_{p,q})} - \frac{\alpha^3 \varDelta^3 r_{p,q}}{6\varkappa^3_{p,q}(\varkappa_{p,q} + \varDelta r_{p,q})^3} + \ldots$$

leicht bewerkstelligt werden kann. An die Stelle der Quotienten

$$\frac{x_p - x_q}{\varkappa_{p,q}}, \quad \frac{y_p - y_q}{\varkappa_{p,q}}, \quad \frac{z_p - z_q}{\varkappa_{p,q}}$$

treten dann die Trinome

$$c'_{p,q} + \frac{u_{3p-2} - u_{3q-2}}{\varkappa_{p,q}}, \quad c''_{p,q} + \frac{u_{3p-1} - u_{3q-1}}{\varkappa_{p,q}}, \quad c'''_{p,q} + \frac{u_{3p} - u_{3q}}{\varkappa_{p,q}},$$

während sich ihr gemeinsamer Factor

$$\frac{\varkappa_{p,q}}{r^3_{p,q}} \cos\frac{\alpha_{p,q}}{r_{p,q}}$$

durch die unendliche convergente Doppelreihe

$$\frac{\alpha \varDelta r_{p,q}}{\varkappa^4_{p,q}} \Big\{ 1 - 4\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big) + 10\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big)^2 - 20\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big)^3 + \ldots \Big\}$$

$$- \frac{\alpha^3 \varDelta^3 r_{p,q}}{6\varkappa^8_{p,q}} \Big\{ 1 - 6\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big) + 21\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big)^2 - 56\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big)^3 + \ldots \Big\}$$

$$+ \frac{\alpha^5 \varDelta^5 r_{p,q}}{120\varkappa^{12}_{p,q}} \Big\{ 1 - 8\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big) + 36\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big)^2 - 120\Big(\frac{\varDelta r_{p,q}}{\varkappa_{p,q}}\Big)^3 + \ldots \Big\}$$

$$+ \ldots \textit{ in inf.}$$

ersetzen lässt. Eliminiren wir hierauf mit Hilfe der durch das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes bedingten Gleichungen

$$179)\quad \begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_4 + \ldots + m_n u_{3n-2} = 0, \\ m_1 u_2 + m_2 u_5 + \ldots + m_n u_{3n-1} = 0, \\ m_1 u_3 + m_2 u_6 + \ldots + m_n u_{3n} = 0 \end{cases}$$

die Variabelen u_{3n-2}, u_{3n-1}, u_{3n} aus 177), so ergeben sich zur Bestimmung der $3n - 3$ übrigen Unbekannten noch $3n - 3$ gleichgebaute Beziehungen

* Ξ, H, Z sind bereits aus 135) bekannt.

zwischen $u_1, u_2, \ldots u_{3n-3}$, welche, sobald wir allgemein Grössen von der Ordnung σ^{s+1} etc. vernachlässigen, ausser den zweiten Differentialquotienten von u_1, resp. $u_2, \ldots u_{3n-3}$ nach t nur die mit verschiedenen unveränderlichen Coefficienten

$$\begin{array}{l}
A^{(1)}_{1,1},\ A^{(1)}_{1,2},\ \ldots A^{(1)}_{1,n_1};\quad A^{(2)}_{1,1},\ A^{(2)}_{1,2},\ \ldots A^{(2)}_{1,n_2};\ \ldots\ A^{(s)}_{1,1},\ A^{(s)}_{1,2},\ \ldots A^{(s)}_{1,n_s};\\
A^{(1)}_{2,1},\ A^{(1)}_{2,2},\ \ldots A^{(1)}_{2,n_1};\quad A^{(2)}_{2,1},\ A^{(2)}_{2,2},\ \ldots A^{(2)}_{2,n_2};\ \ldots\ A^{(s)}_{2,1},\ A^{(s)}_{2,2},\ \ldots A^{(s)}_{2,n_s};\\
\quad\ldots\qquad\qquad\qquad\ldots\qquad\qquad\qquad\ldots\\
A^{(1)}_{n_1,1},\ A^{(1)}_{n_1,2},\ \ldots A^{(1)}_{n_1,n_1};\quad A^{(2)}_{n_1,1},\ A^{(2)}_{n_1,2},\ \ldots A^{(2)}_{n_1,n_2};\ \ldots\ A^{(s)}_{n_1,1},\ A^{(s)}_{n_1,2},\ \ldots A^{(s)}_{n_1,n_s}
\end{array}$$

versehenen Summanden des Polynomes

$$(u_1+u_2+\ldots+u_{3n-3})+(u_1+u_2+\ldots+u_{3n-3})^2+(u_1+u_2+\ldots+u_{3n-3})^3$$
$$+\ldots+(u_1+u_2+\ldots+u_{3n-3})^s$$

enthalten, d. h. je

$$3n-3=n_1 \quad \text{Glieder von der Ordnung } \sigma,$$
$$\frac{(3n-3)(3n-2)}{1.2}=n_2 \quad ,, \ ,, \ ,, \ ,, \ \sigma^2,$$
$$\frac{(3n-3)(3n-2)(3n-1)}{1.2.3}=n_3 \quad ,, \ ,, \ ,, \ ,, \ \sigma^3,$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$\frac{(3n-3)(3n-2)\ldots(3n+s-4)}{1.2.3\ldots s}=n_s \quad \text{Glieder von der Ordnung } \sigma^s$$

aufzuweisen haben.

Diesen s durch ihre heterogenen Dimensionen scharf voneinander gesonderten Potenzaggregaten entsprechen in jedem der für $u_1, u_2, \ldots u_{3n-3}$ bestehenden Integrale ebensoviele Gruppen von Cosinussen, deren Argumente sich ausschliesslich aus den Producten

$$\mu'_1 t,\ \mu'_2 t,\ \ldots \mu'_{3n-3} t$$

zusammensetzen und alle numerisch verschiedenen Ausdrücke repräsentiren, welche aus den Exponenten von e nach Entwickelung der Summe

$$(e^{k_1 t}+e^{k_2 t}+\ldots+e^{k_{3n-3} t})+(e^{k_1 t}+e^{k_2 t}+\ldots+e^{k_{3n-3} t})^2$$
$$+\ldots+(e^{k_1 t}+e^{k_2 t}+\ldots+e^{k_{3n-3} t})^s$$

mittels der Substitutionen

$$k_1=\pm\mu'_1,\ k_2=\pm\mu'_2,\ \ldots k_{3n-3}=\pm\mu'_{3n-3}$$

gewonnen werden können. Es kommen mithin in diesen Argumenten im Ganzen nur $(3n-3)s$ Unbekannte vor, indem die Factoren $\mu'_1, \mu'_2, \ldots \mu'_{3n-3}$ der Reihe nach den Ausdrücken

$$180)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mu'_1=\mu_1\{1+b_1^{(1)}+b_1^{(2)}+\ldots+b_1^{(s-1)}\},\\
\mu'_2=\mu_2\{1+b_2^{(1)}+b_2^{(2)}+\ldots+b_2^{(s-1)}\},\\
\quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\
\mu'_{3n-3}=\mu_{3n-3}\{1+b^{(1)}_{3n-3}+b^{(2)}_{3n-3}+\ldots+b^{(s-1)}_{3n-3}\}
\end{array}\right.$$

äquivalent sind, d. h. je s vorläufig unbestimmte Constante besitzen, deren Grössenrang aus den beigegebenen, mit Klammern versehenen Zahlen ersichtlich wird. Bezeichnen wir schliesslich die Anzahl jener Cosinusse, für welche die numerische Summe der Coefficienten von $\mu'_1 t, \ldots \mu'_{3n-3}$

in jedem einzelnen Argumente denselben constanten Werth k besitzt, allgemein mit p_k und setzen

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = q_k,$$

so lassen sich die fraglichen Werthe der Veränderlichen $u_1, u_2, \dots u_{3n-3}$ insgesammt unter die zusammenfassende Formel

$$181) \left\{ \begin{aligned} u_k &= a_{k,0}^{(1)} + a_{k,0}^{(2)} + \dots + a_{k,0}^{(s)} \\ &+ \{a_{k,1}^{(1)} + a_{k,1}^{(2)} + \dots + a_{k,1}^{(s)}\} \cos \mu'_1 t \\ &+ \{a_{k,2}^{(1)} + a_{k,2}^{(2)} + \dots + a_{k,2}^{(s)}\} \cos \mu'_2 t + \dots \\ &+ \{a_{k,q_1}^{(1)} + a_{k,q_1}^{(2)} + \dots + a_{k,q_1}^{(s)}\} \cos \mu'_{3n-3} t \\ &+ \{a_{k,q_1+1}^{(2)} + a_{k,q_1+1}^{(3)} + \dots + a_{k,q_1+1}^{(s)}\} \cos (\mu'_1 + \mu'_2) t \\ &+ \{a_{k,q_1+2}^{(2)} + a_{k,q_1+2}^{(3)} + \dots + a_{k,q_1+2}^{(s)}\} \cos (\mu'_1 - \mu'_2) t + \dots \\ &+ \{a_{k,q_2}^{(2)} + a_{k,q_2}^{(3)} + \dots + a_{k,q_2}^{(s)}\} \cos 2\mu'_{3n-3} t + \dots \\ &\qquad + \dots \\ &+ \{a_{k,q_{s-1}+1}^{(s)}\} \cos [(s-1)\mu'_1 + \mu'_2] t + \{a_{k,q_{s-1}+2}^{(s)}\} \cos [(s-1)\mu'_1 - \mu'_2] t \\ &\qquad + \dots + a_{k,q_s}^{(s)} \cos s \mu'_{3n-3} t \end{aligned} \right.$$

subsumiren, welche das Problem der Integration von 177) auf die Auflösung einer endlichen Reihe von Gleichungssystemen reducirt.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, brauchen wir nur k successive mit $1, 2, \dots 3n-3$ zu identificiren und die so erhaltenen Aggregate in die transformirten Relationen 177) einzuführen. Dieselben verwandeln sich hierdurch unter Anwendung der bekannten Beziehungen

$$\cos^r \mu t = \frac{1}{2^{r-1}} \left\{ \cos r \mu t + \binom{r}{1} \cos (r-2) \mu t + \binom{r}{2} \cos (r-4) \mu t + \dots \right\},$$

$$\cos a \mu t \cos b \mu' t = \tfrac{1}{2} \{ \cos (a\mu + b\mu') t + \cos (a\mu - b\mu') t \}$$

in $3n-3$ Gleichungen von der gemeinsamen Gestalt

$$182) \left\{ \begin{aligned} & P_{k,0}^{(1)} + P_{k,0}^{(2)} + \dots + P_{k,0}^{(s)} + \{P_{k,1}^{(1)} + P_{k,1}^{(2)} + \dots + P_{k,1}^{(s)}\} \cos \mu'_1 t \\ & \quad + \dots + P_{k,q_s}^{(s)} \cos s \mu'_{3n-3} t = 0, \quad (k = 1, 2, \dots 3n-3), \end{aligned} \right.$$

welche nur dann für jeden Werth von t giltig bleiben, wenn die

$$(3n-3)(2s + q_1 + q_2 + \dots + q_s)$$

in $u_1, u_2, \dots u_{3n-3}$ enthaltenen Constanten

$$\mu_1, \dots \mu_{3n-3};\ b_1^{(1)}, \dots b_{3n-3}^{(s-1)};\ a_{1,0}^{(1)}, \dots a_{3n-3,q_1}^{(1)};\ \dots a_{1,0}^{(s)}, \dots a_{3n-3,q_s}^{(s)}$$

die $(3n-3)(s + q_1 + q_2 + \dots + q_s)$ Forderungen

$$183) \left\{ \begin{aligned} & P_{1,0}^{(1)} = 0, \dots P_{3n-3,0}^{(1)} = 0;\ P_{1,1}^{(1)} = 0, \dots P_{3n-3,1}^{(1)} = 0;\ \dots P_{1,q_1}^{(1)} = 0, \\ & \qquad \dots P_{3n-3,q_1}^{(1)} = 0; \\ & P_{1,0}^{(2)} = 0, \dots P_{3n-3,0}^{(2)} = 0;\ P_{1,1}^{(2)} = 0, \dots P_{3n-3,1}^{(2)} = 0;\ \dots P_{1,q_2}^{(2)} = 0, \\ & \qquad \dots P_{3n-3,q_2}^{(2)} = 0; \\ & \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ & P_{1,0}^{(s)} = 0, \dots P_{3n-3,0}^{(s)} = 0;\ P_{1,1}^{(s)} = 0, \dots P_{3n-3,1}^{(s)} = 0;\ \dots P_{1,q_s}^{(s)} = 0, \\ & \qquad \dots P_{3n-3,q_s}^{(s)} = 0 \end{aligned} \right.$$

erfüllen. Da aber die genannten Grössen andererseits auch den $(3n-3)s$ Anfangsbedingungen

$$\sum_{p=0}^{p=q_1} a^{(1)}_{3k-2,p} = \sigma_{k,x} - \Xi, \quad \sum_{p=0}^{p=q_1} a^{(1)}_{3k-1,p} = \sigma_{k,y} - H,$$

$$\sum_{p=0}^{p=q_1} a^{(1)}_{3k,p} = \sigma_{k,z} - Z; \quad (k=1, 2, \ldots n-1),$$

$$\sum_{p=0}^{p=q_2} a^{(2)}_{k,p} = 0, \ \sum_{p=0}^{p=q_3} a^{(3)}_{k,p} = 0, \ldots \sum_{p=0}^{p=q_s} a^{(s)}_{k,p} = 0, \quad (k=1, 2, \ldots 3n-3)$$

Genüge zu leisten haben, so sind thatsächlich stets so viele Gleichungen als Unbekannte vorhanden, womit die Lösbarkeit von 177) durch Integrale von der Form 181) allgemein dargethan ist. Jene zerfallen offenbar wieder in s Gruppen von den Grössenordnungen $\sigma, \sigma^2, \ldots \sigma^s$ und den Gliederzahlen

$$(3n-3)(q_1+2), \ (3n-3)(q_2+2), \ldots (3n-3)(q_s+2),$$

von welchen die erste bezüglich der Factoren $\mu_1, \ldots \mu_{3n-3}$ auf die Resolvente 134) führt und ausserdem $a^{(1)}_{1,0}, \ldots a^{(1)}_{3n-3,q_1}$ bestimmt, während die übrigen die Auffindung der Constanten

$$\begin{array}{llll} b^{(1)}_1, & \ldots b^{(1)}_{3n-3}; & a^{(2)}_{1,0}, & \ldots a^{(2)}_{3n-3,q_2}; \\ b^{(2)}_1, & \ldots b^{(2)}_{3n-3}; & a^{(3)}_{1,0}, & \ldots a^{(3)}_{3n-3,q_3}; \\ & \ldots & & \ldots \\ b^{(s-1)}_1, & \ldots b^{(s-1)}_{3n-3}; & a^{(s)}_{1,0}, & \ldots a^{(s)}_{3n-3,q_s} \end{array}$$

ermöglichen. Da übrigens die Untersuchung der für n Atome möglichen Bewegungen nicht mehr in diesen Paragraphen gehört, so unterlassen wir vorläufig eine weitere Discussion dieses Problems und erlauben uns hinsichtlich desselben nur noch zwei Sätze zu erwähnen, welche gewissermassen eine Ergänzung zu früheren Folgerungen bilden.

Suchen wir nämlich, falls $\mu_1, \ldots \mu_{3n-3}$ von der Null verschieden ausfallen, und demzufolge die Relationen

184) $$a^{(1)}_{1,0} = 0, \ a^{(1)}_{2,0} = 0, \ldots a^{(1)}_{3n-3,0} = 0$$

bestehen, die Bewegungsintensitäten $i_1, \ldots i_n$ der einzelnen Atome und die mittleren Coordinatenwerthe $\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1; \ldots \overline{x}_n, \overline{y}_n, \overline{z}_n$ ihrer Centren, so zeigt sich, dass die Differenzen

$$\overline{x}_1 - x_1, \ \overline{y}_1 - y_1, \ \overline{z}_1 - z_1; \ldots \overline{x}_n - x_n, \ \overline{y}_n - y_n, \ \overline{z}_n - z_n,$$

also auch die Volumänderung Δv, welche der Inhalt

$$v = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a & x_d - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a & y_d - y_a \\ z_b - z_a & z_c - z_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$

irgend einer durch die Coordinaten ihrer Ecken: $x_a, y_a, z_a; \ldots x_d, y_d, z_d$ bestimmten dreiseitigen Pyramide infolge ihres Ueberganges in $\overline{x}_a, \overline{y}_a, \overline{z}_a; \ldots \overline{x}_d, \overline{y}_d, \overline{z}_d$ erfuhr, denselben Grössenrang wie $i_1, \ldots i_n$ besitzen. Da nun das gesammte, von den Centrallinien der n Atome und den durch je zwei derselben gelegten Ebenen begrenzte Volumen des Complexes immer als ein Aggregat solcher Pyramiden zu betrachten ist, so gilt unter den über $\mu_1, \ldots \mu_{3n-3}$ gemachten Voraussetzungen folgender Satz:

Die Volumänderung, welche ein n-atomiger stabiler Complex infolge irgendwelcher mit seiner Stabilität verträglichen Verschiebungen seiner Bestandtheile erleidet, ist im Allgemeinen den Grössen $i_1, \ldots i_n$, mithin auch der mittleren Bewegungsintensität seiner Atome proportional.*

Vertauschen wir ferner, auf das allgemeine Integral 181) zurückgehend, in den Argumenten seiner Cosinusse $\mu'_1, \mu'_2, \ldots \mu'_{3n-3}$ mit den Quotienten

$$\frac{\mu'_1}{2\pi} = n'_1, \quad \frac{\mu'_2}{2\pi} = n'_2, \ldots \frac{\mu'_{3n-3}}{2\pi} = n'_{3n-3},$$

so folgt aus demselben das zweite, gleichfalls beachtenswerthe Gesetz:

Die Oscillationen der Elemente eines stabilen n-atomigen Complexes setzen sich aus unendlich vielen einfach periodischen Bewegungen zusammen, deren Schwingungszahlen die allgemeine Form

$$k_1 n'_1 + k_2 n'_2 + \ldots + k_{3n-3} n'_{3n-3} \tag{185}$$

besitzen, in welcher $n'_1, n'_2, \ldots n'_{3n-3}$ den $3n-3$ im Falle relativ sehr kleiner Verschiebungen auftretenden analogen Grössen $n_1, n_2, \ldots n_{3n-3}$ entsprechen, und $k_1, k_2, \ldots k_{3n-3}$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Es existiren daher in jedem derartigen materiellen Systeme auch solche Elementarbewegungen, welche um Vieles langsamer, als die durch $n_1, n_2, \ldots n_{3n-3}$ charakterisirten Schwingungen vor sich gehen. — So finden sich z. B bei drei congruenten, eine gleichseitige stabile Gleichgewichtsfigur bildenden Atomen neben den Werthen

$$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\tfrac{3}{2}am}, \quad n_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{3\,am} = 1{,}414\bar{2}\,n_1$$

näherungsweise auch die folgenden:

---

* Aus der Gleichung

$$\Delta V = k\bar{\iota}$$

folgt jedoch keineswegs mit Nothwendigkeit

$$d(\Delta V) = k\,d(\bar{\iota}),$$

indem sich eine vollständige Differentiation von ΔV und $\bar{\iota}$ auf alle Verschiebungsfunctionen $\sigma^2_{1,x}, \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$ etc. zu erstrecken hätte, und die einander in $\bar{\iota}$ und ΔV correspondirenden Coefficienten von $\sigma^2_{1,x}, \sigma_{1,x}\sigma_{2,x}$ etc. gewöhnlich verschieden sind. — Diese analytische Thatsache steht, wie wir später sehen werden, in einem leicht nachweisbaren Zusammenhange mit der bekannten Formel der mechanischen Wärmetheorie

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dt}\right)dt + \left(\frac{dQ}{dv}\right)dv.$$

$$186)\quad\left\{\begin{array}{ll} 3n_1 - 2n_2 = 0{,}171\bar{6}\,n_1, & 5n_2 - 7n_1 = 0{,}071\bar{1}\,n_1; \\ 17n_1 - 12n_2 = 0{,}029\bar{4}\,n_1, & 29n_2 - 41n_1 = 0{,}01\bar{2}\bar{2}\,n_1; \\ 99n_1 - 70n_2 = 0{,}005\bar{1}\,n_1, & 169n_2 - 239n_1 = 0{,}002\bar{1}\,n_1; \\ 577n_1 - 408n_2 = 0{,}000\bar{9}\,n_1, & 985n_2 - 1393n_1 = 0{,}000\bar{3}\,n_1; \\ \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

welche unsere letzte Bemerkung in besonders klarer Weise erläutern.

Nachdem hiermit die wichtigsten Eigenschaften aller Bewegungen zur Sprache gekommen sind, welche drei gesonderte Atome um beliebige stabile Gleichgewichtslagen eingehen können, werden wir den nächsten Paragraphen unmittelbar mit einer Discussion jener Erscheinungen beginnen, durch welche sich ein aus einem Atome und zweiatomigem Moleküle gebildeter Complex im Allgemeinen charakterisirt. Es ist deshalb nothwendig, noch hier eine Vorfrage zu erledigen, welche in den Untersuchungen des § 9 bereits als gelöst vorausgesetzt werden muss und sich kurz auf folgende Art aussprechen lässt:

Nach welchem Gesetze wirken irgend zwei materielle Elemente μ, μ' zweier Atome von den Radien ϱ, ϱ' im Abstande s aufeinander, wenn die aus der Wirkung der gesammten Masse des ersten auf jene des zweiten Atomes resultirende Kraft K die Form

$$K = \frac{\varepsilon m m'}{r^2} \cos\frac{\alpha}{r}$$

besitzt? — Dieselbe kann auf einem ziemlich elementaren Wege beantwortet werden, wenn wir die Lage von μ, μ' durch die räumlichen Polarcoordinaten u, ϑ, φ; u', ϑ', φ' präcisiren, also, unter σ die constante Dichte beider Atome verstehend:

$$\mu = \sigma u^2\, du \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$
$$\mu' = \sigma u'^2\, du' \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

setzen und uns zunächst die Aufgabe stellen, aus dem vorläufig als bekannt angenommenen Potential

$$187)\qquad v = \varepsilon\mu\mu'\left\{\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n} + \ldots\right\} = \varepsilon\mu\mu'\varphi(s)$$

der von μ' auf μ ausgeübten Kraft jenes Potential

$$v' = 2\pi\varepsilon\mu'\sigma \int_{u=0}^{u=\varrho}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} u^2\varphi(s)\sin\vartheta\, d\vartheta\, du$$

aufzufinden, welches der von dem ersten Atome auf das in der centralen Distanz

$$x = \sqrt{s^2 + u^2 - 2su\cos\vartheta}$$

befindliche Element μ' geäusserten Wirkung zugehört. Zu diesem Zwecke entwickeln wir die aufeinanderfolgenden Glieder des transformirten Integrals

$$v' = \frac{2\pi\varepsilon\mu'\sigma}{x}\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} s\,\varphi(s)\,ds:$$

$$\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} \frac{ds}{s} = \varrho x - \tfrac{1}{2}(x^2 - \varrho^2)\log\frac{x+\varrho}{x-\varrho},$$

$$\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} \frac{ds}{s^2} = x\log\frac{x+\varrho}{x-\varrho} - 2\varrho,$$

$$\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} \frac{ds}{s^3} = \frac{\varrho x}{x^2-\varrho^2} - \tfrac{1}{2}\log\frac{x+\varrho}{x-\varrho},$$

$$\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} \frac{ds}{s^4} = \frac{2\varrho^3}{3(x^2-\varrho^2)^2}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} \frac{ds}{s^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)}\left\{\frac{(n-3)\varrho - x}{(x-\varrho)^{n-3}} + \frac{(n-3)\varrho + x}{(x+\varrho)^{n-3}}\right\}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

nach steigenden Potenzen von $\frac{\varrho}{x}$ in convergente Reihen, wodurch v' nach Vereinigung des den letzteren gemeinsamen Factors

$$\int\limits_0^{\varrho} u\,du \int\limits_{x-u}^{x+u} ds = \tfrac{2}{3}\varrho^3$$

mit $2\pi\sigma$ zu m in die unendliche Doppelreihe

$$\begin{aligned}
v' = \varepsilon m \mu' \Big[\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}&\left\{1 + \tfrac{1}{5}\frac{\varrho^2}{x^2} + \tfrac{3}{35}\frac{\varrho^4}{x^4} + \ldots + \frac{3}{4(p+1)^2-1}\,\frac{\varrho^{2p}}{x^{2p}} + \ldots\right\} \\
+ \frac{a_3}{x^3}&\left\{1 + \tfrac{3}{5}\frac{\varrho^2}{x^2} + \tfrac{3}{7}\frac{\varrho^4}{x^4} + \ldots + \frac{3}{2p+3}\,\frac{\varrho^{2p}}{x^{2p}} + \ldots\right\} \\
+ \frac{a_4}{x^4}&\left\{1 + \tfrac{6}{5}\frac{\varrho^2}{x^2} + \tfrac{9}{7}\frac{\varrho^4}{x^4} + \ldots + \frac{3(p+1)}{2p+3}\,\frac{\varrho^{2p}}{x^{2p}} + \ldots\right\} \\
+ \frac{a_5}{x^5}&\left\{1 + 2\frac{\varrho^2}{x^2} + 3\frac{\varrho^4}{x^4} + \ldots + (p+1)\,\frac{\varrho^{2p}}{x^{2p}} + \ldots\right\} \\
&+ \ldots \\
+ \frac{a_n}{x^n}&\left\{1 + \frac{3(n-1)n}{3!\,5}\,\frac{\varrho^2}{x^2} + \frac{3(n-1)n(n+1)(n+2)}{5!\,7}\,\frac{\varrho^4}{x^4} + \ldots\right. \\
&\left. + \frac{3(n-1)n(n+1)\ldots(n+2p-2)}{(2p+1)!\,(2p+3)}\,\frac{\varrho^{2p}}{x^{2p}} + \ldots\right\} + \ldots \Big]
\end{aligned}$$

übergeht. Hieraus folgt weiter

$$v' = \varepsilon m \mu' \left\{ \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4 + \frac{1}{5} a_2 \varrho^2}{x^4} + \frac{a_5 + \frac{3}{5} a_3 \varrho^2}{x^5} \right.$$

$$\left. + \frac{a_6 + \frac{6}{5} a_4 \varrho^2 + \frac{3}{35} a_2 \varrho^4}{x^6} + \frac{a_7 + 2 a_5 \varrho^2 + \frac{3}{7} a_3 \varrho^4}{x^7} + \ldots \right\} \tag{188}$$

$$= \varepsilon m \mu' \left\{ \frac{a'_1}{x} + \frac{a'_2}{x^2} + \ldots + \frac{a'_n}{x^n} + \ldots \right\} = \varepsilon m \mu' \psi(x),$$

welche Gleichung sich von jener für v nur insofern unterscheidet, als in ihr an die Stelle von

$$\mu;\ s;\ a_1, a_2, \ldots a_n \ldots \text{ die Grössen } m;\ x;\ a'_1, a'_2, \ldots a'_n \ldots$$

getreten sind. Mit ihrer Hilfe ergiebt sich nunmehr für das Gesammtpotential V beider Kugeln, welches ursprünglich als ein sechsfaches Integral auftritt, die einfache Formel

$$V = 2\pi \varepsilon m \sigma \int_{u'=0}^{u'=\varrho'} \int_{\vartheta'=0}^{\vartheta'=\pi} u'^2 \psi(x) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, du' = \frac{2\pi\varepsilon m \sigma}{r} \int_0^{\varrho'} u'\, du' \int_{r-u'}^{r+u'} x \psi(x)\, dx,$$

welche sich bezüglich ihres Baues ähnlich zu v' wie dieses zu v verhält, d. h. nach Durchführung beider Integrationen ein Resultat von der Form

$$V = \varepsilon m m' \left\{ \frac{a'_1}{r} + \frac{a'_2}{r^2} + \frac{a'_3}{r^3} + \frac{a'_4 + \frac{1}{5} a'_2 \varrho'^2}{r^4} + \frac{a'_5 + \frac{3}{5} a'_3 \varrho'^2}{r^5} + \ldots \right\}$$

liefern muss. Es ist demnach allgemein möglich, aus dem als bekannt vorausgesetzten Potential v

$$V = \varepsilon m m' \left\{ \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \ldots + \frac{A_n}{r^n} + \ldots \right\} \tag{189}$$

zu berechnen, indem $A_1, A_2, \ldots$ mit $a_1, a_2, \ldots$ stets durch die Relationen

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad A_3 = a_3,$$
$$A_4 = a_4 + \tfrac{1}{5} a_2 (\varrho^2 + \varrho'^2), \quad A_5 = a_5 + \tfrac{3}{5} a_3 (\varrho^2 + \varrho'^2),$$
$$A_6 = a_6 + \tfrac{6}{5} a_4 (\varrho^2 + \varrho'^2) + \tfrac{3}{5} a_2 \left\{ \tfrac{2}{3} \varrho^2 \varrho'^2 + \tfrac{1}{7} (\varrho^4 + \varrho'^4) \right\},$$
$$A_7 = a_7 + 2 a_5 (\varrho^2 + \varrho'^2) + 3 a_3 \left\{ \tfrac{2}{5} \varrho^2 \varrho'^2 + \tfrac{1}{7} (\varrho^4 + \varrho'^4) \right\},$$
$$A_8 = a_8 + 3 a_6 (\varrho^2 + \varrho'^2) + 9 a_4 \left\{ \tfrac{2}{5} \varrho^2 \varrho'^2 + \tfrac{1}{7} (\varrho^4 + \varrho'^4) \right\}$$
$$+ \tfrac{1}{7} a_2 \left\{ \tfrac{9}{5} \varrho^2 \varrho'^2 (\varrho^2 + \varrho'^2) + \tfrac{1}{3} (\varrho^6 + \varrho'^6) \right\},$$
$$A_9 = a_9 + \tfrac{21}{5} a_7 (\varrho^2 + \varrho'^2) + 21 a_5 \left\{ \tfrac{2}{5} \varrho^2 \varrho'^2 + \tfrac{1}{7} (\varrho^4 + \varrho'^4) \right\}$$
$$+ a_3 \left\{ \tfrac{9}{5} \varrho^2 \varrho'^2 (\varrho^2 + \varrho'^2) + \tfrac{1}{3} (\varrho^6 + \varrho'^6) \right\},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

verbunden sind, und ebenso die Lösung des umgekehrten Problems jederzeit ausführbar. Denn betrachten wir andererseits $A_1, A_2, \ldots$ als gegebene, $a_1, a_2, \ldots$ als gesuchte Constante, so liefert die Reversion der eben aufgestellten Beziehungen der Reihe nach

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2, \quad a_3 = A_3,$$
$$a_4 = A_4 - \tfrac{1}{5} (\varrho^2 + \varrho'^2) A_2, \quad a_5 = A_5 - \tfrac{3}{5} (\varrho^2 + \varrho'^2) A_3,$$
$$a_6 = A_6 - \tfrac{6}{5} (\varrho^2 + \varrho'^2) A_4 + \tfrac{3}{25} \left\{ 2 \varrho^2 \varrho'^2 + \tfrac{9}{7} (\varrho^4 + \varrho'^4) \right\} A_2,$$
$$a_7 = A_7 - 2 (\varrho^2 + \varrho'^2) A_5 + \tfrac{3}{5} \left\{ 2 \varrho^2 \varrho'^2 + \tfrac{9}{7} (\varrho^4 + \varrho'^4) \right\} A_3,$$

$$
\begin{aligned}
a_8 &= A_8 - 3(\varrho^2+\varrho'^2)A_6 + \tfrac{9}{5}\{2\varrho^2\varrho'^2 + \tfrac{9}{7}(\varrho^4+\varrho'^4)\}A_4 \\
&\quad - \tfrac{1}{175}\{81\varrho^2\varrho'^2(\varrho^2+\varrho'^2) + \tfrac{133}{3}(\varrho^6+\varrho'^6)\}A_2, \\
a_9 &= A_9 - \tfrac{21}{5}(\varrho^2+\varrho'^2)A_7 + \tfrac{21}{5}\{2\varrho^2\varrho'^2 + \tfrac{9}{7}(\varrho^4+\varrho'^4)\}A_5 \\
&\quad - \tfrac{1}{25}\{81\varrho^2\varrho'^2(\varrho^2+\varrho'^2) + \tfrac{133}{3}(\varrho^6+\varrho'^6)\}A_3, \\
&\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots
\end{aligned}
$$

Da ferner die Potentiale V, v mit den ihnen entsprechenden Wirkungen W, w durch die Gleichungen

$$V = \frac{dW}{dr}, \qquad v = \frac{dw}{ds}$$

zusammenhängen, so können wir jetzt auch w aus W finden, sobald, wie z. B. in unserem speciellen Falle, für die letztere Grösse ein Ausdruck von der Gestalt

$$W = K = \frac{d}{dr}\left(-\frac{\varepsilon m m'}{\alpha} \sin\frac{\alpha}{r}\right)$$

bekannt ist. Das Endresultat der hierzu erforderlichen Rechnungen lässt sich dann durch folgenden Satz wiedergeben:

Wird zwischen zwei homogenen, kugelförmigen Atomen eine Kraft von der Form K vorausgesetzt, so ist hierdurch auch die Wechselwirkung

$$
\begin{aligned}
w = \frac{\varepsilon\mu\mu'}{s^2}\Big\{ 1 &- \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\left(\tfrac{1}{12}\alpha^2 + \varrho^2 + \varrho'^2\right)\left(\frac{1}{s}\right)^4 \\
&- \frac{\alpha^2}{10}\left[\tfrac{1}{72}\alpha^4 + \tfrac{7}{6}(\varrho^2+\varrho'^2)\alpha^2 + 9(\varrho^4+\varrho'^4) + 14\varrho^2\varrho'^2\right]\left(\frac{1}{s}\right)^6 \\
&+ \frac{\alpha^2}{50}\Big[\tfrac{5}{4032}\alpha^6 + \tfrac{3}{8}(\varrho^2+\varrho'^2)\alpha^4 + \tfrac{9}{4}\{9(\varrho^4+\varrho'^4) + 14\varrho^2\varrho'^2\}\alpha^2 \\
&\qquad + 133(\varrho^6+\varrho'^6) + 243\varrho^2\varrho'^2(\varrho^2+\varrho'^2)\Big]\left(\frac{1}{s}\right)^8 - \ldots\Big\}^{*}
\end{aligned}
\tag{190}
$$

je zweier Elemente μ, μ' der diese Atome bildenden Substanz eindeutig bestimmt.

Variiren wir daher ϱ, ϱ' in ϱ_1, ϱ'_1, so ändert sich auch das Wirkungsgesetz zwischen zwei gleichen Massentheilchen μ, μ' in dem neuen Atompaare insofern, als in w ϱ, ϱ' durch die Radien ϱ_1, ϱ'_1 zu ersetzen sind, d. h. die Wechselwirkungen des zweiten Complexes sind von jenen des zuerst betrachteten nur deshalb qualitativ verschieden, weil die an sich qualitativ gleichen Elemente einer und derselben Materie im ersten Falle zu zwei Kugeln von den Radien ϱ, ϱ', im zweiten zu solchen von den Radien ϱ_1, ϱ'_1 vereinigt gedacht werden. Hieraus erhellt, dass unsere letzten Betrachtungen noch

---

* So lange also sechste und höhere Potenzen von $\frac{1}{s}$ ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können, besitzt

$$w = \frac{\varepsilon\mu\mu'}{s^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2s}\right) = \frac{\varepsilon\mu\mu'}{s^2}\cos\frac{\alpha}{s}$$

denselben Bau wie K.

in anderer Hinsicht für unsere Theorie von Wichtigkeit sind, indem sie nicht allein die Erklärung qualitativer aus räumlichen Verschiedenheiten erst vollständig motiviren, sondern auch die allgemeine Bedeutung von α klar hervortreten lassen. Da nämlich die einzelnen Glieder der Reihe

$$1-\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^2+\frac{\alpha^2}{2}\left(\tfrac{1}{12}\alpha^2+\varrho^2+\varrho'^2\right)\left(\frac{1}{s}\right)^4-\ldots$$

nothwendig von gleichen Dimensionen sind, und ausserdem eine Vertauschung von ϱ, ϱ' mit ϱ', ϱ nach den Untersuchungen des § 1 den Werth von α nie ändern darf, so muss diese Grösse durchgängig die Darstellungsweise

191) $$\alpha=(\varrho+\varrho')f(\varrho,\varrho')=k\,(\varrho+\varrho')$$

gestatten, wobei k mit dem charakteristischen Quotienten der betreffenden Atome zusammenfällt und ausnahmslos einer gewissen Zahl äquivalent sein wird. Dieselbe entscheidet, wie wir bereits in § 3 gesehen haben, ausschliesslich über die chemische Affinität, beziehungsweise Inactivität der ersteren und mag in Zukunft kurz als deren Qualitätsfactor bezeichnet werden.

Berichtigung.

Auf Seite 184 ist in der vorletzten Zeile hinter dem Worte „Werth“ einzuschalten: „des 2. Factors“.

X.

Elementare Behandlung einiger optischer Probleme.

Von

Prof. Dr. E. Lommel

an der Universität zu Erlangen.

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—5.)

I. Die kleinste Ablenkung im Prisma.

Die Darstellung, welche dem Satze von der kleinsten Ablenkung in Prismen selbst in unseren besten Lehrbüchern zu Theil wird, lässt immer noch Vieles zu wünschen übrig. Entweder wird der Beweis des Satzes, unter Verweisung auf höhere Rechnung, ganz unterlassen*, oder er stützt sich auf das durch eine numerische Tabelle erläuterte Gesetz der Abhängigkeit zwischen Einfalls- und Brechungswinkel**, oder es wird der zwar verdienstvolle, aber jedenfalls schwerfällige trigonometrische Beweis von Fr. Eisenlohr reproducirt***. Dass die unten citirten, sowie andere Lehrbücher sich bei Besprechung dieses für die Bestimmung der Brechungsverhältnisse so wichtigen Satzes mit Darstellungsweisen behelfen, welche dem Lernenden volle Befriedigung zu gewähren nicht im Stande sind, erklärt sich aus dem Umstande, dass bis jetzt ein elementarer Beweis, welcher zugleich mathematisch streng, einfach und anschaulich wäre, nicht bekannt geworden ist. Dadurch erscheint die Mittheilung des folgenden synthetischen Beweises, welcher unseres Erachtens diesen Anforderungen vollkommen entspricht, hinlänglich gerechtfertigt.

Bezeichnet man mit i und i' den Einfalls- und den Austrittswinkel, mit r und r' die Winkel, welche der im Prisma verlaufende Strahl resp. mit den Lothen an der Eintritts- und Austrittsfläche bildet, ferner mit d die Ablenkung, und mit α den brechenden Winkel des Prismas, so hat man bekanntlich

$$r+r'=\alpha \quad \text{und} \quad d=i+i'-\alpha.$$

---

* Mousson, Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 1872.

** J. Müller, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 1868.

*** Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 1871.

Die Ablenkung d wird demnach ihren kleinsten Werth erreichen, wenn die Summe $i+i'$ des Ein- und Austrittswinkels ein Minimum ist.

Um den zum Einfallswinkel $i = AOL$ (Fig. 1) gehörigen Brechungswinkel r zu finden, beschreibe man nach einem bekannten Verfahren um O zwei Kreise mit den Halbmessern 1 und n, unter n das Brechungsverhältniss der Prismensubstanz verstanden. Den ersteren Kreis bezeichnen wir als „Kreis 1", den letzteren als „Kreis n". Zieht man durch den Punkt A, wo der eine Schenkel des Winkels i den Kreis 1 trifft, eine Parallele zum andern Schenkel OL, welche den Kreis n im Punkte B schneidet, so ist BOL der gesuchte Brechungswinkel r.

Macht man nun den Winkel BOB' gleich dem brechenden Winkel α des Prismas, so ist vermöge der Gleichung $r + r' = \alpha$ der Winkel $B'OL$ gleich r', und eine Parallele zu OL, durch den auf dem Kreise n gelegenen Punkt B' bis zur Begegnung mit dem Kreise 1 im Punkte A' gezogen, giebt den Winkel $A'OL$ oder i'. Der Winkel AOA' stellt sonach die Winkelsumme $i+i'$ vor.

Sind die beiden Winkel r ungleich, ist z. B., wie in der Figur angenommen wurde, r' grösser als r, so ist auch $A'B'$ grösser als AB. Zieht man jetzt die Sehnen AA' und BB', und durch den Punkt A die Gerade AC parallel zu BB', welche $A'B'$ im Punkte C zwischen A' und B' schneidet, so ergiebt sich aus dem bei C stumpfwinkligen Dreieck ACA', dass AA' grösser als AC, d. h. grösser als BB' ist*. Die Sehne AA', welche den Winkel $i+i'$ im Kreise 1 spannt, ist demnach grösser als die Sehne BB', welche im Kreise n den Winkel α spannt.

Nur in einem einzigen Falle wird die erstere Sehne der letzteren gleich, nämlich wenn $r = r' = \frac{1}{2}\alpha$ und sonach auch $i = i'$ ist, d. h. wenn der Lichtstrahl das Prisma symmetrisch durchläuft. In diesem Falle, welcher in der Figur durch punktirte Linien angedeutet ist, erscheinen nämlich die Sehnen aa' und bb' als gegenüberliegende Seiten des Rechtecks $aa'bb'$.

Die Sehne AA', welche dem Winkel $i+i'$ im Kreise 1 entspricht, hat also ihren kleinsten Werth, wenn der Lichtstrahl symmetrisch durch das Prisma geht. Daraus folgt, dass dieser Winkel selbst, und mit

---

* Aus der Figur leuchtet zwar schon unmittelbar ein, dass $A'B' > AB$, und der Winkel $BB'A'$ ein stumpfer ist. Sollten jedoch für diese beiden Behauptungen schulgerechte Beweise verlangt werden, so lassen sich dieselben in folgender Weise leicht führen.

Man lege das Dreieck ABO derart auf das Dreieck $A'B'O$, dass OB auf OB' fällt, so kommt der Punkt A, weil Winkel $ABO\ (=r)$ kleiner ist als Winkel $A'B'O\ (=r')$, innerhalb des Dreiecks $A'B'O$ zu liegen; man hat daher $OA' + A'B' > OA + AB$, oder, weil $OA' = OA$, $A'B' > AB$.

Der Winkel $BB'A'$ ist $= BB'O + OB'A'$. Nun ist $BB'O = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ und $r' > \frac{1}{2}\alpha$, folglich $BB'A' > 90^0$.

ihm die Ablenkung $d = i + i' - \alpha$, ein Minimum ist bei symmetrischem Durchgang.

In unserer Fig. 1 wurde vorausgesetzt, dass die Winkel i und r, i' und r' dieselbe Seite ihres Einfallslothes wie im Falle der symmetrischen Brechung einnehmen, was sich in der Zeichnung dadurch ausdrückt, dass i und r diesseits (links), i' und r' jenseits (rechts) von OL liegen. Fällt jedoch z. B. der Winkel i (AOL Fig. 2) auf die entgegengesetzte Seite des Lothes (d. h. neigt sich der einfallende Strahl gegen die Spitze des Prismas hin), so kommt derselbe auch in der Zeichnung jenseits (rechts) von OL zu liegen und ist alsdann ebenso, wie der Winkel r, negativ zu rechnen. Aber auch jetzt, wie überhaupt in jedem Falle, wird die Winkelsumme $i + i'$ durch den Winkel AOA' (Fig. 2) dargestellt, und unser Beweis gilt ganz in gleicher Weise, wie bei der in Fig. 1 zu Grunde gelegten Annahme, dass sämmtliche vier Winkel i, r, i' und r' positiv seien.

Die Methode, welche hier zur Construction der Winkel i, r, i' und r' angewendet wurde, unterscheidet sich von derjenigen, welche Reusch in seiner vortrefflichen synthetischen Darstellung der Brechung und Farbenzerstreuung an ebenen Flächen und in Prismen* benutzt hat, namentlich dadurch, dass sie sich statt zweier nur einer einzigen Projectionsrichtung bedient, und ist ebenso, wie diese, geeignet, über alle Verhältnisse, welche bei der Brechung in Prismen vorkommen können, erschöpfende Rechenschaft zu geben. Um alle möglichen Fälle der Reihe nach zu überblicken, braucht man nur den brechenden Winkel $BOB' = \alpha$ (Fig. 1 und 2) um seine Spitze bei O zu drehen, und bei jeder seiner Lagen die Punkte B und B', wo seine Schenkel auf dem Kreise n aufstehen, parallel der festen Geraden OL auf den Kreis 1 zu projiciren. Als äusserste Lage diesseits OL ergiebt sich diejenige, bei welcher die projicirende Linie B_0M (Fig. 2) den Kreis 1 im Endpunkt M seines zu OL senkrechten Durchmessers berührt; sie entspricht der streifenden Incidenz ($i = MOL = 90^0$). Dreht man den Winkel aus dieser Lage weiter, bis sein erster (der Eintrittsfläche entsprechender) Schenkel mit OL zusammenfällt, so durchläuft man alle möglichen Fälle vom streifenden bis zum senkrechten Einfallen. Dreht man noch weiter, so werden die Winkel i und r, indem sie auf die entgegengesetzte Seite des Lothes hinübertreten, negativ. Die äusserste mögliche Lage jenseits von OL ist diejenige, bei welcher die den Punkt B'_0 des zweiten (der Austrittsfläche entsprechenden) Schenkels Projicirende B'_0M' den Kreis 1 in M' berührt; sie entspricht dem streifenden Austritt. Die Winkel i und r sind als positiv anzusehen, wenn sie diesseits (links) von OL, die Winkel i' und r', wenn sie jenseits (rechts) von OL liegen, d. h. wenn sie auf derselben Seite des

* Poggendorff's Annalen, Bd. 117. Reusch giebt daselbst auch einen elementaren Beweis des Satzes vom Minimum der Ablenkung, welchem jedoch der oben gegebene Beweis, mindestens für Lehrzwecke, vorzuziehen sein dürfte.

Lothes liegen, auf welcher sie sich im Symmetriefalle befinden. Von den Winkelpaaren (i, r) und (i', r') kann immer nur das eine negativ sein, und zwar nur dann, wenn der brechende Winkel des Prismas kleiner als der Grenzwinkel $B_0 O L$ ist.

Die Ablenkung stellt sich bei unserer Construction (Fig. 1) dar als die Summe der beiden Winkel $AOB\,(=i-r)$ und $A'OB'\,(=i'-r')$. Legt man daher (Fig. 2) das Dreieck AOB so an das Dreieck $A''OB''$ an, dass OB längs OB'' und A nach D zu liegen kommt, so ist $A''OD$ der Ablenkungswinkel. Da der Winkel $A''B''O = r$, und der Winkel $DB''O = r'$ ist, so ist der Winkel $A''B''D$ gleich dem brechenden Winkel des Prismas. Man gelangt daher zu folgender, von Radau* angegebener Construction des Ganges eines Lichtstrahles im Prisma: Um einen beliebigen Punkt O beschreibe man die Kreise 1 und n; giebt alsdann OA'' die Richtung des einfallenden Strahles an, so ziehe man von dem Punkte A'', wo dieselbe den Kreis 1 trifft, die Gerade $A''B''$ parallel zum Lothe der Eintrittsfläche, und durch den Punkt B'', wo sie dem Kreise n begegnet, eine Parallele $B''D$ zum Lothe der Austrittsfläche, welche den Kreis 1 im Punkte D schneidet. Alsdann giebt OB'' die Richtung des gebrochenen, OD die Richtung des austretenden Strahles und der Winkel $A''OD$ die Ablenkung an. An dieser Construction ändert sich nichts, wenn (wie in Fig. 2, rechts von OL) i und r, und darum auch $i-r$ negativ ist; dann ist der Winkel $AOB = A'B'OD'$ von $A'OB'$ abzuziehen und die Ablenkung ergiebt sich wie vorhin $= A'OD'$.

II. Das achromatische Prisma.

Die soeben angeführte Radau'sche Construction scheint weniger Beachtung gefunden zu haben, als sie ohne Zweifel verdient. Sie führt nämlich mit wahrhaft überraschender Leichtigkeit zur synthetischen Lösung von Problemen, welche analytisch angegriffen ziemlich umständliche Rechnungen erfordern. An dem Beispiel des achromatischen Prismas soll dies gezeigt werden.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, ist folgende: Zu einem gegebenen Prisma soll ein zweites aus anderem Stoffe gefunden werden, welches, in entgegengesetzter Lage mit jenem vereinigt, die Farbenzerstreuung desselben für zwei beliebige homogene Lichtarten wieder aufhebt.

Gegeben sind demnach der brechende Winkel α des ersten Prismas und er Einfallswinkel i an seiner Eintrittsfläche, die Brechungsverhältnisse n' nd n'' seiner Substanz (z. B. Crownglas) für zwei homogene Farben (z. B. r die Fraunhofer'schen Linien B und H), ferner die Brechungsverltnisse m' und m'' derselben Farben für die Substanz (z. B. Flintglas) des eiten Prismas; gesucht wird der brechende Winkel β des zweiten Prismas.

* Poggendorff's Annalen, Bd. 118.

Um einen beliebigen Punkt O (Fig. 3) beschreibe man Kreisbogen mit den Halbmessern 1, n', n'', m', m''. Giebt der Radius OA im Kreise 1 die Richtung des einfallenden weissen Lichtstrahles an, so ziehe man durch A die Gerade AB parallel zum Lothe der Eintrittsfläche (nämlich so, dass Winkel $OAB = 180^0 - i$ wird) des gegebenen Prismas; projicirt man nun die Punkte B und H, wo diese Gerade resp. die Kreise n' und n'' schneidet, durch Parallelen zur Austrittsfläche (d. h. indem man Winkel $ABB' = AHH' = \alpha$ macht) nach B' und H' auf den Kreis 1, so geben OB' und OH' die Richtungen der beiden aus dem ersten Prisma austretenden farbigen Strahlen an, welche für das zweite Prisma als einfallende Strahlen zu betrachten sind. Um dieselben auf ihrem weiteren Gange zu verfolgen, projicire man die Punkte B' und H' parallel dem Lothe der Eintrittsfläche des zweiten Prismas (dessen Richtung gegeben ist) resp. nach b und h auf die Kreise m' und m''. Wäre nun der brechende Winkel β des zweiten Prismas gegeben, so hätte man durch parallele Gerade, welche mit $B'b$ und $H'h$ den Winkel β bilden, die Punkte b und h auf den Kreis 1 zu projiciren, und würde so im Allgemeinen zwei austretende farbige Strahlen erhalten. Sollen sich dieselben zu einem einzigen Strahle vereinigen, wie unsere Aufgabe es verlangt, so müssen sich die Punkte b und h in einem einzigen Punkte Z auf dem Kreise 1 projiciren, d. h. die Projectionsrichtung muss mit der Richtung hb zusammenfallen. Der Winkel $H'hb$ ist demnach der brechende Winkel des Prismas, durch welches das gegebene Prisma achromatisirt wird. Der Radius OZ giebt die Richtung des austretenden farblosen Lichtstrahles an, und der Winkel AOZ ist die Ablenkung, welche er erlitten hat.

Wir haben hier den allgemeineren Fall betrachtet, in welchem die Austrittsfläche des ersten Prismas mit der Eintrittsfläche des zweiten einen beliebigen Winkel $HH'h$ bildet. Gewöhnlich aber nimmt man an, dass die genannten Flächen und demnach auch ihre Lothe miteinander parallel seien. Alsdann vereinfacht sich die Construction, indem man der Punkte B' und H' auf dem Kreise 1 gar nicht bedarf, sondern nur die Punkte B und H parallel dieser Lothrichtung resp. auf die Kreise m' und m'' nach b' und h' zu projiciren braucht, um in $Hh'b'$ den gesuchten brechenden Winkel, in OZ' die Richtung des austretenden Strahles und in AOZ' den Ablenkungswinkel zu haben.

Mit ähnlicher Leichtigkeit lässt sich die in Rede stehende Methode, wie Radau bereits gezeigt hat*, auf die Construction von Prismensystemen ohne Ablenkung (*à vision directe*) anwenden.

III. Elementare Theorie des Regenbogens.

Die Sätze von dem Maximum und Minimum der Ablenkung des in eine durchsichtige Kugel gebrochenen und nach ein- oder mehrmaliger innerer

* Poggendorff's Annalen Bd. 118.

Reflexion wieder austretenden Lichtes, welche der Theorie des Regenbogens zu Grunde liegen, erfahren in den Lehrbüchern ein ähnliches Schicksal, wie der Satz von der kleinsten prismatischen Ablenkung. Eine möglichst elementar gehaltene Darlegung dieser Sätze, wie ich sie im Folgenden zu geben beabsichtige, dürfte daher nicht überflüssig erscheinen.

In Fig. 4 möge der Kreis den Umriss einer Wasserkugel oder eines Regentropfens darstellen. Ist OS die vom Mittelpunkt O der Kugel nach der Sonne gezogene Gerade, so stellt die damit Parallele SA einen beliebigen Sonnenstrahl vor, welcher die Kugel im Punkte A trifft. Zieht man den verlängerten Radius OAL, so ist der Winkel LAS oder der ihm gleiche AOS der Einfallswinkel i des Strahles SA; ein Theil AB dieses Strahles dringt unter dem Brechungswinkel r in die Kugel ein, wird in B, wo er unter dem Einfallswinkel $ABO = r$ die hintere Fläche trifft, theilweise nach innen (nach BC) zurückgeworfen und kehrt endlich, nachdem er im Punkte C durch Reflexion nach innen einen abermaligen Verlust erlitten hat, unter dem Brechungswinkel $MCE = i$ wieder in die Luft zurück. Der Winkel d, um welchen der austretende Strahl CE von der Richtung der directen Sonnenstrahlen abweicht, ergiebt sich aus der Zeichnung in bekannter Weise, und zwar findet man

$$d = 2(2r - i).$$

Nach Massgabe dieses Ausdruckes wird im Allgemeinen jedes schmale Bündel paralleler Strahlen, welches auf den oberen Theil PA der Kugel trifft, aus deren unterem Theil PC als divergirendes Büschel hervorgehen, welches auf ein entferntes Auge, weil die Mehrzahl seiner Strahlen unwirksam daneben vorbeigehen, nur einen unbedeutenden Lichteindruck hervorbringen kann. Ein merklicher Lichteindruck könnte, in einer bestimmten Richtung, nur dann wahrgenommen werden, wenn es auf dem Umrisse der Kugel einen Punkt gäbe, in dessen Nachbarschaft die einfallenden parallelen Strahlen so gebrochen werden, dass sie, auch nachdem sie die Kugel verlassen haben, noch als paralleles Bündel zusammenhalten.

Um einen solchen Punkt, falls er existirt, aufzufinden, betrachten wir einen Strahl, der sehr nahe bei dem Punkte A die Wasserkugel trifft; demselben entspreche der Einfallswinkel $i + \alpha$, welcher um die sehr kleine Grösse α von demjenigen des Strahles SA abweicht. Wird die zugehörige kleine Aenderung des Brechungswinkels mit β bezeichnet, so ist

$$d' = 2(2r - i) + 2(2\beta - \alpha)$$

der Werth der Ablenkung für den betrachteten Nachbarstrahl. Vergleicht man ihn mit dem obigen Ausdrucke, so erkennt man, dass die beiden benachbarten Strahlen die nämliche Ablenkung erfahren, wenn

$$\alpha = 2\beta,$$

d. h. wenn die kleine Aenderung des Einfallswinkels beim Uebergange von einem Strahle zum benachbarten doppelt so gross ist, als die zugehörige Aenderung des Brechungswinkels.

Zur Ermittelung der Lage desjenigen Punktes auf dem Umrisse der Kugel, in welchem sich diese Bedingung erfüllt, bedienen wir uns der Fig. 5.

Der kleinere der beiden concentrischen Kreise, dessen Radius $=1$ sei, stellt, wie in der vorigen Figur, den Umriss der Kugel vor. Um den zum Einfallswinkel $AOP=i$ gehörigen Brechungswinkel zu finden, construiren wir um denselben Mittelpunkt einen zweiten Kreis vom Radius n, unter n das Brechungsverhältniss der Kugel verstanden. Ziehen wir nun durch A die Gerade QB parallel zu OP, und verbinden wir den Punkt B, wo dieselbe den Umfang des Kreises n schneidet, mit dem Mittelpunkte O, so ist BOP der zum Einfallswinkel i gehörige Brechungswinkel r. Die Bogenstücke PA und PC, welche auf dem Kreisumfange vom Radius 1 diesen Winkeln entsprechen, sind als Masse dieser Winkel zu betrachten. Wiederholt man jetzt für den um das kleine Bogenstückchen $Aa=\alpha$ grösseren Einfallswinkel $aOP=i+\alpha$ die nämliche Construction, indem man qb parallel OP zieht, so gelangt man zu dem Brechungswinkel bOP oder cOP, welcher den vorigen um die kleine Grösse $Cc=\beta$ übertrifft. Die Bogenstückchen Aa und Cc stellen demnach die zusammengehörigen Aenderungen des Einfalls- und des Brechungswinkels vor; sie können als beliebig kleine Stückchen des Kreisumfanges für geradlinig angesehen werden, ebenso wie das Bogenstückchen Bb, welches auf dem Kreise vom Radius n dem kleinen Mittelpunktswinkel $COc=\beta$ entspricht und daher gleich $n\beta$ ist.

Fällt man nun von A und B aus die Senkrechten Ak und Bl, und von O aus die Senkrechte Oq auf die Gerade qb, so sind die Dreieckchen Aka und Blb resp. ähnlich den Dreiecken AQO und BQO. Daraus folgt

$$\frac{Aa}{Ak}=\frac{AO}{AQ} \quad \text{und} \quad \frac{Bb}{Bl}=\frac{BO}{BQ}$$

oder, wenn man AQ mit u, BQ mit v, ferner die einander gleichen Linienstückchen Ak und Bl mit m bezeichnet und sich erinnert, dass $AO=1$, $BO=n$, $Aa=\alpha$ und $Bb=n\beta$ ist:

$$\frac{\alpha}{m}=\frac{1}{u} \quad \text{und} \quad \frac{n\beta}{m}=\frac{n}{v},$$

oder auch, weil in der zweiten Gleichung der beiderseits vorkommende Factor n wegfällt:

$$\frac{\alpha}{m}=\frac{1}{u} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{m}=\frac{1}{v}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich nun das Verhältniss der beiden Zuwachse α und β folgendermassen:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{v}{u},$$

d. h. die gleichzeitigen Aenderungen des Einfalls- und Brechungswinkels verhalten sich stets zueinander wie BQ zu AQ. Damit also α doppelt so gross sei als β, muss auch BQ doppelt so gross sein als AQ, oder der Punkt A muss die Strecke BQ halbiren.

Da nun die Halbirungspunkte sämmtlicher Strecken BQ offenbar auf einer Ellipse liegen, deren grosse Halbaxe $OR = n$ und deren kleine Halbaxe $ON = \frac{1}{2}n$ (s. die rechte Hälfte der Fig. 5) ist, so ergiebt sich der Punkt A (oder A'), der die verlangte Eigenschaft besitzt, sofort als Durchschnittspunkt dieser Ellipse mit dem Kreise 1. Der Einfallswinkel $A'OP' = i_1$ nebst dem zugehörigen Brechungswinkel $B'OP' = r_1$, sowie die halbe Ablenkung $A''OP' = \frac{1}{2}d_1$ lassen sich jetzt unmittelbar aus der Figur entnehmen. Macht man nämlich Winkel $OB'A'' = r_1$, so ist

$$A''OP' = B'OP' - B'OA' = r_1 - (i_1 - r_1) = 2r_1 - i_1 = \frac{1}{2}d_1.$$

Sollen diese Winkel durch Rechnung gefunden werden, so hat man die Gleichung $2AQ = BQ$, d. i.

$$2\cos i = n \cos r$$

welche mit dem Brechungsgesetz

$$\sin i = n \sin r$$

combinirt, sofort

$$\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$$

liefert.*

Die Strahlen, welche, in unmittelbarer Nähe des soeben bestimmten Punktes A unter sich parallel auf die Kugel fallend, dieselbe auch wieder als paralleles Bündel verlassen, sind noch dadurch vor den übrigen ausgezeichnet, dass ihre Ablenkung die grösste ist, welche die Kugel bei einmaliger innerer Reflexion hervorzubringen vermag. Man kann sich hiervon durch folgende Betrachtung leicht überzeugen. In dem Punkte A, welcher dem Einfallswinkel i_1 entspricht, ist $BQ = 2AQ$; für grössere Einfallswinkel ist $BQ > 2AQ$, für kleinere aber $BQ < 2AQ$. Betrachten wir daher einen grösseren Einfallswinkel $i_1 + \iota'$, welchem auch ein grösserer Brechungswinkel $r_1 + \varrho'$ entspricht, so ist jedes der kleinen Bogenstückchen α, aus welchen sich der Bogen ι' zusammensetzt, mehr als doppelt so gross, wie das entsprechende der Bogenstückchen β, aus denen sich ϱ' zusammensetzt, weil ja die Strecke BQ hier überall grösser ist als $2AQ$; es ist also $\iota' > 2\varrho'$. Die Hälfte der Ablenkung des betrachteten Strahles ist aber

$$\frac{1}{2}d' = 2r_1 + 2\varrho' - i_1 - \iota' \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}d' = \frac{1}{2}d_1 + 2\varrho' - \iota'.$$

Da nun ι' grösser ist als 2ϱ, so hat man, um $\frac{1}{2}d'$ zu erhalten, von $\frac{1}{2}d_1$ mehr abzuziehen als hinzuzufügen; folglich ist d' kleiner als d_1.

Betrachten wir zweitens einen Strahl, dessen Einfallswinkel $i_1 - \iota''$ kleiner ist als i_1 und welchem der Brechungswinkel $r_1 - \varrho''$ zugehört, so ergiebt sich seine Ablenkung d'' aus der Gleichung

---

* Es ist bemerkenswerth, dass für das Brechungsverhältniss $\frac{4}{3}$ der Einfallswinkel und der dreifache Brechungswinkel sich genau zu zwei Rechten ergänzen, d. h. es ist $i_1 + 3r_1 = 180^0$.

$$\tfrac{1}{2}d'' = 2r_1 - 2\varrho'' - i_1 + \iota'' \text{ oder } \tfrac{1}{2}d'' = \tfrac{1}{2}d_1 - 2\varrho'' + \iota''.$$

Da aber, weil hier die BQ kleiner sind als die $2AQ$, auch ι'' kleiner ist als $2\varrho''$, so wird wiederum von $\frac{1}{2}d_1$ ein grösserer Betrag abgezogen als hinzugezählt, und auch d'' ergiebt sich kleiner als d_1. Die Ablenkung d_1, welche die beim Austritt parallelen Strahlen erleiden, ist also in der That ein Maximum.

In Fig. 5 ist die Bestimmung des Punktes A nur für ein einziges Brechungsverhältniss n durchgeführt; für ein anderes Brechungsverhältniss müsste man nach denselben Regeln einen andern Kreis n' nebst der zugehörigen Ellipse construiren, und würde sich z. B. überzeugen, dass die Ablenkung der wirksamen Strahlen für das weniger brechbare rothe Licht grösser ist, als für das stärker brechbare violette.

Hiermit sind nun die Grundlagen gegeben, auf welchen die Erklärung des ersten Regenbogens beruht.

Für den zweiten Regenbogen können nach dem Vorausgegangenen einige kurze Andeutungen genügen. Da die Ablenkung, welche ein Strahl nach zweimaliger innerer Reflexion erlitten hat, bekanntlich durch

$$d = 180^0 - 2(3r - i)$$

ausgedrückt ist, muss für parallel austretende Strahlen die Bedingung

$$\alpha = 3\beta$$

erfüllt sein. Ihr wird genügt in dem Punkte des Kreises 1, für welchen $BQ = 3AQ$ oder $n \cos r = 3 \cos i$ ist; man findet diesen Punkt mit Hilfe einer Ellipse, deren grosse Halbaxe $= n$, deren kleine aber $\frac{1}{3}n$ ist. Durch ein dem obigen ganz ähnliches Verfahren lässt sich alsdann zeigen, dass die Ablenkung, welche diesem Einfallspunkte entspricht, die kleinste ist, welche bei zweimaliger innerer Reflexion stattfinden kann.

Ueberhaupt lässt sich erkennen, dass bei m-maliger innerer Reflexion der Einfallspunkt der „wirksamen" Strahlen der Bedingung $\alpha = (m+1)\beta$ oder $n \cos r = (m+1) \cos i$ genügen muss und constructiv mittels einer Ellipse gefunden wird, deren Halbaxen n und $\frac{n}{m+1}$ sind.

Kleinere Mittheilungen.

VIII. Reliquiae Copernicanae.

(Schluss zu S. 458, Jahrg. XIX.)

Wir gehen über zu den Tafeln und den von Copernicus zum Theil hinzugefügten Erläuterungen. An erster Stelle folgt hier die von Copernicus nur vervollständigte Tafel des Regiomontanus, überschrieben

TABVLA FECVNDA.

NVMERVS.			NVMERVS.			NVMERVS.		
H.	*Καθετος.*	*῾Υποτεινουσα.*	*H.*	*Καθετος.*	*῾Υποτεινουσα.*	*H.*	*Καθετος.*	*῾Υποτεινουσα.*
0	00000	10000	31	60086	11666	61	180402	20627
1	1745	10002	32	62486	11792	62	188075	21300
2	3492	10006	33	64940	11924	63	196263	22027
3	5240	10014	34	67452	12063	64	205034	22812
4	6992	10024	35	70022	12208	65	214450	23662
5	8748	10038	36	72654	12361	66	224607	24586
6	10511	10055	37	75356	12520	67	235583	25593
7	12278	10075	38	78129	12690	68	247513	26695
8	14053	10098	39	80978	12863	69	260511	27905
9	15838	10125	40	83909	13054	70	274753	29232
10	17633	10154	41	86929	13250	71	290422	30716
11	19439	10187	42	90040	13456	72	307767	32361
12	21256	10223	43	93254	13673	73	327088	34199
13	23087	10263	44	96571	13901	74	348748	36279
14	24932	10306	45	100000	14142	75	373211	38637
15	26794	10353	46	103551	14396	76	401089	41336
16	28674	10403	47	107236	14663	77	433148	44454
17	30573	10457	48	111062	14945	78	470453	48097
18	32492	10515	49	115037	15243	79	514438	52408
19	34433	10577	50	119177	15557	80	567118	57588
20	36396	10642	51	123491	15890	81	631377	63925
21	38387	10711	52	127994	16243	82	711569	71853
22	40402	10785	53	132704	16616	83	814456	82055
23	42448	10864	54	137639	17013	84	951387	95668
24	44522	10947	55	142813	17434	85	1143131	114738
25	46631	11034	56	148253	17882	86	1430203	143355
26	48772	11126	57	153987	18361	87	1908217	191073
27	59952	11222	58	160035	18871	88	2863563	286332
28	53170	11326	59	166429	19416	89	5729796	573574
29	55432	11434	60	173207	20000	90	Infinitum.	μυριοπλάσιος.
30	57734	11547						

Tabula Fecunda. In derselben sind nur die Zahlen in der Ὑποτεινουσα überschriebenen Spalte von Copernicus hinzugefügt worden. Aber auch die Ueberschrift Καθετος rührt von ihm her. Bekanntlich enthält die *Tabula fecunda* die Tangenten für den *sinus totus* = 100000[74]); die von Copernicus hinzugefügte Spalte mit der Ueberschrift Ὑποτεινουσα enthält nur für den *sinus totus* = 10000 die Secanten für die einzelnen Grade. Nimmt man die gewöhnliche Darstellung der Kreisfunctionen als Linien am Kreise zu Hilfe, so ersieht man unmittelbar die Richtigkeit der Bezeichnung von Καθετος = Tangente, Ὑποτεινουσα = Secante. Vielleicht dürfte Copernicus der Erste sein, welcher die Secanten wirklich berechnet hat. Eine Benutzung derselben in seinem grossen Werke ist nicht nachweisbar. Bis jetzt galt[75]), wenn man von Maurolykus aus Messina, dessen Schriften erst nach Copernicus Tode 1557 erschienen, absieht, Rheticus als der erste Berechner der Secanten. In dem grossen *Opus Palatinum* sind dieselben genau in derselben Weise berechnet, wie dies Copernicus in der Upsalenser Handschrift gethan hat. Nun sagt Rheticus selbst, dass er seine Untersuchungen geschöpft habe *ex amoenissimo horto Copernici*[76]), es dürfte auch, wie ich später zeigen werde, die Upsalenser Handschrift mit 1532 beendigt gewesen sein, also wird wohl eher Rheticus die Idee zur Berechnung der Secanten von Copernicus erhalten haben, als umgekehrt Copernicus von Rheticus, der erst 1539 nach Frauenburg kam. Dem Copernicus verdankt also die gelehrte Welt die Einführung der Secanten in die Wissenschaft, denn die Arbeiten des Maurolykus sind nur zum kleinsten Theile gedruckt und kaum viel über ihren Druckort hinaus verbreitet worden. Die Tangenten hat bekanntlich Albategnius eingeführt, die Cotangenten Abul-Wefa[77]), bezüglich unter dem Namen *umbra recta* und *umbra versa*. Dass *Umbra recta* $\times$ *Umbra versa* gleich 1 ist, lehrt Bradwardin in einer im Vatican handschriftlich erhaltenen, fälschlich sogenannten *Perspectiva*[78]). Den *Cosinus* findet man wohl zuerst berechnet in

74) Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts, von Abraham Gotthelf Kästner. Erster Band. Göttingen 1796. S. 557, 89.

75) Klügel, Mathematisches Wörterbuch. Vierter Theil. Leipzig 1823. S. 362.

76) In der Vorrede zu seinem *Canon doctrinae triangulorum*, der ersten Ausgabe des *Opus palatinum* und des *Thesaurus* des Pitiscus.

77) Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke. Halle 1839. S. 602.

78) *Codex Vaticanus* Nr. 3102 Blatt 110[b], *l.* 26 — Blatt 111[b]. Die Handschrift beginnt:

Incipit perspectiva eiusdem (Bradwardini) quoad aliquam eius partem. Et quia totum, quod sequitur, continetur in communi perspectiva praeter quatuor propositiones, que sequuntur, ideo solum illas scribo.

Die hier angeführte *perspectia communis* ist die bekannte Optik des

TABVLA DIVERSITATIS ASPECTVVM SOLIS ET LVNAE AD MINVTA.

♋	LONGITVDO.	LATITVDO.	♌	LONGITVDO.	LATITVDO.	♍	LONGITVDO.	LATITVDO.	♎	LONGITVDO.	LATITVDO.	♏	LONGITVDO.	LATITVDO.	♐	LONGITVDO.	LATITVDO.
H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.
8 12	26	44	7 49	35	34	6 59	45	24	6 0	46	21	5 1	42	25	4 10	36	32
7 0	28	40	7 0	36	32	6 0	45	23	5 0	44	22	5 0	42	26	4 0	34	33
6 0	30	37	6 0	36	29	5 0	43	22	4 0	41	23	4 0	40	29	3 0	30	37
5 0	29	34	5 0	35	27	4 0	40	21	3 0	35	24	3 0	36	32	2 0	25	41
4 0	26	31	4 0	32	25	3 0	35	20	2 0	30	26	2 0	31	36	1 0	19	44
3 0	22	37	3 0	28	24	2 0	27	24	1 0	24	28	1 0	25	38	0 0	0	0
2 0	16	25	2 0	21	23	1 0	19	21	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0
1 0	8	23	1 0	14	23	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0
RE-	0	22	CES-	5	24	SVS.	12	30	RE-	16	31	CES-	18	40	SVS.	10	46
1 0	8	23	1 0	2	27	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	44	0 0	0	0
2 0	16	25	2 0	9	30	1 0	4	33	0 0	0	0	0 0	0	46	0 0	0	0
3 0	22	27	3 0	15	32	2 0	6	37	1 0	8	35	1 0	0	44	0 0	0	0
4 0	26	31	4 0	18	35	3 0	11	40	2 0	1	38	2 0	0	46	1 0	1	47
5 0	29	34	5 0	20	38	4 0	15	43	3 0	6	42	3 0	6	48	2 0	5	48
6 0	30	37	6 0	21	41	5 0	18	45	4 0	12	45	4 0	11	48	3 0	10	49
7 0	28	40	7 0	20	43	6 0	18	47	5 0	15	48	5 0	15	48	4 0	17	48
8 12	26	44	7 49	18	45	6 59	17	48	6 0	17	49	5 1	16	48	4 10	18	47

♑	LONGITVDO.	LATITVDO.	♒	LONGITVDO.	LATITVDO.	♓	LONGITVDO.	LATITVDO.	♈	LONGITVDO.	LATITVDO.	♉	LONGITVDO.	LATITVDO.	♊	LONGITVDO.	LATITVDO.
H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.	H. M.	M.	M.
3 47	27	41	4 10	18	47	5 1	16	48	6 0	17	49	6 59	17	48	7 49	26	45
3 0	22	44	4 0	17	48	5 0	15	48	5 0	15	48	6 0	18	47	7 0	28	43
2 0	16	46	3 0	10	49	4 0	11	48	4 0	12	45	5 0	18	45	6 0	30	41
1 0	8	48	2 0	5	48	3 0	6	48	3 0	6	42	4 0	15	43	5 0	29	38
0 0	0	0	1 0	1	47	2 0	0	46	2 0	1	38	3 0	11	40	4 0	26	35
0 0	0	0	0 0	0	0	1 0	9	44	1 0	8	35	2 0	6	37	3 0	22	32
0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	1 0	4	33	2 0	16	30
0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	1 0	8	27
RE-	0	49	CES-	10	46	SVS.	18	40	RE-	16	31	CES-	12	30	SVS.	0	24
0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	1 0	14	23
0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	0 0	0	0	1 0	19	27	2 0	21	23
0 0	0	0	0 0	0	0	1 0	35	38	1 0	24	28	2 0	27	24	3 0	28	24
0 0	0	0	1 0	19	44	2 0	21	34	2 0	30	26	3 0	35	20	4 0	32	25
1 0	8	48	2 0	25	41	3 0	36	32	3 0	35	25	4 0	40	21	5 0	34	27
2 0	16	46	3 0	30	37	4 0	40	29	4 0	41	23	5 0	43	22	6 0	36	29
3 0	22	44	4 0	34	33	5 0	42	26	5 0	44	22	6 0	45	23	7 0	36	32
3 47	27	41	4 10	36	32	5 1	42	25	6 0	46	21	6 59	45	24	7 49	35	34

der von **Rheticus** edirten Trigonometrie des **Copernicus**[79]), worin der Kopf der Tafel oben von 0°—90° geht, dagegen unten von 90°—0°, so dass also, wenn man von unten in die Tafel eingeht, der Cosinus gefunden wird, während der obere Eingang den Sinus liefert.

Es folgt eine Tafel (s. f. S.) — sie steht auf dem letzten leeren Blatte des **Alfonsus** — mit der Ueberschrift: *Tabula diversitatis aspectuum solis et lunae ad minuta.* Sie scheint wohl mehr astrologischen Spielereien ihren Ursprung zu danken. Wir werden im Verlaufe dieser *Reliquiae* sehen, dass **Copernicus** keineswegs, wie vielfach behauptet ist, der Astrologie abhold gewesen ist.

Wir kommen jetzt auf ein Feld, wo wir eine Vergleichung mit den *Revolutiones* anstellen können. Das Resultat derselben ist theilweise ein negatives; wir werden für einen grossen Theil der nachfolgenden Tabellen jedoch auch auf ein sehr positives Resultat geführt werden, das auf die Geschichte der Entstehung des grossen Werkes ein recht helles Licht wirft, und zwar für einen Theil, bei welchem das Manuscript der *Revolutiones* für die Geschichte des Textes gar keine Ausbeute liefert. Die Tafel, welche ich zunächst zum Abdruck bringe, ist unvollendet, wenigstens in ihrem ersten Theile. Sie ist nur für 1—20 Jahre berechnet. **Copernicus** hat aber am Rande die Zahlen noch bis 30 weitergeführt, den leeren Platz jedoch wieder durch ein Bruchstück einer *Tabella Revolutionum* ausgefüllt. Die Rückseite des Blattes, auf welchem die *Tabula mediae coniunctionis et oppositionis solis et lunae in annis expansis* sich findet, nimmt dann eine Tafel ein, welche der Tafel auf S. 299 der *Revolutiones* entsprechen dürfte. Die Ueberschrift fehlt bei ihr; die Uebereinstimmung des Eintheilungsgrundes und einige übereinstimmende Zahlen zeigen aber deutlich, dass man es hier mit gleichartigen Sachen zu thun hat. Bei der untern

---

Johannes Pekkham. Die vier aus dem Bradwardin'schen Werke angeführten Sätze heissen:

1. *In umbra invenitur diversitas, quia alia est umbra recta, alia versa.*
2. *Cum duplex sit umbra, recta scilicet et versa, quanto una est minor, tanto altera est maior et e converso, et quanto una crescit, tanto altera decrescit et e converso, quamquam etiam eas equales esse contingit.*
3. *Inter umbras et umbrosum testis est proportio, quod ipsa res semper est medio loco proportionalis inter umbram suam, rectum scilicet et versam.*
4. *Per proportiones umbrarum facile est altitudines rerum accipere.*

Davon ist Nr. 1 nur Erklärung, Nr. 2 zeigt das Verhalten der Function und Cofunction zu einander. Nr. 3 enthält den im Texte ausgesprochenen Satz: $tg\alpha : r = r : ctg\alpha$. Von Satz 4 ist die Einführung der Tangenten und Cotangenten überhaupt ausgegangen. Das Manuscript schliesst:

Qui autem ampliora de hiis rebus investigare voluerit, legat librum Alacen philosophi de aspectibus in quo inveniet [mel]ius singula et diffusius pertractata. Hec vero pro simplicibus ex eisdem breviter elicita, que nunc sufficiant.

79) Man sehe auch die Prolegomena der Säcularausgabe S. XVI.

Reihe ist diese Uebereinstimmung sehr augenfällig; sobald man nämlich das S. der ersten Colonne nicht *Sex.*, wie in den *Revolutiones*, sondern *Signum* liest, so gehen die Zahlen der *Revolutiones* einfach in die der upsalenser Handschrift über. Dabei entspricht die nach der mit D. H. M. 2ª. überschrieb nen Colonne folgende erste Spalte der unteren Spalte der Tafel auf S. 299; die zweite Spalte ist die a. a. O. mit *Motus anomaliae lunaris* überschriebene, die dritte endlich die mit dem Titel *Motus latitudinis lunae.* Auch die Zeitangaben stimmen überein trotz der scheinbaren grossen Verschiedenheit. Man braucht von den Angaben der Tafel auf S. 299 nur die Zahl der bis Ende des betreffenden Monats verflossenen Tage abzuziehen und die Scrupula des Tages in Stun-

TABVLA MEDIAE CONIVNCTIONIS ET OPPOSITIONIS SOLIS ET LVNAE IN ANNIS EXPANSIS.

NVMERI.	TEMPVS.				MEDIVS MOTVS SOLIS ET LVNAE.				MEDIVM ARGVMENTVM LVNAE.				ARGVMENTVM LATITVDINIS LVNAE.			
	D.	H.	M.	2ª.	S	G.	M.	2ª.	S.	G.	M.	2ª.	S.	G.	M.	2ª.
1	10	15	11	23	11	19	16	50	10	9	48	6	0	8	2	45
2	21	6	22	47	11	8	33	41	8	19	36	14	0	16	5	30
3	2	8	50	7	11	26	56	55	7	25	13	22	1	24	48	29
4	14	0	1	31	11	16	13	45	6	5	1	29	2	2	51	15
5	24	15	12	54	11	5	30	36	4	14	49	36	2	10	54	0
6	5	0	40	14	11	23	53	50	3	20	26	43	3	19	36	59
7	16	8	51	38	11	13	10	41	2	0	14	50	3	27	39	44
8	28	0	3	1	11	2	27	31	0	10	2	57	(4)	5	42	29
9	9	2	30	21	11	20	50	45	11	15	40	5	(4)	14	25	28
10	19	17	41	45	11	10	7	36	9	25	28	12	(4)	22	28	13
11	0	20	9	5	11	28	30	50	9	1	5	19	(5)	1	11	12
12	12	11	20	29	11	17	47	41	7	10	53	26	(5)	9	13	58
13	23	2	31	52	11	7	4	31	5	20	41	33	(5)	17	16	43
14	4	4	59	12	11	25	27	46	4	26	18	41	(5)	25	58	42
15	14	20	10	36	11	14	44	36	3	6	6	48	(6)	4	2	27
16	26	11	21	59	11	4	1	26	1	15	54	55	(6)	12	5	12
17	7	13	49	26	11	22	24	41	0	21	32	2	(6)	20	48	11
18	18	5	6	43	11	11	41	31	11	1	20	9	(6)	28	50	57
19	28	20	12	6	11	0	48	21	9	11	8	16	(7)	6	53	42
20	10	22	39	27	11	19	21	36	8	16	45	24	(7)	15	36	41

TABELLA REVOLVCIONVM.

Ni.	S.	G.	M.	2ª.	S.	G.	M.	2ª.	S.	G.	M.	2ª.	S.	G.	M.	2ª.
	14	18	22	2	0	14	33	12	6	12	54	30	6	15	20	7
	29	12	44	3	0	29	6	24	0	25	49	1	1	0	40	14
	44	7	6	5	1	13	39	36	7	8	43	31	7	16	0	21
	59	1	28	6	1	28	12	48	1	21	35	1	2	1	20	28
	73	19	50	8	2	12	46	1	8	4	32	31	8	16	40	34
	88	14	12	9	2	27	19	13	2	17	27	2	8	2	0	41

MENSIS.	D.	H.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª
Ianuarius	1	11	15	54	0	29	6	24	0	25	49	1	1	0	40	14
Februarius	29	11	15	57	0	29	6	24	0	25	49	1	1	0	40	14
Marcius	1	9	47	51	2	27	19	13	2	17	27	2	3	2	0	41
Aprilis	1	21	3	48	3	26	25	37	3	13	16	2	4	2	40	55
Maius	3	8	19	45	4	25	32	1	4	9	5	3	5	3	21	9
Iunius	3	19	35	41	5	24	38	25	5	4	54	3	6	4	1	23
Iulius	5	6	51	39	6	23	44	49	6	0	43	4	7	4	41	36
Augustus	6	18	7	36	6	22	51	14	6	26	32	5	8	5	21	50
September	7	5	23	33	8	21	57	32	7	22	21	5	9	6	2	4
October	8	16	39	30	8	21	4	8	8	18	10	6	10	6	42	18
November	9	3	55	26	10	20	10	26	9	17	59	6	11	7	22	31
December	10	15	11	23	10	19	16	50	10	9	48	7	0	8	2	45

MENSIS.	D.	H.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª
Ianuarius	1	11	15	57	0	29	6	24	0	25	49	1	1	0	40	14
Februarius	0	22	31	54	1	28	12	48	1	21	38	1	2	1	20	28
Marcius	2	9	47	51	2	27	19	13	2	17	27	2	3	2	0	41
Aprilis	2	21	3	48	3	26	25	37	3	13	16	2	4	2	40	55
Maius	4	8	19	45	4	25	32	1	4	9	5	3	5	3	21	9
Iunius	4	19	35	42	5	24	38	25	5	4	54	3	6	4	1	23
Iulius	6	6	51	39	6	23	44	49	6	0	43	4	7	4	41	36
Augustus	7	18	7	36	7	22	51	14	6	26	32	5	8	5	21	50
September	8	5	23	33	8	21	57	32	7	22	21	5	9	6	2	4
October	9	16	39	30	9	21	4	8	8	18	10	6	10	6	42	18
November	10	3	35	26	10	20	10	26	9	13	59	6	11	7	22	31
December	11	15	11	23	11	19	16	50	10	9	48	7	0	8	2	45
MENSIS.	D.	H.	M.	2ª	S	G.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª	S.	G.	M.	2ª
					Mot. anom. solar.				Mot. anom. lun.				Motus lat. lunae.			

den, Minuten und Secunden zu verwandeln, so ergeben sich die Zahlen der untern Reihe der handschriftlichen Tafel. Dabei bemerke man, dass hierbei dem Februar 29 Tage zu geben sind, um die Uebereinstimmung zu bewirken. Nimmt man dagegen den Februar zu 28 Tagen, so erhält man die Zahlen der obern Reihe. Die Tafel auf S. 299 gilt also für Schaltjahr und für Gemeinjahr, während die Handschrift für jede Jahresart besondere Tafeln aufgestellt hat[80]). Die handschriftlichen Tafeln geben bei der Umrechnung die *Scrupula secunda* in der Form, wie ich sie aus der Originalhandschrift der *Revolutiones* hergestellt habe, nicht in derjenigen der bisherigen Ausgaben. Ein neuer Beweis, dass von Copernicus die Zahlen der Tafeln

80) Der Grund liegt wahrscheinlich darin, dass Copernicus in seinen *Revolutiones* nur von ägyptischen Jahren Gebrauch macht, deren jedes zu 365 Tagen gerechnet wurde, er also eine Unterscheidung zwischen Gemeinjahr und Schaltjahr nicht bedurfte.

vielfach anders geschrieben sind, als die Herausgeber für gut befunden haben, dieselben abzudrucken.

Es folgt eine Tafel, betitelt *Tabula Augis Solaris.* Sie enthält die Bewegung des aufsteigenden Knotens der Sonnenbahn vom Jahre 1450 bis zum Jahre 2085 von fünf zu fünf Jahren. Jedem vierzigsten Jahre ist die entsprechende jährliche Bewegung hinzugefügt worden. Eine vergleichbare Tafel enthalten die *Revolutiones* nicht; die Principien der Berechnung dürften im Cap. XXII des Buches III[81]) niedergelegt sein.

TABVLA AVGIS SOLARIS.

	Grad. Zod.			MOTVS IN ANNO.		Grad. Zod.			MOTVS IN ANNO.		Grad. Zod.			MOTVS IN ANNO.		Grad. Zod.		
	G.	M.	2a.			G.	M.	2a.			G.	M.	2a.			G.	M.	2a.
1450	0	43	26	34	1610	2	9	55		1770	3	25	36		1930	4	30	19
1455	0	46	18		1615	2	12	27		1775	3	27	47		1935	4	32	10
1460	0	49	9		1620	2	14	58		1780	3	29	57		1940	4	34	0
1465	0	51	59		1625	2	17	28		1785	3	32	7		1945	4	35	50
1470	0	54	48		1630	2	19	57		1790	3	34	16		1950	4	37	39
1475	0	57	37		1635	2	22	25		1795	3	36	24		1955	4	39	27
1480	1	0	25	33	1640	2	24	53	29	1800	3	38	31	25	1960	4	41	14
1485	1	3	13		1645	2	27	20		1805	3	40	38		1965	4	43	1
1490	1	6	0		1650	2	29	47		1810	3	42	45		1970	4	44	47
1495	1	8	47		1655	2	32	13		1815	3	44	51		1975	4	46	33
1500	1	11	33		1660	2	34	39		1820	3	46	56		1980	4	48	18
1505	1	14	18		1665	2	37	4		1825	3	49	1		1985	4	50	3
1510	1	17	3		1670	2	39	29		1830	3	51	5		1990	4	51	47
1515	1	19	47		1675	2	41	54		1835	3	53	9		1995	4	53	30
1520	1	22	31	32	1680	2	43	18	28	1840	3	55	12	24	2000	4	55	12
1525	1	25	14		1685	2	46	41		1845	3	57	14		2005	4	56	59
1530	1	27	57		1690	2	49	8		1850	3	59	16		2010	4	58	35
1535	1	30	39		1695	2	51	25		1855	4	1	17		2015	5	0	16
1540	1	33	20		1700	2	53	46		1860	4	3	17		2020	5	1	56
1545	1	36	1		1705	2	56	6		1865	4	5	17		2025	5	3	36
1550	1	38	41		1710	2	58	26		1870	4	7	16		2030	5	5	15
1555	1	41	20		1715	3	0	25		1875	4	9	15		2035	5	7	13
1560	1	43	58	31	1720	3	3	3	27	1880	4	11	13	23	2040	5	8	31
1565	1	46	36		1725	3	5	21		1885	4	13	11		2045	5	10	8
1570	1	49	13		1730	3	7	38		1890	4	15	8		2050	5	12	45
1575	1	51	50		1735	3	9	55		1895	4	17	4		2055	5	14	21
1580	1	54	26		1740	3	12	11		1900	4	18	59		2060	5	14	57
1585	1	57	2		1745	3	14	27		1905	4	20	54		2065	5	16	32
1590	1	59	38		1750	3	16	42		1910	4	23	48		2070	5	18	7
1595	2	2	13		1755	3	18	57		1915	4	24	42		2075	5	19	41
1600	2	4	48	30	1760	3	21	11	26	1920	4	26	35	22	2080	5	21	15
1605	2	7	22		1765	3	23	24		1925	4	28	27		2085	5	23	48

81) *Ed. Thor.* S. 221—222.

Wir kommen zur letzten Sonnentafel, der *Tabula Equacionum Solis*. Sie hat, wie alle folgenden Tafeln, doppelten Eingang und ist sechsspaltig. Die den Spalten übergeschriebenen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und die untergeschriebenen 6, 7, 8, 9, 10, 11 bedeuten die zwölf Bilder des Thierkreises, von denen jedes 30 Grad hat. Bei Vergleichungen mit den Tafeln der *Revolutiones* ist dies wohl festzuhalten. Die in den Columnen, welche mit A., M. und S. über resp. unterschrieben sind, stehenden Zahlen sind die ersten Differenzen der Zahlen der eigentlichen Tafel. A. soll dabei bedeuten *Addenda*, M. und S. *Minuenda* und *Subtrahenda*, wie man besonders aus der Columne entnehmen kann, wo A./M. übereinandersteht. Von 72° an hat Copernicus — und das dürfte nicht uninteressant sein — seiner

TABVLA EQVACIONVM SOLIS.

NVMERI.	0.			A.		1.			A.		2.			A.			NVMERI.
	G.	M.	2a.	M.	2a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	3a.	
1	0	2	11	2	11	1	4	49	1	54	1	51	35	1	9		29
2	0	4	22	2	11	1	6	42	1	53	1	52	42	1	7		28
3	0	6	33	2	11	1	8	34	1	52	1	53	47	1	5		27
4	0	8	44	2	11	1	10	26	1	52	1	54	50	1	3		26
5	0	10	55	2	11	1	12	17	1	51	1	55	51	1	1		25
6	0	13	6	2	11	1	14	7	1	50	1	56	51	1	0		24
7	0	15	16	2	10	1	15	46	1	49	1	57	49	0	58		23
8	0	17	26	2	10	1	17	43	1	47	1	58	45	0	56		22
9	0	19	36	2	10	1	19	28	1	45	1	59	39	0	54		21
10	0	21	46	2	10	1	21	11	1	43	2	0	31	0	52		20
11	0	23	55	2	9	1	22	53	1	42	2	1	21	0	50		19
12	0	26	4	2	9	1	24	34	1	41	2	2	9	0	48	56	18
13	0	28	12	2	8	1	26	14	1	40	2	2	54	0	45	57	17
14	0	30	20	2	8	1	27	52	1	38	2	3	37	0	43	57	16
15	0	32	27	2	7	1	29	29	1	37	2	4	17	0	40	57	15
16	0	34	34	2	7	1	31	4	1	35	2	4	55	0	38	58	14
17	0	36	40	2	6	1	32	38	1	34	2	5	31	0	36	58	13
18	0	38	46	2	6	1	34	11	1	33	2	6	5	0	34	58	12
19	0	40	51	2	5	1	35	42	1	31	2	6	37	0	32	59	11
20	0	42	56	2	5	1	37	11	1	29	2	7	6	0	29	59	10
21	0	45	0	2	4	1	38	38	1	27	2	7	33	0	27	59	9
22	0	47	3	2	3	1	40	4	1	26	2	7	48	0	25	59	8
23	0	49	5	2	2	1	41	28	1	24	2	8	21	0	23	59	7
24	0	51	6	2	1	1	42	50	1	22	2	8	42	0	21	60	6
25	0	53	6	2	0	1	44	10	1	20	2	9	0	0	18	60	5
26	0	55	5	1	59	1	45	29	1	19	2	9	16	0	16	60	4
27	0	57	4	1	59	1	46	46	1	17	2	9	29	0	13	60	3
28	0	59	2	1	58	1	48	1	1	15	2	9	40	0	11	60	2
29	1	0	49	1	57	1	49	15	1	14	2	9	48	0	8	60	1
30	1	2	45	1	56	1	50	26	1	11	2	9	54	0	6	60	0
				1	54				1	9				0	4		
	G.	M.	2a.	M.	2a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	3a.	
NVMERI.	11.			S.		10.			S.		9.			S.			NVMERI.

Tafel noch zweite Differenzen hinzugefügt, er muss also bei Interpolationen die Nothwendigkeit derselben gefühlt haben. Die Stellung der beiden Differenzreihen in Bezug auf die Tafelwerthe ist im Drucke dieselbe wie in der Handschrift. Während hier also die Differenz wirklich zwischen die Zahlen, zu denen sie gehört, gesetzt ist, hat Copernicus in seiner Handschrift der *Revolutiones* dies bekanntlich nicht gethan[82]), und dadurch seine Herausgeber zum Theil in Fehler verwickelt.

RESIDVVM TABVLÆ EQVACIONVM SOLIS.

NVMERI.	3.			A. M.			4.			M.			5.			M.			NVMERI.
	G.	M.	2a.	M.	2a	3a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	3a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	3a.	
1	2	9	58	0	4	60	1	53	35	1	7	53	1	5	10	2	1	30	29
2	2	9	59	0	1	60	1	52	25	1	10	52	1	3	7	2	3	29	28
3	2	9	59	0	0	60	1	51	14	1	11	51	1	1	3	2	4	28	27
4	2	9	56	0	3	60	1	50	2	1	12	51	0	58	48	2	5	27	26
5	2	9	50	0	6	60	1	48	47	1	15	50	0	56	52	2	6	26	25
6	2	9	42	0	8	60	1	47	30	1	17	50	0	54	44	2	8	25	24
7	2	9	32	0	10	60	1	46	12	1	18	49	0	52	35	2	9	24	23
8	2	9	19	0	13	60	1	44	51	1	21	48	0	50	26	2	9	23	22
9	2	9	4	0	15	60	1	43	27	1	24	48	0	48	16	2	10	22	21
10	2	8	47	0	17	60	1	42	1	1	26	47	0	46	5	2	11	21	20
11	2	8	28	0	19	59	1	40	33	1	28	47	0	43	53	3	12	20	19
12	2	8	6	0	22	59	1	39	3	1	30	46	0	41	40	2	13	19	18
13	2	7	41	0	25	59	1	37	32	1	31	45	0	39	26	2	14	18	17
14	2	7	14	0	27	59	1	35	59	1	33	44	0	37	11	2	15	17	16
15	2	6	44	0	30	59	1	34	24	1	35	43	0	34	55	2	16	16	15
16	2	6	12	0	32	58	1	32	47	1	37	42	0	32	29	2	16	15	14
17	2	5	38	0	34	58	1	31	8	1	39	41	0	30	22	2	17	14	13
18	2	5	1	0	37	58	1	29	27	1	41	41	0	28	4	2	18	13	12
19	2	4	22	0	39	57	1	27	45	1	42	40	0	25	46	2	18	12	11
20	2	3	41	0	41	57	1	26	1	1	44	39	0	23	27	2	19	11	10
21	2	2	58	0	43	57	1	24	15	1	46	39	0	21	7	2	20	10	9
22	2	2	12	0	46	56	1	22	27	1	48	38	0	18	47	2	20	9	8
23	2	1	24	0	48	56	1	20	38	1	49	37	0	16	27	2	20	7	7
24	2	0	33	0	51	56	1	18	47	1	51	36	0	14	7	2	20	6	6
25	1	59	40	0	53	55	1	16	55	1	52	36	0	11	46	2	21	5	5
26	1	58	45	0	55	55	1	15	1	1	54	35	0	9	25	2	21	4	4
27	1	57	48	0	57	54	1	13	6	1	55	34	0	7	4	2	21	3	3
28	1	56	48	1	0	54	1	11	9	1	57	33	0	4	43	2	21	2	2
29	1	55	46	1	2	54	1	9	11	1	58	32	0	2	21	2	22	1	1
30	1	54	42	1	4	53	1	7	11	2	0	31	0	0	0	2	21		0
				1	7					2	1								
NVMERI.	G.	M.	2a.	M.	2a.	3a.	G.	M.	2a.	M.	2a.	3a.	G.	M	2a.	M.	2a.	3a.	NVMERI.
	8.			M. A.			7.			A.			6.			A.			

82) M. s. die Säcularausgabe, *Prolegomena* S. XXII, *l.* 12 – 20.

Jetzt kommen acht Tafeln für die *Latitudines* der fünf Planeten. Die letzten fünf sind mit einer handschriftlichen Erläuterung unter dem Titel: *Latitudinem Veneris et Mercurii invenire* versehen. Die Einrichtung der Tafeln ist bei allen die schon hervorgehobene mit doppeltem Eingange und nach den Thierkreiszeichen angeordnet. Während für Saturn, Jupiter und Mars je eine Tafel genügt, gebraucht Venus deren zwei, Merkur deren

TABVLA LATITVDINIS SEPTEMTRIONALIS SATVRNI.

NVMERI.	0.		1.		2.		3.		4.		5.	
	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
1	2	2	2	8	2	16	2	30	2	45	2	57
2	2	2	2	8	2	16	2	31	2	45	2	57
3	2	2	2	9	2	17	2	32	2	46	2	58
4	2	3	2	9	2	17	2	32	2	46	2	58
5	2	3	2	10	2	17	2	33	2	46	2	58
6	2	3	2	10	2	18	2	34	2	47	2	59
7	2	3	2	10	2	18	2	34	2	47	2	59
8	2	3	2	10	2	19	2	34	2	48	2	59
9	2	3	2	10	2	19	2	35	2	48	2	59
10	2	4	2	10	2	20	2	35	2	49	2	59
11	2	4	2	10	2	20	2	35	2	49	2	59
12	2	4	2	11	2	21	2	36	2	50	3	0
13	2	5	2	11	2	21	2	36	2	50	3	0
14	2	5	2	11	2	22	2	37	2	51	3	0
15	2	5	2	11	2	22	2	37	2	51	3	0
16	2	5	2	11	2	23	2	38	2	52	3	0
17	2	5	2	11	2	23	2	38	2	52	3	0
18	2	6	2	12	2	24	2	39	2	53	3	1
19	2	6	2	12	2	24	2	39	2	53	3	1
20	2	6	2	13	2	25	2	40	2	53	3	1
21	2	6	2	13	2	25	2	40	2	54	3	1
22	2	6	2	13	2	26	2	41	2	54	3	1
23	2	6	2	13	2	26	2	41	2	54	3	1
24	2	7	2	14	2	27	2	42	2	55	3	2
25	2	7	2	14	2	27	2	42	2	55	3	2
26	2	7	2	14	2	28	2	43	2	55	3	2
27	2	7	2	15	2	28	2	43	2	56	3	2
28	2	7	2	15	2	29	2	44	2	56	3	2
29	2	7	2	15	2	29	2	44	2	56	3	2
30	2	8	2	16	2	30	2	45	2	57	3	3
	G.	M	G	M.	G	M	G	M.	G.	M	G.	M.
NVMERI.	11.		10.		9.		8.		7.		6.	

TABVLA LATITVDINIS MERIDIONALIS SATVRNI.

0.		1.		2.		3.		4.		5.		NVMERI.
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	
2	1	2	6	2	15	2	30	2	45	2	58	29
2	1	2	6	2	16	2	31	2	46	2	58	28
2	1	2	6	2	16	2	31	2	46	2	59	27
2	2	2	6	2	17	2	32	2	47	2	59	26
2	2	2	6	2	17	2	32	2	47	2	59	25
2	2	2	7	2	18	2	33	2	48	3	0	24
2	2	2	7	2	18	2	33	2	48	3	1	23
2	2	2	7	2	19	2	34	2	49	3	1	22
2	2	2	7	2	19	2	34	2	49	3	1	21
2	2	2	7	2	20	2	35	2	50	3	1	20
2	2	2	7	2	20	2	35	2	50	3	1	19
2	3	2	8	2	21	2	36	2	51	3	2	18
2	3	2	8	2	21	2	36	2	51	3	2	17
2	3	2	8	2	22	2	37	2	52	3	2	16
2	3	2	9	2	22	2	37	2	52	3	2	15
2	3	2	9	2	23	2	38	2	53	3	2	14
2	3	2	9	2	23	2	38	2	53	3	2	13
2	4	2	10	2	24	2	39	2	54	3	3	12
2	4	2	10	2	24	2	39	2	54	3	3	11
2	4	2	11	2	25	2	40	2	54	3	3	10
2	4	2	11	2	25	2	40	2	55	3	3	9
2	4	2	12	2	26	2	41	2	55	3	3	8
2	4	2	12	2	26	2	41	2	55	3	3	7
2	5	2	13	2	27	2	42	2	56	3	4	6
2	5	2	13	2	27	2	42	2	56	3	4	5
2	5	2	13	2	28	2	43	2	56	3	4	4
2	5	2	14	2	28	2	43	2	57	3	4	3
2	5	2	14	2	29	2	44	2	57	3	4	2
2	5	2	15	2	29	2	44	2	57	3	4	1
2	6	2	15	2	30	2	45	2	58	3	5	0
G.	M	G.	M	G	M	G	M.	G.	M.	G.	M.	
11.		10.		9.		8.		7.		6.		NVMERI.

drei, davon eine mit einer Venustafel vereinigt; dann ist noch eine Tafel, die für sämmtliche fünf Planeten gemeinsam ist. Ich bringe die Tafeln zunächst mit der obenerwähnten Erläuterung zum Abdruck, um dann dieselben mit den ähnlich überschriebenen Tafeln der *Revolutiones* zu vergleichen. Diese Vergleichung wird uns zu bemerkenswerthen Resultaten führen.

	TABVLA LATITVDINIS SEPTEMTRIONALIS IOVIS.												TABVLA LATITVDINIS MERIDIONALIS IOVIS.												
NVMERI.	0.		1.		2.		3.		4.		5.		0.		1.		2.		3.		4.		5.		NVMERI.
	G.	M.	G.	M.	G	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M	G.	M.	G.	M	G	M.	G.	M.	G.	M.	
1	1	6	1	10	1	16	1	30	1	45	1	58	1	4	1	8	1	16	1	30	1	45	2	0	29
2	1	6	1	10	1	16	1	31	1	46	1	59	1	4	1	8	1	16	1	31	1	46	2	1	28
3	1	6	1	10	1	17	1	31	1	46	1	59	1	4	1	8	1	17	1	31	1	46	2	1	27
4	1	7	1	10	1	17	1	32	1	47	1	59	1	5	1	9	1	17	1	32	1	47	2	2	26
5	1	7	1	11	1	17	1	32	1	47	2	0	1	5	1	9	1	17	1	32	1	47	2	2	25
6	1	7	1	11	1	18	1	33	1	48	2	0	1	5	1	9	1	18	1	33	1	48	2	3	24
7	1	7	1	11	1	18	1	33	1	48	2	0	1	5	1	9	1	18	1	33	1	48	2	3	23
8	1	7	1	11	1	19	1	34	1	48	2	1	1	5	1	9	1	19	1	34	1	48	2	4	22
9	1	7	1	11	1	19	1	35	1	49	2	1	1	5	1	9	1	19	1	34	1	49	2	4	21
10	1	8	1	11	1	20	1	35	1	49	2	1	1	6	1	10	1	20	1	35	1	49	2	4	20
11	1	8	1	12	1	20	1	36	1	49	2	2	1	6	1	10	1	20	1	35	1	49	2	5	19
12	1	8	1	12	1	21	1	36	1	50	2	2	1	6	1	10	1	21	1	36	1	50	2	5	18
13	1	8	1	12	1	21	1	37	1	50	2	2	1	6	1	10	1	21	1	36	1	50	2	5	17
14	1	8	1	12	1	22	1	37	1	50	2	2	1	6	1	10	1	22	1	37	1	51	2	5	16
15	1	8	1	12	1	22	1	38	1	51	2	2	1	6	1	10	1	22	1	37	1	51	2	5	15
16	1	8	1	12	1	23	1	38	1	51	2	3	1	6	1	11	1	23	1	38	1	52	2	6	14
17	1	8	1	13	1	23	1	39	1	51	2	3	1	6	1	11	1	23	1	38	1	53	2	6	13
18	1	8	1	13	1	24	1	39	1	52	2	3	1	7	1	11	1	24	1	39	1	54	2	6	12
19	1	8	1	13	1	24	1	40	1	52	2	3	1	7	1	12	1	24	1	39	1	54	2	6	11
20	1	9	1	13	1	25	1	40	1	53	2	3	1	7	1	12	1	25	1	40	1	55	2	6	10
21	1	9	1	13	1	25	1	41	1	53	2	3	1	7	1	12	1	25	1	40	1	55	2	7	9
22	1	9	1	13	1	26	1	41	1	54	2	4	1	7	1	13	1	26	1	41	1	56	2	7	8
23	1	9	1	14	1	26	1	42	1	54	2	4	1	7	1	13	1	26	1	41	1	56	2	7	7
24	1	9	1	14	1	27	1	42	1	55	2	4	1	7	1	13	1	27	1	42	1	57	2	7	6
25	1	9	1	14	1	27	1	43	1	55	2	4	1	7	1	14	1	27	1	42	1	57	2	7	5
26	1	9	1	14	1	28	1	43	1	55	2	4	1	7	1	14	1	28	1	43	1	58	2	7	4
27	1	10	1	15	1	28	1	44	1	56	2	4	1	8	1	15	1	28	1	43	1	58	2	7	3
28	1	10	1	15	1	29	1	44	1	57	2	5	1	8	1	15	1	29	1	44	1	59	2	8	2
29	1	10	1	15	1	29	1	45	1	57	2	5	1	8	1	15	1	29	1	44	1	59	2	8	1
30	1	10	1	16	1	30	1	45	1	58	2	5	1	8	1	16	1	30	1	45	2	0	2	8	0
	G	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M	G.	M.	G	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M	
NVMERI.	11.		10.		9.		8.		7.		6.		11.		10.		9.		8.		7.		6.		NVMERI.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSI

TABVLA LATITVDINIS SEPTEMTRIONALIS MARTIS.

NVMERI.	0.		1.		2.		3.		4.		5.	
	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
1	0	5	0	14	0	28	0	53	1	34	2	58
2	0	5	0	15	0	28	0	54	1	36	3	2
3	0	6	0	15	0	29	0	55	1	38	3	5
4	0	6	0	15	0	29	0	56	1	40	3	9
5	0	7	0	16	0	30	0	57	1	42	3	12
6	0	7	0	16	0	31	0	59	1	44	3	16
7	0	7	0	16	0	32	1	0	1	47	3	19
8	0	8	0	16	0	32	1	1	1	49	3	23
9	0	8	0	17	0	33	1	2	1	51	3	26
10	0	9	0	17	0	33	1	3	1	54	3	30
11	0	9	0	17	0	35	1	4	1	56	3	34
12	0	9	0	18	0	35	1	6	1	58	3	38
13	0	10	0	18	0	36	1	7	2	1	3	42
14	0	10	0	18	0	36	1	8	2	3	3	45
15	0	10	0	19	0	37	1	10	2	5	3	48
16	0	11	0	19	0	38	1	11	2	7	3	53
17	0	11	0	20	0	39	1	12	2	10	3	56
18	0	11	0	20	0	40	1	14	2	13	4	0
19	0	11	0	21	0	41	1	15	2	16	4	3
20	0	12	0	21	0	41	1	17	2	19	4	6
21	0	12	0	22	0	42	1	18	2	23	4	8
22	0	12	0	22	0	43	1	20	2	25	4	10
23	0	12	0	23	0	44	1	21	2	28	4	12
24	0	13	0	23	0	45	1	23	2	31	4	14
25	0	13	0	24	0	46	1	24	2	34	4	16
26	0	13	0	24	0	47	1	26	2	37	4	17
27	0	13	0	25	0	48	1	28	2	40	4	18
28	0	14	0	26	0	49	1	30	2	43	4	19
29	0	14	0	26	0	50	1	32	2	47	4	20
30	0	14	0	27	0	51	1	34	2	51	4	21
	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
NVMERI.	11.		10.		9.		8.		7.		6.	

TABVLA LATITVDINIS MERIDIONALIS MARTIS.

0.		1.		2.		3.		4.		5.		NVMERI.
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	
0	2	0	8	0	22	0	50	1	39	3	29	29
0	2	0	8	0	23	0	51	1	41	3	35	28
0	2	0	8	0	23	0	52	1	44	3	41	27
0	3	0	9	0	24	0	53	1	46	3	48	26
0	3	0	9	0	24	0	55	1	48	3	55	25
0	3	0	9	0	25	0	56	1	51	4	2	24
0	4	0	9	0	26	0	57	1	54	4	9	23
0	4	0	10	0	26	0	59	1	57	4	16	22
0	4	0	10	0	27	1	0	2	0	4	23	21
0	4	0	10	0	28	1	2	2	3	4	31	20
0	4	0	11	0	28	1	3	2	6	4	39	19
0	4	0	11	0	29	1	4	2	10	4	47	18
0	4	0	12	0	30	1	6	2	13	4	55	17
0	5	0	12	0	31	1	7	2	17	5	3	16
0	5	0	13	0	32	1	9	2	21	5	11	15
0	5	0	13	0	33	1	10	2	25	5	19	14
0	5	0	14	0	34	1	12	2	29	5	27	13
0	5	0	14	0	35	1	13	2	33	5	35	12
0	6	0	15	0	36	1	15	2	37	5	43	11
0	6	0	15	0	37	1	16	2	41	5	51	10
0	6	0	16	0	38	1	18	2	45	6	0	9
0	6	0	17	0	39	1	20	2	49	6	9	8
0	7	0	17	0	40	1	22	2	53	6	18	7
0	7	0	18	0	41	1	24	2	56	6	27	6
0	7	0	18	0	42	1	26	3	1	6	36	5
0	7	0	19	0	43	1	28	3	6	6	42	4
0	8	0	20	0	44	1	30	3	12	6	47	3
0	8	0	20	0	45	1	32	3	18	6	52	2
0	8	0	21	0	46	1	34	3	23	6	57	1
0	8	0	22	0	47	1	37	3	29	7	2	0
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	
11.		10.		9.		8.		7.		6.		NVMERI.

TABELLA LATITVDINIS VENERIS.

	PRIMA PARS TABELLAE.												ALTERA PARS TABELLAE.												
NVMERI.	0.				1.				2.				3.				4.				5.				NVMERI.
	DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		
	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	
1	1	3	0	1	0	57	0	41	0	35	1	21	0	1	1	58	1	2	2	25	3	10	2	21	29
2	1	3	0	2	0	56	0	42	0	34	1	23	0	2	1	59	1	5	2	26	3	17	2	20	28
3	1	3	0	3	0	56	0	44	0	33	1	24	0	4	2	0	1	7	2	26	3	24	2	18	27
4	1	2	0	5	0	56	0	45	0	32	1	25	0	6	2	1	1	9	2	27	3	31	2	16	26
5	1	2	0	6	0	55	0	47	0	30	1	27	0	8	2	2	1	11	2	27	3	38	2	14	25
6	1	2	0	8	0	55	0	48	0	29	1	28	0	10	2	3	1	13	2	28	3	44	2	12	24
7	1	2	0	9	0	54	0	49	0	28	1	29	0	11	2	4	1	16	2	28	3	51	2	10	23
8	1	2	0	10	0	54	0	51	0	27	1	31	0	13	2	5	1	19	2	29	3	58	2	7	22
9	1	2	0	11	0	53	0	52	0	26	1	32	0	15	2	6	1	22	2	29	4	5	2	4	21
10	1	1	0	12	0	52	0	53	0	25	1	33	0	16	2	7	1	25	2	29	4	12	2	1	20
11	1	1	0	14	0	52	0	55	0	24	1	34	0	18	2	8	1	29	2	30	4	19	1	58	19
12	1	1	0	15	0	51	0	56	0	23	1	35	0	20	2	9	1	33	2	30	4	26	1	55	18
13	1	1	0	16	0	51	0	57	0	22	1	37	0	22	2	10	1	37	2	30	4	33	1	51	17
14	1	1	0	20	0	50	0	58	0	21	1	38	0	24	2	11	1	41	2	30	4	41	1	47	16
15	1	0	0	28	0	49	1	0	0	20	1	39	0	26	2	12	1	45	2	30	4	49	1	42	15
16	1	0	0	20	0	48	1	1	0	19	1	40	0	28	2	13	1	49	2	30	4	57	1	37	14
17	1	0	0	21	0	47	1	3	0	18	1	41	0	30	2	14	1	54	2	30	5	5	1	32	13
18	1	0	0	22	0	46	1	4	0	17	1	43	0	32	2	15	1	59	2	30	5	13	1	21	12
19	1	0	0	24	0	46	1	5	0	16	1	44	0	34	2	16	2	3	2	30	5	22	1	21	11
20	1	0	0	28	0	45	1	6	0	15	1	45	0	36	2	17	2	7	2	29	5	32	1	15	10
21	1	0	0	29	0	44	1	8	0	14	1	47	0	38	2	18	2	11	2	29	5	42	1	9	9
22	0	59	0	38	0	43	1	9	0	13	1	48	0	40	2	19	2	15	2	29	5	52	1	5	8
23	0	59	0	39	0	42	1	11	0	12	1	49	0	42	2	20	2	19	2	28	6	2	0	55	7
24	0	59	0	34	0	41	1	12	0	10	1	50	0	45	2	20	2	23	2	28	6	12	0	48	6
25	0	59	0	32	0	41	1	13	0	8	1	51	0	47	2	21	2	29	2	27	6	23	0	40	5
26	0	58	0	37	0	40	1	14	0	7	1	52	0	49	2	22	2	35	2	26	6	34	0	32	4
27	0	58	0	36	0	39	1	16	0	4	1	53	0	52	2	23	2	42	2	25	6	46	0	24	3
28	0	58	0	37	0	38	1	17	0	3	1	54	0	54	2	24	2	49	2	24	6	58	0	16	2
29	0	57	0	39	0	37	1	18	0	2	1	55	0	56	2	25	2	56	2	23	7	10	0	8	1
30	0	57	0	40	0	36	1	20	0	0	1	57	0	59	2	25	3	3	2	22	7	22	0	0	0
NVMERI.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	NVMERI.
	11.				10.				9.				8.				7.				6.				

TABELLA LATITVDINIS MERCVRII.

	SVPERIOR PARS CIRCVLI.												INFERIOR PARS CIRCVLI.												
	0.				1.				2.				3.				4.				5.				
NVMERI.	DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO.		DECLINATIO		REFLECTIO.		DECLINATIO.		REFLECTIO		DECLINATIO.		REFLECTIO		NVMERI.
	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M	G.	M.	G.	M.	G	M	G	M	G.	M.	G.	M.	
1	1	46	0	1	1	35	0	57	0	58	1	45	0	2	2	21	1	28	2	28	3	11	1	42	29
2	1	46	0	3	1	34	0	59	0	56	1	47	0	5	2	22	1	31	2	28	3	14	1	39	28
3	1	45	0	5	1	33	0	0	0	55	1	48	0	7	2	23	1	34	2	28	3	17	1	36	27
4	1	45	0	7	1	32	1	2	0	53	1	49	0	10	2	24	1	37	2	27	3	20	1	34	26
5	1	45	0	9	1	31	1	4	0	51	1	50	0	12	2	25	1	41	2	27	3	23	1	32	25
6	1	45	0	11	1	30	1	6	0	49	1	52	0	15	2	25	1	45	2	26	3	26	1	29	24
7	1	45	0	13	1	29	1	7	0	48	1	53	0	17	2	26	1	49	2	26	3	29	1	26	23
8	1	45	0	14	1	28	1	9	0	46	1	54	0	19	2	26	1	53	2	25	3	32	1	23	22
9	1	45	0	16	1	27	1	11	0	44	1	56	0	22	2	27	1	57	2	24	3	35	1	20	21
10	1	44	0	18	1	26	1	13	0	42	1	57	0	25	2	27	2	0	2	23	3	38	1	17	20
11	1	44	0	20	1	25	1	15	0	40	1	58	0	28	2	27	2	3	2	22	3	40	1	14	19
12	1	44	0	22	1	23	1	17	0	38	2	0	0	31	2	28	2	6	2	21	3	42	1	10	18
13	1	44	0	23	1	22	1	19	0	36	2	1	0	33	2	28	2	10	2	20	3	44	1	7	17
14	1	44	0	25	1	20	1	20	0	34	2	3	0	36	2	28	2	13	2	19	3	46	1	4	16
15	1	44	0	27	1	19	1	22	0	32	2	4	0	39	2	28	2	17	2	17	3	48	1	0	15
16	1	43	0	29	1	17	1	23	0	30	2	5	0	42	2	29	2	20	2	15	3	50	0	56	14
17	1	43	0	31	1	16	1	25	0	28	2	6	0	45	2	29	2	23	2	13	3	52	0	52	13
18	1	43	0	33	1	15	1	26	0	26	2	7	0	48	2	29	2	26	2	11	3	54	0	48	12
19	1	43	0	35	1	14	1	27	0	24	2	8	0	51	2	29	2	30	2	10	3	56	0	44	11
20	1	42	0	36	1	13	1	29	0	22	2	9	0	54	2	29	2	33	2	8	3	58	0	40	10
21	1	42	0	38	1	12	1	30	0	20	2	11	0	57	2	29	2	37	2	6	3	59	0	36	9
22	1	41	0	40	1	11	1	32	0	19	2	12	1	0	2	30	2	41	2	4	4	0	0	32	8
23	1	41	0	42	1	10	1	33	0	17	2	13	1	3	2	30	2	44	2	2	4	1	0	28	7
24	1	40	0	44	1	8	1	35	0	16	2	14	1	6	2	30	2	47	2	0	4	2	0	24	6
25	1	40	0	46	1	7	1	36	0	14	2	15	1	9	2	30	2	51	1	58	4	2	0	20	5
26	1	39	0	48	1	5	1	38	0	12	2	16	1	12	2	30	2	54	1	56	4	3	0	16	4
27	1	39	0	49	1	3	1	39	0	9	2	17	1	15	2	30	2	57	1	54	4	3	0	12	3
28	1	39	0	51	1	2	1	41	0	6	2	18	1	18	2	29	3	1	1	51	4	3	0	8	2
29	1	37	0	53	1	0	1	43	0	3	2	19	1	21	2	29	3	4	1	48	4	4	0	4	1
30	1	36	0	55	1	59	1	44	0	0	2	20	1	25	2	29	3	7	1	45	4	4	0	0	0
NVMERI.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	NVMERI.
	11.				10.				9.				8.				7.				6.				

LINEA NVMERORVM.	VENERIS						MERCVRII						MINVTA						LINEA NVMERORVM.
	DEVIATIO BOREALIS.						DEVIATIO AVSTRALIS.						AD DECLINATIONEM.						
	0. 6.		1. 7.		2. 8.		0. 6.		1. 7.		2. 8.		0. 6.		1. 7.		2. 8.		
	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	
0	10	0	8	41	5	0	45	0	39	0	22	30	0	0	30	0	52	0	30
1	9	59	8	32	4	51	44	57	38	33	21	48	1	4	30	52	52	26	29
2	9	59	8	28	4	42	44	54	38	6	21	6	2	8	31	44	52	52	28
3	9	58	8	22	4	33	44	51	37	39	20	24	3	12	32	36	53	18	27
4	9	57	8	16	4	24	44	48	37	12	19	42	4	16	33	28	53	44	26
5	9	56	8	10	4	14	44	45	36	45	19	0	5	20	34	20	54	10	25
6	9	56	8	4	4	4	44	42	36	18	18	18	6	24	35	12	54	36	24
7	9	55	7	58	3	54	44	35	35	48	17	33	7	24	36	9	55	0	23
8	9	53	7	52	3	44	44	27	35	18	16	48	8	24	36	48	55	24	22
9	9	51	7	45	3	34	44	20	34	48	16	3	9	24	37	36	55	48	21
10	9	49	7	38	3	24	44	12	34	18	15	18	10	24	38	24	56	12	20
11	9	47	7	31	3	14	44	5	33	48	14	33	11	24	39	12	56	36	19
12	9	46	7	24	3	4	43	52	33	18	13	48	12	24	40	0	57	0	18
13	9	44	7	17	2	54	43	45	32	45	13	3	13	24	40	44	57	16	17
14	9	42	7	10	2	44	43	33	32	12	12	18	14	24	41	28	57	32	16
15	9	39	7	3	2	34	43	21	31	39	11	33	15	24	42	12	57	48	15
16	9	36	6	55	2	24	43	9	31	6	10	48	16	24	42	56	58	4	14
17	9	33	6	48	2	14	42	57	30	33	10	3	17	24	43	40	58	20	13
18	9	30	6	40	2	4	42	45	30	0	9	18	18	24	44	24	58	36	12
19	9	26	6	33	1	54	42	27	29	24	8	33	19	24	45	4	58	40	11
20	9	22	6	24	1	44	42	9	28	48	7	48	20	24	45	44	58	56	10
21	9	18	6	16	1	34	41	51	28	12	7	3	21	24	46	24	59	6	9
22	9	14	6	8	1	24	41	33	27	36	6	18	22	24	47	4	59	16	8
23	9	10	6	0	1	14	41	15	27	0	5	33	23	24	47	44	59	26	7
24	9	6	5	52	1	4	40	57	26	24	4	48	24	24	48	23	59	36	6
25	9	2	5	48	0	54	40	38	25	25	4	0	25	20	49	0	59	40	5
26	8	58	5	36	0	43	40	18	25	6	3	12	26	16	49	36	59	44	4
27	8	53	5	27	0	32	39	59	24	27	2	24	27	12	50	12	59	46	3
28	8	49	5	18	0	22	39	39	23	48	1	36	28	8	50	48	59	52	2
29	8	45	5	9	0	11	39	20	22	9	0	48	29	4	51	24	59	56	1
30	8	41	5	0	0	0	39	0	22	30	0	0	30	0	52	0	60	0	0
NVMERI.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	NVMERI.
	5. 11.		4. 10.		3. 9.		5. 11.		4. 10.		3. 9.		11. 5.		10. 4.		9. 3.		

TABELLA MINVTORVM PROPORTIONABILIVM QVINQVE PLANETARVM.

LINEA NVMERORVM.	Superior pars septemtrionalis.						SEPT. MER.
	0. 6.		1. 7.		2. 8.		
	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	
1	59	56	51	24	29	4	29
2	59	52	50	48	28	8	28
3	59	48	50	12	27	12	27
4	59	45	49	36	26	16	26
5	59	40	49	0	25	20	25
6	59	36	48	24	24	24	24
7	59	26	47	44	23	24	23
8	59	16	47	4	22	24	22
9	59	6	46	24	21	24	21
10	58	56	45	44	20	24	20
11	58	46	45	4	19	24	19
12	58	36	44	24	18	24	18
13	58	20	43	40	17	24	17
14	58	4	42	46	16	24	16
15	57	48	42	12	15	24	15
16	57	32	41	28	14	24	14
17	57	16	40	44	13	24	13
18	57	0	40	0	12	24	12
19	56	36	39	12	11	24	11
20	56	12	38	24	10	24	10
21	55	48	37	36	9	24	9
22	55	24	36	48	8	24	8
23	55	0	36	0	7	24	7
24	54	36	35	12	6	24	6
25	54	10	34	20	5	20	5
26	53	44	33	28	4	16	4
27	53	18	32	36	3	12	3
28	52	52	31	44	2	8	2
29	52	26	30	42	1	4	1
30	52	0	30	0	0	0	0
	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	LINEA NVMERORVM.
MER. SEPT.	5. 11.		4. 10.		3. 9.		
	Inferior pars meridionalis.						

TABVLA MINVTORVM PROPORTIONALIVM AD REFLECTIONEM MERCVRII.

NVMERI.	PRIMA PARS.						ALTERA PARS.						NVMERI.
	0.		1.		2.		3.		4.		5.		
	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	
0	54	0	46	48	27	0	0	0	32	0	57	12	30
1	53	56	46	16	26	8	1	1	33	58	57	41	29
2	53	53	45	44	25	18	2	2	34	55	58	10	28
3	53	49	45	12	24	28	3	3	35	53	58	39	27
4	53	45	44	39	23	38	4	4	36	51	59	7	26
5	53	41	44	1	22	48	5	5	37	46	59	36	25
6	53	38	43	24	21	56	6	7	38	43	60	4	24
7	53	29	42	58	21	4	7	9	39	33	60	31	23
8	53	20	42	22	20	10	8	14	40	29	60	58	22
9	53	11	41	46	19	16	9	20	41	22	61	24	21
10	53	2	41	10	18	23	10	26	42	15	61	50	20
11	52	52	40	34	17	28	11	33	43	8	62	16	19
12	52	44	39	58	16	34	12	38	44	0	62	42	18
13	52	29	39	18	15	40	13	44	44	49	63	0	17
14	52	14	38	39	14	46	14	50	45	38	63	18	16
15	52	0	37	59	13	52	15	56	46	26	63	36	15
16	51	46	37	20	12	54	17	2	47	14	63	53	14
17	51	32	36	44	12	4	18	8	48	2	64	11	13
18	51	18	36	6	11	10	19	14	48	50	64	28	12
19	50	52	35	16	10	16	20	20	49	34	64	39	11
20	50	36	34	34	9	22	21	26	50	18	64	50	10
21	50	14	33	47	8	28	22	33	51	2	65	1	9
22	49	54	33	7	7	34	23	38	51	46	65	12	8
23	49	30	32	24	6	40	24	44	52	13	65	23	7
24	49	8	31	41	5	46	25	50	53	14	65	34	6
25	48	45	30	52	4	49	26	52	53	54	65	39	5
26	48	22	30	7	3	52	27	54	54	33	65	44	4
27	47	49	29	20	2	54	28	55	55	13	65	48	3
28	47	34	28	33	1	56	29	57	55	52	65	52	2
29	47	12	27	46	0	58	30	58	56	33	65	56	1
30	46	48	27	0	0	0	32	0	57	12	66	0	0
NVMERI.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	M.	2a.	NVMERI.
	11.		10.		9.		8.		7.		6.		

Latitudinem Veneris et Mercurii invenire.

Cum argumento aequato intra tabulam declinacionis et reflectionis, cuius latitudinem quaere ac eius in angulo communi declinationem et reflectionem, et seorsim scribe. Demum cum centro vero minuta proportionalia ad declinationem accipe, et ex tabella generali minutorum proportionalium cum eodem centro recipe minuta ad reflectionem: hoc dumtaxat in Venere. In Mercurio autem ades aliam tabulam ad hoc deputatam. Vnumquotque (sic!) sub suo genere scribe singulis aequatis per partem proportionalem. Vbi opus fuerit cum centro eius vero accipias deviacionem, quae quidem in Venere septemptrionalis est, in Mercurio vero meridionalis. Hiis (sic!) itaque notatis multiplica minuta declinacionis per declinacionem eius: quod proveniet erit prima latitudo, quae proveniet ex declinatione epicicli, quam serva. Si igitur declinacio fuerit reperta in prima parte tabulae, aut si argumentum aequatum fuerit in superiori parte circuli, centrum quoque minus 6 signis extiterit, aut si argumentum in inferiori parte circuli et centrum plus 6 signis habuerit, erit haec latitudo Veneris septemtrionalis, Mercurii autem meridionalis. Si vero argumentum fuerit in inferiori parte circuli centro minus 6 signis exeunte, aut cum argumentum in superiori parte epicicli et centrum plus 6 signis fuerit, erit haec Veneris meridionalis, Mercurii septemtrionalis latitudo; sic partem eius cognosces. Duc similiter minuta reflectionis in reflectionem, et proveniet reflectio aequata, quae, si argumentum minus 6 signis fuerit, centrum quoque in superiori medietate circuli, vel si argumentum plus 6 signis fuerit et centrum in inferiori medietate, erit haec Veneris septemtrionalis, Mercurii meridionalis. Si autem argumentum minus 6 signis et centrum in inferiori porcione circuli, aut si argumentum plus semicirculo ac centrum in superiori parte circuli fuerit, erit haec Veneris meridionalis et Mercurii septemtrionalis latitudo. Has demum tres latitudines simul collige, si eiusdem partis fuerint, aut minorem de maiori deme collectis prius latitudinibus, quae eiusdem erant denominationis, et proveniet vel relinquetur latitudo vera quaesiti illius denominationis, a quo fuit subtractio.

Der dem obigen entsprechende Abschnitt der *Revolutiones* findet sich im letzten Capitel des letzten Buches als Ende des ganzen Werkes. Zur bessern Vergleichung und Erklärung sowohl der Tafeln als des Capitels über die *Latitudo* lasse ich zunächst diesen Passus hier folgen nach der Lesart der Säcularausgabe.[83])

De numeratione latitudinem quinque errantium. Cap. VIIII.

Modus autem supputandarum latitudinum quinque stellarum erraticarum per has tabulas est. .... Sed in Venere et Mercurio assumendae sunt primum per anomaliam commutationis discretam tres latitudines declinationis, obliquationis et deviationis occurrentes, quae seorsum signentur, nisi quod in Mercurio reiiciatur decima pars obliquationis, si anomalia eccentri et eius numerus inveniatur in supe-

---

83) *Ed. Thor.* S. 442, *l.* 1—3, 17—31, S. 443.

riori parte tabulae, vel addatur tantumdem, si in inferiori, et reliquum vel aggregatum ex eis servetur. Earum vero denominationes, an boreae austrinaeve fuerint, sunt discernendae, quoniam, si anomalia commutationis discretae fuerit in apogaeo semicirculo, hoc est minor XC vel plus CCLXX, eccentri quoque anomalia minor semicirculo, aut rursus, si anomalia commutationis fuerit in circumferentia perigaea, nempe plus XC ac minus CCLXX, et anomalia eccentri semicirculo maior, erit declinatio Veneris borea, Mercurii austrina. Si vero, anomalia commutationis in perigaea circumferentia existente, eccentri anomalia semicirculo minor fuerit, vel commutationis anomalia in apogaea parte et eccentri anomalia plus semicirculo, erit vicissim declinatio Veneris austrina, Mercurii borea. In obliquatione vero, si anomalia commutationis semicirculo minor et anomalia eccentri apogaea, aut anomalia commutationis maior semicirculo, et eccentri anomalia perigaea, erit obliquatio Veneris borea, Mercurii austrina, quae etiam convertuntur. Deviationes autem semper manent Veneri boreae, Mercurii austrinae. Deinde cum anomalia eccentri discreta capiantur scrupula proportionum omnibus quinque communia, quamvis tribus superioribus ascripta, quae adsignentur obliquationi, ac ultima deviationi: post haec additis eidem anomaliae eccentri XC gradibus cum ipso aggregato iterum scrupula proportionum communia, quae occurrunt, applicanda latitudini declinationis. His omnibus in ordinem sic positis multiplicentur singulae tres latitudines expositae per sua quaeque scrupula proportionum, et exibunt ipsae pro loco et tempore omnes examinatae, ut denique summam trium latitudinum in his duobus syderibus habeamus. Si fuerint omnes unius nominis, coniungantur, quae, pro ut maiores minoresve fuerint, tertiae latitudini diversae ab invicem auferantur, et remanebit praepollens latitudo quaesita.

Die betreffenden Tabellen, mit denen eine Vergleichung der vorhergehenden möglich ist, finden sich in den *Revolutiones* von S. 438—441. Sie sind in anderer Anordnung auszüglich mit den oben abgedruckten identisch. Die drei Tafeln für Saturn, Jupiter und Mars sammt der Tafel, überschrieben *Tabella minutorum proportionabilium quinque planetarum*, sind in dem grossen Werke in eine Tafel, die sich über zwei Seiten erstreckt, zusammengezogen. Copernicus hat dies dadurch erreicht, dass er die Zahlen nicht von Grad zu Grad, sondern nur von drei Grad zu drei Grad hat abdrucken lassen, so dass er statt zwölf Colonnen nur deren vier benöthigt. Davon stehen je die ersten drei der linken Seite der handschriftlichen Tafeln und je die ersten drei der rechten Seite auf der einen Seite der *Revolutiones* neben einander mit der Ueberschrift *Saturni, Iovis, Martis latitudo borea | austrina*, die andere in ähnlicher Anordnung mit derselben Ueberschrift auf der zweiten Seite. Der Eingang der Tafel ist nicht, wie in den oben abgedruckten, auf beiden Seiten von 1—30 und 0—29, sondern Copernicus hat, wie ich schon früher andeutete, die Bezeichnung durch Grade der *Signa Zodiaci* in solche nach *Gradus Zodiaci* ersetzt und die doppelten Eingänge der Tafel neben einander verlegt. Die *Tabella minutorum proportiona-*

bilium bilden in ähnlicher Anordnung den Schluss der Tafel der *Revolutiones.* In dieser letzten Tafel wird die aus der Originalhandschrift der *Revolutiones* aufgenommene Lesart der Zeile 11 (S. 438): 55|48 für 56|48, wie die Ausgaben bieten, bestätigt; dagegen enthält die handschriftliche Tafel die Zahlen der Zeilen 28—31 in der Weise, wie die Ausgaben sie drucken, nicht wie die Säcularausgabe nach dem Manuscripte geändert hat. Die Proportionaltheile auf S. 439 müssen genau dieselben sein, wie auf S. 438, aber in umgekehrter Ordnung, daher muss es in Zeile 7 statt 9|9 heissen 9|24 und für 47|24 in Zeile 21: 46|24. Bei den Tafeln der Planeten selbst wird man mehrfach sehen, dass der geringeren Ausdehnung der Tafeln in den *Revolutiones* halber Copernicus die Minutenzahl um eins erhöht hat, jedenfalls um grössere Genauigkeit der Rechnung zu erzielen. In Zeile 26, S. 438, wird die Lesart 2|19 statt 2|20 bestätigt. Die Marstafel weicht gegen Ende der *latitudo septemtrionalis* und in der ganzen *latitudo meridionalis* überschriebenen Spalte ganz bedeutend von den Werthen der *Revolutiones* ab, so dass Uebereinstimmung der Tafelwerthe in den Minuten zu den Seltenheiten gehört.

Die jetzt noch übrigen Tafeln finden wir ebenso auf den folgenden beiden Seiten der *Revolutiones* zu einer Tafel vereinigt, mit Ausnahme der letzten Tafel mit der Ueberschrift *Minuta proportionalia ad reflectionem Mercurii.* Diese ist in den gedruckten Tafeln gar nicht vorhanden. Wir werden später sehen, wie sich Copernicus in seinem grossen Werke hilft, um ohne dieselbe auszureichen. Die mit *Declinatio* und *Deviatio* überschriebenen Spalten der *Revolutiones* entsprechen natürlich den ebenso überschriebenen Tafeln der Upsalenser Handschrift; was letztere aber *Reflectio* nennt, heisst in der gedruckten Tafel *Obliquatio.* Während die *Deviatio* im Drucke wächst, nimmt sie in der Handschrift ab, sie ist in letzterer aber auch bis auf Secunden genau berechnet, während die *Revolutiones* sich mit Minuten begnügen. Dieser Theil der beiderseitigen Tafeln ist also völlig von einander verschieden, die mit *Declinatio* und *Reflectio* überschriebenen Spalten zeigen neben vielfachen Uebereinstimmungen ebenso bedeutende Verschiedenheiten. Die *Scrupula proportionem deviationis* überschriebene Spalte der Drucke stimmt, wie es wohl auch natürlich ist, nicht mit der handschriftlichen Tafel *Minuta ad declinationem* überein. Wie schon gesagt, ist die letzte Tafel für die *Reflectio* des Mercur in den Drucken überhaupt nicht vorhanden. Der Grund dazu ist leicht zu sehen; er liegt in den Worten[84]): „*nisi quod in Mercurio reiiciatur decima pars obliquationis, si anomalia eccentri et eius numerus inveniatur in superiori parte tabulae, vel addatur tantumdem, si in inferiori, et reliquum vel aggregatum servetur*“, welche offenbar den Passus des Manuscriptes ersetzen sollen: „*In Mercurio autem ades aliam tabulam*

84) *Ed. Thor.* S. 442, *l.* 20—23.

ad hoc deputatam." Dass das Capitel der Handschrift und das Capitel der *Revolutiones* identische Rechnungen vornehmen lassen, ist unmittelbar einleuchtend. Als gleichbedeutend ausser *reflectio* und *obliquatio* erhalten wir aus der Vergleichung beider Texte noch: *argumentum aequatum* gleich *anomalia commutationis discreta*, *centrum* gleich *anomalia eccentri.* Die *Minuta proportionalia ad Declinationem* ersetzt der Text der *Revolutiones* noch durch die Worte[85]): *post haec additis anomaliae eccentri XC gradibus cum ipso aggregato iterum* [*capiantur*] *scrupula proportionum communia, quae occurrunt, applicanda latitudini declinationis.* Ueberlegt man Alles genau, so kommt man wohl zu dem Schlusse, dass die Form, in welcher die Tafeln in den *Revolutiones* vorliegen, die jüngere, nach längerer Behandlung des Gegenstandes vereinfachte Form derselben ist. Denselben Eindruck macht auch die jeder Art der Tafeln beigegebene Gebrauchsanweisung. Die Form des grossen Werkes ist abgerundet und glatt, sie ist nicht kürzer, aber übersichtlicher als die des Manuscriptes, sie ist im prager Manuscript ohne Streichung geschrieben, wie aus einem Gusse. Wir dürfen also wohl mit Recht behaupten, dass die Tafeln der upsalenser Handschrift eine ältere, vielleicht die ursprüngliche Form der gedruckten Tafeln darstellen, welche zum Zwecke des grossen Werkes revidiert, vereinfacht und in eine andere, übersichtlichere Ordnung gebracht sind. Dabei wurden einige Tafeln als überflüssig gestrichen, z. B. die *ad reflectionem Mercurii* und *Minuta ad declinationem*, dagegen die *Scrupula proportionum deviationis* hinzugefügt.

Fragen wir weiter nach der Zeit der Abfassung, so muss diese natürlich vor Abschluss der *Revolutiones* liegen. Dass letztere vor 1532 vollendet waren (mit Ausnahme der Trigonometrie), haben wir vorhin schon aus der Beobachtung des Venusapogäums von 1532 geschlossen, die jedenfalls in dem grossen Werke erwähnt wäre, wenn sie vor Beendigung desselben fiele. Darnach muss aber schon das fünfte Buch vor 1530 fallen — die letzte erwähnte Beobachtung ist von 1529 —; die Berechnung der obigen Tafeln hat aber jedenfalls eine bedeutende Zeit in Anspruch genommen, kann aber auch nicht gemacht sein, ehe Copernicus nicht die im sechsten Buche dargelegten Theorien entwickelt hatte; sie stammen daher wohl kaum aus dem Anfange des Werkes, also aus 1511—1520, sondern wahrscheinlich aus den zwanziger Jahren des 16. Jahrhunderts, aus denen wir ja oben noch andere Beobachtungen in dem upsalenser Codex verzeichnet fanden.

Ich will hier noch auf eine wenig erwähnte Notiz der *Narratio prima* aufmerksam machen, welche ebenfalls ein Streiflicht auf den Fleiss und die Arbeitsmethode des Copernicus wirft. Sie lautet[86]):

85) *Ed. Thor.* S. 443, *l.* 10—12.

86) *Ed. Thor.* S. 476, *l.* 15—477, *l.* 6.

Cum autem apud te anno superiori essem atque in emendatione motuum Regiomontani nostri, Peurbachii, praeceptoris eius, tuos et aliorum doctorum virorum labores viderem, intelligere primum incipiebam, quale opus quantusque labor esset futurus, hanc reginam mathematum, astronomiam, ut digna erat, in regiam suam reducere formamque imperii ipsius restituere. Verum cum deo ita volente spectator ac testis talium laborum, quos alacri sane animo et sustinet et magna ex parte susperavit iam, D. Doctori, praeceptori meo, sim factus, me nec umbram quidem tantae molis laborum somniasse video. Est autem tanta haec laborum moles, ut non cuiusvis sit herois eandem ferre posse et superare denique. Quibus de causis ego quidem veteres memoriae prodidisse erediderim Herculem, Iove summo prognatum, coelum, postquam humeris suis amplius diffideret, Atlanti iterum imposuisse, qui aetate longa assuefactus magno animo infractisque viribus, ut semel coeperat, hoc unus usque perferret. Ad haec divinus Plato, sapientiae, ut inquit Plinius, antistets, haud obscure in Epinomide pronunciat astronomiam deo praeeunte inventam esse. Hanc Platonis sententiam alii aliter fortasse interpretantur, ego vero, cum videam D. Doctorem, praeceptorem meum, observationes omnium aetatum cum suis ordine ceu in indices collectas semper in conspectu habere; deinde cum aliquid vel constituendum vel in artem et praecepta conferendum, a primis illis observationibus ad suas usque progredi, et qua inter se ratione omnia consentiant, perpendere; porro, quae inde bona consequentia Vrania duce collegit, ad Ptolemaei et veterum hypotheses revocare, et postquam easdem summa cura perponderans urgente astronomica ἀνάγκῃ deferendas deprehendit, neque quidem sine afflatu divino et numine divum novas hypotheses assumere, et mathematica adhibita, quidnam ex talibus bona consequentia duci possit, geometrice constituit; atque veterum denique et suas observationes ad assumptas hypotheses accommodare, et sic post istos labores omnes exantlatos leges astronomiae demum conscribere — hunc in modum Platonem intelligendum puto, mathematicum siderum motus perscrutantem rectissime assimulari caeco, cui tantummodo baculo suo duce magnum, infinitum, lubricum, infinitisque deviis involutum iter sit conficiendum. Wir sehen daraus, dass Copernicus sämmtliche ihm bekannte Beobachtungen berechnet hatte, ebenso die von ihm selbst angestellten; dass er dieselben gleichsam zu einem Index zusammengestellt hatte, um bei jeder ihm aufstossenden Frage alle einschlagenden Beobachtungen vergleichen zu können. Wer möchte da nicht mit uns wünschen, dass diese copernicanische Schatzkammer wieder aufgefunden werden möge? Wenn sie noch vorhanden ist, so dürfte sie in Schweden zu suchen sein. Ich halte es für unwahrscheinlich, dass in derselben sich des Copernicus Name finden würde; wenn diesen nicht Andere in die Handschrift der *Revolutiones* geschrieben hätten, wäre er darin auch nicht zu finden.

Ich theile hier zum Schlusse endlich noch eine handschriftliche Tafel mit, welche Copernicus auf die freie Seite des Blattes *d* des Regiomontan geschrieben hat, und welche die Sehnentafel für ganze Grade in Sexagesimaltheilen des Radius ist. Sie hat bei ihm keine Ueberschrift; nur das Wort Gr. über der ersten Spalte ist von Copernicus geschrieben.

Gr.	Scr. 1^{a}.	Scr. 2^{a}.	Scr. 3^{a}.	Gr.	Scr. 1^{a}.	Scr. 2^{a}.	Scr. 3^{a}.	Gr.	Scr. 1^{a}.	Scr. 2^{a}.	Scr. 3^{a}.
1	1	2	50	31	30	54	8	61	52	28	38
2	2	5	50	32	31	47	43	62	52	58	37
3	3	8	37	33	32	40	42	63	53	27	37
4	4	11	14	34	33	33	5	64	53	55	40
5	5	14	7	35	34	24	52	65	54	22	42
6	6	16	46	36	35	16	2	66	54	48	56
7	7	18	20	37	36	6	32	67	55	13	49
8	8	21	44	38	36	56	23	68	55	37	52
9	9	23	1	39	37	45	33	69	56	0	53
10	10	24	10	40	38	34	2	70	56	22	53
11	11	26	8	41	39	21	49	71	56	43	52
12	12	28	29	42	40	8	51	72	57	3	48
13	13	29	49	43	40	55	12	73	57	22	41
14	14	30	55	44	41	40	46	74	57	40	31
15	15	31	44	45	42	34	35	75	57	57	20
16	16	32	18	46	43	9	37	76	58	13	4
17	17	32	32	47	43	52	52	77	58	27	44
18	18	32	28	48	44	35	19	78	58	41	20
19	19	32	2	49	45	16	37	79	58	53	51
20	20	31	16	50	45	57	46	80	59	5	18
21	21	30	7	51	46	37	43	81	59	15	40
22	22	28	35	52	47	16	50	82	59	24	58
23	23	26	38	53	47	55	5	83	59	33	10
24	24	24	15	54	48	32	28	84	59	40	16
25	25	21	25	55	49	8	57	85	59	46	18
26	26	18	8	56	49	44	31	86	59	51	14
27	27	14	22	57	50	19	13	87	59	55	4
28	28	10	6	58	50	52	58	88	59	57	49
29	29	5	19	59	51	25	48	89	59	59	37
30	30	0	0	60	51	57	42	90	60	0	0
Gr.	Scr. 1^{a}.	Scr. 2^{a}.	Scr. 3^{a}.	Gr.	Scr. 1^{a}.	Scr. 2^{a}.	Scr. 3^{a}.	Gr.	Scr. 1^{a}.	Scr. 2^{a}.	Scr. 3^{a}.

Ob die Tafel mit der des Ptolemäus oder der peurbach'schen übereinstimmt, kann ich nicht entscheiden, da mir die betreffenden Werke nicht zur Hand sind. Es ist noch eine Tafel vorhanden, jedoch ohne irgendwelche Ueberschrift, noch Columnenbezeichnung; die Bedeutung derselben ist mir nicht möglich gewesen zu ergründen. Da dieselbe ausserdem lückenhaft und nicht vollendet ist, so lasse ich dieselbe hier nicht abdrucken. Copernicus scheint sie selbst verworfen zu haben.

Werfen wir noch einen Blick auf den Inhalt des vorliegenden Capitels. Wir haben darin Copernicus als geübten Rechner gefunden; er berechnet als Erster die Secanten; er zeigt uns Vorarbeiten für seine grosse Arbeit, und zwar für den Theil derselben, in welchem er bekanntlich am originalsten ist, dessen Untersuchungen für die feinsten gelten, für den aber das Manuscript der *Revolutiones* weniger Gelegenheit giebt, der Arbeitsart des Verfassers nachzugehen. Hier erhalten wir zu dem Letzteren die Gelegenheit; es dürfte deshalb der obige Beitrag als eine nicht unwichtige Bereicherung der Säcularausgabe des Copernicus anzusehen sein. Die mit den Daten veröffentlichten Beobachtungen sind zum Theil wohl schon gedruckt, es ist jedoch noch keine für das Leben des Copernicus verwerthet worden; nur Hipler hat die aus dem Jahre 1500 in seinen *Copernicanischen Regesten*[87]) erwähnt, ohne jedoch seine Quelle anzugeben.

IIII. Aus dem *Albohazen Hali filius Abenragel* von 1485.

Es ist zum ersten Male, dass astrologische Bemerkungen von Copernicus Hand herrührend gefunden sind und veröffentlicht werden. Sie finden sich in dem höchst seltenen ratdolt'schen Drucke vom Jahre 1485, betitelt: *Preclarissim⁹ liber cōplet⁹ in iudicijs astroꝝ: quē || edidit albohazen Haly filius abenragel q̃ꝫ feli || cissime incipit: ⁊ primo ꝓhemiū in ipsū librum.*"[88]) Derselbe ist mit dem Euklid von 1482 zusammengebunden, von Prowe aber bei den Forschungen in den schwedischen Archiven übersehen worden. Die erste Bemerkung findet sich auf Blatt 63^a. Dort steht auf dem oberen Rande geschrieben:

„*Ptolemaeus 3⁰ Quadripartiti capite octavo de monstruosis signis dicit, quod in talium nativitatibus luminaria pluries inveniuntur ab angulis remota et nullam cum ascensione configurationem habentia, et quod ab informiis anguli continentur. Cum hoc igitur sic inventum fuerit, convenit, si hoc in miseris nativitatibus fuerit, si similiter sciatur locus communitatis (?) vel pervencionis aīj (sic!) nativitatem. Si itaque haec loca in nativitate, sed locus ☽, locus item ascensionis et locus solis nullam latitudinem cernimus, maior pars non aspexerit gradum ☌ vel ☍ luminarium, erit forme mon-*

---

87) Hipler, *Spicilegium Copernicanum, Braunsberg* 1873. *Peter.* S. 267 Nr. 27: 7) 1500 *N. Copernicus „die nona Januarii" item „quarta Martii a.* 1500 *Bononie*".

88) Hain, *Repertorium* Nr. 8349. — 4 ungezählte Blätter, dann Blatt 1—17, 25, 19—54, 56, 56—115, 114, 117—152, also zusammen 156 Blatt. Das Impressum lautet (Blatt 152^a, Col. 1, Z. 50—58): „ℭ. *Finit feliciter liber cōpletus in iudicijs stellaꝝ | quē cōposuit albohazen Hali filius abenragel, || bene reuisus ⁊ fideli studio emendatus ꝑ dominum || Bartolomeuꝫ de Alten de Nusia germanū artiū || ⁊ medicine doctorē excellentissimū. Impressus || arte ⁊ impēsis Erhardi Ratdolt de Augusta: re- || gnāte Johanne Mocenico duce Uenetiarū An || no dominice incarnationis dn̄i. 1485. quarto no || nas iulij Uenetijs.*"

struose seu valde turpis, maxime, si in signis brutorum animantium fuerit, gibbosus."

Zu dem *Caplm.* 12 auf Blatt 68^a, Col. 2, betitelt *in sciendo fortunam substantie*, steht auf dem rechten Rande:

Ptolemaeus indicat solum per ⊕ *et gubernatoris ipsius parte quarta capitulo primo.*

Am Fussende derselben Seite liest man:

Ptolemaeus parte quarta capitulo ij⁰ de statu et prosperitate nati accipit argumentum a Luminaribus et stellis circa quae circumvenientes. Si enim Luminaria in angulis fuerint in signis masculis planetaeque circumdantes ☉ *matutinales,* ☽ *vero occidentales maximum nominat dominum et similiter de dignitate duorum orientis et medii celi.*

Auf Blatt 71^a zu dem Capitel, betitelt: *In sciendo valorem fratrum*, steht auf dem rechten Rande hinzugefügt:

Secundum Ptolemaeum. Ptolemaeus 3⁰. *quadripartiti capitulo V⁰. indicat statum fratrum ex decima ii quarta et quinta domibus et planetis in eisdem locis existentibus et secundum putum (sic!) significationibus signum; et enim medii celi signum matris est, ii vero filiorum eius.*

Masculorum datores sunt planetae masculini in suis qualitatibus mundi; largitores vero suarum sunt feminini in suis qualitatibus mundi.

Orientales iterum primos largiuntur fratres, occidentales partus recusant (?). Rursum in figura largitionis associentur signo $\overline{rc}$ *(radicis?) fratrum signi^{ti} (sic!), societati convenienti fratrum concordiam significabunt. Et si cum parte* $\overline{ituj}$ *(sic!) fortune convenerint, fratrum societatem in suis rebus significabunt; si vero fuerint in signis nullam societatem habentibus, oppositum significabunt.*

Auf dem linken Rande von Blatt 73^b zu Cap. 16 ist hinzugefügt:

Si ♃ *(sic!) et Venus orientales lucent, fuerint alinugeia (sic!) sibi propria, vel si fuerint in angulis, manifestum ex his fortunium putum (sic!) significare debemus secundum qualitatem utrique ipsorum convenientem. Ptolemaeus cap.* 4⁰. *libri* 3ⁱ *S♉am (sic!) autem eorum accipit* ⊕ *et planetis st^{bo} (sic!) putum (sic!) circumdantes item bona configuracio* ☉ *et cum* ♄ *vitam promovet patris, mala autem contradicit, et tanto fortius si in angulis vel successione fuerint. Non aliter de matre indicant* $\overline{anu}$*. ir in signka (sic!)* ☽, *vel qui* ♃, ♀, *vel qui lune laudabiliter configurabitur vitam matris elongabunt.*

Nota, quemadmodum penes infortunium patris abest ♂, *ita similiter matri abest* ♄.

Endlich findet sich auf Blatt 75^b die Bemerkung:

Idem dicit Ptolemaeus 14. *capitulo parte* 3^a *de epilentiis*,

und darunter durchstrichen:

Demoniaci naturales in quorum capitibus superabundat venenosa quaedam humiditas.

Wir sehen, dass sämmtliche hier verzeichnete Notizen aus dem *Quadripartitum* des Ptolemäus entnommen sind. Wann sie entstanden sind, lässt sich nicht feststellen. Da mir ein Exemplar des *Quadripartitum* nicht zur Disposition stand, so muss ich von einer Vergleichung der Notizen mit dem Originale, aus dem sie entnommen sind, Abstand nehmen. Dass in der Dombibliothek zu Frauenberg fünf Exemplare des Ptolemäus theils handschriftlich, theils gedruckt vorhanden waren, ergiebt sich aus dem Verzeichnisse, das Hipler[89]) abdrucken liess.

V. Aus dem Folianten *V. I*, 1. 17 der Universitätsbibliothek zu Upsala.

Der oben bezeichnete Band enthält: 1. „ɑ *Ioannis Iouiani Pontani Opera.* || ɑ *De Fortitudine: Libri duo.* || ɑ *De Principe: Liber unus.* || ɑ *Dialogus qui Charon inscribitur.* || ɑ *Dialogus qui Antonius inscribitur.* || ɑ *De Liberalitate: Liber unus.* || ɑ *De Beneficentia: Liber unus.* || ɑ *De Splendore: Liber unus.* || ɑ *De Coniuentia: Liber unus.* ɑ *De Obedientia: Liber quinque.* || ɑ *Cum gratia & Priuilegio.*" 148 Blatt, davon das letzte leer; auf Blatt 147^b, Z. 30—31, steht das Impressum: „ɑ *Impressum Venetiis per Bernardinum Vercellensem: Anno* || *Salutis . M . CCCCC . I. Die primo Kalendas Martii.*" — 2. „*QVAE HOC IN VOLVMINE TRACTANTVR.* || ɑ *Bessarionis Cardinalis Niceni, & Patriarchœ Constātinopolitani in ca* || *lumniatorē Platonis libri quatuor: opus uarium, ac doctiss. in quo prae* || *clarissima quaeqꝫ, & digna lectu: quœ a Platone scripta sunt ad homines* || *tam moribus q̈ disciplinis instruendos breuiter: claréqꝫ, & placido stilo* || *narrantur.* || ɑ *Eiusdem correctio librorum Platonis de legibus Georgio Trapezuntio* || *interprete: ubi passim uerba graeca ipsius Platonis recitantur et emenda* || *ta, & cum suis accentibus: nam in libris Romae olim inpressis desunt.* || *Deinde a Bessarione saepe argumento praemisso in latinum uertuntur.* || *Postremo Trapezuntii tralatio subiungitur: quod est perq̈ utile iisi: qui* || *graecis literis isti-tuuntur: atqꝫ ex graecis bonis, bona latina facere uolūt.* || ɑ *Eiusdem de natura & arte aduersus eundem Trapezuntiū tractatus ad-* || *modum q̈ acutus, ac doctus.* || ɑ *Index eorum omnium, quae singulis libris pertractantur.*" Dann das Buchdruckerzeichen des *Aldus.* (8 unbezeichnete Blatt, Bltt. 1—89, 89, 91—112). Auf Blatt 112, Zeile 28 der Druckvermerk: „ɑ *Venetiis in œdib. Aldi Romani, Julio mense . M. DIII.*" — 3. „*ΑΡΑΤΟΥ ΣΟΛΕΩΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ* || *ΜΕΤΑ ΣΧΟΛΙΩΝ.* || *ARATI SOLENSIS PHAENOMENA* || *CVM COMMENTARIIS.*" 60 Blatt ohne Ort und Jahr[90]). Die Bemerkungen, welche Copernicus

---

89) Hipler, *Analecta Warmiensia.* Braunsberg 1872. 8⁰. S. 59.

90) Das letzte Stück ist nur ein Ausschnitt aus dem grossen Sammelwerke des Aldus mit dem Titel: „*Iulii Firmici Astronomicorum libri octo integri, & emen* || *dati, ex Scythicis oris ad nos nuper allati.* || *Marci Manilii astronomicorum libri quinque.* || *Arati Phaenomena Germanico Caesare interprete cum com-* || *mentariis, & imaginibus.* || *Arati ejusdem phaenomenon fragmentum Marco TC interprete* || *Arati eiusdem Phaenomena Ruffo Festo*

an den Rand dieser Bücher geschrieben hat, sind eigentlich nur kurze Noten, wenn ihm eine Stelle besonders gefallen hat. Theilweise hat er dies auch nur durch ein Anstreichen am Rande gethan, z. B. mit dem Briefe des Lysis an Hipparch auf Blatt 2^b des Werkes von Bessarion, welche Uebersetzung er bei der von ihm selbst gegebenen sehr reichlich benutzt hat. Auf dem Titelblatte des Pontanus steht sein Namenszug

„*Nic Coppnik*" (*sic!*),

auf dem hintern Deckel die ägyptischen Monatsnamen:

„*ΤυΒι* || *φαμενωθ* || *φαρμδθι* || *παυνι* || *Επιφὶ* || *Μεσωρι* || *θώθ* || *φαωφὶ* || *Αθυρ* || *χοιαχ*",

die Hipler, a. a. O. S. 123, theilweise ganz falsch gelesen hat[91]). Da Copernicus lateinisch den Monat *Chöak* stets *Chiach* nennt, so dürfte man daraus vielleicht den Schluss ziehen können, dass er den Itacismus beim Lesen des Griechischen benutzte. Für sonstige etwa bemerkenswerthe Notizen des Copernicus in dem vorliegenden Bande vergleiche man Hipler, a. a. O.

Man wird vielleicht erwarten, dass jetzt hier die Auszüge aus der Handschrift folgen würden, welche als von Copernicus herrührend aus Pulkowa angemeldet wurde[92]). Eine genaue Vergleichung der mir durch Herrn Otto v. Struve gütigst überlassenen Handschrift mit den Photographien, die ich von den verschiedensten Schriftstücken des Copernicus besitze, hat nun wohl eine auf den ersten Anblick sehr bestechende Aehnlichkeit der Handschriften ergeben, im Einzelnen sind jedoch die Unterschiede so constant und bedeutend, dass die blosse paläographische Vergleichung schon deutlich die Autorschaft des Copernicus mehr als zweifelhaft macht. Da nun aber, falls die Handschrift ihm angehörte, Copernicus nach dem Jahre 1531, also nach Abschluss seines grossen Werkes, wieder Sachen hätte niederschreiben müssen, die seiner neuen Theorie geradezu ins Gesicht schlagen, Sätze, in welcher die Erde ruht, die Sonne als Planet behandelt wird u. s. w., diese

---

Avieno paraphraste. || *Arati eiusdem Phaenomena graece* || *Theonis commentaria copiosissima in Arati Phaeno-* || *mena graece.* || *Procli Diadochi Sphaera graece* || *Procli eiusdem Sphaera, Thoma Linacro Britanno interprete*", am Ende (Blatt 376^a): „*Venetiis cura, & diligentia Aldi Ro. Mense octob.* || *M. ID. Cui consessum est ab Ill. S. V. ne hos* || *quoq; libros alii uiquam impune for-* || *mis excudere liceat.*" Alles in Allem 376 Blatt. Siehe Hain, *Repertorium* Nr. 14559. Das von Copernicus besessene Stück umfasst die Blätter 309^a—368^b, genau die 60 Blatt, die ich im Texte angegeben habe. Hiernach berichtigen sich die Angaben Hipler's, *a. a. O.* S. 123.

91) Nach Hipler stehen diese Namen auf dem vordern Deckel; ich kann bestimmt behaupten, dass sie hinten sich finden.

92) Eine neue Copernicushandschrift. Nach einem Briefe des Directors Otto v. Struve. (Altpreussische Monatsschrift, 1873, S. 155—162, Königsberg Pr. 1873.)

Sätze auch nicht etwa Auszüge aus fremden Schriften sind, sondern eigene Worte des Verfassers des Manuscriptes, so muss Copernicus die pulkowaer Handschrift entschieden ganz abgesprochen werden. Wem sie sonst angehört, dürfte kaum lohnen, weiter zu erforschen; soviel ist mir aber sicher klar geworden, dass sie keinem Mitgliede des ermländer Clerus, sondern einem Cleriker gehörte, der der culmer Diöcese zugetheilt war. Sie hat nachher noch zweimal den Herrn gewechselt. Damit schliessen also die *Reliquiae Copernicanae*.

Thorn. M. Curtze.

IX. Der Legendre'sche Satz in der sphärischen Trigonometrie.

Auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Halbmesser 1 ist ein sphärisches Dreieck mit den Seiten a, b, c, welche in Theilen des Halbmessers ausgedrückt angenommen werden, und den Winkeln A^*, B^*, C^* gegeben. Bildet man aus den Seiten a, b, c ein ebenes Dreieck und bezeichnet die Winkel desselben mit A, B, C, so besteht der Legendre'sche Satz bekanntlich in der Vergleichung der Winkel A^*, B^*, C^* mit den Winkeln A, B, C für den Fall, dass das sphärische Dreieck hinreichend klein ist.

Ein Beweis dieses Satzes, welcher ein Urtheil über dessen Genauigkeit gestattet, ist folgender.

Setzt man

$$a+b+c=2s, \qquad \tfrac{1}{2}bc\sin A=\varDelta,$$

$$tg\frac{A^*}{2}=H\,tg\frac{A}{2},$$

$$\frac{H-1}{H+1}=h,$$

so ist

$$tg\frac{A^*}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}, \qquad tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

und

$$tg\frac{A^*-A}{2}=\frac{tg\frac{A^*}{2}-tg\frac{A}{2}}{1+tg\frac{A}{2}\,tg\frac{A^*}{2}}=\frac{(H-1)\sin A}{(H+1)-(H-1)\cos A}=\frac{h\sin A}{1-h\cos A}.$$

Hieraus folgt (in Theilen des Halbmessers)

$$1)\qquad \tfrac{1}{2}(A^*-A)=h\sin A+\tfrac{1}{2}h^2\sin 2A+\tfrac{1}{3}h^3\sin 3A+\ldots.$$

Setzt man ferner

$$\log H=\omega,$$

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=S_{2n},$$

$$(a+b+c)^{2n}+(-a+b+c)^{2n}-(a-b+c)^{2n}-(a+b-c)^{2n}=T_{2n},$$

so ergiebt sich

$$\omega=\tfrac{1}{2}\log\frac{s}{\sin s}+\tfrac{1}{2}\log\frac{s-a}{\sin(s-a)}-\tfrac{1}{2}\log\frac{s-b}{\sin(s-b)}-\tfrac{1}{2}\log\frac{s-c}{\sin(s-c)}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{S_2T_2}{(2\pi)^2}+\tfrac{1}{4}\frac{S_4T_4}{(2\pi)^4}+\tfrac{1}{6}\frac{S_6T_6}{(2\pi)^6}+\ldots$$

und wegen

$$S_2=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{2)}\qquad \omega=\frac{T_2}{48}\left\{1+\tfrac{1}{2}\frac{S_4}{S_2}\,\frac{T_4}{T_2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}+\tfrac{1}{3}\frac{S_6}{S_2}\,\frac{T_6}{T_2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}+\ldots\right\}.$$

Es ist aber

$$(a+b+c)^{2n}+(-a+b+c)^{2n}=2\sum_0^n{}_k\,(2n)_{2k}\,a^{2n-2k}\,(b+c)^{2k},$$

$$(a-b+c)^{2n}+(a+b-c)^{2n}=2\sum_0^n{}_k\,(2n)_{2k}\,a^{2n-2k}\,(b-c)^{2k},$$

$$T_{2n}=2\sum_1^n{}_k\,(2n)_{2k}\,a^{2n-2k}\,[(b+c)^{2k}-(b-c)^{2k}]$$
$$=8bc\sum_1^n{}_k\,(2n)_{2k}\,a^{2n-2k}\,[(b+c)^{2k-2}+(b+c)^{2k-4}(b-c)^2+\ldots],$$

also namentlich

$$T_2=8bc,$$

und, wenn a, b, c die Grenze g nicht übersteigen:

$$\frac{T_{2n}}{T_2}<\sum_1^n{}_k\,(2n)_{2k}\,g^{2n-2}\,2^{2k-2},$$
$$<\tfrac{1}{4}\,g^{2n-2}\sum_1^n(2n)_{2k}\,2^{2k},$$
$$<\tfrac{1}{8}\,3^{2n}\,g^{2n-2}.$$

Der Gleichung 2) zufolge kann man

$$\omega=\frac{bc}{6}(1+\varepsilon)$$

setzen und findet sodann

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}\frac{S_4}{S_2}\,\frac{T_4}{T_2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}+\tfrac{1}{3}\frac{S_6}{S_2}\,\frac{T_6}{T_2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}+\ldots,$$

und wegen

$$\ldots\frac{S_8}{S_2}<\frac{S_6}{S_2}<\frac{S_4}{S_2}=\frac{\pi^2}{15}$$

$$\varepsilon < \frac{3\pi^2}{80}\left\{\left(\frac{3g}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{3g}{2\pi}\right)^4 + \dots\right\},$$
$$< \tfrac{27}{320}\,\frac{g^2}{1-\left(\frac{3g}{2\pi}\right)^2}.$$

Nimmt man an, dass g 10^0 nicht übersteige, so ist

$$\varepsilon < 0{,}085\,g^2,$$
$$< 0{,}002.$$

Da ferner

$$h = \frac{e^{\omega}-1}{e^{\omega}+1} < \frac{\omega}{2},$$
$$> \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^3}{24},$$

also um so mehr

$$\frac{bc}{12}(1+0{,}085\,g^2) > h > \frac{bc}{12}\left(1 - \frac{b^2c^2(1{,}002)^2}{432}\right),$$

so ist h sicher in den Grenzen

$$\frac{bc}{12}(1+0{,}085\,g^2) \quad \text{und} \quad \frac{bc}{12}(1-0{,}085\,g^2)$$

enthalten und es wird, wenn man

3)
$$h = \frac{bc}{12}(1+\varrho)$$

setzt, ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\varrho = 0{,}085\,g^2$$

sein.

Dies vorausgeschickt, schliesst man aus der Gleichung 1)

$$\tfrac{1}{2}(A^* - A) = h \sin A + \delta,$$
$$\delta < \tfrac{1}{2}(h^2 + h^3 + h^4 + \dots),$$
$$< \tfrac{1}{2}\,\frac{h^2}{1-h},$$
$$< \frac{bc}{12}\,g^2\,0{,}042,$$

und nach 3)

4)
$$A^* - A = \tfrac{1}{3}\Delta + \alpha,$$

wo ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\alpha < \frac{bc}{6}(0{,}085 + 0{,}042)\,g^2$$
$$< 0{,}0212\,g^4.$$

Ebenso würde man

$$B^* - B = \tfrac{1}{3}\Delta + \beta,$$
$$C^* - C = \tfrac{1}{3}\Delta + \gamma,$$

$$\beta < 0{,}0212\, g^4,$$
$$\gamma < 0{,}0212\, g^4$$

finden.

Für den sphärischen Ueberschuss ergiebt sich

$$A^* + B^* + C^* - \pi = \Delta$$

mit einem Fehler, welcher die Grösse

$$0{,}0636\, g^4$$

nicht erreichen kann.

Mertens.

X. Notiz über die Zahlen, deren Quersummen gleich ihren μ^{ten} Wurzeln sind.

Sind die Ziffern einer n-stelligen Zahl z, von rechts nach links gelesen: $a, b, c \ldots$, so ist die allgemeine Frage, welchen Bedingungen $a, b, c \ldots$ genügen müssen, damit

$$\sqrt[\mu]{z} = \sqrt[\mu]{a + 10b + 10^2 c \ldots} = (a+b+c\ldots)$$

oder, was dasselbe ist, damit

$$z = (a + 10b + 10^2 c \ldots) = (a+b+c\ldots)^\mu$$

sei. Ist $\mu = 2$, so kann, da $a, b, c \ldots$ höchstens Neunen sein können, die Zahl z höchstens den Werth $(9n)^2$ annehmen.

Für $n=1$ würde sich also als obere Grenze nach diesem Kriterium 81 ergeben, für $n=2$ die Zahl 324, so dass allerdings für diese beiden Fälle dasselbe werthlos ist. Für $n=3$ hingegen erhält man 729, für $n=4$,: 1296, für $n=5$,: 2025, und man ermisst leicht, wie auch durch eine leichte Rechnung mit Logarithmen bestätigt wird, dass Zahlen, welche mehr als vier Stellen haben, die oben angedeutete Eigenschaft für $\mu=2$ nicht haben können, und dass dieselbe von vierstelligen höchstens der 1296, von dreistelligen höchstens der 729 zukommen könnte. Versuchsweise würde man also nur die zweiten Potenzen der ganzen Zahlen von 32 bis 36, von 1 bis 27 zu untersuchen haben. Man findet dann, dass nur 1 und 81 jene Eigenthümlichkeit besitzen.

Ist μ dagegen grösser als 2, so erweist sich unser Kriterium als wenig brauchbar. Man sieht indess, dass die n-stelligen Zahlen z folgender Bedingung genügen:

$$10^{n-1} \leq z \leq (9n)^\mu,$$

so dass für n die Relation gilt

$$10^{n-1} \leqq (9n)^{\mu}$$

oder

$$(n-1) \leqq \mu \log(9n)$$

oder

$$n - \mu \log n \leqq 1 + \mu \log 9,$$

und um so mehr

$$n - \mu \log n \leqq 1 + \mu.$$

Für $\mu = 3$ findet man so, dass höchstens sechsstellige Zahlen den Charakter von z haben können.

Halle a. S. R. Mischer, cand. math.

Bemerkung.

In meiner Abhandlung: „Weitere Beiträge etc.“, Heft I, S. 16 Z. 8 v. o., ist statt: „bestimmte Systeme“ zu lesen: „die Abbildungen bestimmter Systeme“.

Im Betreff des Periodenverhältnisses ist zu bemerken, dass die genannten algebraischen Beziehungen allgemeinere Geltung haben. Sie treten auf in allen Fällen, wo $\frac{2K}{K'}$ rational oder Quadratwurzel aus rationaler Zahl ist, d. h. sobald das Periodenverhältniss eine „complexe Multiplication“ gestattet.

Dass ich das Wort Trajectorien nur in dem Sinne isogonaler Trajectorien gebrauchte, ist wohl selbstverständlich.

Dr. G. Holzmüller.

XI.

Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von

Dr. R. Beez,

Professor an der Realschule zu Plauen i. V.

Die Aufgabe, eine gegebene Mannigfaltigkeit auf einer andern, ebenfalls gegebenen, von gleichviel Dimensionen conform, d. h. so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei, ist für Gebiete von zwei Dimensionen oder für Flächen bekanntlich von Gauss [1]) mit Hilfe von Functionen complexer Grössen allgemein gelöst worden. Es hat sich hierbei ergeben, dass die conforme Abbildung einer beliebigen Fläche auf irgend einer andern durch jedwede Function auf doppelte Weise bewerkstelligt werden kann. Bei den höheren Mannigfaltigkeiten dagegen ist, wie sich im Laufe der Untersuchung zeigen wird, die Zahl der Lösungen eine beschränkte, indem nur congruente, ähnliche und kreisverwandte Figuren sowohl in gleicher, als in verkehrter Lage Aehnlichkeit der kleinsten Theilchen besitzen. Insofern bilden also die Flächen eine bemerkenswerthe Ausnahme von der allgemeinen Regel. [2])

---

1) Vergl. Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von H. C. Schuhmacher, Altona 1825, oder: C. F. Gauss' Werke, IV. Bd. S. 193—216. S. auch C. J. Jacobi in Crelle's Journal, 59. Bd. S. 74—88, und Vorlesungen über Dynamik, S. 215 ff.

2) Auch in anderer Beziehung — wie ich schon bei dieser Gelegenheit bemerken will — zeichnen sich die Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen vor sämmtlichen übrigen aus. So ist z. B. der bekannte Gauss'sche Satz, dass das Krümmungsmass einer Fläche aus den Coefficienten E, F, G der das Linienelement darstellenden quadratischen Form $E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2$ bestimmt werden kann, einer Ausdehnung auf Gebiete von mehr als zwei Dimensionen nicht fähig. Deshalb ist es mir zweifelhaft, ob gewisse Differentialausdrücke, die übereinstimmend von Christoffel und Lipschitz, in den Berichten der Berliner Akademie vom Jahre 1869, sowie im 70. Bande des Journals von Crelle gegeben worden sind, als Ver-

An dem gewöhnlichen Raume hat bereits Liouville[3]) die erwähnte auffallende Thatsache nachgewiesen und hierzu folgende Bemerkungen gemacht: „Die Transformation durch reciproke Radii vectores[4]) besitzt, wie man weiss, eine grosse Zahl bemerkenswerther Eigenschaften. Als ich im 12. Bande des Journals für Mathematik bei Gelegenheit einer Arbeit von W. Thomson mich mit ihr beschäftigte, habe ich gezeigt, dass sie eine Lösung desjenigen Problems giebt, welches Gegenstand vorstehender Note ist. Aber ich wusste damals nicht, dass die erhaltene Formel zugleich die allgemeinste Lösung darstellte. Die vorstehende Untersuchung, welche dieses wichtige Factum constatirt, verdient, wie mir scheint, die Aufmerksamkeit der Geometer." Es ist mir indessen bis auf eine kurze Notiz von F. Klein nicht bekannt, dass irgend ein Mathematiker sich weiter mit der Sache beschäftigt hätte. Klein's Notiz[5]) lautet: „In mehrfach ausgedehnten Gebilden, schon im Raume, giebt es ausser den Transformationen, die sich in der Gruppe der reciproken Radien befinden, keine conformen Punkttransformationen. In der Ebene giebt es dagegen viele andere." Dieser ohne Beweis mitgetheilte Satz ist die Verallgemeinerung des Liouville-schen und bezieht sich gleich diesem nur auf ebene Mannigfaltigkeiten. Es wird jedoch weiter unten gezeigt werden, dass er auch für Mannigfaltigkeiten gilt, deren Krümmungsmass in jedem Punkte variirt.

Der Einfachheit wegen beginne ich mit dem Falle, dass die beiden gegebenen Mannigfaltigkeiten eben sind. Bedeuten dann

$$x_1, x_2 \dots x_n$$

die geradlinigen Coordinaten eines Punktes M im ersten Raume,

$$x_1 + \partial x_1,\ x_2 + \partial x_2, \dots x_n + \partial x_n,$$
$$x_1 + \delta x_1,\ x_2 + \delta x_2, \dots x_n + \delta x_n$$

die Coordinaten zweier benachbarter Punkte M_1 und M_2, so lassen sich die vom Punkte M nach M_1 und M_2 gehenden Linienelemente $MM_1 = \partial s$ und $MM_2 = \delta s$ durch die Gleichungen

---

allgemeinerungen des Gauss'schen Krümmungsmasses gedeutet werden können, und ebenso verhehle ich mir nicht, dass die Zulässigkeit der Formen, unter denen Riemann (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen) und *Beltrami (Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di matematica Ser. II, Tom. II)* das Linienelement in nicht kugelförmigen Räumen von constanter Krümmung darstellen, durch obige Behauptung in Frage gestellt wird. Eine eingehendere Erörterung dieses wichtigen Punktes möge jedoch einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

3) *Application de l'analyse à la géometrie p. G. Monge, ed. M. Liouville,* Note VI. Liouville's Beweis, den er, wie er selbst angiebt (vergl. Schluss der Note V), durch einen glücklichen Zufall gefunden hat, stützt sich auf einige Formeln, die von Lamé im 5. Bande des Journals für Mathematik von Liouville, S. 318, und später in den *Leçons sur les coordinées curvilignes, § XLIII squ.* aufgestellt worden sind.

4) Diese Transformation liefert bekanntlich kreisverwandte Figuren.

5) F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, S. 26 Anm.

1) $$\partial s^2 = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2$$
und
2) $$\delta s^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \ldots + \delta x_n^2$$
darstellen. Den Punkten M, M_1 und M_2 mögen nun im zweiten Raume die Punkte N, N_1 und N_2 mit den Coordinaten

$$\begin{array}{llll} y_1, & y_2, & \ldots & y_n, \\ y_1 + \partial y_1, & y_2 + \partial y_2, & \ldots & y_n + \partial y_n, \\ y_1 + \delta y_1, & y_2 + \delta y_2, & \ldots & y_n + \delta y_n \end{array}$$

entsprechen, so dass für die Linienelemente $NN_1 = \partial t$, $NN_2 = \delta t$ die Gleichungen

1*) $$\partial t^2 = \partial y_1^2 + \partial y_2^2 + \ldots + \partial y_n^2,$$
2*) $$\delta t^2 = \delta y_1^2 + \delta y_2^2 + \ldots + \delta y_n^2$$

gelten. Um aber einen Punkt N des zweiten Raumes mit einem Punkte M des ersteren überhaupt in Correlation zu setzen, hat man die Coordinaten des einen als Functionen der Coordinaten des andern anzunehmen. Infolge dessen bestehen zwischen den Differentialen ∂x_i ($i = 1, 2, \ldots n$) und den Differentialen ∂y_k die n Gleichungen

3) $$\partial x_i = \Sigma_k\, x_{ik}\, \partial y_k,$$
worin
$$x_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

den partiellen Differentialquotienten von ∂x_i nach ∂y_k bezeichnet und der Index k bei unveränderlichem i ebenfalls die ganze Reihe $1, 2, \ldots n$ durchläuft. Der besondern Beschaffenheit der beiden Räume — ihrer Krümmungslosigkeit — hat man schon durch die Annahme Rechnung getragen, dass ein Punkt in jedem derselben durch n geradlinige Coordinaten gegeben sein soll. Was endlich die Bedingung der Conformität der Abbildung anlangt, so wird diese durch die Gleichungen

4) $$\frac{MM_1}{NN_1} = \frac{MM_2}{NN_2} = \frac{M_1M_2}{N_1N_2} = h,$$

welche die Aehnlichkeit der unendlich kleinen Dreiecke MM_1M_2 und NN_1N_2 zur Folge haben, ausgedrückt. Die Grösse h giebt an, in welchem Verhältnisse die Seiten des ersteren Dreiecks vergrössert oder verkleinert werden sollen, und ist der Natur der Sache nach eine reelle und wegen der Vertauschbarkeit der Variabelen eine symmetrische Function der Coordinaten x oder y. Aus 4) ergeben sich sofort die Gleichungen

5) $$\Sigma\, \partial x_k^2 = h^2\, \Sigma\, \partial y_k^2,$$
6) $$\Sigma\, \delta x_k^2 = h^2\, \Sigma\, \delta y_k^2,$$
7) $$\Sigma (\partial x_k - \delta x_k)^2 = h^2\, \Sigma (\partial y_k - \delta y_k)^2.$$

Die letztere reducirt sich wegen 5) und 6) auf

8) $$\Sigma\, \partial x_k\, \delta x_k = h^2\, \Sigma\, \partial y_k\, \delta y_k$$

und aus dieser kann vermöge der leicht zu beweisenden Relation

$$\Sigma \partial x_k^2 \, \Sigma \delta x_k^2 - (\Sigma \partial x_k \, \delta x_k)^2 = \Sigma_{ik} (\partial x_i \, \delta x_k - \partial x_k \, \delta x_i)^2$$

die neue Form

$$8^*) \qquad \Sigma_{ik} (\partial x_i \, \delta x_k - \partial x_k \, \delta x_i)^2 = h^4 \, \Sigma_{ik} (\partial y_i \, \delta y_k - \partial y_k \, \delta y_i)^2$$

abgeleitet werden. Die Gleichungen 8) und 8*) in Verbindung mit 5) und 6) drücken offenbar aus, dass die Cosinus, resp. Sinus der einerseits von MM_1 und MM_2, andererseits von NN_1 und NN_2 eingeschlossenen Winkel — also diese selbst — einander gleich sind. Hiernach hat man die Gleichungen 5) und 6) mit einer der drei folgenden 7), 8), 8*) als die Bedingungsgleichungen für die conforme Abbildung eines ebenen Raumes in einem andern ebenen Raume anzusehen. Aus allen diesen Gleichungen 5), 6), 7), 8), 8*) in Verbindung mit 3) aber geht, da die ∂y vollkommen unabhängig voneinander sind, immer nur das eine System von Gleichungen hervor:

$$9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma_i \, x_{ik}^2 = h^2, \\ &\Sigma_i \, x_{ik} \, x_{il} = 0, \end{aligned} \right.$$

so dass man als hinreichende Bedingung für die Conformität zweier ebenen Räume die eine Fundamentalgleichung

$$\Sigma \partial x_k^2 = h^2 \, \Sigma \partial y_k^2$$

hätte aufstellen können. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. Die Gleichung 6) wird aus 5) erhalten, wenn man ∂y_k mit δy_k und demgemäss ∂x_k mit δx_k vertauscht, d. h. von einem Linienelement zu einem andern derselben Mannigfaltigkeit übergeht; ebenso entsteht 7) aus 5), indem man $\partial y_k - \delta y_k$ für ∂y_k und in entsprechender Weise $\partial x_k - \delta x_k$ für ∂x_k substituirt oder, geometrisch ausgedrückt, indem man das Linearelement einer Mannigfaltigkeit in zwei andere zerlegt, die derselben Mannigfaltigkeit angehören.[6])

Man kann nun auch umgekehrt die y als Functionen der x ansehen und

$$3^*) \qquad \partial y_k = \Sigma_i \, y_{ki} \, \partial x_i$$

setzen, worin y_{ki} den partiellen Differentialquotienten von ∂y_k nach ∂x_i bezeichnet. Wird dies in 5) eingesetzt, so ergiebt sich ein zweites Gleichungssystem:

$$9^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma_k \, y_{ki}^2 = \frac{1}{h^2}, \\ &\Sigma_k \, y_{ki} \, y_{kl} = 0, \end{aligned} \right.$$

Zwischen den Grössen x_{ik} und y_{ki} besteht ein einfacher Zusammenhang. Setzt man nämlich die Functionaldeterminante

---

6) Von einer ähnlichen Substitution macht Christoffel an der oben angeführten Stelle Gebrauch.

$$10)\quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = X$$

und bezeichnet den Coefficienten von x_{ik} in derselben mit X_{ik}, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen 3) nach ∂y_k

$$11)\quad X\,\partial y_k = X_{1k}\,\partial x_1 + X_{2k}\,\partial x_2 + \dots + X_{nk}\,\partial x_n,$$

woraus sich der partielle Differentialquotient

$$12)\quad \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = y_{ki} = \frac{X_{ik}}{X}$$

ergiebt. Andererseits multiplicire man die simultanen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{11}x_{1k} + x_{21}x_{2k} + \dots + x_{n1}x_{nk} &= 0, \\ x_{12}x_{1k} + x_{22}x_{2k} + \dots + x_{n2}x_{nk} &= 0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{1k}x_{1k} + x_{2k}x_{2k} + \dots + x_{nk}x_{nk} &= h^2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{1n}x_{1k} + x_{2n}x_{2k} + \dots + x_{nn}x_{nk} &= 0 \end{aligned}$$

der Reihe nach mit $X_{i1}, X_{i2}, \dots X_{ik} \dots X_{in}$ und addire sämmtliche Gleichungen. Wegen der Identitäten

$$\begin{aligned} x_{11}X_{i1} + x_{12}X_{i2} + \dots + x_{1n}X_{in} &= 0, \\ x_{21}X_{i1} + x_{22}X_{i2} + \dots + x_{2n}X_{in} &= 0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{i1}X_{i1} + x_{i2}X_{i2} + \dots + x_{in}X_{in} &= X, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{n1}X_{i1} + x_{n2}X_{i2} + \dots + x_{nn}X_{in} &= 0 \end{aligned}$$

reducirt sich die Summe auf

$$x_{ik}X = h^2 X_{ik},$$

woraus in Verbindung mit 12)

$$12^*)\quad y_{ki} = \frac{1}{h^2}x_{ik}$$

folgt. Sei ferner F eine Function der Grössen $y_1, y_2 \dots y_n$, so wird

$$13)\quad \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial y_k} x_{ik} = h^2 \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial y_k} \cdot y_{ki} = h^2 \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Aus 9*) ergiebt sich nun mit Berücksichtigung von 12*) das neue System von Gleichungen:

$$9^{**})\quad \begin{cases} \Sigma_k\, x_{ik}^2 \quad = h^2, \\ \Sigma_k\, x_{ik}\, x_{lk} = 0. \end{cases}$$

Schreibt man die letzte Gleichung mit anderen Indices

$$\Sigma_m\, x_{im}\, x_{km} = 0$$

und differentiirt sie nach ∂y_l, so ergiebt sich

$$\Sigma_m \frac{\partial x_{im}}{\partial y_l} \,.\, x_{km} + \Sigma_m \frac{\partial x_{km}}{\partial y_l} \,.\, x_{im} = 0.$$

Da die Indices m und l in den Differentialquotienten vertauscht werden können, so gilt auch die Gleichung

$$14)\quad \Sigma_m \frac{\partial x_{il}}{\partial y_m} x_{km} + \Sigma_m \frac{\partial x_{kl}}{\partial y_m}\, x_{im} = 0.$$

Setzt man in 13) für k und i bezüglich m und k und substituirt x_{il} an Stelle von F, so kommt

$$\Sigma_m \frac{\partial x_{il}}{\partial y_m}\, x_{km} = h^2 \frac{\partial x_{il}}{\partial x_k},$$

und wenn man hierin die Indices k und i vertauscht:

$$\Sigma_m \frac{\partial x_{kl}}{\partial y_m}\, x_{im} = h^2 \frac{\partial x_{kl}}{\partial x_i},$$

folglich durch Substitution in 14)

$$15)\quad \frac{\partial x_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial x_{kl}}{\partial x_i} = 0.$$

Ersetzt man ferner in der identischen Gleichung

$$\frac{\partial y_{ki}}{\partial x_l} = \frac{\partial y_{kl}}{\partial x_i}$$

y_{ki} durch $\frac{1}{h^2} x_{ik}$ und y_{kl} durch $\frac{1}{h^2} x_{lk}$ und führt die Differentiation aus, so findet sich

$$\frac{\partial x_{ik}}{\partial x_l} - \frac{2}{h} x_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{\partial x_{lk}}{\partial x_i} - \frac{2}{h} x_{lk} \frac{\partial h}{\partial x_i},$$

welche Gleichung vermöge der analog 15) gebildeten Relation

$$\frac{\partial x_{lk}}{\partial x_i} + \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_l} = 0$$

übergeht in

$$16)\quad \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{h}\left(x_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_l} - x_{lk} \frac{\partial h}{\partial x_i}\right).$$

Ebenso ist

$$16^*)\quad \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_m} = \frac{1}{h}\left(x_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_m} - x_{mk} \frac{\partial h}{\partial x_i}\right).$$

Durch Differentiation von 16) nach ∂x_m erhält man weiter

$$\frac{\partial^2 x_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial x_{ik}}{\partial x_m}\frac{\partial h}{\partial x_l} + x_{ik}\frac{\partial^2 h}{\partial x_l \partial x_m} - x_{lk}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial x_{lk}}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$$
$$- \frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial x_m}\left(x_{ik}\frac{\partial h}{\partial x_l} - x_{lk}\frac{\partial h}{\partial x_i}\right).$$

Dieser Ausdruck reducirt sich, wenn man 16*) berücksichtigt, schliesslich auf die einfache Gleichung

17) $$\frac{\partial^2 x_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} = \frac{1}{h}\left(x_{ik}\frac{\partial^2 h}{\partial x_l \partial x_m} - x_{lk}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_m}\right).$$

Ganz auf dieselbe Weise gelangt man durch Differentiation der Gleichung 16*) nach ∂x_l und Elimination der Differentialquotienten $\frac{\partial x_{ik}}{\partial x_l}$ und $\frac{\partial x_{mk}}{\partial x_l}$ zu dem Resultat

17*) $$\frac{\partial^2 x_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} = \frac{1}{h}\left(x_{ik}\frac{\partial^2 h}{\partial x_l \partial x_m} - x_{mk}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_l}\right).$$

Durch Vergleichung von 17) und 17*) erhält man endlich

18) $$x_{lk}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_m} = x_{mk}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Da nun auch die ∂x als unabhängig voneinander angesehen werden können, so ist die Gleichung 18) nur dann möglich, wenn

19) $$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_m} = 0, \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_l} = 0$$

ist. Die Function h hat daher die Eigenschaft, dass, wenn sie nach irgend einer Variabelen differentiirt wird, dieser Differentialquotient von allen anderen Variabelen unabhängig ist. Man genügt dieser Bedingung, wenn man

20) $$h = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

setzt und X_k nur von x_k abhängig sein lässt. Dann ist

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_k}$$

unabhängig von jedem andern x.

Um nun den Werth dieses Differentialquotienten zu ermitteln, setze man zunächst in der Formel 13) $F = x_{il}$, so erhält man

21) $$\frac{\partial x_{il}}{\partial x_i} = \frac{1}{h^2}\Sigma_k x_{ik}\frac{\partial x_{il}}{\partial y_k}.$$

Differentiirt man ferner die Gleichung 9**) nach y_l, so kommt

$$\Sigma_k x_{ik}\frac{\partial x_{ik}}{\partial y_l} = h\frac{\partial h}{\partial y_l}.$$

Da aber

$$\Sigma_k x_{ik}\frac{\partial x_{ik}}{\partial y_l} = \Sigma_k x_{ik}\frac{\partial x_{il}}{\partial y_k},$$

so geht 21) über in

22) $$\frac{\partial x_{il}}{\partial x_i}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y_l}=\frac{1}{h}\Sigma_k\frac{\partial h}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial y_l}=\frac{1}{h}\Sigma_k\frac{\partial h}{\partial x_k}x_{kl}.$$

Eine abermalige Differentiation nach ∂x_m ergiebt mit Rücksicht auf 19)

23) $$\frac{\partial^2 x_{il}}{\partial x_i\,\partial x_m}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial x_m^2}x_{ml}+\frac{1}{h}\Sigma_k\frac{\partial h}{\partial x_k}\frac{\partial x_{kl}}{\partial x_m}-\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial x_m}\Sigma_k\frac{\partial h}{\partial x_k}x_{kl}.$$

Da

$$\Sigma_k\frac{\partial h}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_{kl}}{\partial x_m}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_m}\Sigma_k x_{kl}\frac{\partial h}{\partial x_k}-\frac{1}{h}x_{ml}\Sigma_k\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2+\frac{\partial h}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_{ml}}{\partial x_m},$$

so folgt

23*) $$\frac{\partial^2 x_{il}}{\partial x_i\,\partial x_m}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial x_m^2}x_{ml}-\frac{1}{h^2}x_{ml}\Sigma_k\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2+\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_{ml}}{\partial x_m}.$$

Der Werth von $\dfrac{\partial^2 x_{il}}{\partial x_i\,\partial x_m}$ lässt sich aber noch auf eine zweite Weise bestimmen, wenn man die Gleichung

$$\frac{\partial x_{il}}{\partial x_m}=\frac{1}{h}\left(x_{il}\frac{\partial h}{\partial x_m}-x_{ml}\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$$

nach ∂x_i differentiirt. Dies giebt mit Berücksichtigung der Formel

$$\frac{\partial x_{ml}}{\partial x_i}=\frac{1}{h}\left(x_{ml}\frac{\partial h}{\partial x_i}-x_{il}\frac{\partial h}{\partial x_m}\right):$$

24) $$\frac{\partial^2 x_{il}}{\partial x_i\,\partial x_m}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_m}\frac{\partial x_{il}}{\partial x_i}-\frac{1}{h}x_{ml}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}.$$

Vergleicht man 23*) und 24), so findet man, da

$$\frac{\partial x_{ml}}{\partial x_m}=\frac{1}{h}\Sigma_k\frac{\partial h}{\partial x_k}x_{kl}=\frac{\partial x_{il}}{\partial x_i}$$

ist:

25) $$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_m^2}=\frac{1}{h}\Sigma_k\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2.$$

Für eine andere Variabele x_l würde gleichermassen

25*) $$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_l^2}=\frac{1}{h}\Sigma_k\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2$$

sein müssen. Beide Gleichungen sind aber nur dann nebeneinander möglich, wenn

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_l^2}=\frac{\partial^2 h}{\partial x_m^2}$$

ist, und da $\dfrac{\partial h}{\partial x_l}$ nur x_l, $\dfrac{\partial h}{\partial x_m}$ nur x_m enthält, so muss nothwendig, wenn der vorstehenden Gleichung genügt werden soll, der nach irgend einer Variabelen genommene zweite Differentialquotient von h constant sein. Es ist daher

26) $$\frac{\partial^2 h}{\partial x_m^2}=c$$

zu setzen, woraus wegen 25) sofort

27) $$\frac{1}{h}\Sigma_k\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2 = 2c$$

sich ergiebt. Nimmt man

$$h = \frac{c}{2}\Sigma_k(x_k-\alpha_k)^2 + c',$$

worin c' eine neue Constante bedeutet, so wird die Gleichung 26) erfüllt. Da aber

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = c(x_k-\alpha_k),$$

folglich

$$\frac{1}{h}\Sigma_k\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2 = \frac{2c^2\Sigma_k(x_k-\alpha_k)^2}{c\,\Sigma_k(x_k-\alpha_k)^2+2c'}$$

ist, so wird eine Uebereinstimmung mit 27) nur dadurch erzielt, dass man $c'=0$ setzt. Man hat daher schliesslich

$$h = \frac{c}{2}\{(x_1-\alpha_1)^2+(x_2-\alpha_2)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2\}.$$

Wäre man bei der Bestimmung von h statt von der Gleichung

$$\Sigma_k\,\partial x^2 = h^2\Sigma_k\,\partial y_k^2$$

von der gleichbedeutenden

$$\Sigma_k\,\partial y_k^2 = H^2\Sigma_k\,\partial x_k^2$$

ausgegangen, so würde man zu der Lösung

$$H = \frac{c'}{2}\{(y_1-\beta_1)^2+(y_2-\beta_2)^2+\ldots+(y_n-\beta_n)^2\}$$

gelangt sein. Es ist daher, wenn

$$\frac{4}{c\,c'} = k^4$$

gesetzt wird:

29) $$\Sigma(x_k-\alpha_k)^2\,.\,\Sigma(y_k-\beta_k)^2 = k^4.$$

Bedeutet r den Abstand des Punktes x_k von α_k, r' den Abstand des Bildes y_k von β_k, so lässt sich vorstehende Gleichung einfacher

$$r\,r' = \pm k^2$$

schreiben. Die Punkte α_k und β_k sind die Centralpunkte der Kreisverwandtschaft in beiden Räumen und zwischen den y_k und x_k bestehen die äquivalenten Gleichungen

30) $$y_k-\beta_k = \pm\frac{k^2(x_k-\alpha_k)}{r^2}$$

oder

30*) $$x_k-\alpha_k = \pm\frac{k^2(y_k-\beta_k)}{r'^2}.$$

Dass 29) aus 30) folgt, giebt eine einfache Rechnung. Ebenso genügt 30) der Fundamentalgleichung 5), sobald $\frac{2}{c}=\frac{2}{c'}=k^2$ gesetzt wird. Denn aus 30) ergiebt sich

$$\partial y_k = \pm k^2 \left(\frac{\partial x_k}{r^2} - 2\frac{(x_k-\alpha_k)}{r^3}\partial r\right),$$

$$\partial y_k^2 = k^4\left(\frac{\partial x_k^2}{r^4} + 4\frac{(x_k-\alpha_k)^2}{r^6}\partial r^2 - 4\frac{(x_k-\alpha_k)}{r^5}\partial x_k\,\partial r\right),$$

$$\Sigma_k\,\partial y_k^2 = \frac{k^4}{r^4}\Sigma_k\,\partial x_k^2 + \frac{4\,\partial r^2}{r^6}\Sigma_k\,(x_k-\alpha_k)^2 - \frac{4\,r\,\partial r}{r^6}\Sigma_k\,(x_k-\alpha_k)\,\partial x_k,$$

folglich, da

$$\Sigma(x_k-\alpha_k)^2 = r^2 \text{ und } \Sigma(x_k-\alpha_k)\,\partial x_k = r\,\partial r,$$

so ergiebt sich

$$\Sigma\,\partial y_k^2 = \frac{k^4}{r^4}\Sigma\,\partial x_k^2,$$

$$= \frac{4}{c^2 r^2}\Sigma\,\partial x_k^2,$$

$$= \frac{1}{h^2}\Sigma\,\partial x_k^2.$$

Durch das Vorstehende ist bewiesen, dass ein ebener Raum von n Dimensionen in einem andern ebenen Raume von gleichviel Dimensionen nur durch reciproke Vectoren conform abgebildet werden kann, sobald man die Abbildungen durch Congruenz und durch Aehnlichkeit, bei denen auch endliche Theile gleichgestaltet sind, ausschliesst. In rein analytischer Form, wenn man die Fiction transcendentaler Räume aufgiebt, würde der Satz folgendermassen lauten: Sind $y_1, y_2 \ldots y_n$ und h Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so kann bei vollkommener Unabhängigkeit der Grössen ∂x_k der Differentialgleichung

$$\partial y_1^2 + \partial y_2^2 + \ldots + \partial y_n^2 = \frac{1}{h^2}(\partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2)$$

nur durch die Annahme

$$y_k = \beta_k \pm \frac{k^2(x_k-a_k)}{\Sigma(x_k-\alpha_k)^2} \text{ und } h = \frac{k^2}{\Sigma(x_k-\alpha_k)^2},$$

worin α_k, β_k und k willkürliche Constanten sind, genügt werden.

Da man in 30) die Vorzeichen + und — bei gleichen absoluten Werthen von $x_k - \alpha_k$ beliebig combiniren kann — wobei man jedoch für jede einzelne Abbildung die einmal getroffene Wahl der Vorzeichen festhalten muss —, so erhält man im Ganzen 2^n Abbildungen, die in zwei Gruppen zerfallen. Die Bilder in jeder Gruppe sind untereinander congruent, zwei Bilder jedoch aus verschiedenen Gruppen lassen sich nicht zur Coincidenz bringen, da sie zwar gleich sind, aber verkehrte Lage haben; sie stehen in demselben Verhältniss zueinander wie Original und Spiegelbild, nicht aber wie Original und Copie. Schon auf der Geraden und in der Ebene ist es bekanntlich unmöglich, symmetrische Punktreihen, resp. symmetrisch gleiche Figuren durch blosse Verschiebung in eine solche Lage zu bringen, dass sie zusammenfallen. Die Coincidenz lässt sich erst dann herstellen, wenn man den Träger des Bildes umkehrt, wozu im ersten Falle eine Ebene, im zweiten Falle ein ebener Raum von drei Dimensionen erfordert wird. Etwas Analoges findet bei den symmetrischen Raumfiguren statt, sie lassen sich durch Verschiebung im Raume nicht zur Deckung bringen. Hierzu würde, wie bereits Möbius[7]) richtig erkannt hat, erforderlich sein, das eine System in einem Raume von vier Dimensionen[8]) eine halbe Umdrehung machen zu lassen. Demnach würden in unserem Falle die Abbildungen der einen Gruppe erst dann mit denen der zweiten zur Deckung gebracht werden können, wenn sie in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen eine Drehung um 180^0 erführen, wobei n Punkte ihre Lage unverändert beibehielten.

Das Wesen des im Vorigen bewiesenen Satzes tritt noch deutlicher hervor, wenn man eine Art hypercomplexer Grössen oder räumlicher Zahlen einführt, welche als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen complexen Grössen angesehen werden können. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir einen vom Coordinatenanfang O nach dem Punkte M gezogenen Radius vector im ebenen Raume von n Dimensionen symbolisch durch

I) $$\varrho = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + \ldots + i_{n-1} x_{n-1}.$$

Die x sind geradlinige Coordinaten des Punktes M, die i Richtungscoefficienten der senkrecht aufeinanderstehenden Coordinatenaxen. Nur die X_0-Axe hat den reellen Coefficienten 1. Für $n=2$ fällt ϱ mit der complexen Grösse $x_0 + i_1 x_1$ oder, wie gewöhnlich geschrieben wird, $x + iy$ zusammen, welche bekanntlich durch Gauss ihre geometrische Darstellung als Radius vector in der Ebene gefunden hat. Im gewöhnlichen Raume müsste dann nach der herkömmlichen Bezeichnung in cartesischen Coordinaten für den Radius vector der Ausdruck

$$\varrho = x + iy + kz$$

aufgestellt werden, worin i den Richtungscoefficienten der Y-, k den der Z-Axe bedeutet.[9]) Ist ϱ_1 ein zweiter Vector, so hat man die identische Gleichung

$$\varrho_1 = (\varrho_1 . \varrho^{-1})\varrho.$$

Der Quotient $\varrho_1 . \varrho^{-1}$ drückt demnach die Operation aus, vermöge deren der Vector ϱ in den Vector ϱ_1 transformirt wird. Daher bedeuten

---

7) Vergl. Möbius, Barycentrischer Calcul, § 140 Anm.

8) Genauer in einem „ebenen“ Raume von vier Dimensionen.

9) In den Schriften von Hamilton und Tait über Quaternionen wird der ector im gewöhnlichen Raum durch die Gleichung $\varrho = ix + jy + kz$ definirt, welcher sdruck zwar wegen seiner homogenen Form gewisse Vortheile vor dem obigen tet, da er jedoch für $z=0$ nicht auf die Form des ebenen Vectors $\varrho = x + iy$ rückgeht, auch nicht als Analogon desselben angesehen werden kann. Das Gleiche lt von Grassmann's Strecke $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$; s. dessen „Ausdehnungshre“.

$$i.1^{-1},\; k.1^{-1},\; i.k^{-1}$$

die Operationen, durch welche bezüglich die Vectoren 1, 1, k in i, k, i übergeführt werden, und umgekehrt

$$1.i^{-1},\; 1.k^{-1},\; k.i^{-1}$$

die diesen entgegengesetzten, folglich hat man die Gleichungen

$$i.1^{-1}=-1.i^{-1},\quad k.1^{-1}=-1.k^{-1},\quad i.k^{-1}=-k.i^{-1}.$$

Aus den beiden ersten ergiebt sich

$$\frac{1}{i}=-i,\quad \frac{1}{k}=-k$$

oder

$$i^2=-1,\quad k^2=-1,$$

aus der letzten mit Rücksicht auf die vorhergehenden

$$ik=-ki.$$

Hat man $n-1$ Richtungscoefficienten i_k, so sind

II) $$i^2_k=-1,$$

III) $$i_k.i_l=-i_l.i_k$$

die einzigen und hinreichenden Bedingungen für das Rechnen mit Raumzahlen. Bedeute nun

IV) $$\varrho'=x_0-i_1x_1-i_2x_2-\ldots-i_{n-1}x_{n-1}$$

das Spiegelbild des Radius vectors ϱ in Bezug auf die reelle Axe der x_0, so erhält man durch Multiplication von I) und IV) unter Berücksichtigung von II) und III)

$$\varrho\varrho'=x_0^2+x_1^2+\ldots+x^2_{n-1}=r^2,$$

worin r die absolute Länge von ϱ (den Modulus oder den Tensor) bezeichnet. — Es ist leicht einzusehen, dass die beiden Producte $\varrho.\varrho_1$ und $\varrho_1.\varrho$, wenn ϱ und ϱ_1 zwei verschiedene Vectoren sind, im Allgemeinen nicht miteinander vertauscht werden können. Denn wenn ϱ'_1 das Spiegelbild von ϱ_1 mit dem Modulus r_1 ist, so stellt

$$\varrho.\varrho_1=\varrho.\frac{1}{\varrho'_1}.r_1^2$$

bis auf den reellen Factor r_1^2 die Transformation des Spiegelbildes von ϱ_1 in den Vector ϱ und

$$\varrho_1.\varrho=\varrho_1.\frac{1}{\varrho'}.r^2$$

bis auf den Factor r^2 die Transformation des Spiegelbildes von ϱ in den Vector ϱ_1 dar. Die hierzu erforderlichen Drehungen finden aber in ganz verschiedenen Ebenen statt, also sind $\varrho.\varrho_1$ und $\varrho_1.\varrho$ voneinander verschiedene Operationen. Man erhält dasselbe Resultat auch durch Ausführung der vorgeschriebenen Multiplication, wenn man II) und III) berücksichtigt. Ist $\varrho_1=\varrho$, so fallen beide Operationen zusammen und es drückt daher

$$\varrho^2=\varrho.\frac{1}{\varrho'}.r^2$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

bis auf den reellen Factor r^2 die Transformation des Spiegelbildes von ϱ in den Vector ϱ aus, welche in der durch die reelle Axe X_0 und den Vector ϱ bestimmten Ebene vor sich geht. Ist φ der Winkel, den ϱ mit dieser Axe einschliesst, so involvirt $\varrho \,.\, \frac{1}{\varrho'}$ eine Drehung um den doppelten Winkel 2φ oder es bedeutet ϱ^2 einen Vector von der Länge r^2, welcher mit der reellen Axe den Winkel 2φ bildet und in der Ebene ϱX_0 liegt. Allgemein drückt ϱ^n einen Vector aus, der in derselben Ebene befindlich ist, die Länge r^n hat und mit der X_0- Axe den Winkel $n\varphi$ einschliesst. Multiplicirt man nun ϱ^k mit einer reellen Constanten a_k, so wird nur eine Aenderung in der Länge, nicht aber in der Lage von ϱ^k bewirkt. Summirt man ferner mehrere in einer Ebene liegende Vectoren, so erhält man, wie leicht einzusehen ist, einen neuen Vector, der in derselben Ebene enthalten ist. Daher repräsentirt der Ausdruck

$$\varrho_1 = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \ldots + a_{n-1} \varrho^{n-1}$$

wiederum einen der Ebene ϱX_0 angehörigen Vector und allgemein, wenn $\varrho_1 = f(\varrho)$ eine beliebige Function von ϱ — jedoch mit reellen Constanten — bedeutet, so wird ϱ_1 stets in der Ebene zu suchen sein, in welcher das Argument ϱ und die Axe X_0 liegen. Daher kann der Differentialquotient $\partial \varrho_1 : \partial \varrho$ bei völlig willkürlicher Lage des Incrementes $\partial \varrho$ nicht durch eine Function von ϱ dargestellt werden, oder es ist eine Gleichung wie

$$\partial \varrho_1 : \partial \varrho = f'(\varrho)$$

unmöglich. Denn während $f'(\varrho)$ als Function von ϱ, wie wir soeben gesehen haben, einen Vector in der Ebene ϱX_0 bezeichnet, involvirt $\partial \varrho_1 : \partial \varrho$ eine Drehung in einer durch $\partial \varrho_1$ und $\partial \varrho$ gelegten Ebene, deren Lage mit $\partial \varrho$ sich ändert. Nur wenn $\partial \varrho$ durch die Natur des Raumes, in dem es seine Lage willkürlich ändern kann, genöthigt ist, in der Ebene ϱX_0 zu bleiben — was allein für $n=2$ der Fall ist —, hat die Function $f(\varrho)$ als Differentialquotienten abermals eine Function von ϱ. Daher gilt nur für die Ebene die Gleichung

$$\partial \varrho_1 = f'(\varrho)\, \partial \varrho.$$

Bezeichnet man die Moduli von $\partial \varrho$ und $\partial \varrho_1$ bezüglich durch ∂s und ∂s_1, so liefert vorstehende Gleichung sofort auch die Bedingung der Conformität

$$\partial s_1 = \partial s\, [mod.\, f'(\varrho)].$$

Es fragt sich nun weiter, ob der letzterhaltenen Gleichung, wenn $mod.\, f'(\varrho)$ überhaupt nur eine Function der Variabelen x_k oder y_k bedeutet, in Räumen von mehr als zwei Dimensionen genügt werden kann, trotzdem, dass die erste Gleichung unmöglich ist. Offenbar wird dies der Fall sein, sobald es gelingt, für $\partial \varrho_1$ einen eingliedrigen Ausdruck herzustellen, der von $\partial \varrho$ abhängig ist, z. B.

$$\partial \varrho_1 = \varphi(\varrho) \,.\, \partial \varrho \,.\, \psi(\varrho).$$

Denn wenn man auf beiden Seiten den Modulus nimmt, so folgt

$$\partial s_1 = \partial s \, mod[\varphi(\varrho) . \psi(\varrho)].$$

Nun aber zeigt sich, dass schon das Differential der zweiten Potenz von ϱ, nämlich

$$\partial \varrho_1 = \partial . \varrho^2 = \varrho \, \partial \varrho + \partial \varrho . \varrho$$

einen zweigliedrigen Ausdruck giebt, der sich nicht zusammenziehen lässt, da die Producte $\varrho . \partial \varrho$ und $\partial \varrho . \varrho$ nicht vertauscht werden können. Es bleiben also nur die Functionen von ϱ übrig, in denen ϱ in der ersten Potenz vorkommt, nämlich

VI) $$\varrho_1 = \pm a . \varrho$$

und

VII) $$\varrho_1 = \pm \frac{a}{\varrho},$$

worin a eine reelle Constante bedeutet. Aus VI) folgt

VI*) $$\partial \varrho_1 = a \, \partial \varrho,$$

aus VII)

VII*) $$\partial \varrho_1 = \pm \frac{a}{\varrho} . \partial \varrho . \frac{1}{\varrho}.$$ [10]

Geht man auf beiden Seiten zum Modulus über, so erhält man bezüglich

VI**) $$\partial s_1 = a \, \partial s$$

und

VII**) $$\partial s_1 = \frac{a}{r^2} \partial s.$$

In VI**) und VII**) erkennt man sofort die Bedingungsgleichungen für die Abbildung durch Aehnlichkeit und Kreisverwandtschaft wieder. Der Gleichung VII) kann man eine etwas allgemeinere Form geben, wenn man den Coordinatenanfang in beiden Räumen verlegt. Man erhält dann

VIII) $$\varrho_1 - \varrho_1{}^0 = \pm \frac{a}{\varrho - \varrho^0},$$

und in dieser einfachen Gestalt ersetzt sie vollständig das in 30) aufgestellte Gleichungssystem. Dem Punkte ϱ des einen Raumes entspricht der Punkt ϱ_1 in dem andern; ϱ^0 und $\varrho_1{}^0$ sind die Centralpunkte der Kreisverwandtschaft.

Mit Hilfe der hypercomplexen Zahlen lässt sich nun auch die allgemeine quadratische Form von n Differentialen, welche das Linienelement eines Raumes von n Dimensionen darstellt, in zwei lineare Factoren zerlegen. Sei

$$\partial s^2 = \Sigma_{ik} \, b_{ik} \, \partial x_i \, \partial x_k, \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 0, 1, \ldots (n-1),$$

worin b_{ik} Functionen der n unabhängigen Variabelen $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ bedeuten, eine wesentlich positive quadratische Form der n Differentiale ∂x mit nicht verschwindender Hauptdeterminante

---

10) Diese Gleichung findet sich auch bei Hamilton und Tait. Dass der Vectorencalcul in einigen Punkten mit dem der Quaternionen sich begegnet, ist wegen der gleichen Fundamentalbedingungen II) und III) nicht zu verwundern.

$$\begin{vmatrix} b_{00}, & b_{01}, & \dots & b_{0,n-1} \\ b_{10}, & b_{11}, & \dots & b_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n-1,0}, & b_{n-1,1}, & \dots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \Delta$$

und nicht verschwindenden Unterdeterminanten

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b_{n-1,n-1}}, \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b_{n-1,n-1}\,\partial b_{n-2,n-2}} \text{ etc.},$$

so lässt sich dieselbe, wenn

$$\text{IX)} \quad \frac{1}{\sqrt{b_{00}}}\big[a_{00}\,\partial x_0 + (a_{10} + i_1 a_{11})\,\partial x_1 + (a_{20} + i_1 a_{21} + i_2 a_{22})\,\partial x_2 + \dots$$
$$\dots + (a_{n-1,0} + i_1 a_{n-1,1} + \dots + i_{n-1} a_{n-1,n-1})\,\partial x_{n-1}\big] = U$$

und

$$\text{IX*)} \quad \frac{1}{\sqrt{b_{00}}}\big[a_{00}\,\partial x_0 + (a_{10} - i_1 a_{11})\,\partial x_1 + (a_{20} - i_1 a_{21} - i_2 a_{22})\,\partial x_2 + \dots$$
$$\dots + (a_{n-1,0} - i_1 a_{n-1,1} - \dots - i_{n-1} a_{n-1,n-1})\,\partial x_{n-1}\big] = U'$$

gesetzt wird, in der Form

$$\Sigma_{ik}\, b_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k = U\,.\,U'$$

schreiben. Führt man die angedeutete Multiplication aus und berücksichtigt II) und III), so verschwinden alle Glieder, die mit den Richtungscoefficienten i behaftet sind, und man erhält durch Vergleichung der Coefficienten von $\partial x_l\,\partial x_m$ auf beiden Seiten

$$a_{l0}\,a_{m0} + a_{l1}\,a_{m1} + \,.\,\,.\, + a_{ll}\,a_{ml} = b_{00}\,.\,b_{lm},$$

worin

$$l \leqq m$$

ist. Da nun die Zahl der Unbekannten a_{lm} ebenso gross ist, als die Zahl der gegebenen Gleichungen, so lassen sich alle Grössen a_{lm} bestimmen. Man findet nach einigen Rechnungen für die Coefficienten von ∂x_k

$$a_{k,0} = (-1)^k \frac{\partial^k \Delta_{kk}}{\partial b_{k,k-1}\,\partial b_{k-1,k-2} \dots \partial b_{10}} = b_{0k},$$

$$a_{k,1} = (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{b_{00}}}{\sqrt{\Delta_{00}\Delta_{11}}} \cdot \frac{\partial^{k-1}\Delta_{kk}}{\partial b_{k,k-1}\,\partial b_{k-1,k-2} \dots \partial b_{2,1}},$$

$$a_{k,2} = (-1)^{k-2} \frac{\sqrt{b_{00}}}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22}}} \cdot \frac{\partial^{k-2}\Delta_{kk}}{\partial b_{k,k-1}\,\partial b_{k-1,k-2} \dots \partial b_{3,2}},$$

$$\vdots$$

$$a_{k,k-1} = (-1) \frac{\sqrt{b_{00}}}{\sqrt{\Delta_{k-2,k-2}\,\Delta_{k-1,k-1}}} \cdot \frac{\partial \Delta_{k,k}}{\partial b_{k,k-1}},$$

$$a_{k,k} = \frac{\sqrt{b_{00}}\sqrt{\Delta_{k,k}}}{\sqrt{\Delta_{k-1,k-1}}},$$

worin

$$\text{X)} \qquad \Delta_{kk} = \begin{vmatrix} b_{00}, & b_{01}, & \dots & b_{0k} \\ b_{10}, & b_{11}, & \dots & b_{1k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{k0}, & b_{k1}, & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

ist. Der Coefficient von ∂x_0, der allein nicht in dem vorstehenden Schema einbegriffen ist, würde $= b_{00}$ zu setzen sein. Demnach lässt sich

$$b_{00}\partial x_0^2 + 2b_{01}\,\partial x_0\,\partial x_1 + b_{11}\,\partial x_1^2$$

in die beiden Factoren

$$\frac{1}{\sqrt{b_{00}}}\left[b_{00}\,\partial x_0 + (b_{01} + i\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}})\,\partial x_1\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{b_{00}}}\left[b_{00}\,\partial x_0 + (b_{01} - i\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}})\,\partial x_1\right],$$

zerlegen. Desgleichen ergeben sich als Factoren der ternären quadratischen Form

$$b_{00}\,\partial x^2_0 + 2b_{01}\,\partial x_0\,\partial x_1 + 2b_{02}\,\partial x_0\,\partial x_2 + b_{11}\,\partial x_1^2 + 2b_{12}\,\partial x_1\,\partial x_2 + b_{22}\,\partial x_2^2$$

die beiden hypercomplexen Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{b_{00}}}\Bigg[b_{00}\,\partial x_0 + (b_{01} + i_1\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}})\,\partial x_1 + \left(b_{02} + i_1\frac{b_{00}b_{12} - b_{01}b_{02}}{\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}}} + i_2\frac{\sqrt{b_{00}}}{\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}}}\sqrt{\begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}\right)\partial x_2\Bigg]$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{b_{00}}}\Bigg[b_{00}\,\partial x_0 + (b_{01} - i_1\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}})\,\partial x_1 + \left(b_{02} - i_1\frac{b_{00}b_{12} - b_{01}b_{02}}{\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}}} - i_2\frac{\sqrt{b_{00}}}{\sqrt{b_{00}b_{11} - b^2_{01}}}\sqrt{\begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}\right)\partial x_2\Bigg].$$

Endlich mögen noch die bei der quaternären quadratischen Form

$$\Sigma b_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k, \quad \begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\Big\} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

neu auftretenden Coefficienten a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33} hier ihren Platz finden. Es ergiebt sich

$$a_{30} = b_{03},$$

$$a_{31} = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{30} & b_{31} \end{vmatrix} : \sqrt{\Delta_{11}},$$

$$a_{32} = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \cdot \sqrt{\frac{b_{00}}{\Delta_{11}\Delta_{22}}},$$

$$a_{33} = \sqrt{\frac{b_{00}\Delta_{33}}{\Delta_{22}}},$$

worin Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} die unter X) angegebene Bedeutung haben.

Angenommen nun, es seien

$$f(x_0, x_1, \dots x_n) = 0, \quad f_1(y_0, y_1, \dots y_n) = 0$$

die Gleichungen zweier Räume von n Dimensionen, so würden durch irgend eine Substitution

$$x_k = \varphi_k(u_0, u_1, \dots u_{n-1}) \text{ und } y_k = \psi_k(v_0, v_1, \dots v_{n-1})$$

die entsprechenden Curvenelemente die Formen

$$\partial s^2 = \Sigma_{ik} b_{ik} \partial u_i \partial u_k \text{ und } \partial s_1^2 = \Sigma_{ik} c_{ik} \partial v_i \partial v_k$$

annehmen und Aehnlichkeit in den kleinsten Theilchen stattfinden, wenn

$$\Sigma_{ik} c_{ik} \partial v_i \partial v_k = m^2 \Sigma_{ik} b_{ik} \partial u_i \partial u_k$$

ist. Damit ein Punkt v einem Punkte u entspräche, müssten die v als Functionen der u angesehen werden. Zerlegt man nun die quadratische Form

$$\Sigma_{ik} b_{ik} \partial u_i \partial u_k,$$

wie vorher gelehrt worden ist, in zwei hypercomplexe Factoren U und U' und bezeichnet mit β, β' die integrirenden Factoren der Gleichungen

$$U = 0, \quad U' = 0,$$

so lässt sich das Integral von βU — vorausgesetzt, dass β ein Vector ist, der mit U in einer durch X_0 gehenden Ebene liegt — in der Form eines Vectors

$$\text{XI)} \qquad P_0 + i_1 P_1 + \dots + i_{n-1} P_{n-1} = \varrho$$

und das Integral von $\beta' U'$ als das Spiegelbild dieses Vectors

$$\text{XI*)} \qquad P_0 - i_1 P_1 - \dots - i_{n-1} P_{n-1} = \varrho'$$

darstellen. Ist ferner b der gemeinschaftliche Modulus von β und β', so wird

$$\Sigma_{ik} b_{ik} \partial u_i \partial u_k = \frac{1}{b^2} \Sigma_k \partial P_k^2, \quad k = 0, 1, \dots n-1.$$

In derselben Weise werde auch die Form

$$\Sigma_{ik} c_{ik} \partial v_i \partial v_k$$

in die beiden Factoren V und V' zerlegt; γ und γ' mögen die integrirenden Factoren von $V=0$ und $V'=0$ sein und den Modulus c besitzen, endlich

$$\text{XII)} \qquad Q_0 + i_1 Q_1 + \dots + i_{n-1} Q_{n-1} = \varrho_1$$

und

$$\text{XII*)} \qquad Q_0 - i_1 Q_1 - \dots - i_{n-1} Q_{n-1} = \varrho'_1$$

die Integrale von γV und $\gamma' V'$ in Gestalt von Vectoren darstellen. Man kann also analog dem Vorigen

$$\Sigma_{ik} c_{ik} \partial v_i \partial v_k = \frac{1}{c^2} \Sigma_k \partial Q_k^2$$

setzen. Den Bedingungen der Aufgabe gemäss müsste

$$\frac{1}{c^2} \Sigma_k \partial Q_k^2 = \frac{m^2}{b^2} \Sigma_k \partial P_k^2$$

sein. Da aber der Gleichung

$$\Sigma_k \partial Q_k^2 = h^2 \Sigma_k \partial P_k^2,$$

wie oben gezeigt worden ist, nur genügt wird, wenn

$$h^2 = \frac{k^4}{\Sigma_k{}^2 P_k{}^2},$$

so muss

$$\frac{c^2 m^2}{b^2} = \frac{k^4}{\Sigma_k{}^2 P_k{}^2}$$

gesetzt werden, woraus der Aehnlichkeitscoefficient

$$m = \frac{b}{c} \frac{k^2}{\Sigma P_k{}^2}$$

sich ergiebt. Daher ist die Gleichung

$$\text{XIII)} \qquad \Sigma_{ik} c_{ik} \partial v_i \partial v_k = \frac{b^2 k^4}{c^2 \Sigma_k{}^2 P_k{}^2} \Sigma_{ik} h_{ik} \partial u_i \partial u_k$$

die Bedingungsgleichung für die conforme Abbildung des einen Raumes in dem andern, welche in VII**) übergeht, wenn beide Räume eben sind. Zur Erfüllung derselben ist die Herstellung der Gleichungen XI) und XII) erforderlich, welche in der Hauptsache auf der Lösung des Pfaff-schen Problems beruht.

XII.

Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit.

Von

Prof. Dr. A. Weiler

in Mannheim.

In dem Jahre 1858 habe ich eine Methode zur Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung veröffentlicht (vergl. Grunert's Archiv, Theil XXXIII, S. 268—284). Einige Jahre später habe ich diese Methode eingehender behandelt (vergl. Jahrg. 1863 dieses Journals). Es war unterdessen eine grössere Arbeit Jacobi's über denselben Gegenstand erschienen, welche in dem 60. Bande des Crelle'schen Journals abgedruckt ist, und es hatte sich gezeigt, dass meine Methode Verschiedenes vor der Jacobi'schen voraus hat.

In dem Versuche einer Darlegung der wissenschaftlichen Leistungen von A. Clebsch, Leipzig 1873, haben einige Freunde desselben diesen Gegenstand in einer Weise besprochen, welche den Sachverhalt nicht richtig darstellt. Herr Clebsch hat im Crelle'schen Journal, Jahrgang 1865, einen Aufsatz über simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen mitgetheilt und sich, um die von mir gewonnenen Resultate zu begründen, einer eigenthümlichen Betrachtungsweise bedient. Ich muss vor Allem darauf hinweisen, dass meine Methode zur Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung auf einer andern Grundlage beruht als die Jacobi'sche. Die von Herrn Clebsch gegebene Darstellung aber ist ein durch den Erfolg nicht gerechtfertigter Versuch, meine Resultate den Jacobi'schen Aufstellungen anzupassen. In dem Folgenden behandle ich abermals diesen Gegenstand, und darf ich mich der Hoffnung hingeben, dass irrigen Auffassungen damit vorgebeugt sein werde. Wo ich mich auf meine frühere Abhandlung beziehen kann, werde ich dieselbe kurz mit I bezeichnen.

§ 1. Die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit wird auf simultane partielle Differentialgleichungen von linearer Form zurückgeführt.

Die zu integrirende Gleichung sei

$$\psi_1(p_1 p_2 \ldots p_n \; z \; x_1 x_2 \ldots x_n) = 0,$$

wo $p_1 p_2 \ldots p_n$ die partiellen Differentialquotienten von z nach $x_1 x_2 \ldots x_n$ sind, also $p_1 = \frac{dz}{dx_1}$, $p_2 = \frac{dz}{dx_2} \ldots p_n = \frac{dz}{dx_n}$ ist. Die Integration dieser Gleichung kann dadurch zu Stande gebracht werden, dass man zunächst die Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ als Function von $z x_1 x_2 \ldots x_n$ von solcher Art bestimmt, wie sie dem allgemeinen Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ entsprechen. Denn wenn diese Functionen bekannt sind, so erhält man das Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz = p_1 \, dx_1 + p_2 \, dx_2 + \ldots + p_n \, dx_n.$$

Es bestehen zwischen zwischen diesen Functionen, welche den n Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ entsprechen, bekanntlich $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Bedingungsgleichungen, welche sich in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) = \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) & \left(\frac{dp_1}{dx_3}\right) = \left(\frac{dp_3}{dx_1}\right) & \left(\frac{dp_1}{dx_4}\right) = \left(\frac{dp_4}{dx_1}\right) \ldots & \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) = \left(\frac{dp_n}{dx_1}\right), \\
 & \left(\frac{dp_2}{dx_3}\right) = \left(\frac{dp_3}{dx_2}\right) & \left(\frac{dp_2}{dx_4}\right) = \left(\frac{dp_4}{dx_2}\right) \ldots & \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) = \left(\frac{dp_n}{dx_2}\right), \\
 & & \left(\frac{dp_3}{dx_4}\right) = \left(\frac{dp_4}{dx_3}\right) \ldots & \left(\frac{dp_3}{dx_n}\right) = \left(\frac{dp_n}{dx_3}\right), \\
 & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & & & \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right) = \left(\frac{dp_n}{dx_{n-1}}\right).
\end{array}$$

Durch die beigefügten Klammern soll angedeutet sein, dass bei den partiellen Differentiationen von p_i nach $x_1 x_2 \ldots x_n$ auch die Grösse z als Function dieser Veränderlichen gedacht wird, dass also, wenn f eine Function von z und x_i ist, die identische Gleichung $\left(\frac{df}{dx_i}\right) = \frac{df}{dz} p_i + \frac{df}{dx_i}$ besteht.

Anstatt aber aus diesen $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Bedingungsgleichungen A) und der Gleichung $\psi_1 = 0$ die Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ unmittelbar als Function von $z \, x_1 x_2 \ldots x_n$ herzuleiten, stellen wir uns die Aufgabe, neben der Gleichung $\psi_1 = 0$ noch $n-1$ andere Gleichungen zwischen den Veränderlichen $p_1 p_2 \ldots p_n \, z \, x_1 x_2 \ldots x_n$ aufzustellen, welche ausgedrückt sein sollen durch

$$\psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \quad \psi_4 = 0 \ldots \psi_n = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen A) bedürfen dann einer Umwandlung, um diese $n-1$ Gleichungen aus denselben herleiten zu können. Indem man die Gleichung $\psi_1=0$ nach den Veränderlichen $x_1 x_2 \dots x_n$ partiell differentiirt, erhält man zunächst die n Gleichungen:

$$\frac{d\psi_1}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)+\frac{d\psi_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)+\frac{d\psi_1}{dp_3}\left(\frac{dp_3}{dx_1}\right)+\dots+\frac{d\psi_1}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dx_1}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_1}\right)=0,$$
$$\frac{d\psi_1}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)+\frac{d\psi_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right)+\frac{d\psi_1}{dp_3}\left(\frac{dp_3}{dx_2}\right)+\dots+\frac{d\psi_1}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dx_2}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_2}\right)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d\psi_1}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)+\frac{d\psi_1}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)+\frac{d\psi_1}{dp_3}\left(\frac{dp_3}{dx_n}\right)+\dots+\frac{d\psi_1}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dx_n}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_n}\right)=0.$$

Ebenso bildet man n Gleichungen aus $\psi_2=0$. Eliminirt man alsdann aus je zweien der Reihenfolge nach einander entsprechenden Gleichungen beziehungsweise die Differentialquotienten $\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right)\dots\left(\frac{dp_n}{dx_n}\right)$, so entstehen die weiteren n Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi_1}{dp_i}\frac{d\psi_2}{dp_1}-\frac{d\psi_1}{dp_1}\frac{d\psi_2}{dp_i}\right)\left(\frac{dp_i}{dx_1}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_1}\right)\frac{d\psi_2}{dp_1}-\frac{d\psi_1}{dp_1}\left(\frac{d\psi_2}{dx_1}\right)=0,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi_1}{dp_i}\frac{d\psi_2}{dp_2}-\frac{d\psi_1}{dp_2}\frac{d\psi_2}{dp_i}\right)\left(\frac{dp_i}{dx_2}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_2}\right)\frac{d\psi_2}{dp_2}-\frac{d\psi_1}{dp_2}\left(\frac{d\psi_2}{dx_2}\right)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi_1}{dp_i}\frac{d\psi_2}{dp_n}-\frac{d\psi_1}{dp_n}\frac{d\psi_2}{dp_i}\right)\left(\frac{dp_i}{dx_n}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_n}\right)\frac{d\psi_2}{dp_n}-\frac{d\psi_1}{dp_n}\left(\frac{d\psi_2}{dx_n}\right)=0.$$

Man addire dieselben, und mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen A) gelangt man zu einer neuen Gleichung, welche nicht mehr die Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$, sondern die Functionen ψ_1 und ψ_2 als abhängige Veränderliche enthält. Man erhält die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx_1}\right)\frac{d\psi_2}{dp_1}-\frac{d\psi_1}{dp_1}\left(\frac{d\psi_2}{dx_1}\right)+\left(\frac{d\psi_1}{dx_2}\right)\frac{d\psi_2}{dp_2}-\frac{d\psi_1}{dp_2}\left(\frac{d\psi_2}{dx_2}\right)+\dots$$
$$+\left(\frac{d\psi_1}{dx_n}\right)\frac{d\psi_2}{dp_n}-\frac{d\psi_1}{dp_n}\left(\frac{d\psi_n}{dx_n}\right),$$

welche auch kürzer geschrieben werden kann

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\psi_1}{dx_i}\right)\frac{d\psi_2}{dp_i}-\frac{d\psi_1}{dp_i}\left(\frac{d\psi_2}{dx_i}\right)\right]=0.$$

Hiermit ist eine Gleichung zwischen den partiellen Differentialquotienten der Functionen ψ_1 und ψ_2 gegeben. Eine ähnliche Gleichung besteht zwischen je zweien der n Functionen $\psi_1\psi_2\dots\psi_n$. Schreibt man die vorstehende Gleichung noch kürzer in der Form $(\psi_1\psi_2)=0$, so hat man im Ganzen die folgenden $n(n-1)$ Gleichungen:

$$
\begin{array}{ccccc}
* & (\psi_1\psi_2)=0 & (\psi_1\psi_3)=0 & (\psi_1\psi_4)=0 \ldots & (\psi_1\psi_n)=0, \\
(\psi_2\psi_1)=0 & * & (\psi_2\psi_3)=0 & (\psi_2\psi_4)=0 \ldots & (\psi_2\psi_n)=0, \\
(\psi_3\psi_1)=0 & (\psi_3\psi_2)=0 & * & (\psi_3\psi_4)=0 \ldots & (\psi_3\psi_n)=0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\psi_n\psi_1)=0 & (\psi_n\psi_2)=0 & (\psi_n\psi_3)=0 & (\psi_n\psi_4)=0 \ldots & *.
\end{array}
$$

Da aber $(\psi_i\psi_k)+(\psi_k\psi_i)=0$ eine identische Gleichung ist, so sind die unterhalb der Diagonalen stehenden Gleichungen identisch mit den oberhalb der Diagonalen stehenden. Man behält deshalb die Gleichungen B)

$$
\begin{array}{cccc}
(\psi_1\psi_2)=0 & (\psi_1\psi_3)=0 & (\psi_1\psi_4)=0 \ldots & (\psi_1\psi_n)=0, \\
 & (\psi_2\psi_3)=0 & (\psi_2\psi_4)=0 \ldots & (\psi_2\psi_n)=0, \\
 & & (\psi_3\psi_4)=0 \ldots & (\psi_3\psi_n)=0, \\
 & & & \ldots \\
 & & & (\psi_{n-1}\psi_n)=0,
\end{array}
$$

deren Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, und welche an die Stelle der Bedingungsgleichungen A) zu setzen sind.

Die gesuchten Functionen müssen allen diesen Gleichungen Genüge leisten. Um ψ_2 zu erhalten, suche man diejenige Function φ, welche der Gleichung

$$(\psi_1\varphi)=0$$

genügt. Um ψ_3 zu erhalten, suche man diejenige Function φ, welche den zwei in der zweiten vertikalen Linie stehenden Gleichungen

$$(\psi_2\varphi)=0 \quad (\psi_1\varphi)=0$$

gleichzeitig genügt. Man kann dieselbe bestimmen, nachdem man die Function ψ_2 aufgefunden hat. Ferner ist ψ_4 diejenige Function φ, welche den drei in der dritten vertikalen Linie stehenden Gleichungen

$$(\psi_3\varphi)=0 \quad (\psi_2\varphi)=0 \quad (\psi_1\varphi)=0$$

gleichzeitig genügt. Man kann dieselbe bestimmen, nachdem man die Functionen ψ_2 und ψ_3 aufgefunden hat. Schliesslich hat man zur Bestimmung von ψ_n die $n-1$ in der $n-1^{\text{ten}}$ vertikalen Linie stehenden Gleichungen

$$(\psi_{n-1}\varphi)=0 \quad (\psi_{n-2}\varphi)=0 \quad (\psi_{n-3}\varphi)=0 \ldots \quad (\psi_1\varphi)=0.$$

Es ist ψ_n diejenige Function φ, welche diesen $n-1$ Gleichungen gleichzeitig genügt, und man kann dieselbe bestimmen, nachdem man die übrigen Functionen $\psi_2\psi_3\ldots\psi_{n-1}$ aufgefunden hat. Indem man die gesuchte Function jedesmal mit φ bezeichnet, sind die in einer und derselben horizontalen Linie stehenden Gleichungen der obigen Gruppirung identisch, und man behält deshalb zur Bestimmung der $n-1$ Functionen $\psi_2\psi_3\ldots\psi_n$ im Ganzen nur $n-1$ verschiedene partielle Differentialgleichungen.

Aus den Gleichungen

$$\psi_1=0 \quad \psi_2=0 \quad \psi_3=0 \ldots \quad \psi_n=0$$

bestimmen sich die Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ als Function von $x_1 x_2 \ldots x_n$, und man kann alsdann die vollständige Differentialgleichung

$$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n$$

integriren. Dieselbe ist übrigens gleichbedeutend mit dem Systeme der n simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{dz}p_1 + \frac{d\varphi}{dx_1} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dz}p_2 + \frac{d\varphi}{dx_2} = 0 \ldots \frac{d\varphi}{dz}p_n + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Man bestimme diejenige Function $\varphi = \psi$, welche denselben gleichzeitig Genüge leistet. Das Integral der vollständigen Differentialgleichung ist $\psi = c$, und c eine willkürliche Beständige.

Ich habe hiermit nachgewiesen, dass die Integration der partiellen Differentialgleichung $\psi_1(p_1 p_2 \ldots p_n\ z\ x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ zurückgeführt werden kann auf die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen von linearer Form (vergl. I, §§ 1 und 3).

§ 2. Wie man zu einem vollständigen Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi_1 = 0$ gelangt.

Die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\psi_1(p_1 p_2 \ldots p_n\ z\ x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

wird ungemein erleichtert durch die Bemerkung, dass das allgemeine Integral ohne weitere Integration aus einem vollständigen Integral hergeleitet werden kann. Unter dem vollständigen Integral denkt man sich eine endliche Gleichung zwischen den $n+1$ Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$, welche zwar nicht eine willkürliche Function, statt dessen aber n willkürliche Beständige enthaltend, der partiellen Differentialgleichung $\psi_1 = 0$ Genüge leistet. Die Integration der Gleichung $\psi_1 = 0$ lässt sich auf die Bestimmung eines vollständigen Integrals zurückführen, und es bedarf deshalb nicht der allgemeinen Integration der im vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen B):

$$(\psi_1 \varphi) = 0 \quad (\psi_2 \varphi) = 0 \ldots (\psi_{n-1} \varphi) = 0.$$

Anstatt der allgemeinen, willkürliche Functionen enthaltenden Integrale, welche oben durch

$$\psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \ldots \psi_n = 0$$

ausgedrückt worden sind, darf man sich der einfachen Integrale

$$\varphi_2 = c_2 \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$$

bedienen, wo $\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_n$ Functionen der $2n+1$ Veränderlichen $p_1 p_2 \ldots p_n\ z$ $x_1 x_2 \ldots x_n$, und $c_2 c_3 \ldots c_n$ willkürliche Beständige sind.

Um Gleichförmigkeit zu haben, soll die zu integrirende Gleichung $\psi_1 = 0$ in der Form $\varphi_1 = c_1$ geschrieben werden, wo c_1 irgend eine der in ψ_1 vorkommenden Beständigen ist. Man setze die aus den Gleichungen

$$\varphi_1 = c_1 \quad \varphi_2 = c_2 \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$$

berechneten Werthe $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$ in die vollständige Differentialgleichung

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$$

ein. Mit Hilfe eines integrirenden Factors erhält man das vollständige Differential

$$\frac{d\alpha}{dz}dz+\frac{d\alpha}{dx_1}dx_1+\frac{d\alpha}{dx_2}dx_2+\ldots+\frac{d\alpha}{dx_n}dx_n,$$

und hieraus ein vollständiges Integral der Gleichung $\psi_1=0$. Denn das Integral der vollständigen Differentialgleichung hat die Form $\alpha=c$ und ist eine bestimmte Function der $n+1$ Veränderlichen $z\,x_1\,x_2\ldots x_n$ und der n willkürlichen Beständigen $c\,c_2\,c_3\ldots c_n$.

Mit Rücksicht auf diese Vereinfachung der Aufgabe erfahren auch die partiellen Differentialgleichungen B) eine Vereinfachung. Denn es ist nun an die Stelle von ψ_i die einfachere Function φ_i zu setzen. Zur Bestimmung von φ_2 hat man demzufolge die Gleichung

$$(\varphi_1\varphi)=0.$$

Zur Bestimmung von φ_3 hat man die zwei Gleichungen

$$(\varphi_2\varphi)=0 \quad (\varphi_1\varphi)=0.$$

Zur Bestimmung von φ_4 hat man die drei Gleichungen

$$(\varphi_3\varphi)=0 \quad (\varphi_2\varphi)=0 \quad (\varphi_1\varphi)=0,$$

und schliesslich zur Bestimmung von φ_n die $n-1$ Gleichungen

$$(\varphi_{n-1}\varphi)=0 \quad (\varphi_{n-2}\varphi)=0 \quad (\varphi_{n-3}\varphi)=0 \ldots (\varphi_1\varphi)=0.$$

In diesen Gleichungen ist die zu bestimmende Function jedesmal mit φ bezeichnet.

Die Kenntniss des Verfahrens, wornach man das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1=0$ aus dem vollständigen Integral herleitet, giebt Aufschluss über einige wichtige Eigenschaften der vorstehenden Gleichungen, und soll dasselbe hier nicht übergangen werden. Man ersetzt die Beständige c des vollständigen Integrals durch eine willkürliche Function der übrigen Beständigen $c_2c_3\ldots c_n$. Das vollständige Integral hat dann die Form $\alpha=\psi(c_2c_3\ldots c_n)$, oder auch die allgemeinere Form

$$\psi(\alpha\,c_2\,c_3\ldots c_n)=0.$$

An die Stelle der willkürlichen Beständigen $c_2c_3\ldots c_n$ kann man veränderliche Grössen von solcher Art setzen, dass die Gleichung $\psi=0$ doch wieder als Integral von $\psi_1=0$ angesehen werden darf. Man differentiire diese Gleichung unter der Annahme, dass $c_2c_3\ldots c_n$ veränderlich seien, vollständig nach allen vorkommenden Veränderlichen. Man erhält

$$\frac{d\psi}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dz}dz+\frac{d\alpha}{dx_1}dx_1+\frac{d\alpha}{dx_2}dx_2+\ldots+\frac{d\alpha}{dx_n}dx_n\right)$$
$$+\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_2}+\frac{d\psi}{dc_2}\right)dc_2+\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_3}+\frac{d\psi}{dc_3}\right)dc_3+\ldots+\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_n}+\frac{d\psi}{dc_n}\right)dc_n=0.$$

Bedient man sich zur Bestimmung der veränderlich gedachten Grössen $c_2c_3\ldots c_n$ der $n-1$ Gleichungen

$$\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_2}+\frac{d\psi}{dc_2}=0 \quad \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_3}+\frac{d\psi}{dc_3}=0 \ldots \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_n}+\frac{d\psi}{dc_n}=0,$$

so behält man die vollständige Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha}{dz}dz+\frac{d\alpha}{dx_1}dx_1+\frac{d\alpha}{dx_2}dx_2+\ldots+\frac{d\alpha}{dx_n}dx_n=0,$$

welche sich von der oben aufgezeichneten nur dadurch unterscheidet, dass die in den partiellen Differentialquotienten von α nach $z\,x_1 x_2 \ldots x_n$ vorvorkommenden Beständigen $c_2 c_3 \ldots c_n$ durch veränderliche Grössen ersetzt sind. Die Elimination der $n-1$ Grössen $c_2 c_3 \ldots c_n$ zwischen den n Gleichungen des vollständigen Systems

$$\frac{d\alpha}{dz}p_1+\frac{d\alpha}{dx_1}=0 \quad \frac{d\alpha}{dz}p_2+\frac{d\alpha}{dx_2}=0 \ldots \quad \frac{d\alpha}{dz}p_n+\frac{d\alpha}{dx_n}=0,$$

führt selbstverständlich zu einer und derselben partiellen Differentialgleichung $\psi_1=0$, mögen nun diese Grössen veränderlich, oder mögen sie als Beständige gedacht werden. Es folgt daraus, dass die Gleichung

$$\psi\,(\alpha\, c_2 c_3 \ldots c_n)=0$$

das Integral der Gleichung $\psi_1=0$ ist, ebensowohl wenn die Grössen $c_2 c_3 \ldots c_n$ die oben bestimmten veränderlichen Werthe haben, als wenn dieselben willkürliche Beständige sind. In dem letzteren Falle hat man ein vollständiges Integral der Gleichung $\psi_1=0$, in dem andern Falle aber liegt das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1=0$ vor. Auf diesem Wege hat schon Euler das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1=0$ aus dem vollständigen Integral hergeleitet.

§ 3. Die simultanen partiellen Differentialgleichungen des § 2 sind vollständige Systeme.

Es giebt bekanntlich $n-1$ verschiedene Functionen der n Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_n$, welche an der Stelle von φ der partiellen Differentialgleichung

$$A_1\frac{d\varphi}{dx_1}+A_2\frac{d\varphi}{dx_2}+A_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\ldots+A_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0$$

genügen. Man nennt jede Function von dieser Eigenschaft eine Lösung der Gleichung, und wenn man die Lösung einer willkürlichen Beständigen gleichsetzt, so hat man ein Integral der Gleichung. Die Anzahl derjenigen Functionen φ, welche gleichzeitig einer zweiten partiellen Differentialgleichung

$$B_1\frac{d\varphi}{dx_1}+B_2\frac{d\varphi}{dx_2}+B_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\ldots+B_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0$$

enügen, ist höchstens $n-2$. Wenn es in der That $n-2$ gemeinsame ösungen giebt, so sagt man, die beiden Gleichungen bilden ein vollständiges System. In gleicher Weise bilden drei partielle Differentialgleichngen von der obigen Form ein vollständiges System, wenn es $n-3$ gemeinsame Lösungen giebt. Ferner bilden m derartige partielle Differentialgleichngen ein vollständiges System, wenn es $n-m$ gemeinsame Lösungen giebt.

Wenn m partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System ilden, so darf man dieselben durch ebenso viele lineare Verbindungen ersetzen. Die neuen Differentialgleichungen bilden gleichfalls ein vollständiges System. Wenn ferner m partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, so werden auch je i von diesen m partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, und deshalb $n-i$ gemeinsame Lösungen haben. Diese Sätze, deren Richtigkeit ohne Weiteres aus dem Verfahren folgt, durch welches man ein vollständiges System integrirt (vergl. S. 83 dieses Jahrgangs), werden in dem Folgenden mehrfache Verwendung finden.

Auf Grund der vorstehenden Erklärungen soll nun gezeigt werden, dass die in § 2 aufgestellten simultanen partiellen Differentialgleichungen vollständige Systeme bilden. Ich gehe deshalb von der Annahme aus, dass jene $n-1$ Integrale

$$\varphi_2 = c_2 \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$$

aufgefunden seien, durch welche die Differentialquotienten $p_1\, p_2 \ldots p_n$ als Function von $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$ bestimmt sind, und werde zunächst zeigen, wie man aus denselben jene allgemeineren Gleichungen

$$\psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \ \ldots \ \psi_n = 0$$

herleiten kann, welche an die Stelle der ersteren gesetzt werden müssen, damit die vollständige Differentialgleichung

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$$

nicht mehr ein vollständiges Integral, sondern das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ gebe.

Das allgemeine Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ hat in § 2 die Form

$$\psi\,(\alpha\, c_2 c_3 \ldots c_n) = 0$$

erhalten, worin ψ eine willkürliche Function, α eine bestimmte Function der $n+1$ Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$ und der $n-1$ weiteren Veränderlichen $c_2 c_3 \ldots c_n$ ist. Die letzteren bestimmen sich aus den Gleichungen

$$1) \quad \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_2} + \frac{d\psi}{dc_2} = 0 \quad \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_3} + \frac{d\psi}{dc_3} = 0 \ldots \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_n} + \frac{d\psi}{dc_n} = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen erhält man aus dem allgemeinen Integral $\psi\,(\alpha\, c_2 c_3 \ldots c_n) = 0$ durch partielle Differentiation die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dz} p_1 + \frac{d\alpha}{dx_1} = 0 \quad \frac{d\alpha}{dz} p_2 + \frac{d\alpha}{dx_2} = 0 \ldots \frac{d\alpha}{dz} p_n + \frac{d\alpha}{dx_n} = 0.$$

Löst man dieselben nach den Unbekannten $c_1 c_2 c_3 \ldots c_n$ auf und betrachtet alsdann diese Grössen als willkürliche Beständige, so hat man jene Gleichungen

$$2) \qquad \varphi_1 = c_1 \quad \varphi_2 = c_2 \quad \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n,$$

welche das vollständige Integral geben. Behält man aber an der Stelle von $c_2\, c_3 \ldots c_n$ die aus den Gleichungen 1) sich ergebenden veränderlichen Werthe bei, so gehen die Gleichungen 2) über in jene allgemeineren:

$$3) \qquad \psi_1 = 0 \quad \psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \ \ldots \ \psi_n = 0,$$

aus welchen sich die Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$ so bestimmen, wie sie dem allgemeinen Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ entsprechen. Man gelangt zu denselben Gleichungen 3), indem man die aus den Gleichungen 2) sich ergebenden Werthe $c_1 c_2 c_3 \dots c_n$ in jene Gleichungen 1) einsetzt.

Bekanntlich sind jene allgemeinen Gleichungen

$$\psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \dots \psi_n = 0$$

als Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$(\varphi_1 \varphi) = 0$$

zu betrachten. Die Coefficienten dieser Gleichung sind Function der $2n+1$ Veränderlichen $p_1 p_2 \dots p_n \; z \; x_1 x_2 \dots x_n$, und die Gleichung hat deshalb $2n$ Lösungen φ. In Uebereinstimmung hiermit zeigen sich die obigen Gleichungen 1). Dieselben enthalten willkürliche Functionen der $n+1$ veränderlichen Grössen $c_1 = \varphi_1$, $c_2 = \varphi_2$, $c_3 = \varphi_3 \dots c_n = \varphi_n$ und α. Neben diesen willkürlichen Functionen enthalten dieselben noch die $n-1$ weiteren Veränderlichen $\frac{d\alpha}{dc_2} \frac{d\alpha}{dc_3} \dots \frac{d\alpha}{dc_n}$, im Ganzen also $2n$ Veränderliche. Man kann sich hierdurch überzeugen, dass die aus dem vollständigen Integral $\alpha = c$ hergeleitete Gleichung

$$\psi(\alpha \; c_2 c_3 \dots c_n) = 0$$

als das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung $\psi_1 = 0$ angesehen werden darf. Auf demselben Wege gelangt man auch zu der Ueberzeugung, dass die partiellen Differentialgleichungen des § 2 vollständige Systeme sind.

Indem man die Gleichung $\psi_2 = 0$ durch die einfachere $\varphi_2 = c_2$ ersetzt, wo c_2 eine willkürliche Beständige ist, macht man die Coefficienten der Gleichung $(\psi_2 \varphi) = 0$ zu bestimmten Functionen der $2n+1$ Veränderlichen. Die $n-1$ Gleichungen $\varphi_2 = c_2$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0 \dots \psi_n = 0$ sind dann gemeinsame Integrale der zwei partiellen Differentialgleichungen

$$(\varphi_2 \varphi) = 0 \quad (\varphi_1 \varphi) = 0.$$

Unter der Annahme eines beständigen c_2 hat man anstatt der Gleichung $\frac{d\psi}{d\alpha_1} \frac{d\alpha}{dc_2} + \frac{d\psi}{dc_2} = 0$ die einfachere $\varphi_2 = c_2$. Die Gleichungen $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0 \dots \psi_n = 0$ aber sind gleichbedeutend mit

$$\frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dc_3} + \frac{d\psi}{dc_3} = 0 \quad \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dc_4} + \frac{d\psi}{dc_4} = 0 \dots \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dc_n} + \frac{d\psi}{dc_n} = 0.$$

Dieselben enthalten willkürliche Functionen der $n+1$ veränderlichen Grössen $c_1 = \varphi_1$, $c_2 = \varphi_2$, $c_3 = \varphi_3 \dots c_n = \varphi_n$ und α. Neben diesen willkürlichen Functionen enthalten dieselben noch die $n-2$ weiteren Veränderlichen $\frac{d\alpha}{dc_3} \frac{d\alpha}{dc_4} \dots \frac{d\alpha}{dc_n}$. Es giebt also $2n-1$ verschiedene Functionen φ, welche den beiden partiellen Differentialgleichungen $(\varphi_2 \varphi) = 0$, $(\varphi_1 \varphi) = 0$ gleichzeitig genügen; und es folgt daraus, dass diese beiden partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden.

Indem man ferner an die Stelle von $\psi_3=0$ die einfachere Gleichung $\varphi_3=c_3$ setzt, wo c_3 eine willkürliche Beständige ist, gestalten sich die Coefficienten der Gleichung $(\psi_3\varphi)=0$ zu bestimmten Functionen der $2n+1$ Veränderlichen. Die $n-1$ Gleichungen $\varphi_2=c_2$, $\varphi_3=c_3$, $\psi_4=0$, $\psi_5=0\ldots$ $\psi_n=0$ sind gemeinsame Integrale der drei Gleichungen

$$(\varphi_3\varphi)=0 \quad (\varphi_2\varphi)=0 \quad (\varphi_1\varphi)=0.$$

Unter der Annahme eines beständigen c_3 hat man anstatt der Gleichung $\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_3}+\frac{d\psi}{dc_3}=0$ die einfachere $\varphi_3=c_3$. Die Gleichungen $\psi_4=0$, $\psi_5=0\ldots$ $\psi_n=0$ aber sind gleichbedeutend mit

$$\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_4}+\frac{d\psi}{dc_4}=0 \quad \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_5}+\frac{d\psi}{dc_5}=0\ldots \quad \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dc_n}+\frac{d\psi}{dc_n}=0.$$

Diese Gleichungen enthalten willkürliche Functionen der $n+1$ veränderlichen Grössen $c_1=\varphi_1$, $c_2=\varphi_2$, $c_3=\varphi_3\ldots c_n=\varphi_n$ und α. Neben diesen willkürlichen Functionen kommen darin noch die $n-3$ weiteren Veränderlichen $\frac{d\alpha}{dc_4}\,\frac{d\alpha}{dc_5}\ldots\frac{d\alpha}{dc_n}$ vor. Da es also $2n-2$ verschiedene Functionen φ giebt, welche den drei partiellen Differentialgleichungen $(\varphi_3\varphi)=0$, $(\varphi_2\varphi)=0$, $(\varphi_1\varphi)=0$ gleichzeitig genügen, so müssen diese Gleichungen als ein vollständiges System angesehen werden.

Ebenso kann man zeigen, dass auch die übrigen partiellen Differentialgleichungen, deren gemeinsame Integrale gesucht sind, vollständige Systeme bilden. (Vergl. I, §§ 2 und 3.)

Wenn m partielle Differentialgleichungen vorliegen, welche ein vollständiges System bilden, so kann diese Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen aus der Beschaffenheit der Coefficienten nachgewiesen werden. Auf Grund derartiger Untersuchungen hat Jacobi den Nachweis geliefert, dass dies eine Eigenschaft derjenigen partiellen Differentialgleichungen ist, von deren Integration die Lösung der vorliegenden Aufgabe abhängt. Ich habe es vorgezogen, von der Betrachtung der Bedingungsgleichungen, welche die Coefficienten erfüllen sollen, abzusehen, und die erwähnte Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen dem Zusammenhange zu entnehmen, in welchem dieselben mit dem allgemeinen Integral der Gleichung $\psi_1=0$ stehen.

§ 4. Die simultanen partiellen Differentialgleichungen des § 2 sind zugleich Jacobi'sche Systeme.

Die partiellen Differentialgleichungen

$$A_1\frac{d\varphi}{dx_1}+A_2\frac{d\varphi}{dx_2}+A_3\frac{d\varphi}{dx_3}+\ldots+A_n\frac{d\varphi}{dx_n}=0,$$

$$B_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + B_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + B_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + \ldots + B_n \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

welche ein vollständiges System bilden, seien abkürzend $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ geschrieben. Indem man den Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}$ eliminirt, erhält man die Gleichung $C(\varphi)=0$, welche die Lösung $\varphi=x_1$ hat. Bestimmt man eine zweite Lösung $\varphi=y$ der Gleichung $C(\varphi)=0$ durch Integration, so kann man aus derselben weitere Lösungen der Gleichung $C(\varphi)=0$ durch Differentiation ableiten (vergl. S. 88 dieses Jahrganges). Man findet alsdann das Integral des Systems als Function der Lösungen der Gleichung $C(\varphi)=0$. Soll aber das Integral des Systems nicht durch die Lösungen der Gleichung $C(\varphi)=0$, sondern durch die Lösungen einer der ursprünglichen Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ ausgedrückt werden, so muss dieselbe eine besondere Forderung erfüllen, damit man aus einer Lösung weitere Lösungen dieser Gleichung durch Differentiation ableiten kann.

Die Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ seien $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$. Macht man in der transformirten Gleichung

$$3)\quad B(\alpha_1)\frac{d\varphi}{d\alpha_1} + B(\alpha_2)\frac{d\varphi}{d\alpha_2} + B(\alpha_3)\frac{d\varphi}{d\alpha_3} + \ldots + B(\alpha_{n-1})\frac{d\varphi}{d\alpha_{n-1}} = 0$$

den Coefficienten von $\frac{d\varphi}{d\alpha_1}$ zur Einheit, indem man die Gleichung durch $B(\alpha_1)$ theilt, so gehen alle übrigen Coefficienten der Gleichung 3) in Functionen von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$ über. Dies ist eine Eigenschaft des vollständigen Systems (vergl. S. 88 dieses Jahrganges). Es ist aber, um dies zu erreichen, nicht unumgänglich, einen Coefficienten der Gleichung 3) zur Einheit zu machen. Wenn sich ein Factor findet, von welchem bekannt ist, dass er irgend einen Coefficienten der Gleichung 3) zu einer Function von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n$ macht, so sind auch alle übrigen Coefficienten Function dieser Veränderlichen. Man kann sich denken, dass nicht die Gleichung 3), sondern die ursprüngliche Gleichung $B(\varphi)=0$ einen Factor erhalten habe, welcher dies bewirkt. In diesem Falle ist $\varphi=B(\alpha_1)$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$.

In dem Jacobi'schen Systeme, welches die Bedingungsgleichung $A[B(\varphi)]-B[A(\varphi)]=0$ identisch erfüllt, besitzt sowohl die eine als die andere der Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$ die hier geforderte Eigenschaft. Es ist nicht blos $\varphi=B(\alpha_1)$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$, sondern ebenso auch $\varphi=A(\beta_1)$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$, wenn $\varphi=\beta_1$ eine solche ist. Giebt man der Gleichung $A(\varphi)=0$ einen Factor, welcher eine beliebige Function der Lösungen von $B(\varphi)=0$ ist, und der Gleichung $B(\varphi)=0$ einen Factor, welcher eine beliebige Function der Lösungen von $A(\varphi)=0$ ist, so besteht die identische Gleichung $A[B(\varphi)]-B[A(\varphi)]=0$ fort. Daraus folgt der umgekehrte Satz, dass die Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$, wenn dieselben die oben verlangte Eigenschaft besitzen, jedenfalls auch ein Jacobi'sches System darstellen. Auf Grund dieser

Betrachtungen lässt sich leicht nachweisen, dass die in § 2 aufgestellten partiellen Differentialgleichungen zugleich Jacobi'sche Systeme sind.

Ich gehe von einer partiellen Differentialgleichung aus, in welcher neben den Veränderlichen $x_1 x_2 \dots x_n$ eine weitere Veränderliche x_{n+1}, und der entsprechende Differentialquotient $p_{n+1} = \frac{dz}{dx_{n+1}}$ vorkommen, und gebe dieser Gleichung die Form

$$\varphi_1 = \psi(p_1 p_2 \dots p_n\, z\, x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}) + a p_{n+1} = c_1,$$

wo die Function ψ von p_{n+1} frei, ferner a und c_1 als beständige Grössen gedacht werden. Jene weiteren Gleichungen

$$\varphi_{k+1}(p_1 p_2 \dots p_n\, z\, x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}) = c_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3 \dots n,$$

welche neben der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ zur Bestimmung der $n+1$ Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_{n+1}$ aufgestellt werden, sind dem § 2 zufolge als gemeinsame Integrale von n partiellen Differentialgleichungen zu betrachten, welche sich in der allgemeinen Form

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \left[\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_k}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0, \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

darstellen. Setzt man den oben angenommenen Werth $\varphi_1 = \psi + a p_{n+1}$ in die Gleichung 1) ein, so geht dieselbe, weil $\frac{d\varphi_1}{dp_{n+1}} = a$ ist, und $\frac{d\varphi}{dp_{n+1}} = 0$ gesetzt werden darf, über in

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] - a\left(\frac{d\varphi}{dx_{n+1}}\right) = 0.$$

Es sei $\varphi_2 = c_2$ ein Integral dieser Gleichung. Die Gleichung 2) geht, weil $\frac{d\varphi_2}{dp_{n+1}} = 0$ ist, und auch $\frac{d\varphi}{dp_{n+1}} = 0$ gesetzt werden darf, über in

$$2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $\varphi = x_{n+1}$; aber es giebt ausserdem noch $2n$ weitere Lösungen $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2n}$. Man setze dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung 1) ein. Indem man die Gleichung 1) in der bekannten Abkürzung $(\varphi_1 \varphi) = 0$ schreibt, erhält man die transformirte Gleichung

$$(\varphi_1 \beta_1)\frac{d\varphi}{d\beta_1} + (\varphi_1 \beta_2)\frac{d\varphi}{d\beta_2} + \dots + (\varphi_1 \beta_{2n})\frac{d\varphi}{d\beta_{2n}} - a\frac{d\varphi}{dx_{n+1}} = 0.$$

Die Gleichungen 1) und 2) bilden ein vollständiges System, und die vorliegende Gleichung ist die Schlussgleichung des Systems. Wenn sich ein Coefficient der Schlussgleichung als Function der neuen Veränderlichen darstellt, so sind auch alle übrigen Coefficienten Function dieser Veränderlichen. Der Fall, dass sich ein Coefficient der Schlussgleichung als beständige Grösse darstellt, führt selbstverständlich zu demselben Resultate. Da hier der Coefficient von $\frac{d\varphi}{dx_{n+1}}$ gleich der Beständigen a ist, so müssen alle übrigen Coefficienten $(\varphi_1\beta_1)$ $(\varphi_1\beta_2)\dots(\varphi_1\beta_{2n})$ Function der $2n+1$ neuen Veränderlichen $\beta_1\beta_2\dots\beta_{2n}\,x_{n+1}$ sein.

Es ist kein Grund da, anzunehmen, dass dies aufhöre richtig zu sein, wenn man $a=0$ setzt, wenn also die Gleichung $\psi+ap_{n+1}=c$ übergeht in jene Gleichung $\varphi_1=c_1$, welche nur noch die $2n+1$ Veränderlichen $p_1p_2\dots p_n\,z\,x_1x_2\dots x_n$ enthält. Man hat dann wieder die simultanen Gleichungen

$$2)\ 1) \qquad (\varphi_2\varphi_1)=0 \quad (\varphi_1\varphi)=0,$$

und es folgt aus der soeben bewiesenen Eigenschaft der Coefficienten, dass man, wenn eine Lösung der Gleichung 2) gegeben ist, aus derselben noch weitere Lösungen der Gleichung 2) durch Differentiation ableitet. Wenn $\varphi=\beta_1$ eine Lösung der Gleichung 2) ist, so erhält man die weiteren Lösungen $\varphi=\beta_2$, $\varphi=\beta_3\dots$, indem man $\beta_2=(\varphi_1\beta_1)$, $\beta_3=(\varphi_1\beta_2)\dots$ setzt. Aus der Symmetrie der Gleichungen 1) und 2) folgt, dass die für die eine Gleichung nachgewiesene Eigenschaft ebenso für die andere Gleichung besteht. Wenn $\varphi=\alpha_1$ eine Lösung der Gleichung 1) ist, so ergeben sich weitere Lösungen $\varphi=\alpha_2$, $\varphi=\alpha_3\dots$ dieser Gleichung, indem man $\alpha_2=(\varphi_2\alpha_1)$, $\alpha_3=(\varphi_2\alpha_2)\dots$ setzt. Die Gleichungen 1) und 2) besitzen also diejenige Eigenschaft, welche, wie oben bemerkt worden ist, das Jacobi'sche System kennzeichnet.

Man darf nicht ausser Acht lassen, dass die hier besprochene Eigenschaft der Gleichungen 1) und 2) nur so lange fortbesteht, als nicht die ursprüngliche Form

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_k}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0, \quad k=1,2$$

eine Aenderung erleidet. Es ist also vorausgesetzt, dass nicht andere Gleichungen an die Stelle von $(\varphi_2\varphi)=0$ und $(\varphi_1\varphi)=0$ gesetzt werden, welche sich von diesen Gleichungen durch einen veränderlichen Factor unterscheiden, oder als lineare Functionen dieser Gleichungen aufzufassen sind. Ich will aber jetzt annehmen, dass die Gleichung $(\varphi_2\varphi)=0$ in der That eine solche Aenderung erleide. Man soll nämlich den Differentialquotienten p_1 mittels $\psi_1=0$ aus der Function φ_2 eliminiren, weil dann die Gleichung

$$2) \qquad (\varphi_2\varphi)=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0$$

in eine einfachere Gleichung übergeht. Bezeichnen wir die in dieser Weise transformirte Function φ_2 mit φ'_2, so ist φ'_2 unabhängig von p_1, also $\frac{d\varphi'_2}{dp_1}=0$, und es verschwindet deshalb der Coefficient von $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$. Da ferner auch φ unabhängig von p_1, also $\frac{d\varphi}{dp_1}=0$ angenommen werden darf, so erhält man die neue Gleichung

$$2')\qquad (\varphi'_2\varphi)=\sum_{i=2}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi'_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi'_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

und die Anzahl der Veränderlichen ist um 2 kleiner als in der Gleichung 2).

Man kann leicht zeigen, dass die Gleichung 2') eine lineare Verbindung der Gleichungen 2) und 1) ist. Denkt man sich nämlich in der identischen Gleichung

$$(\varphi_2\varphi)=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]$$

auf der rechten Seite den Differentialquotienten p_1 mittels $\varphi_1=c_1$ eliminirt, so geht dieselbe, mit Rücksicht darauf, dass nun φ'_2 an die Stelle von φ_2 tritt, über in

$$(\varphi_2\varphi)=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi'_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi'_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)+\frac{d\varphi'_2}{dc_1}\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)\right],$$

oder auch, wegen der bekannten Abkürzungen, in

$$a)\qquad (\varphi_2\varphi)=(\varphi'_2\varphi)+\frac{d\varphi'_2}{dc_1}(\varphi_1\varphi),$$

und man sieht nun, dass die Gleichung $(\varphi'_2\varphi)=0$ eine lineare Verbindung der Gleichungen $(\varphi_2\varphi)=0$ und $(\varphi_1\varphi)=0$ ist.

Die beiden Gleichungen

$$2')\ 1)\qquad (\varphi'_2\varphi)=0\quad (\varphi_1\varphi)=0$$

bilden selbstverständlich wieder ein vollständiges System. Doch dürfen dieselben nicht mehr als ein Jacobi'sches System angesehen werden. Was oben über die Herleitung von weiteren Lösungen der einen und der andern Gleichung gesagt worden ist, kann nun nicht mehr aufrecht gehalten werden. Wenn $\varphi=\alpha_1$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_1\varphi)=0$ ist, so geht die Gleichung a) durch die Substitution dieses Werthes φ über in $(\varphi_2\alpha_1)=(\varphi'_2\alpha_1)$. Daraus folgt zwar, dass man weitere Lösungen $\varphi=\alpha_2$, $\varphi=\alpha_3\ldots$ der Gleichung $(\varphi_1\varphi)=0$ auch jetzt wieder findet, indem man $\alpha_2=(\varphi'_2\alpha_1)$, $\alpha_3=(\varphi'_2\alpha_2)\ldots$ setzt. Wenn dagegen $\varphi=\beta_1$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi'_2\varphi)=0$ ist, so darf man den Ausdruck $\beta_2=(\varphi_1\beta_1)$ nicht mehr als eine weitere Lösung der Gleichung $(\varphi'_2\varphi)=0$ betrachten. (Vergl. I, § 7.)

§ 5. Integration der partiellen Differentialgleichung des § 2.

Die Gleichung $\psi_1=0$ haben wir in der Form $\varphi_1=c_1$ geschrieben. Um die Gleichung $\varphi_2=c_2$ zu erhalten, bestimmen wir ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(\varphi_1\varphi)=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0.$$

Dieser Gleichung zufolge ist φ eine Function der $2n+1$ Veränderlichen $p_1 p_2 \dots p_n\ z\ x_1 x_2 \dots x_n$. Wenn aber die Veränderliche p_1 mittels $\varphi_1=c_1$ aus den Coefficienten eliminirt wird, so findet man φ unabhängig von p_1, man darf $\frac{d\varphi}{dp_1}=0$ setzen und behält die einfachere Gleichung

$$1)\qquad -\frac{d\varphi_1}{dp_1}\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)+\sum_{i=2}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

worin nur noch $2n$ unabhängige Veränderliche vorkommen.

Sobald man die Function φ_2 aufgefunden hat, kann man die partielle Differentialgleichung $(\varphi_2\varphi)=0$ integriren. Man findet die Gleichung $\varphi_3=c_3$ als gemeinsames Integral der beiden Gleichungen

$$(\varphi_2\varphi)=0\quad (\varphi_1\varphi)=0.$$

Da φ_2 von p_1 unabhängig, also $\frac{d\varphi_2}{dp_1}=0$ ist, so fällt der Differentialquotient $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$ aus der Gleichung $(\varphi_2\varphi)=0$ weg. Aus demselben Grunde darf man $\frac{d\varphi}{dp_1}=0$ setzen. Eliminirt man die Veränderliche p_2 mittels $\varphi_2=c_2$, so findet man φ unabhängig von p_2, und man darf auch $\frac{d\varphi}{dp_2}=0$ setzen. Man behält die partielle Differentialgleichung

$$2)\qquad -\frac{d\varphi_2}{dp_2}\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)+\sum_{i=3}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0$$

mit nur $2n-2$ Veränderlichen. Derselben genügt $\varphi=x_1$. Es giebt noch $2n-3$ andere Lösungen. Hat man eine Lösung $\varphi=\beta_2$ durch Integration bestimmt, so erhält man die weiteren Lösungen $\beta_3=\frac{(\varphi_1\beta_2)}{(\varphi_1 x_1)}$, $\beta_4=\frac{(\varphi_1\beta_3)}{(\varphi_1 x_1)}$ u. s. w. (vergl. S. 88 dieses Jahrgangs). Die Lösungen $x_1\,\beta_2\beta_3\dots\beta_{2n-2}$ setze man als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_1\varphi)=0$ ein, und man erhält, weil $(\varphi_1 x_1)=-\frac{d\varphi}{dp_1}$ ist, die Schlussgleichung des Systems (2,1)

$$-\frac{d\varphi_1}{dp_1}\frac{d\varphi}{dx_1}+(\varphi_1\beta_2)\frac{d\varphi}{d\beta_2}+(\varphi_1\beta_3)\frac{d\varphi}{d\beta_3}+\dots+(\varphi_1\beta_{2n-2})\frac{d\varphi}{d\beta_{2n-2}}=0,$$

welche gleichfalls $2n-2$ Veränderliche hat.

Sobald man die Function φ_3 aufgefunden hat, kann man die partielle Differentialgleichung $(\varphi_3\varphi)=0$ integriren. Man findet die Gleichung $\varphi_4=c_4$ als gemeinsames Integral der drei Gleichungen

$$(\varphi_3\varphi)=0\quad (\varphi_2\varphi)=0\quad (\varphi_1\varphi)=0.$$

Da φ_3 von p_1 und p_2 unabhängig, also $\frac{d\varphi_3}{dp_1}=0$, $\frac{d\varphi_3}{dp_2}=0$ ist, so fallen die Differentialquotienten $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)$ und $\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)$ aus der Gleichung $(\varphi_3\varphi)=0$ weg. Ferner ist $\frac{d\varphi}{dp_1}=0$ und $\frac{d\varphi}{dp_2}=0$. Eliminirt man die Veränderliche p_3 mittels $\varphi_3=c_3$, so findet man φ davon unabhängig und man darf $\frac{d\varphi}{dp_3}=0$ setzen. Die Gleichung $(\varphi_3\varphi)=0$ geht dann über in

$$3)\qquad -\frac{d\varphi_3}{dp_3}\left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right)+\sum_{i=4}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_3}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_3}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

welche nur $2n-4$ Veränderliche hat. Derselben genügen $\varphi=x_1$ und $\varphi=x_2$. Ausserdem giebt es noch $2n-5$ andere Lösungen. Man bestimme aber nicht die Lösungen der Gleichung 3), sondern sofort die den Gleichungen 3) und 2) gemeinsamen Lösungen.

Man bemerke, dass die Lösungen der Gleichung 2) bekannt sind. Ausser $\varphi=x_1$ hat die Gleichung 2) die $2n-3$ weiteren Lösungen $\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2n-2}$. Die Lösung β_2 wird durch jene Function φ_3 ersetzt, welche eine gemeinsame Lösung der Gleichungen 2) und 1) ist. Die übrigen $2n-4$ Lösungen $\beta_3\beta_4\ldots\beta_{2n-2}$ setze man als neue Veränderliche in die Gleichung 3) ein. Selbstverständlich brauchen dieselben nicht alle bekannt zu sein. Man kann schon mit einer einzigen ausreichen. Denn wenn die Lösung β_3 bekannt ist, so erhält man nach § 4 die übrigen Lösungen $\beta_4=(\varphi_3\beta_3)$, $\beta_5=(\varphi_3\beta_4)$ u. s. w. Durch die angegebene Transformation führt man die Gleichung $(\varphi_3\varphi)=0$ über in die Schlussgleichung des Systems $(3,2)$:

$$(\varphi_3\beta_3)\frac{d\varphi}{d\beta_3}+(\varphi_3\beta_4)\frac{d\varphi}{d\beta_4}+\ldots+(\varphi_3\beta_{2n-2})\frac{d\varphi}{d\beta_{2n-2}}=0.$$

Dieselbe hat gleichfalls $2n-4$ Veränderliche, und es finden sich ausser $\varphi=x_1$ noch $2n-5$ andere, den Gleichungen 3) und 2) gemeinsame Lösungen. Vor der Gleichung 3) hat dieselbe insbesondere noch dies voraus, dass sie neben den $2n-4$ Veränderlichen die Grösse x_2 nicht enthält, welche in den Coefficienten der Gleichung 3) als Beständige vorkommt. Nachdem man eine den Gleichungen 3) und 2) gemeinsame Lösung $\varphi=\gamma_2$ durch Integration bestimmt hat, erhält man die weiteren gemeinsamen Lösungen $\gamma_3=\frac{(\varphi_1\gamma_2)}{(\varphi_1x_1)}$, $\gamma_4=\frac{(\varphi_1\gamma_3)}{(\varphi_1x_1)}$ u. s. w. Man setze die $2n-4$ Lösungen $x_1\,\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{2n-4}$ als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_1\varphi)=0$ ein und man erhält die Schlussgleichung des Systems $(3,2,1)$

$$-\frac{d\varphi_1}{dp_1}\frac{d\varphi}{dx_1}+(\varphi_1\gamma_2)\frac{d\varphi}{d\gamma_2}+(\varphi_1\gamma_3)\frac{d\varphi}{d\gamma_3}+\ldots+(\varphi_1\gamma_{2n-4})\frac{d\varphi}{d\gamma_{2n-4}}=0,$$

welche gleichfalls $2n-4$ Veränderliche hat.

Sobald man die Function φ_4 aufgefunden hat, kann man die partielle Differentialgleichung $(\varphi_4\varphi)=0$ integriren. Man findet die Gleichung $\varphi_5=c_5$ als gemeinsames Intergal der vier Gleichungen

$$(\varphi_4\varphi)=0 \quad (\varphi_3\varphi)=0 \quad (\varphi_2\varphi)=0 \quad (\varphi_1\varphi)=0.$$

Da φ_4 unabhängig ist von $p_1\, p_2\, p_3$, also $\frac{d\varphi_3}{dp_1}=0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_2}=0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_3}=0$ ist, so fallen die Differentialquotienten $\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right)$ aus der Gleichung $(\varphi_4\varphi)=0$ weg. Ferner ist $\frac{d\varphi}{dp_1}=0,\ \frac{d\varphi}{dp_2}=0,\ \frac{d\varphi}{dp_3}=0$ zu setzen. Man eliminire die Veränderliche p_4 mittels $\varphi_4=c_4$. Man kann dann $\frac{d\varphi}{dp_4}=0$ setzen und man behält die einfachere Gleichung

$$4) \qquad -\frac{d\varphi_4}{dp_4}\left(\frac{d\varphi}{dx_4}\right)+\sum_{i=5}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi_4}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_4}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

worin noch $2n-6$ Veränderliche vorkommen. Es genügen derselben $\varphi=x_1$ $\varphi=x_2$ $\varphi=x_3$. Ausserdem giebt es noch $2n-7$ andere Lösungen. Man bestimme aber nicht die Lösungen der Gleichung 4), sondern sofort die den Gleichungen 4), 3), 2) gemeinsamen Lösungen.

Man bemerke, dass die den Gleichungen 3) und 2) gemeinsamen Lösungen bekannt sind. Ausser $\varphi=x_1$ haben die Gleichungen 3) und 2) die $2n-5$ gemeinsamen Lösungen $\gamma_2\,\gamma_3\ldots\gamma_{2n-4}$. Die Lösung γ_2 wird durch jene Function φ_4 ersetzt, welche eine gemeinsame Lösung der Gleichungen 3), 2), 1) ist. Die übrigen $2n-6$ Lösungen $\gamma_3\,\gamma_4\ldots\gamma_{2n-4}$ setze man als neue Veränderliche in die Gleichung 4) ein. Dieselben brauchen nicht alle bekannt zu sein. Wenn eine einzige Lösung $\varphi=\gamma_3$ vorliegt, so kann man aus derselben die übrigen herleiten, nämlich $\gamma_4=(\varphi_4\gamma_3)$, $\gamma_5=(\varphi_4\gamma_4)$ u. s. w. Die vorgeschriebene Transformation führt die Gleichung 4) über in die Schlussgleichung des Systems 4,3,2):

$$(\varphi_4\gamma_3)\frac{d\varphi}{d\gamma_3}+(\varphi_4\gamma_4)\frac{d\varphi}{d\gamma_4}+\ldots+(\varphi_4\gamma_{2n-4})\frac{d\varphi}{d\gamma_{2n-4}}=0.$$

Dieselbe hat $2n-6$ Veränderliche, und man findet deshalb ausser $\varphi=x_1$ noch $2n-7$ andere, den Gleichungen 4), 3), 2) gemeinsame Lösungen. Vor der Gleichung 4), welche ebenso viele Veränderliche hat, hat dieselbe insbesondere noch dies voraus, dass sie die Grössen x_2 und x_3 nicht enthält, welche in den Coefficienten der Gleichung 4) als beständige Grössen vorkommen. Nachdem man eine den Gleichungen 4), 3), 2) gemeinsame Lösung $\varphi=\delta_2$ durch Integration bestimmt hat, erhält man weitere Lösungen $\delta_3=\frac{(\varphi_1\delta_2)}{(\varphi_1 x_1)}$, $\delta_4=\frac{(\varphi_1\delta_3)}{(\varphi_1 x_1)}$ u. s. w. Man setze die $2n-6$ Lösungen $x_1\,\delta_2\,\delta_3\ldots\delta_{2n-6}$ als neue Veränderliche in die Gleichung 1) ein, und man gelangt hierdurch zu der Schlussgleichung des Systems (4,3,2,1):

$$-\frac{d\varphi_1}{dp_1}\frac{d\varphi}{dx_1}+(\varphi_1\delta_2)\frac{d\varphi}{d\delta_2}+(\varphi_1\delta_3)\frac{d\varphi}{d\delta_3}+\ldots+(\varphi_1\delta_{2n-6})\frac{d\varphi}{d\delta_{2n-6}}=0,$$

worin gleichfalls $2n-6$ Veränderliche vorkommen.

Diesen Einzelnheiten entnehmen wir den allgemeinen Ausdruck der Methode. Die Gleichung $\varphi_2 = c_2$ ist ein Integral der partiellen Differentialgleichung 1), welche $2n$ unabhängige Veränderliche hat. Jede der übrigen Gleichungen $\varphi_3 = c_3$, $\varphi_4 = c_4 \ldots \varphi_n = c_n$ bestimmt sich als Integral eines vollständigen Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen. Die Gleichung $\varphi_3 = c_3$ genügt der partiellen Differentialgleichung 2) und der Schlussgleichung des Systems (2,1). Diese Gleichungen haben $2n - 2$ Veränderliche. Die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ genügt der Schlussgleichung des Systems (3,2) und der Schlussgleichung des Systems (3,2,1). Diese Gleichungen haben $2n - 4$ Veränderliche. Die Gleichung $\varphi_5 = c_5$ genügt der Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2) und der Schlussgleichung des Systems (4,3,2,1). Diese Gleichungen haben $2n - 6$ Veränderliche. Zur Bestimmung der Gleichung $\varphi_i = c_i$ hat man die Schlussgleichung des Systems ($i - 1$, $i - 2 \ldots 2$) und die Schlussgleichung des Systems ($i = 1$, $i - 2 \ldots 2, 1$), welche $2n - 2(i - 2)$ Veränderliche haben. Die beiden partiellen Differentialgleichungen endlich, welche zur Bestimmung von $\varphi_n = c_n$ zu gebrauchen sind, haben nur vier Veränderliche. (Vergl. I, §§ 6 und 8.)

Wenn die Differentialquotienten $p_1\, p_2 \ldots p_n$ bekannt sind, so bestimmt sich das vollständige Integral $\alpha = c$ der Gleichung $\psi_1 = 0$ durch das vollständige System der n partiellen Differentialgleichungen

$$\text{C)} \qquad \frac{d\varphi}{dz} p_1 + \frac{d\varphi}{dx_1} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dz} p_2 + \frac{d\varphi}{dx_2} = 0 \ldots \frac{d\varphi}{dz} p_n + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Aber auch dieses System kann durch ein anderes ersetzt werden, welches nur zwei Gleichungen hat. In § 3 ist gezeigt worden, dass die Function α auch den $n - 1$ partiellen Differentialgleichungen

$$\text{D)} \qquad (\varphi_1 \varphi) = 0 \quad (\varphi_2 \varphi) = 0 \ldots (\varphi_{n-1} \varphi) = 0$$

genügt. Es können deshalb bei der Bestimmung von α die Gleichungen D) an die Stelle von $n - 1$ der Gleichungen C) gesetzt werden. Jene drei Lösungen $\varphi = \varkappa_2$, $\varphi = \varkappa_3$, $\varphi = \varkappa_4$, welche ausser $\varphi = x_1$ dem System ($n - 1$, $n - 2 \ldots 2$) entsprechen, dürfen als bekannt vorausgesetzt werden, weil die Grösse φ_n als Function davon bestimmt worden ist. Die Lösung $\varkappa_2$ wird durch die Function φ_n ersetzt, und das vollständige Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$ wird deshalb als Function von $x_1 \varkappa_3 \varkappa_4$ gefunden. In Verbindung mit den Gleichungen D) setze man die Gleichung

$$\text{n)} \qquad (\varphi_n \varphi) = \frac{d\varphi}{dz} p_i + \frac{d\varphi}{dx_i} = 0,$$

worin $i > 1$ anzunehmen ist, damit $\varphi = x_1$ eine Lösung dieser Gleichung sei. Wäre nur die eine Lösung $\varphi = \varkappa_3$ bekannt, so fände man die andere in der Form $\varkappa_4 = (\varphi_n \varkappa_3)$. Die Schlussgleichung des Systems (n, $n - 1 \ldots 2$) hat nur die zwei Veränderlichen $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$. Man erhält

$$(\varphi_n \varkappa_3) \frac{d\varphi}{d\varkappa_3} + (\varphi_n \varkappa_4) \frac{d\varphi}{d\varkappa_4} = 0.$$

Ausser $\varphi = x_1$ findet man eine Lösung $\varphi = \lambda_2$. Die Schlussgleichung des Systems $(n, n-1 \ldots 2, 1)$ ist

$$-\frac{d\varphi_1}{dp_1}\frac{d\varphi}{dx_1} + (\varphi_1 \lambda_2)\frac{d\varphi}{d\lambda_2} = 0,$$

und daraus bestimmt sich das vollständige Integral der Gleichung $\psi_1 = 0$.

§ 6. Wie Jacobi die Systeme partieller Differentialgleichungen des § 2 integrirt, und die Methode des Herrn Clebsch.

Es ist in § 4 gezeigt worden, dass die partiellen Differentialgleichungen des § 2 in der ursprünglichen Gestalt, wornach die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ als Function der $2n+1$ Veränderlichen $p_1 p_2 \ldots p_n\, z\, x_1 x_2 \ldots x_n$ vorausgesetzt werden, Jacobi'sche Systeme darstellen. Das Jacobi'sche System der Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ ist daran kenntlich, dass es die Gleichung $A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = 0$ identisch erfüllt. Es ist ferner gezeigt worden, dass die partiellen Differentialgleichungen des § 2 die Eigenschaft eines Jacobi'schen Systems verlieren, sobald eine Veränderliche mittels einer der Gleichungen $\varphi_1 = c_1\ \varphi_2 = c_2 \ldots \varphi_i = c_i$ eliminirt wird. Das Verfahren, dessen sich Jacobi zur Integration der partiellen Differentialgleichungen des § 2 bedient, beruht darauf, dass jedesmal, sobald infolge einer Transformation des Systems die erwähnte Eigenschaft verloren geht, ein anderes System an dessen Stelle gesetzt wird, welches diese Eigenschaft besitzt.

Um mit Jacobi zu rechnen, schreibt man die Gleichung $\varphi_1 = c_1$ von vornherein in der Form $p_1 = \pi_1 (p_2 p_3 \ldots p_n\, z\, x_1 x_2 \ldots x_n)$, und man erhält dann die Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \sum_{i=2}^{i=n}\left[\left(\frac{d\pi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\pi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0.$$

Nachdem man ein Integral $\varphi_2 = c_2$ aufgefunden hat, schreibt man dasselbe in der Form $p_2 = \pi_2 (c_2\, p_3 p_4 \ldots p_n\, z\, x_1 x_2 \ldots x_n)$. Man erhält dann die Gleichung

$$2)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \sum_{i=3}^{i=n}\left[\left(\frac{d\pi_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\pi_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0.$$

Die Gleichung $\varphi_3 = c_3$ ist ein gemeinsames Integral der Gleichungen 2) und 1). Um ein Jacobi'sches System an deren Stelle zu setzen, bestimme man den Werth $p_1 = \pi'_1 (c_2\, p_3 p_4 \ldots p_n\, z\, x_1 x_2 \ldots x_n)$. Anstatt der Gleichung 1) hat man dann die Gleichung

$$1')\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \sum_{i=3}^{i=n}\left[\left(\frac{d\pi'_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\pi'_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0.$$

Die Gleichungen 2) und 1') bilden ein Jacobi'sches System (vergl. S. 86 dieses Jahrgangs).

Nachdem man ein Integral $\varphi_3 = c_3$ dieses Systems aufgefunden hat, bestimmt man aus demselben den Werth $p_3 = \pi_3 (c_2 c_3 p_4 p_5 \dots p_n z x_1 x_2 \dots x_n)$, und man erhält die Gleichung

$$3)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right) + \sum_{i=4}^{i=n} \left[\left(\frac{d\pi_3}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\pi_3}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0.$$

Die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ ist ein den drei Gleichungen 3), 2), 1') gemeinsames Integral. Um ein Jacobi'sches System an deren Stelle zu setzen, bestimme man die Werthe $p_2 = \pi'_2 (c_2 c_3 p_4 p_5 \dots p_n z x_1 x_2 \dots x_n)$ und $p_1 = \pi''_1 (c_2 c_3 p_4 p_5 \dots p_n z x_1 x_2 \dots x_n)$. Anstatt der Gleichungen 2) und 1') hat man nun die beiden folgenden:

$$2')\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \sum_{i=4}^{i=n} \left[\left(\frac{d\pi'_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\pi'_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0,$$

$$1'')\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \sum_{i=4}^{i=n} \left[\left(\frac{d\pi''_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\pi''_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right] = 0.$$

Die Gleichungen 3), 2'), 1'') bilden ein Jacobi'sches System.

Abgesehen davon, dass sich die Transformationen, durch welche die Gleichungen 2) und 1') in 2') und 1'') übergeführt werden, nach der Methode des § 5 als überflüssig erweisen, hat sich Jacobi, indem er diesen Weg einschlägt, einen Vortheil entgehen lassen, welcher sich auf dem von mir eingeschlagenen Wege so zu sagen von selbst darbietet. Die Lösungen der Gleichung 2) sind bekannt, weil dieselben bei der Bestimmung der Gleichung $\varphi_3 = c_3$ aufgefunden worden sind. Jacobi setzt an deren Stelle die Gleichung 2'), deren Lösungen unbekannt sind. Denn es ist die Gleichung 2') eine lineare Verbindung der Gleichungen 3) und 2) (vergl. § 4).

Um die Gleichung $\varphi_3 = c_3$ aufzustellen, habe ich ein gemeinsames Integral zweier partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-4$ Veränderlichen bestimmt. Die Jacobi'sche Methode verlangt ein gemeinsames Integral dreier partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-4$ Veränderlichen. Ebenso bestimme ich, um die Gleichung $\varphi_i = c_i$ aufzustellen, ein gemeinsames Integral zweier partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2(i-2)$ Veränderlichen. Die Jacobi'sche Methode verlangt, dass man ein gemeinsames Integral von $i-1$ partiellen Differentialgleichungen bestimme, von welchen jede $2n-2i+4$ Veränderliche hat (vergl. *Nova methodas integrandi*, § 22 im 60. Bande des Crelle'schen Journals; ferner Vorlesungen über Dynamik, S. 291).

In jener Abhandlung „Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen", welche in dem 65. Bande des Crelle'schen Journals erschienen ist, beabsichtigt Herr Clebsch die von mir gefundenen Resultate auf einem andern Wege zu erhalten. Herr Clebsch hat von jenem Verfahren, nach welchem ich die Integration eines vollständigen Systems ausführe für den Fall, dass dasselbe nicht zugleich ein Jacobisches ist (vergl. S. 87 dieses Jahrgangs), keinen Gebrauch gemacht, sondern hat immer nur Jacobi'sche Systeme integriren wollen. Zu diesem Behufe hat derselbe in der erwähnten Abhandlung S. 259 gezeigt, wie man ein vollständiges System in ein Jacobi'sches verwandeln könne. An die Stelle der von mir integrirten Systeme hat Herr Clebsch S. 265 Jacobi'sche Systeme gesetzt, welche zugleich die Eigenschaft besitzen, dass in dem i^{ten} System, welches aus i Gleichungen besteht, die $i-2$ ersten Gleichungen identisch sind mit den $i-2$ ersten Gleichungen des $i-1^{\text{ten}}$ Systems. Es ist daher in dem i^{ten} Systeme die Integration der $i-2$ ersten Gleichungen als vollzogen zu betrachten.

Bevor man zur Integration der partiellen Differentialgleichungen des § 2 schreitet, verwendet man die Gleichungen $\varphi_1=c_1$, $\varphi_2=c_2 \dots \varphi_i=c_i$, soweit dieselben jedesmal bekannt sind, zur Elimination der Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_i$. In § 5 habe ich gezeigt, wie man diese partiellen Differentialgleichungen unmittelbar in derjenigen Form integrirt, in welcher sich dieselben darstellen, wenn φ_2 frei von p_1, φ_3 frei von $p_1 p_2$, φ_i frei von $p_1 p_2 \dots p_{i-1}$ gedacht werden. Dagegen wandelt Herr Clebsch, bevor er zur Integration schreitet, diese partiellen Differentialgleichungen in Jacobi'sche Systeme um. Zum Mindesten ist diese Umwandlung eine überflüssige Arbeit, weil die ursprünglichen Gleichungen der Integration ebenso grosse Vortheile bieten, wie die Gleichungen der erwähnten Jacobi'schen Systeme. Doch ist dies nicht der einzige Vorwurf, welchen man derselben machen kann. In dem § 8 werde ich zeigen, dass die von Herrn Clebsch vorgeschlagene Umwandlung der partiellen Differentialgleichungen in Jacobi'sche Systeme der Integration andererseits wieder Schwierigkeiten bereitet, von welchen der andere Weg frei ist.

§ 7. Die Methode des Herrn A. Mayer.

Dem § 5 zufolge bestimmt sich die Gleichung $\varphi_2=c_2$ durch eine lineare partielle Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen. Die Gleichung $\varphi_i=c_i$ dagegen ist, wenn $i>2$ angenommen wird, als gemeinsames Integral zweier linearen partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2(i-2)$ Veränderlichen zu ermitteln. Nachdem man vermittelst der n Gleichungen $\varphi_i=c_i$ die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$ als Function von $z\, x_1 x_2 \dots x_n$ dargestellt hat, findet man auch das vollständige Integral $\alpha=c$ der zu integrirenden Gleichung $\psi_1=0$ als gemeinsames Integral zweier linearen partiellen Differentialgleichungen mit je zwei Veränderlichen.

An die Stelle zweier linearen partiellen Differentialgleichungen, welche ein vollständiges System bilden, setzt Herr A. Mayer eine einzige partielle Differentialgleichung, indem er nach einer bestimmten Regel eine lineare Verbindung der zwei gegebenen Differentialgleichungen herstellt (vergl.

S. 90 dieses Jahrgangs). Es ist zwar nicht erwiesen, dass sich die Integration der linearen Verbindung leichter vollzieht, als die simultane Integration der zwei gegebenen Differentialgleichungen. Wenn aber das Integral der linearen Verbindung einmal aufgefunden ist, so kann die Integration der simultanen Gleichung durch eine algebraische Operation ersetzt werden. Diese Bemerkung ist immerhin ein passender Zusatz zu der Methode des § 5.

Indem man dieses Verfahren verallgemeinert, kann man auch drei und mehr lineare partielle Differentialgleichungen, welche ein vollständiges System bilden, durch eine einzige ersetzen. Zur Bestimmung von $\varphi_4 = c_4$ bedient sich Jacobi des folgenden Systems:

$$1'')\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)+\sum_{i=4}^{i=n}\left[\left(\frac{d\pi''_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\pi''_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

$$2')\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)+\sum_{i=4}^{i=n}\left[\left(\frac{d\pi'_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\pi'_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

$$3)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx_3}\right)+\sum_{i=4}^{i=n}\left[\left(\frac{d\pi_3}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\pi_3}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right]=0,$$

worin jede Gleichung $2n-4$ Veränderliche hat. Anstatt x_2 und x_3 setze man die neuen Veränderlichen u_2 und u_3, entsprechend den Gleichungen

$$x_2-x_2^0=u_2(x_1-x_1^0)\qquad x_3-x_3^0=u_3(x_1-x_1^0),$$

wo $x_1^0\, x_2^0\, x_3^0$ passend gewählte Beständige sind. Schreibt man jene drei Gleichungen abkürzend

$$\frac{d\varphi}{dx_1}=F_1\quad \frac{d\varphi}{dx_2}=F_2\quad \frac{d\varphi}{dx_3}=F_3,$$

so gehen dieselben durch die vorstehende Transformation über in

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx_1}-\frac{d\varphi}{du_2}\,\frac{u_2}{x_1-x_1^0}-\frac{d\varphi}{du_3}\,\frac{u_3}{x_1-x_1^0}&=F_1,\\ \frac{d\varphi}{du_2}\,\frac{1}{x_1-x_1^0}&=F_2,\\ \frac{d\varphi}{du_3}\,\frac{1}{x_1-x_1^0}&=F_3.\end{aligned}$$

Setzt man an die Stelle der ersten diejenige Gleichung, welche durch die Elimination von $\frac{d\varphi}{du_2}$ und $\frac{d\varphi}{du_3}$ entsteht, so behält man das folgende System E):

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx_1}&=F_1+u_2F_2+u_3F_3,\\ \frac{d\varphi}{du_2}&=(x_1-x_1^0)\,F_2,\\ \frac{d\varphi}{du_3}&=(x_1-x_1^0)\,F_3.\end{aligned}$$

Jede Function φ, welche diesen drei Gleichungen gleichzeitig genügt, besitzt die Eigenschaft, dass sie, wenn $x_1 = x_1^0$ gesetzt wird, von u_2 und u_3 frei ist. Um dieselbe zu bestimmen, braucht man nur die erste Gleichung zu integriren. Aus den Lösungen dieser Gleichung kann man auf Grund der vorerwähnten Eigenschaft die den drei Gleichungen gemeinsamen Lösungen durch eine algebraische Operation ableiten.

Da also drei und mehr lineare partielle Differentialgleichungen, welche ein vollständiges System bilden, durch eine einzige Differentialgleichung ersetzt werden, so könnte man vielleicht meinen, die Methode des § 5 sei ganz entbehrlich, da dieselbe ja doch weniger leiste, als die vorstehende Reduction. Man würde aber dann einen wesentlichen Punkt in der Lösung der Aufgabe übersehen, wie sie in § 5 gegeben ist.

Die erste Gleichung des obigen Systems E) hat $2n-4$ Veränderliche. Ausserdem enthalten die Coefficienten dieser Gleichung noch die Grössen u_2 und u_3, welche bei der Integration als unbestimmte Beständige zu betrachten sind. Jene beiden partiellen Differentialgleichungen des § 5, deren gemeinsames Integral die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ darstellt, haben gleichfalls je $2n-4$ Veränderliche. Die Coefficienten dieser Gleichungen sind Function der $2n-3$ Lösungen $x_1\,\beta_3\,\beta_4 \ldots \beta_{2n-2}$ der Gleichung $(\varphi_2\varphi) = 0$, und von diesen Grössen kommt x_1 in der Eigenschaft einer Beständigen vor. Die partiellen Differentialgleichungen des § 5 enthalten demnach eine unbestimmte Beständige weniger als die erste Gleichung des Systems E). In gleicher Weise enthalten die zwei partiellen Differentialgleichungen, welche dem § 5 zufolge an die Stelle von $2+i$ partiellen Differentialgleichungen gesetzt werden, i unbestimmte Beständige weniger als die erste Gleichung jenes andern Systems E), welches nach der obigen Regel gebildet ist.

Vor der Jacobi'schen hat die Methode des § 5 unzweifelhaft einen Vorzug, nicht eigentlich deshalb, weil das System von $2+i$ partiellen Differentialgleichungen durch ein System von nur zwei partiellen Differentialgleichungen ersetzt wird, sondern weil die Gleichungen des letzteren Systems i unbestimmte Beständige weniger enthalten, als die des ursprünglichen Systems. Auch das Integral des letzteren Systems enthält infolge dessen i unbestimmte Beständige weniger als das Integral des ursprünglichen Systems; und dies ist jedenfalls eine Erleichterung der Integrationsaufgabe. Die von Herrn A. Mayer vorgeschlagene Methode (vergl. Math. Ann. Bd. V S. 466) leistet in dieser Rücksicht nicht mehr als auch die Jacobi'sche. Die erste Gleichung des Systems E) enthält ebensoviele unbestimmte Beständige als die Gleichungen des Jacobi'schen Systems. Es ist deshalb ein Anlass nicht gegeben, die hier besprochene Methode an die Stelle der in § 5 befolgten zu setzen, so oft es sich um das gemeinsame Integral eines vollständigen Systems von drei und mehr partiellen Differentialgleichungen handelt.

§ 8. Betrachtung derjenigen Fälle, in welchen die Methode des § 5 eine Aenderung erleidet.

Die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ ist ein den drei partiellen Differentialgleichungen

$$3)\ 2)\ 1) \qquad (\varphi_3 \varphi) = 0 \quad (\varphi_2 \varphi) = 0 \quad (\varphi_1 \varphi) = 0$$

gemeinsames Integral. Um zunächst ein den Gleichungen 3) und 2) gemeinsames Integral zu erhalten, integrirt man die Schlussgleichung des Systems (3, 2). Diese Gleichung aber wird in § 5 in folgender Weise dargestellt. Die Lösungen $\beta_3 \beta_4 \ldots \beta_{2n-2}$ der Gleichung 2) werden als bekannt vorausgesetzt, weil die Bestimmung von φ_3 als Function dieser Lösungen vorausgegangen ist. Indem man dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung 3) einsetzt, gelangt man zu der Schlussgleichung des Systems (3, 2). Wenn nun aber φ_3 als Function von x_1 und β_2 gefunden wird, wenn also ausser x_1 und φ_3 eine weitere Lösung der Gleichung 2) nicht bekannt ist, so kann man die Schlussgleichung des Systems (3, 2) nicht mehr auf dem angegebenen Wege erhalten.

Die Gleichung 3) hat $2n-4$ Veränderliche, und es giebt deshalb ausser $\varphi = x_1$ und $\varphi = x_2$ noch $2n-5$ andere Lösungen dieser Gleichung. Man bestimme eine dieser Lösungen, um dieselbe als neue Veränderliche in die Gleichung 2) einzusetzen. Man erhält weitere Lösungen der Gleichung 3) und alsdann auch die Schlussgleichung des Systems (3, 2). Es ist also in diesem Falle die Aufstellung der Schlussgleichung davon abhängig, dass man ein Integral der partiellen Differentialgleichung 3) bestimme.

Aber selbst dann, wenn ausser x_1 und φ_3 eine weitere Lösung β_3 der Gleichung 2) bekannt ist, kann es sich ereignen, dass der in § 5 vorgezeichnete Weg nicht zum Ziele führt, und man wieder genöthigt ist, die Schlussgleichung des Systems (3, 2) auf dem zuletzt angegebenen Wege darzustellen. Wenn die Lösung β_3 bekannt ist, so erhält man weitere Lösungen der Gleichung 2), indem man $\beta_4 = (\varphi_3 \beta_3)$, $\beta_5 = (\varphi_3 \beta_4)$ u. s. w. setzt. Für den Fall, dass sich $\beta_4 = (\varphi_3 \beta_3)$ als Function von $x_1\ \varphi_3\ \beta_3$ darstellt, gelangt man nicht zu einer weiteren Lösung der Gleichung 2). In der Schlussgleichung des Systems (3, 2)

$$(\varphi_3 \beta_3) \frac{d\varphi}{d\beta_3} + (\varphi_3 \beta_4) \frac{d\varphi}{d\beta_4} + \cdots + (\varphi_3 \beta_{2n-2}) \frac{d\varphi}{d\beta_{2n-2}} = 0$$

müssen aber, wenn nicht etwa $(\varphi_3 \beta_3) = 0$ ist, in welchem Falle β_3 eine den Gleichungen 3) und 2) gemeinsame Lösung ist, mindestens zwei unabhängige Veränderliche vorkommen, um ein den Gleichungen 3) und 2) gemeinsames Integral aus derselben herleiten zu können.

Ich habe hiermit gezeigt, dass der Fall eintreten kann, wo ausser x_1 und φ_3 eine weitere Lösung β_3 der Gleichung 2) vorliegt, und man doch nicht auf dem in § 5 vorgeschriebenen Wege zu der Schlussgleichung des Systems (3, 2) gelangt, wo man also, um die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ aufstellen zu können, ein System von drei partiellen Differentialgleichungen integriren muss. Wenn man den von Herrn Clebsch vorgeschlagenen Weg geht, so ist die Kenntniss einer weiteren Lösung β_3 der Gleichung 2) in keinem Falle ausreichend. Es müssen dann unbedingt mindestens zwei weitere Lösungen β_3 und β_4 der Gleichung 2) vorliegen, um die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ als gemeinsames Integral von nur zwei partiellen Differentialgleichungen darstellen zu können (vergl. S. 265 Bd. 65 des Crelle'schen Journals). Dies ist es, was ich dem von Herrn Clebsch vorgeschlagenen Verfahren, die Gleichung $\varphi_4 = c_4$ als gemeinsames Integral zweier partiellen Differentialgleichungen zu finden, weiter vorzuwerfen habe.

Wenn man auf dem in § 5 vorgezeichneten Wege zu der Schlussgleichung des Systems (3, 2) nicht gelangen kann, so ist deren Aufstellung davon abhängig, dass man zuvor ein Integral der Gleichung 3) bestimme, welche $2n-4$ Veränderliche hat. Diese ungünstigere Gestaltung der Rechnung wird aber durch einen andern Umstand mehr als aufgewogen. In dem betrachteten Falle bestimmt sich die Gleichung $\varphi_3 = c_3$ nicht mehr aus einer partiellen Differentialgleichung mit $2n-2$ Veränderlichen, wie in § 5 angenommen werden musste. Die Schlussgleichung des Systems (2, 1) hat dann nur die drei Veränderlichen $x_1\ \beta_2\ \beta_3$. Es ist in Betracht zu ziehen, dass besonders günstige Umstände zusammentreffen müssen, damit man im Stande ist, an die Stelle einer partiellen Differentialgleichung mit $2n-2$ Veränderlichen zwei andere Gleichungen zu setzen, von welchen die eine nur drei, die andere $2n-4$ Veränderliche hat.

Die Gleichung $\varphi_5 = c_5$ ist ein den vier partiellen Differentialgleichungen

$$4)\ 3)\ 2)\ 1) \qquad (\varphi_4 \varphi) = 0 \quad (\varphi_3 \varphi) = 0 \quad (\varphi_2 \varphi) = 0 \quad (\varphi_1 \varphi) = 0$$

gemeinsames Integral. Man bestimmt zunächst ein den Gleichungen 4) 3) 2) gemeinsames Integral, indem man die Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2) integrirt. Diese Schlussgleichung ist in § 5 in folgender Weise dargestellt worden. Wir haben die den Gleichungen 3) und 2) gemeinsamen Lösungen als bekannt vorausgesetzt, weil die Bestimmung von φ_4 als Function dieser Lösungen vorausgegangen ist. Wir haben dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung 4) eingesetzt und die Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2) erhalten. Wenn nun ausser x_1 und φ_4 eine weitere, den Gleichungen 3) und 2) gemeinsame Lösung nicht bekannt ist, so kommt man auf diesem Wege nicht mehr zum Ziele.

Es dürfen dann die Lösungen der Gleichung 2) als bekannt vorausgesetzt werden, weil die Bestimmung von φ_3 als Function dieser Lösungen vorausgegangen ist. Man setze dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung 4) ein, und man hat die Schlussgleichung des Systems (4, 2). Dieselbe hat $2n-6$ Veränderliche. Nachdem man eine Lösung dieser Gleichung bestimmt hat, setze man dieselbe als neue Veränderliche in die Gleichung 3) ein. Man findet noch weitere Lösungen der erwähnten Schlussgleichung und gelangt alsdann wieder zu der Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2).

Wenn auch die weiteren Lösungen der Gleichung 2) nicht bekannt sind, so dürfen doch die Lösungen der Gleichung 3) als bekannt vorausgesetzt werden; denn es haben dieselben schon bei der Bestimmung von φ_4 Verwendung gefunden. Indem man dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung 4) einsetzt, gelangt man zu der Schlussgleichung des Systems (4, 3), welche gleichfalls $2n-6$ Veränderliche hat. Man bestimme eine Lösung dieser Gleichung und setze dieselbe als neue Veränderliche in die Gleichung 2) ein. Man erhält weitere Lösungen der erwähnten Schlussgleichung und alsdann auch die Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2).

Ich nehme an, dass weitere Lösungen weder der Gleichung 2), noch der Gleichung 3) gegeben sind. Man muss dann, um die Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2) aufstellen zu können, vor Allem eine Lösung der Gleichung 4) bestimmen. Man setze dieselbe als neue Veränderliche in die Gleichung 3) ein. Man erhält weitere Lösungen der Gleichung 4) und alsdann auch die Schlussgleichung des Systems (4, 3). Alsdann bestimme man eine Lösung dieser Schlussgleichung. Indem man dieselbe als neue Veränderliche in die Gleichung 2) einsetzt, findet man weitere Lösungen dieser Schlussgleichung, und man gelangt alsdann jedenfalls zu der Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2).

Wenn die weiteren, den Gleichungen 3) und 2) gemeinsamen Lösungen nicht bekannt sind, so muss man, wie vorstehend gezeigt worden ist, um die Schlussgleichung des Systems (4, 3, 2) aufstellen zu können, zuvor das Integral einer partiellen Differentialgleichung bestimmen, welche $2n-6$ Veränderliche hat. Aber man hat andererseits zur Bestimmung der Gleichung $\varphi_4 = c_4$ nicht mehr eine partielle Differentialgleichung mit $2n-4$ Veränderlichen, wie in § 5 angenommen ist; denn die Schlussgleichung des Systems (3, 2, 1) hat dann höchstens drei Veränderliche. Es sind also in diesem Falle an die Stelle einer partiellen Differentialgleichung mit $2n-4$ Veränderlichen zwei andere partielle Differentialgleichungen getreten, von welchen die eine nur drei, die andere $2n-6$ Veränderliche hat.

Wenn ferner die weiteren Lösungen sowohl der Gleichung 2), als der Gleichung 3) unbekannt sind, so muss man eine weitere partielle Differentialgleichung integriren, welche gleichfalls $2n-6$ Veränderliche hat. Dagegen hat bei der Bestimmung der Gleichung $\varphi_4 = c_4$ die Schlussgleichung des Systems (3, 2), deren Integration der Aufstellung der Schlussgleichung des Systems (3, 2, 1) vorausgeht, nicht $2n-4$ Veränderliche, wie in § 5 angenommen worden ist, sondern nur drei Veränderliche. Es sind auch hier an die Stelle einer partiellen Differentialgleichung mit $2n-4$ Veränderlichen zwei andere partielle Differentialgleichungen getreten, welche beziehungsweise drei und $2n-6$ Veränderliche haben. (Vergl. I, § 9.)

Ich habe hiermit gezeigt, dass sich in den besprochenen Ausnahmefällen, wo man von dem in § 5 vorgezeichneten Wege abweichen muss, die Lösung der Aufgabe noch vortheilhafter gestaltet, als sich dort herausgestellt hat.

§ 9. Wie Jacobi die abhängige Veränderliche aus der partiellen Differentialgleichung $\psi_1 = 0$ entfernt.

Es ist noch ein Punkt zu besprechen, in welchem meine Methode von der Jacobi'schen abweicht. Man hat, um die Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$ als Function von $z\, x_1 x_2 \dots x_n$ darzustellen, $n-1$ partielle Differentialgleichungen mit beziehungsweise $2n$, $2n-2$, $2n-4 \dots 4$ Veränderlichen. Diese Gleichungen gruppiren sich zu $n-1$ verschiedenen Systemen, und die Integrale dieser Systeme $\varphi_2 = c_2$, $\varphi_3 = c_3 \dots \varphi_n = c_n$, in Verbindung mit der zu integrirenden Gleichung

$$\varphi_1(p_1 p_2 \dots p_n\; z\; x_1 x_2 \dots x_n) = c_1$$

geben die gesuchten Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$. Zu jenen $n-1$ partiellen Differentialgleichungen habe ich noch eine partielle Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen hinzugefügt, und gezeigt, dass das gemeinsame Integral dieser n Gleichungen ein vollständiges Integral der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ ausdrückt. (Vergl. § 5.)

Jacobi beginnt damit, die partielle Differentialgleichung $\psi_1 = 0$ von der abhängigen Veränderlichen z frei zu machen. In seinen Vorlesungen über Dynamik, S. 237, heisst es: „Wir werden annehmen, dass die gesuchte Function selbst in der Differentialgleichung nicht vorkommt. Diese Annahme ist keine wesentliche Beschränkung, da sich der allgemeine Fall immer auf diesen zurückführen lässt. In der That, wenn die vorgelegte Differentialgleichung die gesuchte Function z enthält, also die Form

$$1)\qquad \psi_1\left(\frac{dz}{dx_1}\; \frac{dz}{dx_2} \dots \frac{dz}{dx_n}\; z\; x_1 x_2 \dots x_n\right) = 0$$

hat, so führe man eine neue unabhängige Veränderliche x und eine neue abhängige ω durch die Gleichung $\omega = xz$ ein; dann wird

$$\frac{d\omega}{dx} = z \quad \frac{d\omega}{dx_1} = x\frac{dz}{dx_1} \dots \frac{d\omega}{dx_n} = x\frac{dz}{dx_n},$$

also

$$z = \frac{d\omega}{dx} \quad \frac{dz}{dx_1} = \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_1} \dots \frac{dz}{dx_n} = \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_n}.$$

Daher geht die vorgelegte Differentialgleichung über in

$$2)\qquad \psi_1\left(\frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_1}\; \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_2} \dots \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_n}\; \frac{d\omega}{dx}\; x_1 x_2 \dots x_n\right) = 0,$$

welche zwar eine unabhängige Variabele mehr enthält, nämlich x, in welcher aber ω nicht selbst auftritt, sondern nur seine Differentialquotienten nach $x x_1 x_2 \ldots x_n$. Wir können uns also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, auf den Fall beschränken, wo

$$\psi_1\left(\frac{dz}{dx_1}\,\frac{dz}{dx_2}\cdots\frac{dz}{dx_n}\;x_1 x_2 \ldots x_n\right)=0$$

die gegebene Differentialgleichung ist, und z selbst in der Gleichung nicht vorkommt."

Von der Jacobi'schen Transformation Gebrauch machend, hat man, um die $n+1$ Differentialquotienten $p p_1 p_2 \ldots p_n$ als Function von $x x_1 x_2 \ldots x_n$ zu bestimmen, n partielle Differentialgleichungen mit beziehungsweise $2n+1$, $2n-1$, $2n-3 \ldots 5, 3$ Veränderlichen. Diese Gleichungen werden zu n verschiedenen Systemen gruppirt, und die Integrale dieser Systeme in Verbindung mit der zu integrirenden Gleichung geben die gesuchten Differentialquotienten. Denkt man sich die letzte dieser partiellen Differentialgleichungen, welche nur drei Veränderliche hat, als neu hinzukommend, so hat jede der übrigen, nach Jacobi zu integrirenden partiellen Differentialgleichungen eine Veränderliche mehr als die von mir aufgestellten.

Diese Ungleichheit in der Anzahl der Veränderlichen rührt daher, dass das obige, von Jacobi zur Integration der Gleichung $\psi_1=0$ gegebene Verfahren noch unfertig ist. Nachdem man die $n+1$ Differentialquotienten $\frac{d\omega}{dx}$ $\frac{d\omega}{dx_1}\,\frac{d\omega}{dx_2}\cdots\frac{d\omega}{dx_n}$ als Function von $x x_1 x_2 \ldots x_n$ bestimmt hat, soll man durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$d\omega=\frac{d\omega}{dx_1}\,dx_1+\frac{d\omega}{dx_2}\,dx_2+\ldots+\frac{d\omega}{dx_n}\,dx_n+\frac{d\omega}{dx}\,dx$$

ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung

$$2)\qquad \psi_1\left(\frac{1}{x}\,\frac{d\omega}{dx_1}\quad\frac{1}{x}\,\frac{d\omega}{dx_2}\cdots\frac{1}{x}\,\frac{d\omega}{dx_n}\quad\frac{d\omega}{dx}\quad x_1 x_2 \ldots x_n\right)=0$$

bestimmen. Es kann aber nicht die Rede davon sein, dass dies zugleich ein vollständiges Integral der ursprünglichen Gleichung $\psi_1=0$. Man weiss nur, dass das letztere in dem allgemeinen Integrale der Gleichung 2) enthalten ist. Der Gleichung 2) zufolge ist ω eine Function von $x x_1 x_2 \ldots x_n$. Aus der ursprünglichen Gleichung $\psi_1=0$ aber soll $z=\frac{\omega}{x}$ als Function von $x_1 x_2 \ldots x_n$ bestimmt werden. Hiernach ist das vollständige Integral der Gleichung 2) nur dann zugleich ein vollständiges Integral der Gleichung 1), wenn der Quotient $\frac{\omega}{x}$ von x unabhängig ist. Dass sich diese Forderung von selbst erfülle, wenn das vollständige Integral der Gleichung 2) nach der obigen Regel bestimmt wird, darf nicht vorausgesetzt werden.

Um das von Jacobi gegebene Verfahren zum Abschlusse zu bringen, muss man ein vollständiges Integral der Gleichung 2) von solcher Beschaffenheit bestimmen, dass der Quotient $\frac{\omega}{x}$ von der Veränderlichen x frei ist. Man kann dies dadurch erreichen, dass man in den n partiellen Differentialgleichungen mit beziehungsweise $2n+1$, $2n-1$, $2n-3 \ldots 5$, 3 Veränderlichen eine Transformation anbringt. Da nicht allein der Quotient $\frac{\omega}{x}$ von x unabhängig sein soll, sondern auch jede der Grössen $\frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_1}$, $\frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_2} \ldots \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_n}$, $\frac{d\omega}{dx}$, so setze man $\frac{d\omega}{dx}=z$, und anstatt $\frac{d\omega}{dx_1}\,\frac{d\omega}{dx_2}\ldots\frac{d\omega}{dx_n}$ die neuen Veränderlichen $p_1=\frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_1}$, $p_2=\frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_2} \ldots p_n=\frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx_n}$. Die Veränderliche x wird dann in den partiellen Differentialgleichungen nicht mehr vorkommen und man darf den nach x genommenen Differentialquotienten der gesuchten Function streichen. Setzt man aber $\frac{d\varphi}{dx}=0$, so wird die Anzahl der Veränderlichen in allen n partiellen Differentialgleichungen um die Einheit vermindert. Es ist ferner zu bemerken, dass die vollständige Differentialgleichung

$$d\omega=\frac{d\omega}{dx_1}dx_1+\frac{d\omega}{dx_2}dx_2+\ldots+\frac{d\omega}{dx_n}dx_n+\frac{d\omega}{dx}dx$$

ganz überflüssig ist. Nachdem man den Differentialquotienten $\frac{d\omega}{dx}=z$ als Function von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ aufgefunden hat, kennt man zugleich ein vollständiges Integral der Gleichung 1). Das in dieser Weise vervollständigte Jacobi'sche Verfahren führt nothwendig zu denjenigen partiellen Differentialgleichungen, aus welchen ich in § 5 das vollständige Integral der Gleichung $\varphi_1=c_1$ hergeleitet habe.

Ich kann noch die Bemerkung beifügen, dass nur diese Darstellung der Integrationsmethode, welche auf die Anwesenheit der abhängigen Veränderlichen z Rücksicht nimmt, als die Verallgemeinerung jener Methode angesehen werden kann, welche zuerst Lagrange für drei Veränderliche vor jetzt beiläufig einem Jahrhundert veröffentlicht hat.

Bemerkung.

Die Form der Fragstellung S. 82 über dem § 4 meines Aufsatzes: „Ueber die Integration der vollständigen Differentialgleichung $Z\,dz+Y\,dy+X\,dx=0$" wird beanstandet. Nachträglich stelle ich dieselbe in folgender Weise: „Ist die Auffindung des Integrals gefördert, wenn man die Methode des Herrn P. du Bois-Reymond anstatt der Euler'schen anwendet?"

A. Weiler.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Kleinere Mittheilungen.

XI. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl wahrer Beobachtungsfehler.

S. 145 flg. des laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift giebt Herr Mees einen Aufsatz mit gleicher Ueberschrift und bemängelt darin u. A. auch eine Note meiner Ausgleichungsrechnung. Der Zweck des Folgenden ist nun der, zu zeigen, dass Herr Mees sich nicht nur in der Beurtheilung meiner Arbeit, sondern auch an anderen Stellen seines Aufsatzes irrt.

In der bekannten Abhandlung von Gauss über die Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen betrachtet er die Sache von zwei Standpunkten aus. Er sucht erstens bei n gegebenen wahren Fehlern ε die Präcision h, welche als wahrscheinlichste Ursache auftritt, und findet bekanntlich (wenn die eckige Klammer ein Summenzeichen bedeutet)

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon^2]}}$$

unter Annahme seines Fehlergesetzes. Der wahrscheinliche Beobachtungsfehlers ϱ wird alsdann

$$\varrho = 0{,}6745 \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}.$$

Gauss ermittelt zweitens die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der m^{ten} Potenzen der absoluten Werthe der Fehler ε bei bekanntem Fehlergesetze (also auch bei gegebenem h, falls es das Gauss'sche ist) zwischen gewisse Grenzen falle. Er giebt für diese Summe die wahrscheinlichen Grenzen an und diese hängen in der That ab von dem Durchschnitt der Quadrate der Abweichungen aller möglichen Summen von dem durchschnittlichen Werthe nS_m dieser Summen. Wenn nun Herr Mees meint (S. 146), Gauss schätze willkürlich nach den zweiten Potenzen und man könnte mit gleichem Rechte auch andere Potenzen nehmen (wie er nun z. B. die dritten Potenzen vornimmt), so ist das mithin ein Irrthum. Gauss lässt sich eben streng von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung leiten und knüpft dabei an eine ähnliche Betrachtung von Laplace an, „die sich leicht verallgemeinern lasse“; aber freilich unterdrückt er den Beweis und giebt nur Resultate.

Obgleich Herr Mees in dieser Sache sich versehen hat, so würde immerhin seine Behandlung der dritten Potenzen der genannten Abweichungen von Interesse sein, wäre sie nicht principiell verfehlt. Wir setzen mit Herrn Mees (S. 146 unten und flg.)

$$\sigma_m = \frac{[val.\ abs.\ \varepsilon^m]}{n}, \quad \omega = \sigma_m - S_m.$$

Will man nun die Genauigkeit von S_m mittelst ungerader Potenzen von ω schätzen, so darf man nicht in der Weise des Herrn Mees vorgehen (die nur für gerade Potenzen zulässig ist), weil ω auch negativ wird und nur *val. abs.* ω in Betracht kommt. Dies wird ganz vergessen und sind demnach die Resultate S. 149 oben zu verwerfen!

Es sei gestattet anzugeben, von welcher Formel bei Bildung des Durchschnitts von ω^3 hätte ausgegangen werden müssen. Ist $\psi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)$ das Fehlergesetz für *val. abs.* ε und wird dasselbe der Einfachheit halber continuirlich von $\varepsilon = 0$ bis ∞ angenommen $\left(\text{welche Annahme z. B. zutrifft bei dem Gauss'schen Gesetz } \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\right)$, so ist der Durchschnitt aller möglichen Werthe von *val. abs.* ω^3 gleich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty d\varepsilon_1 \int_0^\infty d\varepsilon_2 \ldots \int_0^\infty d\varepsilon_n \,.\, \omega^3 \psi(\varepsilon_1)\,\psi(\varepsilon_2)\ldots\psi(\varepsilon_n)\, \sin u\omega.$$

Man bemerkt, dass hierin ω^3 mit

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u} \sin u\omega$$

multiplicirt ist, welcher Ausdruck für positive ω gleich $+1$, für negative ω aber -1 ist.

S. 150 sagt weiter Herr Mees, dass ich in meiner Ausgleichungsrechnung den Fehler beginge, die Genauigkeit des Durchschnitts der m^{ten} Potenzen der ε willkürlich nach den Quadraten der Abweichungen ω zu beurtheilen. In der That würde hier ein Fehler sein, wenn nicht in der Note S. 26 der Ausgleichungsrechnung (die auch Herr Mees S. 150 abdruckt) auf den Umstand aufmerksam gemacht worden wäre, dass eigentlich eine genauere Untersuchung hier am Platze sein würde. Den langen, von Gauss unterdrückten Beweis zu geben (obwohl bei anderer Anlage der Entwickelungen ich es nicht unterlassen haben würde), passte gar nicht in den Gang meines Buches. Ueberhaupt fasse ich die Sache dort ganz anders auf und verweise demgemäss auf § 3 meiner Ausgleichungsrechnung.

Dieser § 3 handelt von den Genauigkeitsmaassen einer Beobachtungsreihe. Er beweist, dass gleichzeitig folgende Ungleichungen bestehen:

$$G' > G'' \left\{ \begin{array}{l} \varrho' < \varrho'', \\ \vartheta' < \vartheta'', \\ \mu' < \mu'', \\ \sqrt[m]{S'_m} < \sqrt[m]{S''_m}, \end{array} \right.$$

worin für zwei Beobachtungsreihen $(n = \infty)$ G die Genauigkeit, ϱ den wahrscheinlichen, ϑ den durchschnittlichen, μ den mittlern Fehler der Beobachtungen bezeichnen. Giltig ist der Satz aber nur, falls $\varphi'(\varepsilon)$ und $\varphi''(\varepsilon)$ lediglich für einen Werth von ε gleich werden. (Selbstverständlich muss $\varphi(\varepsilon)$ so genommen sein, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$ ist). Ausserdem ist Voraussetzung, dass $\varphi(\varepsilon)$, entsprechend zufälligen Fehlern, eine gerade Function von ε sei. Diese letztere Voraussetzung hätte ich weglassen können, da nur $\psi(\varepsilon) = \varphi(+\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)$ in Betracht kommt und, wie leicht zu sehen ist, der Satz auch gilt, wenn $\psi'(\varepsilon)$ und $\psi''(\varepsilon)$ nur einmal gleich werden. Aber wenn $\varphi(\varepsilon)$ nicht eine gerade Function von ε ist, so ist es eher zu erwarten, dass die $\psi(\varepsilon)$ mehr als einmal gleich werden, als das Gegentheil; die Giltigkeit des Satzes ist also doch dann fraglich!

In meiner Note behaupte ich nun, dass offenbar die ω ein solches Gesetz befolgen, wobei die Giltigkeit des Satzes zweifelhaft ist, und beziehe mich dabei auf die Formeln

$$\omega^2 = \left(\frac{[\varepsilon^m]}{n} - S_m\right)^2,$$

$$\text{Grenzen von } \omega^2 = (a^m - S_m)^2, \text{ resp. } S^2_m,$$

welche eintreten für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = a$, dem grössten möglichen Beobachtungsfehler, und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n =$ Null. Herr Mees beeilt sich, die zweite Grenze S^2_m in Null zu corrigiren; es soll aber offenbar $(-S_m)^2$ heissen, wie Jeder sieht, der die Grenzwerthe der ε wirklich einsetzt, und dabei kann einem nicht die Bemerkung entgehen, dass das Wahrscheinlichkeitsgesetz der ω eine Function von ω sein muss, die nicht gerade ist.

Ich habe verschiedene solche Gesetze abgeleitet* und gebe hier nur eins an.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Fehlern die Summe

$$[\varepsilon^2] \text{ zwischen die Grenzen } n\left(\sigma_2 - \frac{\delta}{2}\right) \text{ und } n\left(\sigma_2 + \frac{\delta}{2}\right)$$

falle, wo δ sehr klein ist, wird (unter Annahme des Gauss'schen Gesetzes) gleich

---

* In einem grösseren Aufsatze, der schon zur Veröffentlichung bereit ist, führe ich dies weiter aus und theile darin u. A. auch einen Beweis für die obenerwähnten Gauss'chen Formeln mit.

$$w = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (n\delta)(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2 n \sigma_2}.$$

w ist Null für σ_2 = Null und ∞ und ein Maximum für

$$\sigma_2 = \frac{1}{2h^2}\left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Mithin ist der wahrscheinlichste Werth von σ_2 nicht S_2, denn dies ist gleich $\frac{1}{2h^2}$. Aber wenn σ_2 gegeben ist und h^2 gesucht wird, so findet man doch aus dem Ausdrucke von w die wahrscheinlichste Hypothese für h^2 gleich

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma_2} = \frac{n}{2[\varepsilon^2]},$$

würde aber sehr irren, wollte man h^2 mittelst der vorigen Relation aus σ_2 ableiten.*

Ein Widerspruch ist hier nirgends zu finden. Man denke daran, dass beim Gauss'schen Fehlergesetz, wo

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

der wahrscheinlichste Werth von ε^2 gleich Null ist und nicht gleich dem Durchschnitt $\frac{1}{2h^2}$ aller möglichen ε^2; ist aber ein ε^2 gegeben, so folgt die wahrscheinlichste Präcision gleich $\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon^2}}$.

Wenn Herr Mees S. 151 unten sagt, S_m sei der wahrscheinlichste Werth von $\frac{[\varepsilon^m]}{n}$, so ist das, wie schon allein das gegebene Beispiel zeigt, streng genommen falsch und nur für grosses n nahe richtig. Nur für diesen Fall ist auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz der ω sehr nahe von der Form des Gauss'schen Gesetzes (wie ich u. A. auch für obiges specielles w später nachweisen werde).

Was nun endlich noch S. 152 angeführt wird, ist gegenstandslos, da, wie bereits oben bemerkt, Gauss gar nicht in der vermutheten willkürlichen Weise vorgegangen ist, mithin bei seinen Entwickelungen das Gesetz der ω überhaupt gar nicht in Frage kommt.

Aachen, April 1875. HELMERT.

---

* Um neuem Missverständniss vorzubeugen, erwähne ich ausdrücklich, dass $h^2 = \frac{1}{2\sigma_2}$ nach der hier gegebenen Darstellung nur als diejenige wahrscheinlichste Hypothese auftritt, welche sich aus σ_2 berechnen lässt. Unentschieden bleibt dabei vorläufig, ob mittelst eines andern σ_m eine noch vortheilhaftere Hypothese möglich wäre.

XII. Ueber die centralen und elliptischen Coordinaten.

1. Nehmen wir auf dem Ellipsoid

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

einen Punkt $P\,(x_1 y_1 z_1)$ an, so ist die Gleichung seiner conjugirten Diametralebene

$$2)\qquad \frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}+\frac{z z_1}{c_2}=0.$$

Wir werden jetzt die Axen des Durchschnittes dieser Ebene mit dem Ellipsoid 1) bestimmen. Sei dann r die Länge, $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel eines Halbmessers in dieser Ebene, so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$3)\qquad \frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}+\frac{z_1\cos\gamma}{c^2}=0,$$

$$4)\qquad \frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=\frac{1}{r^2},$$

$$5)\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Damit der Halbmesser mit einer der Axen zusammenfalle, muss r ein Maximum oder Minimum sein, also sein Differential gleich Null gesetzt werden. Aus 3), 4) und 5) folgt dann

$$\frac{x_1}{a^2}\,d.\cos\alpha+\frac{y_1}{b^2}\,d.\cos\beta+\frac{z_1}{c^2}\,d.\cos\gamma=0,$$

$$\frac{\cos\alpha}{a^2}\,d.\cos\alpha+\frac{\cos\beta}{b^2}\,d.\cos\beta+\frac{\cos\gamma}{c^2}\,d.\cos\gamma=0,$$

$$\cos\alpha\, d.\cos\alpha+\cos\beta\, d.\cos\beta+\cos\gamma\, d.\cos\gamma=0,$$

und diese drei Gleichungen geben durch Elimination der Differentiale

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} \\ \frac{\cos\alpha}{a^2} & \frac{\cos\beta}{b^2} & \frac{\cos\gamma}{c^2} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{\cos\alpha} & \frac{y_1}{\cos\beta} & \frac{z_1}{\cos\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=0,$$

oder in einfacher Form

$$6)\qquad \frac{x_1}{\cos\alpha}(b^2-c^2)+\frac{y_1}{\cos\beta}(c^2-a^2)+\frac{z_1}{\cos\gamma}(a^2-b^2)=0.$$

Durch Auflösung von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus 3), 5) und 6) erhält man die Richtung, und ferner aus 4) die Länge der zu bestimmenden Axen. Setzt man hierzu 3) in der Form

$$\frac{x_1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{y_1}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{z_1}{\cos\gamma}\cdot\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=0,$$

so giebt sie in Verbindung mit 6)

$$\frac{\frac{x_1}{\cos\alpha}}{\begin{vmatrix} c^2-a^2 & a^2-b^2 \\ \frac{\cos^2\beta}{b^2} & \frac{\cos^2\gamma}{c^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{y_1}{\cos\beta}}{\begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-c^2 \\ \frac{\cos^2\gamma}{c^2} & \frac{\cos^2\alpha}{a^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{z_1}{\cos\gamma}}{\begin{vmatrix} b^2-c^2 & a^2-b^2 \\ \frac{\cos^2\alpha}{a^2} & \frac{\cos^2\beta}{b^2} \end{vmatrix}};$$

oder, mittels der Beziehungen 4) und 5):

$$\frac{\frac{x_1}{\cos\alpha}}{a^2-r^2} = \frac{\frac{y_1}{\cos\beta}}{b^2-r^2} = \frac{\frac{z_1}{\cos\gamma}}{c^2-r^2},$$

und hierdurch wird

$$7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\alpha = \frac{x_1}{a^2-r^2}Q, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{b^2-r^2}Q, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{c^2-r^2}Q, \\ &Q^2\left[\frac{x_1^2}{(a^2-r^2)^2} + \frac{y_1^2}{(b^2-r^2)^2} + \frac{z_1^2}{(c^2-r^2)^2}\right] = 1. \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Werthe in 4) ein, so folgt noch

$$8)\quad \frac{x_1^2}{a^2(a^2-r^2)} + \frac{y_1^2}{b^2(b^2-r^2)} + \frac{z_1^2}{c^2(c^2-r^2)} = 0.$$

Hiermit ist die gegebene Aufgabe völlig gelöst. Denn 8) giebt die Länge der Axen, da sie eine quadratische Gleichung in r^2 mit zwei rationalen positiven Wurzeln ist, von denen die eine zwischen a^2 und b^2, die andere zwischen b^2 und c^2 liegt. Nennen wir die erste r_1^2, die zweite r_2^2, so folgt

$$9)\quad a^2 > r_1^2 > b^2 > r_2^2 > c^2.$$

Ferner wird die Richtung der Axen durch die Gleichungen 7) bestimmt. Da $r=0$ keine Wurzel von 8) sein kann, so darf man setzen

$$\frac{r^2 x_1^2}{a^2(a^2-r^2)} + \frac{r^2 y_1^2}{b^2(b^2-r^2)} + \frac{r^2 z_1^2}{c^2(c^2-r^2)} = 0,$$

und da der Punkt P auf dem Ellipsoid 1) liegt, hat man auch

$$10)\quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Addirt man diese zur vorigen Gleichung, so wird

$$11)\quad \frac{x_1^2}{a^2-r^2} + \frac{y_1^2}{b^2-r^2} + \frac{z_1^2}{c^2-r^2} = 1.$$

Diese cubische Gleichung in r^2 hat drei rationale Wurzeln, deren eine durch die Relation 10) Null wird. Die beiden anderen geben wieder die Axen r_1^2 und r_2^2.

Aus 7) und 11) ergiebt sich noch

$$12)\quad Q = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma,$$

so dass Q geometrisch die Projection des Halbmessers von P auf den Axen seiner conjugirten Ebene darstellt.

2. Nennt man jetzt die conjugirte Diametralebene eines Punktes P des Ellipsoids seinen centralen Durchschnitt, so ist dieser durch seine

beiden Axen genau bestimmt. Ebenso, wie sich nach 8) aus den Coordinaten des Punktes P der Werth dieser Axen ergiebt, bestimmt umgekehrt die Länge der beiden Axen, oder die Länge und Richtung einer Axe den Ort des Punktes auf dem Ellipsoid. Deshalb werden wir hier die Axen r_1 und r_2 die centralen Coordinaten des Punktes P nennen.

Um die gewöhnlichen Coordinaten in centrale Coordinaten zu verwandeln, nehmen wir nach 10) und 8) die drei Gleichungen

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2(a^2-r_1^2)}+\frac{y_1^2}{b^2(b^2-r_1^2)}+\frac{z_1^2}{c^2(c^2-r_1^2)}=0,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2(a^2-r_2^2)}+\frac{y_1^2}{b^2(b^2-r_2^2)}+\frac{z_1^2}{c^2(c^2-r_2^2)}=0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Auflösung von x_1^2, y_1^2, z_1^2

$$13)\quad \frac{x_1^2}{a^2}=\frac{(a^2-r_1^2)(a^2-r_2^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad \frac{y_1^2}{b^2}=\frac{(b^2-r_1^2)(b^2-r_2^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\quad \frac{z_1^2}{c^2}=\frac{(c^2-r_1^2)(c^2-r_2^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

welches mit der Bedingung 9) völlig übereinstimmt. Aus den symmetrischen Formeln 13) zeigt es sich, wie innig die centralen mit den gewöhnlichen Coordinaten zusammenhängen und daher die ersteren geeignet sind für die Bestimmung von Punkten des Ellipsoids.

In Uebereinstimmung mit 9) darf man setzen

$$14)\qquad r_1^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi,\quad r_2^2=b^2\cos^2\chi+c^2\sin^2\chi,$$

denn hierdurch wird ausgedrückt, dass der Werth von r_1^2 zwischen a^2 und b^2, der von r_2^2 zwischen b^2 und c^2 liegt. Indem wir jetzt die Werthe aus 14) in 13) übertragen, erhalten wir

$$15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a^2}&=\frac{\sin^2\varphi}{a^2-c^2}(a^2-b^2\cos^2\chi-c^2\sin^2\chi),\\ \frac{y_1^2}{b^2}&=\cos^2\varphi\sin^2\chi,\\ \frac{z_1^2}{c^2}&=\frac{\cos^2\chi}{a^2-c^2}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi-c^2). \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln geben gerade die Transformation wieder, durch welche es Jacobi gelungen ist, die Differentialgleichung der geodätischen Curven des Ellipsoids zu integriren*, ohne dass er eine ausreichende Erklärung und Bedeutung dieser Formeln gegeben hat. Später werden dieselben ohne einige erläuternde Bemerkungen von Joachimsthal übernommen.**

Die geometrische Bedeutung der Winkel φ und χ ist leicht aus 14) abzuleiten. Geht man von der bekannten Eigenschaft der Ellipse aus, dass

* Journal von Crelle, 19. Bd. S. 309.

** Journal von Crelle, 26. Bd. S. 155.

alle Parallelogramme, welche entstehen, wenn man die Endpunkte irgend zweier conjugirten Durchmesser verbindet, flächengleich sind, so findet man sofort, dass φ den Winkel bezeichnet, der in der Ellipse (ab) der Durchmesser, auf welchem der Perpendikel, aus dem Endpunkte des conjugirten Durchmessers gefällt, r_1 ist, mit der Axe b ausmacht, und ebenso χ den Winkel, welcher in der Ellipse (bc) der Durchmesser, worauf der conjugirte Perpendikel r_2 ist, mit der Axe c ausmacht.

3. Setzt man in der Gleichung der Diametralebene 2) den Werth von $x_1 y_1 z_1$ aus 7) ein, so erhält man

$$16)\qquad x\cos\alpha\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)+y\cos\beta\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z\cos\gamma\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

welches in Verbindung mit 4) die Gleichung des centralen Durchschnittes giebt, wovon $(r\alpha\beta\gamma)$ eine der Axen ist, und zwar die grosse Axe, wenn $a>r>b$, und die kleine, wenn $b>r>c$.

Für $r=Constant$ ist die Enveloppe der Ebene 16) die Kegelfläche

$$17)\qquad x^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0.$$

Der Durchschnitt dieser Kegelfläche mit dem Ellipsoid 1) ist auch der Durchschnitt des Ellipsoids mit der Kugelfläche

$$18)\qquad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

so dass die Fläche 17) ein Umdrehungskegel ist.

Bei allen Tangentenebenen der Kegelfläche 17) ist deshalb die Berührungsgerade eine der Axen des elliptischen Durchschnittes. Umgekehrt ist ein Halbmesser des Ellipsoids eine der Axen der Ebene, die den Umdrehungskegel berührt, welcher den Halbmesser zur erzeugenden Geraden und die grösste oder kleinste Axe des Ellipsoids zur Axe hat. So kann man leicht die Ebene construiren, von welcher ein gegebener Halbmesser des Ellipsoids eine der Axen ist.

Hiermit ist nun auch jeder Punkt des Ellipsoids durch seine centralen Coordinaten geometrisch bestimmt. Beschreibt man noch mit den gegebenen Coordinaten r_1 und r_2 Umdrehungskegel, deren eine die grösste Axe des Ellipsoids, die andere die kleinste Axe desselben zur Revolutionsaxe hat, so ist die gemeinschaftliche Berührungsebene dieser Kegelflächen die centrale Ebene und der conjugirte Punkt des Ellipsoids der zu bestimmende Punkt.

4. Die centralen Coordinaten eines Punktes P des Ellipsoids sind parallel zu den Axen der Indicatrix dieses Punktes, das heisst zu den beiden Hauptrichtungen. Bewegt der Punkt auf dem Ellipsoid sich fortwährend längs einer der Hauptrichtungen und beschreibt deshalb eine Krümmungscurve, so dreht die Tangentenebene um die andere Hauptrichtung, und die centrale Ebene um die parallele Axe. Die centralen Ebenen aller Punkte

einer Krümmungscurve haben deshalb eine gleiche Axe, so dass sie alle eine Kegelfläche 17) umhüllen.

Während umgekehrt die centrale Ebene diese Kegelfläche 17) umhüllt, beschreibt der conjugirte Punkt auf dem Ellipsoid eine Krümmungscurve.

Die Gleichungen der Krümmungscurven nehmen also, in centralen Coordinaten ausgedrückt, die einfache Form an:

$$19)\qquad r_1 = Constant \text{ und } r_2 = Constant,$$

worin der Werth der Constanten bestimmt wird durch die centralen Coordinaten des Punktes, von welchem die beiden Krümmungscurven ausgehen. Man erhält dann auch die Gleichungen der Krümmungscurven in gewöhnlichen Coordinaten, indem man aus 13) erst r_1 und nachher r_2 eliminirt, was leicht zu verificiren ist.

Jede Gleichung zwischen r_1 und r_2 giebt eine Curve des Ellipsoids, in centralen Coordinaten ausgedrückt, wobei die Krümmungscurven die Rolle der Geraden spielen, welche im gewöhnlichen Flächencoordinatensystem parallel zu den Axen gezogen sind.

So wird die Gleichung in centralen Coordinaten des Ortes aller Punkte des Ellipsoids, für welchen die Entfernung vom Centrum bis zur Tangentenebene constant ist:

$$r_1 r_2 = Constant,$$

und die Gleichung des Durchschnittes des Ellipsoids mit einem Umdrehungskegel, welche dieselben Axen hat:

$$r_1^2 + r_2^2 = Constant.$$

Die Kreis- oder Nabelpunkte werden bestimmt durch die einfache Relation

$$r_1 = r_2 = b,$$

und die Scheitel

der Axe $2a$ durch $r_1 = b,\ r_2 = c,$

" " $2b$ " $r_1 = a,\ r_2 = c,$

" " $2c$ " $r_1 = a,\ r_2 = b.$

Das Längenelement einer Curve des Ellipsoids findet man durch Differentiation der Gleichungen 13) nach r_1 und r_2. Substituirt man nachher die Werthe von dx_1, dy_1, dz_1 in

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

so folgt

$$ds^2 = (r_1^2 - r_2^2)\left[\frac{r_1^4\,dr_1^2}{(a^2-r_1^2)(b^2-r_1^2)(c_2-r_1^2)} - \frac{r_2^4\,dr_2^2}{(a^2-r_2^2)(b^2-r_2^2)(c^2-r_2^2)}\right],$$

und hieraus kann die Länge jeder Curve des Ellipsoids bestimmt werden, wenn ihre Gleichung in centralen Coordinaten gegeben ist.

So finden wir nach 19) für die beiden Systeme von Krümmungscurven

$$r_1 = Constant,\quad ds_1^2 = \frac{r_2^4(r_2^2 - r_1^2)\,dr_2^2}{(a^2-r_2^2)(b^2-r_2^2)(c^2-r_2^2)},$$

$$r_2 = Constant,\quad ds_2^2 = \frac{r_1^4(r_1^2 - r_2^2)\,dr_1^2}{(a^2-r_1^2)(b^2-r_1^2)(c^2-r_1^2)}.$$

5. Bringt man durch einen Punkt $P(x_1 y_1 z_1)$ des Raumes ein Ellipsoid, das confocal zu dem Ellipsoid 1) ist, so werden ihre Axen bestimmt durch die Gleichung

$$\text{20)} \qquad \frac{x_1^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda}=1,$$

welche einen Werth von λ giebt, der kleiner ist als c^2. Man findet nachher die Axen des centralen Durchschnittes von P in dem confocalen Ellipsoid mit Rücksicht auf 11) aus

$$\text{21)} \qquad \frac{x_1^2}{a^2+\lambda-r^2}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda-r^2}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda-r^2}=1,$$

und diese Gleichung giebt dann zwei Werthe für r^2. Nennt man den Werth von λ aus 20) λ_1, die Werthe von r^2 aus 21) r_1^2 und r_2^2, und setzt

$$\text{22)} \qquad \lambda_1-r_1^2=\lambda_2, \quad \lambda_1-r_2^2=\lambda_3,$$

so werden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die drei Wurzeln der Gleichung 20), welche für λ vom dritten Grade ist und immer nur rationale Wurzeln hat.

Für die Richtung der Axen des centralen Durchschnittes findet man nach 7)

$$\text{23)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos\alpha=\frac{x_1}{a^2+\lambda}Q, \quad \cos\beta+\frac{y_1}{b^2+\lambda}Q, \quad \cos\gamma=\frac{z_1}{c^2+\lambda}Q, \\ &Q^2\left[\frac{x_1^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y_1^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z_1^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]=1. \end{aligned} \right.$$

Bekannt ist, dass die Gleichungen 20) und 23) die elliptischen Coordinaten von Lamé bestimmen. Die drei Werthe von λ in 20) sind dabei die Parameter der confocalen Flächen, die durch den Punkt P gebracht werden, während in 23) die Richtung der Normalen zu diesen Flächen in dem Punkte bestimmt wird.

Die centralen Coordinaten stehen folglich in genauester Verbindung mit den elliptischen Coordinaten. Anstatt der Parameter der drei verschiedenen confocalen Flächen erhält man als centrale Coordinaten von P den Parameter des confocalen Ellipsoids und in diesem die Axen des centralen Durchschnittes, welche wieder parallel sind zu den beiden anderen Parametern. Aus der Gleichung 22) ergiebt sich einfach die Verbindung zwischen beiden Systemen von Coordinaten, welche hierdurch dargestellt wird:

$$\text{24)} \qquad \lambda_1=\lambda_1, \quad r_1^2=\lambda_1-\lambda_2, \quad r_2^2=\lambda_1-\lambda_3.$$

Da früher angenommen wurde $r_1^2>r_2^2$, hat man jetzt als Grenzen der Wurzeln in 20)

$$-\lambda_1<c^2<-\lambda_3<b_1^2<-\lambda_2<a^2,$$

oder

$$0<c^2+\lambda_1<r_2^2<b^2+\lambda_1<r_1^2<a^2+\lambda_1.$$

Mit den Relationen 24) kann man in allen sich darauf beziehenden Untersuchungen von den elliptischen zu den centralen Coordinaten übergehen.

Für alle Punkte des Ellipsoids 1) wird $\lambda_1=0$, deshalb

$$r_1^2=-\lambda_2, \quad r_2^2=-\lambda_3,$$

so dass hier die beiden übrigen Parameter die negativen Quadrate der centralen Coordinaten vorstellen. Hierdurch werden die Gleichungen 19) der Krümmungscurven des Ellipsoids bestätigt, da sie geben $\lambda_2 = Constant$ und $\lambda_3 = Constant$, welche bekanntlich in elliptischen Coordinaten die Gleichungen dieser Curven sind.

6. Nimmt man den Punkt P $(x_1 y_1 z_1)$ als Scheitel einer Kegelfläche, welche um das Ellipsoid 1) beschrieben wird, dann hat sie diese Gleichung:

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}+\frac{z z_1}{c^2}-1\right)^2$$

oder

$$25)\qquad A\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}+\frac{z z_1}{c^2}-1\right)^2,$$

worin

$$26)\qquad A=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1.$$

Vergleicht man 24) mit der allgemeinen Form

$$27)\qquad 0=a_1 x^2+a_2 y^2+a_3 z^2+2b_1 yz+2b_2 zx+2b_3 xy+\ldots,$$

so sind in diesem Falle die Coefficienten

$$a_1=\frac{1}{a^2}\left(A-\frac{x_1^2}{a^2}\right),\quad a_2=\frac{1}{b^2}\left(A-\frac{y_1^2}{b^2}\right),\quad a_3=\frac{1}{c^2}\left(A-\frac{z_1^2}{c^2}\right),$$

$$b_1=-\frac{y_1 z_1}{b^2 c^2},\quad b_2=-\frac{z_1 x_1}{c^2 a^2},\quad b_3=-\frac{x_1 y_1}{a^2 b^2}.$$

Die Richtung der Axen der Fläche 27) wird durch diese Gleichung dargestellt:

$$\frac{a_1\cos\alpha+b_3\cos\beta+b_2\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{b_3\cos\alpha+a_2\cos\beta+b_1\cos\gamma}{\cos\beta}$$
$$=\frac{b_2\cos\alpha+b_1\cos\beta+a_3\cos\gamma}{\cos\gamma}=\frac{A}{r^2}.$$

Wird hierin der Werth der Coefficienten angebracht, so folgt

$$\frac{1}{a^2}\left[A-\frac{x_1}{\cos\alpha}\left(\frac{x_1}{a^2}\cos\alpha+\frac{y_1}{b^2}\cos\beta+\frac{z_1}{c^2}\cos\gamma\right)\right]$$
$$=\frac{1}{b^2}\left[A-\frac{y_1}{\cos\beta}\left(\frac{x_1}{a^2}\cos\alpha+\frac{y_1}{b^2}\cos\beta+\frac{z_1}{c^2}\cos\gamma\right)\right]$$
$$=\frac{1}{c^2}\left[A-\frac{z_1}{\cos\gamma}\left(\frac{x_1}{a^2}\cos\alpha+\frac{y_1}{b^2}\cos\beta+\frac{z_1}{c^2}\cos\gamma\right)\right]=\frac{A}{r^2},$$

oder

$$28)\qquad \frac{\frac{x_1}{a^2}\cos\alpha+\frac{y_1}{b^2}\cos\beta+\frac{z_1}{c^2}\cos\gamma}{A}$$
$$=\frac{a^2\cos\alpha}{x_1}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{b^2\cos\beta}{y_1}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{c^2\cos\gamma}{z_1}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right).$$

Diese Gleichung giebt

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha=\frac{x_1}{a^2-r^2}Q,\quad \cos\beta=\frac{y_1}{b^2-r^2}Q,\quad \cos\gamma=\frac{z_1}{c^2-r^2}Q,\\ &Q^2\left[\frac{x_1^2}{(a^2-r^2)^2}+\frac{y_1^2}{(b^2-r^2)^2}+\frac{z_1^2}{(c^2-r^2)^2}\right]=1,\end{aligned}\right.$$

und setzt man diese Werthe in 28) ein, so wird

$$\frac{x_1^2}{a^2(a^2-r^2)}+\frac{y_1^2}{b^2(b^2-r^2)}+\frac{z_1^2}{c^2(c^2-r^2)}=-\frac{A}{r^2},$$

oder durch Einführung des Werthes von A aus 26)

$$30)\quad \frac{x_1^2}{a^2-r^2}+\frac{y_1^2}{b^2-r^2}+\frac{z_1^2}{c^2-r^2}=1.$$

Die Gleichungen 29) und 30) bestimmen die Richtung der Axen der Kegelfläche. Löst man den Werth von r^2 aus 30) und substituirt ihn in 29), so geben diese Gleichungen $\alpha\,\beta\,\gamma$. Da r^2 in 30) drei rationale Werthe hat, so erhält man auf diese Weise die Richtung der drei Axen der Kegelfläche 25).

Die Gleichung der Kegelfläche auf ihrer eigenen Axe wird

$$\frac{x_1^2}{r_1^2}+\frac{y_1^2}{r_2^2}+\frac{z_1^2}{r_3^2}=0,$$

worin r_1^2, r_2^2, r_3^2 die drei Wurzeln von 30) vorstellen, deren eine negativ ist.

Vergleicht man diese Resultate mit den Gleichungen 20) und 23), so zeigt es sich, dass die Axen der Kegelfläche, die mit dem Punkte P als Scheitel um das Ellipsoid 1) beschrieben wird, dieselbe Richtung haben als die Normalen der confocalen Flächen, welche durch den Punkt P gebracht sind, oder mit den centralen Coordinaten dieses Punktes. Auf diese Weise kommen wir zu einer bekannten Eigenschaft zurück, welche hier auf's Neue rein analytisch bewiesen ist.

Lässt man a^2, b^2, c^2 in 29) und 30) mit derselben Grösse λ anwachsen, so ändern sich die Werthe von $\alpha\,\beta\,\gamma$ nicht, woraus sich ergiebt, dass die Kegelflächen, welche einem System von confocalen Flächen umschrieben sind, die Axen in gleicher Richtung haben.

Leiden. Dr. VAN GEER.

XIII. Elementarer Beweis eines Fermat'schen Satzes.

In der neuesten Auflage der „Anfangsgründe der Physik" von Koppe spricht der Verfasser auf S. 321 den Wunsch aus, einen elementaren Beweis des folgenden, von Fermat herrührenden Satzes kennen zu lernen: „Wenn zwei Punkte in verschiedenen, in einer ebenen Grenzfläche sich berührenden Medien liegen, so durchläuft eine Lichtwelle den durch das Brechungsgesetz vorgeschriebenen Weg, wenn sie von dem einen Punkte nach dem andern in der möglichst kürzesten Zeit gelangt." Ein elementarer Beweis dieses Satzes ist folgender.

Die beiden Punkte, zwischen denen ein Lichtstrahl sich bewegt, seien A und B, die beiden Medien, in denen sie liegen, M und M_1, die Geschwindigkeiten des Lichtes in letzteren V und V_1, die ebene Trennungsfläche f. Von A und B fälle man auf f die Perpendikel $AD=a$ und $BE=b$ und nehme auf der Linie DE einen beliebigen Punkt C an. Es seien t und t_1 die Zeiten, in denen das Licht die Strecken AC und BC zurücklegt, so dass also $t=\frac{AC}{V}$, $t_1=\frac{BC}{V_1}$; also legt das Licht den ganzen Weg $AC+CB$ in der Zeit $t+t_1=\frac{AC}{V}+\frac{BC}{V_1}$ zurück. Wir suchen zunächst auf DE einen Punkt C_1 von der Beschaffenheit, dass das Licht den Weg AC_1+C_1B in derselben Zeit $t+t_1$ zurücklegt, die wir also auch ausdrücken können durch $\frac{AC_1}{V}+\frac{BC_1}{V_1}$, so dass wir die Gleichung haben

$$1)\qquad \frac{AC}{V}+\frac{BC}{V_1}=\frac{AC_1}{V}+\frac{BC_1}{V_1}$$

oder, auf 0 gebracht nach einer kleinen Umformung

$$2)\qquad \frac{AC^2-AC_1^2}{V(AC+AC_1)}+\frac{BC^2-BC_1^2}{V_1(BC+BC_1)}=0.$$

Wir setzen $CD=x$, $CE=y$, $C_1D=x_1$, $C_1E=y_1$, dann ist

$$AC^2-AC_1^2=x^2-x_1^2 \text{ und } BC^2-BC_1^2=-(y^2-y_1^2).$$

Da auch

$$x-x_1=-(y-y_1)$$

ist, so lässt sich die Gleichung 2) auf die Form bringen

$$3)\qquad (x-x_1)\left(\frac{x+x_1}{V(AC+AC_1)}-\frac{y+y_1}{V_1(BC+BC_1)}\right)=0.$$

Zur Bestimmung des Punktes C_1 hat man also die beiden Gleichungen

$$4)\qquad x-x_1=0$$

und

$$5)\qquad \frac{x+x_1}{V(AC+AC_1)}-\frac{y+y_1}{V_1(BC+BC_1)}=0.$$

Die Gleichung 4) ergiebt wieder den beliebig gewählten Punkt C, also muss zur Auffindung von C_1 die Gleichung 5) gewählt werden. Wie also auch C auf DE gewählt wird, die Gleichung liefert stets einen Punkt C_1, welcher die Gleichung 1) erfüllt. Wenn C so angenommen wäre, dass das Licht den Weg $AC+CB$ in der kürzesten Zeit durchläuft, so liefert die Gleichung 5) keinen andern Punkt C_1, da es nur einen Weg giebt, zu dessen Zurücklegung das Licht das Minimum der Zeit gebraucht. Setzt man also in 5) $x=x_1$, woraus $y=y_1$, $AC=AC_1$, $BC=BC_1$ folgt, so erhält man die Gleichung

$$6)\qquad \frac{x}{V.AC}-\frac{y}{V_1.BC}=0,$$

welche den Punkt C von der Beschaffenheit ergiebt, dass das Licht den Weg $AC+BC$ in der kürzesten Zeit zurücklegt.

Nennen wir endlich α und β die Winkel, welche das Einfallsloth in C mit AC und BC bildet, so ist

$$x = AC.\sin\alpha,\quad y = BC.\sin\beta,$$

also

7) $$\frac{\sin\alpha}{V} - \frac{\sin\beta}{V_1} = 0$$

oder

8) $$\frac{V}{V_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Der gegebene Beweis lässt sich unmittelbar für den Fall erweitern, dass die trennende Fläche eine Kugel K ist. Ist O der Mittelpunkt derselben, so legen wir durch die Punkte ABO eine Ebene und nehmen auf der Peripherie des Kreises, in welcher jene Ebene die Kugel schneidet, wieder beliebig den Punkt C und suchen einen andern Punkt C_1 auf der Peripherie, so dass

1) $$\frac{AC}{V} + \frac{BC}{V_1} = \frac{AC_1}{V} + \frac{BC_1}{V_1}$$

oder

2) $$\frac{AC^2 - AC_1^2}{V(AC+AC_1)} + \frac{BC^2 - BC_1^2}{V_1(BC+BC_1)} = 0.$$

Wir setzen $AO=a$, $BO=b$, $\sphericalangle AOC = x$, $\sphericalangle BOC = y$, $\sphericalangle (AC, OC) = \alpha$, $\sphericalangle (BC, OC) = \beta$ und $CO = r$, dann ist

$$\begin{aligned} AC^2 - AC_1^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos x - (a^2 + r^2 - 2ar\cos x_1) \\ &= -2ar(\cos x - \cos x_1) \\ &= 4ar.\sin\frac{x-x_1}{2}.\sin\frac{x+x_1}{2} \end{aligned}$$

und

$$BC^2 - BC_1^2 = 4br.\sin\frac{y-y_1}{2}.\sin\frac{y+y_1}{2},$$

wenn x_1 und y_1 die Winkel sind, welche AO und BO mit C_1O bilden. Da wieder Winkel $(x-x_1) = -(y-y_1)$ ist, so folgt durch Substitution in 2) die Gleichung

3) $$4r.\sin\frac{x-x_1}{2}\left\{\frac{a.\sin\frac{x+x_1}{2}}{V(AC+AC_1)} - \frac{b.\sin\frac{y+y_1}{2}}{V_1(BC+BC_1)}\right\} = 0.$$

Die Gleichung

4) $$\frac{a.\sin\frac{x+x_1}{2}}{V(AC+AC_1)} - \frac{b.\sin\frac{y+y_1}{2}}{V_1(BC+BC_1)} = 0$$

liefert zu einem beliebig angenommenen Punkte C den Punkt C_1, welcher die Gleichung 1) erfüllt. Um den Punkt C von der Eigenschaft zu finden, dass das Licht den Weg $AC+BC$ in der möglichst kürzesten Zeit zurücklegt, setze man in 4) $x=x_1$ und also auch $y=y_1$, $AC=AC_1$, $BC=BC_1$, wodurch dieselbe übergeht in

5) $$\frac{a\,.\,\sin x}{V\,.\,AC}=\frac{b\,.\,\sin y}{V_1\,.\,BC}.$$

Da aber $\frac{a\,.\,\sin x}{AC}=\sin\alpha$, $\frac{b\,.\,\sin y}{BC}=\sin\beta$ ist, so folgt

6) $$\frac{\sin\alpha}{V}=\frac{\sin\beta}{V_1}$$

oder

7) $$\frac{V}{V_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Diese Zeilen sind 1873 geschrieben; im folgenden Jahre erschien eine neue Auflage von Koppe's Physik, in welcher ein von dem gegebenen verschiedener Beweis des Fermat'schen Satzes mitgetheilt wird.

Weissenburg im Elsass. MILINOWSKI, Oberlehrer.

XIV. Anzahl der Auflösungen einer unbestimmten Gleichung für einen speciellen Fall von nicht theilfremden Coefficienten.

In einer früheren Abhandlung*, die hier durch (I) citirt werden mag, habe ich die Formel für die Anzahl der Auflösungen einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades bei vollständig theilfremden Coefficienten gegeben. Ungleich schwieriger wird die Aufgabe, wenn die Coefficienten dieser Beschränkung nicht mehr unterliegen. Ich will im Folgenden einen speciellen, leicht zu behandelnden Fall herausheben, durch welchen gleichzeitig die allgemeinste Gleichung mit drei Unbekannten ihre Erledigung findet, und beabsichtige in einer weiteren Abhandlung eine Untersuchung der Gleichung mit vier Unbekannten in ihrer allgemeinsten Form vorzunehmen.

Es mag wieder die Gleichung

1) $$\sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = M$$

vorliegen. Es seien nun gemeinsame Theiler für immer je $n-1$ der Grössen A vorhanden, dagegen sollen keine solchen Theiler vorhanden sein, die nur etwa $n-2$ oder einer noch kleineren Anzahl von Coefficienten A angehörten. Man soll die Anzahl der Auflösungen für 1) bestimmen.

Bildet man die n geordneten Combinationen der A zur $n-1^{\text{ten}}$ Classe, so mag der den Elementen der k^{ten} Combination gemeinsame Theiler durch b_{n-k+1} bezeichnet werden; die Grössen b sind untereinander nothwendigerweise theilfremd. Es sei

2) $$\prod_{k=1}^{k=n} b_{n-k+1}=B.$$

Der Bestandtheil von A_k, welcher nach Ausschluss aller Theiler b übrig bleibt, heisse a_k; auch diese Grössen sind untereinander theilfremd. Wie

---

* Jahrg. XX, S. 97.

man leicht erkennt, fehlt bei dieser Bezeichnungsweise in A_k nur der Factor b_k, so dass

3) $$A_k = \frac{a_k \cdot B}{b_k}.$$

Nach Analogie des in (I) aufgestellten Princips bilde ich folgende Ausdrücke:

4) $$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = P,$$
$$M \equiv m \,(mod.\; PB), \quad m \gtreqless {}^{>0,}_{<PB,}$$
$$\frac{M-m}{PB} = p.$$

An die Stelle des Products aller Coefficienten, nach dem in (I) die Absolutglieder abgetheilt werden, ist hier der kleinste gemeinsame Dividuus getreten, was sich leicht rechtfertigen lässt.

Man hat jetzt

5) $$\sum_{k=1}^{k=n} a_k \frac{B}{b_k} x_k = pPB + m.$$

Löst man nun folgendes System von Congruenzen

6) $$m + h_k a_k \cdot \frac{B}{b_k} \equiv 0 \,(mod.\; b_k), \quad k = 1, 2, \ldots n$$

in den kleinsten positiven Werthen für h_k auf, wobei stets

$$h_k \; {}^{\geqq 0}_{< b_k}$$

gefunden werden kann, und setzt

7) $$x_k = -h_k + b_k y_k, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

so geht 5) über in

8) $$\sum_{k=1}^{k=n} a_k y_k = pP + m_1,$$

wo zur Abkürzung

9) $$\frac{m + \sum_{k=1}^{k=n} h_k a_k \, B : b_k}{B} = m_1$$

gesetzt wurde. Man erkennt leicht bei Heranziehung von 6), dass der Zähler in 9) durch alle einzelnen Factoren des Nenners theilbar ist, dass also wegen der Theilfremdheit dieser Factoren untereinander m_1 stets eine ganze positive Zahl wird.

Aus der Bedingung für die h_k und aus 7) geht hervor, dass jedem ganzzahligen Werthe von $y_k > 0$ ein ganzzahliger Werth von $x_k > 0$ entspricht; mithin ist die Anzahl der Lösungen für 1) identisch mit der für 8). Diese Gleichung kann nun ganz nach (I) behandelt werden.

Als ein sehr einfaches Beispiel mag die Aufgabe gelöst werden, anzugeben, auf wieviele Arten sich der Bruch $\frac{7267}{2310}$ in positive Brüche mit ganzzahligen Zählern und mit den Nennern 2, 3, 5, 7, 11 zerlegen lässt.

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5}+\frac{x_4}{7}+\frac{x_5}{11}=\frac{7267}{2310},$$

$$1155x_1+770x_2+462x_3+330x_4+210x_5=7267=3.2310+337,$$

$$a_k=1,\quad P=1,$$

$$b_5=11,\quad b_4=7,\quad b_3=5,\quad b_2=3,\quad b_1=2,$$

$$B=2310,\quad m=337,\quad p=3,$$

$$\begin{aligned}
337+1155h_1&\equiv 0\ (mod.\ 2), & h_1&=1, & x_1&=-1+2y_1,\\
337+770h_2&\equiv 0\ (mod.\ 3), & h_2&=1, & x_2&=-1+3y_2,\\
337+462h_3&\equiv 0\ (mod.\ 5), & h_3&=4, & x_3&=-4+5y_3,\\
337+330h_4&\equiv 0\ (mod.\ 7), & h_4&=6, & x_4&=-6+7y_4,\\
337+210h_5&\equiv 0\ (mod.\ 11), & h_5&=4, & x_5&=-4+11y_5,
\end{aligned}$$

$$m_1=\frac{337+1.1155+1.770+4.462+6.330+4.210}{2310}=3,$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6.$$

Anzahl der Lösungen nach (I) gleich 5, nämlich

$$\begin{array}{lllll|lllll}
y_1=1 & 1 & 1 & 1 & 2 & x_1=1 & 1 & 1 & 1 & 3\\
y_2=1 & 1 & 1 & 2 & 1 & x_2=2 & 2 & 2 & 5 & 2\\
y_3=1 & 1 & 2 & 1 & 1 & x_3=1 & 1 & 6 & 1 & 1\\
y_4=1 & 2 & 1 & 1 & 1 & x_4=1 & 8 & 1 & 1 & 1\\
y_5=2 & 1 & 1 & 1 & 1, & x_5=18 & 7 & 7 & 7 & 7.
\end{array}$$

Die verlangten Zerlegungen sind also folgende:

$$\begin{aligned}
\tfrac{7267}{2310}&=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{18}{11}\\
&=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{8}{7}+\tfrac{7}{11}\\
&=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{6}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{7}{11}\\
&=\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{7}{11}\\
&=\tfrac{3}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{7}{11}.
\end{aligned}$$

Da die allgemeinste Gleichung mit drei Unbekannten und nicht theilfremden Coefficienten

$$a_1b_2b_3x_1+a_2b_3b_1x_2+a_3b_1b_2x_2=M$$

ist, so ist ihre Behandlung durch die oben gegebene Methode vollständig erledigt.

Dorpat, 14. März 1875. Prof. Dr. K. Weihrauch.

XIII.

Directe Lösung der Aufgabe: Einen durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt auf einen Umdrehungskegel zu legen. Ersetzen der Brennpunkte durch Kreise; Ort der Spitze jenes Umdrehungskegels.

Von

Dr. Chr. Wiener,

Professor am Polytechnikum in Carlsruhe.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1—4.)

Der Wunsch, aus der Entstehungsweise der Kegelschnitte aus zwei projectivischen Strahlenbüscheln oder Punktreihen sogleich die Eigenschaft der Brennpunkte abzuleiten, ohne vorher die von Pol und Polare und die der Involution zu erörtern, veranlasste mich, nach einer directen Auflösung der Aufgabe zu suchen, einen durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt auf einen Umdrehungskegel zu legen, um dadurch alsbald die Brennpunktseigenschaften zu erhalten. Es wird dabei nur nothwendig sein, eine der beiden Aufgaben, etwa die erste, zu lösen, indem durch einen einfach zu beweisenden Lehrsatz diese Lösung auch für die andere Aufgabe brauchbar wird. Ich will sogleich bemerken, dass die Auflösung darauf ausgeht, zwei Tangenten an den Kegelschnitt zu legen, welche gleiche Winkel mit der Sehne ihrer Berührungspunkte bilden. In der Halbirungslinie des Winkels beider Tangenten ist dann eine Axe gewonnen.

1. Auflösung der Aufgabe: einen durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt auf einen Umdrehungskegel zu legen.

Es sei der Kegelschnitt (Fig. 1) durch die vier beliebigen Punkte A, B, C, D und durch die willkürlich gezogene Tangente AH in A, welche den fünften Punkt ersetzt, gegeben.

Man lege einen Kreis, welcher AH in A berührt und durch einen der übrigen Punkte, etwa B, geht, so befindet sich derselbe in perspectivischer Collineation mit dem gegebenen Kegelschnitte und A kann als Collineationscentrum angesehen werden. Treffen die Strahlen AC, AD den Kreis in den Punkten C' und D', so ist der Durchschnitt E der entsprechenden Geraden CD und $C'D'$ ein Punkt der Collineationsaxe, welche ausserdem durch den gemeinschaftlichen Punkt B beider Curven geht, also EB ist.* Man ziehe nun senkrecht zu EB den Durchmesser $F'G'$ des Kreises, bestimme zu F' und G' die entsprechenden Punkte F und G des Kegelschnittes (z. B. F durch die Geraden $F'D'$ und FD, welche sich auf EB treffen müssen), so sind die Kreistangenten in F' und G' und daher auch die Kegelschnittstangenten FH und GJ parallel zur Collineationsaxe EB. Da nun die Kreistangenten in A und F' gleiche Winkel mit der Sehne AF' bilden, so gilt dies auch für die entsprechenden Kegelschnittstangenten; daher ist AHF ein gleichschenkliges Dreieck mit $HA = HF$. Ebenso ist $JA = JG$. Demnach ist es möglich, einen Kreis zu legen, welcher in A und F, und einen andern, welcher in A und G den Kegelschnitt berührt.

Von diesen beiden Kreisen wähle man denjenigen k aus — es sei der durch A und F gehende —, in dessen Aeusserem der andere Punkt G, und zwar derart liegt, dass die Gerade GH den Kreis k schneidet, dass sich also G mit K in demselben durch die Tangenten AH und FH gebildeten Winkel AHF oder in dessen Scheitelwinkel befindet. Dies ist aber stets möglich. Liegen nämlich beide Kreise AF und AG auf derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Tangente AH, so ist A ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt. Von den vier mit den Tangenten FH und GJ parallel an sie gezogenen Tangenten liegen diejenigen beiden, deren Berührungspunkte sich auf demselben Strahle aus A befinden, auf der einen Seite von A, die beiden anderen auf der entgegengesetzten. Daher liegen die Tangenten FH und GJ, deren Berührungspunkte nicht demselben Strahle aus A angehören, auf verschiedenen Seiten von A. Jeder der beiden Punkte F und G liegt daher auf derselben Seite von der Tangente im andern, wie A und wie der diese Tangente berührende Kreis, und ebenso nach der Voraussetzung auf derselben Seite von der Tangente in A, wie dieser Kreis, daher mit ihm in demselben Winkel beider Tangenten. Ist nun der Kreis AF derjenige k, ausserhalb dessen sich der andere Punkt G befindet, so entspricht er den Bedingungen. — Liegen dagegen beide Kreise auf entgegengesetzten Seiten von AH, so ist A ihr innerer Aehnlichkeitspunkt. Dann befinden sich von jenen vier parallelen Tangenten diejenigen beiden, deren Berührungspunkte auf demselben Strahle aus A liegen, auf entgegengesetzten Seiten von A; auf derselben Seite dagegen solche, deren Berührungspunkte auf verschiedenen

* Man kann auch die Eigenschaft der Collineation entbehren. Dreht man nämlich den Kreis um EB um einen beliebigen Winkel, wobei sich der Punkt A' des Kreises von A trennt, so projiciren sich der Kreis und der Kegelschnitt durch die gegebenen fünf Paare entsprechender Punkte, also ganz aufeinander aus dem Schnittpunkte der drei Ebenen CD, $C'D'$; DA, $D'A'$; AC, $A'C'$. Es ist dann der Kegelschnitt auf einen im Allgemeinen schiefen Kreiskegel gelegt.

Strahlen und auf verschiedenen Kreisen liegen, also auch FH und GJ. Befindet sich nun der Punkt G auf der von A entfernteren der beiden Tangenten, so liegt er im Scheitelwinkel des den Kreis AF oder k enthaltenden Winkels FHA, weil er mit ihm auf der entgegengesetzten Seite jedes Schenkels liegt. Ausserdem ist G jedenfalls ein äusserer Punkt von k. Der Kreis AF oder k entspricht also den Bedingungen.

Durch den einzigen so bestimmten Kreis AF oder k lege man nun eine der möglichen Kugeln, lege an sie in ihren Punkten A und F die Berührungsebenen, welche sich in der durch H gehenden, nicht verzeichneten Geraden h schneiden. Durch h und G führe man eine Ebene, welche die Gerade GH enthält, also die Kugel trifft, und zwar in einem Kreise, ausserhalb dessen G liegt. Man ziehe aus G eine der beiden möglichen Tangenten an den Schnittkreis, welche mit h den Punkt S gemein habe, lege aus S als Spitze einen berührenden Kegel an die Kugel, so ist dieser der verlangte Umdrehungskegel, auf dem sich der gegebene Kegelschnitt befindet. Denn die Schnittlinie der Ebene AFG mit dem Kegel enthält die drei Punkte A, F, G und wird von AH und FH berührt, fällt also mit unserem Kegelschnitte zusammen. — Somit ist die Aufgabe gelöst.

2. Die Aufgabe: einen durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt auf einen Umdrehungskegel zu legen, könnte man in ganz entsprechender Weise lösen. Kürzer erscheint mir aber der Weg, diese Aufgabe auf die soeben gelöste zurückzuführen vermittelst der Uebereinstimmung der durch zwei projectivische Strahlenbüschel und der durch zwei projectivische Punktreihen, oder der durch fünf Punkte und der durch fünf Tangenten bestimmten Curve. Beide Curven wollen wir zunächst als Punkt- und als Linienkegelschnitt unterscheiden.

Zu dem Ende beweisen wir, dass, wenn ein Linienkegelschnitt durch fünf Tangenten oder, was dasselbe, durch drei Tangenten a, b, c und die Berührungspunkte A, B von zweien gegeben ist, und man bestimmt den Berührungspunkt C von c, und construirt dann für einen Punktkegelschnitt, der durch die drei Punkte A, B, C und die Tangenten a und b in zweien, also im Wesentlichen durch fünf Punkte gegeben ist, die Tangente in C, dass diese mit der früher gegebenen Linie c zusammenfällt. Bilden nämlich (Fig. 2) a, b, c das Dreieck $A'B'C'$, so ziehe man $A'A$ und $B'B$, welche sich in D schneiden; die Gerade $C'D$ enthält dann den Berührungspunkt C der c (Satz von Brianchon).

Soll nun in dem durch A, B, C, a, b bestimmten Punktkegelschnitte c die Tangente in C sein, so müssen die drei Schnittpunkte A'' von a und BC, B'' von b und CA, C'' von c und AB auf einer Geraden liegen (Satz von Pascal).

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von AB und CC' mit E, so gilt wegen der Projection aus A

$$C'EDC \equiv C'BA'B'',$$

und wegen der Projection aus B

$$C'EDC \equiv C'AB'A'';$$

also sind $C'BA'B''$ und $C'AB'A''$ zwei projectivische und ausserdem perspectivisch liegende Punktreihen. Daher treffen BA, $A'B'$ und $B''A''$ in einem Punkte C'' zusammen, w. z. b. w.

Hat man daher den durch die fünf Punkte bestimmten Punktkegelschnitt A, B, C, a, b auf einen Umdrehungskegel gelegt, so ist auch c eine Tangente an denselben und es befindet sich daher auch der durch die fünf Tangenten bestimmte Linienkegelschnitt a, b, c, A, B auf dem Kegel, und beide Curven fallen zusammen.

3. Für den ebenen Schnitt eines Umdrehungskegels werden die Brennpunktseigenschaften in bekannter Weise hergeleitet. Die Brennpunkte lassen sich aber durch Kreise, welche den Kegelschnitt doppelt berühren, ersetzen, wie dies Steiner* gezeigt hat. Diese erweiterten Sätze können im Anschluss an die vorhin gelöste Aufgabe und anders, als es Steiner that, in so einfacher Weise hergeleitet werden, dass dies hier geschehen möge.

Seien in Fig. 3 D und E die Berührungspunkte des Kegelschnittes und des Kreises k, H der Schnittpunkt ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in D und E, und treffe die durch den Mittelpunkt C von k gehende Halbirungslinie HC des Winkels DHE den Kreis in A' und A'_1, den Kegelschnitt in A und A_1. Letztere Punkte sind leicht zu construiren, denn beide krumme Linien sind perspectivisch für den Collineationsmittelpunkt H; DE ist dann die Collineationsaxe und beide Curven liegen wirklich in denselben Winkeln aus H, weil in Fig. 2 der Strahl HG beide Linien traf. In dieser Figur können daher auf dem Strahle, welcher den Winkel AHF halbirt, aus den Punkten A', A'_1 (Fig. 3) des Kreises k diejenigen A, A_1 des Kegelschnittes leicht gefunden werden.

Die durch HC (Fig. 3) senkrecht zur Ebene des Kegelschnittes geführte Ebene werde in letztere um HC umgelegt; in derselben befindet sich der Mittelpunkt G der durch k gehenden Kugel, welche diese Ebene in dem grössten Kreise schneidet, der aus G durch A' und A'_1 gezogen ist. Die beiden in A' und A'_1 an diesen Kreis gelegten Tangenten treffen sich in K; HK ist dann die in derselben grössten Kreisebene liegende Schnittlinie der beiden Berührungsebenen der Kugel (G) in den Punkten A', A'_1, welche wir vorhin h nannten.

Legt man nun aus A an jenen grössten Kreis eine der beiden möglichen Tangenten, welche die HK in S schneidet, so bildet S die Spitze des Umdrehungskegels, dessen ebener Schnitt der gegebene Kegelschnitt ist, und es berührt daher SA_1 ebenfalls den grössten Kreis. Der Berührungskreis

* Crelle, Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 37 S. 161 flgg. u. Bd. 45 S. 189 flgg.

JL des Kegels und der Kugel, dessen Ebene die des Kegelschnittes in der Geraden NDE trifft, schneidet den Kegelschnitt in den früher bestimmten Punkten D und E.

Legt man aus einem andern Punkte G_1 der SG eine zweite berührende Kugel in den Umdrehungskegel, deren Berührungskreis J_1L_1 ist, so schneide diese die Ebene des Kegelschnittes in dem Kreise k_1 mit dem Mittelpunkte C_1 und den Kegelschnitt selbst in den Punkten D_1 und E_1 derart, dass J_1L_1 und D_1E_1 sich in N_1 auf HC treffen.

Der Kegelschnitt besitzt nun in Bezug auf die Kreise k und k_1 eine ihn bestimmende, sehr einfach nachzuweisende Eigenschaft. Sei P ein Punkt des Kegelschnittes, P' seine Projection auf die Ebene CHS, sei PT eine in T berührende Tangente an k, PT_1 eine in T_1 berührende an k_1, treffe die Kegelerzeugende SP' die Berührungskreise JL, J_1L_1 der beiden Kugeln in Q und Q_1, so ist

$$PT = P'Q, \quad PT_1 = P'Q_1,$$

weil je zwei gleiche Linien Tangenten aus P an dieselbe Kugel sind. Daher ist

$$PT + PT_1 = QQ_1.$$

QQ_1 ist aber eine unveränderliche Grösse für alle diejenigen Punkte P, welche zwischen den Berührungskreisen JL nnd J_1L_1 oder auf den Bogen DD_1 und EE_1 liegen; für die Punkte auf DAE oder auf $D_1A_1E_1$ wird

$$PT_1 - PT = QQ_1 \text{ oder } PT - PT_1 = QQ_1.$$

Die Grösse QQ_1 kann an dem Kegelschnitte selbst leicht bestimmt werden, wenn man eine der Tangenten Null werden lässt; so ist QQ_1 gleich der Tangente aus D an k_1 oder gleich der aus D_1 an k. Daraus ergiebt sich der Satz:

Legt man an einen Kegelschnitt zwei innere* zweifach berührende Kreise k und k_1, so ist die Summe oder Differenz der beiden aus einem Punkte des Kegelschnittes an beide Kreise gezogenen Tangenten eine unveränderliche Grösse. Die Grenzen der Punkte, für welche die Summe, und derjenigen, für welche die Differenz gilt, bilden die Berührungspunkte der Kreise mit dem Kegelschnitte.

Schneidet der Berührungskreis JL der Kugel und des Kegels den Kegelschnitt nicht mehr, so kann man die Schnittlinie der Ebenen beider immer noch die Sehne der Berührungspunkte nennen, auf welcher nur die Berührungspunkte D und E des Kreises k mit dem Kegelschnitte imaginär geworden sind. So lange die Kngel noch die Ebene des Kegelschnitts trifft, ist auch der Schnittkreis k reell; aber auch er kann imaginär werden. Berührt die Kugel die Ebene des Kegelschnitts, was im Allgemeinen in

* Der Satz gilt auch für äussere Kreise; s. Steiner a. a. O.

zwei Lagen möglich ist, so heissen die Berührungspunkte die **Brennpunkte**, welche als Grenzgestalten der Kreise k von zweifacher, aber imaginärer Berührung anzusehen sind. Der obige Satz gewinnt dann die Gestalt:

In der Ebene eines Kegelschnittes giebt es zwei Punkte, die Brennpunkte, mit der Eigenschaft, dass entweder die Summe oder die Differenz der Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von diesen Punkten unveränderlich ist.

Auf ein und demselben Kegelschnitte tritt kein Wechsel der Summe und der Differenz ein, weil die zu den Berührungspunkten zusammengezogenen Kreise den Kegelschnitt nicht in reellen Punkten berühren und die Berührungspunkte die des Wechsels sein würden.

Die Unterscheidung der Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln kann nun in bekannter Weise vorgenommen werden.

4. Untersuchen wir nun die Gesetze, nach welchen die Elemente des inneren den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreises k bei dessen Bewegung ihre Lage und Grösse ändern. Dabei kommt in Betracht der Mittelpunkt C (Fig. 3), die Berührungssehne DE mit ihrem Schnittpunkte N gegen die Axe AA_1 und der Halbmesser CD. Zu dem Ende lassen wir den Mittelpunkt G der berührenden Kugel sich auf der Axe des Umdrehungskegels hin bewegen. Mit der Punktreihe der G ist offenbar die der C, die der D und die der N ähnlich, so dass also C und N ähnliche Punktreihen beschreiben. Der Doppelpunkt beider ist ausser dem unendlich fernen Punkte der Mittelpunkt M des Kegelschnitts oder seiner Axe AA_1. Dies leuchtet bei der Ellipse von selbst ein, indem die DE zur kleinen Axe wird. Im Allgemeinen lässt es sich so nachweisen. Seien C_0, G_0, J_0, L_0, N_0 die zu derselben Kugel gehörigen Punkte, und rücke C_0 nach M, so dass $MG_0 \perp AA_1$, $G_0J_0 \perp SJ$, $J_0L_0 \perp SG$, so ist zu beweisen, dass auch der Schnittpunkt N_0 von J_0L_0 mit AA_1 in M fällt. Lässt man einen rechten Winkel sich so bewegen, dass sein erster Schenkel stets durch G_0 geht und sein Scheitel die J_0L_0 beschreibt, so bildet bekanntlich der zweite Schenkel die Tangenten einer Parabel, deren Scheitel der Fusspunkt der von G_0 auf J_0L_0 gefällten Senkrechten oder der Mittelpunkt von J_0L_0 ist. Drei Lagen der Tanten sind SJ, SL, J_0L_0; eine vierte ist MA. Nun werden alle Lagen einer beweglichen Tangente einer Parabel von drei festen in demselben Verhältnisse geschnitten. J_0L_0, als eine Lage der beweglichen Tangente, schneidet die drei erstgenannten festen in J_0, L_0 und in dem Berührungspunkte von J_0L_0, d. i. ihrem Mittelpunkte. Daher muss auch auf der Tangente AA_1 in der Reihe der Schnittpunkte A_1, N_0, A der Punkt N_0 in der Mitte von A_1A liegen oder mit M zusammenfallen, w. z. b. w.

Gehen nun die Punkte C und N von dem Mittelpunkte M des Kegelschnittes aus, in welchem sie (Fig. 4) als C_0 und N_0 zusammenfielen, und gelangen die Berührungspunkte D und E von D_0 und E_0 in den Scheiteln der Nebenaxe bis zu D_1, E_1 in dem Scheitel A der Hauptaxe, so findet hier eine vierpunktige Berührung statt, oder k wird zum Krümmungskreise k_1 in A. Sein Mittelpunkt C_1 ist der Krümmungsmittelpunkt R dieses Scheitels; N_1 fällt in A. Rückt C als C_3 nach dem Brennpunkte F, so gelangt N als N_3 in U auf der Directrix d, welche bekanntlich die Schnittlinie der Ebene des Berührungskreises JL (Fig. 3) der in den Kegel eingeschriebenen, durch F gehenden Kugel mit der Ebene des Kegelschnittes ist. Nun muss wegen der Aehnlichkeit der Punktreihen

$$MR : MA = MF : MU$$

oder, wenn man die bekannten Ausdrücke einführt:

$$\left(a - \frac{b^2}{a}\right) : a = \sqrt{a^2 - b^2} : \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

was als richtig die gewonnenen Ergebnisse bestätigt.

Die Halbmesser der Kreise k ergeben sich in Fig. 3 durch den Kegel und die Kugel. Unabhängig von beiden lassen sich dieselben auch folgendermassen bestimmen. Fig. 3 zeigt, dass mit der Bewegung von G und C auch die Bewegung von J oder L proportional ist, d. h. (nach der Gleichung $PT \pm PT_1 = QQ_1$ des Art. 3) dass mit der vom Mittelpunkte C des k durchlaufenen Strecke die zugehörige Veränderung der Summe oder der Differenz der von einem Punkte des Kegelschnittes an die entsprechenden Kreise k gezogenen Tangenten proportional ist. Bleibt der Punkt des Kegelschnittes und der eine Kreis k unbeweglich, so ist daher auch die Veränderung der Länge der Tangente an den anderen mit der von C beschriebenen Strecke proportional, und die Länge der Tangente kann demnach durch die Ordination einer Geraden dargestellt werden, wenn die Fusspunkte der Ordinaten in den zugehörigen Punkten C liegen.

Um diese Gerade zu verzeichnen, wählen wir in Fig. 4 als festen Punkt des Kegelschnittes den Scheitel A, der feste Kreis kann unbestimmt bleiben, und nehmen zwei oder zur Controle drei Lagen des beweglichen Kreises k an. Der eine sei der aus M durch D_0 mit dem Halbmesser $MD_0 = b$ gezogene k_0 (welcher aber imaginär sein kann); seine Tangente aus A ist offenbar $AT_0 = \sqrt{a^2 - b^2} = MF$; der zweite sei der Krümmungskreis k_1 in A, mit dem Mittelpunkte R, seine Tangente aus A ist Null; der dritte sei der Kreis mit dem Halbmesser Null aus F gezogen, seine Tangente ist AF. Zieht man senkrecht zu MA die Ordinaten gleich jenen Tangenten, nämlich $MV_0 = MF$, $FV_3 = AF$, so bestimmen die drei Punkte V_0, R, V_3 überschüssig die Gerade, deren Ordinaten die Längen der Tangenten angeben, welche aus A an diejenigen Kreise k gezogen werden können, deren Mittelpunkte die Fusspunkte C jener Ordinaten bilden. Dadurch sind aber die Kreise k bestimmt. So ist für C_2 die Ordinate C_2V_2 jener Geraden die Länge der Tangente aus A. Beschreibt man daher mit C_2V_2 als Halbmesser aus A einen Kreis und einen andern über AC_2 als Durchmesser, und schneiden sich beide in T_2, so ist der aus C_2 durch T_2 gelegte Kreis der Kreis k_2. Man bemerkt, dass in R die Ordinate der Geraden V_0R ihr Vorzeichen ändert, daher wechselt auch mit dem entsprechenden Kreise k_1 die Differenz der beiden Tangenten mit ihrer Summe. Bewegt sich C über F hinaus gegen A hin, so wird zunächst die Tangente aus A grösser als der Durchmesser AC des Hilfskreises, daher der Schnittpunkt T beider Kreise und auch k imaginär, während demungeachtet die Länge der Tangente aus A an den imaginären Kreis die reelle construirte Grösse beibehält.

5. Zuletzt soll noch aus den hier gegebenen Constructionen der Ort der Spitze S des durch den gegebenen Kegelschnitt gelegten Umdrehungskegels bestimmt werden. Derselbe befindet sich, wie wir schon gesehen haben, in einer durch die beiden Brennpunkte des Kegelschnittes senkrecht zu seiner Ebene gelegten Ebene. In dieser Ebene sind (Fig. 3) SA und SA_1 zwei Tangenten des veränderlichen, aber stets durch A' und A'_1 gehenden grössten Kugelkreises mit den Berührungspunkten J und L. Daher ist $SJ = SL$. Ferner sind A_1J und AL für alle grössten Kugelkreise unveränderlich, weil AA_1 die Potenzlinie aller dieser Kreise ist. Daher liegen alle J auf dem um A_1 mit dem Halbmesser A_1J beschriebenen Kreise, und alle L auf dem um A mit AL beschriebenen. Wegen $SJ = SL$ ist aber S der Mittelpunkt eines die um A_1 und A beschriebenen Kreise berührenden Kreises. Der Ort dieses Mittelpunktes S ist bekanntlich ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte A_1 und A bilden.

Durch die um A und A_1 beschriebenen Kreise sind zwei Kegelschnitte bestimmt als Orte des Mittelpunktes eines sie gleichartig und eines sie ungleichartig berührenden Kreises. In unserem Falle ist S der Mittelpunkt eines ungleichartig berührenden Kreises, so lange der den Kegelschnitt doppelt berührende Kreis k in zwei reellen Punkten D und E berührt, und eines gleichartig berührenden Kreises, sobald D und E imaginär sind. Denn D und E sind die Schnittpunkte des Berührungskreises JL der Kugel und des Kegels mit der Ebene des Kegelschnitts. Sie sind daher reell oder imaginär, je nachdem die Axe AA_1 von der Strecke JL oder erst von ihrer Verlängerung getroffen wird, oder je nachdem J und L auf entgegengesetzter oder auf derselben Seite von AA_1 liegen. Zwei Kreise A und A_1 werden aber von einem dritten Kreise S ungleichartig oder gleichartig berührt, je nachdem die Berührungspunkte auf entgegengesetzter oder auf übereinstimmender Seite der Mittelpunktslinie AA_1 liegen, also in unserem Falle, je nachdem D und E reell oder imaginär sind, w. z. b. w. Die Grenze beider Fälle wird gebildet, wenn k zum Krümmungskreise in A wird, wodurch der Kreis um A in den Punkt A übergeht.

Die Scheitel des Kegelschnittes, welcher den Ort von S bildet, findet man auf der Geraden AA_1, indem man die um A und A_1 beschriebenen Kreise mit AA_1 in vier Punkten schneidet. Die Scheitel sind dann die Mitten zwischen zweien jener Schnittpunkte, und zwar, wenn die Berührung des Kreises aus S eine ungleichartige war, die Mitte der Endpunkte der beiden

Paare gleichgerichteter Halbmesser, im andern Falle der ungleichgerichteten.

Am einfachsten erhält man die Scheitel, wenn man den Kreis k zu einem Punkte, dem Brennpunkte F des ursprünglichen Kegelschnittes werden lässt. Die Kreise A und A_1 gehen dann durch F, und die Mitte eines Paares ihrer ungleichgerichteten Halbmesser — welche wegen des Imaginärseins der Berührungspunkte D und E zu wählen sind — in AA_1 ist dann F selbst. Dies gilt von jedem der beiden Brennpunkte; daher der bekannte Satz: Der Ort des Mittelpunktes S des durch einen gegebenen Kegelschnitt gelegten Umdrehungskegels ist ein Kegelschnitt, dessen Ebene senkrecht auf der gegebenen steht und durch dessen Hauptaxe geht, und dessen Scheitel in den Brennpunkten und dessen Brennpunkte in den Scheiteln des gegebenen Kegelschnittes liegen.

XIV.

Ueber Normalreihen der relativen Dispersionen im sichtbaren Spectrum als Criterium der Zuverlässigkeit von Messungen optischer Constanten.

Von

Prof. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Nach dem Vorgange Cauchy's ist von den Physikern in neuester Zeit eine Anzahl der verschiedensten theoretischen und empirischen Formeln angegeben worden, den Brechungsindex n durchsichtiger Medien als eine Function der äusseren oder der inneren Wellenlängen des Lichtes darzustellen, so dass man bei der gegenwärtigen Verworrenheit gar nicht weiss, woran man ist. Da sich die bis jetzt aufgestellten theoretischen Formeln als unzulänglich erwiesen haben, eine genügende Uebereinstimmung der Berechnung mit der Beobachtung innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler zu erzielen, so ist mehrfach der Versuch gemacht worden, gute empirische Dispersionsformeln aufzustellen. Es möge hier auf die äusserst mühsamen und zeitraubenden Arbeiten von Mascart, Ketteler, Willibald Schmidt und van der Willigen verwiesen werden, von denen eine grosse Anzahl von Brechungsindices durchsichtiger lichtbrechender Substanzen in der mannichfachsten Weise der Rechnung unterzogen und die concurrirenden Formeln auf die Uebereinstimmung ihrer Resultate mit den bis jetzt vorliegenden zuverlässigsten Messungen geprüft sind. Für den Grad der Zuverlässigkeit der Messungen fehlt es jedoch noch an einem sichern Massstabe, so lange das Gesetz der Erscheinung gänzlich unbekannt ist und so lange nicht die Mittelwerthe vieler voneinander unabhängiger Messungen an denselben Substanzen sich einer bestimmten Grenze nähern. Bei dem jetzt sich immer mehr und mehr anhäufenden Beobachtungsmaterial ist die Kenntniss des persönlichen Fehlers erwünscht, um den relativen Werth einer einzelnen Beobachtung ermessen zu können. Ich werde weiter unten auf die mögliche Lösung dieser Frage zurückkommen.

Der jetzige Standpunkt der Frage nach dem mathematischen Ausdruck des Dispersionsgesetzes scheint nach den Mittheilungen von Ketteler, Schmidt und van der Willigen der zu sein, dass man im Allgemeinen mit einigen unwesentlichen Abänderungen an der Formel von Cauchy festhält, und zwar aus Rücksichten der Bequemlichkeit ihrer Anwendung; dass man also setzt nach Cauchy

$$n = a + \frac{b}{10^6 \lambda^2} + \frac{c}{10^{12} \lambda^4} + \frac{d}{10^{18} \lambda^6} + \dots,$$

wo a, b, c, d Constanten, λ die Wellenlänge der Farben im dispersionsfreien Raume vorstellen; oder allgemeiner nach W. Schmidt

$$n = a + \frac{b}{(10^3 \lambda)^x} + \frac{c}{(10^3 \lambda)^y} + \frac{d}{(10^3 \lambda)^z} + \dots,$$

wo x, y, z ganze Zahlen sind. Schmidt hat nur die drei ersten Glieder berücksichtigt, indem er für x und y ganze positive Werthe setzt.

Es hat sich nun aus den vielfach wiederholten Rechnungsversuchen ergeben, dass mindestens vier Constanten erforderlich sind, um eine Uebereinstimmung bis auf wenige Einheiten der fünften Decimale zu erzielen. Die Formel von Schmidt enthält nur drei Glieder, aber fünf Constanten, indem er durch vielfache, an sieben Fraunhofer'schen Glassorten angestellte Rechnungsversuche die Exponenten $x = 1$, $y = 4$ findet. Auch ich habe diesen Weg einzuschlagen versucht; er führt freilich erst durch langwierige Rechnungen zum Ziele. Das Ergebniss gewährt aber den unverkennbaren Vortheil, dass man bei einer geringern Anzahl von Gliedern der Reihe die Anzahl der Constanten um $m-1$ erhöhen kann; d. h. die Cauchy'sche Reihe hat bei m Gliedern m bestimmbare Constanten, die allgemeinere bei m Gliedern $2m-1$ Constanten. So z. B. ist nach Schmidt für das Fraunhofer'sche Flintglas Nr. 23

$$n = 1{,}594908 + \frac{0{,}0198650}{(10^3 \lambda)^1} + \frac{0{,}000616194}{(10^3 \lambda)^4},$$

unter Zugrundelegung der Angström'schen Wellenlängen (Pogg. Ann. CXXIII S. 489 flgg. und Berl. Ber. f. 1868 S. 344)

A	0,00076039	D	0,00058890	G	0,00043072
B	68668	E	52690	H_1	39680
C	65618	F	48606	H_2	39328.

Für destillirtes Wasser von 18,5° C. finde ich

$$n = 1{,}314516 + \frac{0{,}0114111}{(10^3 \lambda)^{3/4}} + \frac{0{,}000321531}{(10^3 \lambda)^{3\frac{1}{4}}},$$

unter Zugrundelegung der folgenden Wellenlängen:

A	0,00076062	D	0,00058878	G	0,00043077
B	68661	E	52680	H_1	39674
C	65602	F	48597	H_2	39380.

Van der Willigen findet für destillirtes Wasser von 20,2° C.

$$n = 1,321\dot{5}05 + \frac{0,00490858}{(10^3\lambda)^2} - \frac{0,0003947131}{(10^3\lambda)^4} + \frac{0,00002606364}{(10^3\lambda)^6},$$

unter Zugrundelegung seiner Wellenmessungen (*Arch. du musée Teyler I*, 280—343)

A	0,00076092	D	0,00058984	G	0,00043114
B	68713	E	52720	H_1	39715
C	65656	F	48610	H_2	39387.

Endlich findet Ketteler für den ordinären Strahl im Kalkspath die Werthe der Constanten seiner Formel

a) $$\frac{1}{n^2} = A\,\frac{1}{1-kl^2} + B\,\frac{1}{l^2-C''},$$

wo l die innere Wellenlänge bezeichnet:

$$\log k = \bar{3},6910252, \quad \log B = \bar{4},9967761,$$
$$\log A = \bar{1},5693677, \quad \log C'' = \bar{4},8070652.$$

Ich finde für denselben Strahl und dieselbe Beobachtungsreihe (Mascart) für das Spectrum in der ganzen Ausdehnung zwischen den Fraunhoferschen Linien A—R

b) $$n = 1,63121 + \frac{0,01266352}{(10^3\lambda)^{1\frac{1}{4}}} + \frac{0,0003706092}{(10^3\lambda)^{3\frac{3}{4}}}.$$

Zur Vergleichung der Leistungen beider Formeln dient die folgende Tabelle:

Linie.	I. n beob.	II. n wahrsch. Werth.	III. n ber. nach a).	IV. n ber. nach b).	Diff. I—III.	Diff. I—IV.	Diff. II—III.	Diff. II—IV.
A.	1,65018	1,65008	1,65008	1,65007	+5	+6	0	+1
a.	1,65162	—	1,65164	1,65164	−2	−2	—	—
B.	1,65296	1,65301	1,65299	1,65299	−3	−3	+2	+2
C.	1,65446	1,65449	1,65446	1,65446	0	0	+3	+3
D.	1,65846	1,65847	1,65844	1,65846	+2	0	+3	+1
E.	1,66354	1,66355	1,66349	1,66353	+5	+1	+6	+2
b.	1,66446	1,66452	1,66450	1,66454	−4	−8	+2	−2
F.	1,66793	1,66796	1,66793	1,66797	0	−4	+3	−1
G.	1,67620	1,67618	1,67620	1,67622	0	−2	−2	−4
H_1.	1,68330	1,68330	1,68330	1,68330	0	0	0	0
L.	1,68706	—	1,68709	1,68706	−3	0	—	—
M.	1,68966	—	1,68965	1,68966	+1	0	—	—
N.	1,69441	—	1,69438	1,69441	+3	0	—	—
O.	1,69955	—	1,69952	1,69955	+3	0	—	—
P.	1,70276	—	1,70280	1,70283	−4	−7	—	—
Q.	1,70613	—	1,70615	1,70613	−2	0	—	—
R.	1,71155	—	1,71152	1,71159	+3	−4	—	—

Die Columne II enthält die Mittelwerthe der Messungen von Rudberg, Mascart und van der Willigen. Die kleinen Differenzen zwischen den angenommenen Wellenlängen kommen kaum in Betracht. Auffallend bleibt jedoch, dass die Differenzen zwischen den wahrscheinlichen

Werthen und den berechneten sich in einem gleichen Sinne ändern, obgleich die beiden Formeln sehr voneinander abweichen. Wenn die Mittelwerthe mit Einschluss der fünften Decimale genau sind, so wird man genöthigt sein, der Function noch zwei Constanten mehr hinzuzufügen mit Rücksicht auf den Wendepunkt bei E.

Wie schon vorhin bemerkt, gelangt Schmidt durch ein Reihe von mühsamen Rechnungsversuchen zu dem Resultate, dass unter den binomischen rationalen Functionen der Wellenlängen von der Form

$$n = a + \frac{b}{(10^3\lambda)^x}$$

keine, dagegen unter den trinomischen im Bereiche der sechs ersten Potenzen von λ^{-1} nur eine einzige Function existire, welche die Brechung des Lichtes in sieben Fraunhofer'schen Glassorten so genau wiedergiebt, als die Präcision der Beobachtungen Fraunhofer's es verlangt. Für diese Präcision der Messungen von Fraunhofer hat man allerdings keine andere Garantie, als die seiner Autorität. Die Formel, welche Schmidt seinen Berechnungen zu Grunde legt, lautet

$$n = a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4}.$$

Wie es nun aber mit ihrer Anwendbarkeit auf die übrigen brechenden Substanzen steht, namentlich auf diejenigen, welche die stärkste oder die schwächste Dispersion im Blau haben, wie Phosphor und Cassiaöl einerseits, Schwefelsäure und Alaun andererseits, lässt sich hieraus durchaus nicht schliessen. Die einzig möglichen Methoden sind, entweder den von Schmidt betretenen Weg weiter zu verfolgen, oder das Verhältniss von c zu b ins Auge zu fassen. Bei dem Flintglase ist $c:b = 0{,}03$, bei Crownglas 0,02. Die Aenderung der partiellen Dispersion von Farbe zu Farbe findet wesentlich ihren Ausdruck in dem dritten Gliede $c\lambda^{-y}$. Wenn also mit Zugrundelegung der Formel

$$n = a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4}$$

die Constante c unverhältnissmässig stark wächst von Substanz zu Substanz, so wird man geneigt sein, an die Stelle von $y = 4$ den Werth 5 treten zu lassen; ebenso umgekehrt. Für Crownglas und Kalkspath wähle ich die Formel

$$n = a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3^{11}/_{16}}.$$

Es liegt nun auch der Gedanke nahe, für alle Substanzen die directe Berechnung der ersten Exponenten x und y vorzunehmen. Diese Arbeit ist jedoch äusserst mühevoll and zeitraubend, indess lohnend, wie mir scheint. Ehe man jedoch an diese Arbeit geht, welche die Auflösung einer Anzahl von Exponentialgleichungen in sich schliesst, hat man in Erwägung zu ziehen, dass die meisten der bis jetzt vorliegenden Messungen, insbesondere die Messungen der Brechungsindices derjenigen Substanzen, deren partielle Dispersionen zu den extremen gehören, keineswegs eine Zuverlässigkeit einschliesslich der fünften Decimale beanspruchen können. Zu den Schwierigkeiten, die Exponenten x und y mittels Auflösung von Exponentialgleichungen aus den Brechungsindices zu berechnen, kommt noch der Uebelstand, dass man auch zu complexen Wurzeln gelangen kann, wie dies z. B. bei den Brechungsindices von Wasser vorkommt. Dies hat dann entweder seinen Grund darin, dass die Messungen von dem wahren Werthe noch zu weit abweichen, oder man muss annehmen, dass die Cauchy'sche und ähnliche Formeln mit Berücksichtigung von nur drei Gliedern auf diese und verwandte brechende Substanzen absolut nicht anwendbar sind. Man hat sich genöthigt gesehen, zu der Cauchy'schen Reihe noch ein Glied $\varkappa\lambda^2$ hinzuzufügen, wodurch allerdings ein Durchschnittspunkt der Curve mehr, aber eine bessere Convergenz für die dazwischen liegenden Werthe durchaus nicht überall erreicht wird.

Trotz der erwähnten Uebelstände habe ich mich dennoch der Arbeit unterzogen, eine Lösung der Frage nach dieser Richtung hin zu versuchen, nämlich in der ganzen Ausdehnung der mir bekannten Beobachtungsreihen, deren Zahl annähernd 250 beträgt und die sich auf die acht Farben A bis H, erstrecken, eine angenäherte Bestimmung des Exponenten y in der dreigliedrigen Function vorzunehmen. Dieselbe enthält also fünf Constanten. Es zeigt sich, dass dieselbe sich stetig in ungefähr folgender Progression verändert:

Alaun, Schwefelsäure . . .	$n = a + b\lambda^{-\frac{1}{2}} + c\lambda^{-2\frac{7}{8}}$,
Destillirtes Wasser	$a + b\lambda^{-\frac{3}{4}} + c\lambda^{-3\frac{1}{8}}$,
Flussspath, Topas und Quarz	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{7}{16}}$,
Kali, schwache Salzlösungen	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{8}{16}}$,
Glycerin	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{9}{16}}$,
Schwerspath, Crownglas . .	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{10}{16}}$,
Kalkspath, Crownglas . . .	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{11}{16}}$,
Starke Salzlösungen, Alkohol	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{12}{16}}$,
Crownglas Ltr. M	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{13}{16}}$,
Terpentin, Steinsalz . . .	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{14}{16}}$,
Leichtes Flintglas	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-3\frac{15}{16}}$,
Sylvin, schweres Flintglas .	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4}$,
Benzin, Bromoform	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4\frac{1}{16}}$,
Kreosot, Flintglas von Merz I	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4\frac{3}{16}}$,
Schwefelkohlenstoff	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4\frac{5}{16}}$,
Pflanzenöle	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-4\frac{7}{16}}$,
Cassiaöl, Phosphor	$a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-5}$.

Es springt auf den ersten Blick in die Augen, dass die Reihenfolge der brechenden Substanzen, welche hier nach der zunehmenden Dispersion im Blau geordnet sind, mit alleiniger Ausnahme des Flussspaths nahezu die Stufenleiter der diathermanen Körper betritt. Wir werden dies weiter unten noch deutlicher erkennen.

Ausser der bis jetzt angewandten Prüfung der Messungen an der Formel giebt es noch einen andern und, wie mir scheint, sicherern Weg, die Zuverlässigkeit der optischen Constanten bis auf wenige Einheiten der fünften Decimale zu prüfen. Es lassen sich nämlich Normalreihen der relativen Dispersionen berechnen, deren Genauigkeit sich durch neue Messungen soweit herstellen lässt, dass man mittels derselben im Stande sein wird, auch noch die sechste Decimale der Brechungsindices genau zu bestimmen. Es zeigt sich zunächst, dass zwar im Allgemeinen mit der Grösse des mittlern Brechungsindex n_D die Totaldispersion $n_H - n_B$ wächst und mit dieser auch die relative Dispersion im Blau, also $n_H - n_F$; allein weder das Erste, noch das Letzte ist immer der Fall. So z. B. ist die Totaldispersion von Alaun und Schwefelsäure grösser als die von Wasser, die relative Dispersion im Blau dagegen kleiner. Die Totaldispersion von Quarz ist grösser als die von Alkohol, die relative Dispersion im Blau kleiner. Bei dem doppeltbrechenden Kalkspath und Arragonit sind die Totaldispersionen der ordinären und extraordinären Strahlen sehr verschieden, die relativen Dispersionen im Blau dagegen vollkommen gleich. Dasselbe scheint für alle doppeltbrechenden Substanzen zu gelten. Andererseits ist bei Flussspath der mittlere Brechungsindex n_D grösser als bei Wasser, die Totaldispersion dagegen viel kleiner und die relative Dispersion im Blau grösser.

Wird die Totaldispersion einer brechenden Substanz gleich der Einheit gesetzt und werden die partiellen Dispersionen mit derselben verglichen, so erhält man die relativen Dispersionen. Dieselben sind also nicht zu verwechseln mit den Verhältnissen der Dispersionen für zwei verschiedene Substanzen. Diese erhält man, wenn man die partiellen oder totalen Dispersionen einer Substanz durch die entsprechenden Dispersionen einer andern Substanz dividirt. Die beiden genannten Zahlenwerthe stehen aber in einer bestimmten Beziehung zueinander. Sind nämlich für zwei brechende Medien die Verhältnisse zweier entsprechenden Dispersionen gleich oder, was dasselbe ist, die entsprechenden relativen Dispersionen gleich, also

$$(n_H - n_F) : (n_H - n_B) = (N_H - N_F) : (N_H - N_B),$$

so ist auch

$$(n_B - n_A) : (n_H - n_B) = (N_B - N_A) : (N_H - N_B),$$

$$(n_C - n_B) : (n_H - n_B) = (N_C - N_B) : (N_H - N_B) \text{ u. s. f.}$$

oder

$$(n_B - n_A) : (n_C - n_B) : (n_D - n_C) \ldots = (N_B - N_A) : (N_C - N_B) : (N_D - N_C) \ldots$$

Man kann auf diese Weise nun Normalreihen der relativen Dispersionen bilden und diese geben den besten Massstab für die Zuverlässigkeit isolirter Messungen und so zu sagen für den persönlichen Fehler der Beobachter ab. Die Aenderungen der Indices mit der Temperatur geschehen nach demselben Gesetze: für ein und dieselbe Substanz ist

$$(\Delta n_B - \Delta n_A) : (\Delta n_C - \Delta n_B) : (\Delta n_D - \Delta n_E) \ldots$$
$$= (n_B - n_A) : (n_C - n_B) : (n_D - n_C) \ldots$$

und ist für verschiedene Substanzen

$$(n_H - n_F) : (n_H - n_B) = (N_H - N_F) : (N_H - N_B),$$

so ist auch

$$(\varDelta n_B - \varDelta n_A) : (\varDelta n_C - \varDelta n_B) : (\varDelta n_D - \varDelta n_E) \ldots$$
$$= (\varDelta N_B - \varDelta N_A) : (\varDelta N_C - \varDelta N_B) : (\varDelta N_D - \varDelta N_E) \ldots.$$

Ueber diesen Gegenstand liegen mehrere Beobachtungsreihen vor von van der Willigen an dem Flintglas II von Merz, an Wasser und Schwefelkohlenstoff, sowie von Listing an Glycerin. Da die Aenderungen der Brechungsindices mit der Temperaturzunahme für Glas und Wasser aber sehr klein sind, so ist hieran das Gesetz noch weiter zu prüfen. Für Schwefelkohlenstoff und Glycerin sind die Aenderungen beträchtlich grösser und an diesen Substanzen findet das Gesetz seine Bestätigung.

Nach van der Willigen ist im Schwefelkohlenstoff bei 10° C. Temperaturabnahme

	beob.:	ber.:	Gladstone und Dale:
$\varDelta n_A$	—	0,00789	0,00750
$\varDelta n_B$	0,00802	0,00798	—
$\varDelta n_C$	0,00814	0,00803	—
$\varDelta n_D$	0,00824	0,00819	0,00820
$\varDelta n_E$	0,00833	0,00841	—
$\varDelta n_F$	0,00854	0,00861	—
$\varDelta n_G$	0,00892	0,00902	—
$\varDelta n_H$	0,00945	0,00941	0,00920.

Listing theilt in seiner Abhandlung „Bestimmung der Dispersion des Glycerin" (Pogg. Ann. Bd. 137, S. 478—490) folgende Differenzen der Brechungsindices für 10° Temperaturabnahme mit:

	beob.:	ber.:
$\varDelta n_A$	0,00310	0,003092
$\varDelta n_B$	0,00313	0,003130
$\varDelta n_C$	0,00316	0,003148
$\varDelta n_D$	0,00320	0,003197
$\varDelta n_E$	0,00325	0,003260
$\varDelta n_F$	0,00332	0,003314
$\varDelta n_G$	0,00341	0,003413
$\varDelta n_H$	0,00350	0,003498.

Dies Gesetz wird ferner bestätigt durch Messung der Linien C, F und G am Schwefelkohlenstoff und Mischungen von Schwefelkohlenstoff und Alkohol (Pogg. Ann. Bd. 133, S. 16 flgg.) Nach Wüllner ist bei 10° Temperaturabnahme an Schwefelkohlenstoff

$$\begin{array}{cccc} & C & F & G \\ \varDelta n = & 0{,}00780 & 0{,}00820 & 0{,}00850. \end{array}$$

Nach vier guten Beobachtungen von Verdet und van der Willigen ist

$$(n_F - n_C) : (n_G - n_F) = 0{,}4060 : 0{,}2870.$$

Es ist nun in der That nach Wüllner's Messungen,

$$(n_F - n_C):(n_G - n_F) = 0{,}035008:0{,}023073$$

und nahezu

$$(\varDelta n_F - \varDelta n_C):(\varDelta n_G - \varDelta n_F) = (n_F - n_C):(n_G - n_F) = 4:3.$$

Ferner ist für eine Mischung von 1 Alkohol und 3,955 Schwefelkohlenstoff

	C	F	G
$\varDelta n =$	0,00678	0,00720	0,00750
Diff.		42	30,

$$(n_F - n_C):(n_G - n_F) = 0{,}025913:0{,}016828 = 42:27{,}3.$$

Für eine Mischung von 1 Alkohol und 2,12836 Schwefelkohlenstoff ist

	C	F	G
$\varDelta n =$	0,00626	0,00659	0,00680
Diff.		33	21,

$$(n_F - n_C):(n_G - n_F) = 0{,}021510:0{,}013704 = 33:21.$$

Für eine Mischung von 1 Alkohol und 1,03111 Schwefelkohlenstoff ist

	C	F	G
$\varDelta n =$	0,00560	0,00578	0,00590
Diff.		18	12,

$$(n_F - n_C):(n_G - n_F) = 0{,}016258:0{,}010253 = 18:11{,}4.$$

Nach diesen Proben dürfte das angeführte Gesetz wohl keinerlei Zweifel unterliegen. Wir kehren zurück zur Bestimmung der Normalreihe der relativen Dispersionen. Die weiter unten folgende Tabelle gründet sich auf etwa 250 Messungen innerhalb des sichtbaren Spectrums an den acht Fraunhofer'schen Linien A bis H_1. Unter diesen 250 Messungen sind mitgetheilt:

11	von Fraunhofer,	1	von Ditscheiner,
10	„ Rudberg,	1	„ Tschermack,
16	„ Dutirou,	1	„ Gernez,
19	„ Mascart,	1	„ Verdet,
72	„ van der Willigen,	3	„ v. Obermayr,
66	„ Gladstone und Dale,	1	„ Listing,
21	„ Baden-Powell,	1	„ Kundt,
9	„ Stefan,	3	„ Cyon,
3	„ Heusser,	9	„ Croullebois.

Von diesen Messungen mussten 68 verworfen werden aus Mangel an Zuverlässigkeit, und zwar eine einzige von der grossen Anzahl werthvoller Reihen von van der Willigen, das Crownglas von Merz IV betreffend. Indessen geht aus den angeführten Brechungsindices hervor, dass in den Berichten eine Verwechselung der Linien E und b mit D und E stattgefunden haben muss. Ferner zeigten sich als anomal zwei Messungen von Mascart, das Crownglas von Chance und den extraordinären Strahl im Kalkspath betreffend. Bei dem ersteren ist $B-A$ und H_1-G zu klein, $D-C$ zu gross; bei dem letzteren ist n_G zu gross. Anomal sind weiter zwei Reihen von Stefan, Flintglas und Sylvin betreffend; bei dem ersteren ist $n_E =$

1,62611 zu klein, bei dem letzteren die Brechungsindices von n_D an unzuverlässig oder H_1 zu klein. Ausserdem erwiesen sich in mehrfacher Hinsicht als unzuverlässig vier Reihen von Dutirou, zehn von Baden-Powell, 38 von Gladstone und Dale, sowie die Angaben von Kundt, Cyon und Croullebois. Die Messungen von Fraunhofer, Rudberg und van der Willigen verdienen demnach das grösste Vertrauen; dann folgen die von Mascart und Stefan; die isolirten Werthe unter den Messungen von Baden-Powell, Gladstone und Dale haben bis jetzt noch wenig Werth und bedürfen erst der Bestätigung. Die werthvollen Messungen Mascart's im ultravioletten Spectrum konnten noch keine Berücksichtigung finden.

Tabelle der Mittelwerthe der relativen Dispersionen.

Zahl der Messungen.	Mittelwerthe $n_H - n_B$	$H-F.$	$B-A.$	$C-B.$	$D-C.$	$E-D.$	$F-E.$	$G-F.$	$H_1-G.$	Gruppe der brechenden Substanzen.
1. 4	0,01575	0,4666	1290	616	1488	1764	1466	2549	2117	Alaun, Schwefelsäure.
2. 5	0,01426	0,4760	1194	566	1479	1750	1446	2607	2153	Schwefelsäurehydrat.
3. 13	0,01348	0,4859	1126	547	1417	1709	1467	2643	2216	Wasser.
4. 10	0,01352	0,4870	1131	542	1413	1709	1466	2650	2221	Schwache Salzlösungen.
5. 28	0,01570	0,4904	1114	537	1385	1707	1466	2655	2249	Topas.
6. 18	0,01690	0,4923	1099	534	1370	1706	1466	2659	2264	Quarz, Flussspath.
7. 3	0,01720	0,4936	1087	523	1366	1715	1459	2668	2268	Ordin. Strahl im Quarz.
8. 37	0,01656	0,4947	1085	526	1365	1704	1458	2672	2275	Kalilösung.
9. 19	0,01620	0,4970	1071	517	1361	1701	1451	2684	2286	Salzlösungen.
10. 39	0,01727	0,4999	1041	509	1341	1694	1457	2698	2301	Glycerin.
11. 22	0,01835	0,5028	1010	501	1321	1687	1462	2713	2315	Schwerspath, Crownglas.
12. 43	0,01974	0,5050	998	492	1316	1681	1459	2719	2333	Salzlösungen.
13. 3	0,03029	0,5064	967	488	1314	1677	1456	2714	2350	Ordin. Strahl im Kalkspath.
14. 23	0,02096	0,5070	981	484	1312	1677	1455	2724	2349	Kalkspath, Crownglas.
15. 3	0,01832	0,5106	950	480	1306	1667	1441	2726	2381	Alkohol.
16. —	0,02067	0,5124	937	472	1293	1666	1445	2737	2388	Starke Salzlösungen.
17. 7	0,02302	0,5142	925	465	1281	1664	1448	2748	2395	Crownglas Ltr. *M.*
18. 4	0,02654	0,5169	905	454	1261	1662	1453	2764	2406	Steinsalz, Sylvin.
19. —	0,03034	0,5206	890	448	1243	1641	1461	2776	2431	Terpentin.
20. 7	0,03252	0,5228	881	446	1232	1629	1466	2783	2445	Leichtes Flintglas.
21. 17	0,03543	0,5257	870	445	1226	1607	1464	2788	2469	
22. 10	0,03747	0,5277	855	445	1223	1602	1452	2792	2485	Flintglas.
23. 6	0,03879	0,5292	837	444	1217	1591	1456	2796	2496	
24. 6	0,04099	0,5316	819	442	1208	1589	1446	2802	2514	Schweres Flintglas.
25. 14	0,04035	0,5336	800	427	1196	1593	1448	2817	2519	Benzin.
26. 4	0,04162	0,5371	798	426	1181	1596	1426	2877	2494	Bromoform.
27. 10	0,04174	0,5423	794	402	1161	1577	1437	2866	2556	
28. 6	0,04182	0,5457	790	385	1147	1565	1444	2860	2598	Kreosot, Flintglas Merz I.
29. 17	0,05644	0,5511	778	394	1128	1540	1427	2880	2631	
30. 11	0,06442	0,5540	773	399	1117	1526	1417	2890	2650	
31. 4	0,08473	0,5570	734	386	1112	1514	1417	2870	2700	Schwefelkohlenstoff.
32. 21	0,06922	0,5608	745	387	1087	1510	1407	2885	2724	
33. 10	0,07403	0,5676	718	376	1057	1494	1396	2879	2797	Pflanzenöle.
34. 12	0,07210	0,5707	703	370	1036	1489	1397	2894	2813	Anisöl.
35. 6	0,10425	0,6024	657	346	921	1362	1346	2908	3116	
36. 4	0,12515	0,6100	621	348	919	1338	1295	2900	3200	Cassiaöl, Phosphor.

Tabelle der normalen relativen Dispersionen.

Nr.	$H-F$.	$B-A$.	$C-B$.	$D-C$.	$E-D$.	$F-E$.	$G-F$.	H_1-G.
I.	0,4600	1345	636	1515	1784	1465	2533	2067
II.	0,4650	1304	616	1493	1775	1466	2556	2094
III.	0,4700	1262	597	1472	1765	1466	2579	2121
IV.	0,4750	1222	579	1450	1755	1466	2601	2149
V.	0,4800	1181	562	1428	1744	1466	2622	2178
VI.	0,4850	1142	546	1406	1733	1465	2643	2207
VII.	0,4875	1122	538	1395	1727	1465	2653	2222
VIII.	0,4900	1103	530	1385	1721	1464	2663	2237
IX.	0,4925	1084	523	1374	1715	1463	2673	2252
X.	0,4950	1066	515	1363	1709	1463	2683	2267
XI.	0,4975	1048	508	1352	1703	1462	2693	2282
XII.	0,5000	1030	501	1342	1696	1461	2702	2298
XIII.	0,5025	1012	494	1331	1690	1460	2711	2314
XIV.	0,5050	995	488	1320	1683	1459	2720	2330
XV.	0,5075	978	482	1309	1676	1458	2729	2346
XVI.	0,5100	961	476	1299	1669	1456	2737	2363
XVII.	0,5125	945	470	1288	1662	1455	2745	2380
XVIII.	0,5150	929	465	1278	1654	1453	2753	2397
XIX.	0,5175	913	459	1268	1647	1451	2761	2414
XX.	0,5200	898	453	1258	1639	1450	2769	2431
XXI.	0,5225	883	447	1247	1632	1449	2777	2448
XXII.	0,5250	869	442	1237	1624	1447	2784	2466
XXIII.	0,5275	855	437	1227	1616	1445	2791	2484
XXIV.	0,5300	842	432	1217	1608	1443	2798	2502
XXV.	0,5325	829	427	1207	1600	1441	2805	2520
XXVI.	0,5350	818	422	1197	1592	1439	2812	2538
XXVII.	0,5375	806	417	1187	1584	1437	2818	2557
XXVIII.	0,5400	795	414	1177	1575	1434	2824	2576
XXIX.	0,5425	784	409	1167	1567	1432	2830	2595
XXX.	0,5450	773	405	1158	1558	1429	2836	2614
XXXI.	0,5500	755	398	1139	1540	1423	2847	2653
XXXII.	0,5550	738	391	1120	1522	1417	2857	2693
XXXIII.	0,5600	723	384	1102	1503	1411	2866	2737
XXXIV.	0,5650	710	377	1084	1484	1405	2874	2776
XXXV.	0,5700	699	371	1067	1465	1398	2880	2820
XXXVI.	0,5750	687	364	1050	1445	1391	2886	2864
XXXVII.	0,5800	675	359	1034	1424	1383	2892	2909
XXXVIII.	0,5900	655	348	1003	1382	1367	2898	3002
XXXIX.	0,6000	639	339	974	1338	1349	2901	3099
XXXX.	0,6100	625	331	948	1292	1329	2900	3200
XXXXI.	0,6200	613	324	925	1244	1307	2895	3305

Die erste Tabelle enthält die Mittelwerthe der relativen Dispersionen für gleiche relative Dispersionen im Blau; sie sind nach aufsteigenden Werthen dieser relativen Dispersionen, also nach $\frac{H-F}{H-B}$ geordnet. In der letzten Columne sind die Hauptrepräsentanten der Substanzen aufgeführt. Mit Zugrundelegung von sechs der zuverlässigsten Reihen von Mittelwerthen ist dann mittels abgeleiteter Formeln die nächstfolgende Tabelle berechnet worden.

Tabelle der Verhältnisse der relativen Dispersionen für verschiedene Substanzen.

$H-F$.	H_1-F_1.	$\frac{B_1-A_1}{B-A}$.	$\frac{C_1-B_1}{C-B}$.	$\frac{D_1-C_1}{D-C}$.	$\frac{E_1-D_1}{E-D}$.	$\frac{F_1-E_1}{F-E}$.	$\frac{G_1-F_1}{G-F}$.	$\frac{H_1-G_1}{H-G}$.
0,4600	0,4700	0,9383	0,9387	0,9716	0,9893	1,0007	1,0181	1,0260
0,4700	0,4800	0,9358	0,9414	0,9701	0,9881	1,0000	1,0167	1,0269
0,4800	0,4900	0,9340	0,9431	0,9699	0,9868	0,9986	1,0156	1,0271
0,4900	0,5000	0,9338	0,9453	0,9690	0,9855	0,9980	1,0146	1,0273
0,5000	0,5100	0,9330	0,9501	0,9679	0,9841	0,9966	1,0129	1,0283
0,5100	0,5200	0,9344	0,9517	0,9685	0,9820	0,9959	1,0117	1,0288
0,5200	0,5300	0,9376	0,9536	0,9674	0,9811	0,9952	1,0105	1,0292
0,5300	0,5400	0,9442	0,9583	0,9671	0,9794	0,9937	1,0093	1,0296
0,5400	0,5500	0,9497	0,9613	0,9677	0,9778	0,9923	1,0081	1,0299
0,5500	0,5600	0,9576	0,9648	0,9675	0,9760	0,9915	1,0067	1,0305
0,5600	0,5700	0,9654	0,9661	0,9682	0,9747	0,9908	1,0049	1,0315
0,5700	0,5800	0,9657	0,9677	0,9691	0,9720	0,9893	1,0041	1,0316
0,5800	0,5900	0,9703	0,9694	0,9700	0,9705	0,9884	1,0021	1,0320
0,5900	0,6000	0,9756	0,9741	0,9711	0,9681	0,9868	1,0010	1,0323
0,6000	0,6100	0,9781	0,9764	0,9733	0,9656	0,9852	0,9997	1,0326
0,6100	0,6200	0,9801	0,9789	0,9758	0,9629	0,9834	0,9983	1,0328

Wir wollen an diese beiden wichtigen Tabellen einige kurze Betrachtungen anknüpfen. Was den Grad der Zuverlässigkeit der Zahlenwerthe anbetrifft, so wird derselbe hauptsächlich durch die Anzahl der Beobachtungen bestimmt, aus welcher die Mittelwerthe in der ersten Tabelle berechnet worden sind. Diese Zahlen sind in der ersten Columne derselben Tabelle vorangestellt; sie beziehen sich auf die Fraunhofer'sche Linie von B bis H_1. Hiernach hat die Columne $B-A$ einen geringeren Werth als die übrigen; ebenso sind die Horizontalreihen XXXVII—XXXXI auf eine zu geringe Zahl von Messungen gestützt; sie sind vorläufig nur als Näherungswerthe anzusehen. Aus den übrigen Reihen aber, welche den relativen Dispersionen im Blau von 0,4600 bis 0,5800 entsprechen, lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen.

Das Gesetz der Aenderungen der relativen Dispersionen ist leicht zu übersehen. Die Columnen $F-E$ und $G-F$ enthalten je ein Maximum bei 0,4775 und 0,6000. Die Maxima der Columnen $B-A$, $C-B$, $D-C$, $E-D$ liegen oberhalb der berechneten Tabelle und treten successive von rechts nach links ein. Für die relativen Dispersionen im Blau, welche den Werth 0,6000 übersteigen, ist allein die relative Dispersion im Violett zunehmend, während alle übrigen abnehmen. Dieselbe Dispersion H_1-G erreicht ihr Minimum 0,0000 für $H_1-F=0,0000$ und ihr Maximum 1,0000 für $H_1-F=1$. Zwischen diesen Grenzen ist die relative Dispersion im Violett in stetem Wachsthum begriffen, welches sich auch bis zu den äussersten Grenzen des ultravioletten Spectrums hin fortsetzt. Unter den bis jetzt untersuchten brechenden Substanzen haben die Schwefelsäure und der Kalialaun die kleinste relative Dispersion im ultravioletten Theile des Spectrums; dies lässt sich mit Sicherheit aus den Messungen Mascart's (*Ann. de chim. et de phys., IV. Sér. t. XIV*, 149) am Quarz, Kalkspath, Crownglas und Flintglas schliessen. Es liegen hiervon 16 Reihen vor, unter denen die Messung des ordinären Strahles im Kalkspath sich weit über die Linie T hinaus erstreckt, nämlich bis zur Cadmiumlinie (25), deren Wellenlänge nur noch $0{,}0002217^{\text{mm.}}$ beträgt, mit dem Brechungsindex 1,82460. Nach den Messungen von Sirks und Wernike haben die geringste Dispersion im Roth und die grösste Dispersion im Blau Selen, die Silberhaloide, Mangansuperoxyd, Bleisuperoxyd und Kupferoxydul. Da jedoch mit der starken Dispersion immer eine starke Absorption verbunden ist, so sind die totalen Dispersionen $H_1 - B$ für diese Substanzen unbekannt. Die genannten Substanzen werden unzweifelhaft in der Dispersion der blauen Lichtstrahlen noch bei weitem übertroffen von den Metallen.

Um den Nutzen der Normaltabelle zu erweisen, mögen vier Messungen von Fraunhofer, Mascart, van der Willigen und Croullebois (*Ann. de chym. et de phys., IV. Sér. t. XXII*, 148) einer Prüfung unterzogen werden.

Substanz.	Δn.	H_1-F.	$B-A$.	$C-B$.	$D-C$.	$E-D$.	$F-E$.	$G-F$.	H_1-G.	Beobachter.
Crownglas Nr. 13 . .	0,02037	0,5080	—	485	1317	1664	1455	2735	2345	Fr.
„ v. Rossette	0,02082	0,5072	946	490	1311	1676	1451	2738	2334	M.
„ v. Merz III	0,02024	0,5074	988	460	1304	1690	1472	2742	2332	v. d. W.
„	0,03176	0,6931	—	312	822	1071	856	3498	3441	Cr.
Normalreihe XV . .	—	0,5075	978	482	1309	1676	1458	2729	2346	

Zur Beurtheilung der Messungen von Baden-Powell, Gladstone und Dale diene folgende Zusammenstellung:

Substanz.	Δn.	H_1-F.	$B-A$.	$C-B$.	$D-C$.	$E-D$.	$F-E$.	$G-F$.	H_1-G.	Beobachter.
Alkohol . . .	0,0133	0,4887	—	376	1579	1579	1579	2782	2105	B.-P.
„ . . .	0,0139	0,4892	864	648	1223	1655	1583	2662	2230	Gl.-D.
„ . . .	0,01369	0,5106	906	482	1315	1673	1425	2725	2381	v. d. W.
Normalreihe	—	0,5100	961	476	1299	1669	1456	2737	2363	

Aus vorstehenden Vergleichungen der Messungen mit der Normalreihe leuchtet bei dem ersten Blick ein, dass wir die Angaben von Baden-Powell, Gladstone und Dale, vor Allem aber auch die von Croullebois mit der grössten Vorsicht aufnehmen müssen. Dagegen gehören die Messungen von Fraunhofer, Rudberg, Mascart und van der Willigen zu den genauesten und werthvollsten, welche die Physik an optischen Constanten besitzt. Zur Beurtheilung ihrer Genauigkeit mögen die Brechungsindices der ordentlichen Strahlen im Quarz und isländischen Kalkspath dienen. Die Abweichungen von den Mittelwerthen dürften theilweise ihren Grund in den Temperaturunterschieden des benutzten Materials haben, sie schwanken nur in einigen Einheiten der fünften Decimale. Von den Temperaturunterschieden sind aber, wie oben nachgewiesen worden ist, die relativen Dispersionen unabhängig.

Brechungsindices

a) des ord. Strahles im Quarz: *b)* des ord. Strahles im Kalkspath:

Linie.	Rudberg.	Mascart.	v. d. Willigen.	Mittel.	Rudberg.	Mascart.	v. d. Willigen.	Mittel.
A.	—	1,53902	1,53914	1,53908	—	1,65013	1,65003	1,65008
B.	1,54090	1,54099	1,54097	1,54095	1,65308	1,65296	1,65299	1,65301
C.	1,54181	1,54188	1,54185	1,54185	1,65452	1,65446	1,65448	1,65449
D.	1,54418	1,54423	1,54419	1,54420	1,65850	1,65846	1,65844	1,65847
E.	1,54711	1,54718	1,54715	1,54715	1,66360	1,66353	1,66352	1,66355
F.	1,54965	1,54966	1,54966	1,54966	1,66802	1,66793	1,66792	1,66796
G.	1,55425	1,55429	1,55422	1,55425	1,67617	1,67620	1,67617	1,67618
H_1.	1,55817	1,55816	1,55811	1,55815	1,68330	1,68330	1,68331	1,68330

Es sollen nun die relativen Dispersionen der Mittelwerthe verglichen werden mit den entsprechenden Normalreihen. Eine Abweichung um 0,0010 giebt bei dem Quarz erst eine Abweichung der Indices um zwei Einheiten, bei dem Kalkspath um drei Einheiten der fünften Decimale.

	Quarz, ord.:	IX—X:	Diff.:	Kalkspath, ord.:	XIV—XV:	Diff.:
H_1-F	0,4936	0,4937		0,5064	0,5063	
$B-A$	0,1087	0,1075	+12	0,0967	0,0986	—19
$C-B$	0,0523	0,0519	+ 4	0,0488	0,0485	+ 3
$D-C$	0,1366	0,1368	— 2	0,1314	0,1314	0
$E-D$	0,1715	0,1712	+ 3	0,1677	0,1679	— 2
$F-E$	0,1459	0,1463	— 4	0,1456	0,1458	— 2
$G-F$	0,2668	0,2678	—10	0,2714	0,2724	—10
H_1-G	0,2268	0,2260	+ 8	0,2350	0,2338	+12.

Zur Kenntniss sämmtlicher partieller Dispersionen einer Substanz genügt es vollständig, die Brechungsindices für *B* und H_1, ausserdem aber noch die von *F* oder einer der anderen Linien, bis zur fünften Decimale einschliesslich genau zu messen. Wenn auch drei solche Beobachtungen genügen, um die Constanten einer dreigliedrigen Cauchy'schen Reihe zu bestimmen, so bedarf es doch hierzu noch der Kenntniss der Wellenlängen, und es reicht doch eine solche Formel nicht aus, um mehr als drei oder vier Stellen genau zu erhalten.

Fraunhofer hat eine Tabelle des Verhältnisses der partiellen und totalen Dispersionen verschiedener Substanzen entworfen, welche sich in fast allen Lehrbüchern der Experimentalphysik findet. Man vergl. Müller, math. Supplementband § 77; Wüllner, Bd. I, 2. Theil § 26; Karsten, Abth. II § 368). Dieselbe bedarf jetzt dringend einer Verbesserung; ich proponire, sie durch die allgemeinere oben berechnete Tabelle der relativen Dispersionen für verschiedene Substanzen zu ersetzen, obgleich die vier letzten Reihen noch einer Correction bedürfen. Die Tabelle von Fraunhofer enthält aber entschieden Fehler, welche zu falschen Ansichten über die Unregelmässigkeit des Dispersionsgesetzes geführt haben. Es muss nämlich jetzt der Satz als allgemeingiltig anerkannt werden, dass innerhalb der relativen Dispersionen 0,4600—0,5800 im Blau bei zwei verschiedenen normal brechenden Substanzen das Verhältniss der Dispersionen der stärker brechbaren Strahlen auch das grössere ist. Fraunhofer's Tabelle enthält zwei Anomalien, die nur von Beobachtungsfehlern herrühren. Sie betreffen die Verhältnisse der Dispersionen zwischen Flintglas Nr. 3 und Crownglas Ltr. M, Flintglas Nr. 13 und Terpentin. Nach Fraunhofer sind die Verhältnisse der Dispersionen:

Flintglas Nr. 3 / Crownglas N	1,552	1,517	1,494	1,482	1,534	1,579	1,618
Flintglas Nr. 13 / Terpentin	1,857	1,868	1,844	1,783	1,813	1,861	1,899.

Gemäss den Normalreihen XVIII und XXIV, XX und XXIII gelten folgende Verhältnisse:

Flintglas Nr. 3 / Crownglas M	1,552	1,442	1,477	1,508	1,541	1,577	1,620
Flintglas Nr. 13 / Terpentin	1,857	1,791	1,811	1,831	1,851	1,871	1,897.

Eine oberflächliche Betrachtung der letzten Tabelle beweist deutlich genug die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes. Derselbe gilt höchst wahrscheinlich auch noch für die relativen Dispersionen im Blau, welche mehr als 0,5800 betragen, da er für Phosphor und Selen gilt. Die relativen Dispersionen sind für

	$H-F$	$B-A$	$C-B$	$D-C$	$E-D$	$F-E$	$G-F$	H_1-G
Phosphor	0,6100	625	331	948	1292	1329	2900	3200
Selen	0,8300	75	55	189	—	—	—	—

$\frac{B_1-A_1}{B-A}$	$\frac{C_1-B_1}{C-B}$	$\frac{D_1-C_1}{D-C}$
0,120	0,166	0,199.

Die Tabelle der relativen Dispersionen giebt noch zu einer andern Bemerkung Veranlassung. Ueberblickt man die Reihenfolge der brechenden Substanzen, indem man dieselbe nach dem Grade der zunehmenden

Dispersion im Roth oder, was dasselbe ist, nach der abnehmenden Dispersion im Blau ordnet, so enthält sie einen neuen Beleg für das Princip von der Erhaltung der Kraft im Gebiete der Optik. Die Reihenfolge stimmt alsdann nahezu überein mit der der diathermanen und adiathermanen Substanzen. Die am meisten diathermanen Substanzen haben die geringste Dispersion im Roth, die grösste im Blau; die adiathermanen die grösste Dispersion im Roth, die geringste im Blau. Bei den letzteren setzt sich das Licht in thermische Molecularbewegung, bei den ersteren in chemische oder in elektrische Molecularbewegung um. Eine merkwürdige Ausnahme hiervon macht der Flussspath, der eine äusserst geringe Totaldispersion (0,01004) hat und bei einer verhältnissmässig geringen Dispersion im Blau (0,4925) an Diathermanie dem Sylvin wenig nachsteht.

XV.

Ueber das logarithmische Potential.

Von

Dr. Th. Kötteritzsch,

Oberlehrer zu Freiberg.

---

§ 1.

Charakter der Transformation.

Von besonderer Wichtigkeit für mathematisch-physikalische Untersuchungen haben sich von jeher die sogenannten orthogonalen Coordinatensysteme erwiesen, wie sie vorzüglich von Lamé durch seine *Leçons sur les coordonnées curvilignes* in die Wissenschaft eingeführt wurden. Erlaubten doch z. B. Lamé's elliptische Coordinaten sofort eine Reihe von Resultaten, die für kugelförmige Körper bekannt waren, auf ellipsoidische Körper überzutragen.

Von den unendlich mannichfachen orthogonalen Coordinaten sind nun aber für die physikalisch-mathematischen Untersuchungen namentlich wiederum diejenigen von besonderer Bedeutung, welche sich nicht blos geometrisch erklären lassen, sondern denen auch eine einfache mechanische oder, wenn man will, physikalische Erklärung zukommt. Es hat sich gezeigt, dass namentlich solche orthogonale Coordinaten $\alpha\beta\gamma$ von besonderer Wichtigkeit sind, deren eine Coordinate, etwa α, der Bedingung

$$1)\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\equiv 0\equiv \Delta_2\alpha$$

identisch genügt.

Ist sonst weiter keine Bedingung gegeben, der α genügen soll, so hat es weiter keine Schwierigkeit, Coordinatensysteme $\alpha\beta\gamma$ zu finden, die der Bedingung 1) genügen. Es soll später eine ungemein ausgiebige Quelle hierzu angegeben werden; für jetzt mag hier allein die Lösung der Form

$$\alpha=\int\!\!\int\!\!\int\frac{f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(\xi-\zeta)^2}}$$

angegeben werden, die brauchbar ist für jeden Punkt xyz, der mit keinem der Punkte $\xi\eta z$ zusammenfällt, über die sich die Integration erstreckt.

Hat man α gefunden oder gewählt, so finden sich die beiden anderen Coordinaten β und γ als die veränderlichen Parameter der Flächen, die aus dem System von Differentialgleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial z}=0 \end{aligned}$$

gewonnen werden.

Später wird sich zeigen, dass die Integration dieser Differentialgleichungen auf blosse Quadraturen zurückführbar ist.

Weit schwieriger wird die Aufgabe, wenn irgend eine der Flächen mit dem Parameter α mit einer von vornherein gegebenen Fläche zusammenfallen soll. Wir behandeln im Folgenden diese Aufgabe, nehmen aber zunächst an, dass die gegebene Fläche eine Cylinderfläche sei und dass es auch gestattet sei, alle anderen Flächen mit dem Parameter α als Cylinderflächen anzunehmen, deren Axen der der gegebenen Fläche parallel sind.

Indem wir die Z-Axe unsers gewöhnlichen räumlichen Coordinatensystems der x, y, z parallel der Axe der gegebenen Cylinderfläche legen, stellen wir die Gleichung dieser gegebenen Fläche dar durch

$$3)\qquad f(x, y)=0.$$

Die nun zu beantwortende Frage ist die folgende: Wenn $\alpha=\varphi(x, y)$ der Parameter einer Schaar von Cylinderflächen derart ist, dass

$$4)\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\equiv 0$$

und dass durch stetige Aenderung des Parameters α auch jeder Punkt eines stetig zusammenhängenden Raumes von einer solchen Fläche $\alpha=\varphi(x, y)$ getroffen werden kann, wie muss sodann die Function $\varphi(x, y)$ gestaltet sein, damit für einen bestimmten Werth α' des Parameters α die Cylinderfläche $\alpha'=\varphi(x, y)$ zusammenfalle mit der Cylinderfläche $f(x, y)=0$, wie sie durch die Gleichung 3) gegeben ist, und welches sind die beiden anderen Flächenschaaren $\beta=Const.$ und $\alpha=Const.$?

Der letzte Theil der jetzt vorliegenden Aufgabe lässt sich sehr leicht beantworten. Es ist nämlich ohne Weiteres klar und kann auch leicht durch die Gleichungen 2) verificirt werden, dass eine zweite Schaar von Cylinderflächen, $\beta=Const.$, die der Gleichung

$$5)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}=0$$

genügt, und eine Schaar von Ebenen, die die beiden Cylinderflächenschaaren mit den Parametern α und β senkrecht schneidet, also der xy-Ebene parallel liegen, und die wir als die Flächen $\gamma = Const.$ betrachten, die beiden anderen orthogonalen Flächensysteme bilden.

Die Flächenschaar $\gamma = Const.$ kann für die Folge unberücksichtigt bleiben.

Gesetzt nun, man habe die Gleichung $\alpha = \varphi(x,y)$ gefunden, so ergiebt sich die zugehörige Flächenschaar $\beta = Const.$, wenn man setzt

$$6)\qquad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

denn durch die Gleichungen 6) ist gleichzeitig die Gleichung 5) erfüllt. Sollen aber die Gleichungen 6) bestehen, so muss ihre Integrabilitätsbedingung erfüllt sein, oder es muss sein

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right).$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2},$$

folglich soll sein

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2},$$

eine Relation, die aber nach 4) immer erfüllt ist, wenn man die Flächen α gefunden hat.

Da also die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, so erhält man aus 6) durch einfache Quadraturen*

$$7)\qquad \beta = \int \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\partial x - \int \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\partial y - \int \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}\,\partial x\right]\partial y,$$

wenn, wie durch die äussere Form der Differentiale ∂x und ∂y angedeutet sein soll, die Integrationen rein partiell ausgeführt werden.

Aus der Gleichung 7) ziehen wir noch die Folgerung, dass β eindeutig bestimmt ist, sobald es α ist, und dass es im Allgemeinen ebensoviele Flächenschaaren $\beta = Const.$ giebt, als es Flächenschaaren mit dem Parameter α giebt, die der Aufgabe genügen.

Wir haben uns nun zunächst nur mit den Flächen mit dem Parameter α zu beschäftigen, denen wir den Namen Niveauflächen beilegen.

§ 2.

Charakterisirung der Niveauflächen.

Indem wir vor der Hand die Frage unberücksichtigt lassen, ob immer die Flächen $\alpha = \varphi(x,y)$ zu der gegebenen Fläche $f(x,y) = 0$ gefunden wer-

* Vergl. die Bemerkung zu den Gleichungen 2) auf vorigem Seite.

den können, und ob die Aufgabe nur auf eine einzige Weise oder verschieden gelöst werden kann, kommt es uns zunächst darauf an, den Zusammenhang zwischen den Flächen $\alpha=\varphi(x,y)$ und $f(x,y)=0$ aufzusuchen.

Sollen die beiden Gleichungen $f(x,y)=0$ und $\alpha=\varphi(x,y)$ für $\alpha=\alpha'$ dieselbe Niveaufläche bedeuten, so muss nothwendig $f(x,y)$ identisch verschwinden, wenn man aus der Gleichung $\alpha'=\varphi(x,y)$ die eine der Coordinaten, etwa x, berechnet und ihren Werth als Function von α' und y in $f(x,y)$ einsetzt. Hieraus folgt aber nothwendig, dass auch $f(x,y)$ eine Function von α' sein muss, also auch allgemein, dass $f(x,y)$ eine Function von α ist. Gesetzt, es wäre bekannt, wie α in $f(x,y)$ vorkäme, so müsste auch $f(x,y)$ identisch verschwinden, wenn man für α seinen Werth $\varphi(x,y)$ einsetzte, und reducirte man die Gleichung $f(x,y)=0$ auf α, so müsste die gesuchte Gleichung $\alpha=\varphi(x,y)$ erscheinen.

Im gegebenen Falle ist es nun zwar nicht bekannt, wie α in der Function $f(x,y)$ auftritt; allein es lässt sich ohne Weiteres wenigstens soviel behaupten, dass α in den in $f(x,y)$ vorkommenden Constanten implicite enthalten sein muss, dies aber einfach aus dem Grunde, weil α für alle Punkte der Cylinderfläche $f(x,y)=0$ denselben Werth hat, nämlich α'.

Denken wir uns also in der Folge α implicite in den Constanten von $f(x,y)$ vorhanden, so ist die Gleichung $f(x,y)=0$ eine Identität mit Hilfe der Gleichung $\alpha=\varphi(x,y)$.

Es muss daher auch erlaubt sein, die einzelnen partiellen Derivirten von f nach x und y für sich identisch der Null gleichzusetzen, wenn man zugleich noch bedenkt, dass eine partielle Aenderung des x oder y zugleich auch eine Aenderung von α zur Folge hat.

Es gelten also die Gleichungen

$$1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\equiv 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\equiv 0$$

und durch nochmalige partielle Differentation

$$2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\equiv 0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}\equiv 0. \end{aligned}$$

Zugleich bedeuten in den Gleichungen 1) und 2) die partiellen Differentiationen nach α Differentiationen nach den Constanten, insofern diese von α abhängig sind.

Multiplicirt man die Gleichungen 2) mit $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, addirt sodann und beachtet die 4), § 1, und die Gleichungen 1), so entsteht

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]-2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial \alpha}\right)+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\equiv 0.$$

Da ferner

$$2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial \alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right),$$

so folgt leicht

$$3)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}.$$

Diese Gleichung 3) ist es nun, die uns über die Natur der Niveauflächen Aufklärung verschaffen soll.

Gesetzt man hätte Grund, zu vermuthen, dass nur eine einzige Constante λ von allen denen, die in $f(x,y)$ vorkommen, eine Function von α sei, dann kann man die Gleichung $f(x,y)=0$ auf diese Constante λ reduciren und etwa schreiben $\psi(x,y)-\lambda=0$, wo nun die Function $\psi(x,y)$ α selbst nicht mehr enthält. Dann aber wird für den jetzigen Fall aus 3)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\equiv\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(-\frac{1}{\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}}\right)$$

oder besser

$$4)\qquad -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}}\right)\equiv\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}.$$

Diese Gleichung 4) enthält das Criterium über die Statthaftigkeit der Vermuthung, dass die in $f(x,y)$ vorkommende Constante λ allein eine Function von α sei; soll nämlich dies der Fall sein, so muss die rechte Seite der Gleichung 4) frei von x und y sein, weil es auch die linke ist. Da aber gleichzeitig noch die Gleichung $\psi(x,y)-\lambda=0$ gilt, so wird nur gefordert, dass mit Hilfe dieser einen Gleichung die rechte Seite von 4) von x und y gleichzeitig befreit werden könne.

Ist dies Letztere wirklich der Fall, kann also die rechte Seite auf eine von x und y freie Function von λ mit Hilfe von $f(x,y)=0$ reducirt werden, die wir gleich $\chi(\lambda)$ setzen, so ergiebt die 4)

$$5)\qquad \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha^2}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2}=\chi(\lambda).$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann leicht integrirt werden, wenn man α als abhängige, λ als unabhängige Variable einführt*, so dass

* Die hierin liegende Umkehrung des Problems wird noch vielfach wiederkehren und erinnert an das Auftreten der Zeit in mechanischen Aufgaben.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}=\frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}};\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha^2}=-\frac{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\lambda^2}}{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\right)^3}.$$

Es ergiebt sich nämlich hiermit aus 5)

$$\chi(\lambda)=-\frac{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\lambda^2}}{\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}}=-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(l\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\right).$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn A' die Integrationsconstante bezeichnet:

$$l\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=A'-\int\chi(\lambda)\,d\lambda$$

oder, wenn wir von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen und $e^{A'}=A$ setzen:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=Ae^{-\int\chi(\lambda)\,d\lambda}.$$

Eine nochmalige Integration der vorigen Gleichung ergiebt, wenn B die neue Integrationsconstante bezeichnet:

6) $$\alpha=A\int e^{-\int\chi(\lambda)\,d\lambda}\,d\lambda+B.$$

Ist mit Hilfe dieser Gleichung 6) α als Function von λ gefunden, so kann man nun auch umgekehrt daraus λ als Function von α berechnen. Die Substitution in die Gleichung $\psi(x,y)-\lambda=0$ lässt nun aber auch die Umgestaltung dieser Gleichung auf die Form $\alpha=\varphi(x,y)$ zu. Hat man somit α gefunden, so ergiebt 7), § 1, das zugehörige β, und die ganze gestellte Aufgabe ist gelöst.

Dieser eben erläuterte Gang der Rechnung kann nun aber weiter auch dazu verwendet werden, dass man untersucht, ob etwa nur eine der in $f(x,y)$ vorkommenden Constanten eine Function von α allein sein kann, denn reducirt man die Gleichung $f(x,y)=0$ der Reihe nach auf jede einzelne der in ihr vorkommenden Constanten, so wird man, wenn die gestellte Frage zu bejahen ist, auf eine Form gelangen, für welche die eben angeführte Rechnung durchführbar ist.

Ebenso bleibt die eben besprochene Rechnung noch anwendbar, wenn α in mehr als einer der in $f(x,y)$ vorkommenden Constanten implicite enthalten ist, wenn nur alsdann jede dieser Constanten auf die Form $\lambda.\mu$ gebracht werden kann, wo λ eine Function von α ist, die allen betrachteten Constanten als Factor gemeinsam ist, während μ unabhängig von α und für die einzelnen betrachteten Constanten verschieden ist.

Diese Rechnungen werden aber bei nur einigermassen complicirten Formen der gegebenen Gleichung $f(x,y)=0$ von abscheulicher Langweiligkeit, wir wenden uns daher jetzt zur Discussion der allgemeinen Gleichung 3) zurück.

Die allgemeinste Form, die die 3) erhalten kann, entsteht offenbar dadurch, dass wir annehmen, dass die Constanten in $f(x,y)$ Functionen einer andern Constanten λ sind und dass λ erst wiederum eine Function von α ist. Führen wir diese Annahme in 3) ein und führen wir zugleich die verlangten Differentiationen aus, so entsteht

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{d f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2\right]}{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Aus dieser Gleichung ziehen wir

$$\frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha^2}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]-\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar constant nach x und y; bezeichnen wir sie also kurz mit μ, so entsteht

$$1)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\\ &-\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]-\mu\frac{\partial f}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung 1) ist es nun, welche uns über die Natur der gegebenen Gleichung $f(x,y)=0$ als Niveauflächengleichung Aufschluss zu geben hat.

Diese Gleichung 1) muss nämlich, der Art ihrer Herleitung wegen, eine Identität sein oder, weil gleichzeitig auch die Gleichung $f(x,y)=0$ gilt, mit Hilfe dieser Gleichung zu einer Identität gemacht werden können.

Denken wir uns also mit Hilfe der Gleichung $f(x,y)=0$ eine der Coordinaten x oder y, etwa x, als Function der anderen dargestellt und deren Werth in 1) substituirt, so muss alsdann die linke Seite von 1) identisch verschwinden, welchen Werth auch die andere Coordinate haben möge; d. h. es müssen die Coefficienten gleicher vorkommender Potenzen (oder auf solche reducirbare Functionen) von y verschwinden.

Ein einfacher Ueberblick der möglichen hierbei auftretenden Bedingungsgleichungen und der Anzahl der vorhandenen Unbekannten, nämlich der unbekannten Derivirten der Constanten in $f(x,y)=0$ nach λ einschliesslich der Unbekannten μ lehrt nun ohne Weiteres, dass folgende drei Fälle auftreten können:

a) Es ist nicht möglich, der Gleichung I) zu genügen;
b) es ist nur auf eine Art möglich, der Gleichung I) zu genügen, und
c) es ist möglich, auf mehrfache Weise die I) zu erfüllen.

Der Fall *a)* steht den beiden anderen *b)* und *c)* gegenüber und es entsteht die Frage, wie er ermöglicht werde, trotzdem, dass die Gleichung I) ganz allgemeine Giltigkeit zu haben scheint. Um den Fall *a)* aber zu erklären, haben wir zu bedenken, dass die Fläche $f(x,y)=0$, welche gegeben ist, dadurch entstand, dass man über α ganz speciell entschied, also ihm z. B. auch einen rein numerischen Werth beilegen konnte, oder auch einen Werth, der mit den sonst in $f(x,y)$ vorkommenden, von α unabhängigen Constanten in nahem Zusammenhange steht. Es ist einleuchtend, dass dadurch die allgemeine Form der Niveauflächengleichung sehr verändert werden kann. Hiernach wird man an die analoge Erscheinung erinnert, die bei der Integration von Differentialgleichungen als singuläres Integral bezeichnet wird. Deswegen wollen wir auch fernerhin die gegebenen Niveauflächengleichungen in die beiden Gruppen eintheilen, nämlich: singuläre Niveauflächengleichungen und allgemeine Niveauflächengleichungen, je nachdem sie dem Falle *a)* oder einem der beiden Fälle *b)* und *c)* entsprechen.

Da übrigens in jeder gegebenen Niveauflächengleichung $f(x,y)=0$ α einen bestimmten Werth α' angenommen hat, so muss die allgemeine Lösung des vorgelegten Problems für singuläre Niveauflächengleichungen zugleich auch die Lösung des Problems für allgemeine Niveauflächengleichungen mit enthalten.

Die genauere Unterscheidung der Fälle *b)* und *c)* und die Untersuchung über deren weitere Bedeutung soll erst da vorgenommen werden, wo wir von den singulären Niveauflächengleichungen handeln.

§ 3.

Beispiele zu den im vorigen Paragraphen unterschiedenen Fällen.

Es wird voraussichtlich die Deutlichkeit dieser Abhandlung unterstützen, wenn wir jetzt zu den einzelnen im vorigen Paragraphen unterschiedenen Fällen Beispiele folgen lassen.

Ein einfaches Beispiel zu dem in den Gleichungen 4), 5) und 6) des vorigen Paragraphen bahandelten Falle ist

$$\psi(x,y)-\lambda=[(x-a)^2+(y-b)^2]^m-\lambda=0.$$

Die gegebene Niveaufläche ist also ein Cylinder mit Kreisquerschnitt.

Wir erhalten

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2=4m^2[(x-a)^2+(y-b)^2]^{2m-2}[(x-a)^2+(y-b)^2],$$
$$=4m^2[(x-a)^2+(y-b)^2]^{2m-1},$$
$$=4m^2\lambda^{\frac{2m-1}{m}};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=4m(m-1)[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-2}(x-a)^2+2m[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-1},$$
$$+4m(m-1)[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-2}(y-b)^2+2m[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-1}$$
$$=4m(m-1)[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-1}+4m[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-1},$$
$$=4m^2[(x-a)^2+(y-b)^2]^{m-1},$$
$$=4m^2\lambda^{\frac{m-1}{m}}.$$

Für die Gleichung 4), § 2, erscheint also jetzt

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}}\right)=\lambda^{\frac{m-1}{m}}\lambda^{-\frac{2m-1}{m}}=\frac{1}{\lambda},$$

folglich erhält man nach 6), § 2

$$\alpha=A\int e^{-\int\frac{d\lambda}{\lambda}}d\lambda+B=Al\lambda+B.$$

Aus der hierdurch gefundenen Relation zwischen α und λ:

$$\alpha=Al\lambda+B$$

ergiebt sich weiter

$$\lambda=e^{\frac{\alpha-B}{A}}.$$

Die gegebene Niveauflächengleichung lässt sich also schreiben in der Form

$$[(x-a)^2+(y-b)^2]^m=e^{\frac{\alpha-B}{A}}$$

und giebt, wenn diese Gleichung auf α oder $\alpha-B$ reducirt wird, die gewünschte Transformation als

$$\alpha-B=Al\{(x-a)^2+(y-b)^2\}^m$$

oder auch, wenn man

$$Am=p,\quad B=Am.lq$$

setzt:

$$\alpha=plq\{(x-a)^2+(y-b)^2\}.$$

Eine der beiden Constanten p oder q bestimmt sich durch die Bedingung, dass α für die gegebene Niveaufläche den individuellen Werth α' haben soll.

Ein einfaches Beispiel für den Fall *a)*, S. 348, ist das der parabolischen Cylinderfläche als gegebene Niveaufläche. Ist nämlich im jetzigen Falle für die Gleichung $f(x,y)=0$ gegeben

$$y^2-2px=0,$$

so giebt die Gleichung 3), § 2

$$2 \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{4y^2 + 4p^2}{-2x \frac{\partial p}{\partial \alpha}},$$

eine Gleichung, der offenbar nicht identisch genügt werden kann. Nimmt man aber die gegebene Gleichung an in der Form

$$\frac{y^2}{p} - 2x + q = 0,$$

und denkt man sich p und q gleichzeitig als Functionen von α, so erhält man für 3), § 2

$$\frac{2}{p} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{4\frac{y^2}{p} + 4}{-\frac{y^2}{p^2}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}}.$$

Dieser Gleichung genügt man aber, wenn man setzt

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = -\frac{\partial p}{\partial \alpha},$$

wodurch aus der vorigen Gleichung entsteht

$$\frac{1}{p} = -2\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \alpha}}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2p}\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(l\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right).$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn A die Integrationsconstante bezeichnet:

$$lA\sqrt{p} = l\frac{\partial p}{\partial \alpha} \quad \text{oder auch} \quad A\sqrt{p} = \frac{\partial p}{\partial \alpha}.$$

Eine nochmalige Integration ergiebt, wenn B die neue Integrationsconstante bezeichnet:

$$\alpha = \frac{2}{A}\sqrt{p} + B.$$

Hieraus folgt

$$p = \frac{A^2}{4}(\alpha - B)^2.$$

Aus der obigen Gleichung $\frac{\partial q}{\partial \alpha} = -\frac{\partial p}{\partial \alpha}$ ergiebt sich weiter, wenn m die Integrationsconstante bezeichnet:

$$q = m - p,$$

folglich, wenn man den für p gefundenen Werth einsetzt:

$$q = m - \frac{A^2}{4}(\alpha - B)^2.$$

Die Integrationsconstante m bestimmt sich im jetzigen Falle aus der Bedingung, dass q verschwinden muss, wenn α den Werth α' erlangt; folglich ist

$$m = \frac{A^2}{4}(\alpha' - B)^2.$$

Die gegebene Niveauflächengleichung geht nun über in

$$y^2 - \frac{A^2}{4}(\alpha - B)^2 \left[2x + \frac{A^2}{4}(\alpha - \alpha')(\alpha + \alpha' - 2B)\right] = 0.$$

Es ist bequem, $B = 0$ zu setzen, da man die Constante B mit in die individuellen Werthe des Parameters α hineinrechnen kann, wodurch entsteht

$$y^2 - \frac{A^2}{4}\alpha^2 \left[2x + \frac{A^2}{4}(\alpha^2 - \alpha'^2)\right] = 0.$$

Die Constante $\frac{A^2}{4}$ bestimmen wir endlich noch durch die Bedingung, dass für $\alpha = \alpha'$ die gegebene Niveaufläche $y^2 - 2px = 0$ erscheint, folglich ist aus dem obigen Werthe von p

$$p = \frac{A^2}{4} . \alpha'^2, \quad \frac{A^2}{4} = \frac{p}{\alpha'^2},$$

und die Schaar der im jetzigen Falle gesuchten Niveauflächen hat die Gleichung

$$y^2 = \frac{p}{\alpha'^2}\alpha^2 \left[2x + \frac{p}{\alpha'^2}(\alpha^2 - \alpha'^2)\right].$$

Hieraus findet man endlich die gewünschte Transformation, wenn man auf α reducirt. Gestatten wir dem α nur reelle Werthe anzunehmen, so zeigt die vorstehende Gleichung, dass α^2 enthalten sein muss zwischen den Grenzen

$$\alpha'^2 \leqq \alpha^2 \leqq +\infty,$$

indem für $\alpha = \alpha'$ die gegebene Cylinderfläche entsteht, welche von unserer Y-Axe in der Scheitelseite berührt wird; wächst der Werth von α, so erweitert sich die Cylinderfläche und gleichzeitig rückt die Scheitelseite nach der negativen Seite der X-Axe fort, bis für $\alpha^2 = +\infty$ die Cylinderfläche in eine Ebene übergeht, die in unendlicher Entfernung die negative Seite der X-Axe senkrecht trifft. Will man also durch jeden Raumpunkt eine der gefundenen Niveauflächen legen können, so muss α' gleich Null sein, wodurch gleichzeitig $\frac{p^2}{\alpha'^2}$ in eine Constante $= c$ übergeht, so dass als allgemeinste Niveauflächengleichung im jetzigen Falle erscheint

$$y^2 = c\alpha^2(2x + c\alpha^2).$$

Für den Fall *b)*, S. 348, ist die Cylinderfläche mit elliptischem oder mit hyperbolischem Querschnitt ein Beispiel. Ist nämlich die Gleichung der gegebenen Niveaufläche

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0, \quad a \geqq b > 0,$$

so ergiebt die Gleichung 3), § 2

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{4\frac{x^2}{a^2} + 4\frac{y^2}{b^2}}{-\frac{x^2}{a^2}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{y^2}{b^2}\frac{\partial b}{\partial \alpha}}.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{\partial b}{\partial \alpha},$$

also nach ausgeführter Integration, wenn m die Integrationsconstante bezeichnet, wenn

$$b = a - m,$$

wo m, wegen $a \geqq b$, einen positiven Werth bezeichnen muss; damit geht aber die vorige Gleichung über in

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a-m} = -2 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\frac{\partial a}{\partial \alpha}}\right)$$

oder in

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a-m}\right)\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(l \frac{\partial a}{\partial \alpha}\right).$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn A' die Integrationsconstante bezeichnet:

$$A' + l\sqrt{a(a-m)} = l\frac{\partial a}{\partial \alpha}.$$

Ist ferner $e^{A'} = A$, so ergiebt sich beim Uebergange von den Logarithmen zu den Zahlen

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = A\sqrt{a(a-m)}.$$

Eine nochmalige Integration ergiebt, wenn B die neue Integrationsconstante bezeichnet:

$$\alpha = B + \frac{1}{A} l\left[-\frac{m}{2} + a + \sqrt{a(a-m)}\right].$$

Hieraus folgt nun

$$a - \frac{m}{2} = \tfrac{1}{2}\left(e^{A(\alpha - B)} + \frac{m^2}{4} e^{-A(\alpha - B)}\right),$$

$$b + \frac{m}{2} = \tfrac{1}{2}\left(e^{A(\alpha - B)} + \frac{m^2}{4} e^{-A(\alpha - B)}\right).$$

Setzt man diese Darstellungen von a und b in die gegebene Niveauflächengleichung ein und reducirt sodann auf α, so erhält man die gesuchte Transformation.

Wir können auch im jetzigen Falle die Integrationsconstante B mit in den Werth von α einrechnen oder, was auf dasselbe hinauskommt, $B=0$ setzen. Machen wir dabei zugleich

$$\frac{m}{2} = n,$$

so entsteht

$$a - n = \tfrac{1}{2}(e^{A\alpha} + n^2 e^{-A\alpha}),$$
$$b + n = \tfrac{1}{2}(e^{A\alpha} + n^2 e^{-A\alpha}).$$

Gestatten wir im jetzigen Falle dem α den ganzen reellen Werthbereich von einem gewissen positiven Werthe ε an bis $+\infty$, und setzen noch, wie ebenfalls erlaubt ist, $A=1$, so ist es auch jetzt möglich, durch jeden Raumpunkt eine Cylinderfläche der eben gefundenen Art zu legen. Alle gefundenen Cylinderflächen sind aber, weil $a-b=2n$, also constant sich ergiebt, solche mit confocalem elliptischem Querschnitt. Wird $\alpha=\infty$, so geht der elliptische Querschnitt in einen Kreis mit unendlich grossem Radius über, und der elliptische Querschnitt zieht sich bis auf die Verbindungsgerade der beiden festen Brennpunkte zusammen, wenn die Halbaxe $b=0$ wird, d. h. wenn

$$\tfrac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha})-n=0,$$

also wenn α den Werth erhält

$$\alpha=ln=\varepsilon.$$

Die allgemeine, für den jetzigen Fall gefundene Niveauflächengleichung lautet also

$$\frac{x^2}{n+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha})}+\frac{y^2}{-n+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha})}=1.$$

Reducirt man diese Gleichung auf α, so ist damit die gewünschte Transformation erlangt.

Es mögen nun hier noch kurz die Resultate erwähnt werden, die man erlangt, wenn man die ursprünglich gegebene Niveaufläche mit hyperbolischem Querschnitt annimmt, ihr also die Gleichung giebt

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-1=0,\quad a\geqq b.$$

Man erhält, ganz ähnlich wie im vorigen Falle:

$$\frac{2}{a}-\frac{2}{b}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}}{-\frac{x^2}{a^2}\frac{\partial a}{\partial\alpha}+\frac{y^2}{b^2}\frac{\partial b}{\partial\alpha}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha}=-\frac{\partial b}{\partial\alpha},$$

$$b=-a+m,$$

wenn m auch jetzt wieder eine Integrationsconstante bezeichnet;

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a-m}=-2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\frac{\partial a}{\partial\alpha}}\right),$$

$$\alpha=B+\frac{1}{A}l\left[-\frac{m}{2}+a+\sqrt{a(a-m)}\right],$$

wenn A und B auch jetzt wiederum Integrationsconstanten bezeichnen. Es folgt weiter

$$a-\frac{m}{2}=\tfrac{1}{2}\left(e^{A(\alpha-B)}+\frac{m^2}{4}e^{-A(\alpha-B)}\right),$$

$$b-\frac{m}{2}=-\tfrac{1}{2}\left(e^{A(\alpha-B)}+\frac{m^2}{4}e^{-A(\alpha-B)}\right).$$

Setzt man auch hier $B=0$, $A=1$, $\frac{m}{2}=n$, so entsteht

$$a-n=\tfrac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha}),$$
$$b-n=-\tfrac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha}).$$

Auch jetzt können wir durch jeden Raumpunkt eine der Niveauflächen legen, wenn wir dem α alle reellen Werthe von ln bis $+\infty$ zu durchlaufen gestatten. Die Querschnitte unserer jetzigen Niveauflächen sind wegen $a+b=2n$ confocale Hyperbeln, die für $\alpha=\infty$ in Hyperbeln mit unendlich grossen Halbaxen, für $\alpha=0$ in das Axenkreuz der X- und Y-Axe übergehen.

Die allgemeine Niveauflächengleichung ist also im jetzigen Falle

$$\frac{x^2}{n+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha})}-\frac{y^2}{n-\frac{1}{2}(e^{\alpha}+n^2e^{-\alpha})}=1.$$

Reducirt man diese Gleichung auf α, so hat man damit die gewünschte Transformation erlangt.

Ein Beispiel endlich zu dem Falle *c)*, S. 348, bilden die cylindrischen Niveauflächen, deren Querschnitt eine Cassini'sche Linie ist. Es besitzt also die gegebene Niveaufläche die Gleichung

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2+m\,(x^2-y^2)+n=0.$$

Deuten wir die Differentiationen nach dem noch unbestimmt gelassenen Parameter λ einfach durch ($'$) an, so haben wir, um die Gleichung I), § 2, zu verwenden:

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=m'(x^2-y^2)+n',\quad \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}=m''(x^2-y^2)+n'',$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial\lambda}=2m'x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial\lambda}=-2m'y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]&=4m'x^2[4(x^2+y^2)+2m]-4m'y^2[4(x^2+y^2)-2m]\\&=8(x^2+y^2)\,[2m'(x^2-y^2)+mm'],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2&=4x^2\,[2(x^2+y^2)+m]^2+4y^2\,[2(x^2+y^2)-m]^2\\&=4(x^2+y^2)\,[4(x^2+y^2)^2+4m(x^2-y^2)+m^2],\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=16(x^2-y^2).$$

Die Gleichung I), § 2, giebt also für den jetzigen Fall

$$\left.\begin{aligned}&[m'(x^2-y^2)+n']\,8(x^2+y^2)\,[2m'(x^2-y^2)+mm']\\&-[m''(x^2-y^2)+n'']\,4(x^2+y^2)\,[4(x^2+y^2)^2+4m(x^2-y^2)+m^2]\\&-[m'(x^2-y^2)+n']^2\,16(x^2+y^2)\\&-\mu\,[m'(x^2-y^2)+n']\,4(x^2+y^2)\,[4(x^2+y^2)^2+4m(x^2-y^2)+m^2]\end{aligned}\right\}\equiv 0.$$

Diese Gleichung soll nun identisch für jedes x und y gelten, das zugleich auch der Gleichung

$$(x^2+y^2)^2+m\,(x^2-y^2)+n=0$$

genügt. Da also hiernach x^2+y^2 nicht verschwindet, so können wir diesen gemeinschaftlichen Factor der linken Seite der vorigen Gleichung ohne Weiteres weglassen, ebenso wie den gemeinschaftlichen Factor 4.

Da sich ferner aus der gegebenen Niveauflächengleichung

$$4(x^2+y^2)^2+4m(x^2-y^2)+m^2=m^2-4n$$

ergiebt, so geht die vorige Gleichung über in

$$\left.\begin{array}{l}2[m'(x^2-y^2)+n'][2m'(x^2-y^2)+mm']-[m''(x^2-y^2)+n''](m^2-4n)\\ \quad -4[m'(x^2-y^2)+n']^2-\mu[m'(x^2-y^2)+n'](m^2-4n)\end{array}\right\}=0.$$

Diese Gleichung zeigt das Eigenthümliche, dass in ihr x und y nur noch vorkommt in der Verknüpfung (x^2-y^2). Soll sie, wie verlangt wird, identisch in Bezug auf x und y gelten, so ist im vorliegenden Falle nur nöthig, dass die Coefficienten der einzelnen sich herausstellenden Potenzen von (x^2-y^2) verschwinden. Denn wenn auch x und y noch durch die gegebene Gleichung $f(x,y)=0$ aneinander gebunden sind, so ist doch soviel sicher, dass die eben gefundene Gleichung bestehen muss, wenn (x^2-y^2) continuirlich eine gewisse, zwischen endlich entfernten Grenzen gelegene Werthreihe durchläuft, was eben die Annullirung der ebengenannten Coefficienten zur Folge hat. Im vorliegenden Falle haben wir also eine weitere Elimination einer der beiden Coordinaten x oder y mit Hilfe der gegebenen Gleichung $f(x,y)=0$ nicht erst vorzunehmen. Zur Bestimmung der Unbekannten n', m', μ, n'', m'' erhalten wir daher, da noch dazu der Coefficient von $(x^2-y^2)^2$ identisch verschwindet, nur die beiden Gleichungen

$$2mm'^2-m''(m^2-4n)-4m'n'-\mu m'(m^2-4n)=0,$$
$$2mm'n'-n''(m^2-4n)-4n'^2-\mu n'(m^2-4n)=0.$$

Diese Gleichungen aber können in folgender Weise erfüllt werden, nämlich indem man setzt

1) $$m'=0,\quad n'=0,$$

da hieraus ohne Weiteres auch folgt $m''=0$ und $n''=0$.

Diese Annahme ist aber für unsern Zweck unbrauchbar, weil sie ergiebt, dass weder m, noch n von λ abhängt, also auch nicht von α, während doch von vornherein verlangt werden muss, dass mindestens eine der in der gegebenen Gleichung $f(x,y)=0$ vorkommenden Constanten eine Function von α ist.

Nehmen wir daher an, dass

2) $n'=0$, dagegen m' von Null verschieden.

Da jetzt auch nothwendig $n''=0$, so ist die zweite der vorigen beiden Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt und die erste geht über in

$$2mm'^2-m''(m^2-4n)-\mu m'(m^2-4n)=0.$$

Setzen wir jetzt den noch willkürlich gelassenen Parameter λ gleich m ist, also $m'=1$, $m''=0$, so folgt

$$\mu=\frac{2m}{m^2-4n}$$

oder, da $\mu=\dfrac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha^2}}{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2}=\dfrac{\frac{\partial^2 m}{\partial\alpha^2}}{\left(\frac{\partial m}{\partial\alpha}\right)^2}=-\dfrac{\partial}{\partial m}\left(l\dfrac{\partial\alpha}{\partial m}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(l\frac{\partial \alpha}{\partial m}\right) = -\frac{2m}{m^2-4n}.$$

Um die nun folgende Integration ausführen zu können, unterscheiden wir, ob $n \gtreqless 0$ ist. Ist

a) $$n=0,$$

so entsteht

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(l\frac{\partial \alpha}{\partial m}\right) = -\frac{2m}{m^2},$$

folglich nach Ausführung zweier Integrationen, wenn A und B die Integrationsconstanten vertreten:

$$\alpha - B = -\frac{A}{m},$$

also auch

$$m = -\frac{A}{\alpha - B}, \quad n=0.$$

Die allgemeine Niveauflächengleichung hat also die Form, wenn noch $A=1$, $B=0$:

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{\alpha}(x^2-y^2) = 0,$$

eine Gleichung, deren Reduction auf α die gewünschte Transformation liefert.

Die Niveauflächen haben also jetzt Lemniscaten zum Querschnitt, die, so lange α positiv ist, nach der Richtung der X-Axe ausgedehnt sind, dagegen wenn α negativ ist, in der Richtung der Y-Axe. Für $\alpha = \pm\infty$ geht der Querschnitt in einen blossen Punkt, den Coordinatenanfang, über, während für $\alpha=0$ zwei sich gegenseitig rechtwinklig und die Coordinatenaxen (der x und y) unter 45^0 schneidende Gerade entstehen. Lässt man also im jetzigen Falle das Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so kann man durch jeden Raumpunkt eine der eben gefundenen Niveauflächen legen.

Ist ferner

b) $$n>0,$$

so entsteht aus

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(l\frac{\partial \alpha}{\partial m}\right) = -\frac{2m}{m^2-4n}$$

durch zweimalige Integration, wenn A und B die Integrationsconstanten bezeichnen:

$$\alpha - B = \frac{A}{4\sqrt{n}}\, l\frac{m-2\sqrt{n}}{m+2\sqrt{n}},$$

also auch

$$m = -2\sqrt{n}\,\frac{e^{\frac{2\sqrt{n}}{A}(\alpha-B)} + e^{-\frac{2\sqrt{n}}{A}(\alpha-B)}}{e^{\frac{2\sqrt{n}}{A}(\alpha-B)} - e^{-\frac{2\sqrt{n}}{A}(\alpha-B)}}, \quad n = Const.$$

Setzt man auch hier, wie es erlaubt ist, $A=1$, $B=0$, so kommt

$$m = -2\sqrt{n}\,\frac{e^{\alpha 2\sqrt{n}} + e^{-\alpha 2\sqrt{n}}}{e^{\alpha 2\sqrt{n}} - e^{-\alpha 2\sqrt{n}}}.$$

Die allgemeine Niveauflächengleichung wird also im jetzigen Falle

$$(x^2+y^2)^2-2\sqrt{n}\,\frac{e^{+2\alpha\sqrt{n}}+e^{-2\alpha\sqrt{n}}}{e^{+2\alpha\sqrt{n}}-e^{-2\alpha\sqrt{n}}}\,(x^2-y^2)+n=0.$$

Reducirt man diese Gleichung auf α, so erhält man die gewünschte Transformation.

Lässt man in dieser Gleichung n unendlich klein werden, so erscheint der unter a) behandelte Fall wieder.

Um zu sehen, welche Formen die Querschnitte unserer jetzigen Niveauflächen annehmen, um daraus das Intervall, innerhalb dessen sich α zu bewegen hat, zu bestimmen, und endlich um diese Discussion zugleich mit den folgenden ähnlichen abmachen zu können, bringen wir die vorstehende Gleichung noch auf die Form

$$(x^2+y^2-\sqrt{n}\,U)^2+4\sqrt{n}\,Un^2=n(U^2-1),\quad U=\frac{e^{+2\alpha\sqrt{n}}+e^{-2\alpha\sqrt{n}}}{e^{+2\alpha\sqrt{n}}-e^{-2\alpha\sqrt{n}}}.$$

Ist weiter

c) $$n<0,$$

so entsteht aus

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(l\frac{\partial\alpha}{\partial m}\right)=-\frac{2m}{m^2-4n}$$

durch zweimalige Integration, wenn A und B die Integrationsconstanten bezeichnen:

$$\alpha-B=\frac{A}{2\sqrt{-n}}\,arc\,tng\left(\frac{m}{2\sqrt{-n}}\right)=\frac{A}{2\sqrt{-n}}\left[\frac{\pi}{2}-arc\,tng\,\frac{2\sqrt{-n}}{m}\right],$$

also auch

$$m=2\sqrt{-n}\,tng\,\frac{2\sqrt{-n}\,(\alpha-B)}{A}=-\frac{2\sqrt{-n}}{tng\left[\frac{2\sqrt{-n}}{A}\left(\alpha-B-\frac{\pi}{2}\,\frac{A}{2\sqrt{-n}}\right)\right]}.$$

Um Uebereinstimmung mit den bisher betrachteten Fällen zu erzielen, machen wir $A=1$, $B=-\frac{\pi}{2}\,\frac{A}{2\sqrt{-n}}$ und benutzen die zweite Darstellung von m, so dass entsteht

$$m=-\frac{2\sqrt{-n}}{tng(2\sqrt{-n}\,.\,\alpha)}=-2\sqrt{-n}\,ctg(2\sqrt{-n}\,\alpha),\quad n=Const.$$

Die allgemeine Niveauflächengleichung wird somit jetzt

$$(x^2+y^2)^2-2\sqrt{-n}\,.\,ctg(2\sqrt{-n}\,.\,\alpha)(x^2-y^2)+n=0.$$

Lässt man hier n unendlich klein werden, so kommt man auf den unter a) betrachteten Fall zurück.

Wir gestalten diese Gleichung um aus gleichem Grunde wie im Falle b) in

$$(x^2+y^2-\sqrt{-n}\,U)^2+4\sqrt{-n}\,Uy^2=-n(U^2+1),\quad U=ctg(2\sqrt{-n}\,.\,\alpha).$$

Die beiden Bedingungsgleichungen auf S. 355 können aber auch erfüllt werden, wenn wir setzen

3) $$m'=0, \quad n' \gtrless 0.$$

Da jetzt nothwendig auch $m''=0$, so ist die erste jener Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt, die zweite dagegen geht über in
$$n''(m^2-4n)+4n'^2+\mu n'(m^2-4n)=0.$$

Setzen wir jetzt den Parameter λ gleich n, ist also $n'=1$, $n''=0$, so folgt
$$\mu=\frac{4}{4n-m^2}$$
oder, da jetzt
$$\mu=\frac{\frac{\partial^2 n}{\partial \alpha^2}}{\left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}\right)^2}=-\frac{\partial}{\partial n}\left(l\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right):$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(l\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right)=-\frac{4}{4n-m^2}.$$
Hieraus folgt durch Integration, wenn lA die Integrationsconstante bezeichnet:
$$l\frac{\partial \alpha}{\partial n}=-lA(4n-m^2)=l\frac{1}{A(4n-m^2)}$$
oder, beim Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen:
$$\frac{\partial \alpha}{\partial n}=\frac{1}{A(4n-m^2)}.$$
Wir setzen sogleich $A=-\frac{1}{2}$ und erhalten
$$\frac{\partial \alpha}{\partial n}=\frac{1}{-2\left(n-\frac{m^2}{4}\right)}.$$
Eine nochmalige Integration ergiebt jetzt, wenn B die Integrationsconstante bezeichnet:
$$-2(\alpha+B)=l\left(n-\frac{m^2}{4}\right),$$
also ist auch
$$n=\frac{m^2}{4}+e^{-2(\alpha+B)}$$
oder, wenn wir die Integrationsconstante B so bestimmen, dass $e^{-2B}=-\frac{m^2}{4}$:
$$n=\frac{m^2}{4}(1-e^{-2\alpha}), \quad m=Const.$$
Die allgemeine Niveauflächengleichung lautet daher jetzt
$$(x^2+y^2)^2+m(x^2-y^2)+\frac{m^2}{4}(1-e^{-2\alpha})=0$$
oder auch
$$\left(x^2+y^2-\frac{m}{2}\right)^2+2mx^2=\frac{m^2}{4}e^{-2\alpha}.$$
Die Reduction dieser Gleichung auf α ergiebt die gewünschte Transformation.

Wir kommen endlich zum letzten der Fälle, wie die Bedingungsgleichungen S. 355 erfüllt werden können, nämlich

4) dass sowohl $m' \gtrless 0$, als auch $n' \gtrless 0$ ist.

Dividirt man jetzt die erste jener Gleichungen durch m', die zweite durch n', so entsteht sodann durch Subtraction

$$(m^2-4n)\left(\frac{m''}{m'}-\frac{n''}{n'}\right)=0.$$

Diese Gleichung wird aber erfüllt,

$$\text{entweder wenn } m^2=4n,$$
$$\text{oder wenn } \frac{m''}{m'}=\frac{n''}{n'}.$$

Gesetzt, es sei $m^2=4n$, dann wird aus der gegebenen Gleichung

$$(x^2+y^2)^2+m(x^2-y^2)+\left(\frac{m}{2}\right)^2=0$$

oder

$$\left(x^2+y^2+\frac{m}{2}\right)^2-2my^2=0,\quad \left(x^2+y^2-\frac{m}{2}\right)^2+2mx^2=0.$$

Ist $m>0$, so erhält man hieraus

$$x^2+y^2-\frac{m}{2}=0,\quad \sqrt{2m}\,.\,x=0$$

oder

$$x=0,\quad y=\pm\sqrt{-\frac{m}{2}}.$$

In diesem Falle wäre also die gegebene Niveaufläche ein System zweier der Z-Axe parallelen Geraden, ein Fall, den wir offenbar hier nicht weiter zu berücksichtigen haben.

Wir nehmen daher für die Folge an

$$\frac{m''}{m'}=\frac{n''}{n'}.$$

Hieraus folgt durch Integration, gleichgiltig, was der noch willkürliche Parameter λ sei, wenn p und q die Integrationsconstanten bezeichnen:

$$n=pm+q,\quad n'=pm',\quad n''=pm''.$$

Die beiden ursprünglichen Bedingungsgleichungen ergeben nun übereinstimmend

$$\mu=\frac{2mm'^2-m''(m^2-4pm-4q)-4pm'^2}{m'(m^2-4pm-4q)}$$

oder

$$\mu=\frac{2n'^2(n-q)-n''([n-q]^2-4p^2n)-4n'^2p^2}{n'([n-q]^2-4p^2n)}.$$

Um nun m oder n als Functionen von α zu bestimmen, müssen wir uns zuvor über die Bedeutung des bis jetzt noch willkürlich gelassenen Parameters λ entscheiden.

Sei $\lambda = m$, also $m' = 1$, $m'' = 0$, also auch nach den vorigen Gleichungen $n = pm + q$, $n' = p$, $n'' = 0$, und ausserdem

$$\mu = \frac{\dfrac{\partial^2 m}{\partial \alpha^2}}{\left(\dfrac{\partial m}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Die beiden vorigen μ bestimmenden Gleichungen werden dadurch ersetzt durch die eine:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 m}{\partial \alpha^2}}{\left(\dfrac{\partial m}{\partial \alpha}\right)^2} = -\frac{\partial}{\partial m}\left(l \frac{\partial \alpha}{\partial m}\right) = 2 \cdot \frac{m - 2p}{m^2 - 4pm - 4q}.$$

Eine erste Integration ergiebt hieraus leicht, wenn $-lA$ die Integrationsconstante bezeichnet:

$$l \frac{\partial \alpha}{\partial m} = -lA\,[m^2 - 4pm - 4q]$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial m} = \frac{1}{A\,[m^2 - 4pm - 4q]}.$$

Eine nochmalige Integration ergiebt, wenn B die neue Integrationsconstante bezeichnet:

$$\begin{aligned} \alpha - B &= \frac{1}{4A\sqrt{p^2+q}} \cdot l \frac{m - 2\,(p + \sqrt{p^2+q})}{m - 2\,(p + \sqrt{p^2+q})}, \\ &= \frac{1}{4A\sqrt{p^2+q}} \cdot l \frac{n - q - 2p\,(p + \sqrt{p^2+q})}{n - q - 2p\,(p - \sqrt{p^2+q})}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$m = 2p - 2\sqrt{p^2+q}\,\frac{e^{2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}} + e^{-2A(\alpha-B)\sqrt{q^2+q}}}{e^{2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}} - e^{-2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}}},$$

$$n = 2p^2 + q - 2p\sqrt{p^2+q}\,\frac{e^{2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}} + e^{-2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}}}{e^{2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}} - e^{-2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}}}.$$

Setzen wir also jetzt zur Abkürzung

$$2\,\frac{e^{2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}} + e^{-2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}}}{e^{2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}} - e^{-2A(\alpha-B)\sqrt{p^2+q}}} = U,$$

so lautet die allgemeine Niveauflächengleichung im jetzigen Falle

$$(x^2+y^2)^2 + (p - \sqrt{p^2+q}\,U)(x^2 - y^2) + \left(p^2 + \frac{q}{2} - p\sqrt{p^2+q}\,U\right) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &[x^2 + y^2 - \tfrac{1}{2}(p - U\sqrt{p^2+q})]^2 + 2p\,(p - U\sqrt{p^2+q})\,x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}[U\sqrt{p^2+q}\,(p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q}) + 3p^2 + q]. \end{aligned}$$

Die Reduction dieser Gleichung auf α liefert auch jetzt wiederum die gewünschte Transformation.

Die drei letzten, unter 2), 3) und 4) betrachteten Fälle führten auf Niveauflächen, die sämmtlich die Cassini'sche Linie zum Querschnitt haben. Der Fall unter 3) hat auf dieselbe Form der Niveauflächengleichungen geführt, die bereits Lamé in seinen *Leçons sur les coordonnées curvilignes* untersucht hat. An jener Stelle werden zugleich die vielfachen Formänderungen angegeben, die die Cassini'sche Linie erleidet, wenn der Werth von α sich ändert. Da wir nun in den Fällen 2), 3) und 4) die gefundenen allgemeinen Niveauflächengleichungen sämmtlich auf die Form gebracht haben, die auch Lamé seinen Betrachtungen zu Grunde legt, so können wir hier, auf Lamé's Arbeit verweisend, eine weitere darauf bezügliche Discussion unterdrücken.

(Fortsetzung folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

XV. Ueber eine Stelle aus den von Gauss nachgelassenen Schriften über das arithmetisch-geometrische Mittel.

Im dritten Bande von Gauss' Werken, im Nachlass S. 367 flgg., findet sich eine Entwickelung des reciproken Werthes des arithmetisch-geometrischen Mittels $M(1+x, 1-x)$ von $1+x$ und $1-x$ in eine nach aufsteigenden ganzen positiven Potenzen von x geordnete unendliche Reihe. Zwei Punkte dieser Entwickelung scheinen noch einer genaueren Begründung zu bedürfen, die im Folgenden gegeben werden soll.

Um klar auseinandersetzen zu können, um was es sich handelt, müssen wir zunächst einen kleinen Theil der Gauss'schen Betrachtungen recapituliren.

Wenn x eine reale Veränderliche bezeichnet und

$$-1 < x < 1 \tag{1}$$

ist, so ist das arithmetisch-geometrische Mittel $M(1+x, 1-x)$ von $1+x$ und $1-x$ eine bestimmte, wohldefinirte Grösse. Setzen wir nun

$$x = \frac{2t}{1+t^2},$$

so wird die Bedingung 1) erfüllt sein, sobald

$$-1 < t < 1$$

ist. Für Werthe von t, die zwischen diesen Grenzen liegen, ist also auch der Ausdruck $M\left(1+\frac{2t}{1+t^2}, 1-\frac{2t}{1+t^2}\right)$ wohldefinirt, und aus den Eigenschaften des arithmetisch-geometrischen Mittels, die sich aus seiner Definition ergeben, folgt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$M\left(1+\frac{2t}{1+t^2}, 1-\frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2}\cdot M(1+t^2, 1-t^2)$$

oder

$$\frac{1}{M\left(1+\frac{2t}{1+t^2}, 1-\frac{2t}{1+t^2}\right)} = (1+t^2)\cdot\frac{1}{M(1+t^2, 1-t^2)}. \tag{2}$$

Bezeichnen wir den Quotienten $\frac{1}{M(1+x, 1-x)}$ kurz mit $f(x)$, so sehen wir also, dass derselbe für $-1 < t < 1$ der Functionalgleichung

$$3)\qquad f\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=(1+t^2).f(t^4)$$

genügt.

Wenn sich nun eine unendliche, nach aufsteigenden ganzen positiven Potenzen von x geordnete convergente Reihe für den Ausdruck $\dfrac{1}{M(1+x,\,1-x)}$ finden lässt, so muss dieselbe jedenfalls von der Form

$$a)\qquad 1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+\ldots$$

sein, denn jener Ausdruck wird 1 für $x=0$ und ändert seinen Werth nicht, wenn man x mit $-x$ vertauscht.

Die Reihe a) müsste ferner der Functionalgleichung 3) genügen, und es müsste daher — so lange beide Seiten convergiren —

$$1+A\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+C\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6+\ldots$$
$$\ldots=(1+t^2).(1+At^4+Bt^8+Ct^{12}+\ldots)$$

oder

$$4)\qquad \frac{2t}{1+t^2}+A\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3+B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5+C\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^7+\ldots$$
$$\ldots=2t.(1+At^4+Bt^8+Ct^{12}+\ldots)$$

sein.

Die verschiedenen Potenzen von $\dfrac{2t}{1+t^2}$ lassen sich nun in Reihen entwickeln, die nach aufsteigenden ganzen positiven Potenzen von t fortschreiten und convergiren, sobald $-1<t<1$ ist. Es ist nämlich allgemein, wenn r eine ganze positive Zahl bezeichnet:

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2r-1}=2^{2r-1}.t^{2r-1}.(1+t^2)^{-2r+1}$$
$$=2^{2r-1}.t^{2r-1}.\left[1+\binom{-2r+1}{1}t^2+\binom{-2r+1}{2}t^4+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\binom{-2r+1}{n}t^{2n}+\ldots\right].$$

Nun ist ferner allgemein für ganze positive n

$$\binom{-2r+1}{n}=(-1)^n.\binom{2r+n-2}{2r-2},$$

also

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2r-1}=2^{2r-1}\binom{2r-2}{2r-2}t^{2r-1}-2^{2r-1}\binom{2r-1}{2r-2}t^{2r+1}$$
$$+2^{2r-1}\binom{2r}{2r-2}t^{2r+3}-\ldots.$$

Indem wir die Ausdrücke $\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^1, \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3, \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5\ldots$ so entwickeln, erhalten wir für die Reihe auf der linken Seite der Gleichung 4) die folgende unendliche Doppelreihe:

$$\text{b)}\quad \begin{array}{l} 2t \\ -2t^3+A2^3\binom{2}{2}t^3 \\ +2t^5-A2^3\binom{3}{2}t^5+B2^5\binom{4}{4}t^5 \\ -2t^7+A2^3\binom{4}{2}t^7-B2^5\binom{5}{4}t^7+C2^7\binom{6}{6}t^7 \\ +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;., \end{array}$$

in welcher für $-1<t<1$ alle Verticalcolonnen convergiren und die Werthe derselben eine convergente Reihe bilden. Zu bemerken ist hierbei, dass die linke Seite der Gleichung 4) derjenigen Summe dieser Doppelreihe gleichkommt, welche wir erhalten, wenn wir erst alle Verticalcolonnen summiren und dann die Werthe derselben addiren. Wir wollen diese Summe mit S_1, die andere dagegen, welche man erhält, wenn man erst alle Horizontalreihen und dann deren Werthe summirt, mit S_2 bezeichnen. Da die Doppelreihe b) Glieder mit positiven und negativen Vorzeichen enthält, so bedarf es jedenfalls einer besondern Untersuchung, um entscheiden zu können, ob S_1 oder S_2 gleich oder verschieden sind.

Fassen wir in der Doppelreihe b) immer die Glieder mit gleichhohen Potenzen von t zusammen, so bekommen wir die einfache Reihe

$$\text{c)}\quad \begin{array}{l} 2t-\left[2-A2^3\binom{2}{2}\right]t^3+\left[2-A2^3\binom{3}{2}+B2^5\binom{4}{4}\right]t^5 \\ \quad -\left[2-A2^3\binom{4}{2}+B2^5\binom{5}{4}-C2^7\binom{6}{6}\right]t^7+\ldots, \end{array}$$

deren Summe eben die Grösse ist, welche wir mit S_2 bezeichnet haben. Wenn man nun in der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung 4) und in der Reihe c) die Coefficienten gleichhoher Potenzen von t einander gleichsetzt und immer auf beiden Seiten durch 2 dividirt, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1&=1, \\ 0&=1-A2^2\binom{2}{2}, \\ A&=1-A2^2\binom{3}{2}+B2^4\binom{4}{4}, \\ 0&=1-A2^2\binom{4}{2}+B2^4\binom{5}{4}-C2^6\binom{6}{6}, \\ B&=1-A2^2\binom{5}{2}+B2^4\binom{6}{4}-C2^6\binom{7}{6}+D2^8\binom{8}{8}, \\ &\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;., \end{aligned}$$

aus welchen Gauss durch längere Rechnungen die Coefficienten $A, B, C\ldots$ bestimmt und folgende Werthe dafür gefunden hat:

$$\text{5)}\quad \begin{array}{c} A=\dfrac{1^2}{2^2},\quad B=\dfrac{1^2.3^2}{2^2.4^2},\quad C=\dfrac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}, \\ D=\dfrac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2},\quad E=\dfrac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}\ldots. \end{array}$$

Die beiden oben angedeuteten schwierigen Punkte sind nun folgende.

1. Man denke sich in den Reihen a), b), c) und der Gleichung 4) für die Coefficienten A, B, $C\ldots$ überall ihre Werthe aus den Gleichungen 5) wirklich eingesetzt. Dann geht die Reihe a) in die folgende über:

$$1+\sum_1^\infty{}_n \frac{1^2.3^2.5^2\ldots\overline{2n-1}^2}{2^2.4^2.6^2.\overline{2n}^2}x^{2n}$$

und convergirt, sobald $-1<x<1$.

Die Reihen auf den beiden Seiten der Gleichung 4) convergiren dann für $-1<t<1$, und wenn daher die Reihe a) wirklich den Ausdruck $\frac{1}{M(1+x,1-x)}$ für jedes zwischen -1 und 1 gelegene x darstellen soll, so wird die Gleichung 4) für jedes zwischen denselben Grenzen gelegene t richtig sein müssen. Nun hat aber die linke Seite derselben den Werth S_1 und die rechte den Werth S_2, da die Coefficienten A, B, $C\ldots$ ja so bestimmt worden sind, dass diese Seite mit der Reihe c) identisch wurde.

Also müsste

$$S_1=S_2$$

sein für $-1<t<1$.

Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich aber mit Sicherheit nur für solche Werthe von t behaupten, die zwischen den engeren Grenzen $-\sqrt{2}+1$ und $\sqrt{2}-1$ gelegen sind. Setzen wir nämlich in der Doppelreihe b) statt jeden Gliedes seinen absoluten Werth und bezeichnen mit τ den absoluten Werth von t, so bleiben zwar für $\tau<1$ alle Verticalcolonnen convergent, und ihre Summen werden resp.

$$\frac{2\tau}{1-\tau^2},\quad A\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right)^3,\quad B\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right)^5,\quad C\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right)^7\ldots,$$

aber die Summe dieser Werthe divergirt, sobald

$$\frac{2\tau}{1-\tau^2}\geqq 1 \text{ oder } \tau\geqq\sqrt{2}-1$$

ist.

Daher wird man die Identität von S_1 und S_2, folglich auch die Richtigkeit der Gleichung 4) zwar mit Sicherheit behaupten können, so lange

$$\tau<\sqrt{2}-1 \text{ oder } -\sqrt{2}+1<t<\sqrt{2}-1$$

ist; doch wird dieselbe ganz ungewiss, wenn t ausserhalb dieser Grenzen liegt.

Dass die Gleichung 4) gleichwohl auch zwischen den weiteren Grenzen -1 und 1 für t richtig bleibt, soll im Folgenden unter I bewiesen werden.

2. Selbst wenn die Richtigkeit der Gleichung 4) festgestellt sein wird, so weiss man von dem Quotienten $\frac{1}{M(1+x,1-x)}$ einerseits und der Reihe $+\sum_1^\infty{}_n \frac{1^2.3^2.5^2\ldots\overline{2n-1}^2}{2^2.4^2.6^2\ldots\overline{2n}^2}x^{2n}$ andererseits blos, dass sie beide für $x=0$ den Werth 1 erwerben und beide der Functionalgleichung 3) genügen. Es

bleibt zu beweisen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, um die Identität jener beiden Ausdrücke behaupten zu können. Dies soll unter II geschehen.

I.

Nachdem die Richtigkeit der Gleichung 4) zwischen den Grenzen $-\sqrt{2}+1$ und $\sqrt{2}-1$ dargethan worden, lässt sie sich mit Hilfe einiger Sätze aus der Theorie der Functionen einer complexen Variabeln leicht auch für die weiteren Grenzen $-1 < t < 1$ beweisen.

In der Reihe

$$\text{d)} \qquad \frac{2t}{1+t^2} + A\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 + B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5 + \ldots.$$

Denken wir uns den Ausdruck $\frac{2t}{1+t^2}$ durch die Veränderliche u ersetzt. Dann convergirt jene Reihe und ist eine synectische Function von u, so lange

$$mod\, u < 1$$

ist. Ferner ist u mit alleiniger Ausnahme der Punkte $t = \pm i$ in der ganzen Ebene eine synectische Function von t. Also wird auch die Reihe d) eine synectische Function von t sein für alle Werthe von t, welche bewirken, dass $mod\, u < 1$ wird.

Nun ist

$$mod\, u = mod\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\, mod\, t}{mod(1+t^2)}.$$

Setzen wir

$$t = x + iy,$$

so ist

$$mod\, t = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$mod(1+t^2) = \sqrt{(1+x^2-y^2)^2+(2xy)^2},$$

also

$$mod\, u = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+(2xy)^2}}.$$

Damit dieser Ausdruck <1 werde, ist erforderlich, dass

$$4x^2+4y^2 < (1+x^2-y^2)^2+(2xy)^2$$

oder

$$6) \qquad [x^2-(1-y^2)]^2-(2y)^2 > 0$$

sei. Diese Ungleichung ist nun stets erfüllt, sobald gleichzeitig sowohl

$$7) \qquad x^2+y^2+2y-1 < 0,$$

als auch

$$8) \qquad x^2+y^2-2y-1 < 0$$

ist; denn multiplicirt man diese beiden Ungleichungen, so erhält man die Ungleichung 6).

Nun ist

$$x^2+y^2+2y-1 = 0 \text{ oder } x^2+(y+1)^2 = 2$$

die Gleichung eines Kreises R, der von dem Punkte $x=0$, $y=-1$ mit dem Radius $\sqrt{2}$ beschrieben ist und die x-Axe in den Punkten $x = \pm 1$ schnei-

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

det. — Die Ungleichung 7) wird von den Coordinaten aller Punkte befriedigt, die innerhalb dieses Kreises liegen.

Ebenso ist $x^2+y^2-2y-1=0$ oder $x^2+(y-1)^2=2$ die Gleichung eines Kreises R', der von dem Punkte $x=0$, $y=1$ mit dem Radius $\sqrt{2}$ beschrieben ist und sowohl die x-Axe, wie den Kreis R in den Punkten $x=\pm 1$ schneidet. Die Coordinaten aller Punkte, welche innerhalb R' liegen, genügen der Ungleichung 8).

Somit werden alle Punkte, welche der den Kreisen R und R' gemeinsamen Fläche, die wir F nennen wollen, angehören, gleichzeitig die Ungleichungen 7) und 8), also auch die Ungleichung 6) befriedigen. — Folglich ist die Reihe d) innerhalb der Fläche F eine synectische Function von t.

Andererseits convergirt die rechte Seite der Gleichung 4) oder die Reihe

$$\text{e)} \qquad 2t(1+At^4+Bt^8+Ct^{12}+\ldots),$$

sobald $\mathrm{mod}\, t<1$ ist. Sie ist daher innerhalb eines um den Coordinatenanfang mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises, also auch innerhalb der Fläche F, die ja nur ein Theil desselben ist, eine synectische Function von t.

Nun stimmen die Reihen d) und e) nach dem Früheren für die zwischen $-\sqrt{2}+1$ und $\sqrt{2}-1$ gelegenen Punkte der realen Axe, das heisst für alle Punkte einer innerhalb der Fläche F gelegenen Strecke überein. Nach einem bekannten Satze müssen sie daher in der ganzen Fläche F übereinstimmen, weil sie beide innerhalb derselben synectisch bleiben. Da das zwischen -1 und 1 enthaltene Stück der realen Axe ganz innerhalb dieser Fläche liegt, so folgt hieraus, dass die Gleichung 4) für jedes reale t, welches >-1 und <1 ist, richtig sein muss, *q. e. d.*

II.

Nachdem wir so die Richtigkeit der Gleichung 4) für $-1<t<1$ bewiesen und hierdurch festgestellt haben, dass die Reihe

$$1+\sum_1^{\infty}{}_n \frac{1^2.3^2.5^2.\overline{2n-1}^2}{2^2.4^2.6^2.\overline{2n}^2}.x^{2n}$$

der Functionalgleichung 3) genügt, wollen wir zeigen, dass diese Eigenschaft in Verbindung mit der andern, dass die Reihe den Werth 1) bekommt für $x=0$, hinreicht, um die Identität derselben mit dem Ausdrucke $\dfrac{1}{M(1+x,1-x)}$ folgern zu können.

Dies ergiebt sich unmittelbar aus folgendem Satze.

Wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Functionen bezeichnen, welche beide gegen die Grenze 1 convergiren, wenn x sich unbegrenzt der Null nähert und beide für jedes zwischen -1 und 1 gelegene t der Functionalgleichung 3) genügen, so müssen dieselben identisch sein.

B e w e i s. Wir denken uns für den Augenblick unter t einen bestimmten, zwischen -1 und 1 gelegenen speciellen Werth dieser Variabeln. Nach der Voraussetz n ist dann

$$\varphi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=(1+t^2)\,\varphi(t^2).$$

Wir bezeichnen nun mit δ eine veränderliche Grösse und betrachten den Quotienten

$$\frac{2\delta}{1+\delta^2}.$$

Derselbe wächst stetig von -1 bis 1, wenn δ stetig von -1 bis 1 wächst. Es muss daher zwischen diesen Grenzen nothwendig einen speciellen Werth δ_1 von δ geben, für welchen er den Werth t^2 erwirbt. Diese Grösse δ_1 bestimmt sich aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{2\delta_1}{1+\delta_1^2}=t^2 \text{ oder } \delta_1^2 t^2-2\delta_1+t^2=0,$$

woraus folgt

$$\delta_1=\frac{1\pm\sqrt{1-t^4}}{t^2}.$$

Von den beiden Vorzeichen der Wurzel ist blos das untere zu gebrauchen, weil

$$\frac{1+\sqrt{1-t^4}}{t^2}>1$$

wäre. Also ist

$$\delta_1=\frac{1-\sqrt{1-t^4}}{t^2}.$$

Nun ist $1-t^4$ ein echter Bruch, also

$$\sqrt{1-t^4}>1-t^4,\quad 1-\sqrt{1-t^4}<t^4,\quad \frac{1-\sqrt{1-t^4}}{t^2}<t^2,$$

d. h.

$$\delta_1<t^2.$$

Wir haben nun

$$\varphi(t^2)=\varphi\left(\frac{2\delta_1}{1+\delta_1^2}\right)=(1+\delta_1^2)\,\varphi(\delta_1^2),$$

also auch

$$\varphi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=(1+t^2)(1+\delta_1^2)\,\varphi(\delta_1^2).$$

Die Grösse $\varphi(\delta_1^2)$ können wir nun ganz ebenso verwandeln, wie $\varphi(t^2)$. Wir erhalten

$$\varphi(\delta_1^2)=(1+\delta_2^2)\,\varphi(\delta_2^2),$$

wobei dann

$$\delta_2<\delta_1^2<t^4$$

ist, und es ist daher

$$\varphi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=(1+t^2)(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)\cdot\varphi(\delta_2^2) \text{ u. s. w.}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=(1+t^2)(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)\ldots(1+\delta^2_n)\,\varphi(\delta^2_n),$$

wobei

$$\delta_n < t^{(2^n)}.$$

Genau ebenso können wir $\psi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ entwickeln und erhalten

$$\psi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = (1+t^2)(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)\ldots(1+\delta^2_n).\psi(\delta^2_n).$$

Nun kann das Product

$$(1+t^2)(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)\ldots(1+\delta^2_n)$$

niemals eine gewisse endliche Grenze überschreiten, wie gross man auch n annehmen mag, denn es ist >1 und ferner jedenfalls

$$<(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)(1+t^{16})\ldots(1+t^{(2^n)}),$$

also um so mehr kleiner wie das unendliche Product

$$(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)(1+t^{16})\ldots \textit{ in infinitum},$$

welches convergirt, weil $-1<t<1$ ist, und einen endlichen Werth hat.

Andererseits kann δ_n durch Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden. Also kann man die Functionen $\varphi(\delta^2_n)$ und $\psi(\delta^2_n)$ beide der Einheit und folglich auch einander beliebig nähern. Also können $\varphi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ und $\psi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ sich nur um beliebig wenig unterscheiden, d. h. es ist

$$\varphi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = \psi\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

und, da t ein ganz beliebiger, zwischen -1 und 1 gelegener Werth war, auch

$$\varphi(x) = \psi(x) \text{ für } -1<x<1,$$

q. e. d.

Da der Ausdruck

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)}$$

und die Reihe

$$1+\sum_1^\infty{}_n \frac{1^2.3^2.5^2.\overline{2n-1}^2}{2^2.4^2.6^2.\overline{2n}^2}.x^{2n}$$

beide die von den Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ geforderten Bedingungen erfüllen, so müssen sie nach dem eben Bewiesenen identisch sein.

Göttingen, 1. Febr. 1875. H. v. Mangoldt, stud. math.

XVI. Beweis einiger Sätze über Potenzreihen.

1. Abel hat in der Abhandlung über die binomische Reihe gezeigt, dass die durch eine Potenzreihe definirte Function im Innern des Convergenzkreises dieser Reihe stetig sei. Dirichlet fügte den Nachweis hinzu, dass in einem Punkte des Umfanges des Convergenzkreises, für welchen

die Reihe noch convergirt, die Function sich stetig ändere, wenn man auf dem Radius vector vom Mittelpunkte des Kreises zu dem in Rede stehenden Randpunkte übergeht (vergl. Liouville J. 2, VII, S. 253). Es ist nicht schwer, diesen Beweis auf den allgemeinen Satz auszudehnen.

1. Satz. „Angenommen, die Potenzreihe

$$1)\qquad \sum_0^\infty{}_n\, a_n x^n = f(x)$$

sei längs eines Stückes des Umfanges des Convergenzkreises noch convergent, so ist $f(x)$ eine stetige Function von x sowohl gegen das Innere des Kreises, als auch längs dieses Stückes.“ (Die Coefficienten a_n können reell oder complex sein.)

Beweis. x_1 bezeichne einen Punkt auf dem Convergenzkreise der Reihe 1), wofür dieselbe noch convergirt. $x_1 - h$ sei ein benachbarter Punkt im Innern des Convergenzgebietes, so dass die complexe Zahl $h:x_1$, für welche ξ gesetzt wird, einen positiven reellen Theil hat. Ausserdem ist der absolute Betrag (Modul) von $1-\xi$ kleiner als 1.

Gemäss Voraussetzung der Convergenz von 1) für $x = x_1$ ist, wenn ε eine gegebene, beliebig kleine Zahl bezeichnet, der absolute Betrag

$$2)\qquad |a_n x_1{}^n + a_{n+1} x_1{}^{n+1} + \ldots + a_{n+s} x_1{}^{n+s}| < \varepsilon,$$

sobald nur $n \geqq m$ genommen wird, wie gross auch s sei.

Denkt man sich $f(x_1) - f(x_1 - h)$ gebildet, so wird es genügen, zu zeigen, dass

$$R_m = \sum_m^\infty{}_n\, a_n \{x_1{}^n - (x_1 - h)^n\}$$

mit h unendlich klein werde. Setzt man

$$a_m x_1{}^m + \ldots + a_{m+s} x_1{}^{m+s} = d_s,$$

so dass $a_{m+s} x_1{}^{m+s} = d_s - d_{s-1}$ ist, so folgt

$$R_m = \sum_0^\infty{}_s\, (d_s - d_{s-1})\{1-(1-\xi)^{m+s}\} = -\xi \sum_0^\infty{}_s\, d_s (1-\xi)^{m+s}.$$

Die associative Umformung dieser Reihe ist gestattet, weil die Glieder $d_s\{1-(1-\xi)^{m+s}\}$ ins Unendliche abnehmen.

Nun sei

$$\xi = \varrho\{\cos\varphi + i \sin\varphi\},$$

wo φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt; ferner bezeichne σ den absoluten Betrag der complexen Zahl $1-\xi$. Dann findet man sofort mit Rücksicht auf 2)

$$|R_m| < \frac{\varrho\,\varepsilon\,\sigma^m}{1-\sigma} < \frac{\varrho\,\varepsilon}{1-\sigma} < \frac{\varepsilon(2+\varrho)}{2\cos\varphi - \varrho},$$

indem man für σ seinen Werth $= \sqrt{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}$ einführt. Somit kann ϱ so klein genommen werden, dass $|R_m| < \varepsilon_1$ ist. Es genügt hierzu

$$\varrho < 2\,\frac{\varepsilon_1 \cos\varphi - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}$$

vorauszusetzen, was hier stets einen Sinn hat, da $\cos\varphi$ eben positiv und nicht 0 ist.

2. Aus diesem Satze ergiebt sich unmittelbar das folgende Corollar, welches bisher noch nicht veröffentlicht zu sein scheint:

„Sind die Reihen mit reellen oder complexen Gliedern

3)
$$\sum_0^\infty {}_n a_n, \quad \sum_0^\infty {}_n b_n$$

convergent, ebenso auch die Reihe $\sum_0^\infty {}_n c_n$, wo

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,$$

so ist $\Sigma c_n = ab$, wenn a, b bezüglich die Summen der Reihen 3) bezeichnen."

Mittels des 1. Satzes folgt dieses unmittelbar aus der von Abel a. a. O. gezeigten Gleichung

$$\sum_0^\infty {}_n a_n x^n \,.\, \sum_0^\infty {}_n b_n x^n = \sum_0^\infty {}_n c_n x^n, \quad (|x| < 1).$$

Diese Gleichung besteht innerhalb des gemeinsamen Convergenzkreises der Potenzreihen $\Sigma a_n x^n$ und $\Sigma b_n x^n$, weil dieselben hier unbedingt convergiren, was auf dem Convergenzkreise gewöhnlich nicht mehr zutrifft. Es gilt eben vorstehendes Lemma, abgesehen davon, ob die Reihen 3) unbedingt oder bedingt convergiren. Im letzteren Falle ist dann im Allgemeinen auch die Reihe Σc_n bedingt convergirt, also die Anordnung der Glieder wesentlich.

Beispiele liefert die Binomialreihe $(1+x)^\mu$ für $x = +1$ und $0 > \mu > -1$, in welchem Falle die Reihe nur bedingt convergirt.

3. 2. Satz. „Angenommen, die Reihe $\sum_1^\infty {}_n n a_n x^{n-1}$ convergire in einem Punkte x_1 des Umfanges ihres Convergenzkreises, welcher bekanntlich mit dem von $\sum_0^\infty {}_n a_n x^n$ zusammenfällt, so convergirt auch die letztere Reihe und es ist

$$\sum_1^\infty {}_n n a_n x_1^{n-1} = f'(x_1),$$

wo $f(x)$ die Summe von $\Sigma a_n x^n$ bezeichnet."

Die Convergenz von $\Sigma a_n x^n$ folgt unmittelbar nach dem 3. Satze von Abel a. a. O.: „Multiplicirt man die Glieder einer convergenten Reihe mit positiven Grössen, welche stets abnehmend oder stets zunehmend sich einer endlichen Grenze nähern, so ist die neue Reihe ebenfalls convergent."

Umständlicher ist der Beweis des zweiten Theiles unsers Satzes. Setzt man $\Sigma n a_n x_1^{n-1} = X_1$, so ist zu zeigen, dass

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)-hX_1}{h} = \sum_2^\infty{}_n\, n a_n x_1^{n-1} \cdot \frac{1-n\xi-(1-\xi)^n}{n\xi}$$

mit ξ unendlich klein werde. Die Bedeutung von h und ξ ist dieselbe, wie in Nr. 1. Da zufolge Voraussetzung eine endliche Zahl m existirt, so dass der Ausdruck

$$e_s = m a_m x_1^{m-1} + (m+1) a_{m+1} x_1^m + \ldots + (m+s) a_{m+s} x_1^{m+s-1}$$

seinem absoluten Werthe nach kleiner ist als eine gegebene, beliebig kleine Zahl ε, wie gross auch s genommen werde, so genügt es, zu beweisen, dass der Rest

$$4) \qquad S_m = \sum_m^\infty{}_n\, n a_n x_1^{n-1} \varphi(n)$$

mit ξ unendlich klein werde. Hier ist der Kürze wegen

$$\frac{1-(1-\xi)^n}{n\xi} - 1 = \varphi(n)$$

gesetzt. Führt man in 4) ein

$$(m+s) a_{m+s} x_1^{m+s-1} = e_s - e_{s-1},$$

so folgt

$$5) \quad S_m = \sum_0^\infty{}_s (e_s - e_{s-1}) \varphi(m+s) = \sum_0^\infty{}_s \{\varphi(m+s) - \varphi(m+s+1)\} e_s,$$

da $Lim\, e_s \varphi(m+s)$ für $s=\infty$ verschwindet.

Nun ist

$$\varphi(n) - \varphi(n+1) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1-(1-\xi)^n}{\xi} - \frac{(1-\xi)^n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\{1+(1-\xi)+\ldots+(1-\xi)^{n-1}\} - \frac{n(1-\xi)^n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_0^{n-1}{}_k (1-\xi)^k \{1-(1-\xi)^{n-k}\}.$$

Ersetzt man hier den zweiten Factor durch

$$\xi\{1+(1-\xi)+(1-\xi)^2+\ldots+(1-\xi)^{n-k-1}\}$$

und ordnet nach Potenzen von $(1-\xi)$, so folgt

$$\varphi(n) - \varphi(n+1) = \frac{\xi}{n(n+1)}\{1+2(1-\xi)+3(1-\xi)^2+\ldots+n(1-\xi)^{n-1}\}.$$

Wird, wie früher, der absolute Betrag von ξ mit ϱ, von $1-\xi$ mit σ bezeichnet, so kann man hieraus schliessen

$$|\varphi(n) - \varphi(n+1)| \leqq \frac{\varrho}{n(n+1)}\{1+2\sigma+3\sigma^2+\ldots+n\sigma^{n-1}\}.$$

Und weiter ergiebt sich ohne Mühe

$$(1-\sigma)^2 . |\varphi(n)-\varphi(n+1)| \leqq \varrho \left\{\frac{1-\sigma^n}{n} - \frac{1-\sigma^{n+1}}{n+1}\right\},$$

somit

$$\sum_m^\infty{}_n |\varphi(n)-\varphi(n+1)| \leqq \varrho \frac{1-\sigma^m}{m(1-\sigma)^2} < \frac{\varrho}{1-\sigma},$$

udem bekanntlich, so lange $\sigma < 1$:

$$\frac{1-\sigma^m}{1-\sigma} < m.$$

Demnach lässt sich aus 5) schliessen

$$|S_m| < \frac{\varepsilon\varrho}{1-\sigma}.$$

Diese Ungleichung ist bereits in Nr. 1 betrachtet worden. Man leitet daraus ab, dass die Verschiebung h in der That gegen das Innere des Convergenzkreises von $\Sigma a_n x^n$ so klein genommen werden kann, dass S_m seinem absoluten Betrage nach unter jede beliebige Zahl herabsinkt.

4. Es ist bekannt, dass der Taylor'sche Satz

$$\sum_0^\infty{}_n a_n x^n = f(x) = \sum_0^\infty{}_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

besteht, so lange der Punkt x_0 im Innern des Convergenzkreises der gegebenen Potenzreihe $f(x)$ liegt. Der Convergenzkreis der für den Punkt x_0 abgeleiteten Reihe ist nicht kleiner als der Kreis, der vom Mittelpunkte x_0 aus tangentiell zum Convergenzkreise von $f(x)$ gezogen wird. Die Beweise, welche für die Gleichung 6) gegeben werden, gelten aber nur für Punkte x, welche dem Innern des ebenerwähnten, von x_0 aus beschriebenen Kreises angehören. Denn setzt man in $f(x)$ $x = x_0 + (x - x_0)$, so kann man nach dem Satze von Cauchy über die Doppelreihen nach Potenzen von $x - x_0$ ordnen, wodurch man unmittelbar die rechte Seite von 6) erhält.

Es soll nun gezeigt werden:

3. Satz. 1. Die Gleichung 6) besteht stets auch noch für alle Punkte des Umfanges des von x_0 aus beschriebenen Kreises — mit Ausnahme des Berührungspunktes x_1 beider Kreise;

2. sie gilt auch noch für diesen Punkt, wenn $\Sigma a_n x_1^n$ convergirt; und

3. wenn $\Sigma a_n x_1^n$ sich der Grenze ∞ nähert (ohne zu oscilliren), so gilt dieses auch von der abgeleiteten Reihe.

Der Beweis dieser Sätze ergiebt sich am einfachsten aus der Betrachtung der endlichen Summen

$$F_m = \sum_0^m{}_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Setzt man hier

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=\sum_{n}^{\infty}{}_r \binom{r}{n} a_r x_0^{r-n}$$

und ordnet nach den Coefficienten a_r, so folgt

$$F_m=\sum_{0}^{\infty}{}_r a_r \sum_{0}^{r(m)}{}_n \binom{r}{n} x_0^{r-n}(x-x_0)^n.$$

Die obere Grenze für n ist r, so lange $r \leq m$; für $r>m$ stets m. Daraus folgt unmittelbar, wenn

$$\sum_{0}^{m}{}_n a_n x^n = f_m$$

gesetzt wird:

$$F_m=f_m+\sum_{m+1}^{\infty}{}_r a_r \sum_{0}^{m}{}_n \binom{r}{n} x_0^{r-n}(x-x_0)^n. \tag{7}$$

Nun sei x ein Punkt auf dem Umfange des kleinern Kreises vom Mittelpunkte x_0, der zugleich im Innern des Convergenzkreises der ursprünglichen Reihe $f(x)$ liegt. Dann giebt es stets Punkte x' im Innern des Convergenzkreises von $f(x)$, welche der doppelten Bedingung genügen

$$|x'|>|x_0|,\quad |x'-x_0|>|x-x_0|.$$

Schreibt man für die absoluten Beträge von x_0, x', a_r bezüglich ξ_0, ξ', α_r, so folgt aus 7)

$$|F_m-f_m|<\sum_{m+1}^{\infty}{}_r \alpha_r \xi'^r \sum_{0}^{m}{}_n \binom{r}{n}\left(\frac{\xi_0}{\xi'}\right)^{r-n}\left\{1-\frac{\xi_0}{\xi'}\right\}^n.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die rechte Seite dieser Ungleichung beliebig klein werden kann bei unbeschränkter Zunahme von m.

Hierzu ist eine Umformung des Coefficienten von $\alpha_r\xi'^r$ erforderlich. Schreibt man q für $\xi_0:\xi'$, so hat man unmittelbar

$$\varphi(r)\equiv\sum_{0}^{m}{}_n \binom{r}{n} q^{r-n}(1-q)^n = 1-(1-q)^{m+1}\sum_{0}^{r-m-1}{}_s \binom{r}{n} q^s(1-q)^{r-m-1-s}.$$

Die Summe im zweiten Gliede dieser Differenz ordnet man nach Potenzen von q. Es sei $r-m-1=k$, so folgt

$$\sum_{0}^{k}{}_s \binom{r}{s} q^s(1-q)^{k-s}=\sum_{0}^{k}{}_t q^t \sum_{0}^{t}{}_s (-1)^{t-s}\binom{r}{s}\binom{k-s}{t-s}$$

und daraus wegen

$$(-1)^{t-s}\binom{k-s}{t-s}=\binom{-k+t-1}{t-s},\quad \sum_{0}^{t}{}_s \binom{r}{s}\binom{-k+t-1}{t-s}=\binom{r-k+t-1}{t}:$$

$$\varphi(r)\equiv 1-(1-q)^{m+1}\sum_{0}^{r-m-1}{}_t \binom{m+t}{t} q^t. \tag{8}$$

Man findet also

9) $$\varphi(r)-\varphi(r+1)=(r_m)q^{r-m}(1-q)^{m+1}.$$

Wenn nun, wie in dem vorliegenden Falle, $q<1$ ist, so nehmen die positiven Zahlen $\varphi(r)$ bei zunehmenden r beständig ab, und zwar ist $Lim\,\varphi(r)=0$ für $r=\infty$; denn die Summe Σ in 8) nähert sich dem Werthe $1:(1-q)^{m+1}$.

Da die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_r\,\alpha^r\xi'^r$ zufolge Voraussetzung über den Punkt x' convergirt, so kann m so gross gewählt werden, dass der Ausdruck

$$\delta_s=\alpha_{m+1}\xi'^{m+1}+\alpha_{m+2}\xi'^{m+2}+\ldots+\alpha_{m+s}\xi'^{m+s}<\varepsilon$$

für alle Werthe von $m\geqq M$, wie gross auch s sein mag. Dann aber folgt wegen

$$\sum_{m+1}^{\infty}{}_r\,\varphi(r)\,\alpha_r\xi'^r=\sum_{1}^{\infty}{}_s\,\varphi(m+s)(\delta_s-\delta_{s-1})=\sum_{1}^{\infty}{}_s\{\varphi(m+s)-\varphi(m+s+1)\}\,\delta_s:$$

$$|F_m-f_m|<\varepsilon(1-q)^{m+1}\sum_{1}^{\infty}{}_s\binom{m+s}{s}q^s.$$

Diese Summe hat bekanntlich den Werth

$$\frac{1}{(1-q)^{m+1}}-1,$$

also ist

$$|F_m-f_m|<\varepsilon,\quad (m\geqq M),$$

d. h. die Gleichung 6) besteht auch für die Punkte x auf dem von x_0 aus beschriebenen Kreise, mit Ausnahme des Punktes x_1, in welchem er den Convergenzkreis von $\Sigma a_n x^n$ berührt.

Soll die Gleichung 6) auch für den ebenerwähnten Punkt x_1 gelten, so muss die Convergenz von $\Sigma a_n x_1^n$ vorausgesetzt werden. Dann kann man so schliessen: Aus 7) folgt, wenn die reelle Zahl $x_0:x_1=q_1$ gesetzt wird:

10) $$F_m-f_m=\sum_{m+1}^{\infty}{}_r\,a_r x_1^r.\,\varphi'(r),$$

wo $\varphi'(r)$ den Ausdruck $\varphi(r)$ bedeutet, nachdem darin $q=q_1$ gesetzt ist. Da q_1 positiv und unter 1 liegt, so nehmen auch die Grössen $\varphi'(r)$ ins Unendliche ab. Ist nun wieder M so gewählt, dass für alle Werthe $m\geqq M$

$$|a_{m+1}x_1^{m+1}+a_{m+2}x_1^{m+2}+\ldots+a_{m+s}x_1^{m+s}|<\varepsilon,$$

wie gross auch s genommen werde, so kann man setzen

$$F_m-f_m=\sum_{1}^{\infty}{}_s\,\varphi'(m+s)(d_s-d_{s-1})=\sum_{1}^{\infty}{}_s\{\varphi'(m+s)-\varphi'(m+s+1)\}\,d_s,$$

wo d_s den Ausdruck $a_{m+1}x_1^{m+1}+\ldots+a_{m+s}x_1^{m+s}$ bezeichnet.

Man findet also offenbar, wie oben

$$|F_m-f_m|<\varepsilon,\quad (m\geqq M),$$

q. e. d.

Um endlich den dritten Theil des im Eingange der Nummer ausgesprochenen Satzes zu zeigen, setzt man in 10)

$$a_r x_1^r = f_r - f_{r+1}.$$

Es ist nun anzunehmen, dass wenigstens eine Coordinate von f_m, z. B. der reelle Theil, bei fortwährender Zunahme von m gleichbezeichnete Werthe enthält, die über alle Grenzen wachsen. Setzt man

$$F_m = G_m + iH_m, \quad f_m = g_m + ih_m,$$

so folgt, wenn nur m gross genug ist:

11) $$\pm G_m \geqq \pm \{g_m[1-\varphi'(m)] + g_{m+1}[\varphi'(m+1) - \varphi'(m)] + \ldots\}.$$

Denn wie oben erwähnt, können die $g_m, g_{m+1} \ldots$ als gleichbezeichnet angesehen werden; die eingeklammerten Differenzen sind nach 8) und 9) sämmtlich positiv. — Wenn nun für $m \geqq M$

$$\pm g_m > G,$$

wo G eine gegebene beliebig grosse Zahl bezeichnet, so kann man aus 11) schliessen

$$(m \geqq M), \quad \pm G_m > G_1,$$

was zu zeigen war.

Innsbruck, 27. Juli 1874. Prof. O. Stolz.

XVII. Flächeninhalt von Parallelschnitten durch Regelflächen. Bewegung des Schwerpunktes eines freien Systems von materiellen Punkten in einer Ebene. Rauminhalt des Prismatoids.

§ 1. Wenn eine Gerade an den Umfängen von zwei geschlossenen Figuren, welche in parallelen Ebenen ε_1 und ε_2 liegen, so gleitet, dass gleichzeitig die beiden Umfänge ganz durchlaufen werden, so erzeugt sie eine in sich zurückkehrende Regelfläche, welche mit den beiden Figuren einen Körper begrenzt, der aus dem Prismatoid hervorgeht, wenn die Seiten der polygonalen Endflächen des letztern ins Unendliche vervielfältigt und verkleinert werden. Der Inhalt V dieses Körpers ergiebt sich daher aus seiner Höhe h und den Inhalten F_1, F_2 und F_m der Endflächen und der mittleren Durchschnittsfigur, wie längst bekannt, nach der für das Prismatoid giltigen Formel

1) $$V = h \cdot \frac{F_1 + 4F_m + F_2}{6}.$$

Andererseits erhält man den Inhalt eines Körpers, der von zwei parallelen ebenen Endflächen und einer geschlossenen Seitenfläche begrenzt wird, wenn der Inhalt F der Durchschnittsfigur, in welcher der Körper von einer zu den Endflächen parallelen Ebene durchdrungen wird, in Function des Abstandes z dieser Schnittebene von einem festen Punkte gegeben ist, nach der Formel

$$V = \int_{z_1}^{z_2} F\,dz,$$

wo z_1 und z_2 die Abstände der in der Richtung der wachsenden z aufeinanderfolgenden Endflächen von dem festen Punkte bedeuten, so dass die Höhe des Körpers

$$h = z_2 - z_1$$

ist. Wird insbesondere

$$F = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 \tag{2}$$

angenommen und der Ursprung der z in die Ebene der mittleren Durchschnittsfigur verlegt, was nur auf die Grösse der Coefficienten, nicht auf die Form des Ausdrucks Einfluss hat, so erhält man mit $h = 2e$

$$V = \int_{-e}^{+e} (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3)\, dz = 2e\,(A_0 + \tfrac{1}{3} A_2 e^2).$$

Zur Bestimmung der Coefficienten A hat man, wenn F_1, F_m, F_2 gegeben sind, die Gleichungen

$$F_1 = A_0 - A_1 e + A_2 e^2 - A_3 e^3,$$
$$F_m = A_0,$$
$$F_2 = A_0 + A_1 e + A_2 e^2 + A_3 e^3,$$

woraus

$$F_1 + 4F_m + F_2 = 6A_0 + 2A_2 e^2 = 6(A_0 + \tfrac{1}{3} A_2 e^2),$$

also V wie oben. Die Formel 1) gilt somit für alle möglichen Werthe der Coefficienten A, d. h. ebensowohl wenn der Ausdruck 2) constant (Cylinder), als wenn er vom ersten (Paraboloid), oder zweiten oder dritten Grade nach z ist. Dass er für den eingangs beschriebenen Körper im Allgemeinen vom zweiten Grade ist, ergiebt sich ohne Schwierigkeit, wenn man letzteren in der angegebenen Weise aus dem Prismatoid hervorgehen lässt. Im Folgenden soll aber nicht sowohl die Gradzahl des Ausdrucks; als vielmehr das geometrische Gesetz ermittelt werden, nach welchem der Inhalt der Durchschnittsfigur von der Lage der Schnittebene abhängt, sofern das Gesetz der Bewegung der Erzeugenden der Regelfläche bekannt ist.

§ 2. In den parallelen Ebenen ε_1 und ε_2 befinden sich die Curven c_1 und c_2. Während sich Punkt P_1 auf c_1 und P_2 auf c_2 bewegt, wird auf $P_1 P_2$ der Punkt P so angenommen, dass er $P_1 P_2$ nach einem constanten Verhältnisse theilt, also in einer zu ε_1 und ε_2 parallelen Ebene ε eine Curve c beschreibt. In ε_1 und ε_2 seien die Pole O_1 und O_2 beliebig, in ε sei Pol O als Spur von $O_1 O_2$ angenommen und es soll sich darum handeln, nachdem die Punkte $P_1\, P_2\, P$ nach $P'_1\, P'_2\, P'$ gelangt sind, den Sector OPP' in den Sectoren $O_1 P_1 P'_1$ und $O_2 P_2 P'_2$ auszudrücken. Projicirt man c_1 und c_2 nebst den sich darin bewegenden Punkten durch Strahlen parallel $O_1 O_2$ auf ε und bezeichnet die Projectionen wieder mit denselben Buchstaben, wie die projicirten Gebilde, so sind $OP_1 P'_1$ und $OP_2 P'_2$ anstatt der zwei letzteren Sectoren einzuführen.

Was auch das constante Verhältniss sein möge, immer lassen sich zwei Zahlen (complementäre Brüche) μ_1 und μ_2 derart angeben, dass

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 \text{ und } P_1 P : P P_2 = \frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_2}.$$

Sind alsdann $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ die Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 in einem rechtwinkligen System mit dem Ursprunge O, so werden die Coordinaten von P

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2.$$

Es ist also P der Schwerpunkt der in P_1 und P_2 befindlichen Massen μ_1 und μ_2, und es entsteht, wenn wir uns der Kürze halber erlauben, unter der von einem Punkte beschriebenen Fläche den Sector zu verstehen, den der vom Pole O nach dem Punkte gezogene Sector beschreibt, die Frage:

§ 3. **In einer Ebene werden von den materiellen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ um einen Pol O gleichzeitig die Flächen $F_1, F_2, \ldots F_n$ beschrieben; was für eine Fläche F beschreibt gleichzeitig der Schwerpunkt des Systems?**

Es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ die relativen, d. h. diejenigen Massen, welche den Punkten zukommen, wenn die Gesammtmasse des Systems als Masseneinheit angenommen wird, so dass also

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = 1, \tag{3}$$

so werden in den Coordinaten der einzelnen Punkte diejenigen des Schwerpunktes P angegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n = \sum_1^n \mu_p x_p, \\ y &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_n y_n = \sum_1^n {}^p \mu_p y_p. \end{aligned} \tag{4}$$

Die von den Punkten P_p und P im Zeitelement dt beschriebenen Flächenelemente werden angegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2dF_p &= x_p\, dy_p - y_p\, dx_p, \\ 2dF &= x\, dy - y\, dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir beweisen, dass lediglich auf derartige Flächenelemente folgende Doppelsumme zurückgeführt werden kann:

$$\sum_1^n {}^p \sum_1^n {}^q \mu_p \mu_q \{(x_p - x_q)(dy_p - dy_q) - (y_p - y_q)(dx_p - dx_q)\}. \tag{6}$$

Von den n^2 Gliedern, welche darin enthalten sind, verschwinden diejenigen n Glieder, welche sich mit gleichen Werthen von p und q ergeben; von den $n(n-1)$ übrigen Gliedern sind je zwei einander gleich, welche durch Vertauschung der Werthe von p und q ineinander übergehen. Die Doppelsumme kann daher auch folgendermassen angegeben werden:

$$2 \sum_1^{n-1} {}^p \sum_{p+1}^n {}^q \mu_p \mu_q \{(x_p - x_q)(dy_p - dy_q) - (y_p - y_q)(dx - dx_q)\}. \tag{7}$$

Durch Ausführung der Producte erhält man aus der Form 6), wenn immer noch die Summenzeichen auf alle Werthe des betreffenden Index von 1 bis n bezogen werden:

$$\begin{aligned}&\sum{}^p\sum{}^q \mu_p\mu_q\{x_p\,dy_p-y_p\,dx_p+x_q\,dy_q-y_q\,dx_q\\&\qquad\qquad -x_p\,dy_q+y_q\,dx_p-x_q\,dy_p+y_p\,dx_q\}\\&=\sum{}^p\{\mu_p(x_p\,dy_p-y_p\,dx_p)\Sigma\mu_q\}+\sum{}^p\{\mu_p\Sigma\mu_q(x_q\,dy_q-y_q\,dx_q)\}\\&-\sum{}^p\{\mu_px_p\Sigma\mu_q\,dy_q\}+\Sigma\{\mu_p\,dx_p\,\Sigma\mu_qy_q\}\\&-\sum{}^p\{\mu_p\,dy_p\,\Sigma\mu_qx_q\}+\Sigma\{\mu_py_p\,\Sigma\mu_q\,dx_q\}.\end{aligned}$$

Vermöge 3) und 4) wird hieraus

$$2\sum{}^p\mu_p(x_p\,dy_p-y_p\,dx_p)-2(x\,dy-y\,dx)$$

oder vermöge 5)

$$4\sum{}^p\mu_p\,dF_p-4\,dF. \tag{8}$$

Es bleibt jetzt noch die geometrische Bedeutung des Ausdruckes 6) oder 7) anzugeben. Da x_p-x_q und y_p-y_q die Coordinaten von P_p in einem System sind, dessen Axen den ursprünglichen parallel bleiben, während der Ursprung in P_q fortschreitet, so giebt die mit $\mu_p\mu_q$ multiplicirte Klammer den doppelten Inhalt des Flächenelements an, das im Zeitelement dt von einem Punkte beschrieben wird, dessen Bewegung um O die relative Bewegung von P_p um P_q darstellt. Bezeichnen wir dieses Flächenelement mit dF_{pq}, so liefert vermöge der Form 7) die über eine beliebige Bewegungsdauer erstreckte Integration das Ergebniss

$$\Sigma\mu_p\mu_q\,F_{pq}=\Sigma\mu_pF_p-F,\quad F=\Sigma\mu_pF_p-\Sigma\mu_p\mu_q\,F_{pq}. \tag{9}$$

Hier ist das Summenzeichen auf sämmtliche Combinationen ohne Versetzungen zu zwei zwischen den Indices 1 bis n zu beziehen. In Worten:

Die vom Schwerpunkt beschriebene Fläche ergiebt sich, wenn man die Summe der Producte je aus einer relativen Masse und der von ihr beschriebenen Fläche um die Summe der Producte aus je zwei relativen Massen und der von einer relativ um die andere beschriebenen Fläche vermindert.

Das letzte Glied der Gleichung 9) lässt noch einen andern Ausdruck zu. Da nämlich

$$x_p-x_q=(x_p-x)-(x_q-x),\quad y_p-y_q=(y_p-y)-(y_q-y),$$

so können in 6) oder 7) unter x_py_p und x_qy_q auch die Coordinaten von zwei Punkten verstanden werden, deren Bewegungen um O die relativen Bewegungen von P_p und P_q um den Schwerpunkt darstellen. Das System sämmtlicher derartiger Punkte bewegt sich so, dass sein Schwerpunkt im Ursprung bleibt; in 8) verschwindet daher $d\mathrm{F}$ und $d\mathrm{F}_p$ ist das von P_p relativ um den Schwerpunkt beschriebene Flächenelement, das wir mit $d\dot{F}_p$ bezeichnen wollen, zu verstehen. Der Satz lautet dann so:

$$\mathrm{F}=\Sigma\mu_p\mathrm{F}_p-\Sigma\mu_p\dot{\mathrm{F}}_p=\Sigma\mu_p(\mathrm{F}_p-\dot{\mathrm{F}}_p). \tag{10}$$

Wenn alle Punkte gleichzeitig geschlossene Bahnen zurücklegen, so sind die während der gemeinschaftlichen Umlaufszeit von ihnen beschriebenen Flächen von der Lage des Poles unabhängig, weil sie nichts Anderes sind, als die Inhalte der Bahnen.

Für rückläufig beschriebene Flächen (Drehung von $+x$ um 90^0 gegen $-y$) müssen ihre Masszahlen negativ eingeführt werden.

§ 4. Kehren wir nun zu unseren zwei Punkten in § 2 zurück, so reducirt sich, wenn wir den Satz 9) anwenden, die letzte Summe auf ein einziges Glied $\mu_1 \mu_2 \mathrm{F}_{12}$ und F_{12} ergiebt sich, wenn aus O eine veränderliche Linie mit der Länge und Richtung der in ε durch Projection erhaltenen $P_1 P_2$ gezogen wird, als der Inhalt der von ihrem Endpunkte beschriebenen Bahn. Die so entstehende Figur ergiebt sich auch, wenn ein Kegel mit der Spitze in O_1 oder in O_2 und der Basis in ε_2 oder in ε_1, dessen Mantellinien den Erzeugenden der in § 1 besprochenen Regelfläche parallel sind, durch Strahlen parallel $O_1 O_2$ auf ε projicirt wird. Es ist also F_{12} nichts Anderes, als die in der Ebene der einen Endfläche enthaltene Basis eines solchen Kegels, dessen Spitze beliebig in der Ebene der andern Endfläche angenommen wird.

Theilt die Ebene der Durchschnittsfigur, deren Inhalt bestimmt werden soll, die Höhe h des Körpers in zwei Abschnitte h_1 und h_2 derart, dass

$$h_1 + h_2 = h \text{ und } P_1 P : P P_2 = h_1 : h_2,$$

so wird

$$\frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_2} = h_1 : h_2, \quad \frac{h_1}{\mu_2} = \frac{h_2}{\mu_1} = \frac{h_1 + h_2}{\mu_1 + \mu_2} = h, \quad \mu_1 = \frac{h_2}{h}, \quad \mu_1 = \frac{h_1}{h},$$

also, wenn unter F_k die Basis des Kegels verstanden wird:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}_1 h_2 + \mathrm{F}_2 h_1}{h} - \frac{h_1 h_2}{h^2} \mathrm{F}_k.$$

Will man anstatt h_1, h_2, h die Abstände z_1, z_2, z der die Figuren F_1, F_2 und F enthaltenden Ebenen von einem festen Punkte einführen, so erhält man für F einen Ausdruck des zweiten Grades nach z.

Für die mittlere Durchschnittsfigur erhält man mit $\frac{h_1}{h} = \frac{h_2}{h} = \frac{1}{2}$ den Ausdruck

$$F_m = \frac{F_1 + F_2}{2} - \tfrac{1}{4} F_k.$$

Der Inhalt des Körpers wird daher

$$V = h \cdot \frac{F_1 + F_2 + 4 F_m}{6} = h \frac{F_1 + F_2}{2} - \tfrac{1}{6} h F_k.$$

Versteht man unter C den ebenso hohen Cylinder, dessen Basis das arithmetische Mittel aus den Endflächen ist, und unter K den ebenso hohen Kegel, dessen Mantellinien denen der Seitenfläche des Körpers parallel sind, so wird

$$V = C - \tfrac{1}{2} K.$$

Es wird dem Leser nicht schwer fallen, die Richtigkeit dieses Satzes an den verschiedenen Arten der Prismatoide sowohl mit krumm- als auch mit ebenflächiger Seitenbegrenzung nachzuweisen.

Stuttgart, Februar 1875. C. W. Baur.

XVI.

Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme.

Von

Dr. L. Burmester,

Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden.

(Hierzu Taf. IV u. V, Fig. 1—19.)

Dritte Mittheilung.*

In dieser Abhandlung wollen wir zunächst das folgenreiche Princip der Umkehrung der Bewegung veränderlicher Systeme, welches den Reichthum geometrischer Wahrheiten in unbegrenztem Maasse vergrössert und sich als ein mächtiges Werkzeug der kinematischen Methode manifestirt, durch synthetische Betrachtungen zur klaren Anschauung fördern, und dann durch die Weisung unserer Entwickelungen die ersten Stadien des Weges eröffnen, der zu den höheren Stufen kinematisch-geometrischer Beziehungen führt. Wir beginnen unsere Untersuchungen wieder mit den collinear-veränderlichen Systemen, bei denen bekanntlich jede Gerade, wenn wir sie nicht als Inbegriff einer Punktreihe auffassen, während der Bewegung ein unveränderliches Systemelement bildet, d. h. in allen Phasen eine Gerade, wie jeder Punkt ein Punkt bleibt. Die Fortsetzung unserer Darlegungen wird uns dann zu den kreisverwandt-veränderlichen Systemen führen, in denen jedem Punkte ein Punkt, jedem Kreise ein Kreis entspricht, und bei welchem eine in einer Systemphase liegende Gerade, die wir als einen unendlich grossen Kreis ansehen, während des Ueberganges in eine andere Systemphase sich in einen Kreis verwandelt, also nicht mehr wie bei den collinear-veränderlichen Systemen in allen Phasen eine Gerade bleibt. Durch die Cremona'sche Verwandtschaft wird die Bewegung der kreisverwandt-veränderlichen Systeme zu der Bewegung der rational-ver-

* Fortsetzung der Abhandlungen VII und XX des 19. Bandes dieser Zeitschrift.

änderlichen Systeme verallgemeinert, bei denen im Allgemeinen jedem Punkte in einer Systemphase ein Punkt in jeder andern, und jeder durch bestimmte Grundpunkte gehenden Curve n^{ter} Ordnung in einer Systemphase eine durch bestimmte Grundpunkte gehende Curve n^{ter} Ordnung in jeder andern entspricht; und eine beliebige Gerade einer Phase verwandelt sich beim Uebergang in eine andere Phase in eine Curve n^{ter} Ordnung.

Wir werden erkennen, dass sich aus dem Quell der kinematischen Methode eine Fülle wichtiger geometrischer Gesetze ergiesst, dass die Transformationen der geometrischen Gebilde, welche die Herren Klein, Lie und Lindemann* in geistvoller Weise für besondere Zwecke behandelt haben, neues Licht durch rein geometrische Betrachtungen empfangen und dass in unseren Untersuchungen die Directive für eine höhere analytische Entwickelung liegen.

A. Collinear-veränderliche ebene Systeme.

Sind zwei in einer Ebene liegende collineare Systeme gegeben, so haben dieselben bekanntlich* drei selbstentsprechende Punkte und drei selbstentsprechende Gerade, welche durch je zwei dieser Punkte gehen; zwei von diesen selbstentsprechenden Punkten können auch imaginär sein, und dann sind es auch die beiden selbstentsprechenden Geraden, welche durch den einzigen reellen selbstentsprechenden Punkt gehen.

Nehmen wir an, es seien in Fig. 1, Taf. IV, O, P, Q die drei selbstentsprechenden Punkte zweier collinearer Systeme S_1, S_2 und weisen wir einem beliebigen Punkte X_1 in S_1 einen beliebigen entsprechenden Punkt X_2 in S_2 zu, so sind diese Systeme bestimmt. Wir können demnach zu jedem weitern beliebigen Punkte Y_1 in S_1 den entsprechenden Y_2 in S_2 in folgender, für unsern Zweck besonders vortheilhafter Weise construiren. Wir ziehen die Geraden QX_1, QY_1, QX_2, welche die selbstentsprechende Gerade OP resp. in den Punkten X_1^0, Y_1^0, X_2^0 schneiden, und bestimmen in der auf OP liegenden, durch die entsprechenden Punkte O, P, X_1^0 und O, P, X_2^0 gegebenen collinearen Punktreihen, für welche O, P Doppelpunkte sind, zu Y_1^0 der ersten den entsprechenden Punkt Y_2^0 der zweiten Reihe, indem wir einen beliebigen, durch OP gehenden Kegelschnitt oder Kreis k beschreiben, durch einen Punkt χ desselben die Geraden χX_1^0, χX_2^0 ziehen, die den Kreis k andererseits beziehungsweise in den Punkten s_1, s_2 treffen, dann bestimmt die Gerade $s_2\eta$, welche durch den von k und $s_1 Y_1^0$ erzeugten Schnittpunkt η geht, auf OP den entsprechenden Punkt Y_2^0, und demnach liegt der zu bestim-

---

* Klein und Lie, Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich selbst übergehen (Math. Annalen Bd. IV, S. 50); Lindemann, Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Maassbestimmung (Math. Annalen Bd. VII, S. 56).

mende Punkt Y_2 auf der Geraden QY_2^0. In gleicher Weise würde man eine zweite, aber durch P gehende Gerade erhalten, auf der Y_2 liegt, wenn man die Schnittpunkte der Geraden PX_1, PY_1, PX_2 auf OQ bestimmt und einen durch die Punkte O, Q gehenden Kreis zieht. Diese Construction ist dann der eben ausgeführten vollkommen symmetrisch; allein wir gelangen auf Kosten dieser Symmetrie rascher zum Ziele und erhalten eine auch für imaginäre selbstentsprechende Punkte geltende Bestimmung des Punktes Y_2, wenn wir X_1Y_1, welche OP in D_1 schneidet, ziehen und zu D_1 den entsprechenden Punkt der obengenannten Punktreihe ermitteln. Zu dem Zwecke ziehen wir durch den Schnittpunkt δ von D_1s_1 mit k die Gerade $s_2\delta$, diese schneidet OP in D_2 und dann ist der Durchschnitt von X_2D_2 mit QY_2^0 der gesuchte Punkt Y_2. Diese Construction bewahrt auch ihre Giltigkeit, wenn die beiden Punkte O, P imaginär sind; dann muss aber der Kegelschnitt k so bestimmt werden, dass er die reelle selbstentsprechende Gerade in diesen imaginären Punkten schneidet.

Nehmen wir nun an, ein collinear-veränderliches ebenes System S, welches durch die Punkte $OPQX$ bestimmt ist, durchschreite die Phasen $OPQX_1$, $OPQX_2$, $OPQX_3$, ..., welche wir mit S_1, S_2, S_3, ... bezeichnen, und der Systempunkt X bewege sich, in die Lagen X_1, X_2, X_3, ... übergehend, auf einer Curve x, so bilden auch die Punkte Y_1, Y_2, Y_3, ... eine Curve y, auf der sich der Systempunkt Y bewegt.

Betrachten wir nun $OPQX_1$ und $OPQY_1$ als entsprechende Punkte zweier collinearer ebener Systeme Σ_x, Σ_y, so entspricht dem Punkte X_2 in Σ_x auch der Punkt Y_2 in Σ_y; denn wenn wir in den durch die entsprechenden Punkte O, P, X_1^0 und O, P, Y_1^0 bestimmten Reihen zu X_2^0 in der ersten den entsprechenden Punkt in der zweiten mit Hilfe des Kreises k und Benutzung der Punkte s_1, s_2, χ, η construiren, so fällt dieser entsprechende Punkt mit Y_2^0 zusammen und demnach sind QX_2, QY_2 entsprechende Gerade in den Systemen Σ_x, Σ_y. In gleicher Weise ergiebt sich auch — vorausgesetzt, P sei nicht imaginär —, dass PX_2 und PY_2 entsprechende Gerade in diesen Systemen sind. Hiermit ist, wenn die selbstentsprechenden Punkte reell sind, bewiesen, dass dem Punkte X_2 in Σ_x der Punkt Y_2 in Σ_y entspricht. — Sind aber zwei selbstentsprechende Punkte, etwa O und P, imaginär, so ergiebt sich der Beweis durch folgende Ueberlegung. Wir nehmen in S_1 auf QX_1^0 und QY_1^0 resp. die Punkte X'_1, Y'_1, welche auf einer durch D_1 gehenden Geraden liegen, an; dann entspricht in dem System S_2 der Schnittpunkt X'_2 von QX_2^0 mit $I_xX'_1$ dem Punkte X'_1 und ebenso entspricht in diesem System der Schnittpunkt Y'_2 von QY_2^0 mit $I_yY'_1$ dem Punkte Y'_1. Die in den Systemen S_1, S_2 entsprechenden Strahlenbüschel $D_1(\overline{X_1^0Y_1^0}, \overline{X'_1Y'_1}, \overline{X_1Y_1}, Q\ldots)$ und $D_2(\overline{X_2^0Y_2^0}, \overline{X'_2Y'_2}, \overline{X_2Y_2}, Q\ldots)$, deren Mittelpunkte D_1, D_2 auf der selbstentsprechenden Geraden, liefern die collinearen Punktreihen $X_1^0X'_1X_1Q\ldots$, $X_2^0X'_2X_2Q\ldots$, $Y_1^0Y'_1Y_1Q\ldots$, $Y_2^0Y'_2Y_2Q\ldots$.

Demnach sind auch X_2 und Y_2 auf den Geraden QX_2^0, QY_2^0 entsprechende Punkte in den Systemen Σ_x, Σ_y, und folglich müssen, da I_x, I_y ebenfalls entsprechende Punkte sind, die Geraden χI_x, ηI_y sich in einem Punkte t auf k schneiden. In gleicher Weise zeigt sich, dass auch dem Punkte X_3 der Punkt Y_3 entspricht, und folglich sind die Bahncurven x und y, welche resp. durch die Punkte $X_1 X_2 X_3 \ldots$ und $Y_1 Y_2 Y_3 \ldots$ bestimmt werden, entsprechende Curven in den Systemen Σ_x, Σ_y, welche die selbstentsprechenden Punkte O, P, Q besitzen. Ist also die Bahncurve x eines Punktes X des collinear veränderlichen Systems S und seine Lage X_1 in einer Systemphase S_1 gegeben, so können wir leicht die Bahncurve y eines beliebigen andern Systempunktes Y, der in S_1 die Lage Y_1 einnimmt, als die entsprechende Curve von x in den collinearen Systemen construiren, die durch die selbstentsprechenden Punkte O, P, Q und durch die entsprechenden Punkte X_1, Y_1 bestimmt sind. Die nicht festen Punkte einer selbstentsprechenden Geraden bewegen sich, welche Bahncurven auch die anderen Systempunkte beschreiben mögen, in dieser Geraden; und die durch einen selbstentsprechenden Punkt gehenden nicht festen Geraden umhüllen diesen Punkt. Diese Punkte und Geraden bilden demnach eine Ausnahme und daher wollen wir sie bei der Darlegung der allgemeinen Resultate zunächst ausschliessen. Aus unseren Betrachtungen ergeben sich mit Berücksichtigung der reciproken Beziehungen die wichtigen fundamentalen Sätze:

1. Sind drei Punkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

1a. Sind drei Gerade eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Hüllbahnen der beweglichen Systemgeraden entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Geraden als selbstentsprechende Gerade besitzen.

Aus diesen Sätzen folgt die Umkehrbarkeit der Bewegung. Betrachten wir in einem collinear-veränderlichen ebenen System S mit drei festen Punkten eine Curve K als Systemcurve, deren Phasen K_1, K_2, $K_3 \ldots$ sind, so beschreiben die Punkte A, B, C, ... der Curve K die Bahncurven a, b, c, ... Denken wir uns alle Phasen K_1, K_2, $K_3 \ldots$ erstarrt, so können wir diese als Bahncurven der Punkte einer Curve L ansehen, deren a, b, c, ... sind, und einem neuen collinear-veränderlichen ebenen System Σ angehört, welches dieselben drei festen Punkte wie das System S besitzt. Da die Curvenphasen K_1, K_2, $K_3 \ldots$ und die Curven a, b, $c \ldots$ dieselbe Curve $\varkappa$ umhüllen, so kann die Hüllbahncurve $\varkappa$ auf zweierlei Weise erzeugt werden.

Aus 1 und 1a lassen sich leicht viele interessante Sätze ableiten, von denen wir nur die wichtigsten hervorheben.

2. Sind drei Punkte eines collinear - veränderlichen ebenen Systems fest und bewegt sich ein Systempunkt auf einer Curve n^{ter} Ordnung, so bewegen sich alle beweglichen Systempunkte auf Curven n^{ter} Ordnung und erzeugen auf diesen Punktreihen, die sich in collinearen Systemen entsprechen, welche die drei festen Punkte entsprechend gemein haben.

2*a*. Sind drei Gerade eines collinear - veränderlichen ebenen Systems fest und umhüllt eine Systemgerade eine Curve n^{ter} Classe, so umhüllen alle beweglichen Systemgeraden Curven n^{ter} Classe und erzeugen an diesen Strahlensysteme, die sich in collinearen Systemen entsprechen, welche die drei festen Geraden entsprechend gemein haben.

Wenn wir in jedem Punkte einer Systemphase die Tangente an die betreffende Bahncurve ziehen, so sind auch alle diese Tangenten entsprechende Gerade im collinearen System, welche die festen Punkte und die festen Geraden entsprechend gemein haben; und daraus folgen die Sätze:

3. Das Doppelverhältniss des Berührungspunktes einer Tangente einer Bahncurve und ihrer drei Schnittpunkte mit den festen Geraden ist constant für alle Berührungspunkte, welche die Lagen der Systempunkte in einer Systemphase einnehmen.

3*a*. Das Doppelverhältniss der Tangente an einem Punkte einer Bahncurve und seiner drei Verbindungsgeraden mit den festen Punkten ist constant für alle Tangenten, welche die Bewegungsrichtung der Systempunkte in einer Systemphase angeben.

Ist in einem Punkte einer Systemphase die Tangente an der Bahncurve bekannt, so können wir leicht in jedem andern Punkte dieser Systemphase die Tangente seiner Bahncurve als die entsprechende Gerade von jener Tangente construiren.

Bewegt sich ein Punkt eines collinear-veränderlichen ebenen Systems mit drei festen Punkten oder Geraden auf einem Kegelschnitte, so bewegen sich alle beweglichen Punkte auf Kegelschnitten; wenn einer dieser Kegelschnitte durch einen, zwei oder durch alle drei der festen Punkte geht, so gilt dies von allen Kegelschnitten, und wenn einer dieser Kegelschnitte eine, zwei oder alle drei der festen Geraden berührt, so gilt dasselbe von allen Kegelschnitten.

Nehmen wir an, es bewege sich ein Systempunkt auf einem Kegelschnitte, der zwei selbstentsprechende Gerade in je einem selbstentsprechenden Punkte berührt, so bewegen sich alle beweglichen Systempunkte auf Kegelschnitten, welche jene Gerade in denselben Punkten berühren.

Die Gesammtheit aller Bahncurven bilden in diesem Falle ein Büschel von Kegelschnitten, welche zwei selbstentsprechende Gerade in je einem selbstentsprechenden Punkte berühren, und die dritte der festen selbstentsprechenden Geraden ist die gemeinschaftliche Polare dieser Kegelschnitte für den dritten festen Punkt als Pol. Da ein Kegelschnitt durch zwei Tangenten, die Berührungspunkte und einen Punkt bestimmt ist, so müssen die Bahnkegelschnitte aller Systempunkte, die auf einem jener Kegelschnitte liegen, in diesem zusammenfallen, und wenn wir nun, wie in der zweiten Mittheilung, die selbstentsprechenden Punkte die Collineationspole und die selbstentsprechenden Geraden die Collineationsgeraden nennen, dann erhalten wir den Satz:

4. Alle Kegelschnitte, welche zwei Collineationsgerade in je einem Collineationspol berühren, gehen während der einförmigen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems in sich selbst über, wenn ein Systempunkt sich auf einem solchen Kegelschnitte bewegt.

Neben diesen Satz kann man den reciproken leicht hinschreiben. Sind die Berührungspunkte oder die beiden betreffenden Collineationspole imaginär und fallen dieselben mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammen, dann werden die genannten Kegelschnitte concentrische Kreise, welche den dritten reellen Collineationspol als gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und die Bewegung geht über in die Rotation eines starren ebenen Systems um diesen Mittelpunkt. Wenn wir den Begriff der Rotation bezüglich der collinear-veränderlichen ebenen Systeme erweitern, die obige Bewegung Collinearrotation und den dritten Collineationspol das Rotationscentrum nennen, so können wir sagen:

5. Bei der Collinearrotation bewegen sich alle Systempunkte in Kegelschnitten, welche zwei Collineationsgerade in je einem Collineationspol berühren und für welche der dritte Collineationspol, das Rotationscentrum, und die dritte Collineationsgerade beziehungsweise Pol und Polare sind.

Herr Klein hat diese specielle einförmige Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems die „Bewegung der Ebene" genannt*.

Bewegt sich ein Systempunkt auf einer Geraden, so bewegt sich jeder bewegliche Systempunkt bei der einförmigen Bewegung auf einer Geraden und die Punkte der verschiedenen Systemphasen bilden auf diesen Geraden collineare Punktreihen. Geht eine Bahngerade durch einen Collineationspol, so gehen alle durch denselben; alle diese Geraden, als Systemgeraden betrachtet, bewegen sich in sich selbst und die anderen beweglichen Systemgeraden umhüllen Punkte, welche sich auf der diesem Collineationspol

---

* Klein, Ueber die sogenannte nichteuklidische Geometrie (Math. Annalen Bd. IV, S. 602).

gegenüberliegenden Collineationsgeraden befinden. Nehmen wir einen Systemkegelschnitt an, der die beiden anderen Collineationsgeraden in den beiden anderen Collineationspolen berührt, dann bewegen sich im letzten Falle alle Punkte dieses Kegelschnittes auf den Strahlen eines Büschels, dessen Mittelpunkt der dritte Collineationspol ist; und für alle Kegelschnittphasen ist dieser Collineationspol und die gegenüberliegende Collineationsgerade beziehungsweise Pol und Polare. Fallen die beiden Collineationspole, in denen jener Systemkegelschnitt berührt, mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammen, dann geht das collinear-veränderliche in ein ähnlich-veränderliches System über, dessen Punkte sich auf Geraden bewegen, die durch den Aehnlichkeitspol gehen, und jene Kegelschnittphasen werden Kreisphasen, welche den Aehnlichkeitspol als gemeinschaftlichen Mittelpunkt besitzen. Nehmen wir wieder einen Systemkegelschnitt, der zwei Collineationsgerade in je einem Collineationspol berührt, an und lassen wir einen Punkt desselben auf einer beliebigen Geraden g fortschreiten, so bewegen sich alle anderen beweglichen Punkte des Systemkegelschnittes auf Geraden, die Tangenten an der Kegelschnittphase sind, welche die Gerade g berührt. Diese Phase begrenzt das Gebiet der Ebene, über welches der veränderliche Kegelschnitt hinwegstreift.

Nachdem wir erkannt haben, dass die Kegelschnitte, welche zwei Collineationsgerade in je einem Collineationspol berühren, sich in sich selbst bewegen, wenn ein Systempunkt auf einem solchen Kegelschnitt fortschreitet, wollen wir nachweisen, dass es noch andere Systemcurven giebt, die bei der einförmigen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems in sich selbst übergehen. Die Punkte einer solchen Curve beschreiben Bahncurven, welche mit dieser Curve zusammenfallen, die Phasen einer solchen Curve hüllen diese Curve selbst ein, und demnach können wir sie Selbsthüllcurven nennen. Die Herren Klein und Lie haben diese Curven in der S. 382 citirten Abhandlung W-Curven genannt und ihre wichtigsten Eigenschaften analytisch-geometrisch abgeleitet.

Es sei in Fig. 2, Taf. IV, Q ein reeller Collineationspol, q eine reelle Collineationsgerade, welche einen Kegelschnitt k in zwei imaginären Punkten schneidet, die wir als die beiden imaginären Collineationspole (O, P) ansehen wollen. Nehmen wir nun noch zwei Punkte A_1, A_2 beliebig an, so sind durch diese zwei Phasen S_1, S_2 eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen ebenen Systems S bestimmt; betrachten wir A_2 zu S_1 gehörend und bezeichnen wir ihn demgemäss mit B_1, dann entspricht diesem in S_2 der Punkt B_2, den wir durch die in Fig. 1 angegebene Construction, welche in Fig. 2 ausgeführt ist, bestimmt haben. Sehen wir jetzt B_2 als einen Punkt von S_1 an und bezeichnen ihn als solchen mit C_1, dann entspricht diesem der Punkt C_2 in S_2 u. s. w. Die so erhaltenen Punkte A_1, $B_1 A_2$, $C_1 B_2$, $D_1 C_2$ ... liefern ein Polygon, welches, zu S_1 gehörend betrachtet, in sich selbst übergeht, wenn A_1 nach $B_1 A_2$ in S_2 oder A_1 nach $C_1 B_2$ in S_3 gelangt u. s. f. Denken wir uns die Polygonseiten unendlich klein, so erhalten wir eine Systemcurve $A_1 A_2 A_3 \ldots$, welche, wenn ein Systempunkt diese Curve durchschreitet, in sich selbst übergeht; und alle anderen beweglichen Systempunkte durchlaufen dann auch Selbsthüllcurven. Diese Selbsthüllcurven gehen, wenn zwei Collineationspole imaginär sind, in unendlich vielen Windungen um den reellen Collineationspol als asymptotischen Punkt herum. Fallen die imaginären Collineationspole mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammen, dann ist das System S ein ähnlich-veränderliches und die Selbsthüllcurven sind logarithmische Spiralen, welche den Aehnlichkeitspol als gemeinschaftlichen asymptotischen Punkt besitzen. Diese logarithmischen Spiralen schneiden alle durch den Aehnlichkeitspol gehenden Geraden unter gleichem Winkel und sind congruent.

Liegen die beliebig angenommenen Punkte A_1, A_2 zufällig auf einem Kegelschnitt, der zwei Collineationsgeraden in je einem Collineationspol berührt, dann sind die Selbsthüllcurven die oben betrachteten Kegelschnitte.

Da die Bahncurven aller auf einer Selbsthüllcurve liegenden beweglichen Systempunkte mit der Selbsthüllcurve zusammenfallen, so ergeben sich aus 3 und **3***a* die folgenden Sätze:

6. Das Doppelverhältniss des Berührungspunktes einer Tangente einer Selbsthüllcurve und ihrer Schnittpunkte mit den Collineationsgeraden ist constant.

6*a*. Das Doppelverhältniss der Tangente an einem Punkte einer Selbsthüllcurve und seiner Verbindungsgeraden mit den Collineationspolen ist constant.

Die Gesammtheit aller Selbsthüllcurven, welche durch eine einförmige Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems erzeugt wird, nennen wir eine Selbsthüllcurvenschaar. Die Curven einer solchen Schaar können sich nur in den Collineationspolen schneiden, sonst nicht. Bewegen sich die Punkte einer beliebigen Systemcurve auf Selbsthüllcurven, so ist die Hüllbahn dieser Systemcurve eine zu derselben Schaar gehörende Selbsthüllcurve; denn dieselbe Hüllbahn wird auch von den Bahncurven, welche hier Selbsthüllcurven sind, umhüllt, aber von allen diesen kommt nur eine Curve, die umhüllte selbst, bei der Umhüllung zur Geltung; alle anderen treten mit imaginärer Berührung auf. Weitere Eigenschaften lassen sich leicht aus den Grundbeziehungen der Selbsthüllcurven ableiten, dass je zwei Selbsthüllcurven einer Schaar entsprechende Curven in collinearen Systemen sind, welche die Collineationspole entsprechend gemein haben, und dass jede Selbsthüllcurve, wenn wir zwei ihrer Punkte als entsprechende Punkte in collinearen Systemen, welche die Collineationspole entsprechend gemein haben, betrachten, hinsichtlich ihrer Gestalt in diesen Systemen sich selbst entspricht.

Bewegt sich bei der einförmigen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems ein Systempunkt auf einer Geraden, so bewegen sich alle beweglichen Systempunkte auf Geraden. Betrachten wir eine bestimmte Systemphase S_1, so entspricht jedem Punkte dieser Phase eine durch ihn gehende Bahngerade, und jeder als Bahngerade angesehenen Geraden ein auf ihr liegender Punkt der Phase S_1. Nur die Collineationspole und Collineationsgeraden bilden eine Ausnahme. Bestimmen wir zu jeder durch einen Punkt gehenden Bahngeraden den auf ihr liegenden Punkt der Systemphase S_1, so liegen diese Punkte auf einem durch die Collineationspole gehenden Kegelschnitte. Demnach entspricht, wenn wir die Collineationspole ausschliessen, jedem Punkte A ein durch diesen Punkt und durch die Collineationspole gehender Kegelschnitt λ und umgekehrt jedem durch die Collineationspole gehenden Kegelschnitt λ ein auf ihm liegender Punkt A, durch den die Bahngeraden gehen, auf denen sich die Punkte dieses Kegelschnittes bewegen. Betrachten wir nun die Tangenten einer beliebigen Curve Θ als Bahngerade, so bilden die auf diesen Tangenten liegenden entsprechenden Punkte eine Curve θ, deren Punkte sich auf diesen Tangenten bewegen und deren Phasen die Curve Θ umhüllen. Denken wir uns ferner zu den Punkten A der Curve Θ den durch die Collineationspole gehenden entsprechenden Kegelschnitt a bestimmt, so müssen auch diese Kegelschnitte die Curve θ umhüllen, weil zwei unendlich nahe liegende Tangenten sich in den Punkten A der Curve Θ schneiden. Die Resultate dieser Darlegungen lassen sich noch in folgender Weise verallgemeinern. Die Punkte einer Systemcurve λ, deren Phasen einerseits einen Punkt A umhüllen, bewegen sich auf Bahncurven l, welche denselben Punkt A umhüllen, also durch ihn hindurchgehen. Denken wir uns einen Büschel solcher Bahncurven l, die durch einen Punkt A gehen und entsprechende Curven in collinearen Systemen sind, welche die Collineationspole entsprechend gemein haben, construirt, so entspricht einer jeden dieser durch A gehenden Bahncurve l ein auf ihr liegender Punkt L der Systemcurve λ; dem Punkte A entspricht demnach die Curve λ, und umgekehrt entspricht jeder andern mit λ in jenen Systemen collinearen Curve ein auf ihr liegender Punkt A. Nehmen wir an, eine Curve Θ sei von einer Schaar von Bahncurven t umhüllt, so entspricht jeder Curve t ein auf ihr liegender Punkt T und diese Punkte T bilden eine Curve θ, deren Punkte sich auf den Bahncurven t bewegen und deren Phasen die Curve Θ umhüllen. Da wir jeden Punkt A der Curve Θ als einen Schnittpunkt von zwei unendlich nahen Curven t ansehen können, so entspricht jedem Punkte A eine Curve λ, welche die Curve θ berührt.

Um unsere Darlegungen an einem einfachen, interessanten Beispiel zu erläutern, nehmen wir an, es sei in Fig. 3 durch den Bahnkreis a, dessen Mittelpunkt a_0 ist, und durch den Aehnlichkeitspol O die kreislinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems S bestimmt, dessen eine Phase

S_1 durch den auf a liegenden Punkt A_1 gegeben ist. Dann bewegen sich alle Systempunkte auf Bahnkreisen und das System der Mittelpunkte derselben ist dem Punktsystem S_1 ähnlich und hat mit diesem den Aehnlichkeitspol O entsprechend gemein. Bei jedem Bahnkreise ist das Verhältniss des Radius zu dem Abstande seines Mittelpunktes vom Aehnlichkeitspol constant, gleich dem analogen Verhältnisse, welches der gegebene Bahnkreis a liefert. Jeder Kreis, der diese Bedingung erfüllt, kann also als ein Bahnkreis angesehen werden, auf dem sich ein entsprechender Systempunkt bewegt. Ist A ein gegebener Punkt, so erhalten wir die Mittelpunkte $l'_0, l''_0 \ldots$ aller durch A gehenden Bahnkreise $l', l'' \ldots$, wenn wir

$$\frac{l'_0 A}{l'_0 O} = \frac{l''_0 A}{l''_0 O} = \frac{l'''_0 A}{l'''_0 O} = \ldots = \frac{a_0 i}{a_0 O}$$

machen; und demnach liegen die Mittelpunkte der durch A gehenden Bahnkreise auf einem Kreise $\varkappa$, dessen in der Geraden OA liegende Durchmesser-Endpunkte l'_0, l_0^n durch die Verhältnisse

$$\frac{l'_0 A}{l'_0 O} = \frac{l_0^n A}{l_0^n O} = \frac{a_0 i}{a_0 O}$$

bestimmt sind. Machen wir die Dreiecke $O l'_0 L'$, $O l''_0 L''$, ... ähnlich dem Dreieck $O a_0 A_1$, so erhalten wir in der Systemphase S_1 die auf einem durch A gehenden Kreise liegenden Punkte L'_1, L''_1, ..., deren Bahnkreise l', l'', ... sind. Demnach entspricht bei der kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems einem Punkte A ein durch ihn gehender Kreis λ_1, der auch als ein Bahnkreis angesehen werden kann, und dessen Mittelpunkt λ_0 auf $\varkappa$ liegt.

In Fig. 4 ist die kreislinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems S mit dem Aehnlichkeitspol O durch den Bahnkreis a gegeben und durch einen auf demselben liegenden Punkt A_1 eine Systemphase S_1 bestimmt. Um die Mittelpunkte t'_0, t''_0, ... der Bahnkreise t', t'', ..., welche eine gegebene Curve Θ, die in unserer Figur ein Kreis ist, umhüllen, zu construiren, machen wir, wenn A', A'', ... die Berührungspunkte bezeichnen:

$$\frac{t'_0 A'}{t'_0 O} = \frac{t''_0 A''}{t''_0 O} = \frac{t'''_0 A'''}{t'''_0 O} = \ldots = \frac{a_0 i}{a_0 O}.$$

Die durch die Mittelpunkte t'_0, t''_0, ... gebildete Curve ist in unserem Falle, weil Θ ein Kreis ist, bekanntlich ein cartesisches Oval. Demnach ist auch die Systemcurve θ_1, deren Punkte T'_1, T''_1, ... sich auf den Bahnkreisen t', t'', ... bewegen und deren Phasen den Kreis Θ umhüllen, ein cartesisches Oval. Die Punkte T'_1, T''_1, ... der Curve θ_1 in der Systemphase S_1 erhalten wir, indem wir die dem Dreiecke $O a_0 A_1$ ähnlichen Dreiecke $O t'_0 T'_1$, $O t''_0 T''_1$, ... construiren.

Bestimmen wir zu den Berührungspunkten, z. B. zu A'', den entsprechenden, durch A'' gehenden Kreis λ'', dann berührt dieser die Curve θ_1 in T''_1 und der Mittelpunkt λ''_0 desselben liegt auf dem Kreise $\varkappa''$, dessen auf OA'' liegende Durchmesser-Endpunkte i'', h'' durch die Bedingung

$$i''A'':i''O = h''A'':h''O = ia_0:iO$$

bestimmt sind. Auf $\varkappa''$ ist λ''_0 durch die ähnlichen Dreiecke $Oi''\lambda''_0$ und OiA_1 gegeben. Da das Mittelpunktsystem $t_0, t''_0, \ldots \varkappa''_0$ dem Punktsystem T'_1, $T''_1, \ldots \lambda''_0$ ähnlich ist, so berührt auch der Kreis $\varkappa''$ die Curve $t_0 t''_0 \ldots$ in dem Punkte t''_0. Die Durchmesser-Endpunkte i', i'', ... der Kreise $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... liegen auf einer der Curve Θ ähnlichen Curve; das Gleiche gilt demnach von den Mittelpunkten λ'_0, λ''_0, ..., und da in unserer Figur Θ ein Kreis, so folgt hieraus, dass das cartesische Oval auch als die Hüllbahn eines Kreises λ des Systems S angesehen werden kann, dessen Mittelpunkt λ_0 einen Kreis durchläuft. Unsere Betrachtungen liefern daher den allgemeineren Satz:

Eine Systemcurve θ eines kreislinig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems, welche einerseits eine Hüllbahn Θ erzeugt, ist selbst wieder die Hüllbahn eines Systemkreises, der in einem ähnlich-veränderlichen System liegt, von dem ein Punkt sich auf der Curve Θ bewegt.

Die Kreise t', t'', ..., welche die Curve Θ einerseits berühren, umhüllen andererseits noch eine zweite Curve Ψ, für welche dieselben Beziehungen gelten, die wir hinsichtlich der Curve Θ erkannt haben. Die Berührungspunkte, welche die Kreise t, t'', ... mit Ψ bilden, können wir leicht bestimmen. Ziehen wir z. B. die Tangente $A''I$ an Θ und die Tangente $t''_0 I$ an den Kreis $\varkappa$ und beschreiben über It''_0 als Durchmesser einen Kreis ε, so geht dieser durch A'' und durch den Aehnlichkeitspol O, weil die Winkel $OA''I$, $Ot''_0 I$ gleich sind, und schneidet andererseits t'' in dem Punkte A^{II}, in welchem der Kreis t'' die nicht gezeichnete Curve Ψ berührt, deren Tangente IA^{II} ist.

In der zweiten Mittheilung, Bd. 19, S. 488, haben wir die Bestimmung der Collineationspole für die Phasen bei der allgemeinen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems abgeleitet und damit die Construction der Collineationspolbahn und der Collineationspolcurve angegeben. Für ähnlich-veränderliche ebene Systeme wird diese Bestimmung, wie wir in der ersten Mittheilung, Bd. 19 S. 167, gezeigt haben, einfach und diese Construction leicht ausführbar.

Um nun die wichtigen Beziehungen zwischen Collineationspolbahn und Collineationspolcurve und die Umkehrbarkeit der allgemeinen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems klar darzulegen, betrachten wir in Fig. 5 einen concreten speciellen Fall, die allgemeine Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems; es wird dadurch die Uebersichtlichkeit der Darlegungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit gefördert.

Die allgemeine Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S ist bestimmt, wenn wir in Fig. 5 zwei beliebige Curven α und β als Bahncurven zweier Systempunkte A, B und eine dritte beliebige Curve ε

als die Hüllbahncurve der Systemgeraden AB annehmen. Betrachten wir die Curven α, β, ε mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten A_1A_2, A_2A_3, ...; B_1B_2, B_2B_3, ... und $E'E''$, $E''E'''$, ..., so können wir die krummlinige Bewegung des Systems S aus unendlich vielen unendlich kleinen geradlinigen Bewegungen zusammengesetzt ansehen. Sind O^1, O^2, O^3, ... resp. die Aehnlichkeitspole für die durch A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3... bestimmten Systemphasen S_1, S_2, S_3, ..., so bleibt O^1 fest für die unendlich kleine geradlinige Bewegung von A_1B_1 bis A_2B_2, ebenso O^2 für die Bewegung von A_2B_2 bis A_3B_3 u. s. w. Die Punkte O^1, O^2, O^3 bilden die Polbahn ω, welche wir als ein Vieleck mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten. Bestimmen wir die Punkte O^{I}, O^{II}, O^{III}, ..., so dass

$$\begin{array}{l} \triangle O^{\mathrm{I}}\ A_1B_1 \sim \triangle O^1A_1B_1, \\ \triangle O^{\mathrm{II}}\ A_1B_1 \sim \triangle O^2A_2B_2, \\ \triangle O^{\mathrm{III}} A_1B_1 \sim \triangle O^3A_3B_3, \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \end{array}$$

ist, dann bilden die Punkte O^{I}, O^{II}, O^{III}, ... die Polcurve o, die wir ebenfalls als ein Vieleck mit unendlich kleinen Seiten ansehen. Bei der Bewegung von A_1B_1 bis A_2B_2 gelangt $O^{\mathrm{I}}O^{\mathrm{II}}$ nach O^1O^2, bei der Bewegung von A_2B_2 bis A_3B_3 geht $O^{\mathrm{II}}O^{\mathrm{III}}$ in O^2O^3 über u. s. w. Demnach erhalten wir den Satz:

Die veränderliche Polcurve ω rollt während der Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S auf der festen Polbahn o und diese ist die Hüllbahncurve der Systemcurve ω.

In Fig. 6 sind drei Systemphasen S_1, S_2, S_3 eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, dessen Systempunkt A, B die Bahncurven α, β beschreiben, dessen Systemcurve K die Hüllbahncurve $\varkappa$ erzeugt, und die entsprechenden Punkte O^1, O^2, O^3; O^{I}, O^{II}, O^{III} der Polbahn und der Polcurve gezeichnet.

Nehmen wir an, es sei in Fig. 6 die Systemphase S_1 mit den Curven o, K_1 und den Punkten A_1, B_1 fest und die Curven ω, $\varkappa$, α, β seien in einem ähnlich-veränderlichen ebenen System Σ Systemcurven, welche resp. die festen Curven o, K_1 und die Punkte A_1, B_1 umhüllen, so erhalten wir die Phasen Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... dieses Systems, wenn Σ_1 durch die Curven α, β, $\varkappa$ gegeben ist, die wir demgemäss mit α_1, β_1, $\varkappa_1$ bezeichnen, durch die Beziehungen

$$\begin{array}{l} A_1B_1K_1O^{\mathrm{I}}\ \ \alpha_1\beta_1\varkappa_1 \sim A_1B_1K_1O^1\alpha_1\beta_1\varkappa_1, \\ A_1B_1K_1O^{\mathrm{II}}\ \alpha_2\beta_2\varkappa_2 \sim A_2B_2K_2O^2\alpha_1\beta_1\varkappa_1, \\ A_1B_1K_1O^{\mathrm{III}}\alpha_3\beta_3\varkappa_3 \sim A_3B_3K_3O^3\alpha_1\beta_1\varkappa_1, \\ \qquad\quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ \qquad\quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ \qquad\quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \end{array}$$

Die beiden ersten Gebilde fallen zusammen. Die Curvenphasen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ und $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ umhüllen resp. die Punkte A_1, B_1 und die Curve K_1. Die Curve ω rollt auf der Curve o, weil successive $O^1 O^2$ mit $O^{\mathrm{I}} O^{\mathrm{II}}$, $O^2 O^3$ mit $O^{\mathrm{II}} O^{\mathrm{III}}$ u. s. w. zusammenfällt, und die Punkte des Systems Σ bewegen sich auf Bahncurven, die, als Systemcurven zu S gehörend, feste Punkte umhüllen. Die erhaltenen Resultate unserer Betrachtungen gelten, wenn wir bei der Entwickelung statt der Aehnlichkeit die Collineation in Betracht ziehen, auch für collinear veränderliche ebene Systeme; und demnach ergeben sich die Sätze:

7. Bei der Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems rollt die Collineationspolcurve auf der Collineationspolbahn.

8. Eine Phase K_1 einer in einem collinear-veränderlichen ebenen System S liegenden Curve K, welche eine Hüllbahncurve $\varkappa$ erzeugt, kann als die Hüllbahncurve von der einem collinear-veränderlichen ebenen System Σ zugewiesenen Curve $\varkappa$ angesehen werden; dabei bewegen sich die Punkte des Systems Σ auf solchen Curven, die, wenn sie dem System S angehörten, Punkte umhüllen und die Phase o_1 der bei der ersten Bewegung auf der Collineationspolbahn ω rollenden Collineationspolcurve o des Systems S ist bei der zweiten Bewegung die Collineationspolbahn, auf der die Curve ω des Systems Σ rollt*.

Dieses wichtige Princip der Umkehrung gilt aber nicht nur für die Bewegung collinear-veränderlicher ebener Systeme, sondern auch für die Bewegung rational-veränderlicher ebener Systeme und ist daher für die kinematische Methode von der höchsten Bedeutung.

Um die Anwendung dieses Princips in einem einfachen Falle zu zeigen, betrachten wir beispielsweise die geradlinige Bewegung eines Systemkreises in einem ähnlich-veränderlichen ebenen System S. In diesem Falle wird

---

* Herr Reuleaux hält es in seiner „Theoretischen Kinematik" S. 595 für durchaus nothwendig, bei starren Systemen die Polcurve „bewegliche Polbahn" zu nennen, weil durch die Umkehrung der Bewegung Polbahn und Polcurve in Wechselbeziehung treten. Wir behalten aber die Benennung Polcurve; denn die Consequenz seines Grundes ist absolut undurchführbar. Wir dürfen dann auch nicht Systempunkt und Bahncurve, nicht Systemcurve und Hüllbahncurve sagen; denn beide Paare vertauschen bei der Umkehrung der Bewegung ihre Rolle. Man dürfte demnach z. B. auch nicht Multiplicandus und Multiplicator eines Productes, nicht Anfang und Ende einer geraden Strecke, nicht Grundriss und Aufriss eines Gegenstandes, nicht Bild und Original bei einer perspectivisch dargestellten ebenen Figur sagen; kurz, bei den mannichfaltigen Wechselbeziehungen, welche in der Mathematik auftreten, müsse die unschuldige, das Verständniss fördernde Verschiedenheit der Benennungen beseitigt werden.

die Polbahn und Polcurve durch den Aehnlichkeitspol repräsentirt. Bewegt sich (Fig. 7) der Mittelpunkt M eines Systemkreises K, dessen Phasen K_x, K_y, ... sein mögen, auf einer Geraden μ, so ist nach der ersten Mittheilung S. 163 die Hüllbahncurve $\varkappa_x$ ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol O ist. Bei der geradlinigen Bewegung umhüllen alle durch O gehenden Systemkreise Punkte und dem Punkte C_x, in welchem die Phase K_x den Kegelschnitt $\varkappa_x$ berührt, entspricht Tangente γ als Bahngerade, die K_y in C_y trifft. Kehren wir die Bewegung um, so bleibt der Punkt O der Aehnlichkeitspol für ein neues ähnlich-veränderliches System Σ, in dem $\varkappa$ eine Systemcurve, $\varkappa_x$ eine Phase derselben ist, und dessen Punkte sich auf Bahnkreisen bewegen, die durch O gehen. Jede beliebige Kreisphase, etwa K_y, können wir als die Hüllbahncurve des Kegelschnittes $\varkappa$ des Systems Σ betrachten; der durch $O\,C_x\,C_y$ gehende Kreis c ist der Bahnkreis eines Punktes C des Systems Σ und berührt als solcher den Kreis K_y in C_y. Wir erhalten demnach den Satz:

Bei der speciellen kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems umhüllt ein Systemkegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol ist, einen Kreis.

Wenn der Systempunkt C von C_x in C_y übergeht, tritt $\varkappa$ aus der Phase $\varkappa_x$ in $\varkappa_y$, welche K_y in C_y, D_y berührt. Die beiden Tangenten HC_x, HD_x nehmen die Lage $h\,C_y$, $h\,D_y$ ein. Der Punkt h liegt aber stets, weil $M_x O H$ ein rechter Winkel ist, auf einer Geraden Op, die in O auf OM_y senkrecht steht; demnach geht die Verbindungsgerade $C_y\,D_y$ der Berührungspunkte, welche eine Phase des Kegelschnittes $\varkappa$ mit K_y bildet, durch einen festen Punkt P_y, den Pol der Geraden Op in Bezug auf den Kreis K_y. Bestimmen wir in Beziehung auf die Kreisphasen, wie z. B. für K_x, den Pol P_x der in O auf $M_x O$ senkrechten Geraden, so liegen diese Pole auf einer zu μ parallelen Geraden und die durch diese Pole zu μ senkrechten Geraden, wie z. B. $C_x D_x$, treffen die Kreisphasen in den Berührungspunkten, welche sie mit der Hüllbahncurve bilden. Die grösste Phase $\varkappa_g$ des Kegelschnittes $\varkappa$ tritt ein, wenn der Systempunkt C auf dem Bahnkreise c in den Punkt C_g gelangt, der O diametral gegenüberliegt, und daraus folgt, dass alle über den Brennstrahlen eines Kegelschnittes als Durchmesser beschriebenen Kreise den Kreis umhüllen, dessen Durchmesser die Hauptaxe des Kegelschnittes ist.

Nehmen wir an, es sei in Fig. 8 der Kegelschnitt $\varkappa_x$ die Hüllbahncurve einer Systemgeraden K eines kreislinig bewegten, ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, dessen Aehnlichkeitspol O ist, und γ, δ seien die Bahnkreise zweier Systempunkte C, D, welche resp. in den Lagen C_x, C_y und D_x, D_y die Phasen K_x, K_y der Systemgeraden bestimmen, so umhüllen alle Systemkreise von S, bei denen das Verhältniss des Radius zum Abstand des Mittelpunktes vom Aehnlichkeitspol gleich dem analogen Verhältnisse bei den Kreisen γ, δ ist, Punkte.

Kehren wir die Bewegung um, so können wir jede Phase der Systemgeraden, etwa K_y, als die Hüllbahncurve des Kegelschnittes $\varkappa$ eines neuen Systems Σ betrachten, und der durch C_x gehende, die Gerade K_y in C_y berührende Kreis c ist der Bahnkreis des Punktes C im System Σ. Bei diesem Bahnkreise muss dann das erwähnte Verhältniss bestehen, und die Mittelpunkte der Bahnkreise, auf denen sich die Systempunkte des Kegelschnittes $\varkappa$ bewegen, liegen auf einem dem $\varkappa$ ähnlichen Kegelschnitte. Wir erhalten somit den Satz:

Bei der kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems umhüllt ein Systemkegelschnitt, dessen Brennpunkt der Aehnlichkeitspol ist und dessen halbe Hauptaxe sich zum Mittelpunkt-Abstand vom Brennpunkte wie der Radius eines Bahnkreises zum Mittelpunkt-Abstand vom Aehnlichkeitspol verhält, einerseits eine Gerade.

Wir erhalten also in beiden Umkehrungsfällen kreislinige Bewegung eines Systemkegelschnittes. Eine neue Umkehrung dieser Bewegungen liefert kegelschnittlinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems; und so ergiebt sich durch fortgesetzte Umkehrung der Bewegung eine endlose Reihe neuer Bewegungsformen. Ausser der in dem letzten Satze erwähnten Geraden umhüllen die Phasen des Kegelschnittes und die Bahnkreise noch eine Curve, und wenn diese wieder als Systemcurve aufgefasst wird, deren Punkte sich auf Bahnkreisen oder Bahnkegelschnitten bewegen, so entstehen wieder neue Bewegungsformen.

B. Collinear-veränderliche räumliche Systeme.

Zwei collineare räumliche Systeme sind durch fünf Paare entsprechender Punkte bestimmt. Nehmen wir vier Punkte O, P, Q, R als selbstentsprechende Punkte zweier collinearen räumlichen Systeme S_1, S_2 an, so haben beide Systeme auch die Kanten und Ebenen des durch diese vier Punkte bestimmten Tetraeders entsprechend gemein. Weisen wir einem Punkte X_1 in S_1 einen entsprechenden Punkt X_2 in S_2 zu, so sind die Systeme bestimmt und wir können zu jedem andern gegebenen Punkte Y_1 in S_1 den entsprechenden Punkt Y_2 in S_2 in folgender Weise bestimmen. Wir projiciren von einem selbstentsprechenden Punkte, etwa von R, aus die Punkte X_1, Y_1, X_2 auf die gegenüberliegende Ebene OPQ nach X_1^0, Y_1^0, X_2^0. In den ebenen collinearen Systemen $OPQX_1^0$ und $OPQX_2^0$ construiren wir, wie auf S. 383 flgg. angegeben wurde, zu Y_1^0 den entsprechenden Punkt Y_2^0; dann liegt der gesuchte Punkt Y_2 auf der Geraden RY_2^0. In gleicher Weise erhalten wir eine zweite Gerade, auf der Y_2 liegt, wenn wir die Punkte X_1, Y_1, X_2 von einem andern selbstentsprechenden Punkte auf die gegenüberliegende Ebene projiciren. Diese Bestimmung des entsprechenden Punktes Y_2 behält ihre Giltigkeit, wenn auch zwei selbstentsprechende Punkte, z. B. O, P, auf einer selbstentsprechenden Geraden g imaginär sind; denn dann existiren ausser den reellen selbstentsprechenden Punkten Q, R noch die beiden gegenüberliegenden reellen selbstentsprechenden Ebenen Rg, Qg. Die Bestimmung des Punktes Y_2 in S_2, der dem Punkte Y_1 in S_1 entspricht, führt in letzter Instanz auf dieselbe Construction, welche wir S. 383 flgg. bei collinearen ebenen Systemen kennen gelernt haben, und deshalb gelten auch hier die analogen Folgerungen; hier müssen wir aber noch den Fall, wenn alle vier Punkte O, P, Q, R imaginär sind, ausschliessen, weil derselbe sich bis jetzt unseren constructiven Bestimmungen entzieht.

Nehmen wir an, ein collinear-veränderliches räumliches System S, welches durch die Punkte O, P, Q, R, X bestimmt ist, durchschreite die Phasen $OPQRX_1$, $OPQRX_2$, $OPQRX_3$, ..., welche wir mit S_1, S_2, S_3, ... bezeichnen, und der Systempunkt X bewege sich, in die Lagen X_1, X_2, X_3, ... übergehend, auf einer Bahncurve x, so bilden auch die Punkte Y_1, Y_2, Y_3, ... eine Bahncurve y, auf der sich der Systempunkt Y bewegt.

Betrachten wir nun O, P, Q, R, X_1 und O, P, Q, R, Y_1 als entsprechende Punkte zweier collinearen räumlichen Systeme Σ_x, Σ_y, so entspricht dem Punkte X_2 in Σ_x auch der Punkte Y_2 in Σ_y, ebenso dem Punkte X_3 der Punkt Y_3 u. s. f. Demnach sind die Bahncurven x und y, welche resp. durch die Punkte X_1, X_2, X_3, ... und Y_1, Y_2, Y_3, ... bestimmt werden, entsprechende Curven in den Systemen Σ_x, Σ_y, welche die selbstentsprechenden Punkte O, P, Q, R besitzen. Ist also die Bahncurve x eines Punktes X des collinear-veränderlichen räumlichen Systems S und seine Lage X_1 in einer Systemphase S_1 gegeben, so können wir die Bahncurve y eines beliebigen andern Systempunktes Y, der in S_1 die Lage Y_1 einnimmt, als die entsprechende Curve von x in den durch die entsprechenden Punkte O, P, Q, R, X_1 und O, P, Q, R, Y_1 bestimmten collinearen Systemen Σ_x, Σ_y ansehen und als solche construiren. Die nicht festen, in einer selbstentsprechenden Ebene liegenden Systempunkte bewegen sich, welche Raumcurven auch die anderen Systempunkte durchlaufen mögen, stets in dieser Ebene; die nicht festen Systemgeraden und Systemebenen, welche durch einen selbstentsprechenden Punkt gehen, umhüllen diesen Punkt, und die nicht festen Systemebenen, welche durch eine selbstentsprechende Gerade gehen, umhüllen diese Gerade.

Diese besonderen Punkte, Geraden und Ebenen bilden demnach eine Ausnahme und daher wollen wir sie bei unseren allgemeinen Darlegungen als ausgeschlossen betrachten.

Die abwickelbare Fläche, welche durch Bewegung einer Ebene erzeugt wird, wollen wir die **abwickelbare Hüllbahnfläche** dieser Ebene und ihre Cuspidalkante die **Hüllbahncurve** dieser Ebene nennen. Die Curve, welche von einer beweglichen Geraden, deren aufeinanderfolgende Lagen sich schneiden, umhüllt wird, soll die **Hüllbahncurve** dieser Geraden heissen.

Aus unserer Entwickelung folgen demnach mit Berücksichtigung der reciproken Beziehungen die wichtigen fundamentalen Sätze:

9. **Sind vier Punkte eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen räumlichen Systemen, welche die vier festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.**

9*a*. **Sind vier Ebenen eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest, so sind alle Hüllbahncurven der beweglichen Systemebenen entsprechende Curven in collinearen räumlichen Systemen, welche die vier festen Ebenen als selbstentsprechende Ebenen besitzen.**

10. **Sind sechs sich zu dreien in vier Punkten schneidende Gerade eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest und erzeugt eine bewegliche Systemgerade eine Hüllbahncurve, so erzeugen alle beweglichen Systemgerade Hüllbahncurven, welche entsprechende Curven in collinearen räumlichen Systemen sind, die jene sechs festen Geraden als selbstentsprechende Gerade besitzen.**

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen dieser Systemcurve gebildete Fläche, welche die **Bahnfläche** dieser Systemcurve heissen soll. Die besondere Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems, bei der vier Systempunkte fest bleiben, wollen wir die **einförmige Bewegung** desselben nennen. Wir erhalten dann mit Rücksicht auf obige Darlegungen den folgenden Satz, der die Umkehrung der einförmigen Bewegung in sich schliesst:

11. **Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve C eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems S können als die Phasen einer Systemcurve Γ eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems Σ angesehen werden, welches dieselben vier festen selbstentsprechenden Punkte enthält, die das System S besitzt, und dessen auf Γ liegende Punkte die erstarrt gedachten Phasen der Curve C durchschreiten; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve Γ erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in S liegenden Systemcurve C gebildet wird.**

Die Bahncurven der Punkte einer Systemfläche eines bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems müssen, wie sich aus der Anschauung ergiebt, die von den Phasen der Systemfläche umhüllte Fläche, die wir die **Hüllbahnfläche** derselben nennen, berühren; jedoch kann hier der Fall eintreten, dass nicht alle Bahncurven eine reelle Berührung mit der Hüllbahnfläche eingehen, und von diesen Bahncurven wollen wir sagen, dass sie die genannte Fläche imaginär berühren. Hiernach gilt der Satz:

12. **Die Bahncurven der Punkte einer Systemfläche F eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems S können als die Phasen einer Systemcurve $\varDelta$ eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems Σ angesehen werden, welches dieselben vier festen selbstentsprechenden Punkte enthält, die das System S besitzt, und dessen auf $\varDelta$ liegende Punkte sich auf den erstarrt gedachten Phasen der Fläche F bewegen; und die Phasen der in Σ liegenden Systemcurve $\varDelta$ berühren die Hüllbahnfläche, welche von der in S liegenden Systemfläche F gebildet wird.**

Aus diesen allgemeinen fundamentalen Sätzen können wir leicht viele interessante Beziehungen und Sätze entnehmen, von denen wir nur die wichtigsten im Folgenden hervorheben.

13. **Sind vier Punkte eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest und bewegt sich ein Systempunkt auf einer Raumcurve n^{ter} Ordnung, so bewegen sich alle beweglichen Systempunkte auf Raumcurven n^{ter} Ordnung und erzeugen auf diesen Punktreihen, die sich in collinearen räumlichen Systemen entsprechen, welche die vier festen Punkte entsprechend gemein haben.**

13a. **Sind vier Ebenen eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest und umhüllt eine Systemebene eine Raumcurve n^{ter} Classe, so umhüllen alle beweglichen Systemebenen Raumcurven n^{ter} Classe und erzeugen an diesen Ebenensysteme, die sich in collinearen räumlichen Systemen entsprechen, welche die vier festen Punkte entsprechend gemein haben.***

Bewegt sich ein Systempunkt auf einer Geraden, so bewegen sich alle beweglichen Systempunkte auf Geraden und die gebildeten Punktreihen sind collinear; dreht sich eine Systemebene um eine Gerade, so drehen sich alle beweglichen Systemebenen um Gerade und die entstandenen Ebenenbüschel sind collinear. Bei der ersten Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems, welche wir geradlinige Bewegung desselben

---

* Aus unserer Darlegung und aus diesen Sätzen ergeben sich die Sätze, welche Herr Reye in Crelle's Journal Bd. 74, S. 9 und 13, mitgetheilt hat, als ganz specielle Fälle.

nennen wollen, umhüllt jede bewegliche Systemebene eine Raumcurve dritter Classe, für welche die vier festen Ebenen Schmiegungsebenen sind, und die Gesammtheit aller Bahngeraden bilden einen Strahlencomplex zweiten Grades.

Bei der zweiten Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems bewegt sich jeder bewegliche Systempunkt auf einer Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die vier festen Punkte geht, und die Gesammtheit aller Geraden, welche von den Systemebenen umhüllt werden, bilden einen Strahlencomplex zweiten Grades. Ferner können wir den Satz aussprechen:

14. Beschreibt eine Systemgerade eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung, so beschreiben alle beweglichen nicht in den selbstentsprechenden Ebenen liegenden Geraden Kegelflächen n^{ter} Ordnung.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier Phasen S_1, S_2 eines geradlinig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems S oder die Bahngeraden dieses Systems, welche einen Strahlencomplex zweiten Grades bilden, sind entsprechende Gerade in collinearen Systemen, welche die bei der Bewegung fest bleibenden vier Systemebenen als selbstentsprechende Ebenen besitzen. Wir erhalten demnach die bekannten Sätze:

15. Das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen die Geraden eines Strahlencomplexes zweiten Grades die Ebenen des festen selbstentsprechenden Tetraeders treffen, ist constant. Und umgekehrt: Ist das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen Gerade die Ebenen eines Tetraeders schneiden, constant, so bilden diese Geraden einen Strahlencomplex zweiter Ordnung.

15 *a*. Das Doppelverhältniss der vier Ebenen, welche durch Gerade eines Strahlencomplexes zweiten Grades und die Eckpunkte des festen selbstentsprechenden Tetraeders gehen, ist constant. Und umgekehrt: Ist das Doppelverhältniss der vier Ebenen, welche Gerade mit den Ecken eines Tetraeders verbinden, constant, so bilden die Geraden einen Strahlencomplex zweiter Ordnung.

Wir führen diese von Herrn H. Müller in den Math. Annalen Bd. I, S. 407 mitgetheilen Sätze nur an, um zu zeigen, dass sie als besondere Beziehungen aus unseren Hauptsätzen und Darlegungen hervorgehen. Die krummlinige Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems kann aus unendlich kleinen unendlich vielen geradlinigen Bewegungen zusammengesetzt angesehen werden, und demnach bilden die Tangenten an den Bahncurven in den Punkten einer Systemphase einen Strahlencomplex zweiten Grades. Ist bei einer einförmigen Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems die Tangente an der Bahncurve eines Systempunktes in einer Systemphase bekannt, so kann man alle übrigen Tangenten als entsprechende Gerade in collinearen Systemen, welche die festen Punkte als selbstentsprechende Punkte enthalten, bestimmen, und alle Tangenten erfüllen die in obigen Sätzen ausgesprochenen Beziehungen; ausserdem sind die durch die vier von jeder Tangente mit den festen Tetraederflächen erzeugten Schnittpunkte und den Berührungspunkt gebildeten fünfpunktigen Würfe collinear.

Bei der geradlinigen Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems entspricht jedem Systempunkte eine durch ihn gehende Bahngerade, nämlich die Verbindungsgerade der homologen Punkte zweier Systemphasen; alle Bahngeraden, welche durch einen Punkt gehen, bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung und die entsprechenden Systempunkte, die sich auf diesen Bahngeraden bewegen, liegen auf einer Raumcurve dritter Ordnung, deren Phasen die Kegelfläche erfüllen und durch die vier festen Punkte und durch die Kegelspitze gehen. Hiernach erhalten wir mit Beachtung der Umkehrung der Bewegung die Sätze:

16. Bei der geradlinigen Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems bewegen sich die Punkte einer durch die vier festen Punkte gehenden Systemraumcurve dritter Ordnung auf den Mantellinien einer Kegelfläche zweiter Ordnung, alle Curvenphasen liegen auf dieser Kegelfläche und schneiden sich in den vier festen Punkten und in der Spitze dieser Kegelfläche.

17. Bei der einförmigen Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems, dessen Punkte sich auf Bahncurven dritter Ordnung bewegen, die durch die vier festen Punkte gehen, erzeugt jede Systemgerade, welche nicht in den festen Ebenen liegt, eine Kegelfläche zweiter Ordnung, die durch die vier festen Punkte geht und deren Spitze der fünfte gemeinsame Schnittpunkt der auf ihr liegenden, von den Punkten der Geraden beschriebenen Raumcurven dritter Ordnung ist.

Da sich erforderlichenfalls neben den abgeleiteten Sätzen die reciproken Sätze von selbst ergeben, so wollen wir dieselben nicht mehr besonders hervorheben.

Betrachten wir die Kegelfläche K_x, welche von den durch einen Punkt D_x gehenden Bahngeraden gebildet wird und auf der die Raumcurve dritter Ordnung δ_x liegt, deren Punkte die genannten Geraden durchlaufen, als Phase einer zu dem veränderlichen System gehörenden Systemkegelfläche

K, so ist die Raumcurve δ_x die Curve, in der die Kegelfläche K_x die durch K erzeugte Hüllbahnfläche berührt.

Eine Systemgerade erzeugt bei der geradlinigen Bewegung eine Regelfläche zweiter Ordnung, deren eine Regelschaar durch die Phasen der Systemgeraden, deren andere durch die Bahngeraden der Punkte der Systemgebildet wird; und diese Regelschaaren vertauschen ihre Rolle bei der Umkehrung der Bewegung. Die erzeugte Regelfläche zweiter Ordnung schneidet jede der vier festen Ebenen des Tetraeders in zwei Geraden und berührt demnach diese Ebenen; denn wenn in einer Phase ein Systempunkt der beweglichen Geraden in eine Tetraederebene gelangt, so fällt die bewegliche Gerade in diese Ebene.

Die Gesammtheit aller durch eine Gerade g gehenden Bahngeraden berühren bekanntlich eine Complexfläche*, und die Systempunkte, welche sich auf diesen Geraden bewegen, erfüllen eine durch die vier festen Punkte gehende Regelfläche zweiter Ordnung. Denn betrachten wir die Gerade g zu einer Systemphase S_2 gehörend und bezeichnen wir sie demgemäss mit g_2, so entspricht dieser in einer andern Systemphase S_1 eine Gerade g_1. Legen wir durch g_2 eine Ebene e_2 und bestimmen zu dieser die Ebene e_1 in S_1 und zu der Schnittgeraden v_1 von e_1 und e_2 in e_2 die entsprechende Gerade v_2, so sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von v_1 und v_2, welche einen Kegelschnitt umhüllen, die in e_2 liegenden Bahngeraden, auf denen sich die Punkte der Systemgeraden v bewegen. Legen wir ferner durch die Gerade g_2 die Ebenen e'_2, $e''_2, \ldots$, dann erhalten wir in gleicher Weise die betreffenden Geraden v'_1, $v''_1, \ldots$ und diese erfüllen eine Regelfläche zweiter Ordnung, die durch g_1 und g_2 geht.

Daraus folgt der Satz:

18. Bei der geradlinigen Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems bewegen sich die Punkte einer die vier festen Punkte enthaltenden Regelfläche zweiter Ordnung auf Bahngeraden, die durch eine Gerade g gehen; alle Phasen dieser Regelfläche gehen durch die Gerade g und umhüllen eine Complexfläche, für welche g eine Doppelgerade ist.

Diese Regelfläche zweiter Ordnung geht in eine Kegelfläche zweiter Ordnung über, wenn die Gerade g selbst eine Bahngerade ist; und es lassen sich noch leicht viele interessante Beziehungen für besondere Lagen der Geraden g ableiten.

Bei der einförmigen krummlinigen Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems entspricht jedem Systempunkte eine durch ihn gehende Bahncurve; alle diese Bahncurven sind entsprechende Curven in collinearen räumlichen Systemen, welche die vier festen Punkte als selbst-

* Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Thl. I, S. 163 § 3.

entsprechende Punkte besitzen, und bilden in ihrer Gesammtheit einen Curvencomplex. Ferner entspricht jedem als fest angesehenen Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Systemcurve, deren Phasen diesen Punkt umhüllen. Diese Beziehung, welche in der Lie'schen Reciprocität* enthalten ist, führt zu wichtigen kinematisch-geometrischen Resultaten. Wir gedenken die weiteren Entwickelungen der collinear-veränderlichen räumlichen Systeme in einer andern Abhandlung mitzutheilen und wollen hier nur noch die bekannten Sätze über die in sich bewegten Curven und Flächen in Kürze aus unseren Hauptsätzen ableiten.

Legen wir durch vier Kanten des festen Tetraeders $OPQR$ (Fig. 9) und durch einen beliebigen Punkt H_x eine Fläche zweiter Ordnung, so wird diese in den Tetraederecken von den Tetraederebenen berührt und die beiden nicht auf dieser Fläche liegenden Tetraederkanten OR und PQ sind conjugirte Polaren dieser Fläche. Nehmen wir auf einer solchen Fläche noch einen beliebigen Punkt H_y an, so entspricht die Fläche sich selbst in den beiden durch die entsprechenden Punkte $OPQRH_x$ und $OPQRH_y$ bestimmten collinearen räumlichen Systemen, und daraus folgen die Sätze:

19. B e w e g t s i c h e i n S y s t e m p u n k t e i n e s e i n f ö r m i g b e w e g t e n c o l l i n e a r - v e r ä n d e r l i c h e n r ä u m l i c h e n S y s t e m s a u f e i n e r d u r c h v i e r s e l b s t e n t s p r e c h e n d e G e r a d e g e h e n d e n F l ä c h e z w e i t e r O r d n u n g, s o b e w e g t s i c h j e d e r i n d i e s e r F l ä c h e l i e g e n d e S y s t e m p u n k t a u f d e r s e l b e n, u n d d i e s e F l ä c h e, a l s S y s t e m f l ä c h e b e t r a c h t e t, b e w e g t s i c h i n s i c h s e l b s t.

20. B e i d e r e i n f ö r m i g e n B e w e g u n g e i n e s c o l l i n e a r - v e r ä n d e r l i c h e n r ä u m l i c h e n S y s t e m s b e w e g e n s i c h a l l e F l ä c h e n z w e i t e r O r d n u n g, w e l c h e d u r c h d i e s e l b e n v i e r s e l b s t e n t s p r e c h e n d e n G e r a d e n g e h e n, i n s i c h s e l b s t, w e n n e i n S y s t e m p u n k t s i c h a u f e i n e r s o l c h e n F l ä c h e b e w e g t.

Bewegt sich ein Systempunkt auf einer Geraden einer durch vier feste Tetraederkanten gehenden Fläche zweiter Ordnung, so bewegen sich alle auf dieser Fläche liegenden Systempunkte auf der Regelschaar, zu der diese Gerade gehört, und die Geraden dieser Regelschaar, als Systemgeraden angesehen, bewegen sich in sich selbst, während die andere Regelschaar wandelnd in sich selbst übergeht. Dasselbe gilt von allen durch dieselben vier Tetraederkanten gehenden Flächen zweiter Ordnung, demnach bewegen sich in diesem Falle alle Systempunkte auf Geraden, welche dieselben beiden gegenüberliegenden Tetraederkanten treffen, und die Gesammtheit aller Geraden, die zwei andere gegenüberliegende Tetraederkanten schneiden, geht in sich selbst über. Bewegt sich ein Systempunkt auf einer Bahngeraden, welche zwei feste gegenüberliegende Tetraederkanten schnei-

* L i e, Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen; Math. Annalen Bd. V, S. 155.

det, und betrachten wir eine durch die vier anderen festen Tetraederkanten gehende Fläche zweiter Ordnung als Systemfläche, so bilden die Phasen dieser Fläche ein Flächenbüschel zweiter Ordnung, und auf jeder Bahngeraden sind die Schnittpunkte, welche dieselbe mit den erstgenannten Tetraederkanten und einer Flächenphase bildet, vier harmonische Punkte.

Nehmen wir zwei unendlich nahe Punkte A_1, A_2 im Raume an, dann sind durch diese und durch die festen Punkte $OPQR$ zwei unendlich nahe Phasen S_1, S_2 eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems S bestimmt. Betrachten wir A_2 als einen zu S_1 gehörenden Punkt und bezeichnen wir ihn demgemäss mit B_1, dann entspricht diesem ein unendlich naher Punkt B_2 in S_2; sehen wir jetzt B_2 als zu S_1 gehörend an und bezeichnen wir ihn als solchen mit C_1, dann entspricht diesem in S_2 ein unendlich naher Punkt C_2 u. s. w. Die so erhaltenen Punkte A_1, $B_1{}^{\bullet}A_2$, $C_1{}^{\bullet}B_2$, $D_1{}^{\bullet}C_2$, ... bilden eine Raumcurve, welche, zu S_1 gehörend angesehen, in sich selbst übergeht, wenn der Systempunkt A die Lagen A_1, $B_1{}^{\bullet}A_2$, $C_1{}^{\bullet}B_2$, ... einnimmt und S aus der Phase S_1 in S_2, S_3 u. s. w. gelangt. Bewegt sich ein Systempunkt von S auf einer solchen Bahncurve, die, als Systemcurve betrachtet, sich in sich selbst bewegt, so bewegen sich alle Systempunkte auf solchen Curven und eine Systemcurve erzeugt während dieser Bewegung eine Bahnfläche, die, als Systemfläche angesehen, sich in sich selbst bewegt.

Diese Curven und Flächen, welche sich als Folgerungen unserer Hauptsätze ergeben, wurden von den Herren Klein und Lie* zuerst behandelt und als W-Curven und W-Flächen bezeichnet; wir wollen sie ihrer Entstehung gemäss Selbsthüllcurven und Selbsthüllflächen nennen. Die Tangenten einer Selbsthüllcurve sind Gerade eines Strahlencomplexes, dessen Geraden die festen Tetraederebenen in vier Punkten treffen, die ein constantes Doppelverhältniss bilden; denn eine unendlich kleine krummlinige Bewegung können wir als eine geradlinige und die Punkte einer Selbsthüllcurve als Systempunkte in einer bestimmten Systemphase liegend ansehen. So lassen sich in gleicher Weise alle projectivischen Eigenschaften der Selbsthüllcurven und Selbsthüllflächen aus den oben aufgestellten Hauptsätzen ableiten. Wenn wir statt der beiden unendlich nahen Punkte A_1, A_2 zwei unendlich nahe Ebenen e_1, e_2 nehmen, dann erhalten wir durch analoge Behandlung die reciproken Beziehungen.

Nehmen wir die beiden unendlich nahen Punkte A_1, A_2 auf einer durch vier feste Tetraederkanten gehenden Fläche zweiter Ordnung an, die nach Obigem eine specielle Selbsthüllfläche ist, so erhalten wir eine auf dieser

---

* *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, *Comptes rendus* 1870, *I*, p. 1223, 1275.

Fläche liegende Selbsthüllcurve, welche Herr **Lindemann*** eine projectivische Schraubenlinie nennt. Eine auf einer solchen Selbsthüllfläche liegende Raumcurve dritter Ordnung, welche zwei Geraden einer Regelschaar, etwa die Geraden PR und QO (Fig. 9), resp. in den Punkten R und O berührt, ist durch noch einen Punkt X_1 der Selbsthüllfläche zweiter Ordnung bestimmt, und nehmen wir auf dieser Raumcurve dritter Ordnung einen Punkt X_2 an, dann ist dieselbe eine selbstentsprechende Curve in den durch die entsprechenden Punkte $OPQRX_1$ und $OPQRX_2$ bestimmten collinearen Systemen und demnach eine specielle Selbsthüllcurve.

Legen wir durch eine nicht auf jener Selbsthüllfläche liegende feste Tetraederkante, etwa durch OR, eine Ebene E, so ist der Kegelschnitt w, den sie mit der Fläche bildet, eine Selbsthüllcurve; denn nehmen wir auf w zwei beliebige Punkte Y_1 und Y_2 als entsprechend an, so entspricht der Kegelschnitt w und die Ebene E sich selbst in den collinearen Systemen $OPQRY_1$ und $OPQRY_2$. Hieraus folgt:

Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems auf einem Kegelschnitt, der durch zwei selbstentsprechende Punkte einer festen Tetraederkante geht und bei dem diese Kante zugleich die Polare des von der Kegelschnittebene mit der gegenüberliegenden Tetraederkante gebildeten Punktes ist, so bewegen sich alle Systempunkte auf solchen Kegelschnitten und die Ebenen derselben, welche alle durch jene Tetraederkante gehen, bewegen sich in sich selbst.

Bei einem starren räumlichen System ist das Analogon dieser Bewegung eine Drehung um eine Axe, auf der die in sich selbst bewegten Ebenen senkrecht stehen; jene Kegelschnitte werden dann durch Kreise und jene speciellen Selbsthüllflächen durch coaxiale Kreiscylinderflächen vertreten.

Nehmen wir in einem einförmig bewegten collinear-veränderlichen System S einen Strahlencomplex C an, dessen Gerade mit dem festen Tetraeder ein constantes Doppelverhältniss bilden, und betrachten wir zwei Gerade g_1, g_2 des Strahlencomplexes als entsprechende Gerade zweier Systemphasen S_1, S_2, dann decken sich die Phasen C_1, C_2 des Strahlencomplexes C, und demnach geht derselbe wandelnd in sich selbst über. Die Geraden g_1, g_2 bilden, weil sie zu dem Strahlencomplex gehören, gleiche Doppelverhältnisse mit dem festen Tetraeder, und demnach gilt dasselbe von allen Geraden der beiden Complexphasen C_1, C_2. Wir erhalten hieraus den Satz:

20. **Bewegt sich eine Systemgerade eines einförmig bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systems so, dass sie mit Geraden eines Strahlencomplexes zusammenfällt, welche mit dem festen Tetraeder ein constantes Doppelverhältniss bilden, so geht dieser Strahlencomplex, wenn**

* a. a. O.

er zu dem System gehörend angesehen wird, in sich selbst über*.

C. Kreisverwandt-veränderliche ebene Systeme.

Zwei ebene Systeme heissen kreisverwandt**, wenn jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des andern dergestalt entspricht, dass von je vier Punkten des einen Systems, welche in einem Kreise liegen, die vier entsprechenden im andern gleichfalls in einem entsprechenden Kreise liegen und dass der Winkel, unter dem sich zwei Kreise in einem System schneiden, in Grösse und festgestelltem Sinne gleich dem Winkel ist, welchen die entsprechenden Kreise im andern System bilden.

Nehmen wir in den kreisverwandten Systemen S_1, S_2 (Fig. 10), welche in einer Ebene liegen, drei Paare entsprechender Punkte A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 an, so sind die Systeme nach der gegebenen Definition bestimmt und wir können zu jedem vierten Punkte D_1 den entsprechenden D_2 bestimmen. Wir beschreiben durch $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ resp. die Kreise k_1 und k_2, ferner die Kreise h_1, i_1, welche beziehungsweise durch $A_1 C_1 D_1$ und $B_1 C_1 D^1$ gehen, ziehen den durch $A_2 C_2$ gehenden Kreis h_2, der k_2 unter dem Winkel schneidet, dessen Grösse und Sinn gleich dem von h_1 und k_1 gebildeten Winkel ist. In gleicher Weise bestimmen wir den Kreis i_2, der i_1 entspricht, dann ist der nicht auf k_2 liegende eindeutig bestimmte Schnittpunkt D_2 der Kreise h_2, i_2 im System S_2 der entsprechende Punkt von D_1 im System S_1. Aus dieser Construction folgt, dass die Winkel, welche die Kreispaare $h_1 i_1$ und $h_2 i_2$, sowie die durch $A_1 B_1 D_1$ und $A_2 B_2 D_2$ gehenden Kreise mit den entsprechenden anderen Kreisen bilden, in Grösse und Sinn in beiden Systemen beziehungsweise gleich sind; dadurch ist dann die Realität der in der Definition gegebenen Kreisverwandtschaft bestätigt. Da jeder durch drei unendlich naheliegende Curvenpunkte gehende Kreis ein Krümmungskreis der Curve ist, so sind die Krümmungskreise entsprechender Punkte zweier kreisverwandter Curven entsprechende Kreise in den kreisverwandten Systemen, denen diese Curven angehören, und der Winkel, unter dem sich zwei Curven in einem System schneiden, ist gleich dem Winkel, unter welchem sich die entsprechenden Curven im andern System treffen.

---

* Lie, Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes, Göttinger Nachrichten 1870, II.

** Möbius, Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren (Berichte über die Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1853, S. 14). Möbius, Theorie der Kreisverwandtschaft (Abhandlungen der mathemat. Classe der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Bd. II, S. 531). *Magnus*, *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie* (Crelle's Journal Bd. 8). Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, 1833, Bd. I, S. 236 und 290.

Liegt der Punkt D_1 (Fig. 10 a) auf dem Kreise k_1, dann erhalten wir zu jedem vierten Punkte D_1 auf k_1 wegen des eindeutigen Entsprechens dem entsprechenden Punkt D_2 auf k_2 mittels zwei perspectivisch liegender Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte s_1 und s_2 in den Schnittpunkten liegen, welche eine Verbindungsgerade entsprechender Punkte, etwa A_1, A_2, mit den Kreisen k_1, k_2 bildet. Liegt ein Punkt U_1 des Systems S_1 im Unendlichen, dann sind die durch $A_1 C_1 U_1$ und $B_1 C_1 U_1$ gehenden Kreise h_1, i_1 Gerade, Kreise mit unendlich grossem Radius, und die entsprechenden Kreise h_2, i_2 liefern im System S_2 den im Endlichen liegenden Punkt U_2, der U_1 entspricht. Diese Bestimmung gilt aber für jeden andern Punkt, der einem unendlich fernen Punkte entspricht; demnach entspricht allen im Unendlichen liegenden Punkten des Systems S_1 der eine Punkt U_2 im System S_2, und umgekehrt entsprechen dem Punkte U_2 in S_2 alle unendlich fernen Punkte in S_1, also nicht ein einziger Punkt. Da aber nach unserer Definition jedem Punkte ein Punkt entsprechen soll, so wollen wir sagen: allen unendlich fernen Punkten in S_1 entsprechen die Punkte eines unendlich kleinen Kreises U_2 in S_2, den wir den G e g e n p u n k t k r e i s nennen. Darnach entsprechen den unendlich fernen Punkten in einem System die Punkte des Gegenpunktkreises im andern. Jeder Geraden in einem System entspricht, weil sie einen unendlich fernen Punkte enthält, im andern System einem durch den Gegenpunktkreis oder Gegenpunkt desselben gehenden Kreise. Hieraus folgt, dass jedem durch den Gegenpunkt eines Systems gehenden Kreise eine Gerade im andern System entspricht, und dass ebenso jeder durch den Gegenpunkt eines Systems gehenden Geraden eine Gerade im andern System entspricht. Die entsprechenden Punktreihen auf entsprechenden Kreisen und Geraden sind wegen des eindeutigen Entsprechens collinear.

Es seien in Fig. 11 in den Systemen S_1, S_2 die Punkte V_1, U_2 die Gegenpunkte und g_1, g_2 entsprechende, durch die Gegenpunkte gehende Gerade, auf denen A_1, A_2 entsprechende Punkte sind. Ziehen wir durch V_1 in S_1 eine zweite Gerade g'_1 und bezeichnen wir den Winkel, welchen $g_1 g'_1$ bilden, mit ν, so entspricht derselben in S_2 eine durch U_2 gehende Gerade g'_2, die mit g_2 denselben Winkel ν einschliesst. Die entsprechenden Punktreihen auf g_1 und g_2 sind durch die drei Paare entsprechender Punkte A_1, V_1, U_1 und A_2, V_2, U_2, von denen U_1, V_2 im Unendlichen liegen, bestimmt, und zu einem vierten Punkte B_1 auf g_1 erhalten wir auf bekannte Weise den entsprechenden Punkt B_2 auf g_2. Beschreiben wir durch $A_1 B_1$ und durch einen beliebigen Punkt A'_1 auf g'_1 einen Kreis k_1, dessen zweiter Schnitt mit g'_1 der Punkt B'_1 sein möge, so liefert der entsprechende Kreis k_2, der durch A_2, B_2 geht und die Gerade g_2 unter demselben Winkel wie k_1 die Gerade g_1 schneidet, auf g'_2 die Schnittpunkte A'_2, B'_2, welche den Punkten A'_1, B'_1 entsprechen. Da nun bekanntlich bei den collinearen Punktreihen, deren Gegenpunkte V_1, U_2 sind:

$$V_1 A_1 \,.\, U_2 A_2 = V_1 B_1 \,.\, U_2 B_2,$$
$$U_1 A'_1 \,.\, U_2 A'_2 = V_1 B'_1 \,.\, U_2 B'_2$$

ist und da ferner die Gleichungen

$$V_1 A_1 \,.\, V_1 B_1 = V_1 A'_1 \,.\, V_1 B'_1,$$
$$U_2 A_2 \,.\, U_2 B_2 = U_2 A'_2 \,.\, U_2 B'_2$$

bestehen, so folgt durch Multiplication der beiden letzten und mit Beachtung der beiden ersten Gleichungen

$$\frac{V_1 A_1}{V_1 A'_1} = \frac{U_2 A'_2}{U_2 A_2}, \quad \frac{V_1 B_1}{V_1 B'_1} = \frac{U_2 B'_2}{U_2 B_2}.$$

Demnach sind die Dreiecke $V_1 A_1 A'_1$ und $U_2 A'_2 A_2$, sowie $V_1 B_1 B'_1$ und $U_2 B'_2 B_2$ ähnlich.

Mit Hilfe dieser Beziehungen können wir sehr leicht entsprechende Punkte in kreisverwandten Systemen S_1, S_2, in denen die Gegenpunkte V_1, U_2 und zwei entsprechende Punkte A_1, A_2 gegeben sind und der Sinn eines Winkelpaares festgestellt ist, construiren. Wir erhalten z. B. in Fig. 11 zu dem Punkte B'_1 in S_1 den entsprechenden Punkt B'_2 in S_2, indem wir das Dreieck $U_2 B'_2 A_2$ construiren, welches dem Dreieck $V_1 A_1 B'_1$ ähnlich ist. Der Sinn des Winkels ν ist hierbei noch willkürlich anzunehmen; sobald dieser aber festgestellt ist, sind die entsprechenden kreisverwandten Systeme S_1, S_2 bestimmt. In gleicher Weise erhalten wir zu einem Punkte C_1 in S_1 den entsprechenden C_2 in S_2, wenn wir das Dreieck $U_2 C_2 A_2$ ähnlich dem Dreieck $V_1 A_1 C_1$ machen. Aus dieser Bestimmung folgt, dass jedem um V_1 als Mittelpunkt beschriebenen Kreise in S_1 ein Kreis, dessen Mittelpunkt U_2 ist, in S_2 entspricht und dass allen Punkten, welche in einem System innerhalb eines solchen Kreises liegen, im andern System Punkte entsprechen, die ausserhalb des entsprechenden Kreises liegen.

Sind $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ entsprechende Punkte in den kreisverwandten Systemen S_1, S_2, deren Gegenpunkte V_1, U_2 sind, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken

$$\begin{aligned}
&V_1 A_1 B_1 \sim U_2 B_2 A_2, && A_1 B_1 : V_1 B_1 = B_2 A_2 : U_2 A_2,\\
&V_1 B_1 C_1 \sim U_2 C_2 B_2, && V_1 B_1 : B_1 C_1 = U_2 C_2 : C_2 B_2,\\
&V_1 C_1 D_1 \sim U_2 D_2 C_2, && C_1 D_1 : V_1 D_1 = D_2 C_2 : U_2 C_2,\\
&V_1 D_1 A_1 \sim U_2 A_2 D_2, && V_1 D_1 : D_1 A_1 = U_2 A_2 : A_2 D_2,
\end{aligned}$$

und diese Proportionen liefern die Gleichung

$$\frac{A_1 B_1 \,.\, C_1 D_1}{B_1 C_1 \,.\, D_1 A_1} = \frac{A_2 B_2 \,.\, C_2 D_2}{B_2 C_2 \,.\, D_2 A_2},$$

welche die Gleichheit der durch vier Paare entsprechender Punkte zweier kreisverwandter Systeme bestimmten Doppelverhältnisse ausdrückt.

Nehmen wir an, es seien in den kreisverwandten Systemen S_1, S_2 (Fig. 12) g_1, g_2 zwei entsprechende Gerade, welche resp. durch die Gegenpunkte V_1, U_2 dieser Systeme gehen; dann umhüllen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Geraden einen Kegelschnitt s, dessen

Brennpunkte wir mit O und P bezeichnen wollen. Verbinden wir nun den einen Brennpunkt, etwa O, mit den Gegenpunkten V_1, U_2 und mit zwei entsprechenden Punkten A_1, A_2 der Geraden g_1, g_2; dann sind die Dreiecke $V_1 A_1 O$ und $U_2 O A_2$ ähnlich. Da V_1 und U_2 Gegenpunkte der auf g_1, g_2 liegenden entsprechenden collinearen Punktreihen sind, so ist die Kegelschnittstangente $V_1 t$ parallel g_2 und die Kegelschnittstangente $U_2 t'$ parallel g_1, die Punkte V_1, U_2 liegen auf einem Durchmesser des Kegelschnitts ε und OU_2 ist parallel PV_1 und demnach ist Winkel $PV_1 t = OU_2 A_2 = OV_1 A_1$. Ziehen wir $O\pi$ parallel g_2, dann ist Winkel $O A_2 U_2 = \pi O A_2$; und da bekanntlich der Winkel $V_1 O \pi = A_1 O A_2$, so folgt, dass auch Winkel $V_1 O A_1 = U_2 A_2 O$ ist. Damit ist die Aehnlichkeit der obengenannten Dreiecke bewiesen. In gleicher Weise ergiebt sich, dass auch die Dreiecke $V_1 A_1 P$ und $U_2 P A_2$ ähnlich sind und folglich sind die Brennpunkte O und P des Kegelschnittes ε selbstentsprechende Punkte der kreisverwandten Systeme S_1, S_2. Zwei kreisverwandte, in gleichem Sinne liegende Systeme können nur zwei selbstentsprechende Punkte besitzen, denn wenn drei solcher Punkte vorhanden sind, so tritt Deckung der Systeme ein. Wir erhalten demnach den Satz:

21. Die beiden selbstentsprechenden Punkte zweier kreisverwandter ebener Systeme sind die Brennpunkte desjenigen Kegelschnittes, der von den Verbindungsgeraden zweier entsprechender gerader Punktreihen der Systeme umhüllt wird.

Nach diesem Satze, den Herr Siebeck (Grun. Archiv 1859, S. 470) mitgetheilt hat, können wir die beiden selbstentsprechenden Punkte zweier kreisverwandter Systeme stets bestimmen*. Ist der Kegelschnitt ε eine Parabel, dann liegt der eine Brennpunkt im Unendlichen und in diesem Falle geht die Kreisverwandtschaft in Aehnlichkeit über. Ein ebenes System, welches sich in seiner Ebene derart ändert, dass alle seine Phasen kreisverwandt sind, wollen wir ein kreisverwandt-veränderliches ebenes System nennen.

Nehmen wir an, es seien O, P die selbstentsprechenden Punkte der kreisverwandten ebenen Systeme S_1, S_2, S_3, ..., und weisen wir einem beliebigen Systempunkte A_1 in S_1 die beliebigen entsprechenden Punkte A_2, A_3, ... beziehungsweise in S_2, S_3, ... zu, so sind diese Systeme bestimmt und wir können zu jedem vierten Punkte B_1 in S_1 die entsprechenden B_2,

* Auch von Herrn Bellavitis ist eine fast gleichartige Bestimmung der selbstentsprechenden Punkte angegeben. Wenn man den Kegelschnitts-Mittelpunkt M in Fig. 12 mit dem Durchschnitte der Geraden $g_1 g_2$ verbindet und auf dieser L so besimmt, dass $\overline{ML}^2 = V_1 A_1 \cdot U_2 A_2$ ist, so sind ML und MU_2 conjugirte Halbmesser eines Kegelschnittes, dessen Brennpunkte O, P die selbstentsprechenden Punkte repräsentiren. *Exposition de la méthode des équipollences par Giusto Bellavitis, traduit de l'italien par Laisant, Paris* 1874, § 25. Ferner in *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1873, *p.* 542.

$B_2, \ldots$ in $S_2, S_3, \ldots$ in der oben angegebenen Weise bestimmen. Betrachten wir diese Systeme $S_1, S_2, S_3, \ldots$ als Phasen eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems S, in dem die beiden Systempunkte O, P, die wir **Verwandtschaftspole** nennen, fest sind; und nehmen wir an, ein Systempunkt A bewege sich auf einer Bahncurve a, so durchschreitet auch jeder andere nicht feste Systempunkt B eine Bahncurve b. Denken wir uns die Gesammtheit aller Systemphasen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ durch Inversion (reciproke Radien) in Bezug auf einen der selbstentsprechenden Punkte oder Verwandtschaftspole, etwa P, als Inversionscentrum in die verwandten Systeme $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots$ verwandelt, so haben alle diese Phasen den entsprechenden Punkt O' von O und die unendlich ferne Gerade, welche dem Punkte P entspricht, entsprechend gemein; demnach können wir, da die Winkel durch Inversion nicht geändert werden, die Systeme $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots$ als Phasen eines einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S' ansehen, in dem der Punkt O' der Aehnlichkeitspol ist. Hiernach können wir die Beziehungen, welche bei der Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems S' auftreten, auf die Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems S übertragen; und wir wollen auch hier die Bewegung des Systems S, bei dem zwei Punkte fest sind, die **einförmige** Bewegung desselben nennen. Da bei der einförmigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems alle Bahncurven ähnliche Curven in ähnlichen Systemen sind, welche den Aehnlichkeitspol entsprechend gemein haben; und da die Verbindungsgeraden aller Punkte einer Phase eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems mit dem Aehnlichkeitspol der Phase gleiche Winkel mit den Tangenten der Bahncurven dieser Punkte bilden, so erhalten wir durch Uebertragung die Sätze:

22. **Sind zwei Punkte eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in kreisverwandten Systemen, welche diese festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.**

23. **Alle Kreise, welche durch die beiden Verwandtschaftspole und durch die Punkte einer Systemphase gehen, schneiden die Bahncurven dieser Punkte unter gleichem Winkel.**

Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems auf einem Kreise, so bewegen sich alle beweglichen Systempunkte auf Kreisen und erzeugen auf diesen projectivische Punktreihen. Diesen besondern Fall der einförmigen Bewegung wollen wir die **kreislinige** Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems nennen. Unter jenen Bahnkreisen können auch Gerade, d. h. Kreise mit unendlich grossem Radius vorkommen. Geht ein Bahnkreis durch einen oder beide

Verwandtschaftspole, so gehen alle Bahnkreise durch den einen oder durch beide.

Um uns von der kreislinigen Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen Systems eine klare Vorstellung zu bilden, betrachten wir zunächst die kreislinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems S'. Es sei in Fig. 13 *a* O' der Aehnlichkeitspol dieses Systems, k' ein Systemkreis, dessen Mittelpunkt M' sich auf dem Bahnkreise m' bewegt; dann beschreiben alle Systempunkte des Kreises k' Bahnkreise, und die Curve, welche die Phasen des Kreises k' umhüllen, wird auch von diesen Bahnkreisen umhüllt. Diese Hüllbahncurve, die wir mit $\varkappa'$ bezeichnen, ist, wie Quetelet* bewiesen hat, die unter dem Namen Cartesisches Oval bekannte Curve. Ist k'_x eine beliebige Phase des Kreises k', so erhalten wir die beiden Punkte A'_x, B'_x, in denen k'_x die Curve $\varkappa'$ berührt, nach der in der ersten Mittheilung** angegebenen Construction, wenn wir in M'_x an den Bahnkreis m', dessen Mittelpunkt m_0 ist, eine Tangente ziehen und einen durch O' und M'_x gehenden Kreis ι'_x, dessen Mittelpunkt auf dieser Tangente liegt, beschreiben. Dieser Kreis schneidet k'_x in den Berührungspunkten A'_x, B'_x, die Tangente an M'_x in einem Punkte r; und die Geraden $A'_x r$, $B'_x r$ sind die Tangenten in diesen Punkten an dem Cartesischen Oval $\varkappa'$. Die Kreise ι'_x, welche auf den Kreisphasen k'_x die Berührungspunkte bestimmen, bilden, weil sie den Bahnkreis m' rechtwinklig schneiden und durch O' gehen, ein Büschel von Kreisen, die sich in den Punkten O' und $\mathfrak{O}'$ schneiden, welche auf der Symmetralgeraden $O'm_0$ des cartesischen Ovals liegen und den Durchmesser des Kreises m' harmonisch theilen. Ziehen wir die Gerade $A'_x B'_x$, die $O'm'_0$ in Ω' trifft, so lässt sich leicht nachweisen, dass für alle Kreisphasen die Geraden $A'_x B'_x$ durch den festen Punkt Ω' gehen. Da die Punkte O', $\mathfrak{O}'$ den Durchmesser des Kreises m' harmonisch theilen, so ist das Verhältniss $O'M'_x : \mathfrak{O}'M'_x$ constant; das Gleiche gilt von dem Verhältnisse $O'M'_x : B'_x M'_x$, weil k'_x eine Kreisphase ist, und demnach auch

$$\frac{\mathfrak{O}' M'_x}{B'_x M'_x} = const.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Projectionen $M'_x i$, $M'_x h$ der Kreissehnen $M'_x B'_x$, $M'_x \mathfrak{O}'$ auf den Kreisdurchmesser $M'_x r$ in constantem Verhältniss stehen, und demnach ist der Schnittpunkt Ω' der Geraden $B'_x C'_x$ auf $O'm_0$ ein fester Punkt. Kehren wir nun die Bewegung um, betrachten wir die Bahnkreise als Kreisphasen und die Kreisphasen k_x als Bahnkreise, dann ist $\varkappa'$ wieder die Hüllbahncurve und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, welche die Kreisphasen, deren Mittelpunkte auf einem mit m' concentrischen Kreise m'' liegen, bei dieser zweiten Bewegung mit $\varkappa'$

* *Supplément au traité de la lumière de Herschel, par Quetelet. Tom. II, p.* 399. *Paris* 1833.

** Zeitschr. f. Math u. Phys. Bd. 19, S. 166.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

bilden, gehen, wie sich in gleicher Weise darlegen lässt, durch den festen Punkt $\mathfrak{O}'$. Das Cartesische Oval besteht aus zwei Ovalen, wie die Fig. 13a zeigt; bei der ersten Erzeugungsweise berührt das grosse und das kleine Oval die Phasen des erzeugenden Kreises ausserhalb; bei der zweiten berührt das grosse Oval die Phasen des erzeugenden Kreises ausserhalb, das kleine dieselben innerhalb. Es lässt sich leicht nachweisen, dass es noch eine dritte Erzeugungsweise giebt, bei der die Kreisphasen nicht von beiden Ovalen zugleich berührt werden, sondern erst von dem einen, etwa dem grossen Oval, allein ausserhalb und dann von dem kleinen allein innerhalb. Bei dieser dritten Erzeugungsweise geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der Kreisphasen durch den festen Punkt O' und die Mittelpunkte derselben liegen auf einem mit m' cencentrischen Kreise m'''. Die drei Punkte O', $\mathfrak{O}'$, Ω' sind die drei Brennpunkte des Cartesischen Ovals*. Sie besitzen die Eigenschaft, dass, wenn ϱ und ϱ' die Entfernungen eines Curvenpunktes von zweien dieser Brennpunkte und a, b, c Constante bezeichnen:

$$a\varrho \pm b\varrho' = c$$

ist**.

Da die Verhältnisse $M'_x O' : M'_x \mathfrak{O}'$ und $M'_x O' : M'_x B'_x$ constant sind, so gilt dasselbe auch von $M'_x \mathfrak{O}' : M'_x B'_x$, und daraus folgt, dass wir auch den Punkt $\mathfrak{O}'$ als den Aehnlichkeitspol eines ähnlich-veränderlichen Systems ansehen können, in dem der Systemkreis k' die Hüllbahncurve $\varkappa'$ erzeugt, wenn sein Mittelpunkt den Kreis m' durchläuft. Bei der ersten der obengenannten Erzeugungsweisen des cartesischen Ovals $\varkappa'$ können wir also jeden der Brennpunkte O', $\mathfrak{O}'$ als Aehnlichkeitspol betrachten; ebenso zeigt sich, dass bei der zweiten Erzeugungsweise jeder der Brennpunkte O', Ω' und bei der dritten jeder der Brennpunkte $\mathfrak{O}'$, Ω' als Aehnlichkeitspol angesehen werden kann.

Ziehen wir von Ω' an Kreis k'_x eine Tangente $\Omega' T$, dann ist

$$\overline{\Omega' T}^2 = \Omega' A'_x \, . \, \Omega' B'_x = \Omega' \mathfrak{O}' \, . \, \Omega' O' = const.,$$

und folglich schneiden alle Kreisphasen k'_x den um Ω' mit dem Radius $\Omega' T$ beschriebenen Kreis t' rechtwinklig. Demnach können wir das Cartesische Oval $\varkappa'$ auch als die Enveloppe eines veränderlichen, den Kreis t' rechtwinklig schneidenden Kreises k' betrachten, dessen Mittelpunkt sich auf den Kreis m' bewegt. Der zweiten der obgenannten Erzeugungsweise entspricht in dieser Hinsicht in unserer Figur ein imaginärer Kreis t' und der dritten wieder ein reeller Kreis τ', dessen Mittelpunkt O' ist.

Uebertragen wir die kreislinige Bewegung des betrachteten ähnlich-veränderlichen Systems S' durch Inversion für einen beliebigen Punkt P als Inversionscentrum, so erhalten wir die **kreislinige** Bewegung eines kreis-

* **Chasles**, Geschichte der Geometrie, deutsch von **Sohncke**. 1839. S. 373.

** **Salmon**, Höhere Curven, deutsch von **Fiedler**. Leipzig 1873. S. 311.

verwandt-veränderlichen Systems S, und umgekehrt können wir diese Bewegung durch Inversion stets in die kreislinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems umwandeln, wenn wir einen der festen Verwandtschaftspole als Inversionscentrum nehmen. Bei der Umwandlung des ähnlich-veränderlichen Systems S' in das kreisverwandt-veränderliche S entspricht dem Cartesischen Oval $\varkappa'$ eine kreisverwandte Curve $\varkappa$ (Fig. 13*b*), welche eine bicirculare Curve vierter Ordnung ist und die wir das Cartesische Inversionsoval nennen wollen*. Die Punkte O, $\mathfrak{O}$, Ω, welche resp. den Brennpunkten O', $\mathfrak{O}'$, Ω' des Cartesischen Ovals $\varkappa'$ entsprechen, liegen mit P auf einem Kreise und sind auch Brennpunkte für das cartesische Inversionsoval $\varkappa$. Zu diesen tritt noch der Punkt P als vierter Brennpunkt der Curve $\varkappa$, denn P und O sind die Verwandtschaftspole des kreislinig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems S; und wegen der Symmetrie der Bewegung dieses Systems in Bezug auf diese Pole muss auch P in gleicher Beziehung zu der Curve $\varkappa$ stehen wie O. Hiernach erhalten wir den Satz:

24. Bei der kreislinigen Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems ist die Hüllbahncurve $\varkappa$ eines Systemkreises k ein Cartesisches Inversionsoval, und die vier Brennpunkte O, $\mathfrak{O}$, Ω, P desselben liegen auf einem Kreise.

Wir betrachten die Punkte O, P (Fig. 13*a*) als Verwandtschaftspole eines kreislinig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems S, in dem k ein Systemkreis ist, dessen einer Punkt C sich auf einem gegebenen Kreise c bewegt, und nehmen eine Kreisphase k_x und den auf ihr liegenden Punkt C_x auf c an und bezeichnen die betreffende Systemphase mit S_x. Hierdurch ist die kreislinige Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems S bestimmt, und wir erhalten durch Inversion in Bezug auf einen der Pole, etwa auf P, in Fig. 13*b* ein entsprechendes ähnlich-veränderliches System S', dessen Aehnlichkeitspol O' der entsprechende Punkt von O, dessen Systempunkt C' sich auf den Bahnkreis c' bewegt, der dem Kreise c entspricht und dessen Phase S'_x der Phase S_x entspricht. Durch Uebertragung der übertragbaren Beziehungen, welche bei der uns schon bekannten kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems S auftreten, gelangen wir zur näheren Erkenntniss der kreislinigen Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems S.

---

* Die Hüllbahncurven $\varkappa'$ und $\varkappa$ gehören zu den anallagmatischen Curven, welche Herr De la Gournerie (Liouv. Journal 1869, S. 37) behandelt hat. Die anallagmatischen Curven sind die Hüllbahncurven eines veränderlichen Kreises, dessen Mittelpunkt sich auf einer festen Curve bewegt und der einen Kreis beständig rechtwinklig schneidet; demnach gehen die anallagmatischen Curven durch Inversion bezüglich des festen Kreises in sich selbst über.

In Fig. 13a giebt es noch eine Systemphase S'_w, deren Punkte mit den entsprechenden Punkten der Phase S'_x auf Geraden liegen, die durch den Aehnlichkeitspol O' gehen; solche zwei Phasen, deren es unendlich viele Paare giebt, wollen wir zugeordnete Phasen nennen, und in je zwei zugeordneten Phasen entsprechen die durch den Aehnlichkeitspol gehenden Geraden sich selbst. Von diesen Phasen zeichnen sich zwei Paare dadurch aus, dass jedes dieser beiden Phasenpaare in eine Phase zusammenfällt. Beschreiben wir durch zwei auf einer beliebigen durch O' gehenden Geraden liegende, nicht entsprechende Punkte C'_x, $\mathfrak{C}'_w$ und $\mathfrak{C}'_x$, C'_w der zugeordneten Kreisphasen k'_x, k'_w Kreise, die durch einen beliebigen Punkt, für unsern Zweck durch P, gehen, so schneiden sich diese Kreise noch in einem auf $O'P$ liegenden Punkte F', der für alle durch O' gehende Gerade und für alle zugeordnete Kreisphasen derselbe ist; denn es ist für jede durch O' gehende Gerade und für jedes Paar zugeordneter Kreisphasen

$$O'F'.O'P = O'\mathfrak{C}'_w.O'C'_x = O'C'_w.O'\mathfrak{C}'_x.$$

Betrachten wir die Bahnkreise als Kreisphasen und die Kreisphasen als Bahnkreise, so findet dieselbe Beziehung statt, und ferner zeigt sich, dass auch die Brennpunkte $\mathfrak{O}'$, Ω' auf einem durch F', P gehenden Kreise liegen, weil

$$O'F'.O'P = O'\mathfrak{O}'.O'\Omega'$$

ist.

Den durch F', P gehenden Kreisen entsprechen in der Fig. 13b Gerade, die durch den auf OP liegenden Punkt F, der F' entspricht, gehen. Demnach ist F der gemeinschaftliche Aehnlichkeitspunkt für je zwei zugeordnete Kreisphasen k_w, k_x im kreisverwandt-veränderlichen System S und für je zwei als zugeordnete Kreisphasen betrachtete Bahnkreise c und $\mathfrak{c}$, deren entsprechende Punkte auf Kreisen liegen, die durch die Verwandtschaftspole O, P gehen. Je zwei der zugeordneten Kreisphasen schneiden jeden der der durch O, P gehenden Kreise unter gleichen Winkeln; denn in den zugeordneten Systemphasen entsprechen die durch OP gehenden Kreise sich selbst.

Zu beiden Seiten der Symmetralgeraden $O'\mathfrak{O}'$ giebt es (Fig. 13a) in dem ähnlich-veränderlichen System S' unendlich viele congruente Systemphasen, die wir beigeordnete Phasen nennen, und in je zwei beigeordneten Phasen entsprechen die um den Aehnlichkeitspol O' als Mittelpunkt beschriebenen Kreise sich selbst. Von diesen beigeordneten Phasen fallen zwei in der grössten und zwei in der kleinsten Systemphase zusammen. Wenn wir von P auf $O'\mathfrak{O}'$ eine Senkrechte $P\pi$ ziehen, auf dieser $G'\pi = P\pi$ machen und Kreise beschreiben, welche durch G', P gehen, so schneiden diese je zwei der beigeordneten Kreisphasen in Punkten, die zu der Geraden $O'\mathfrak{O}'$ symmetrisch liegen. In dem kreisverwandt-veränderlichen System S entsprechen diesen Phasen unendlich viele beigeordnete Kreisphasen, für welche der dem Punkte G' entsprechende Punkt G, der mit dem Mittelpunkte des Kreises $OP\Omega\mathfrak{O}$ zusammenfällt, gemeinschaftlicher Aehnlichkeitspunkt ist; und dasselbe gilt von den als beigeordnete Kreisphasen angesehenen Bahnkreisen. Jedes Paar beigeordneter Kreisphasen schneidet jeden Kreis des Kreisbüschels, für den O, P Grenzpunkte sind, gleichwinklig; denn dieser Kreisbüschel entspricht den um O' beschriebenen, sich selbst entsprechenden Kreisen in S'. Zwei zugeordnete Systemphasen zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Gegenpunkte auf der Verbindungsgeraden der Verwandtschaftspole O, P liegen und gleiche Entfernung von der Mitte der Strecke OP haben; zwei beigeordnete Systemphasen zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Gegenpunkte auf der in der Mitte auf OP senkrecht stehenden Geraden liegen und gleichen Abstand von dieser Mitte besitzen. Im ersten Falle ist die Gerade OP eine selbstentsprechende, im zweiten diese senkrechte Gerade eine selbstentsprechende Gerade, und in jedem Falle haben die Gegenpunkte zweier Systemphasen gleichen Abstand von dieser Mitte, weil die Gegenpunkte nach S. 408 gleiche Entfernung von dem Mittelpunkte des Kegelschnittes besitzen, dessen Brennpunkte O, P sind. In zwei zugeordneten Phasen schneiden sich die durch die Gegenpunkte gehenden entsprechenden Geraden in der in der Mitte auf OP senkrecht stehenden Geraden, bei zwei beigeordneten Systemen aber in der Geraden OP.

Durch die Betrachtung der zugeordneten und beigeordneten Kreisphasen gelangen wir zur Kenntniss des geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller Kreisphasen eines Systemkreises k eines kreislinig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems und des geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller von den Punkten des Systemkreises k beschriebenen Bahnkreise. Der Punkt C des Systemkreises k bewegt sich auf dem vorgeschriebenen Bahnkreise c (Fig. 13 b), dessen Mittelpunkt mit c_0 bezeichnet ist und der den durch OP und C_x gehenden Kreis j_C unter einem Winkel ν in C_x und C_w schneidet; die gegebene Kreisphase k_x trifft den Kreis j_C ausser in C_x noch in einem Punkte $\mathfrak{C}_x$ und die Verbindungsgerade $\mathfrak{C}_x C_w$ schneidet die Gerade OP in dem Aehnlichkeitspunkte F. Hiernach können wir unabhängig von der Fig. 13 a den Bahnkreis $\mathfrak{c}$ des Systempunktes $\mathfrak{C}$ erhalten, indem wir $\mathfrak{c}$ so bestimmen, dass sein Mittelpunkt $\mathfrak{c}_0$ auf $c_0 F$ liegt und dass er mit dem Kreise j_C in $\mathfrak{C}_x$ den Winkel ν bildet. In gleicher Weise erhalten wir zu der Kreisphase k_x, deren Mittelpunkt k^0_x ist, die zugeordnete Kreisphase k_w, indem wir den Kreis k_w so construiren, dass sein Mittelpunkt k^0_w auf der Geraden $k^0_x F$ liegt und dass er den Kreis j_C in C_w unter demselben Winkel schneidet, welchen k_x mit j_C bildet. Die Kreise $\mathfrak{c}$ und k_w schneiden den Kreis j_C andererseits noch in dem gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{C}_w$, der mit C_x auf einer durch den Aehnlichkeitspunkt F gehenden Geraden liegt. Ziehen wir durch OP einen beliebigen Kreis j_D, dessen Schnittpunkte mit k_x und k_w resp. $D_x \mathfrak{D}_x$ und $D_w \mathfrak{D}_w$ sind, so erhalten wir die Bahnkreise d, $\mathfrak{d}$, welche den Punkten D_x, $\mathfrak{D}_x$ entsprechen, indem wir die Kreise d, $\mathfrak{d}$ so bestimmen, dass sie den Kreis j_D beziehungsweise in den Punkten $D_x D_w$, $\mathfrak{D}_x \mathfrak{D}_w$ unter demselben Winkel treffen, welchen der Kreis c mit j_C bildet;

die Mittelpunkte von d_0, $\mathfrak{d}_0$ von d, $\mathfrak{d}$ liegen dann auf einer durch F gehenden Geraden. Auf diese Weise kann man leicht den Ort der Mittelpunkte c_0, $\mathfrak{c}_0$, d_0, $\mathfrak{d}_0$, ... der Bahnkreise der auf k liegenden Systempunkte constructiv bestimmen.

Die Verbindungsgeraden $C_x\mathfrak{C}_x$, $D_x\mathfrak{D}_x$, ... schneiden sich, weil die Kreise j_C, j_D durch OP gehen, in einem Punkte F^x der Geraden OP, und aus demselben Grunde schneiden sich die Verbindungsgeraden $C_w\mathfrak{C}_w$, $D_w\mathfrak{D}_w$ in einem Punkte F^w der Geraden OP. Betrachten wir nur das Strahlenbüschel F^w, so entspricht jedem Strahl $\overline{C_w\mathfrak{C}_w}$, $\overline{D_w\mathfrak{D}^w}$, ... ein Strahl $\overline{c_0\mathfrak{c}_0}$, $\overline{d_0\mathfrak{d}_0}$, ... des Strahlenbüschels F und demnach sind die Strahlenbüschel F^w und F collinear. Die Kreise, welche die durch OP gehenden Kreise rechtwinklig schneiden, stehen zu den beigeordneten Phasen in derselben Beziehung, wie die durch OP gehenden Kreise zu den zugeordneten Phasen; wir erhalten demnach in gleicher Weise hinsichtlich der beigeordneten Kreisphasen k_w, k_u die analogen collinearen Strahlenbüschel G^w und G, deren Mittelpunkte auf der Chordale liegen, welche in der Mitte von OP auf OP senkrecht steht. Den auf dem Kreise k_w liegenden Schnittpunkten der Strahlen des Büschels F^w und G^w entsprechen die Bahnkreis-Mittelpunkte, in denen sich die entsprechenden Strahlen der Büschel F und G treffen. Der Ort μ'' der Mittelpunkte der Bahnkreise und der Kreis k_w sind demnach entsprechende Curven in collinearen Systemen und folglich ist μ'' ein Kegelschnitt. Durch die Umkehrung der Bewegung folgt, dass auch der Ort μ' der Mittelpunkte der Kreisphasen ein Kegelschnitt ist. Statt der Kreisphase k_w können wir von jeder beliebigen andern Kreisphase k_y ausgehen und demnach sind auch μ'' und k_y entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, und wenn wir einen beliebig gewählten Bahnkreis e als Kreisphase betrachten, so sind auch μ' und e entsprechende Curven in collinearen Systemen. Durch diese collinearen Beziehungen lässt sich auch ohne Schwierigkeit nachweisen, dass die beiden Kegelschnitte μ', μ'' confocal sind. Hiernach erhalten wir den wichtigen Satz:

25. Bei der kreislinigen Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems bewegt sich der Mittelpunkt eines Systemkreises auf einem Kegelschnitt; die Mittelpunkte der Bahnkreise, auf denen sich die Punkte des Systemkreises bewegen, liegen auf einem Kegelschnitte, und beide Kegelschnitte sind confocal.

Da alle Phasen des Systemkreises k' in dem ähnlich-veränderlichen ebenen System S' den Kreis t', dessen Mittelpunkt Ω' ist, rechtwinklig schneiden, so schneiden auch alle Phasen des Systemkreises k in dem kreisverwandt-veränderlichen ebenen System S den entsprechenden Kreis t von t' rechtwinklig. Wir können daher das Cartesische Inversionsoval auch als die Enveloppe eines veränderlichen, den Kreis t rechtwinklig schneidenden Kreises k ansehen, dessen Mittelpunkt sich auf dem Kegelschnitte μ' bewegt.

Die Berührungspunkte A'_x, B'_x, welche eine Kreisphase k'_x mit der Curve $\varkappa'$ bildet, liegen, wie wir S. 410 bewiesen haben, auf einer durch den festen Punkt Ω' gehenden Geraden und auf einem durch die Punkte O', $\mathfrak{O}'$ gehenden Kreise; folglich liegen auch die Berührungspunkte A_x, B_x, welche eine Kreisphase k_x mit der Curve $\varkappa$ bildet, auf einem durch Ω, P gehenden und auf einem durch O, $\mathfrak{O}$ gehenden Kreise; darnach ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt der drei Kreissecanten $P\Omega$, $O\mathfrak{O}$, $A_x B_x$ der Mittelpunkt t_0 des Orthogonalkreises t und jede Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte, welche die Phasen des Kreises k mit $\varkappa$ bilden, geht durch den festen Punkt t_0. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der sich in A_x, B_x schneidenden Kreise $A_x B_x \Omega P$, $A_x B_x \mathfrak{O} O$ muss den Kegelschnitt μ' in dem Mittelpunkte k^0_x des Kreises k_x berühren; denn schnitte diese Gerade μ' in zwei Punkten, so müsste jeder dieser Punkte ein Mittelpunkt einer die Curve $\varkappa$ in A_x, B_x berührenden Kreisphase sein; es kann aber nur eine solche Kreisphase geben.

Auf Grund dieser Beziehungen kann man das Cartesische Inversionsoval $\varkappa$ leicht in folgender Weise construiren. Wir ziehen in einem Punkte k^0_x an den Kegelschnitt μ' eine Tangente, fällen auf diese von dem Mittelpunkte t_0 des Orthogonalkreises t eine Senkrechte und beschreiben den durch Ω, P, oder durch $\mathfrak{O}$, O gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Tangente liegt; dann schneidet dieser Kreis die Senkrechte in den beiden Punkten A_x, B_x der Curve $\varkappa$.

Betrachten wir die Bahnkreise, deren Mittelpunkte auf dem Kegelschnitte μ'' liegen, als Kreisphasen, so zeigt sich durch analoge Darlegungen, dass die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, welche die Phasen mit der Curve $\varkappa$ bilden, durch den Mittelpunkt $\mathfrak{t}_0$ des in diesem Falle imaginären Orthogonalkreises $\mathfrak{t}$ gehen, dass dieser Punkt $\mathfrak{t}$ der Durchschnitt der Geraden $P\mathfrak{O}$, $O\Omega$ ist und dass die genannten Berührungspunkte auf einem durch $P\mathfrak{O}$ und auf einem durch $O\Omega$ gehenden Kreise liegen. Dieser zweiten Erzeugungsweise entspricht eine der oben angegebenen analoge Construction.

Blicken wir auf die Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S' zurück, so können wir bei der ersten Erzeugungsweise des Cartesischen Ovals $\varkappa'$ (S. 410) auch $\mathfrak{O}'$ als Aehnlichkeitspol, bei der zweiten Ω' als solchen ansehen, und demnach können wir bei der ersten Erzeugungsweise der Curve $\varkappa$ auch P, $\mathfrak{O}$, bei der zweiten auch P, Ω als Verwandtschaftspole betrachten. Wir haben bei der Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems S' noch eine dritte Erzeugungsweise der Curve $\varkappa'$ kennen gelernt, bei der die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte durch O' gehen und für welche einerseits $\mathfrak{O}'$, andererseits Ω' als Aehnlichkeitspol angesehen werden kann. In diesem Falle giebt es einen reellen Orthogonalkreis τ', dessen Mittelpunkt O' ist. Diesem entspricht ein Orthogonalkreis τ, dessen Mittelpunkt τ_0 mit dem Punkte F, der auch der Schnittpunkt der

Geraden OP, $\Omega\mathfrak{O}$ ist, zusammenfällt, und durch den die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, welche die neuen dieser dritten Erzeugungsweise angehörenden Kreisphasen mit der Curve $\varkappa'$ bilden. Je zwei dieser Berührungspunkte liegen auf einem durch O, P und auf einem durch Ω, $\mathfrak{O}$ gehenden Kreise, und die Mittelpunkte der neuen Kreisphasen liegen auf einem neuen, in unserer Figur nicht gezeichneten Kegelschnitte μ'''. Dieser Erzeugungsweise entspricht eine dritte Construction der Curve $\varkappa$, die den oben angegebenen Constructionen analog ist.

Gehen die Kreisphasen des ähnlich-veränderlichen Systems S' durch den einen Punkt Ξ', so gehen auch die Bahnkreise durch diesen Punkt; das kleine Oval der Curve $\varkappa'$ wird dann durch diesen Punkt Ξ' repräsentirt und das grosse Oval geht in die Pascal'sche Curve oder Schnecke (*Limaçon*) über. In diesem Falle ist die Gesammtheit der Kreisphasen mit der Gesammtheit der Bahnkreise identisch und die Brennpunkte $\mathfrak{O}'$, Ω' fallen in dem Punkte Ξ' zusammen. Nach der dritten Erzeugungsweise der Curve $\varkappa'$ können wir in diesem Falle auch Ξ' als den Aehnlichkeitspol des ähnlich-veränderlichen Systems S' betrachten und demnach ist die Pascal'sche Curve auch die Hüllbahncurve eines Systemkreises, dessen Punkte sich auf Bahnkreisen bewegen, die durch den Aehnlichkeitspol Ξ gehen. Durch Uebertragung auf das System S folgt: Wenn die Kreisphasen des kreisverwandt-veränderlichen Systems S durch einen Punkt Ξ gehen, so wird das kleine Oval der Curve $\varkappa$ durch den Punkt Ξ vertreten, und das grosse Oval können wir als die Inversionscurve einer Pascal'schen Curve ansehen, die wir kurz eine Pascal'sche Inversionscurve nennen wollen.

Geht ein Bahnkreis des kreisverwandt-veränderlichen Systems S durch einen oder durch beide Verwandtschaftspole O, P, so gehen alle Bahnkreise beziehungsweise durch einen oder beide Verwandtschaftspole. Liegt ein Verwandtschaftspol innerhalb oder ausserhalb eines Bahnkreises, so liegt dieser innerhalb oder ausserhalb aller Bahnkreise.

Durch Uebertragung der übertragbaren Beziehungen, die bei der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems auftreten, auf ein kreisverwandt-veränderliches System können wir leicht eine Reihe interessanter Sätze hinschreiben, welche specialisirt zu einer Fülle neuer Eigenschaften führen. Wir wollen nur die wichtigsten dieser Sätze hervorheben.

Alle Systemkreise eines kreislinig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems, die so liegen, dass sie in ähnlichen Systemen, welche den Aehnlichkeitspol gemein haben, einem Bahnkreise entsprechen, umhüllen einerseits Punkte, andererseits Pascal'sche Curven. Hiernach erhalten wir dann den entsprechenden Satz:

26. Alle Systemkreise eines kreislinig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems, welche so liegen, dass sie in kreisverwandten Systemen, welche die Verwandtschaftspole gemein haben, einem Bahnkreise entsprechen, um-

hüllen einerseits Punkte, andererseits Pascal'sche Inversionscurven.

Bei der geradlinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems umhüllt jeder Systemkreis, je nachdem derselbe durch oder nicht durch den Aehnlichkeitspol geht, einen Punkt oder einen Kegelschnitt. Demnach folgt:

27. Bei der Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen Systems, dessen Bahnkreise durch den einen Verwandtschaftspol gehen, umhüllt ein Systemkreis, je nachdem derselbe durch oder nicht durch den andern Verwandtschaftspol geht, einen Punkt oder eine Inversionscurve eines Kegelschnittes.

Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig ähnlich-veränderlichen Systems auf einer durch den Aehnlichkeitspol gehenden Geraden, so bewegen sich alle Systempunkte auf Geraden, die durch den Aehnlichkeitspol gehen, und diese Geraden, als Systemgeraden betrachtet, bewegen sich in sich selbst.

28. Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig kreisverwandt-veränderlichen Systems auf einem durch die beiden Verwandtschaftspole gehenden Kreise, so bewegen sich alle Systempunkte auf Kreisen, die durch die Verwandtschaftspole gehen, und diese Kreise, als Systemkreise betrachtet, bewegen sich in sich selbst.

Ein Systemkreis k eines kreisverwandt-veränderlichen Systems, der zwei durch die Verwandtschaftspole gehende Kreise a, b berührt, umhüllt diese Kreise, wenn ein Systempunkt sich auf einen durch die Verwandtschaftspole gehenden Kreis bewegt. Die Hüllbahncurve $\varkappa$ (Fig. 13b) degenerirt in diesem Falle zu den beiden Kreisen a, b; die Mittelpunkte der Kreisphasen bilden einen durch die Verwandtschaftspole gehenden Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Mittelpunkte a_0, b_0 der Kreise a, b sind, und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, welche die Phasen von k mit a, b bilden, gehen durch einen auf der Geraden $a_0 b_0$ liegenden festen Punkt t_0, den Mittelpunkt des Orthogonalkreises t der Kreisphasen. Die Mittelpunkte der Bahnkreise der Systempunkte von k erfüllen die gerade Strecke $a_0 b_0$.

Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Aehnlichkeitspol ist, so bewegen sich alle Systempunkte auf concentrischen Kreisen und diese als Systemkreise angesehen, bewegen sich in sich selbst. — Dieser besondere Fall ist mit der Rotation eines starren Systems identisch.

29. Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems auf einem Kreise, dessen Durchmesser von den Verwandtschaftspolen harmo-

nisch getheilt wird, so bewegen sich alle Systempunkte auf solchen Kreisen, und diese, als Systemkreise angesehen, bewegen sich in sich selbst.

Ein Systemkreis k eines kreisverwandt-veränderlichen Systems, der zwei Kreise a, b, deren Durchmesser von den Verwandtschaftspolen harmonisch getheilt wird, berührt, umhüllt diese Kreise, wenn ein Systempunkt sich auf einem derartigen Kreise bewegt. Die Hüllbahncurve $\varkappa$ (Fig. 13b) degenerirt in diesem Falle zu den beiden Kreisen a, b; die Mittelpunkte der Kreisphasen bilden einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Mittelpunkte a_0, b_0 der Kreise a, b sind, und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, welche die Phasen von k mit a, b bilden, gehen durch einen auf $a_0 b_0$ liegenden festen Punkt t_0, den Mittelpunkt des Orthogonalkreises t der Kreisphasen. Die Mittelpunkte der Bahnkreise der Systempunkte auf k erfüllen die gerade Strecke $a_0 b_0$. Das Kreisbüschel, dessen Grundpunkte die Verwandtschaftspole sind, sowie das Kreisbüschel, dessen Grenzpunkte die Verwandtschaftspole sind, geht bei der einförmigen Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems wandelnd in sich selbst über und die imaginären Schnittpunkte oder Grundpunkte des letzteren Kreisbüschels können wir als zwei imaginäre selbstentsprechende Punkte oder zwei imaginäre Verwandtschaftspole ansehen. Fallen die beiden Verwandtschaftspole O, P in einem Punkte Ψ zusammen, dann berühren sich die Kreise des ersten wie des letzten Kreisbüschels in diesem Punkte Ψ.

Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems auf einer logarithmischen Spirale, deren asymptotischer Punkt der Aehnlichkeitspol ist, so bewegen sich alle Systempunkte auf solchen congruenten Spiralen, und diese, als Systemcurven betrachtet, bewegen sich in sich selbst. Hiernach erhalten wir den Satz:

30. Bewegt sich ein Systempunkt eines einförmig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems auf einer logarithmischen Doppelspirale*, deren beide asymptotische Punkte die Verwandtschaftspole sind, so bewegen sich alle Systempunkte auf solchen logarithmischen Doppelspiralen und diese, als Systemcurve angesehen, bewegen sich in sich selbst.

Bei der einförmigen Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen Systems sind also alle Kreise des durch die Verwandtschaftspole als Grund-

* Herr Holzmüller hat in einer schönen Abhandlung („Ueber die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 16 S. 269) die wichtigsten Eigenschaften der logarithmischen Doppelspirale zuerst abgeleitet; und man wird leicht erkennen, dass alle diese interessanten Eigenschaften auch in der natürlichsten Weise aus unseren kinematischen Darlegungen hervorgehen.

punkte bestimmten Kreisbüschels, und alle Kreise des durch die Verwandtschaftspole als Grenzpunkte bestimmten Kreisbüschels und alle logarithmischen Doppelspiralen, deren asymptotische Punkte die Verwandtschaftspole sind, Selbsthüllcurven. Die Schaar der logarithmischen Doppelspiralen, auf denen sich die Systempunkte bewegen, wenn ein Systempunkt eines einförmig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems eine von jenen logarithmischen Doppelspiralen beschreibt, geht, zu einem kreisverwandt-veränderlichen System gehörend, bei der einförmigen Bewegung desselben wandelnd in sich selbst über. Alle diese logarithmischen Doppelspiralen werden von den durch die Verwandtschaftspole gehenden Kreisen und von den Kreisen, deren Durchmesser von den Verwandtschaftspolen harmonisch getheilt werden, unter gleichem Winkel geschnitten. Jede Systemcurve eines einförmig bewegten kreisverwandt-veränderlichen Systems umhüllt, wenn ein Systempunkt eine von jenen logarithmischen Doppelspiralen durchläuft, eine logarithmische Doppelspirale, welche mit der ersteren zu derselben Schaar gehört.

Jedem beweglichen Systempunkte eines kreisverwandt-veränderlichen Systems entspricht ein durch ihn gehender Bahnkreis und jedem Bahnkreise ein auf ihm liegender Systempunkt. Die kreislinige Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen Systems S, dessen Verwandtschaftspole (Fig. 14) OP sind, ist durch einen Bahnkreis a, auf den sich ein Systempunkt A, der in der Phase S_x den Punkt A_x einnimmt, bewegt, gegeben. Um den Bahnkreis b eines beliebigen Systempunktes B, der in S_x durch B_x gegeben ist, zu bestimmen, müssen wir beachten, dass a und b entsprechende Kreise in den durch die entsprechenden Punkte OPA_x, OPB_x bestimmten Systemen sind. Der Bahnkreis a schneidet den Kreis OPA_x noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{A}_x$, zu diesem erhalten wir den entsprechenden, auf dem Kreise OPB_x liegenden Punkt $\mathfrak{B}_x$, wenn wir die Schnittpunkte α, β, welche die Gerade $A_x B_x$ resp. mit den Kreisen OPA_x, OPB_x andererseits bildet, bestimmen und $\alpha\mathfrak{A}_x$ ziehen, die OP in einem Punkte θ trifft; dann schneidet $\theta\beta$ den Kreis OPB_x andererseits in dem entsprechenden Punkte $\mathfrak{B}_x$. Der Bahnkreis b ist hiernach so zu construiren, dass er durch die Punkte $B_x \mathfrak{B}_x$ geht und den Kreis OPB_x unter demselben Winkel schneidet, den der Kreis a mit dem Kreise OPA_x bildet. Nehmen wir an, es seien A_x, B_x, C_x, ... Punkte einer Phase eines Systemkreises k, dann liegen nach dem Satz S. 415 die Mittelpunkte a_0, b_0, c_0, ... der Bahnkreise a, b, c, ... dieser Punkte auf einem Kegelschnitte.

Die auf S. 408 abgeleitete Bestimmung der beiden reellen selbstentsprechenden Punkte wird unbrauchbar, wenn die Systemphasen unendlich nahe liegen. Wir müssen daher noch eine Bestimmung dieser Punkte angeben, die auch für diesen Fall ihre Giltigkeit bewahrt. Sind in den beiden Systemphasen S_x, S_y eines kreisverwandt-veränderlichen Systems S (Fig. 15) k_x, k_y zwei sich schneidende Kreisphasen, auf denen $A_x B_x C_x$, $A_y B_y C_y$ entsprechende Punkte sein mögen, so können wir die beiden reellen selbstentsprechenden Punkte von S_x, S_y erhalten, wenn wir den einen Schnittpunkt H der Kreise k_x, k_y als Inversionscentrum betrachten und für diesen das entsprechende Inversionsgebilde construiren; den Kreisen k_x, k_y entsprechen dann die Geraden k'_x, k'_y, den Punkten $A_x B_x C_x$, $A_y B_y C_y$ resp. die Punkte $A'_x B'_x C'_x$, $A'_y B'_y C'_y$. Bestimmen wir nun die Brennpunkte O', P' des Kegelschnittes, dessen Tangenten k'_x, k'_y, $A'_x A'_y$, $B'_x B'_y$, $C'_x C'_y$ sind, und ermittelt zu O', P' rückwärts die entsprechenden Punkte O, P, dann sind diese Punkte die reellen selbstentsprechenden Punkte der Systemphasen S_x, S_y.

Die allgemeine Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems ist bestimmt, wenn die zweitheilige Hüllbahncurve eines Systemkreises bekannt ist und die drei Bahncurven dreier auf diesem Kreise liegender Systempunkte gegeben sind. Nehmen wir an, die Phasen eines Systemkreises k umhüllen die Curven θ, τ (Fig. 16) und die drei Punkte A, B, C dieses Kreises bewegen sich resp. auf den gegebenen Bahncurven a, b, c, so ist die Bewegung bestimmt und die oben angegebene Ermittelung der selbstentsprechenden reellen Punkte gilt auch in dem Falle, wenn die Systemphasen S_x, S_y und mit diesen die beiden Kreisphasen k_x, k_y unendlich nahe liegen. Die Berührungspunkte H, I, welche k_x mit θ, τ bildet, repräsentiren die Schnittpunkte der Kreise k_x, k_y; die unendlich nahen entsprechenden Punkte $A_x A_y$, $B_x B_y$, $C_x C_y$ liegen resp. auf den Tangenten, welche die Bahncurven a, b, c in den Punkten A_x, B_x, C_x berühren. Betrachten wir nun den einen der Berührungspunkte H, I, etwa H, als Inversionscentrum, so entsprechen den unendlich nahen Kreisen k_x, k_y die unendlich nahen Geraden k'_x, k'_y, welche sich in dem Punkte I', der I entspricht, schneiden und die wir als in k'_x zusammengefallen ansehen. Auf k'_x bestimmen wir die Punkte $A'_x B'_x C'_x$, welche den Punkten $A_x B_x C_x$ entsprechen, und ziehen durch A'_x, B'_x, C'_x die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so dass sie resp. mit k'_x dieselben Winkel bilden, unter denen die Bahncurven a, b, c den Kreis k_x schneiden. Den unendlich kleinen als geradlinig angesehenen Strecken $A_x A_y$, $B_x B_y$, $C_x C_y$ entsprechen dann die unendlich kleinen Strecken $A'_x A'_y$, $B'_x B'_y$, $C'_x C'_y$ auf den Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Hiernach sind die Punkte O, P, welche den Brennpunkten O', P' des Kegelschnittes entsprechen, der die Gerade k'_x in I' und ausserdem die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ berührt, die reellen selbstentsprechenden Punkte der unendlich nahen Systemphasen S_x, S_y. Die so erhaltenen Punkte sind die reellen Verwandtschaftspole für die unendlich kleine Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems S, welche eintritt, wenn dieses System aus der Phase S_x in die unendlich nahe Phase S_y übergeht. Wir wollen die Punkte $O P$ demnach die Verwandtschaftspole der Phase S_x nennen. Bestimmen wir in der angegebenen Weise für die verschiedenen Systemphasen die zugehörigen Verwandtschaftspole, so bilden diese in der festen Ebene eine im Allgemeinen zweitheilige Curve, die Verwandtschaftspolbahn. Construiren wir dann zu den Verwandtschaftspolen der verschiedenen Systemphasen in einer als Ausgangsphase betrachteten Systemphase S_0 die entsprechenden Punkte, so erhalten wir in S_0 eine im Allgemeinen zweitheilige Curve, die Verwandtschaftspolcurve.

Durch die stereographische Projection eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems ergiebt sich die Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen Systems auf der Kugelfläche, und wenn wir alle Punkte eines solchen kreisverwandten sphärischen Systems mit dem Kugelmittelpunkte geradlinig verbinden, so ergiebt sich ein Analogon zu der Bewegung eines starren Systems, welches um einen festen Punkt schwenkt.

Die Kreisverwandtschaft ist ein specieller Fall der Verwandtschaft zweiten Grades. Denken wir uns ein kreisverwandt-veränderliches ebenes System perspectivisch abgebildet, so stehen die erhaltenen Systemphasen in Verwandtschaft zweiten Grades; es wird daher die nächste Folge sein, die Bewegung eines solchen veränderlichen ebenen Systems vom allgemeinen Gesichtspunkte aus zu untersuchen. Damit wird dann auch der Weg zur Auffindung der kinematischen Beziehungen derjenigen veränderlichen ebenen Systeme gebahnt, deren Phasen in Cremona'scher Verwandtschaft stehen. Die Begrenzung dieser dritten Mittheilung und die Weiterentwickelung unserer Darlegungen erfordert, dass wir uns die allgemeine Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Bahncurven und Hüllbahncurven der bisher betrachteten veränderlichen Systeme noch vorbehalten müssen, und wir verweisen vorläufig auf die interessanten, von Herrn Grouard (*L'Institut, Journal universel* 1870, *p.* 27, 84, 124, 171) leider ohne Beweis mitgetheilten Sätze, welche für ähnlich-veränderliche ebene Systeme zur Bestimmung jener Krümmungsmittelpunkte führen.

XVII.

Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von

Dr. R. Beez,

Professor an der Realschule zu Plauen i. V.

Sind in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $x_0, x_1, \dots x_n$ als Functionen von n unabhängigen Parametern $p_1, p_2, \dots p_n$ gegeben, so drücken die $n+1$ simultanen Gleichungen

$$1) \qquad x_k = f_k(p_1, p_2, \dots p_n), \quad k = 0, 1, 2, \dots n$$

eine $n$fache Mannigfaltigkeit aus, welche in jenem Raume enthalten ist. Bedeuten nun $A_0, A_1, \dots A_n$ die nach der ersten Horizontalreihe genommenen Minoren der Determinante

$$2) \qquad A = \begin{vmatrix} z_0 - x_0, & z_1 - x_1, & \dots & z_n - x_n \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_1}{d p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

und werde

$$3) \qquad A_0^2 + A_1^2 + \dots A_n^2 = H^2$$

gesetzt, dann lässt sich, wie an einer andern Stelle[1]) bewiesen worden ist, das Raumelement ∂w der $n$fachen Mannigfaltigkeit durch die Gleichung

$$4) \qquad \partial w = H\, \partial p_1\, \partial p_2 \dots \partial p_n$$

---

1) Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, Math. Annalen Bd. VII, S. 387 flgg.

darstellen. Die Gleichung $\Delta=0$ drückt, wie leicht ersichtlich ist, diejenige ebene Mannigfaltigkeit von n Dimensionen aus, welche die gegebene im Punkte $x_0, x_1, \ldots x_n$ berührt, während der Minor A_k multiplicirt mit $\partial p_1 . \partial p_2 . \ldots \partial p_n$ gewissermassen als die Projection des Raumelements ∂w auf den ebenen $n$fachen Raum $x_k=0$ und $\frac{A_k}{H}$ als der Cosinus des Winkels α_k, welchen die Normale im Punkte $x_0, x_1, \ldots x_n$ mit der X_k-Axe bildet, aufgefasst werden können. Das Linienelement endlich in derselben Mannigfaltigkeit nimmt, wenn wir in die Gleichung

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2$$

die aus 1) sich ergebenden Differentiale

$$5)\quad \begin{aligned} \partial x_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial p_1}\partial p_1 + \frac{\partial x_0}{\partial p_2}\partial p_2 + \ldots + \frac{\partial x_0}{\partial p_n}\partial p_n, \\ \partial x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\partial p_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\partial p_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial p_n}\partial p_n, \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \partial x_n &= \frac{\partial x_n}{\partial p_1}\partial p_1 + \frac{\partial x_n}{\partial p_2}\partial p_2 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial p_n}\partial p_n \end{aligned}$$

substituiren, die Form an

$$6)\quad \partial s^2 = \Sigma_{ik}\, a_{ik}\, \partial p_i \partial p_k, \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n,$$

worin

$$7)\quad a_{ik} = a_{ki} = \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_i} . \frac{\partial x_l}{\partial p_k}, \qquad b = 0, 1, 2, \ldots n$$

gesetzt worden ist.

Mit Hilfe der aus diesen Coefficienten a_{ik} gebildeten Determinante

$$8)\quad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

lässt sich die Grösse H bestimmen; denn es ist nach 3)

$$H^2 = A_0^2 + A_1^2 + \ldots + A_n^2$$

$$9)\quad = \begin{vmatrix} A_0, & A_1, & \ldots & A_n \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Quadrirt man diese Gleichung und wendet rechts die Multiplicationsregel für Determinanten an, so erhält man mit Rücksicht auf 7)

$$10)\qquad H^4 = \begin{vmatrix} H^2, & \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_1}, & \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_2}, & \dots & \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_n} \\ \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_1}, & a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_2}, & a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Sigma A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_n}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vertauscht man nun in der Determinante 9) die erste Horizontalreihe mit irgend einer andern, so wird sie identisch Null; es ist also

$$11)\qquad A_0 \frac{\partial x_0}{\partial p_i} + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \dots + A_n \frac{\partial x_n}{\partial p_n} = \Sigma_k\, A_k \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = 0,$$

folglich wird

$$12)\qquad H^2 = a$$

und das Raumelement

$$13)\qquad \partial w = \sqrt{a} \,.\, \partial p_1 \,.\, \partial p_2 \dots \partial p_n.$$

Kennt man daher die Form 6) des Linienelementes einer Mannigfaltigkeit, so lässt sich unmittelbar aus derselben das Raumelement bestimmen, ohne dass man nöthig hat, auf die ursprünglichen Gleichungen 1) zurückzugehen. Das Gleiche gilt jedoch nicht vom Krümmungsmass, dessen Beziehung zum Linienelement wir jetzt untersuchen wollen. Zur Berechnung desselben benützen wir die Gleichung 40) der citirten Abhandlung:

$$14)\qquad K = \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{vmatrix},$$

welche wir abgekürzt schreiben

$$14^*)\qquad K = \frac{1}{H^{n+2}} \,.\, D.$$

Die Grösse H hat die im Vorhergehenden angegebene Bedeutung, während die D_{ik} durch die Gleichung

$$14^{**})\qquad \begin{aligned} D_{ik} &= \frac{\partial A_0}{\partial p_i} . \frac{\partial x_0}{\partial p_k} + \frac{\partial A_1}{\partial p_i} . \frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial p_i} . \frac{\partial x_n}{\partial p_k} \\ &= -\left(A_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k} + A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} + \dots + A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \right), \end{aligned}$$

welche durch Differentiation der Gleichung 11) nach ∂p_k erhalten wird, definirt sind. Dass die Formel 14) für $n=2$ in den von Gauss gegebenen Ausdruck für das Krümmungsmass einer Fläche

$$K=\frac{DD''-D'D'}{(A^2+B^2+C^2)^2}$$

übergeht, erhellt sofort, wenn man in derselben $A_0=A$, $A_1=B$, $A_2=C$, $p_1=p$, $p_2=q$, $D_{11}=-D$, $D_{12}=D_{21}=-D'$, $D_{22}=-D''$ setzt. Nennt man R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser in irgend einem Punkte der Fläche, so lässt sich bekanntlich das Gauss'sche Krümmungsmass in anschaulicher Weise als das Product aus den reciproken Werthen der beiden Hauptkrümmungshalbmesser definiren und

$$K=\frac{1}{R_1 . R_2}$$

setzen.

Die Formel 14) behält aber — was ganz ausdrücklich betont werden muss — auch für $n=1$ ihre Giltigkeit und drückt in diesem Falle die Krümmung einer ebenen Curve, d. h. den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers aus. Denn unter der Voraussetzung $n=1$ wird

$$K=\frac{1}{H^3}.D_{11}=-\frac{1}{H^3}\left(A_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial p_1^2}+A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial p_1^2}\right).$$

Nun ist

$$A_0=\frac{\partial x_1}{\partial p_1},\quad A_1=-\frac{\partial x_0}{\partial p_1},$$

folglich, sobald man den Bogen der Curve selbst als Parameter annimmt:

$$A_0^2+A_1^2=H^2=\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)^2=1,$$

also erhält man

15*) $$K=\frac{\partial x_0}{\partial p_1}.\frac{\partial^2 x_1}{\partial p_1^2}-\frac{\partial x_1}{\partial p_1}.\frac{\partial^2 x_0}{\partial p_1^2}$$

oder, wenn man x_0 mit x, x_1 mit y und ∂p_1 mit ∂s vertauscht:

$$K=\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2},$$

welches in der That die bekannte Formel für den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers einer ebenen Curve ist.

Wenn nun noch der Nachweis geliefert werden kann, dass der Ausdruck 14) den reciproken Werth der n Hauptkrümmungshalbmesser einer $n$fachen Mannigfaltigkeit darstellt, so unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass derselbe als die allein zulässige Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses zu bezeichnen ist, während alle anderen Formeln, die für $n=2$ zwar auch den Gauss'schen Ausdruck für die Krümmung einer Fläche wiedergeben, aber weder für $n=1$ die Krümmung einer Curve, noch für ein beliebiges n das reciproke Product der n Hauptkrümmungshalbmesser bedeuten, nur im uneigentlichen Sinne als Verallgemeinerungen des Krümmungsmasses gelten können. Es möge daher der Vollständigkeit wegen jener Nachweis hier beigebracht werden.

Die Gleichung der Normale im Punkte $x_0, x_1, \dots x_n$ der Mannigfaltigkeit

$$x_k = f_k(p_1, p_2, \dots p_n), \quad k = 0, 1, 2, \dots n$$

ist

$$z_k - x_k = \frac{A_k}{H} \cdot \varrho, \tag{16}$$

worin ϱ den Abstand des veränderlichen Punktes (z_k) von (x_k), $\frac{A_k}{H}$ den Cosinus des Winkels angiebt, welchen die Normale mit der X_k-Axe bildet. Einem in der Nachbarschaft von (x_k) gelegenen Punkte entspricht eine andere Normale, die im Allgemeinen die vorhergehende nicht schneidet. Unter der speciellen Voraussetzung aber, dass dieses der Fall ist, kann (z_k) als der Schnittpunkt, ϱ als ein Hauptkrümmungshalbmesser angesehen werden. Beide Grössen ändern sich nicht für den in der Nachbarschaft von (x_k) befindlichen Punkt. Die Gleichung 16) ist daher so zu differentiiren, dass z_k und ϱ als constant betrachtet werden. Man erhält dann

$$\Sigma_l \frac{\partial x_k}{\partial p_l} \partial p_l + \frac{\varrho}{H} \Sigma_l \frac{\partial A_k}{\partial p_l} \partial p_l + A_k \Sigma_l \frac{\partial}{\partial p_l}\left(\frac{\varrho}{H}\right) \partial p_l = 0. \tag{17}$$

Multiplicirt man diese Gleichung der Reihe nach mit $\frac{\partial x_k}{\partial p_1}, \frac{\partial x_k}{\partial p_2}, \dots \frac{\partial x_k}{\partial p_n}$ und summirt über k von $k=0$ bis $k=n$, so findet man mit Rücksickt auf 7), 11), 14**)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a_{11}}{\varrho} + \frac{D_{11}}{H}\right) \partial p_1 + \left(\frac{a_{12}}{\varrho} + \frac{D_{21}}{H}\right) \partial p_2 + \dots + \left(\frac{a_{1n}}{\varrho} + \frac{D_{n1}}{H}\right) \partial p_n = 0, \\
&\left(\frac{a_{21}}{\varrho} + \frac{D_{12}}{H}\right) \partial p_1 + \left(\frac{a_{22}}{\varrho} + \frac{D_{22}}{H}\right) \partial p_2 + \dots + \left(\frac{a_{2n}}{\varrho} + \frac{D_{n2}}{H}\right) \partial p_n = 0, \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\left(\frac{a_{n1}}{\varrho} + \frac{D_{1n}}{H}\right) \partial p_1 + \left(\frac{a_{n2}}{\varrho} + \frac{D_{2n}}{H}\right) \partial p_2 + \dots + \left(\frac{a_{nn}}{\varrho} + \frac{D_{nn}}{H}\right) \partial p_n = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

worin die p nicht als von einander unabhängig, sondern als Functionen einer und derselben neuen Variabelen aufgefasst werden müssen.

Durch Elimination der ∂p erhält man hieraus für $\frac{1}{\varrho}$ eine Gleichung des n^{ten} Grades, deren erstes und letztes Glied bezüglich $\frac{a}{\varrho^n}$ und $\frac{D}{H^n}$ sind. Da aber $a = H^2$ ist, so geht durch Division mit a das constante Glied der Gleichung in den für das Krümmungsmass gefundenen Ausdruck 14*)

$$\frac{1}{H^{n+2}} \cdot D$$

über. Bezeichnet man daher die n Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung mit

$$\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \ldots \frac{1}{\varrho_n},$$

so ergiebt sich

$$\frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdots \varrho_n} = \frac{1}{H^{n+2}} \cdot D,$$
$$= K,$$

wodurch erwiesen ist, dass die für das Krümmungsmass aufgestellte Formel 14) zugleich das reciproke Product der n Hauptkrümmungshalbmesser der gegebenen Mannigfaltigkeit ausdrückt. Hierdurch wird sie mit voller Evidenz als Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses charakterisirt. Wir legen daher die Formel 14) unserer weitern Untersuchung zu Grunde, die den Zweck hat, nachzuweisen, dass das Krümmungsmass im Allgemeinen nur für $n=2$ eine reine Function der Coefficienten a_{ik} der quadratischen Form

$$\Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k$$

ist, für ein beliebiges n aber von den Derivationen der ursprünglichen Variabelen x in Bezug auf die Parameter p abhängt — mit alleiniger Ausnahme des Falles, dass die x_k rationale Functionen des ersten und zweiten Grades der Parameter p sind.

Betrachten wir zunächst ein einzelnes Glied D_{ik} der Determinante in 14). Vermöge 14**) ist

$$D_{ik} = -\left(A_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k} + A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k}\right),$$

welches sich auch schreiben lässt

$$19) \qquad D_{ik} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k}, & \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k}, & \cdots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Quadrirt man diesen Ausdruck, so kommt

$$D_{ik}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma_l \left(\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k}\right)^2, & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & \cdots & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial x_l}{\partial p_n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & a_{11}, & \cdots & a_{1n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial x_l}{\partial p_2}, & a_{21}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \frac{\partial x_l}{\partial p_n}, & a_{n1}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Summe $\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r}$ lässt sich durch die ersten Differentialquotienten der Coefficienten a_{ir}, a_{kr}, a_{ik} darstellen; denn aus den Gleichungen

$$a_{ir} = \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r},$$

$$a_{kr} = \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r},$$

$$a_{ik} = \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_k}$$

ergiebt sich, wenn man die erste nach ∂p_k, die zweite nach ∂p_i, die dritte nach ∂p_r differentiirt und die letzterhaltene Gleichung von der Summe der beiden ersten abzieht:

$$20) \qquad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} \right).$$

Setzen wir mit Christoffel[2]) zur Abkürzung

$$21) \qquad \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} \right) = \begin{vmatrix} i\,k \\ r \end{vmatrix},$$

so kommt nach abermaliger Differentiation in Bezug auf ∂p_s

$$20^*) \qquad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} = \frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} i\,k \\ r \end{vmatrix} - \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_i \partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r}.$$

Ist nun $r = i$, $s = k$, so folgt

$$\Sigma_l \left(\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \right)^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial p_k^2} - \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_i \partial p_k^2} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_i}.$$

Wir erhalten daher für D_{ik} die Formel

$$22) \qquad D_{ik} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial p_k^2} - \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_i \partial p_k^2} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_i}, & \begin{vmatrix} i\,k \\ 1 \end{vmatrix}, & \dots & \begin{vmatrix} i\,k \\ n \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} i\,k \\ 1 \end{vmatrix}, & a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \begin{vmatrix} i\,k \\ 2 \end{vmatrix}, & a_{21}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \begin{vmatrix} i\,k \\ n \end{vmatrix}, & a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

welche ausser den Coefficienten a_{ik} und deren ersten und zweiten Ableitungen noch die Summe aus den Producten der ersten und dritten Differentialquotienten der ursprünglichen Veränderlichen x_0, x_1, … x_n nach den

2) Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Crelle's Journal Bd. 70.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

Parametern p enthält, also keine reine Function der Coefficienten a_{ik} ist. Diese Summe lässt sich — sobald nicht die dritten Differentialquotienten selbst Null sind — nur dann in Wegfall bringen, wenn es möglich ist, die Determinante D so umzuformen, dass sie blos aus Gliedern

$$D_{ik}\,.\,D_{rs}-D_{ir}\,.\,D_{ks}$$

zusammengesetzt ist; denn man hat in diesem Falle

$$D_{ik}\,.\,D_{rs}=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i\partial p_k}, & \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i\partial p_k}, & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i\partial p_k} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_r\partial p_s}, & \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_r\partial p_s}, & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_r\partial p_s} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_k}\cdot\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r\partial p_s}, & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_k}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & \dots & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_k}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_2}, & a_{21}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_n}, & a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$D_{ir}\,.\,D_{ks}=\begin{vmatrix} \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_r}\cdot\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k\partial p_s}, & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_r}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & \dots & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_r}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_2}, & a_{21}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_n}, & a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nun ist mit Rücksicht auf 20) und 21)

$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i\partial p_k}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_r}=\begin{vmatrix} i\,k \\ r \end{vmatrix}, \quad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k\partial p_s}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_r}=\begin{vmatrix} k\,s \\ r \end{vmatrix},$$

folglich, wenn man das eine Mal nach ∂p_s, das andere Mal nach ∂p_i differentiirt:

$$23)\qquad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} = \frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} i\,k \\ r \end{vmatrix} - \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_i \partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r},$$

$$23^*)\qquad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} k\,s \\ r \end{vmatrix} - \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_k \partial p_s \partial p_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r}.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen ergiebt sich das wichtige Resultat

$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} - \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} i\,k \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} k\,s \\ r \end{vmatrix}.$$

Folglich wird, wie man leicht findet:

$$24)\qquad \begin{aligned} D_{ik} \,.\, D_{rs} - D_{ir} \,.\, D_{ks} = a \left(\frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} i\,k \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} k\,s \\ r \end{vmatrix} \right) \\ + \begin{vmatrix} 0 & \begin{vmatrix} ik \\ 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ik \\ 2 \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} ik \\ n \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} rs \\ 1 \end{vmatrix} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \begin{vmatrix} rs \\ 2 \end{vmatrix} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} rs \\ n \end{vmatrix} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \begin{vmatrix} ir \\ 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ir \\ 2 \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} ir \\ n \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ks \\ 1 \end{vmatrix} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \begin{vmatrix} ks \\ 2 \end{vmatrix} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} ks \\ n \end{vmatrix} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in der Determinante a, so lässt sich die Gleichung 24) einfacher, jedoch weniger durchsichtig schreiben

$$24^*)\qquad \begin{aligned} D_{ik} \,.\, D_{rs} - D_{ir} \,.\, D_{ks} = a \left(\frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} k\,i \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} k\,s \\ r \end{vmatrix} \right) \\ + \Sigma_{lm}\, \alpha_{lm} \left\{ \begin{vmatrix} ir \\ l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ks \\ m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ik \\ l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} rs \\ m \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Führt man die angezeigte Differentiation im ersten Gliede rechts aus, so erhält man

$$25)\qquad \frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} k\,i \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} k\,s \\ r \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial p_k \partial p_s} + \frac{\partial^2 a_{sk}}{\partial p_i \partial p_r} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial^2 a_{sr}}{\partial p_i \partial p_k} \right).$$

Nun kann die Determinante in 14) auf sehr verschiedene Weise in eine andere umgestaltet werden, deren einzelne Glieder die Form $D_{ik} D_{rs} - D_{ir} D_{ks}$ haben; stets wird aber noch der Factor $\dfrac{1}{D_{ik}^{n-2}}$, welcher keine reine Function der Grössen a_{ik} ist und nur für $n=2$ auf 1 sich reducirt, dazutreten. Die zunächst sich darbietende Transformation ist folgende. Man multiplicire in der Determinante 14) die zweite, dritte, ... n^{te} Vertikalreihe mit D_1 und ziehe die bezüglich mit $D_{21}, D_{31}, \ldots D_{n1}$ multiplicirte erste Vertikalreihe ab, so kommt mit Rücksicht auf 12)

$$26)\quad K=\frac{1}{a^{\frac{n+2}{2}}D_{11}{}^{n-2}}\begin{vmatrix} D_{11}D_{22}-D^2_{12}, & D_{11}D_{32}-D_{31}D_{12}, & \dots & D_{11}D_{n2}-D_{n1}D_{12} \\ D_{11}D_{23}-D_{21}D_{13}, & D_{11}D_{33}-D_{31}D_{13}, & \dots & D_{11}D_{n3}-D_{n1}D_{13} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{11}D_{2n}-D_{21}D_{1n}, & D_{11}D_{3n}-D_{31}D_{1n}, & \dots & D_{11}D_{nn}-D_{n1}D_{1n} \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 22) und 24), sowie 21) und 25) ergeben sich die Bestandtheile dieses Ausdruckes, wie folgt:

$$27)\quad D_{11}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial p_1{}^2}-\Sigma_l\frac{\partial x_l}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial^3 x_l}{\partial p_1{}^3}, & \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}, & \frac{\partial a_{12}}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial a_{n\text{-}1}}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_n} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}, & a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, & a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_n}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}},$$

und das allgemeine Glied der Determinante in 26)

$$28)\quad D_{11}D_{ik}-D_{i1}D_{1k}=\frac{1}{2}a\left(\frac{\partial^2 a_{i1}}{\partial p_1\,\partial p_k}+\frac{\partial^2 a_{k1}}{\partial p_1\,\partial p_i}-\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_1{}^2}-\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial p_i\,\partial p_k}\right)$$

$$+\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{i1}}{\partial p_k}+\frac{\partial a_{k1}}{\partial p_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_1}\right), & \dots & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{in}}{\partial p_k}+\frac{\partial a_{kn}}{\partial p_i}+\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_1}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}, & a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, & a_{21}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{1n}}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_n}, & a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_i}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial p_i}+\frac{\partial a_{i2}}{\partial p_1}-\frac{\partial a_{1i}}{\partial p_1}\right), & \dots & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{1n}}{\partial p_i}+\frac{\partial a_{in}}{\partial p_1}-\frac{\partial a_{1i}}{\partial p_n}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_k}, & a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial p_k}+\frac{\partial a_{k2}}{\partial p_1}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_2}\right), & a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{1n}}{\partial p_k}+\frac{\partial a_{kn}}{\partial p_1}-\frac{\partial a_{1k}}{\partial p_n}\right), & a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Für $n=1$ wird

$$K=\frac{1}{(\sqrt{a})^2}\cdot\frac{1}{D_{11}^{-1}},$$

woraus [s. Gl. 15*)] leicht der gewöhnliche Ausdruck für die Krümmung einer ebenen Curve abgeleitet werden kann.

Für $n=2$, wenn zugleich $a_{11}=E$, $a_{12}=a_{21}=F$, $a_{22}=G$, $\partial p_1=\partial p$, $\partial p_2=\partial p$ gesetzt wird, findet man[3])

$$29)\quad (EG-F^2)^2K=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p.\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}, & \frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, & E, & F \\ \frac{\partial F}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & F, & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, & E, & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, & F, & G \end{vmatrix},$$

welches identisch ist mit der Gleichung, die Gauss im XI. Artikel seiner *Disquisitiones circa superficies curvas* für das Krümmungsmass einer Fläche gefunden hat, nämlich

$$30)\quad \begin{aligned} 4(EG-F^2)K= {} & E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}+\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right] \\ & +F\left(\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+4\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right) \\ & +G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right] \\ & -2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p.\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right). \end{aligned}$$

Der unsymmetrische Bau der beiden Formeln 29) und 30) — die jedoch in sich selbst übergehen, wenn man E mit G, ∂p mit ∂q und umgekehrt vertauscht — findet seine Erklärung in der Beschaffenheit der Gleichung 20). Diese liefert nämlich für $n=2$ zwei Terme, wenn $i=k$ ist, und nur einen, sobald i oder k gleich r gesetzt wird.

Wegen der grossen Wichtigkeit der Gleichung 30) sollen noch einige andere Formen, unter denen das Krümmungsmass dargestellt worden ist,

---

3) Nach einer Bemerkung von Salmon hat Williamson diese Form zuerst aufgestellt. S. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Auflage, S. 634, Anm. 17.

an dieser Stelle hervorgehoben werden. Liouville[4]) hat für dasselbe folgenden Ausdruck gefunden:

$$31)\quad \begin{aligned} -K\sqrt{EG-F^2} &= \frac{\partial}{\partial p}\,\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}\cdot\frac{F}{G}-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\cdot\frac{F}{G}\right).\end{aligned}$$

Vertauscht man hierin E mit G, ∂p mit ∂q und umgekehrt, und addirt die neue Formel

$$\begin{aligned} -K\sqrt{EG-F^2} &= \frac{\partial}{\partial q}\,\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{F}{E}-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial p}\,\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{F}{E}\right),\end{aligned}$$

so kommt

$$31^*)\quad \begin{aligned} -2K\sqrt{EG-F^2} &= \frac{\partial}{\partial p}\,\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial G}{\partial p}+\tfrac{1}{2}F\frac{\partial}{\partial q}\,lg\,\frac{G}{E}-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial E}{\partial q}+\tfrac{1}{2}F\frac{\partial}{\partial p}\,lg\,\frac{E}{G}-\frac{\partial F}{\partial p}\right),\end{aligned}$$

welche Gleichung insofern bemerkenswerth ist, als jedes der beiden Glieder auf der rechten Seite aus dem andern durch den eben angegebenen Modus der Vertauschung hervorgeht.

Wenn das Curvenelement in die Form

$$\partial s^2 = \frac{\partial u^2+\partial v^2}{h^2}$$

transformirt ist, so findet ebenfalls Liouville[5]) das Krümmungsmass

$$32)\quad K = h^2\left(\frac{\partial^2\,lg\,h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\,lg\,h}{\partial v^2}\right),$$

worin h den Modulus des integrirenden Factors der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\{E\,\partial u+(F+i\sqrt{EG-F^2})\,\partial v\}=0$$

bedeutet. Die Formel 32) ist offenbar einer analytischen Verallgemeinerung fähig. Wenn man nämlich die quadratische Form

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$$

nach der in meiner früheren Abhandlung[6]) angegebenen Methode in zwei hypercomplexe Factoren A und A' zerlegt und mit α den integrirenden Fac-

4) Liouville's Journal f. Math. Bd. XIV, S. 130. Den Beweis für die Richtigkeit obiger Formeln geben *Chelini* (*Annali di scienze Matematiche e Fisiche comp. da B. Tortolini, Giugno* 1851) und *Beltrami*, *Ricerche di analisi applicata alla geometria XXIV*, *Napoli* 1865.

5) Journal f. Math. Bd. XII, S. 291, und *Application de l'analyse à la Géometrie par G. Monge, ed. Liouville, Note IV.*

6) Ueber conforme Abbildung etc., diese Zeitschrift Bd. XX.

tor der Gleichung $A=0$ bezeichnet, der mit A in einer durch die reelle Axe X_0 gehenden Ebene liegen muss, falls das Problem überhaupt lösbar sein soll, so stellt

$$P_0+i_1P_1+\ldots+i_nP_n$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\alpha A=0$$

dar und es lässt sich

$$\partial s^2=\Sigma a_{ik}\,\partial x_i\partial x_k=\frac{1}{h^2}(\partial P_0^2+\partial P_1^2+\ldots+\partial P^2_{n-1})$$

setzen, folglich wird analog der Gleichung 32)

$$K=h^2\left(\frac{\partial^2 lgh}{\partial P_0^2}+\frac{\partial^2 lgh}{\partial P_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 lgh}{\partial P^2_{n-1}}\right). \tag{33}$$

Es liegt nahe, die soeben aufgestellte Formel an dem Ausdruck zu prüfen, den **Riemann**[7]) für das Linienelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung gegeben hat. Derselbe lautet

$$\partial s=\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2_l}\sqrt{\Sigma\partial x^2_l},\quad l=0,1,\ldots(n-1), \tag{34}$$

worin α das constante Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit „nach irgend einer Flächenrichtung" bedeuten soll. Setzt man $\alpha=-\frac{1}{R^2}$, so erhält man

$$\partial s=\frac{1}{1-\frac{1}{4R^2}\Sigma x^2_l}\sqrt{\Sigma\partial x^2_l}$$

als das Element einer Mannigfaltigkeit von constanter negativer Krümmung[8]), zu welcher Kategorie auch nach **Beltrami** der sogenannte „nichteuklidische Raum" gehören würde. Setzt man zur Abkürzung

$$1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2_l=h, \tag{34*}$$

so wird

$$\partial s^2=\frac{\partial x_0^2+\partial x_1^2+\ldots+\partial x^2_n}{h^2}$$

und es lässt sich daher ∂s^2 in die beiden hypercomplexen Factoren

$$\frac{\partial x_0}{h}+i_1\frac{\partial x_1}{h}+\ldots+i_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{h}=A$$

und

$$\frac{\partial x_0}{h}-i_1\frac{\partial x_1}{h}-\ldots-i_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{h}=A'$$

zerlegen. Nun ist der integrirende Factor beider Ausdrücke $=h$, folglich

---

7) **Riemann**, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

8) *Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di matematica Serie II, Tom. II, p.* 242.

$$K = h^2\left(\frac{\partial^2 lg\, h}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 lg\, h}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 lg\, h}{\partial x^2_{n-1}}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{\alpha}{2}\, x_l, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x_l^2} = \frac{\alpha}{2},$$

folglich, wenn man die Summe bildet

$$35)\quad \begin{aligned} K &= h^2\, \Sigma_l \frac{\partial^2 lg\, h}{\partial x_l^2} \\ &= \frac{n\alpha}{2} + \frac{(n-2)\alpha^2}{8}\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x^2_{n-1}), \end{aligned}$$

welcher Ausdruck offenbar nur für $n = 2$ ein constantes Krümmungsmass giebt.

Die Formeln 31) und 32) leitet Beltrami[9]) mit Hilfe seines Differentialparameters der zweiten Ordnung ab. Derselbe ist unter Voraussetzung der gewöhnlichen Darstellung für das Curvenelement

$$\partial s^2 = E\,\partial u^2 + 2\,F\,\partial u\,\partial v + G\,\partial v^2$$

durch die Gleichung

$$36)\quad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}$$

definirt. Setzt man in dieser Gleichung

$$\varphi = lg\, h,$$

worin h dieselbe Bedeutung hat, wie in 32), so wird das Krümmungsmass einfach ausgedrückt durch die Formel

$$K = \Delta_2\, lg\, h.$$

In einer spätern Abhandlung[10]) hat Beltrami, gestützt auf eine Arbeit von Jacobi[11]), die Theorie der Differentialparameter auf n Variabele ausgedehnt. Jacobi hatte bemerkt, dass zur Transformation der Laplace'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

die Kenntniss des transformirten Ausdrucks für das Quadrat des Linienelements

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

allein schon hinreichend sei. Denselben Gedanken führt Beltrami unter weit allgemeineren Voraussetzungen aus, indem er sowohl die Beschränkung auf drei Variabele fallen lässt, als auch die specielle Form das Linien-

---

9) *Beltrami, Ricerche etc., Art. XV.*

10) *Sulla teorica generale dei parametri differenziali, Bologna* 1869.

11) Ueber eine particuläre Lösung der Gleichung des Potentials, *Opusc. math.* Bd. 2 und Crelle's Journal Bd. 36.

elements aufgiebt. Die Hauptmomente seiner Entwickelung sind folgende. Wenn das Linienelement

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k$$

durch irgend eine Substitution

$$\partial x_r = p_{1r} \partial y_1 + p_{2r} \partial y_2 + \ldots + p_{nr} \partial y_n, \quad r = 1, 2, \ldots n$$

in

$$\partial s^2 = \Sigma b_{ik} \partial y_i \partial y$$

übergeht, so wird durch dieselbe Substitution auch der erste Differentialparameter, welcher durch die Gleichungen

$$\varDelta_1 U = \Sigma \alpha_{ik} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \, lg\, a}{\partial a_{ik}},$$

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

definirt ist, in die entsprechende Form

$$\Sigma \beta_{ik} \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial U}{\partial y_k},$$

$$\beta_{ik} = \frac{\partial \, lg\, b}{\partial b_{ik}},$$

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

übergeführt. Ebenso wird das $n$fache Integral

$$\int^n W \sqrt{a}\, \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n,$$

wenn W eine Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeutet, durch die gleiche Substitution in

$$\int^n W \sqrt{b}\, \partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_n$$

transformirt. Setzt man nun

$$W = \varDelta_1 U,$$

so besteht die Bedingung, dass die erste Variation des Integrals

$$\int^n \varDelta_1 U . \sqrt{a}\, \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n$$

Null werden soll, in dem Verschwinden des Ausdrucks

37)
$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{\partial (U_r \sqrt{a})}{\partial x_r},$$
worin zur Abkürzung

37*)
$$U_r = \tfrac{1}{2} \frac{\partial . \Delta_1 U}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x_r}\right)}$$

gesetzt ist. Dieser Ausdruck, welcher der zweite Differentialparameter der Form $\Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k$ genannt wird, ist ebenso, wie der erste, covariant zu derselben. Für den einfachsten Fall
$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$
wird
$$\Delta_1 U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$$
und
$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$
welches bekanntlich der erste und zweite Differentialparameter Lamé's sind.

Wenn demnach die Form $\Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k$ in zwei hypercomplexe Factoren zerlegt wird und h den Modulus des integrirenden Factors derselben bedeutet, so wird vom rein analytischen Standpunkte aus Nichts im Wege stehen, der Gleichung

38)
$$k = \Delta_2 \, lg\, h$$
eine Ausdehnung auf n Variabele zu geben. Auch von dieser Gleichung wollen wir eine Anwendung auf das Riemann'sche Curvenelement
$$\partial s^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \Sigma x_l^2} \Sigma \partial x_l^2, \quad l = 1, 2, \ldots n$$
versuchen. Es ist, wie sich aus 37) und 37*) ergiebt:
$$\begin{aligned}\sqrt{a}\, \Delta_2 \, lg\, h = & \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\alpha_{11} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_1} + \alpha_{12} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{1n} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_n}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\alpha_{21} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_1} + \alpha_{22} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_2} + \ldots + a_{2n} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_n}\right) \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\alpha_{n1} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_1} + \alpha_{n2} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{nn} \frac{\partial\, lg\, h}{\partial x_n}\right).\end{aligned}$$
Setzt man daher in der Form $\Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k$ gemäss der Bezeichnung in 34*)
$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = \frac{1}{h^2},$$
dagegen
$$a_{ik} = 0,$$
wenn i und k verschieden sind, so kommt
$$\sqrt{a} = \frac{1}{h^n}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{nn} = \frac{1}{h^{2n-2}}$$
und

$$\alpha_{ik} = 0$$

für ungleiche i und k, folglich wird

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\alpha_{ii}}{\sqrt{a}} \frac{\partial \, lg\, h}{\partial x_i} = \frac{1}{h^n} \left[h \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} - (n-1) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right]$$

und endlich

$$39) \qquad K = \Delta_2 \, lg\, h = \frac{n}{2}\, \alpha - \frac{n-2}{8}\, \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

welcher Ausdruck bis auf das Vorzeichen des zweiten Gliedes rechts in überraschender Weise mit 35) übereinstimmt.

Beide Formeln 33) sowohl als 38) geben demnach, wenn man sie auf das Riemann'sche Curvenelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung anwendet, nur für $n=2$ ein befriedigendes Resultat. Hieraus kann jedoch noch nicht geschlossen werden, dass die Form des Riemann-schen Elementes für $n > 2$ unzulässig sei. Es leuchtet vielmehr ein, dass die Formeln 35) und 38) nicht im geometrischen Sinne als Verallgemeinerungen des Gauss'schen Krümmungsmasses anzusehen sind, was schon aus der Thatsache gefolgert werden kann, dass sie zwar für $n=2$ die Krümmung einer Fläche, nicht aber für $n=1$ die Krümmung einer ebenen Curve angeben. Denn in diesem Falle wird $h=1$ und folglich in beiden Formeln $K=0$.

Dieselbe Bemerkung gilt nun auch für gewisse Differentialausdrücke von Christoffel und Lipschitz, welche zwar in sehr naher Beziehung zum Gauss'schen Krümmungsmass stehen — wie dies ja auch von den beiden soeben betrachteten Formeln zugegeben werden muss —, jedoch nicht als Verallgemeinerungen desselben geometrisch gedeutet werden können, da sie für den einfachsten Fall $n=1$ keine Giltigkeit besitzen. Um die erwähnten Ausdrücke mit den von mir gefundenen Formeln bequemer vergleichen zu können, will ich die wesentlichsten hierher gehörigen Punkte der Lipschitz'schen Abhandlung (s. Crelle's Journal Bd. 70) hervorheben.

Das Verschwinden des Krümmungsmasses einer Fläche ist bekanntlich das Kriterium dafür, dass die Fläche in eine Ebene abwickelbar ist und dass dem Curvenelement die Gestalt

$$\partial s^2 = \partial p^2 + \partial q^2$$

gegeben werden kann, worin $p=0$, $q=0$ geodätische, sich rechtwinklig schneidende Linien bedeuten. Für die Ebene, welche zu derselben Gattung von Flächen gehört, ist

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$$

und die geodätischen Linien $x=0$, $y=0$ fallen mit den gewöhnlichen recht-winkligen Coordinatenaxen zusammen. Setzt man

$$40) \qquad \frac{\partial a_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{h}}} + \frac{\partial a_{\mathfrak{a}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} - \frac{\partial a_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{h}},$$

worin a_{ik} die Coefficienten der quadratischen Form

$$a_{11}\,\partial x_1^2 + 2a_{12}\,\partial x_1\,\partial x_2 + a_{22}\,\partial x_2^2$$

bezeichnen, so lässt sich nach Lipschitz dem Gauss'schen Krümmungsmasse K die Gestalt geben

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\partial f_{122}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{121}}{\partial x_2}\right) \\ & + \frac{1}{4\Delta^2}\{a_{11}(f^2_{212} - f_{211} f_{222}) + a_{12}(f_{211} f_{122} - 2 f_{112} f_{212} + f_{111} f_{222}) \\ & \qquad + a_{22}(f^2_{112} - f_{111} f_{122})\}, \end{aligned} \tag{41}$$

worin Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bedeutet. Diese Gleichung kann, wenn durch $A_{\mathfrak{cb}}$ der Coefficient von $a_{\mathfrak{cb}}$ in der Determinante Δ bezeichnet wird, kürzer geschrieben werden

$$-2K\Delta = \left(\frac{\partial f_{112}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{122}}{\partial x_1}\right) + \tfrac{1}{2}\,\Sigma_{\mathfrak{cb}}\,\frac{A_{\mathfrak{cb}}}{\Delta}\,(f_{\mathfrak{c}11} f_{\mathfrak{b}22} - f_{\mathfrak{c}12} f_{\mathfrak{b}21}) \tag{41*}$$

und stimmt dann genau überein mit der Formel

$$K = \frac{1}{a}\left\{\frac{\partial}{\partial p_1}\begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_2}\begin{vmatrix} 21 \\ 1 \end{vmatrix}\right\} + \frac{1}{a^2}\,\Sigma_{lm}\,\alpha_{lm}\left\{\begin{vmatrix} 21 \\ l \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 21 \\ m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 22 \\ l \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 11 \\ m \end{vmatrix}\right\},$$

die man erhält, wenn in 26) und 24*)

$$n = 2, \quad i = k = 2, \quad r = s = 1$$

gesetzt wird. Nun gehört, wie Lipschitz nachweist, zu jeder wesentlich positiven quadratischen Form

$$f = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\alpha_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k,$$

deren Determinante a nicht verschwindet, eine zweite Form, welche nach vier Systemen von Differentialen der Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$, die mit $\partial x_{\mathfrak{a}}$, $\delta x_{\mathfrak{b}}$, $\partial u_{\mathfrak{g}}$, $\delta u_{\mathfrak{h}}$ bezeichnet werden mögen, quadrilinear, nach den Verbindungen $\partial x_{\mathfrak{a}}\,\delta x_{\mathfrak{b}} - \delta x_{\mathfrak{a}}\,\partial x_{\mathfrak{b}}$ und $\partial u_{\mathfrak{g}}\,\delta u_{\mathfrak{h}} - \delta u_{\mathfrak{g}}\,\partial u_{\mathfrak{h}}$ bilinear und symmetrisch ist und deren Coefficienten mit Hilfe von einmaliger und zweimaliger partieller Differentiation der Coefficienten der gegebenen Form in Bezug auf die Variabelen derselben gebildet werden. Diese zweite Form hat die Eigenschaft, sobald die gegebene Form und sie selbst durch Einführung neuer Variabelen transformirt wird, sich mit der gegebenen Form so zu verändern, dass ihre Beziehung zu derselben unverändert bleibt. Das nothwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass die gegebene Form in eine Form mit constanten Coefficienten und weiterhin in ein Aggregat von Quadraten der Differentiale verwandelt werden kann, besteht darin, dass die in Rede stehende, ihr zugehörige quadrilineare Form identisch verschwindet. Bei den Formen von zwei Differentialen gehen das Kriterium der quadrilinearen Form und das Kriterium des Krümmungsmasses in einander über. Diese quadrilineare Form ist

$$
42)\quad \psi = \Sigma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{h}} \left\{ \left(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}}{\partial x} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} \right) + \tfrac{1}{2} \Sigma_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}{\Delta} (f_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{g}} f_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{h}} - f_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}) \right\} \partial u_{\mathfrak{a}}\, \delta u_{\mathfrak{b}}\, \partial x_{\mathfrak{g}}\, \delta x_{\mathfrak{h}}.
$$

Die Entwickelung des ersten Gliedes rechts giebt

$$
\frac{\partial f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{h}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} = \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}\, \partial x_{\mathfrak{h}}} + \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{b}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{g}}} - \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}\, \partial x_{\mathfrak{g}}} - \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{b}\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{h}}}.
$$

Da der Coefficient von $\partial u_{\mathfrak{a}}\, \delta u_{\mathfrak{b}}\, \partial x_{\mathfrak{g}}\, \delta x_{\mathfrak{h}}$ sich in den entgegengesetzten Werth verwandelt, sobald man entweder $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$, oder $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}$ vertauscht, aber in sich selbst übergeht, sobald man gleichzeitig $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{h}$ verwechselt, so kann ψ als bilineare Function der beiden Systeme von $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungen $\partial u_{\mathfrak{a}}\, \delta u_{\mathfrak{b}} - \delta u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}$ und $\partial x_{\mathfrak{g}}\, \delta x_{\mathfrak{h}} - \delta x_{\mathfrak{g}}\, \partial x_{\mathfrak{h}}$ dargestellt werden, so dass man erhält

$$
43)\quad \psi = \Sigma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{h}} \left\{ \left(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{h}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} \right) + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{A_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}{\Delta} (f_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{g}} f_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{h}} - f_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}) \right\} (\partial u_{\mathfrak{a}}\, \delta u_{\mathfrak{b}} - \delta u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}) (\partial x_{\mathfrak{g}}\, \delta x_{\mathfrak{h}} - \delta x_{\mathfrak{g}}\, \partial x_{\mathfrak{h}}).
$$

Für die Zahl von zwei Variabelen besteht ψ nur aus einem einzigen Gliede und hat den Werth

$$
44)\quad \psi = \left\{ \left(\frac{\partial f_{112}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{122}}{\partial x_1} \right) + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{A_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}{\Delta} (f_{\mathfrak{c}11} f_{\mathfrak{b}22} - f_{\mathfrak{c}12} f_{\mathfrak{b}21}) \right\} (\partial u_1\, \delta u_2 - \delta u_1\, \partial u_2)(\partial x_1\, \delta x_2 - \delta x_1\, \partial x_2).
$$

Es findet also zwischen dem Krümmungsmass K [41*)] und der Form ψ für $n=2$ die Beziehung statt

$$
45)\quad \psi = -2K\Delta\, (\partial u_1\, \delta u_2 - \delta u_1\, \partial u_2)(\partial x_1\, \delta x_2 - \delta x_1\, \partial x_2).
$$

Dieselbe Form hat auch Christoffel unabhängig von Lipschitz bei Gelegenheit einer Untersuchung gefunden, die ursprünglich durch die Ausdehnung des Problems der aufeinander abwickelbaren Flächen auf Gebiete von n Dimensionen veranlasst worden war (s. Crelle's Journal Bd. 70). Sie ist in der betreffenden Abhandlung mit G_4 bezeichnet und durch die Gleichung

$$
46)\quad G_4 = (\alpha\delta\beta\gamma) = \Sigma_{ghik}\, (gkhi)\, u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma u^k_\delta
$$

definirt. Der Coefficient $(gkhi)$ hat, wenn das Curvenelement in der Gestalt

$$
\partial s^2 = \Sigma \omega_{ik}\, \partial x_i\, \partial x_k
$$

gegeben ist, den Werth

$$
47)\quad (gkhi) = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_{gi}}{\partial x_h\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \omega_{hk}}{\partial x_g\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 \omega_{gh}}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ik}}{\partial x_g\, \partial x_h} \right) + \Sigma_{\alpha\beta} \frac{E\alpha\beta}{E} \left(\begin{vmatrix} g\,i \\ \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h\,k \\ \beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g\,h \\ \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i\,k \\ \beta \end{vmatrix} \right),
$$

worin

$$E_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial \omega_{\alpha\beta}}$$

und

$$E = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & & \omega_{nn} \end{vmatrix}$$

ist. Vertauscht man g, i, h, k bezüglich mit i, r, k, s, so ergiebt sich mit Rücksicht auf 24*) zwischen dem Christoffel'schen Coefficienten $(iskr)$ und dem allgemeinen Gliede unserer Determinante die einfache Beziehung

47*) $$D_{ik} D_{rs} - D_{ir} D_{ks} = a(iskr).$$

Wir wollen nun auf den speciellen Fall $n=3$, den auch Christoffel ausführlicher behandelt hat, etwas näher eingehen, um an einem Beispiele den Unterschied zwischen der Form ψ oder G_4 und der von uns für das Krümmungsmass aufgestellten Gleichung deutlicher hervortreten zu lassen. Für $n=3$ ist das Quadrat des Linienelements

$$\partial s^2 = a_{11} \partial p_1^2 + 2a_{12} \partial p_1 \partial p_2 + 2a_{13} \partial p_1 \partial p_3 + a_{22} \partial p_2^2 + 2a_{23} \partial p_2 \partial p_3 + a_{33} \partial p_3^2.$$

Die zugehörige Form ψ oder G_4 besitzt in diesem Falle sechs Coefficienten A, die folgende Werthe haben:

48)
$$\begin{aligned}
A_{11} &= \tfrac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial p_2 \partial p_3} - \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial p_3^2} - \frac{\partial^2 a_{33}}{\partial p_2^2}\right) + \Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \left\{ \begin{vmatrix} 23 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 23 \\ k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 22 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 33 \\ k \end{vmatrix} \right\}, \\
A_{12} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial p_3^2} + \frac{\partial^2 a_{33}}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial^2 a_{31}}{\partial p_3 \partial p_2} - \frac{\partial^2 a_{32}}{\partial p_3 \partial p_1}\right) \\
&\quad + \Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \left\{ \begin{vmatrix} 33 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 31 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 32 \\ k \end{vmatrix} \right\}, \\
A_{13} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{31}}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial p_3 \partial p_1} - \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial p_2 \partial p_1} - \frac{\partial^2 a_{21}}{\partial p_2 \partial p_3}\right) \\
&\quad + \Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \left\{ \begin{vmatrix} 22 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 31 \\ k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 23 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 21 \\ k \end{vmatrix} \right\}, \\
A_{22} &= \tfrac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 a_{31}}{\partial p_3 \partial p_1} - \frac{\partial^2 a_{33}}{\partial p_1^2} - \frac{\partial^2 a_{11}}{\partial p_3^2}\right) + \Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \left\{ \begin{vmatrix} 31 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 31 \\ k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 33 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 \\ k \end{vmatrix} \right\}, \\
A_{23} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 a_{11}}{\partial p_2 \partial p_3} - \frac{\partial^2 a_{12}}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{\partial^2 a_{13}}{\partial p_1 \partial p_2}\right) \\
&\quad + \Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \left\{ \begin{vmatrix} 11 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 23 \\ k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 13 \\ k \end{vmatrix} \right\}, \\
A_{33} &= \tfrac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial^2 a_{11}}{\partial p_2^2} - \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial p_1^2}\right) + \Sigma_{ik} \frac{\alpha_{ik}}{a} \left\{ \begin{vmatrix} 12 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 11 \\ i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ k \end{vmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Demnach wird

$$
\begin{aligned}
G_4 = \psi = & A_{11}(\partial u_2\,\delta u_3 - \partial u_3\,\delta u_2)(\partial x_2\,\delta x_3 - \partial x_3\,\delta x_2) \\
& + A_{12}(\partial u_2\,\delta u_3 - \partial u_3\,\delta u_2)(\partial x_3\,\delta x_1 - \partial x_1\,\delta x_3) \\
& + A_{13}(\partial u_2\,\delta u_3 - \partial u_3\,\delta u_2)(\partial x_1\,\delta x_2 - \partial x_2\,\delta x_1) \\
& + A_{22}(\partial u_3\,\delta u_1 - \partial u_1\,\delta u_3)(\partial x_3\,\delta x_1 - \partial x_1\,\delta x_3) \\
& + A_{23}(\partial u_3\,\delta u_1 - \partial u_1\,\delta u_3)(\partial x_1\,\delta x_2 - \partial x_2\,\delta x_1) \\
& + A_{33}(\partial u_1\,\delta u_2 - \partial u_2\,\delta u_1)(\partial x_1\,\delta x_2 - \partial x_2\,\delta x_1).
\end{aligned} \tag{49}
$$

Dagegen ergiebt sich aus unserer Formel 26) für $n=3$ das Krümmungsmass

$$
K = \frac{1}{a^{3/2}} \cdot \frac{1}{D_{11}} \begin{vmatrix} D_{11}D_{22} - D^2_{12}, & D_{11}D_{32} - D_{31}D_{12} \\ D_{11}D_{23} - D_{21}D_{13}, & D_{11}D_{33} - D_{13}D_{31} \end{vmatrix};
$$

durch Vergleichung der Werthe der Grössen A mit dem Ausdrucke $D_{ik}D_{rs} - D_{ir}D_{ks}$ [s. 24*) und 25)] findet man aber

$$
\begin{aligned}
D_{22}D_{33} - D_{32}D_{23} &= \quad a\,.\,A_{11}, \\
D_{12}D_{33} - D_{31}D_{23} &= -\,a\,.\,A_{22}, \\
D_{22}D_{31} - D_{21}D_{32} &= -\,a\,.\,A_{13}, \\
D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} &= \quad a\,.\,A_{33}, \\
D_{11}D_{23} - D_{21}D_{13} &= -\,a\,.\,A_{23}, \\
D_{11}D_{33} - D_{31}D_{13} &= \quad a\,.\,A_{22},
\end{aligned} \tag{50}
$$

so dass das Krümmungsmass die Gestalt

$$
K = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{D_{11}} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{51}
$$

annimmt, in welcher es unmittelbar mit der Form ψ oder G_4 (Gleichung 49) verglichen werden kann. Wenn diese Form identisch verschwindet, was nur dann der Fall ist, sobald die Coefficienten A Null werden, so verschwindet auch das Krümmungsmass. Aber auch das identische Verschwinden des letzteren, d. h. das Nullwerden der Glieder der Determinante 51), zieht das Verschwinden der Form ψ nach sich. Es zeigt sich nämlich — was, wie mir scheint, von Christoffel und Lipschitz nicht bemerkt worden ist —, dass das Verschwinden der Grössen A nicht unabhängig von einander stattfindet, sondern dass, wenn eine bestimmte Anzahl derselben Null wird, dies auch das Nullwerden aller übrigen zur Folge hat. In vorliegendem Beispiel genügt es, dass drei der Grössen A verschwinden, also z. B. die in 51) vorkommenden Glieder der Determinante A_{22}, A_{23}, A_{33}. Denn aus 50) ergiebt sich in diesem Falle sofort

$$
\begin{aligned}
D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} &= 0, \\
D_{11}D_{23} - D_{21}D_{13} &= 0, \\
D_{11}D_{33} - D_{31}D_{13} &= 0,
\end{aligned}
$$

woraus dann leicht die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
D_{22}D_{33} - D_{32}D_{23} &= 0, \\
D_{12}D_{33} - D_{31}D_{23} &= 0, \\
D_{22}D_{31} - D_{21}D_{32} &= 0
\end{aligned}
$$

abgeleitet werden können. Wenn also A_{22}, A_{23}, A_{33} Null werden, so müssen auch — da a nicht Null sein darf — die Grössen A_{11}, A_{12}, A_{13} verschwinden.

Das Krümmungsmass K hat aber auch den Werth Null, wenn zwischen A_{22}, A_{23}, A_{33} ein solcher Zusammenhang stattfindet, dass

$$A_{22} \cdot A_{33} - A^2_{23} = 0$$

ist. In diesem Falle verschwindet die Form ψ nicht.

Wenn nun schon hierin ein wesentlicher Unterschied zwischen der Form ψ und dem Krümmungsmass K bemerkbar ist, so hat man doch die Hauptdifferenz in dem Umstande zu suchen, dass die Coefficienten der Form ψ reine Functionen der Coefficienten a_{ik} des Linienelements sind, während das Krümmungsmass K einen Factor $\frac{1}{D_{11}}$ enthält, welcher nicht aus diesen Coefficienten bestimmt werden kann.

Es ist von Interesse, zu erfahren, wie die Form ψ sich zu dem Riemann'schen Linienelement verhält. Wir beschränken uns hierbei auf die Betrachtung eines Raumes von drei Dimensionen, legen also das Curvenelement in der Form

$$\partial s^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right)^2} (\partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \partial x_3^2)$$

zu Grunde. Die Formeln 48) ergeben

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right)^4},$$

$$A_{12} = A_{23} = A_{13} = 0,$$

folglich wird die Form

$$\psi = \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right)^4} \{(\partial u_1\, \delta u_2 - \partial u_2\, \delta u_1)(\partial x_1\, \delta x_2 - \partial x_2\, \delta x_1)$$
$$+ (\partial u_2\, \delta u_3 - \partial u_3\, \delta u_2)(\partial x_2\, \delta x_3 - \partial x_3\, \delta x_2)$$
$$+ (\partial u_3\, \delta u_1 - \partial u_1\, \delta u_3)(\partial x_3\, \delta x_1 - \partial x_1\, \delta x_3)\}.$$

Also auch in diesem Falle — da der Exponent im Nenner rechts nicht 6, sondern 4 ist — wird das erwartete Resultat nicht erhalten. Dass es aus der von uns aufgestellten Formel 51) überhaupt nicht abgeleitet werden kann, geht daraus hervor, dass der Coefficient $\frac{1}{D_{11}}$ die ursprünglichen Coordinaten des ebenen Raumes von vier Dimensionen enthält, aus welchem der constant gekrümmte Raum von drei Dimensionen ausgeschieden ist.

(Fortsetzung folgt.)

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

XVIII.

Die Grundlagen der Geometrie.

Von

J. C. Becker,

Professor am Gymnasium in Mannheim.

(Hierzu Tafel VI, Fig. 1—12.)

Die Untersuchungen Riemann's „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" haben die Beantwortung zweier sehr verschiedener Fragen zum Gegenstande, welche sich etwa in folgender Weise formuliren lassen:

1. „Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Voraussetzungen, die wir über den Raum selbst machen müssen, damit die Sätze der Geometrie ohne weitere Axiome begründet werden können?"

2. „Woher schöpfen wir unsere Ueberzeugung von der Wahrheit der Euklid'schen Axiome, und wie weit ist dieselbe berechtigt?"

Die vorliegende Abhandlung hat nur die Beantwortung der ersteren Frage zum Gegenstande, und dürfte, falls ihre Ergebnisse als richtig befunden werden, künftigen deductiven Darstellungen der Geometrie als Grundlage dienen.

Denn es ist jedenfalls eine schwache Seite der jetzigen synthetischen Geometrie, dass sie, wie Riemann sagt, „von den ersten Grundbegriffen nur Nominaldefinitionen giebt, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten, ohne dass man einsieht, ob und inwieweit die Verbindung jener Begriffe mit diesen Axiomen eine nothwendige ist". So sind ausser dem Parallelenaxiom insbesondere die Axiome von der Geraden und von der Ebene anstössig. Sollen die Eigenschaften der geometrischen Figuren als nothwendige Folgen der Natur des Raumes erscheinen, was sie doch ohne Zweifel sind, so dürfen auch keine anderen Voraussetzungen gemacht werden, als solche, welche sich auf den Raum selbst beziehen.

Helmholtz hat zwar in seinen Untersuchungen „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie" sechs Postulate aufgestellt, welche den Euklid'schen Raum als besondere Art der dreifach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeiten charakterisiren. Er hat sich jedoch darauf beschränkt, den Nachweis zu liefern, dass die vier ersten seiner Postulate zu demselben analytischen Charakteristikon führen, worin auch Riemann die besondere Eigenthümlichkeit des Euklid'schen Raumes erkennt und welches darin besteht, dass das Krümmungsmass des Raumes überall Null sei.

Da aber eine synthetische Darstellung der Geometrie mit diesem Ergebnisse Nichts anfangen kann, ist damit für die Geometrie selbst erst dann Etwas gewonnen, wenn der Versuch gelungen, aus den in die Sprache der Geometrie zurückübersetzten Postulaten von Helmholtz die übrigen Euklid'schen Axiome zu demonstriren.

Ob mir dieser Versuch gelungen, mögen Andere entscheiden. Uebrigens muss ich bemerken, dass meine Postulate nur als „freie" Uebersetzung der Helmholtz'schen gelten können, da die beiden letzten wesentlich von dem Originale abweichen.

Ich setze zunächst voraus:

I. **Der Raum ist ohne Unterbrechung und über jede Grenze hinaus ausgedehnt.**

II. **Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit der in ihm vorstellbaren ausdehnungslosen Punkte.**

Ein in ihm Ausgedehntes ist also entweder eine Linie, d. h. eine einfach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit von Punkten, oder eine Fläche, d. h. eine zweifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit von Punkten, oder ein Körper, d. h. ein Theil des Raumes.

Die Grenze eines Raumtheiles (Körpers) ist eine Fläche, die eines Flächentheiles eine Linie, die einer Linie ein Punkt.

III. **Die Figur einer discreten oder stetigen Mannigfaltigkeit von Punkten im Raume ist unabhängig vom Orte.**

Dazu gehört zunächst, dass jede Linie, welche zwei Punkte verbindet, beliebig im Raume verschoben werden kann, ohne ihre Form und Länge zu ändern. Jedes Punktepaar, mit dem ihre Endpunkte durch Verschiebung zur Coincidenz gebracht werden können, hat dann denselben Abstand wie diese. Findet bei der Bewegung eines Raumgebildes keine Aenderung der Figur statt, so muss der Abstand zwischen je zweien seiner Punkte ungeändert bleiben.

Man kann dieses Postulat demnach auch so ausdrücken:

Jede discrete oder stetige Mannigfaltigkeit von Punkten im Raume kann nach allen Seiten ohne Hinderniss so bewegt werden, dass der Abstand zwischen je zweien derselben unverändert bleibt.

IV. **Wird eine Figur in einem oder zwei Punkten festgehalten, so ist ihre Beweglichkeit nur insoweit beschränkt, als die Lage ihrer übrigen Punkte durch ihre Distanz von den festen beschränkt ist.**

Nun folgt zwar aus den beiden ersten Postulaten, dass der Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen denselben Abstand haben, eine Fläche ist, welche überall zusammenhängt, und kann auch ohne weitere Voraussetzung bewiesen werden, dass diese Fläche, die Kugelfläche, alle Punkte einschliesst, welche näher an dem gegebenen Punkte, dem Centrum, liegen und die weiter entfernten ausschliesst. (Zwei Punkte haben eine grössere Distanz wie zwei andere, wenn die Endpunkte eines Theiles einer sie verbindenden kürzesten Linie dieselbe Distanz haben wie diese.)

Wie jedoch die Lage eines Punktes von seiner Distanz von zwei festen Punkten abhängt, lässt sich aus den drei ersten Postulaten nicht erkennen. Wir müssen demnach noch zwei weitere Postulate hinzufügen, welche mit den vier ausgesprochenen zusammen den Raum als den charakterisiren, wie ihn unser Anschauungsvermögen voraussetzt (oder wie ihn nach der Meinung Anderer die Erfahrung uns kennen lehrt, oder wie wir ihn uns vorzustellen gewohnt sind):

V. **Durch je zwei Punkte des Raumes geht eine nach beiden Seiten unbegrenzte, sich selbst nicht schneidende Linie, deren sämmtliche Punkte der Lage nach durch ihren Abstand von den gegebenen so bestimmt sind, dass kein zweiter Punkt dieselbe Distanz von den gegebenen Punkten haben kann, wie irgend einer dieser Linie.**

VI. **Ist die Lage eines Punktes durch seine Distanz von zwei beliebigen festen Punkten des Raumes nicht bestimmt, so erfüllen alle Punkte, welche von diesen festen Punkten denselben Abstand haben wie jener, mit demselben stetig eine einzige sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie.**

Die Linie, deren Punkte durch ihre Abstände von irgend zweien derselben der Lage nach bestimmt sind, ist die Gerade.

Die Linie, welche alle die Punkte enthält, die von zweien gegebenen Punkten dieselben Abstände haben, ist die Kreislinie. Die durch die festen Punkte gehende Gerade möge die Axe der Kreislinie heissen.

Es ist selbstverständlich, dass die Summe der Abstände zweier Punkte von einem dritten nicht kleiner und ihre Differenz nicht grösser sein kann, als der Abstand der Punkte selbst. Man könnte demnach das fünfte Postulat auch durch das folgende ersetzen:

Die Lage eines Punktes im Raume ist bestimmt, wenn die Summe oder Differenz seiner Abstände von zweien festen Punkten gleich ist dem Abstande dieser Punkte.

Eine Bewegung, bei der ein Punkt fest bleibt, heisst centrale Drehung und der feste Punkt ihr Centrùm. Eine Bewegung, bei der zwei Punkte fest bleiben, heisst axiale Drehung oder Rotation. Bei einer solchen bleiben alle Punkte fest, welche in der durch die als fest angenommenen Punkte bestimmten Geraden liegen, und diese Gerade heisst die Axe der Rotation. Alle nicht in der Axe liegenden Punkte müssen sich in den Kreisen bewegen, denen sie nach Axiom VI angehören.

Besteht die Figur blos aus einer Geraden und einem Punkte ausserhalb derselben, so bewegt sich nur dieser Punkt, wenn zwei Punkte der Geraden festgehalten werden. Da aber dabei die Distanzen zwischen dem bewegten und den festen Punkten sich nicht ändern, so folgt, dass alle Punkte einer Kreislinie von jedem Punkte ihrer Axe gleichweit abstehen.

Ausser dieser Eigenschaft der Kreislinie und der vorher erwähnten Eigenschaft der Kugelfläche ergeben sich aus den vorstehenden Postulaten zunächst folgende Lehrsätze:

1. Zwei Gerade fallen zusammen (decken einander), wenn sie zwei Punkte gemein haben. Geradlinige Strecken sind also congruent, wenn ihre Endpunkte gleiche Distanz haben.

2. Die Länge einer Geraden ist der Distanz ihrer Endpunkte proportional und wächst mit dieser über jedes angebbare Mass.

3. Alle geraden Strecken vom Centrum einer Kugel nach ihrer Oberfläche (Radien) sind gleichlang, und zwar länger als die, welche das Centrum mit innerhalb der Kugel gelegenen Punkten verbinden, und kürzer als die, welche es mit ausserhalb gelegenen Punkten verbinden.

4. Haben zwei Kugelflächen einen Punkt der Geraden gemein, welche ihre Centren verbindet (ihrer Centrallinie), so haben sie ausser diesem keinen Punkt mehr gemein.

5. Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten ist die sie verbindende geradlinige Strecke.

Beweis. Seien A und B (Fig. 1) die beiden Punkte, C ein nicht auf der Geraden AB liegender Punkt, und AB grösser wie die geraden Strecken AC und CB, so kann auf AB ein Punkt D so bestimmt werden, dass $AD = AC$ ist, und D liegt dann mit C auf derselben Kugelfläche, welche A zum Centrum und AD zum Radius hat. Diese Kugelfläche hat mit derjenigen, welche B zum Centrum hat und durch D geht, nur den Punkt D gemein und liegt mit allen anderen Punkten, also auch mit C ausserhalb derselben, d. h. $CB > DB$, mithin auch $AC + CB > AD + DB$ etc.

Definitionen. Eine aus zweien in einem Endpunkte zusammentreffenden geraden Strecken bestehende Figur heisst ein Winkel, die ihn bildenden Strecken seine Schenkel, ihr gemeinsamer Endpunkt sein Scheitel. Winkel heissen einander gleich, wenn sie so aufeinandergelegt werden können, dass die Scheitel zusammenfallen und die Schenkel des einen die des andern ganz oder theilweise decken (d. h. von der Länge der Schenkel wird bei Vergleichung der Winkel abstrahirt).

Ein Winkel heisst ein gestreckter, wenn seine Schenkel Theile derselben Geraden sind.

Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben, während die beiden anderen unter sich einen gestreckten Winkel bilden, heissen Nebenwinkel.

Sind die Schenkel eines Winkels die Verlängerungen der Schenkel eines andern Winkels, so heisst er dessen Scheitelwinkel.

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar:

Jeder Winkel, dessen Schenkel nicht einer Geraden angehören, hat einen Scheitelwinkel und zwei Nebenwinkel, und ist selbst der Scheitelwinkel seines Scheitelwinkels. Ferner sind die Nebenwinkel desselben Winkels unter sich Scheitelwinkel.

Lehrsatz 6. Zwei Winkel sind gleich, wenn sie gleiche Schenkel haben und die Distanz der nicht gemeinsamen Endpunkte der Schenkel bei dem einen so gross ist wie bei dem andern.

Beweis. Ist (Fig. 2) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ und $AC = A'C'$, so kann man den Winkel $A'B'C'$ so verschieben, dass B' mit B und C' mit C zusammenfällt; dann liegen A und A' auf derselben Kreislinie, deren Axe BC ist. Dreht man demnach $A'B'C'$ um BC als Axe, so kann auch A' mit A zur Deckung gebracht werden. Da aber dann auch AB und $A'B'$ einander decken, so müssen die Winkel einander gleich sein.

Lehrsatz 7. Jeder Winkel ist seinem Scheitelwinkel gleich.

Beweis. Sei ABC (Fig. 3) der gegebene Winkel, BE die Verlängerung von AB, BD die von CB, also EBD der Scheitelwinkel von ABC, und macht man $BA = BC = BD = BE$, ferner auf einer andern Geraden $B'C' = D'B' = DB$, bestimmt endlich die Lage von A' so, dass $D'A' = DA$, $B'A' = BA$, also $\angle D'B'A' = \angle DBA$, so kann zunächst die Figur $D'B'A'C'$ so gelegt werden, dass D' mit D, B' mit B, A' mit A zusammenfällt; dann fällt aber auch $B'C'$ in die Verlängerung von DB und deckt mithin die ihr gleiche Strecke BC derselben, d. h. die Winkel ABC und $A'B'C'$ sind einander gleich. Andererseits kann aber die Figur $D'B'A'C'$ auch so gelegt werden, dass D' mit A, B' mit B und A' mit D zusammenfällt, und dann fällt $B'C'$ in die Verlängerung von AB und deckt davon die ihr gleiche Strecke BE; der Winkel $A'B'C'$ ist mithin auch dem Winkel DBE und dieser also auch dem Winkel ABC gleich.

Hierin ist auch der Beweis enthalten für den folgenden Satz:

Lehrsatz 8. Sind zwei Winkel einander gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel einander gleich.

Lehrsatz 9. Jeder Punkt ausserhalb einer Geraden kann durch eine Gerade so mit dieser verbunden werden, dass die entstehenden Nebenwinkel einander gleich sind.

Beweis. Sei AB (Fig. 4) die gegebene Gerade, C ein Punkt ausserhalb derselben, so sind die Strecken von C nach Punkten der Geraden AB von verschiedener Länge, und können alle Werthe annehmen von einer kürzesten Länge an bis über jeden angebbaren Werth. Denn bewegt sich ein Punkt A von einer Stelle O aus, in welcher er den kürzesten Abstand von C hat, auf AB nach einer Seite fort, so wird sein Abstand OA von der Anfangslage stets grösser und kann bis ins Unendliche vergrössert werden. Da aber der Abstand OA von O immer kleiner sein muss als $CA + OC$, so muss auch CA über alle Grenzen wachsen, und da bei stetiger Fortbewegung eines Punktes seine Distanz von einem festen Punkte sich nur stetig ändern kann, so muss auf jeder Seite von O mindestens ein Punkt auf der Geraden liegen, dessen Abstand von C einen beliebigen Werth zwischen OC und ∞ hat. Man kann also auf der Geraden unzählige Paare von Punkten bestimmen, die von C gleichen Abstand haben. Sei nun $AC = CB$ und M die Mitte von AB, so hat CM die verlangte Eigenschaft; denn die Nebenwinkel AMC und BMC sind nach Lehrsatz 6 einander gleich.

Definition. Bildet eine gerade Strecke mit einer andern zwei gleiche Nebenwinkel, so heisst sie ein Perpendikel (ein Loth, eine Senkrechte) auf derselben, oder man sagt, sie stehe auf derselben perpendiculär (lothrecht, senkrecht).

Lehrsatz 10. Schneiden zwei Gerade einander so, dass von den entstehenden vier Winkeln zwei Nebenwinkel einander gleich sind, so sind alle vier Winkel einander gleich, und je zwei Punkte auf der einen, welche vom Schnittpunkte gleichen Abstand haben, haben von jedem Punkte der andern gleichen Abstand.

Beweis. Schneiden sich die beiden Geraden AA', BB' (Fig. 5) so, dass die Winkel AMB und $A'MB$ einander gleich sind, und macht man $AM = MA'$, so ist $AB = A'B$, da die Figuren AMB und $A'MB$ congruent sind. A und A' liegen also in einer Kreislinie, deren Axe MB, und sind mithin von jedem Punkte derselben gleichweit entfernt. Nach Lehrsatz 8 und 9 ist aber auch $\angle AMB = \angle A'MB = \angle AMB'$, und wenn mithin $MB' = BM$ gemacht wird, so sind auch B und B' von allen Punkten der Geraden AA' gleichweit entfernt.

Definitionen. Zwei Punkte heissen symmetrische Gegenpunkte in Bezug auf eine Gerade, wenn ihre gerade Verbindungslinie von dieser in der Mitte senkrecht geschnitten wird.

Ein Winkel, der seinem Nebenwinkel gleich ist, dessen Schenkel also aufeinander senkrecht stehen, heisst ein rechter Winkel.

Lehrsatz 11. Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden kann nur ein Perpendikel auf dieselbe gezogen werden und dieses ist kürzer wie jede schiefe Linie von dem Punkte nach der Geraden.

Ist AM (Fig. 6) senkrecht auf BC, MA' die Verlängerung von AM, und $AM = MA'$, D ein beliebiger Punkt auf BC, so ist $AD = DA'$ und $ADA' > AA'$, also auch $AD > AM$. Wäre auch AD senkrecht auf BC, so müsste AM zugleich kleiner und grösser wie AD sein, also ist AM das einzige Perpendikel auf BC.

Hieraus folgt ferner:

12. Jedem Punkte ausserhalb einer Geraden entspricht nur ein symmetrischer Gegenpunkt in Bezug auf dieselbe.

13. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Seien ABC und $A'B'C'$ (Fig. 7) rechte Winkel, also ihren Nebenwinkeln CBD und $C'B'D'$ gleich, und macht man $AB = BD = A'B' = B'D'$, so kann man beide Figuren so aneinanderlegen, dass A mit A', B mit B', D mit D' zusammenfallen. A und D sind dann symmetrische Gegenpunkte in Bezug auf CB und $C'B'$, und also sowohl von C als von C' gleichweit entfernt. Wählt man nun C und C' so, dass $AC = AC'$, so liegen C und C' in einer Kreislinie, deren Axe AD ist. Dreht man also die eine der beiden Figuren um AD, so kann C mit C' und also auch ABC mit ABC' zur Deckung gebracht werden.

Hieraus geht aber ferner hervor, dass bei der Rotation des rechten Winkels ABC um den einen Schenkel AB der andere BC nach und nach mit allen in B möglichen Senkrechten auf AB zusammenfallen muss und dass mithin alle Gerade, welche eine gegebene Gerade in demselben Punkte senkrecht schneiden, in einer Fläche liegen und diese stetig erfüllen. Diese Fläche nennen wir Ebene, und können demnach definiren:

Eine Ebene ist der Ort aller Geraden, welche eine gegebene Gerade in demselben Punkte senkrecht schneiden. Die gegebene Gerade möge Axe, ihr Schnittpunkt mit der Ebene Scheitel der Ebene heissen.

Lehrsatz 14. Jede Gerade, welche einen Punkt einer Ebene mit dem Scheitel derselben verbindet, steht auf der Axe senkrecht und liegt ganz in derselben.

Sei AB die Axe, B der Scheitel der Ebene, C ein Punkt derselben, so geht jedenfalls durch C eine der Geraden, welche AB in B senkrecht schneiden; da aber durch B und C nur eine Gerade geht, so ist diese identisch mit dieser Senkrechten.

Lehrsatz 15. Zwei Punkte auf der Axe einer Ebene, welche vom Scheitel gleichweit abstehen, haben auch von jedem andern Punkte der Ebene gleichen Abstand.

Ist AA' (Fig. 8) die Axe, B der Scheitel einer Ebene, und $AB = BA'$, ferner C ein beliebiger Punkt der Ebene, so ist CB senkrecht auf AA', und A und A' sind symmetrische Gegenpunkte von CB, also von C gleichweit entfernt. Ist umgekehrt $AC = A'C$, so folgt hieraus, dass CB auf AA' senkrecht steht und mithin C in der Ebene liegt. Man kann den vorstehenden Lehrsatz daher in den folgenden erweitern:

16. **Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben, ist eine Ebene, deren Axe die Verbindungsgerade dieser Punkte ist.**

Zwei solche Punkte, welche von jedem Punkte einer Ebene gleichweit abstehen, heissen symmetrische Gegenpunkte in Bezug auf die Ebene.

17. **Jede Gerade, welche zwei Punkte in der Ebene verbindet, liegt ganz in derselben.**

Sei AA' (Fig. 9) die Axe, B der Scheitel der Ebene und $AB = BA'$, so sind A und A' symmetrische Gegenpunkte in Bezug auf die Ebene. Liegen also C und D in derselben, so ist $AC = A'C$, $AD = A'D$, und mithin liegen A und A' in einer Kreislinie, die CD zur Axe hat, sind also von jedem Punkte auf CD gleichweit entfernt; d. h. alle Punkte der Geraden CD liegen in der Ebene.

18. **Durch jeden Punkt einer Ebene kann man nur eine Gerade ziehen, welche in der Ebene liegt und auf einer in der Ebene liegenden Geraden senkrecht steht.**

Liegt der gegebene Punkt nicht auf der gegebenen Geraden, so kann man von ihm überhaupt nur eine Senkrechte zu dieser Geraden ziehen. Eines Beweises bedarf der Satz demnach nur für den Fall, dass der Punkt auf der Geraden selbst liegt.

Sei AA' (Fig. 10) die gegebene Gerade, B der gegebene Punkt, und macht man $AB = BA'$, so sind A und A' symmetrische Gegenpunkte in Bezug auf jede durch B gehende Senkrechte auf AA'. Sei nun CB auf AA' senkrecht und in der Ebene, D irgend ein Punkt der Ebene, welcher nicht auf BC, sondern mit A' auf derselben Seite von BC liegt. Dann muss die Gerade AD, welche ganz in der Ebene liegt (nach Lehrsatz 17), die Gerade BC jedenfalls schneiden. Sei E der Schnittpunkt, so ist $AE = A'E$, also $AD = A'E + ED > A'D$, und mithin kann BD nicht ebenfalls auf AA' senkrecht stehen. Ebenso ist zu beweisen, dass auch eine Gerade, welche B mit einem Punkte auf der andern Seite von BC verbindet, nicht auf AA' senkrecht stehen kann.

19. **Je drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmen eine Ebene.**

Seien A, B, C (Fig. 11) die gegebenen Punkte, CD das Loth von C auf die Gerade AB, so liegt AB in der Ebene, welche CD zur Axe und D zum Scheitel hat, und CD liegt in der Ebene, welche AD zur Axe und D zum Scheitel hat. Ist ferner C' der symmetrische Gegenpunkt von C in Bezug auf die durch AB gehende Ebene, so liegt auch C' in der Ebene, welche AD zur Axe und D zum Scheitel hat, während C und C' auf verschiedenen Seiten der andern Ebene liegen, woraus folgt, dass beide Ebenen sich schneiden, d. h. wenigstens eine Linie gemein haben.

Sei nun E ein beiden Ebenen gemeinsamer Punkt, so ist ED sowohl auf AD, als auf CD senkrecht und liegt in beiden Ebenen (Lehrsatz 14), ist mithin ihre Schnittlinie, und zwar die einzige, weil sie nach Lehrsatz 18 die einzige Gerade ist, welche CC' oder AD in D senkrecht schneidet und mit CC' oder AD in derselben Ebene liegt. AB und CD, oder A, B und C liegen also in der Ebene, welche diese Gerade zur Axe und D zum Scheitel hat.

Durch AB allein kann man unzählige Ebenen legen, als deren gemeinschaftlicher Scheitel D angenommen werden kann, während jede durch D gehende Senkrechte auf AB einer derselben als Axe zugehört. Sei z. B. DF senkrecht auf AB, so ist DF die Axe derjenigen Ebene, welche AD beschreibt, wenn der rechte Winkel ADF sich um DF als Axe dreht. Ist nun DF mit der Axe DE der vorhin betrachteten Ebene ABC nicht identisch, so kann die Ebene den Punkt C nicht enthalten, da sonst ED und FD, welche mit CD in einer Ebene liegen, zugleich auf CD senkrecht wären, was gegen Lehrsatz 18. Durch A, B, C geht also immer eine und nur eine Ebene, wenn C nicht in der Geraden AB liegt.

Mit diesen Sätzen scheint mir nun das Axiom von der Ebene erwiesen zu sein, und es fragt sich nur noch, ob auch die Theorie der Parallelen ohne besonderes Axiom aus den sechs aufgestellten Postulaten abgeleitet werden kann.

Ob meine Ableitung des Axioms von der Ebene mit der von Deahna (*Demonstratio theorematis, esse superficiem planam. Dissert. inaug.* Marburg 1837) mehr oder weniger übereinstimmt, weiss ich nicht. Da meine Absicht eine wesentlich verschiedene, wird man mir keinen Vorwurf daraus machen, wenn ich die Ergebnisse meiner Untersuchung veröffentliche, ehe ich mit den übrigen Versuchen, „das Axiom von der Ebene zum Theorem zu erheben", mich näher bekannt gemacht habe, was mir hier, wo mir keine mathematische Bibliothek ausser meiner eigenen zur Verfügung steht, ziemlich schwierig werden dürfte.

Weit grössere Schwierigkeiten erheben sich, wenn man auch das Parallelenaxiom durch die aufgestellten Postulate begründen will. Es handelt sich hier lediglich um den Beweis des Satzes, dass durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gezogen werden kann, d. h. nur eine Gerade, welche mit der gegebenen in einer Ebene liegt, ohne einen Punkt mit ihr gemein zu haben. Es ist mir nicht ersichtlich, wie dieser Satz ohne Herbeiziehung des Unendlichen bewiesen werden soll, obwohl mir die Existenz der sogenannten absoluten Geometrie kein Argument für die Unbeweisbarkeit desselben ist. Uebrigens kann ich auch nicht das Bedenken begreifen, welches man gegen Beweise dieser Art erhebt, und nehme keinen Anstand, meinen Beweis für das aufgestellte Theorem hier zu veröffentlichen, obwohl derselbe gewiss schon manches Mal von Anderen veröffentlicht worden sein mag. Es handelt sich lediglich darum:

Wird die Gerade BC (Fig. 12) von den mit ihr in einer Ebene liegenden Geraden AB, CD so geschnitten, dass von den correspondirenden Winkeln ABE, CDE der letztere der grössere ist, so wird BA von DC geschnitten.

Mein Beweisgrund ist der folgende. Da der Raum und mithin auch die Ebene als überall auf gleiche Art ausgedehnt vorausgesetzt wird, so müssen auch die Theile, welche zwei gleiche Winkel aus der Ebene herausschneiden, als gleich betrachtet werden. Daraus folgt aber, dass zwei solche Ausschnitte der Ebenen sich verhalten wie die Winkel, von deren Schenkeln sie begrenzt werden. Mithin ist das Verhältniss der Ebenenausschnitte $CDE : ABE = \angle CDE : \angle ABE > 1$.

Andererseits kann der Theil auch eines unmessbar Grossen nicht grösser sein wie das Ganze; läge also CDE ganz in ABE, so könnte das Verhältniss $CDE : ABE$ höchstens $= 1$ sein (wenn etwa der Theil $ABDC$ gegen ABE unendlich von niederer Ordnung wäre), also unmöglich > 1.

Der Hauptsache nach ist dieser Beweis einerlei mit dem von Bertrand, den auch Herr Baltzer in der ersten Auflage seiner „Elemente der Mathematik" aufgenommen hatte, und es muss mithin gegen ihn dasselbe Argument geltend gemacht werden können, welches Herrn Baltzer veranlasst hat, statt des Beweises von Bertrand in die dritte Auflage folgende Bemerkung aufzunehmen (S. 12):

„Der Schluss, dass ein Winkel von einem Streifen nicht ganz eingeschlossen sein könne, weil von den Verhältnissen des Winkels und des Streifens zur unendlichen Ebene das eine nicht verschwindet, das andere verschwindet, ist nicht berechtigt. Auf dies mangelhafte Fundament war die Parallelentheorie von Bertrand gegründet."

Warum aber dieser Schluss nicht berechtigt sei, hält Herr Baltzer nicht für nöthig anzugeben, obgleich ein Anfänger, für den doch ein Lehrbuch bestimmt ist, unmöglich begreifen kann, wie es möglich sei, zu denken, dass das Verhältniss des Theiles zum Ganzen $= \infty : 1$ sein kann, d. h. dass der Theil unendlich vielmal grösser sei als das Ganze, und das müsste doch sein, wenn ein Winkel ganz in einem Streifen läge, also kleiner wäre wie dieser (wenn man mit Bertrand und Baltzer unter Winkel den Ausschnitt aus der unendlichen Ebene versteht).

Es mag sein, dass wirklich ein Einwand gegen die obige oder die Bertrand'sche Schlussweise gemacht werden könne. Da aber die Bücher, welche hiervon handeln, gleich dem Baltzer'schen entweder einfach absprechen, d. h. die Redensart, dies sei „unberechtigt" oder „unzulässig", an die Stelle eines sachlichen Grundes setzen, oder den eigentlichen Kern der Frage unberührt lassen, so möchte ich hiermit die unbedingten Anhänger der absoluten Geometrie auffordern, doch mit der Sprache herauszurücken und klar und deutlich auszusprechen, was denn eigentlich gegen diese Schlussweise eingewendet werden könne.

Für den Fall, dass solche Einwände wirklich erhoben werden können und also der obige und der Bertrand'sche Beweis wirklich als unzulässig sich erweisen, würde ich vorschlagen, die Parallelentheorie durch das folgende Axiom zu begründen:

VII. Eine Kreislinie mit unendlich ferner Axe ist eine Gerade.

Denn damit ist nur eine Eigenschaft des Raumes selbst ausgesprochen, insofern derselbe als stetige Mannigfaltigkeit seiner Punkte aufgefasst wird. Deutlicher tritt dies hervor, wenn man es, mit dem fünften Postulate vereinigt, in folgende Fassung bringt:

Alle Punkte, welche von zwei unendlich fernen Punkten denselben (unendlichen) Abstand haben, erfüllen stetig eine Linie von unbegrenzter Ausdehnung, welche ihre Lage nicht mehr ändern kann, wenn sie in irgend zwei Punkten festgehalten wird.

Freilich haben wir auch so immer wieder das Unendliche, und man könnte vielleicht noch mit mehr Recht, als man das Bertrand'sche Argument der Parallelentheorie ein „mangelhaftes" nennt, dieses Postulat als „unzulässig" erklären, weil es von „unendlich fernen Punkten" spricht, deren Existenz nicht einmal denkbar. Denn Alles, was wir uns als im Raume befindlich denken, müssen wir doch als irgendwo befindlich denken; wo ist aber das unendlich Ferne?

Riemann charakterisirt den Raum als solchen, in welchem Unabhängigkeit der Länge der Linien von Ort und Richtung herrsche, und sagt (III, § 1 am Schlusse):

„Endlich könnte man drittens, anstatt die Länge der Linien als unabhängig von Ort und Richtung anzunehmen, auch eine Unabhängigkeit ihrer Länge und Richtung vom Orte voraussetzen."

Diese Auffassung scheint mir in der That der Sache am meisten zu entsprechen. Nur würde ich für das Wort „Richtung" als bezeichnender das Wort „Stellung" vorschlagen. Wie soll man aber diesen Begriff definiren, wenn man sich nicht auf die Anschauung berufen will? In meinem „Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie" (Schaffhausen 1872, bei Carl Schoch), sowie in einem Aufsatze in der Hoffmann'schen Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht (II. Jahrg. Heft 2, S. 95) habe ich den Begriff der Stellung definirt als dasjenige Merkmal eines Raumgebildes, welches sich ändert bei der Drehung, aber ungeändert bleibt bei der Verschiebung, d. h. bei derjenigen Bewegung, bei welcher alle Punkte gleiche Wege durchlaufen. Abstrahirt man aber von dem anschaulichen Elemente dieses Begriffes, so sucht man vergeblich nach einem Inhalte des so definirten Begriffes.

Nun ist zwar unsere Ueberzeugung von der Richtigkeit der Euklidschen Parallelentheorie lediglich auf die intuitive Erkenntniss gegründet, dass die Stellung eines Raumgebildes unabhängig ist vom Orte. Wie aber soll man diese Erkenntniss rein begrifflich als eine besondere Eigenthümlichkeit derjenigen dreifach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit von Punkten ausdrücken, die wir Raum nennen? Ich wüsste dies nur in der folgenden Form zu thun:

Jede räumliche Figur kann nach allen Seiten ohne Ende so bewegt werden, dass alle Punkte völlig gleiche Wege beschreiben.

Für ein Postulat, das neben den sechs anderen als Ausgangspunkt einer rein deductiven Darstellung der Geometrie dienen soll, scheint mir dieser Satz jedoch nicht einfach genug zu sein.

Kleinere Mittheilungen.

XVIII. Ueber eine Gattung transcendenter Curven, welche geschlossen sind.

§ 1.

Die in der Ueberschrift bezeichneten Curven werden dadurch hervorgebracht, dass eine bewegliche Ellipse auf einer ruhenden, ihr congruenten Ellipse ohne Gleiten rollt. Verfolgen wir nun die von einem mit der rollenden Ellipse fest verbundenen Punkte beschriebene Curve (z. B. vom Mittelpunkte), so lehrt die unmittelbare geometrische Anschauung, dass die so entstehenden Curven geschlossen sein müssen. Indess würde es voreilig sein, aus diesem Umstande folgern zu wollen, dass sie auch algebraisch seien. Im Gegentheil beschränkt sich die Möglichkeit eines algebraischen Integrals der hier auftretenden Differentialgleichung auf den sehr speciellen Fall, wo die grossen Axen der beiden Ellipsen beim Anfange der Bewegung eine gerade Linie bilden. In allen übrigen Fällen verbindet die Differentialgleichung durch ihre Aussage, dass in jedem Momente gleiche Bogenstücke sich berühren, zwei elliptische Integrale erster und zweiter Gattung, weshalb die Möglichkeit eines algebraischen Integrals im Allgemeinen nicht vorhanden ist. Dieser Umstand veranlasste mich, die Aufstellung der Gleichung der besprochenen Curven in irgend einer Form zu versuchen. Es ergab sich, dass dies in der That mit Hilfe der elliptischen Functionen gelingt, und zwar erhält man jene Ausdrücke, die mit den hyperelliptischen Functionen der zunächst höhern Gattung als degenerirte Formen derselben in Bezug gesetzt werden können.

Sei die Gleichung der beiden congruenten Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b.$$

Beziehen wir dieselben auf Polarcoordinaten r, φ, indem wir den Mittelpunkt zum Pol, die X-Axe als Anfangslage des Radius vector nehmen, so wird

$$1)\qquad r\,.\,d\varphi=-\frac{ab}{\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{r^2-b^2}}\,dr$$

und das Bogenelement

$$2)\qquad ds = -\frac{\sqrt{a^2+b^2-r^2}\,.\,r}{\sqrt{a^2-r^2}\,\sqrt{r^2-b^2}}\,dr.$$

Den Wurzeln ist ihr positiver Werth zu ertheilen, indem wir φ und s wachsen lassen, während r abnehmend von a in b übergeht.

Um jetzt die Ideen zu fixiren, nehmen wir an, die ruhende Ellipse befinde sich in dem Punkte, dessen Polarcoordinaten der spitze Winkel φ_0 und der Vector r_0 seien, mit dem Scheitel der rollenden Ellipse, welcher der Endpunkt ihrer grossen Axe ist, in Berührung; und zwar soll die Berührung eine äusserliche sein. Dann denken wir uns die rollende Bewegung so, dass sie zum Endpunkte der grossen Axe der ruhenden Ellipse hin fortschreitet. Bezeichnen wir nun in irgend einem Augenblicke die Vectoren, welche den sich berührenden Bogenelementen der ruhenden und der beweglichen Ellipse zukommen, mit r_1 und r_2, so ist

$$3)\qquad \frac{\sqrt{a^2+b^2-r_1^2}\,.\,r_1}{\sqrt{a^2-r_1^2}\,\sqrt{r_1^2-b^2}}\,dr_1 + \frac{\sqrt{a^2+b^2-r_2^2}\,.\,r_2}{\sqrt{a^2-r_2^2}\,\sqrt{r_2^2-b^2}}\,dr_2 = 0.$$

Dabei sind die Wurzeln alle mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Diese Differentialgleichung kann man in die Integralgleichung verwandeln

$$4)\qquad \int\limits_a^{r_1}\frac{\sqrt{a^2+b^2-r_1^2}\,.\,r_1}{\sqrt{a^2-r_1^2}\,\sqrt{r_1^2-b^2}}\,dr_1 + \int\limits_a^{r_2}\frac{\sqrt{a^2+b^2-r_2^2}\,.\,r_2}{\sqrt{a^2-r_2^2}\,\sqrt{r_2^2-b^2}}\,dr_2 = -u'.$$

Da die Werthe $r_1=r_0$, $r_2=a$ simultan angenommen werden, so ist die geometrische Bedeutung der Constante u' daraus leicht zu entnehmen. Es ist u' die Länge des zwischen dem Punkte (r_0, φ_0) und dem Endpunkte der grossen Axe enthaltenen Ellipsenbogens. Da r_1 stetig von r_0 zu a zunimmt, r_2 von a zu r_0 abnimmt, so wird in einem gewissen Momente $r_1=r_2$ sein. Auf diesen Umstand, der später von Wichtigkeit sein wird, wollen wir bereits an dieser Stelle aufmerksam machen. Jetzt fügen wir der Gleichung 4) die analog gebildete hinzu, welche den Parameter u einführt, als dessen Functionen r_1 und r_2 dargestellt werden sollen. Sie lautet:

$$5)\qquad \int\limits_a^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}\,\sqrt{a^2-r^2}\,\sqrt{r^2-b^2}} + \int\limits_a^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}\,\sqrt{a^2-r^2}\,\sqrt{r^2-b^2}} = -u.$$

Als untere Grenze für die Variabele r_1 hätten wir in 4) und 5) auch ebensowohl b annehmen können.

Die geometrische Bedeutung von u ist nicht gerade leicht ersichtlich. Es mag bemerkt werden, dass, wenn man vom Mittelpunkte der Ellipse aus auf die Tangente, deren Berührungspunkt den Vector r hat, eine Senkrechte errichtet, die Länge dieses Lothes p durch

$$p = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}$$

gegeben wird.

§ 2.

Ausführung der Integration.

Hierbei werde ich mich der Bezeichnungen und Methoden des Herrn Weierstrass, meines hochverehrten Lehrers, bedienen, was um so mehr, von der hohen Vortrefflichkeit derselben abgesehen, gestattet scheint, als durch die Arbeiten von Kiepert in den letzten Bänden des Crelle-Borchardt'schen Journals, die Andeutungen in Thomae's Functionentheorie und mehrere Doctordissertationen das Verständniss der genannten Methoden auch weiteren Kreisen zugänglich geworden ist. Man wird indess auch nach den älteren Methoden die Resultate, welche ich jetzt vorlegen werde, leicht verificiren können.

Es ist zunächst erforderlich, den Integralen die Normalform zu ertheilen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$r^2 = s + \tfrac{2}{3}(a^2+b^2).$$

Dann wird

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} r^2 - a^2 - b^2 &= s - \tfrac{1}{3}(a^2+b^2) = s - e_2,\\ r^2 - a^2 &= s - \tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{2}{3}b^2 = s - e_2,\\ r^2 - b^2 &= s + \tfrac{2}{3}a^2 - \tfrac{1}{3}b^2 = s - e_3.\end{aligned}\right.$$

Es ist also

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{3}(a^2+b^2), & e_1 - e_2 &= b^2,\\ e_2 &= \tfrac{1}{3}a^2 - \tfrac{2}{3}b^2, & e_2 - e_3 &= a^2 - b^2,\\ e_3 &= -\tfrac{2}{3}a^2 + \tfrac{1}{3}b^2, & e_1 - e_3 &= a^2.\end{aligned}\right.$$

Noch ist zu bemerken

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = k.$$

Setzen wir noch

$$R(s) = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

so gehen unsere Formeln 4) und 5) in die folgenden über:

$$8)\qquad \int_{e_2}^{s_1} \frac{e_1 - s}{\sqrt{R(s)}}\,ds + \int_{e_2}^{s_2} \frac{e_1 - s}{\sqrt{R(s)}}\,ds = -u',$$

$$9)\qquad \int_{e_2}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} + \int_{e_2}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} = -u.$$

Nun sei

$$v_1 = \int_{e_2}^{s_1} -\frac{ds}{\sqrt{R(s)}},\qquad v_2 = \int_{e_2}^{s_2} -\frac{ds}{\sqrt{R(s)}}.$$

Dann wird

$$10)\qquad s_1 = p(v_1 + \omega_2),\qquad s_2 = p(v_2 + \omega_2)$$

und es gehen die Integrale 8) über in solche von der Form

$$-\int_0^v [e_1 - p(v+\omega^2)]\, dv$$

oder in

$$-e_1 v - \frac{\sigma'(v+\omega_2)}{\sigma(v+\omega_2)} + \frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma\omega_2} = -e_1 v - \frac{\sigma'_2(v)}{\sigma_2(v)}.$$

Demnach reduciren sich die Gleichungen 8) und 9) auf die folgenden:

11) $$e_1(v_1+v_2) + \frac{\sigma'_2(v_1)}{\sigma_2(v_1)} + \frac{\sigma'_2(v_2)}{\sigma_2(v_2)} = u', \quad v_1 + v_2 = u.$$

Bezeichnen wir den Werth von u für das Werthepaar $r_1 = r_0$, $r_2 = a$ mit u_0, so ist, indem v_2 dann verschwindet und $v_1 = u_0$ wird:

12) $$e_1 u_0 + \frac{\sigma'_2(u_0)}{\sigma_2(u_0)} = u'.$$

Diese Gleichung leistet die Rectification des zwischen dem Vector r_0 und dem Endpunkte der grossen Axe befindlichen Ellipsenbogens; auch kann mit ihrer Hilfe u' durch Functionen von u_0 ersetzt werden, wodurch manche Formeln übersichtlicher werden.

Man hat nun die Formeln

$$\frac{1}{2}\frac{p'(v_1) - p'(v_2)}{p(v_1) - p(v_2)} = \frac{\sigma'(v_1+v_2)}{\sigma(v_1+v_2)} - \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - \frac{\sigma' v_2}{\sigma v_2},$$

$$\frac{\sigma'(v+\omega_2)}{\sigma(v+\omega_2)} = \frac{\sigma'_2 v}{\sigma_2 v} + \eta_2, \qquad \frac{\sigma'(v+2\omega_2)}{\sigma(v+2\omega_2)} = \frac{\sigma' v}{\sigma v} + 2\eta_2,$$

woraus man ableitet

$$\frac{1}{2}\frac{p'(v_1+\omega_2) - p'(v_2+\omega_2)}{p(v_1+\omega_2) - p(v_2+\omega_2)} = \frac{\sigma'(v_1+v_2)}{\sigma(v_1+v_2)} - \frac{\sigma'_2 v_1}{\sigma_2 v_1} - \frac{\sigma'_2 v_2}{\sigma_2 v_2}.$$

Daher wird Gleichung 11)

13) $$u' = e_1 u + \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{1}{2}\frac{p'(v_1+\omega_2) - p'(v_2+\omega_2)}{p(v_1+\omega_2) - p(v_2+\omega_2)}.$$

Nimmt man dazu, dass mit Hilfe des Additionstheorems der Function $p(u)$ die Functionen $p(v_1)$ und $p(v_2)$ mit $p(u)$ in algebraischen Zusammenhang treten, so ist die Möglichkeit evident, aus dieser Relation und der Gleichung 13) $p(v_1)$ und $p(v_2)$ algebraisch durch u und u' auszudrücken. Mit Aufstellung dieser Formeln wäre dann die uns zunächst beschäftigende Aufgabe gelöst.

§ 3.

Ausdruck von $s_1 = p(v_1 + \omega_2)$ und $s_2 = p(v_2 + \omega_2)$ durch die Constante u' und den Parameter u.

Zur Abkürzung setzen wir

$$N = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + e_1 u - u'.$$

Dann werden die beiden Gleichungen, welche s_1 und s_2 bestimmen, nämlich 13) und das Additionstheorem der Function pu, nämlich

$$p(v_1+v_2)=\frac{[p(v_1)+p(v_2)](2pv_1\,pv_2-\tfrac{1}{2}g_2)-g_3-p'(v_1).p'(v_2)}{2(pv_1-pv_2)^2}$$

die folgende Gestalt annehmen:

$$14)\qquad \frac{\sqrt{R(s_1)}-\sqrt{R(s_2)}}{s_1-s_2}=-2N,$$

$$15)\qquad \frac{(s_1+s_2)(2s_1s_2-\tfrac{1}{2}g_2)-g_3-\sqrt{R(s_1)}.\sqrt{R(s_2)}}{(s_1-s_2)^2}=2pu,$$

$$R(s_1)=4(s_1-e_1)(s-e_2)(s-e_3)=4s^3-g_2s-g_3.$$

Ueber die Vorzeichen der Wurzeln in den beiden Gleichungen 14) und 15) entscheidet die folgende Betrachtung.

Man hat $p'(\omega_\alpha)=0$, $p''(u)=6p^2u-\tfrac{1}{2}g_2$, daher $p''(\omega_\alpha)=6e_\alpha^2-\tfrac{1}{2}g_2$ oder, da $-\tfrac{1}{4}g_2=-e_\alpha^2+e_\beta e_\gamma$, $p''(\omega_\alpha)=2(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)$, mithin nach dem **Taylor**'schen Lehrsatze

$$p(v+\omega_\alpha)=e_\alpha+(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)v^2+\ldots.$$

Demnach hat $p'(v+\omega_\alpha)$ in der Nähe von $v=0$ für positive v das Vorzeichen von $(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)$. Nun sind nach unserer Definition durch die Integrale v_1 und v_2 positive Grössen; es ist ferner $(e_2-e_1)(e_2-e_3)$ negativ und darum ist $p'(v_1+\omega_2)$ und $p'(v_2+\omega_2)$ auf der ganzen Strecke, die wir zu untersuchen haben, negativ, und daher ist über die Vorzeichen der $\sqrt{R(s)}$ so zu verfügen, wie wir es gethan haben.

Quadriren wir jetzt 14) und subtrahiren 15), nachdem wir zuvor mit 2 multiplicirt haben, so wird die linke Seite der neu entstehenden Gleichung durch $(s_1-s_2)^2$ theilbar und nach Entfernung des Multiplicators 4) kommt

$$16)\qquad s_1+s_2=N^2-pu.$$

Diese führt in Verbindung mit 14) zu einem Ausdrucke für $s_1.s_2$. Denn man leitet aus 14) zunächst ab

$$\sqrt{R(s_1)}=-(s_1-s_2)N-\frac{s_1^2+s_1s_2+s_2^2-\tfrac{1}{4}g_2}{N},$$

$$\sqrt{R(s_2)}=+(s_1-s_2)N-\frac{s_1^2+s_1s_2+s_2^2-\tfrac{1}{4}g_2}{N}.$$

Quadrirt man ferner 14) und ersetzt $\sqrt{R(s_1)}.\sqrt{R(s_2)}$ durch den aus den vorstehenden Relationen folgenden rationalen Werth, so wird eine Gleichung entstehen, die in Bezug auf s_1, s_2 symmetrisch ist. Drücken wir alle Glieder durch s_1+s_2 und s_1s_2 aus, ersetzen sodann s_1+s_2 durch seinen Werth aus 16), so resultirt für s_1s_2 eine quadratische Gleichung, deren Auflösung das Resultat ergiebt

$$s_1s_2=-\tfrac{1}{4}g_2+(N^2+pu)pu\pm N.p'(u).$$

Es bleibt noch über das unsichere Vorzeichen die Entscheidung zu treffen. Diese wird dadurch geführt, dass uns ein simultanes Werthepaar

$$20)\qquad p_1 \, . \, p_2 = a^2 b^2 \, . \, \frac{\sigma u \, . \, \sigma u}{N . \, \sigma u \, . \, \sigma_1 u - \sigma_2 u \, . \, \sigma_3 u}.$$

Man beweist ebenso allgemein leicht die Gleichung

$$(e_\alpha - s_1)(e_\alpha - s_2) = \left(N . \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} - \frac{\sigma_\beta u \, . \, \sigma_\gamma u}{\sigma u \, . \, \sigma u}\right)^2.$$

Soll beiderseits die Wurzel herausgezogen werden, so ist zur Bestimmung des Vorzeichens zu bemerken, dass $\frac{\sigma_1 u_0}{\sigma u_0}$, $\frac{\sigma_2 u_0}{\sigma u_0}$, $\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma u_0}$ positiv sind, denn u_0 ist eine positive, zwischen 0 und ω_1 liegende Grösse. Somit wird für $u = u_0$

$$N . \frac{\sigma_1 u_0}{\sigma u_0} - \frac{\sigma_2 u_0 \, . \, \sigma_3 u_0}{\sigma u_0 \, . \, \sigma u_0} = \frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0}\left(\frac{\sigma_1^2 u_0}{\sigma^2 u_0} - \frac{\sigma_2^2 u_0}{\sigma^2 u_0}\right)$$

$$= -(e_1 - e_2)\frac{\sigma_3 u_0}{\sigma_2 u_0}.$$

Dieser Ausdruck ist negativ und somit wird

$$21)\qquad \sqrt{(e_1 - s_1)(e_1 - s_2)} = \frac{\sigma_2 u \, . \, \sigma_3 u}{\sigma u \, . \, \sigma u} - N . \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}.$$

Für die Formel 20) ist diese Zeichenbestimmung irrelevant. Analog findet man

$$22)\qquad \sqrt{(e_3 - s_1)(e_3 - s_2)} = N . \frac{\sigma_3 u}{\sigma u} - \frac{\sigma_1 u \, . \, \sigma_2 u}{\sigma u \, . \, \sigma u}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Formeln können wir nun leicht die dritte hierher gehörende hinschreiben, denn die Multiplication der drei Formeln muss $\frac{1}{4}\sqrt{R(s_1)} . \sqrt{R(s_2)}$ ergeben und diesen Ausdruck können wir aus Formel 15) sofort durch die Functionen von u ausdrücken. Suchen wir den Coefficienten von N^3 in dieser Darstellung auf, so erkennt man die Richtigkeit der nachstehenden Formel:

$$23)\qquad \sqrt{(e_2 - s_1)(e_2 - s_2)} = N . \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} - \frac{\sigma_1 u \, . \, \sigma_3 u}{\sigma u \, . \, \sigma u}.$$

Suchen wir endlich den Abstand der Centra der beiden betrachteten Ellipsen oder den Vector unserer Curve zu berechnen. Da die Winkel, welche die simultanen Vectoren r_1 und r_2 mit der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkte bilden, durch ihre trigonometrischen Functionen

$$r\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{dr}{ds}$$

gegeben sind [Formeln 1) und 2)], so ist der Cosinus des Neigungswinkels der beiden Vectoren gegeben durch

$$-\frac{1}{r_1 r_2}\,\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + \sqrt{(e_2 - s_1)(e_2 - s_2)(e_3 - s_1)(e_3 - s_2)}}{\sqrt{(e_1 - s_1)(e_2 - s_1)}},$$

wo allen Wurzeln der positive Werth zu ertheilen ist. Daher wird der Ausdruck für den Vector R

$$R^2 = s_1 + s_2 + 4e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3) + \sqrt{(e_2-s_1)(e_2-s_2)(e_3-s_1)(e_3-s_2)}}{\sqrt{(e_1-s_1)(e_1-s_2)}},$$

oder, wenn wir die bekannten Substitutionen ausführen:

$$R^2 = N^2 - pu + 4e_1$$
$$+ \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)\,\sigma^4 u + (N.s_2 u\,.\,\sigma u - \sigma_1 u\,.\,\sigma_3 u)(N.\sigma_3 u\,.\,\sigma u - \sigma_1 u\,.\,\sigma_2 u)}{\sigma^2 u\,(\sigma_2 u\,.\,\sigma_3 u - N.\sigma_1 u\,.\,\sigma u)}.$$

Dieser Ausdruck scheint einer weiteren Vereinfachung nicht fähig zu sein.

Bisher haben wir die Untersuchung geführt, indem wir die rollende Ellipse aus der Anfangslage in diejenige übergehen liessen, in welcher sie die ruhende im Endpunkte der grossen Axe berührt. Es hat keine Schwierigkeit, den weiteren Verlauf der Bewegung zu übersehen. Die ruhende Ellipse wird demnächst von dem andern Scheitel, dem Endpunkte der kleinen Axe der rollenden Ellipse, berührt werden. Dies deutet sich analytisch dadurch aus, dass bei $s_1 = e_2$ und $s_2 = s_0$ die Wurzel $\sqrt{R(s_1)}$ ihr Vorzeichen ändert und nun s_2 und s_1 beide absteigend sich das erstere dem Endwerthe e_3, das letztere einem Mittelwerthe zwischen e_2 und e_3 nähert. Dieser Mittelwerth bezeichnet die Stelle, wo die Begrenzung des vom Anfangspunkte der Bewegung aus gerechneten Ellipsenquadraten liegt. Da für diesen Punkt $v_2 = \omega_1$ ist, so wird $u = v_1 + \omega_1$ und daher nach 13) der Werth für u durch Auflösung der transcendenten Gleichung gefunden

$$\text{24)} \qquad u' = e_1 u + \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \tfrac{1}{2}\frac{p' u}{pu - e_3} = e_1 u + \frac{\sigma'_3 u}{\sigma_3 u}.$$

Dieser Werth von u' bestimmt für N den Ausdruck $\dfrac{\sigma_1 u\,.\,\sigma_2 u}{\sigma u\,.\,\sigma_3 u}$, wie man auch aus 22) leicht bestätigt.

§ 5.

Die von uns bisher entwickelten Principien finden nicht nur auf das hier behandelte Problem, sondern auf eine ausgedehnte Classe von Aufgaben aus dem Gebiete der Rollcurven Anwendung. Es soll hier die Behandlung eines Falles folgen, der die Kenntniss nur der logarithmischen Transcendenten voraussetzt, nämlich die Ermittelung der von dem Scheitel einer gewöhnlichen Parabel beschriebenen Curve, wenn sie auf einer andern ihr congruenten äusserlich berührend abrollt. Kurze Andeutungen mögen genügen.

Sei die gemeinsame Gleichung der Parabeln $y^2 = 2px$; gesucht werden die zusammen gehörenden y-Coordinaten y_1 der ruhenden, y_2 der rollenden Ellipse, wenn im Anfange der Bewegung $y_1 = y_0$, $y_2 = 0$ war. Setzen wir $y = ps$ und bezeichnen die zu y_1, y_2, y_0 gehörigen Werthe von s durch s_1, s_2, s_0. Dann erhalten wir die den Formeln 4) und 5) analogen Gleichungen

$$25)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{s_1}\sqrt{1+s^2}\,ds+\int_0^{s_2}\sqrt{1+s^2}\,ds=u',\\ &\int_0^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}+\int_0^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}=u. \end{aligned}\right.$$

Führen wir wieder die Argumente v_1 und v_2 analog wie früher ein und nennen den s_0 entsprechenden Werth von u ebenso u_0, so wird

$$s_1=\tfrac{1}{2}(e^{v_1}-e^{-v_1}),\quad s_2=\tfrac{1}{2}(e^{v_2}-e^{-v_2}),$$
$$\sqrt{1+s_1^2}=\tfrac{1}{2}(e^{v_1}+e^{-v_1}),\quad \sqrt{1+s_2^2}=\tfrac{1}{2}(e^{v_2}+e^{-v_2})$$

und daher durch Integration

$$26)\qquad s_1\sqrt{1+s_1^2}+s_2\sqrt{1+s_2^2}=2u'-u=N.$$

Dazu kommt dann

$$27)\qquad (s_1+\sqrt{1+s_1^2})(s_2+\sqrt{1+s_2^2})=e^u.$$

Diese Formeln spielen die Rolle von 16) und 18) in unserer vorigen Aufgabe. Den Quadratwurzeln ist der positive Werth zu ertheilen. Man hat auch

$$(\sqrt{1+s_1^2}-s_1)(\sqrt{1+s_2^2}-s_2)=e^{-u}$$

und daraus folgt

$$s_1s_2+\sqrt{1+s_1^2}\sqrt{1+s_2^2}=\tfrac{1}{2}(e^u+e^{-u}),$$
$$28)\qquad s_1\sqrt{1+s_2^2}+s_2\sqrt{1+s_1^2}=\tfrac{1}{2}(e^u-e^{-u})=M.$$

Quadriren wir 26) und 28) und subtrahiren, so wird

$$29)\qquad (s_1^2-s_2^2)=N^2-M^2.$$

Man hat ferner

$$N.s_1-M.s_2=(s_1^2-s_2^2)\sqrt{1+s_1^2}$$

und daraus wird, wenn man quadrirt und 29) beachtet:

$$M^2(s_1^2+s_2^2)-2NMs_1s_2=N^2-M^2.$$

Hieraus kann man mit Hilfe von 29) eine Gleichung für s_1s_2 erhalten. Man findet

$$2Ms_1s_2=-N\pm M\sqrt{1+M^2}.$$

Um über das Vorzeichen der Wurzel Entscheidung zu treffen, beachten wir, dass für $u=u_0$ die linke Seite der letzten Gleichung verschwindet. Da aber nach Gleichung 26), wenn $u=u_0$, $s_1=s_0$, $s_2=0$ gesetzt wird, sich

$$2u'=u_0+\tfrac{1}{4}(e^{2u_0}-e^{-2u_0})$$

ergiebt, so folgt

$$30)\qquad N=u_0-u+\tfrac{1}{4}(e^{2u_0}-e^{-2u_0}).$$

Man überzeugt sich nun leicht, dass das obere Zeichen in der drittletzten Gleichung zu wählen ist und findet also, wenn man der Kürze wegen mit Gudermann schreibt

$$\mathfrak{Sin}(u)=\tfrac{1}{2}(e^u-e^{-u}):$$

$$31)\qquad 2 s_1 s_2 = \frac{-u_0 + u + \mathfrak{Sin}(u+u_0) . \mathfrak{Sin}(u-u_0)}{\mathfrak{Sin}(u)}.$$

Es ist nun leicht, einen analogen Ausdruck für $s_1 + s_2$ zu gewinnen; es verlohnt sich indess kaum der Mühe, ihn besonders aufzustellen, da die Formel 29) in Verbindung mit 31) hinreicht, alle in Frage kommenden Aufgaben zu lösen.

Die Grösse u geht von dem Werthe u_0 aus, bis der Werth erreicht ist, für welchen der Parabelbogen — vom Ausgangspunkte bis zum Scheitel — halbirt wird. Dieser Werth resultirt nach 29) aus der Annahme $N = M$, d. h. aus der transcendenten Gleichung

$$u_0 - u + \tfrac{1}{4}(e^{2u_0} - e^{-2u_0}) = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u}).$$

Hier tritt eine Vertauschung der Wurzeln ein, indem s_1 dem Endwerthe 0, s_2 dem Endwerthe s_0 zustrebt. Alsdann wird s_1 negativ, s_2 bleibt positiv und beide wachsen unbeschränkt. Dies Wachsen zur Unendlichkeit geschieht aber in der Weise, dass die Quadrate zweier zusammengehörenden s_1, s_2 eine constante Differenz haben, wie durch Entwickelung der Integrale 25) in Potenzreihen gezeigt werden kann. Der Parameter u convergirt dabei gegen Null. Die Annahme $N + M = 0$ würde auch infolge von 29) zu $s_1^2 = s_2^2$ führen; indess ist dieselbe unstatthaft, da sich leicht zeigen lässt, dass für positive u_0 ihr keine reellen Werthe von u entsprechen.

Osterwick, Rgbz. Münster. Dr. KARL SCHWERING.

XIX. Bemerkungen über symmetrische Determinanten und Anwendung dieser auf eine Aufgabe der analytischen Geometrie.

1. Es bezeichne

$$\varDelta = \Sigma \pm (a_0^0 \ldots a_n^n)$$

eine Determinante der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Wir werden dann leicht jedes Glied der Determinante, welches die p^{te} Potenz von $\varDelta$ darstellt, entwickeln können. Ist nämlich

$$\varDelta^p = \Sigma \pm (A_0^0 A_1^1 \ldots A_n^n),$$

so wird man finden

$$1)\qquad A_\varkappa^\lambda = \sum_{s_0} \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_{p-2}} a_{s_{p-2}}^\varkappa a_{s_0}^\lambda a_{s_{p-3}}^{s_{p-2}} a_{s_{p-4}}^{s_{p-3}} \ldots a_{s_1}^{s_2} a_{s_0}^{s_1},$$

wobei sämmtliche Σ von 0 bis n auszudehnen sind. Diese Formel wird einfach durch das Beweisverfahren von p auf $(p+1)$ verificirt. In der That ist

$$\varDelta^{p+1} = (\Sigma \pm A_0^0 A_1^1 \ldots A_n^n)(\Sigma \pm a_0^0 \ldots a_n^n) = \Sigma \pm B_0^0 B_1^1 \ldots B_n^n$$

und

$$2)\qquad B_\varkappa^\lambda = \sum_{s_{p-1}} A_{s_{p-1}}^\lambda a_{s_{p-1}}^\varkappa.$$

Wenn nun hierein der für $A^{\lambda}_{s_{p-1}}$ aus 1) folgende Werth eingesetzt wird, erhält man die gesuchte Form für $B^{\lambda}_{\varkappa}$. Man sieht übrigens, dass 1) nur dann giltig ist, wenn man sich Δ^p durch aufeinanderfolgende einzelne und immer in derselben Reihe vorgenommene Multiplicationen von Δ entstanden denkt. Es ist dies wichtig, weil man das Product zweier Determinanten bekanntlich in vier verschiedene Formen bringen kann. Hier soll nun nach der Multiplicationsregel, welche durch 2) dargestellt wird, vorgegangen werden.

In 1) können wir, ohne den Werth dieses Ausdruckes zu ändern, folgende Vertauschungen der Indices vornehmen:

$$\begin{array}{lll} s_0 & \text{mit} & s_{p-2}, \\ s_1 & \text{,,} & s_{p-3}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ s_{p-2} & \text{,,} & s_0. \end{array}$$

Dadurch wird

$$A^{\lambda}_{\varkappa} = \sum_{s_0} \sum_{s_1} \dots \sum_{s_{p-2}} a^{\varkappa}_{s_0} a^{\lambda}_{s_{p-2}} a^{s_0}_{s_1} a^{s_1}_{s_2} \dots a^{s_{p-3}}_{s_{p-2}}. \tag{3}$$

Vertauscht man weiter in 1) $\varkappa$ mit λ, so wird

$$A^{\varkappa}_{\lambda} = \sum_{s_0} \sum_{s_1} \dots \sum_{s_{p-2}} a^{\varkappa}_{s_0} a^{\lambda}_{s_{p-2}} a^{s_1}_{s_0} a^{s_2}_{s_1} \dots a^{s_{p-2}}_{s_{p-3}}.$$

Man sieht also, dass stets $A^{\lambda}_{\varkappa} = A^{\varkappa}_{\lambda}$ sein wird, wenn $a^{\varkappa}_{\lambda} = a^{\lambda}_{\varkappa}$ ist. Wir können demgemäss sagen:

„Die Potenz jeder symmetrischen Determinante ist wieder eine symmetrische Determinante.“

Es erübrigt dabei zu zeigen, dass in dieser Fassung der Satz unabhängig ist von dem angewandten, durch 2) definirten Multiplicationsverfahren. Die vier verschiedenen Formen, die man dem Producte zweier Determinanten geben kann, erhält man, wenn man entweder in einer von den beiden gegebenen Determinanten oder in beiden, oder endlich in keiner von beiden die Reihen mit den Colonnen vertauscht und das Product von diesen ungeschriebenen oder ungeändert gebliebenen Determinanten nach der Regel 2) bildet. Man sieht daraus, dass bei symmetrischen Determinanten alle vier Arten der Bildung des Productes auf dieselbe Determinante führen.

Ebenso sieht man leicht, dass auch unter den gemachten Voraussetzungen eine einzeln vorgenommene Multiplication von Δ mit Δ, dann wieder mit Δ und so fort, wie sie zuerst angenommen wurde, nicht nöthig ist, damit der ausgesprochene Satz giltig bleibe.

Vertauscht man in 1) λ und $\varkappa$ und zieht das Resultat von 1) ab, so wird

$$A^{\lambda}_{\varkappa} - A^{\varkappa}_{\lambda} = \sum_{s_0 s_1 \dots s_{p-2}} \left\{ D \,.\, a^{s_{p-2}}_{s_{p-3}} a^{s_{p-3}}_{s_{p-4}} \dots a^{s_2}_{s_1} a^{s_1}_{s_0} \right\},$$

worin D die Determinante

$$\begin{vmatrix} a^{\varkappa}_{s_{p-2}} & a^{\lambda}_{s_{p-2}} \\ a^{\varkappa}_{s_0} & a^{\lambda}_{s_0} \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Wird D für beliebige s_0 und s_{p-2}, also für beliebige Indices gleich Null, so ist $A^{\lambda}_{\varkappa} = A^{\varkappa}_{\lambda}$. Diese Bedingung drückt jedoch nichts Anderes aus, als dass die $\varkappa^{te}$ und λ^{te} Reihe in der ursprünglichen Determinante gleich sein sollen. Das erlangte Criterium ist deshalb im Allgemeinen werthlos. Ausnahme davon macht, wenn Δ von der zweiten Ordnung ist; dann lässt sich das gefundene Resultat so aussprechen: „Die Potenz einer Determinante vom zweiten Grade ist eine symmetrische Determinante, wenn die einzelnen Elemente in der Weise von einander abhängen, dass die gegebene Determinante verschwindet.“

2. Bezeichnet $\alpha^{\lambda}_{\varkappa}$ eine Partialdeterminante von $\Delta = \Sigma \pm a^0_0 \ldots a^n_n$, so dass also gesetzt wird

$$\alpha^{\lambda}_{\varkappa} = \frac{\partial \Delta}{\partial a^{\lambda}_{\varkappa}},$$

und wird angenommen, dass $\Delta = 0$ sei, so werden auch zufolge eines allgemeinen, von Jacobi herrührenden Determinantensatzes die Determinanten vom zweiten, dritten etc. Grade des adjungirten Systems verschwinden. Es wird also die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha^{\varkappa}_{\varkappa} & \alpha^{\lambda}_{\varkappa} \\ \alpha^{\varkappa}_{\lambda} & \alpha^{\lambda}_{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Nehmen wir nun an, dass der Coefficient des Diagonalgliedes $a^{\varkappa}_{\varkappa}$ in Δ, also $\alpha^{\varkappa}_{\varkappa}$, verschwindet, so sieht man, dass dasselbe mit einer der Grössen $\alpha^{\lambda}_{\varkappa}$ und $\alpha^{\varkappa}_{\lambda}$ geschehen muss. Wird daher in einer Determinante der n^{ten} Ordnung, welche verschwindet, der Coefficient eines beliebigen Elementes a^i_k gleich Null, so verschwinden noch andere von denjenigen Partialdeterminanten der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, welche Elementen von Δ entsprechen, die mit a^i_k in derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehen. Ist aber die verschwindende Determinante Δ symmetrisch, d. h. ist $a^{\lambda}_{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\lambda}$, und verschwindet dann α^i_k, so werden auch die Coefficienten aller Elemente gleich Null, welche mit a^i_k auf derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehen. Ein Gleiches gilt von den sogenannten überschlagenen symmetrischen Determinanten, d. h. von solchen, bei denen die Relation stattfindet

$$a^i_k + a^i_k = 0 \text{ und } a^i_i = 0.$$

Man könnte vielleicht meinen, dass man durch Anwendung desjenigen Verfahrens, welches Herr Prof. Baltzer in § 13, 4 seines Buches über Determinanten einschlägt, auch im vorliegenden Falle zu analogen Resultaten gelangen werde. Dem ist aber nicht so. Man wird vielmehr leicht den

Grund einsehen, warum die dort vorkommenden Gleichungen keine Anwendung finden auf beliebige Determinanten. Nach dem Gesagten wird man nun leicht finden, dass, wenn eine symmetrische Determinante der n^{ten} Ordnung der Null gleichkommt und ausserdem die Coefficienten von $(n-2)$ Diagonalgliedern verschwinden, alle Partialdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung Null werden.

Es sei unter der Annahme $a_{\varkappa}^{\lambda} = a_{\lambda}^{\varkappa}$

$$\varDelta = \Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{n-1}^{n-1} = 0 \text{ und } \alpha_0^0 = \alpha_1^1 = \ldots = \alpha_{n-3}^{n-3} = 0.$$

Es werden dann nach dem Früheren diejenigen Partialdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, welche Elementen entsprechen, die mit den Diagonalelementen a_0^0, a_1^1 bis a_{n-3}^{n-3} in derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehen. Es wird infolge dessen sein

$$1) \qquad a_{n-2}^{n-1} \alpha_{n-2}^{n-1} + a_{n-1}^{n-1} \alpha_{n-1}^{n-1} = 0, \qquad a_{n-2}^{n-2} \alpha_{n-2}^{n-2} + a_{n-2}^{n-1} \alpha_{n-2}^{n-1} = 0$$

und infolge dessen

$$2) \qquad a_{n-2}^{n-2} \alpha_{n-2}^{n-2} = a_{n-1}^{n-1} \alpha_{n-1}^{n-1}.$$

Ferner ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-2}^{n-2} & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Und wenn man den hieraus resultirenden Werth von α_{n-2}^{n-1} in 1) einsetzt und dann beide Seiten der Gleichung quadrirt, so wird

$$3) \qquad \{(a_{n-2}^{n-1})^2 \alpha_{n-2}^{n-2} - (a_{n-1}^{n-1})^2 \alpha_{n-1}^{n-1}\} \alpha_{n-1}^{n-1} = 0.$$

Mit Hilfe solcher Gleichungen 2) und 3) wird man sich nun leicht überzeugen, dass, wenn a_{n-1}^{n-1} und a_{n-2}^{n-2} nicht verschwinden, sowohl α_{n-1}^{n-1}, als auch α_{n-2}^{n-2} und infolge dessen auch α_{n-1}^{n-2} der Null gleichkommt. Tritt jedoch dieser hier ausgeschlossene Fall ein, so gilt das Gesagte selbstverständlich nicht mehr. Man wird sich von der Richtigkeit dieser Behauptung auch leicht durch specielle Beispiele überzeugen können.

Wir wollen nun das Product zweier Determinanten

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_{n-1}^{n-1}, \quad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \ldots b_{n-1}^{n-1}$$

betrachten und annehmen, dass A nicht verschwinde, während B selbst nebst den Partialdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung Null sein soll. Dann ist, wenn

$$m_{\varkappa}^{\lambda} = \Sigma_m \, a_{\varkappa}^m \, b_{\lambda}^m$$

gesetzt wird

$$4) \qquad 0 = (\Sigma \pm a_0^0 \ldots a_{n-1}^{n-1}) \begin{vmatrix} b_0^0 & \ldots & b_0^{n-2} & b_0^{n-1} \\ b_1^0 & \ldots & b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_0^0 & m_0^1 & \ldots & m_0^{n-2} & a_0^{n-1} \\ m_1^0 & m_1^1 & \ldots & m_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n-1}^0 & m_{n-1}^1 & \ldots & m_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Auf gleiche Weise erhält man, wenn man die Partialdeterminante

$$\begin{vmatrix} b_0^0 & b_0^1 \ldots & b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

betrachtet, die Relation

$$5)\qquad 0 = \begin{vmatrix} m_0^0 & m_0^1 & \ldots m_0^{n-1} & a_0^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m^0_{n-1} & m^1_{n-1} & \ldots m^{n-2}_{n-1} & a^{n-2}_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man also die in 1) und 2) als Coefficienten der Grössen a auftretenden Partialdeterminanten mit M, so erhält man durch Fortsetzung des angegebenen Verfahrens folgendes System linearer Gleichungen:

$$6)\qquad \begin{cases} a_0^{n-1} M_0 + a_1^{n-1} M_1 + \ldots + a^{n-1}_{n-1} M_{n-1} = 0, \\ a_0^{n-2} M_0 + a_1^{n-2} M_1 + \ldots + a^{n-2}_{n-1} M_{n-1} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_0^0 \quad M_0 + a_1^0 \quad M_1 + \ldots + a^0_{n-1} M_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Da nun vorausgesetztermassen die Determinante A nicht verschwindet, so kann dem System 6) nur dadurch genügt werden, dass $M_0, M_1 \ldots M_{n-1}$ einzeln verschwinden.

Auf gleiche Weise beweist man auch das Nullwerden der übrigen Partialdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\Delta = A.B.$

3. Ist

$$1)\qquad \varphi = b_0^0 x^2 + 2b_0^1 xy + b_1^1 y^2 + 2b_0^2 z^2 + \ldots + b_3^3 p^2 = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, so wird dieselbe ein Ebenenpaar repräsentiren, wenn die Determinante R von 1) verschwindet. Ausserdem müssen die Partialdeterminanten

$$\frac{\partial R}{\partial b_0^0},\quad \frac{\partial R}{\partial b_1^1},\quad \frac{\partial R}{\partial b_2^2}$$

Null werden. Da im Allgemeinen in 1) a_3^3 und a_2^2 nicht verschwinden werden, so wird nach dem, was oben gesagt worden ist, die Gleichung 1) ein Ebenenpaar darstellen, wenn sowohl R, als auch sämmtliche Partialdeterminanten der dritten Ordnung verschwinden.

Es sollen nun die Kegel zweiter Ordnung bestimmt werden, welche durch die Schnitte des Ebenenpaares 1) mit einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung sei

$$2)\qquad \psi = a_0^0 x^2 + 2a_1^1 xy + \ldots + a_3^3 p^2 = 0$$

hindurchgehen. Es soll ferner 2) keinen Kegel darstellen, oder es soll die Determinante $\Sigma \pm a_0^0 \ldots a_3^3$ von Null verschieden sein. Ist dann λ ein unbekannter Factor, so werden die fraglichen Kegel zweiter Ordnung bekanntlich dargestellt werden durch

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

wenn λ bestimmt wird aus der biquadratischen Gleichung

$$3)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a_0^0 + \lambda b_0^0, & a_0^1 + \lambda b_0^1, & \dots & a_0^3 + \lambda b_0^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3^0 + \lambda b_3^0, & & \dots & a_3^3 + \lambda b_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir multipliciren $\varDelta$ mit der Determinante des adjungirten Systems der Coefficienten in 2), also mit

$$S = \Sigma \pm \alpha_0^0 \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3.$$

Setzt man demgemäss

$$m_x^\lambda = \alpha^0{}_x b^0{}_x + \alpha^1{}_x b^1{}_x + \dots + \alpha^3{}_x b^3{}_x,$$

so wird sich die Bedingung 3) so darstellen:

$$4)\qquad \varDelta S = \begin{vmatrix} R + \lambda m_0^0, & \lambda m_0^1, & \dots & \lambda m_0^3 \\ \lambda m_1^0, & \lambda m_1^1 + R, & \dots, & \lambda m_1^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda m_3^0, & & \dots & \lambda m_3^3 + R \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann die einzelnen m_x^λ auch definiren als die einzelnen Elemente der Determinante N, wo N das Product

$$(\Sigma \pm b_0^0 \dots b_3^3)(\Sigma \pm a_0^0 \dots a_3^3)^3$$

darstellt.

Da 4) für $\lambda = 0$ nur dann erfüllt wird, wenn $R = 0$ ist, und dieser Fall ausgeschlossen worden ist, so kann man mit λ^4 dividiren und erhält dann, $\frac{R}{\lambda} = y$ gesetzt:

$$5)\qquad \begin{vmatrix} m_0^0 + y, & m_0^1, & \dots & m_0^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_3^0, & m_3^1, & m_3^2, & m_3^3 + y \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung solcher Determinanten nach y hat bekanntlich J a c o b i gelehrt. Bezeichnet man hiernach mit $\Sigma\varDelta_1$, $\Sigma\varDelta_2$, $\Sigma\varDelta_3$, ... die Summen der Partialdeterminanten der ersten, zweiten etc. Ordnung, welche mit 5) die Diagonalglieder gemeinschaftlich haben, so erhält man

$$6)\qquad y^4 + y^3 \Sigma\varDelta_1 + y_1 \Sigma\varDelta_2 + y \Sigma\varDelta_3 + \Sigma\varDelta_4 = 0.$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen ist aber

$$\Sigma\varDelta_4 = 0, \quad \Sigma\varDelta_3 = 0.$$

Infolge dessen erhält man zur Bestimmung von y die quadratische Gleichung

$$7)\qquad y^2 + y\,\Sigma\varDelta_1 + \Sigma\varDelta_2 = 0,$$

wobei noch zu bemerken ist — was übrigens *a priori* klar war —, dass $y = 0$ den gestellten Bedingungen ebenfalls genügt, also $\lambda = \infty$ eine Wurzel der Gleichung 4) ist. Setzen wir für y seinen Werth, so erhalten wir schliesslich

$$8)\qquad \lambda = -\frac{R}{2\Sigma\varDelta_2}\left[\Sigma\varDelta_1 \pm \sqrt{(\Sigma\varDelta_1)^2 - 4\Sigma\varDelta_2}\right].$$

Die Beschränkung, dass die Oberfläche 2) kein Kegel zweiter Ordnung sei, macht übrigens die vorstehende Rechnung nicht ungiltig für diesen Fall. Man braucht nur, statt die Gleichung des Kegels direct in Anwendung zu bringen, dafür die Gleichung

$$\varphi + \mu\psi$$

zu substituiren, wobei μ der einzigen Bedingung zu genügen hat, dass die Discriminante von $\varphi + \mu\psi$ nicht verschwinde.

Um die Formel 8) in speciellen Fällen leicht anwenden zu können, liegt uns jetzt die Aufgabe vor, dieselbe für den Fall zu transformiren, wenn statt 1) die beiden Ebenen durch ihre Gleichungen

$$9)\qquad u_0 x + v_0 y + w_0 z + r_0 p = 0,\quad u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 p = 0$$

gegeben sind. Die Grössen b hängen von den u, v etc. durch die Relationen

$$b_0^0 = \frac{u_0 u_1 + u_1 u_0}{2},\quad b_0^1 = \frac{u_0 v_1 + u_1 v_0}{2},\quad b_0^2 = \frac{u_0 w_1 + u_1 w_0}{2}\ \text{etc.}$$

ab. Wegen der symmetrischen Form dieser Ausdrücke ergeben sich die übrigen Gleichungen von selbst. Wir haben nun die einzelnen Glieder der Determinante

$$\Sigma \pm m_0^0 \ldots m_3^3 = (\Sigma \pm b_0^0 \ldots b_3^3)(\Sigma \pm \alpha_0^0 \ldots \alpha_3^3)$$

zu bilden. Man findet

$$m_0^0 = \alpha_0^0\left(\frac{u_0 u_1 + u_0 u_1}{2}\right) + \alpha'_0\left(\frac{u_0 v_1 + u_1 v_0}{2}\right) + \alpha_0^2\left(\frac{u_0 w_1 + u_1 w_0}{2}\right) + \alpha_0^3\left(\frac{u_0 r_1 + u_1 r_0}{2}\right).$$

Setzt man also

$$10)\qquad F(u, v, w, r) = \alpha_0^0 u^2 + 2\alpha_0^1 uv + \ldots + \alpha_3^3 r^2,$$

so kann man m_0^0 so darstellen:

$$m_0^0 = \tfrac{1}{2}\{u_0 \tfrac{1}{2} F'(u_1) + u_1 \tfrac{1}{2} F'(u_0)\},$$

und wenn man die analogen Ausdrücke für m_1^1 etc. bildet und bedenkt, dass

$$u_0 \tfrac{1}{2} F' u_1 + \ldots + r_0 \tfrac{1}{2} F' r_1 = u_1 \tfrac{1}{2} F' u_0 + \ldots + r_1 \tfrac{1}{2} F' r_0,$$

so erhält man

$$\Sigma \Delta_1 = u_0 \tfrac{1}{2} F' u_1 + v_0 \tfrac{1}{2} F' v_1 + w_0 \tfrac{1}{2} F' w_1 + r_0 \tfrac{1}{2} F' r_1.$$

Zur Bildung von $\Sigma \Delta_2$ haben wir

$$m_0^1 = \frac{u_0}{2} \cdot \tfrac{1}{2} F' v_1 + \frac{u_1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} F' v_0,\quad m_1^0 = \frac{v_0}{2} \cdot \tfrac{1}{2} F' u_1 + \frac{v_1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} F' u_0$$

und hiermit

$$\begin{aligned} 16(m_0^0 m_1^1 - m_0^1 m_1^0) = {} & (u_0 v_1\, F' u_1\, F' v_0 + u_1 v_0\, F' u_0\, F' v_1) \\ & - (u_0 v_1\, F' v_1\, F' u_0 + u_1 v_0\, F' v_0\, F' u_1) \end{aligned}$$

und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Aggregate. Am übersichtlichsten werden wir wohl zum Werthe von $\Sigma \Delta_2$ gelangen, wenn wir in dem Ausdrucke

$$\begin{array}{llll} - u_0 F' u_0 \{u_1 \tfrac{1}{2} F' u_1 + v_1 \tfrac{1}{2} F' v_1 + w_1 \tfrac{1}{2} F' w_1 & + r_1 \tfrac{1}{2} F' r_1\} & + \tfrac{1}{2} u_0 u_1\, F' u_0\, F' u_1, \\ + u_0 F' u_1 \{u_1 \tfrac{1}{2} F' u_0 + v_1 \tfrac{1}{2} F' v_0 + \quad \ldots & + r_1 \tfrac{1}{2} F' r_0\} & - \tfrac{1}{2} u_0 u_1\, F' u_0\, F' u_1, \\ + u_1 F' u_0 \{u_0 \tfrac{1}{2} F' u_1 + \quad\quad \ldots & + r_0 \tfrac{1}{2} F' r_1\} & - \tfrac{1}{2} u_0 u_1\, F' u_0\, F' u_1, \\ - u_1 F' u_1 \{u_0 \tfrac{1}{2} F' u_0 + \quad\quad \ldots & + r_0 \tfrac{1}{2} F' r_0\} & + \tfrac{1}{2} u_0 u_1\, F' u_0\, F' u_1 \end{array}$$

u mit v, w mit r vertauschen und die so erhaltenen Ausdrücke addiren. Man sieht, dass sich dabei die rechts von der Klammer stehenden Glieder gegenseitig zerstören.

endlich bleibende Functionen sind. Der erste Beweis wird *a posteriori* geführt und ist nicht ganz so allgemein, als der zweite direct geführte, auf der Definition des Integrals durch eine Summe beruhende Beweis.

Nennen wir bei positivem h

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \quad \lim_{h=0} \frac{F(x-h)-F(x)}{-h}$$

bez. den vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten von $F(x)$, so ist bekanntlich eine zwischen a und b stetige Function $F(x)$, die in dem Intervall von a bis $b-0$ überall den vorwärts genommenen Differentialquotienten $f(x+0)$ oder zwischen $a+0$ und b überall den rückwärts genommenen Differentialquotienten $f(x-0)$ hat, bis auf eine additive Constante völlig bestimmt, wenn $f(x)$ integrabel ist.

Differentiiren wir nun die Function

$$\int_a^b f(x)\,dx \int^b \varphi(x)\,dx = L(b)$$

einerseits und die Function

$$\int_a^b \left\{ f(x) \int^x \varphi(x)\,dx \right\} dx + \int_a^b \left\{ \varphi(x) \int_a^x f(x)\,dx \right\} dx = R(b)$$

andererseits entweder vor- oder rückwärts nach b, so finden wir

$$\lim_{h=0} \frac{L(b\pm h)-L(b)}{\pm h} = f(b\pm 0) \int^b \varphi(x)\,dx + \varphi(b\pm 0) \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{h=0} \frac{R(b\pm h)-R(b)}{\pm h} = f(b\pm 0) \int^{b\pm 0} \varphi(x)\,dx + \varphi(b\pm 0) \int_a^{b\pm 0} f(x)\,dx.$$

Da nun $\int^{b\pm 0} \varphi\,dx = \int^b \varphi\,dx$, $\int_a^{b\pm 0} f\,dx = \int_a^b f\,dx$ ist, weil das Integral einer integrabeln Function eine stetige Function seiner obern Grenze ist, so ist der vorwärts genommene Differentialquotient von $L(b)$ gleich dem von $R(b)$, so lange ein solcher existirt, oder der rückwärts genommene Differentialquotient von $L(b)$ gleich dem von $R(b)$, so lange ein solcher existirt, d. h. so lange im Integrationsintervall entweder überall $f(x+0)$, $\varphi(x+0)$, oder überall $f(x-0)$, $\varphi(x-0)$ vorhanden sind, wie auch die integrabeln Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, und wie oft auch (unendlich oft) sie unstetig sein mögen. Da nun ausserdem $L(b)$ und $R(b)$ für $b=a$ gleichzeitig verschwinden, so muss unter den gemachten Bedingungen

$$\int_a^b f(x)\,dx \int^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \left\{ f(x) \int^x \varphi(x)\,dx \right\} dx + \int_a^b \left\{ \varphi(x) \int_a^x f(x)\,dx \right\} dx$$

sein, was zu beweisen war.

Hinfällig aber wird dieser Beweis, wenn irgendwo im Intervall die Grössen $f(x\pm 0)$, $\varphi(x\pm 0)$ sämmtlich nicht vorhanden sind, namentlich dann, wenn dies, was unbeschadet der Integrabilität geschehen kann, in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft, stattfindet. Dann muss der Beweis durch Summation erbracht werden.

Zu diesem Zwecke vereinfachen wir die Formel etwas dadurch, dass wir von der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b\left\{f\int_a^x \varphi\,dx\right\}dx+\int_a^b\left\{\varphi\int_a^x f\,dx\right\}dx$$

die Identität

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^a \varphi(x)\,dx=\int_a^b\left\{f(x)\int_a^a \varphi(x)\,dx\right\}dx$$

abziehen, wodurch sie die symmetrische Gestalt erhält

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b\left\{f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\right\}dx+\int_a^b\left\{\varphi(x)\int_a^x f(x)\,dx\right\}dx,$$

deren Richtigkeit wir nun beweisen.

Es besteht die Gleichung

$$\sum_{0(\mu)}^{n-1}\left\{A_\mu\sum_{0(\nu)}^{\mu-1}B_\nu\right\}+\sum_{0(\mu)}^{n-1}\left\{B_\mu\sum_{0(\nu)}^{\mu-1}A_\nu\right\}+\sum_{0(\mu)}^{n-1}A_\mu B_\mu$$
$$=\sum_{0(\mu)}^{n-1}A_\mu\sum_{0(\nu)}^{n-1}B_\nu,$$

denn es kommt sowohl auf der linken Seite jedes B_μ mit jedem A_ν, als auch auf der rechten Seite einmal und nur einmal multiplicirt vor, so dass eine Identität vorliegt. Dies ist aber der Satz von der partiellen Integration.

Wir theilen das Intervall von a bis b in n gleiche Theile von der Grösse δ und setzen

$$\int_a^{a+\mu\delta} f(x)\,dx=\delta\sum_{0(\nu)}^{\mu-1}f(a+\nu\delta)+F_\mu,\quad \int_a^{a+\mu\delta}\varphi(x)\,dx=\sum_{0(\nu)}^{\mu-1}\varphi(a+\nu\delta)+\Phi_\mu,$$

und zur Abkürzung $f(a+\nu\delta)=f_\nu$, $\varphi(a+\nu\delta)=\varphi_\nu$, so ist

$$\int_a^b\left\{f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\right\}dx+\int_a^b\left\{\varphi(x)\int_a^x f(x)\,dx\right\}dx=R(b)$$
$$=\delta^2\sum_{0\mu}^{n-1}f_\mu\left\{\sum_{0(\nu)}^{\mu-1}\varphi_\nu+\Phi_\mu\right\}+k+\delta^2\sum_{0(\mu)}^{n-1}\varphi_\mu\left\{\sum_{0(\nu)}^{\mu-1}f_\nu+F_\mu\right\}+\varkappa,$$

und es sind k, $\varkappa$, F_μ, Φ_μ Grössen, die dadurch beliebig klein gemacht werden können, dass man δ klein genug nimmt, weil φ und f als integrabel vorausgesetzt wurden und weil Producte integrabler (und endlich bleibender)

Fällen oder sogar sehr viel weniger beträgt.

-Höhe aus Saussure'schen Beobachtungen

findet als bei Anwendung der gewöhnlichen

nach obiger Auseinandersetzung nur mit einem

Dr.

Januar 1875.

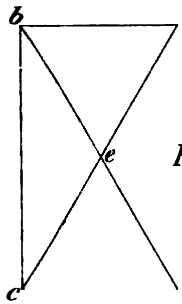


Fig. 1.

Fig. 4.

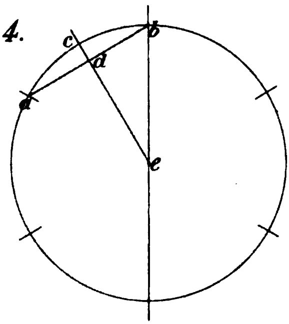
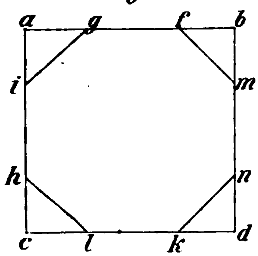


Fig. 5.



7.

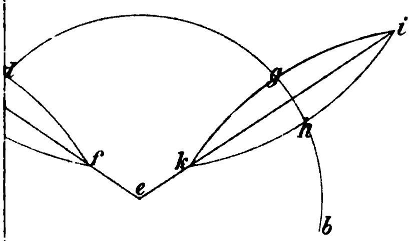
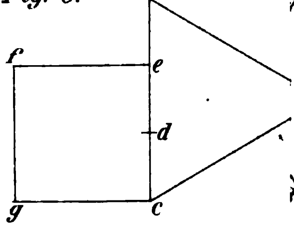
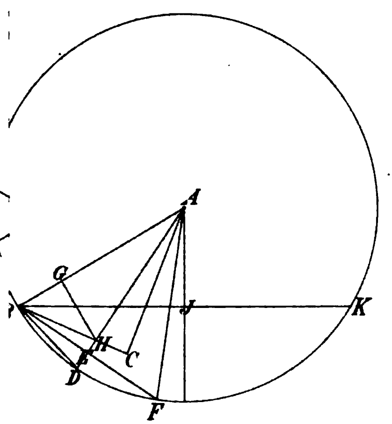


Fig. 8.





Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.

Functionen integrabel sind. Nach dem vorausgeschickten Identitätssatze können wir hierfür schreiben

$$R(b)=\sum_{0(\mu)}^{n-1}\delta f\mu\,.\sum_{0(\nu)}^{n-1}\delta\varphi_\nu-\delta\sum_{0(\mu)}^{n-1}\delta f_\mu\varphi_\mu+\delta^2\sum_{0(\mu)}^{n-1}F_\mu\Phi_\mu+\delta^2\sum_{0(\mu)}^{n-1}F_\mu\varphi_\mu+k+\varkappa.$$

Es ist nun unschwer zu beweisen, dass in diesem Ausdrucke die fünf letzten Glieder mit abnehmendem δ gegen Null convergiren, so dass sich $R(b)$ von

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\varphi(x)\,dx$$

nur um weniger als jede noch so kleine vorgegebene Grösse unterscheiden kann, d. h.

$$\int_a^b f\,dx\int_a^b\varphi\,dx=\int_a^b\left\{f\int_a^x\varphi\,dx\right\}dx+\int_a^b\left\{\varphi\int_a^x f\,dx\right\}dx$$

sein muss, w. z. b. w.

Freiburg i. B., 1875. J. Thomae.

XXI. Zusammenhang der von Reye gegebenen Formel für barometrische Höhenmessung mit der gewöhnlichen.

Herr Reye leitet in seinem Werke über die Wirbelstürme gelegentlich eine Formel für barometrische Höhenmessung ab (S. 223), in welcher die Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe berücksichtigt ist. Er bemerkt über seine Formel nur, dass sie eine wesentlich andere sei als die übliche, findet aber durch ein Zahlenbeispiel eine nahe Uebereinstimmung der durch beide Formeln gelieferten Höhendifferenzen.

Ich will im Folgenden den Zusammenhang beider Formeln entwickeln und zeigen, dass ihre Uebereinstimmung stets eine äusserst grosse ist, dass aber die Reye'sche, theoretisch richtigere Formel stets etwas kleinere Werthe für die Höhendifferenz liefert, als die gewöhnliche Formel, in welcher der theoretische Zahlwerth des Barometercoefficienten noch nicht durch den empirischen ersetzt ist.

Bezeichnet $-dp$ den absoluten Werth der Abnahme des Luftdruckes auf die Flächeneinheit bei Erhebung um dh, so ist

$$-dp=\varrho\,.\,dh,$$

wo ϱ das Gewicht der Volumeneinheit Luft. Ist ferner v das Volumen der Gewichtseinheit, so hat man

$$\varrho=\frac{1}{v}.$$

Aber nach dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze ist

$$p.v = R.T,$$

wenn $T = 273 + t$ Grad Celsius, und R eine Constante bedeutet, die, bei der Wahl von Meter und Kilogramm als Einheiten, den Werth 29,272 hat. Also ist

$$1) \qquad -\frac{R\,dp}{p} = \frac{dh}{T}.$$

Indem man nun die Temperatur t in der ganzen Luftsäule als constant annimmt, nämlich gleich dem arithmetischen Mittel der Temperatur t_0 und t_1 an der unteren und oberen Station, somit

$$T = 273 + \frac{t_0 + t_1}{2} = \frac{T_0 + T_1}{2}$$

setzt, findet man

$$\text{I)} \qquad h_1 - h_0 = RT.\,lognat\left(\frac{p_0}{p_1}\right),$$

wo $h_0 p_0$ und $h_1 p_1$ die Meereshöhe und den Druck an der unteren, resp. oberen Station bedeuten. Dies ist die gewöhnliche barometrische Höhenformel ohne Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit und der Veränderung der Schwere mit Breite und Höhe.

Statt für die Temperatur der ganzen Luftsäule in obiger Art einen und denselben Werth zu setzen, macht Herr Reye die der Natur mehr entsprechende Annahme, dass die Temperatur proportional mit der Erhebung abnimmt. Dann ist zu setzen

$$2) \qquad -dt = l.dh,$$

wo l eine Constante; also durch Integration

$$t_0 - t_1 = l.(h_1 - h_0)$$

oder

$$3) \qquad T_0 - T_1 = l.(h_1 - h_0).$$

Aus 1) und 2) folgt

$$\frac{R.dp}{p} = \frac{dt}{l.T},$$

also durch Integration

$$\frac{1}{l}.\,lognat\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = R.lognat\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

oder mit Einführung des Werthes von l aus Gleichung 3)

$$\text{II)} \qquad h_1 - h_0 = R.\frac{T_0 - T_1}{log\,nat\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}.lognat\left(\frac{p_0}{p_1}\right).$$

Dies ist die Reye'sche Formel. Sie unterscheidet sich von der gewöhnlichen dadurch, dass der Factor T der letztern durch $\dfrac{T_0 - T_1}{lognat\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}$ vertreten ist. Diese beiden Ausdrücke sind also miteinander zu vergleichen. Zu dem Zwecke wird die Grösse

$$\varDelta = T_0 - T_1$$

eingeführt. Dann wird

$$4) \qquad T = T_0.\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varDelta}{T_0}\right),$$

$$\frac{T_0-T_1}{log\,nat\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}=\frac{1}{-\frac{1}{\Delta}\,log\,nat\left(1-\frac{\Delta}{T_0}\right)}.$$

Der Nenner des letzteren Ausdruckes wird durch Einführung der logarithmischen Reihe umgeformt, welche stets convergirt, weil $\frac{\Delta}{T_0}$ stets ein echter Bruch ist. Dann heisst der Nenner

$$-\frac{1}{\Delta}\cdot\left\{-\frac{\Delta}{T_0}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^4-\ldots\right\}\text{ oder}$$

$$\frac{1}{T_0}\cdot\left\{1+\tfrac{1}{2}\frac{\Delta}{T_0}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^3+\ldots\right\},\text{ also}$$

$$\frac{T_0-T_1}{log\,nat\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}=\frac{T_0}{1+\tfrac{1}{2}\frac{\Delta}{T_0}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^3+\ldots},$$

oder durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $1-\tfrac{1}{2}\frac{\Delta}{T_0}$ unter Berücksichtigung von Gleichung 4)

$$=\frac{T}{1+\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2+\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^3+\tfrac{3}{40}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^4+\ldots}.$$

Berücksichtigt man von dem Bruche $\frac{\Delta}{T_0}$, welcher wohl unter allen Umständen $<\tfrac{1}{10}$ bleibt, nur noch die dritte Potenz, so nimmt der Ausdruck die Gestalt an

$$T.\left\{1-\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2.\left(1+\frac{\Delta}{T_0}\right)\right\}$$

und die Reye'sche barometrische Höhenformel lautet nun

$$\text{III)}\qquad h_1-h_0=R.\,T.\,log\,nat\left(\frac{p_0}{p_1}\right).\left\{1-\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2.\left(1+\frac{\Delta}{T_0}\right)\right\}.$$

In dieser Gestalt unterscheidet sie sich von der gewöhnlichen I) nur durch den Hinzutritt des Factors $1-\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Delta}{T_0}\right)^2.\left(1+\frac{\Delta}{T_0}\right)$, dessen Werth wohl in allen Fällen der Praxis um weniger als $\tfrac{1}{1000}$ von 1 verschieden ist.

Somit ist bewiesen:

1. dass die Reye'sche Formel stets auf kleinere Werthe für die Höhendifferenz führen muss, als die gewöhnliche Formel ohne Ersetzung des theoretischen Barometercoefficienten durch einen empirischen;

2. dass der Unterschied beider Resultate höchstens $\tfrac{1}{1000}$ des ganzen Werthes, in den meisten Fällen aber sogar sehr viel weniger beträgt.

Dass Herr Reye a. a. O. durch Anwendung der Formel II) auf die Ermittelung der Montblanc-Höhe aus Saussure'schen Beobachtungen einen grössern Werth (4487^m) findet als bei Anwendung der gewöhnlichen Formel I) (4431^m), kann nach obiger Auseinandersetzung nur auf einem Versehen beruhen.

Carlsruhe, Januar 1875. Dr. Sohncke.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY

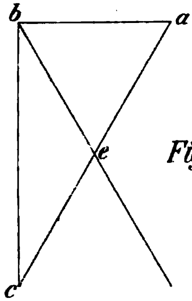


Fig. 1.

Fig. 4.

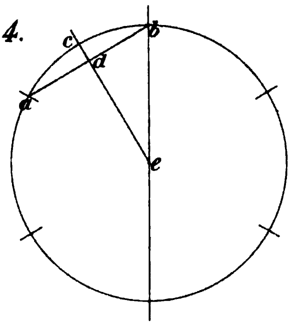
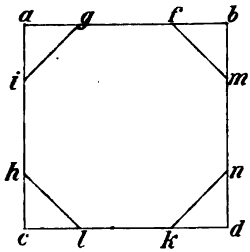


Fig. 5.



7.

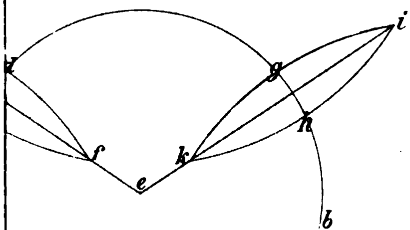
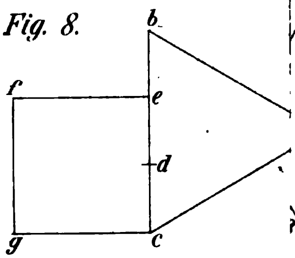
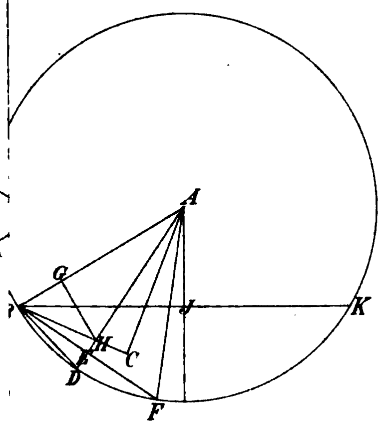


Fig. 8.





Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Fig. 1.

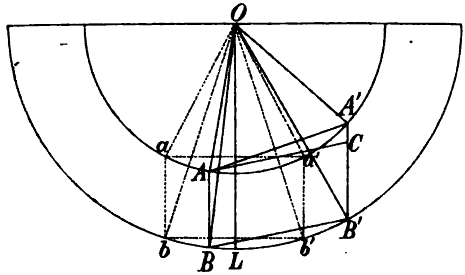


Fig. 2.

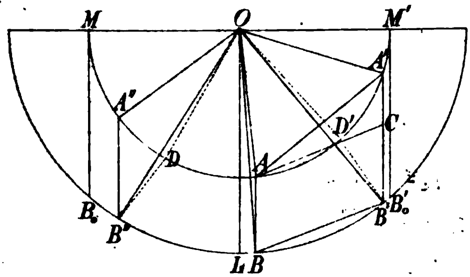


Fig. 3.

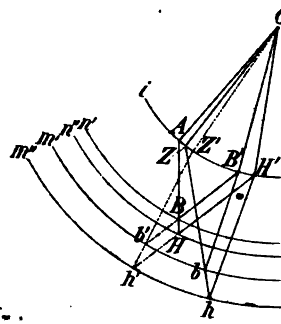
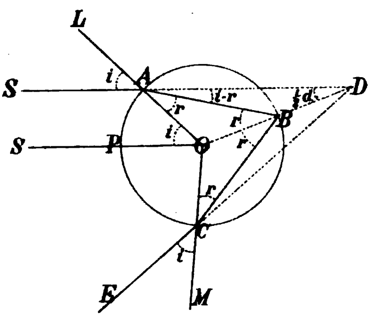
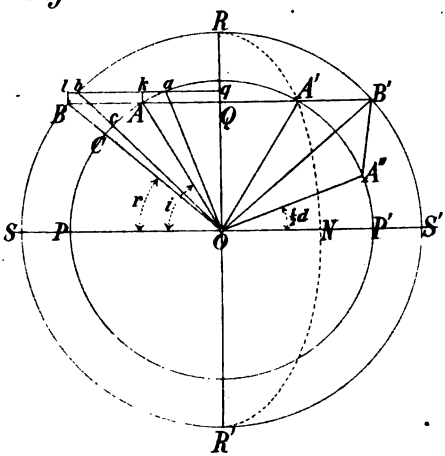


Fig. 5.

Fig. 4.





Lith. v. Georg Meise, Dresden.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Fig. 1.

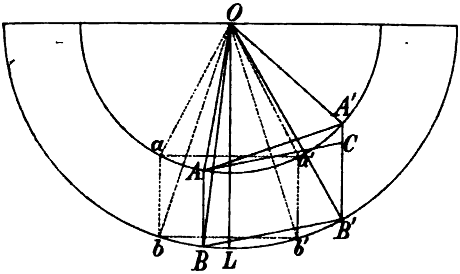


Fig. 2.

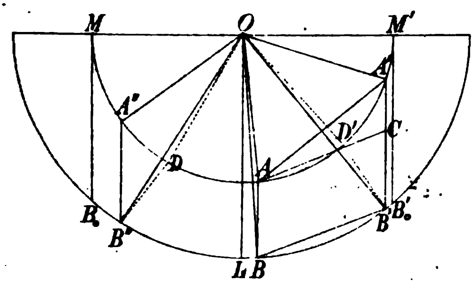


Fig. 3.

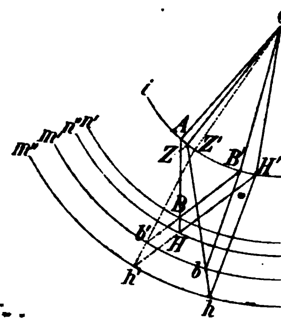


Fig. 4.

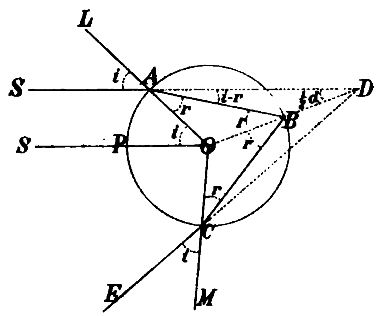
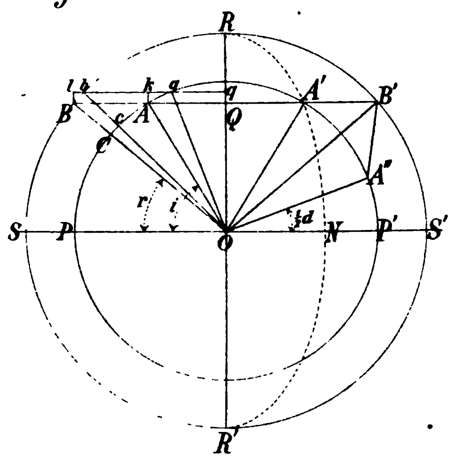


Fig. 5.



Lith. v. Georg Meise, Dresden.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY

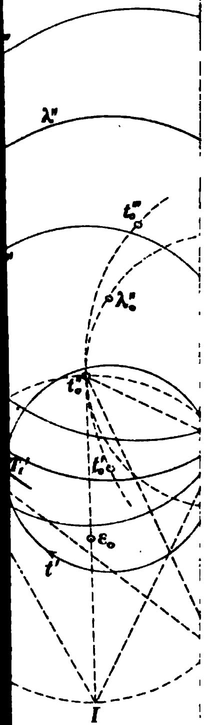
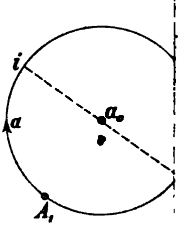
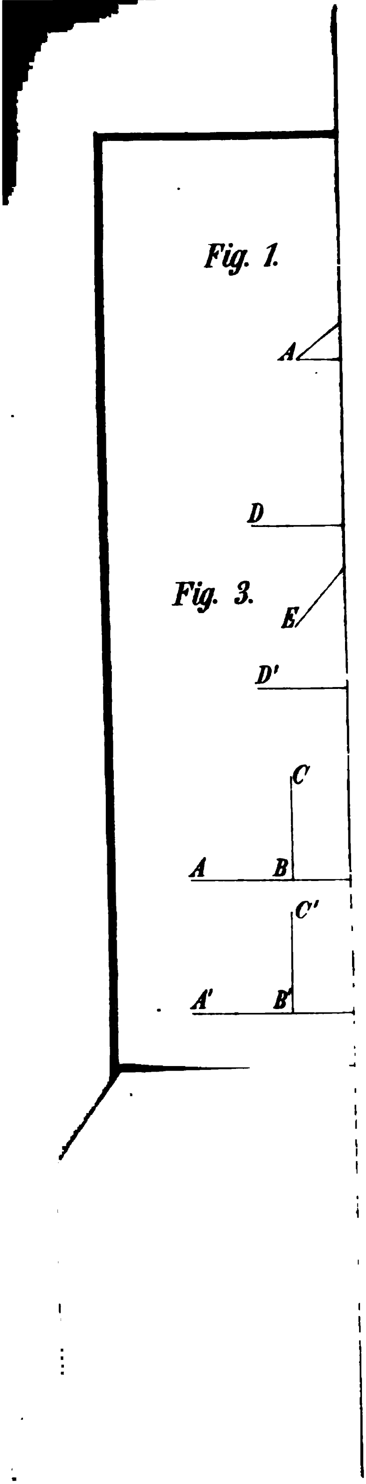


Fig. 3.



REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA



g

sik

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1875.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Zwanzigster Jahrgang.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1875.

UNIVE OF

Historisch-literarische Abtheilung.

I.

Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert.

Von

Dr. S. GÜNTHER,

Docent am Polytechnikum zu München.

(Hierzu Taf. I, Fig. 1—11.)

§ 1.

Als die beiden ältesten geometrischen Druckwerke in deutscher Sprache betrachtete man bisher die Schriften zweier Künstler, des Architekten Mathias Roriczer* und des Malers Albrecht Dürer. Während die eigentlichen Gelehrten sich noch lange hinaus der lateinischen Sprache bedienten — als erste Abweichung von dieser Regel kann die praktische Geometrie des bekannten Astronomen Stöffler[1]) gelten —, fühlten jene Techniker das Bedürfniss, den mathematischen, resp. geometrischen Bedürfnissen ihrer Zunftgenossen durch populäre Anweisungen in der Landessprache zu Hilfe zu kommen. Die Schrift Roriczer's[2]) geht derjenigen Dürer's um fast 40 Jahre voraus und kann wohl noch unter die eigentlichen Incunabeln gerechnet werden; in rein wissenschaftlicher Hinsicht bietet sie nur sehr dürftiges Material, indem sie sich ausschliesslich mit einer speciellen Aufgabe der gothischen Baukunst beschäftigt. Gleichwohl ist sie insofern von grosser Wichtigkeit, als sie den directen Beleg für die

* Es möge hier erwähnt werden, dass in einer in Boncompagni's *Bulletino* (*Tomo VI*) erschienenen Arbeit des Verf. der Name Roriczer in Boricker (S. 331) verketzert wurde. Der Vorname Thomas ist daselbst vom Verf. irrig angegeben worden.

1) Johann Stöffler v. Justingen, Von künstlicher Abmessung aller grösse, ebene etc., Frankfurt 1536.

2) Mathes Roriczer, Dʒ Puechlen der fialen gerechtikait, 1486.

allerdings an sich sehr wahrscheinliche Annahme erbringt, dass in den Bauhütten des Mittelalters nach bestimmten geometrischen Normen gearbeitet wurde; liesse sich doch sonst die Construction der Spitzbogen, Fischblasen, Rosetten etc. nicht erklären, welche die Kenntniss einiger Elementarsätze von den Kreisberührungen, den Sternpolygonen etc. zur nothwendigen Voraussetzung haben[3]). Aber auch das übrige, theilweise zu so hoher Vervollkommnung gediehene Kunsthandwerk bedurfte eines geometrischen Fundamentes, wie denn nach Doppelmayr's[4]) Zeugniss dieses tief empfundene Bedürfniss sogar eine allerdings nicht in den Druck gekommene deutsche Euclid-Bearbeitung hervorgerufen hat. Man muss sich in Hinblick auf diese unzweifelhaft constatirten Thatsachen wundern, dass gar kein literarisches Denkmal solcher Bestrebungen vorhanden sein soll, und in der That existirt ein solches, dessen nähere Untersuchung der Zweck dieser Arbeit ist.

§ 2.

Im Besitze der Nürnberger Stadtbibliothek befindet sich ein Sammelband mathematischer Druckwerke, gezeichnet mit der Bibliotheksnummer 484, sonst ohne jede weitere Notiz. Der Inhalt ist von dem Besitzer in folgender Weise angegeben auf der Rückseite des Deckels (wir behalten die eigentliche Orthographie bei):

Tabule directionū Jo. de Regio monte
T. pportionū plusqꝫ aureus
T. alius in Astronōia
Geometria
Tabule Astroꝰ Alphonsi regis.

Der Inhaber des Buches scheint von dessen Inhalt nur sehr oberflächlich Kenntniss genommen zu haben; denn die dritte der genannten Schriften hat mit Astronomie durchaus nichts zu thun, sondern ist das obengenannte Werkchen Roriczer's, weshalb hier auch eine Hand neueren Datums beigeschrieben hat: „d. i. Matthias Roriczer über die goth. Baukunst. D. Büchlein über fiale Gerechtigkt.“. Der erste Bestandtheil des Buches sind die bekannten *Tabulae directionum* Regiomontan's in einer 1504 zu Venedig von Peter Liechtenstein besorgten Ausgabe, die auch Ziegler[5]) in seinem Cataloge mit aufführt. Die zweite Schrift, der *Tractatus proportionum qlusquam aureus*, datirt aller Wahrscheinlichkeit nach ebenfalls aus dem Ende des 15. oder Anfang des 16. Jahrhunderts; eine ausführlichere Mittheilung über diese anscheinend nicht weiter bekannte Abhandlung möge

3) Reusch, Der Spitzbogen, Stuttgart 1854.

4) Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730, S. 35.

5) A. Ziegler: Regiomontanus, ein geistiger Vorläufer des Columbus, Dresden 1874, S. 34.

einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben. Ueber die dritte Schrift ist bereits berichtet worden; den fünften Platz nimmt eine Ausgabe der Alphonsinischen Tafeln ein, welche der als Mathematiker und Typograph gleich bedeutende Lucilius Santritter aus Heilbronn im Jahre 1492 zu Venedig erscheinen liess.

Die vierte unter den oben aufgeführten Schriften ist es, welche wir hier einer eingehenden Untersuchung unterwerfen wollen. Dieselbe besteht nur aus sechs Blättern in Quart und trägt als Titel einfach die beiden Worte in gothischen Lettern:

Geometria deutsch.

Irgendwelche andere Angaben über Verfasser, Druckort, Zeit etc. fehlen vollständig. Was die Frage nach Ersterem anlangt, so ist dieselbe natürlich durchaus keiner Beantwortung fähig, so lange uns literarische Nachrichten über die Schrift selbst gänzlich fehlen; dagegen wird es möglich sein, bezüglich der beiden anderen wenigstens annähernd zu einiger Sicherheit zu gelangen.

§ 3.

Was das Alter des Büchleins anlangt, so ist es verhältnissmässig leicht, für dasselbe eine obere Grenze anzugeben; ungleich schwieriger gestaltet sich dagegen die Fixirung einer unteren. Wie man aus dem in den nächsten Abschnitten abgedruckten Inhalt ersehen wird, steht der Verfasser auf einem so rein handwerksmässigen Standpunkte, zeigt sich mit allen Ergebnissen der eigentlichen Wissenschaft so total unbekannt, dass wir die Abfassungszeit spätestens auf das Jahr 1500 verlegen dürfen. Nach dieser Epoche erkennen wir bei Jedem, der über geometrische Gegenstände, sei es auch mit ausgesprochen praktischen Rücksichten, schreibt, eine gewisse Bekanntschaft mit den Elementen Euclid's, während unser Verfasser, wie man wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen kann, von diesem Werke überhaupt nichts wusste. Auch der Styl und die Rechtschreibung gehen, wenigstens unserer heutigen Anschauungsweise nach, mit der Sprache in viel verwegenerer Weise um, als dies bei den späteren Praktikern Albrecht Dürer, Schmidt v. Bamberg, Adam Rise etc. der Fall ist. Abgesehen von diesen inneren Gründen können wir aber noch eine weitere Thatsache namhaft machen, welche es fast unzweifelhaft feststellt, dass die Abfassungszeit sicherlich nicht hinter das Jahr 1525 fallen kann

In diesem Jahre erschien nämlich das bereits obengenannte Werk[6]) von Dürer, welches sich in den Kreisen, für welche es geschrieben war, bald grosser Beliebtheit erfreute. In demselben findet sich eine eigenthümliche

6) A. Dürer, Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt etc., Nürnberg 1525.

Construction des regelmässigen Fünfecks, welche, obwohl nicht geometrisch genau, gleichwohl sehr bequem ist und, wie auch Chasles[7]) angiebt, von da ab mit dem Namen Dürer's eng verbunden blieb. Es ist nun gewiss nicht anzunehmen, dass der Verfasser der „Geometria deutsch" es verschwiegen hätte, wenn er diese Regel von Dürer entlehnt hätte; im Gegentheil dürfen wir aus seinem Schweigen über den Erfinder den Schluss ziehen, dass damals jenes Buch noch gar nicht erschienen war, sowie auch, dass die erwähnte Construction wahrscheinlich zu jenen geometrischen Handgriffen gehört, welche, allem Vermuthen nach, innerhalb der Genossenschaften der Bauhandwerker etc. von Jahrhundert zu Jahrhundert sich fortpflanzte.

Dass die Schrift in einer deutschen Reichsstadt entstand, ist an sich höchst wahrscheinlich, indem grössere Officinen mit Einrichtungen zur Holzschneidekunst fast nur in solchen zu finden waren. Auch stimmt damit die ersichtlich kunstgewerbliche Tendenz des Verfassers, welcher ausdrücklich die Bedürfnisse der Harnischmacher und Wappenmaler berücksichtigt. An und für sich würde es am Nächsten liegen, Nürnberg als Druckort zu betrachten; hiergegen spricht aber der Umstand, dass in Panzer's[8]) so höchst genauer Monographie sich gar nichts hierher Gehöriges findet. Vielleicht ist es beim Mangel aller sonstigen Indicien gestattet, ein rein äusserliches Moment noch mit in Betracht zu ziehen. Falkenstein[9]) berichtet nämlich von dem bekannten, theils zu Augsburg, theils zu Venedig thätig gewesenen Buchdrucker Ratdolt Folgendes: „Ihm wird von den Bibliographen Marchand und Maittaire die Erfindung der mit Blumen verzierten oder aus Blumen zusammengesetzten Anfangsbuchstaben „*Florentes litterae*" zugeschrieben." Derartige Initialen finden sich nun wirklich in unserem Schriftchen am Eingange jedes selbstständigen Absatzes; dieselben zeichnen sich ebenso, wie der Druck und der Schnitt der in den Text gesetzten Figuren durch grosse Vollendung, wenigstens relativ, aus. Da nun überdies Erhard Ratdolt bekanntlich zuerst mathematische Figuren xylographisch wiedergab, so liegt der Gedanke nicht allzufern, dass die „Geometria deutsch" von Ratdolt selbst oder einem seiner Nachfolger in einer grösseren Stadt Süddeutschlands gedruckt wurde — als eine Art populären Vademecums für des Lateins Unkundige.

§ 4.

Wir geben nunmehr den Inhalt des Buches wörtlich wieder, indem wir nur die einem Circumflex ähnlichen Abbreviaturen entsprechend durch die

7) Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohnke, Halle 1839, S. 624.

8) Panzer, Aelteste Buchdruckergeschichte Nürnberg's, Nürnberg 1759.

9) Falkenstein, Geschichte der Buchdruckerkunst in ihrer Entstehung und Ausbildung, Leipzig 1856, S. 216.

Buchstaben ersetzen und an Stelle der für die Figuren verwandten gothischen Buchstaben schrägstehende setzen.

I. „Aus der geometrey etliche nutzparliche stueck dy hernach geschriben sten. Zum ersten behend ein gerecht winckelmasz zu machen So mach zwen risz uber ein and an gefert wie du wilt und wo die risz uber ein ander geen da setz ein.*e*. Darnach setz ein zirckel mit einem Ort auff den punckt.*e*.und zeuch in auf als weit du wilt und mach auf yde linj ein punkt Das sein die Puchstaben.*a*.*b*.*c*.dz alles ein weiten sei Darnach mach ein linj vom.*a*.in dz.*b*.und vom.*b*.in dz.*c*. So hastu ein gerecht winckelmasz des' ein exempel hie stet." (Fig. 1.)

II. „So einer ein fünff ort reissen wil mit unverrucktem Zirckel So thu den zirckell auff alsz weit du ein feldung baben wilt und mach zwen puchstaben.*a*.*b*.des ein figur.*a*.*b*."

„Darnach lasz den zirckel mit einem ort in den punckt.*a*.sten und mach ein runden risz des geleichen setz den zirckel.in den punckt.*b*. und mach ein runden risz und wo die risz uber ein and gen da setz dy zwen puchstaben.*c*.*d*. Darnach leg ein richtscheit.od linial auff den punckt.*c*.und.*d*.und mach ein langen risz durch die zwen punckt des ein figur hernach gemacht stet." (Fig. 2.)

„Item darnach setz den zirckel mit einem ort auf den punckt.*d*. und mach ein runden risz durch das.*a*.*b*.und wo der rund risz uber den risz.*c*.*d*.get da setz ein.*b*. Darnach schau wo dselb rund risz uber den runden risz.*d*.*b*.*h*.get da setz ein.*f*. des gleichen auff der anderen seiten da setz ein.*g*. Darnach leg ein richtscheit auff den punckt.*f*. und auff das.*e*.und mach ein risz durch dy punckt gar hin ausz pisz an den runden risz.*d*.*a*.*c*.*g*.da setz ein.*k*. Des gleichen an d auf deren seyten da setz ein.*h*. Darnach setz den zirckel auff den punckt.*k*.und mach ein risz uber die linj.*d*.*e*.*c*.und wo das uber ein ander get da setz ein.*i*. Darnach mach ein risz vom.*i*.in dz.*k*.vom.*k*.in das.*b*.vom.*b*.in dz.*a*.vom .*a*.in das.*h*.vom.*h*.in das.*i*. So hast du ein gerecht fünfeck des do ein exempel stet Dar ausz kumpt das gerecht fünff ort." (Fig. 3).

III. „Und wer ein syben ort behend austeilen wil der reisz ein gantz ge runden risz und setz ein.*e*.in das centrum Darnach mach ein ris vom .*e*.pisz zu dem.*c*. Alsz weit vom.*e*.pisz zu dem.*c*.ist So weit sol von dem .*a*.pisz zu dem.*b*.sein schlecht uber mit der rundung nach und wo die zwen risz uber ein ander gen da sets ein:*d*.das ein exempel wie hernach stet."

„Darnach setz ein zirckel auf dz centrum.*e*.und du in auff pisz in den punckt.*d*.die selbig weit tayl aussen umher der werden siben und nach von einem punckt zu dem andern ein risz. So hastu ein gerecht sibeneck Des ein exempel." (Fig. 4.)

IV. „Der do wil ein gerecht acht ecke machen So mach ein gerechte firung mit den puchstaben versaychnet.*a*.*b*.*c*.*d*.und sets in dy mit ein

.*e*. Und setz ein zirckell mit einem ort in dz.*e*.und thu in auf in dz.*a*. die selben weiten mach von dem.*a*.gegen dem.*b*.ein punckt da setz ein .*f*. des gleichen von dem.*b*.gegem.*a*.da setz ein.*g*.vom.*a*.gegen dem .*c*. da setz ein.*h*.vom.*c*.gegem.*a*.da setz ein.*i*.vom.*c*.gegem.*d*.da setz ein.*k*.vom.*d*.gegem.*c*.da setz ein.*l*.vom.*d*.gegen dem.*b*.da setz ein.*m*.vom.*b*.gegen.*d*.da setz ein.*n*. Darnach zeuch ein linj vom.*f*. in dz.*m*.vom.*n*.in das.*k*.vom.*l*.in dz.*h*.vom.*i*.in das.*g*.des eine figur hernach verzeichnet ist.“ (Fig. 5.)

V. „Hernach so einer ein gerunden risz scheitrecht machen wil dz d scheit gerecht risz und dz gerund ein lang sey so mach drey gerunde neben ein ander und tayl dz erst rund in siben gleiche teil mit den puchstaben verzeichnet.*h*.*a*.*b*.*c*.*d*.*e*.*f*.*g*. Darnach alsz weit vom.*h*.in das .*a*. ist da setz hindersich ein punckt da setz ein.*i*. Darnach alsz weit von dem.*i*.pisz zu dem.*k*.ist Gleich so lang ist der runden risz einer in seiner Rundung der drey neben einand sten des ein figur hernach gemacht stet.“ (Fig. 6.)

VI. „Ein punckt zu vinden der abgethan ist und nit west wo der zirckel gestanden ist zu einem gepogen risz So thu im also ich setz das sey der gepogen risz.*a*.*b*. Mach zwen punckt auf den ris wie du wilt an geferd mit den puchstaben.*c*.*d*.setz den zirckell in das.*c*.unnd thu in auff in das.*d*.mach ein risz des gleichen setz den zirckel in das.*d*.mach ein risz von dem.*c*.wo die zwen risz uber ein ander gen da setz oben ein .*e*.und untenn ein.*f*.also mach geleich ein solche figur neben der wie weit du dar von wilt mit den puchstaben verzeichnet.*g*.*h*.*i*.*k*. Darnach mach ein risz durch das.*e*.und.*f*.und des geleichen durch das.*i*.unnd.*k*.wo die zwen risz unten uber ein ander gen da setz ein.*l*.in dem selben punckt ist der zirckel gestanden des ein figur hernach gemacht stet.“ (Fig. 7.)

VII. „Der do machen wil ein firung und ein driangel dz die firung und d driangel itlichs als vil in im helt als dz and. So mach ein driangel dz ist ein.*a*.*b*.*c*.tail vom.*c*.pisz zu dem.*b*.in dreu gleiche teil das ist .*d*.*e*. Darnach mach ain fierung ausz dem.*c*.*e*.wirt.*f*.*g*. So helt die fierung gleich als vil in als der Driangel des ein exempel hernach gemacht stet.“ (Fig. 8.)

VIII. „Merck so einer ein stech helm aus der geometry machen wil d mach ein fierung mit den puchstaben verzaichnet.*a*.*b*.*c*.*d*. Darnach tail vom.*a*.zum.*c*.inn funff gleiche tayl mit den puchstaben.*g*.*h*.*i*.*k*. Darnach tayl vom.*a*.zum.*b*.in acht gleiche tayl. Des gleich vom.*c*.zum .*d*.und reisz risz von einem tayl zu dem anderen Darnach schau auf die risz und zueg wie sie darinnen steen das ein exempel hernach stet.“ (Fig. 9.)

IX. „So einer ein schilt mit der geometry machen wil d mach ein risz mit den puchstaben.*a*.*b*.*c*.und das dz.*b*.in d mit sey.Darnach mach ein risz von dem.*b*.schlecht unter sich ab und als weit vom.*b*.zum.*a*.od .*c*.ist. So weit mach ein punckt auf d linj unter sich ab da mach ein.*e*. und reiss ein riss uber zwerch dz dy selb linj gleich d obern sey. Darnach nym die weyten uber ort vom.*e*.zum.*a*.die selben weiten setz auf dz.*b*. unnd mach ein punckt da mach ein.*g*. Darnach ein.*h*.in die mit. darnach nym ein weit.*a*.*b*.und setz mit einem Ort auf dz.*h*.und mach ein runden risz vom*f*.zum.*d*.ein exempel hernach stet." (Fig. 10.)

§ 5.

So weit der Originaltext der „Geometria deutsch". Man wird nach der Lecture desselben gewiss unserer oben aufgestellten Ansicht beipflichten müssen, dass nur in einer sehr frühen Periode ein solcher Gebrauch der deutschen Sprache möglich war; insbesondere fällt die fast künstliche Inconsequenz der Rechtschreibung auf, sowie auch — was hier freilich nicht wiedergegeben werden konnte — die von der unsrigen ganz verschiedene Verwendung der Abtheilungszeichen. Wir werden nunmehr den wissenschaftlichen Inhalt des Büchleins mit einigen kurzen Anmerkungen versehen.

Schon die erste Aufgabe lässt uns in ihrer Lösung die vollständige Unabhängigkeit ihres Verfassers von Euclid's Elementen erkennen. Seine Methode hat allerdings den Vortheil, sich ganz ebenso auf den Fall anwenden zu lassen, dass der Punkt, in dem das Loth errichtet werden soll, der Endpunkt der Geraden ist, wie auf den entgegengesetzten. Die strenge Euclid'sche Anschauung machte zwischen beiden Fällen keinen Unterschied, aber bereits andere alte Mathematiker gaben eine Lösung für den zweiten Fall, welche das Verlängern der Geraden nicht voraussetzt, so Proclus Diadochus [10]). Allein diese Lösung der Griechen ist nicht die unserer Vorlage, im Gegentheil muss man letzterer den Vorzug der grösseren Einfachheit zugestehen, wie sie denn auch gegenwärtig noch in unseren geometrischen Lehrbüchern vielfach auftritt. Der einfachste Beweis für diese Construction stützt sich auf den Satz vom Peripheriewinkel im Halbkreise, und dieser einfache Lehrsatz scheint freilich, wie man unter Anderem auch aus einer von Kästner [11]) mitgetheilten Anecdote schliessen kann, bis tief in das sechszehnte Jahrhundert hinein nur wenig bekannt gewesen zu sein.

§ 6.

Wir kommen nunmehr zu jener eleganten Näherungsconstruction des regulären Fünfecks, auf welche wir bereits oben (§ 3) unsere Schlüsse über

10) *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentariorum Libri IV. a Francisco Barocio etc. editi, Patavii* 1560, S. 161.

11) Kästner, Geschichte der Mathematik, 1. Bd., Göttingen 1796, S. 111.

das Alter des Buches gegründet haben. Dieselbe zerfällt in zwei Theile; im ersten wird die senkrechte Halbirung einer Strecke gelehrt, und hier ist die Anschauung des Verfassers eingeschränkter als nöthig, insofern er nicht wie Euclid (*Lib. I. Prop.* 10) von einem beliebigen gleichschenkligen, sondern blos vom gleichseitigen Dreieck Gebrauch macht. Die eigentliche Construction geben wir nach Dürer selbst. Derselbe[12]) lehrt zunächst ein reguläres Fünfeck geometrisch richtig in einen Kreis einschreiben; alsdann aber fährt er fort: „Aber ein fünfeck ausz unverruckten zirckel zu machenn, dem thue also, Reisz zwen zirckel durch einander, also das eins ytlichen runde, durch des andern Centrum gee, und die zwey Centra *a*.*b*. zeuch mit einer geraden lini zusamen, des wirdet ein leng einer seyten des fünften eckes, wo aber die zirckellini an einander durchschneiden, da setz oben ein.*c*.unden ein.*d*.und reisz ein gerade lini.*c*.*d*. Darnach nym den unverruckten zirckel und setz jn mit dem ein fusz in den punckten.*d*.und mit dem andern reisz durch die zwen zirkelrysz, und jre bede Centro.*a*.*b*. und wo die zwen runden risz durchschnytten werden, da setz.*e*.*f*. Aber wo die aufrecht.*c*.*d*.durchschnytten wirdet, da setz ein.*g*. Darnach zeuch ein gerade lini.*e*.*g*.gar hinausz bysz an die zirckellini, da setz ein.*h*.darnach zeuch ein andre gerade lini.*f*.*g*.bisz an die zirckellini da setz ein.*i*.zeuch darnach.*i*.*a*.und.*h*.*b*.gerad zusamen, so werden drey seyten des fünfecks, und von dann lasz zwu gleich seyten lang vom.*i*.*h*.oben zusam reichen, so wirdet ein fünfeck, wie jch das unten hab aufgeryssen." (Es möge bemerkt werden, dass Dürer's Originalfigur mit Ausnahme von *a* und *b* keinen der im Texte angeführten Buchstaben wirklich aufweist.)

Die Genauigkeit, welche man durch diese Construction erreicht, ist nach Chasles (s. o. § 3) durch folgende Angaben bestimmt. Es ist

$$\angle abh = \angle iab = 107^\circ 2';$$
$$\angle bhc = \angle cia = 108^\circ 22';$$
$$\angle bci = 109^\circ 12'.$$

Wir sind durch diese Fünfecksconstructionen auf ein nicht uninteressantes Specialcapitel der geschichtlichen Entwickelung der Geometrie gekommen, dem wir deshalb noch einige Worte widmen wollen.

§ 7.

Wir meinen die Construction geometrischer Probleme mit ein und derselben Zirkelöffnung. Diesen Gedanken verfolgten bereits lange Zeit hindurch verschiedene Mathematiker, und so hat sich auch Chasles genöthigt gesehen, diese Sparte geometrischer Thätigkeit mit einigen Worten[13] zu berühren. Da jedoch daselbst der Gegenstand nur sehr fragmentarisch behandelt ist, neuere Historiker aber gar nicht von demselben gehandelt zu

12) Dürer, Underweysung etc., Nürnberg 1525, S. 54.
13) Chasles, S. 211.

haben scheinen, so ist wohl eine Abschweifung berechtigt, welche eine gedrängte, aber zusammenhängende Darstellung aller hierher gehörigen Thatsachen zum Zwecke hat.

Man hatte lange geglaubt, dass derartige Bestrebungen zuerst bei den italienischen Geometern des 16. Jahrhunderts zu finden seien, allein Wöpcke hat, wie bei so manchen anderen Gelegenheiten, auch hier das Richtigere nachgewiesen, indem er die ersten Spuren solcher Aufgaben bei den Arabern entdeckte; ja, derselbe ist sogar[14]) nicht abgeneigt, in den Arbeiten der Italiener arabische Einwirkungen zu erkennen. Es ist der auch sonst, z. B. in der Entdeckungsgeschichte der Mondesvariation mehrfach genannte arabische Mathematiker Abul-Wafa, der sich solche Aufgaben stellte, und zwar unter verschiedenen Umständen. Während er zuerst nämlich nach Wöpcke's Angabe irgend eine der in der Figur bereits vorliegenden Strecken als Mass der Zirkelöffnung benützte, löste er später die Aufgaben auch mit einer willkürlich gegebenen Länge[15]). Indem derselbe so sämmtliche Fundamentalprobleme in dieser Weise erledigte, konnte er natürlich denselben Auflösungsmodus auch auf jedes andere willkürlich gegebene Problem übertragen — diejenige Classe von Aufgaben selbstverständlich ausgenommen, wo die Beschreibung zweier oder mehrerer Kreise von verschiedenem Halbmesser verlangt wird.

Wie Libri[16]) bemerkt, war Leonardo da Vinci der erste Abendländer, welcher in diesem Sinne arbeitete; leider ist kein Zeugniss davon auf uns gekommen. Ihm folgte Cardanus, dessen ganzer Geistesrichtung diese Specialität besonders zusagen musste. Nachdem er von Proclus gesprochen, dessen Arbeiten nicht direct die Förderung der Wissenschaft anstrebten, gleichwohl aber an sich von Interesse seien, fährt er[17]) fort: „*Igitur consimili argumento quale fuit Procli, ostentatione potius juvenili, quàm utilitate manifesta, tum ego, tum Ludovicus Ferrarius paucis in diebus invenimus, quonam pacto quaecunque ab Euclide demonstrantur, variata circini latitudine, à nobis sub quacunque latitudine illius à contradicente proposita invariabilique, praeter circulorum solam inscriptionem, ac circumscriptionem, perfectè à nobis possent ostendi.*" So lösten Cardan und sein getreuer Schüler, der sich hier ebenso von Ersterem inspirirt zeigt, wie bekanntlich bei der Auflösung der biquadratischen Gleichungen, alle elementaren Aufgaben der Planimetrie, zuletzt auch die achte im ersten Buch des Euclid: aus drei gegebenen Strecken als Seiten ein Dreieck zu bilden[18]). Hiermit konnte das Ziel, welches sie

---

14) Wöpcke, *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux, Paris* 1855, S. 5.

15) *Ibid.* S. 10.

16) *Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, Paris* 1840, *Tome III, S.* 122.

17) *Hieronymi Cardani de subtilitate libri XXI, Basileae* 1553, S. 472.

18) *Ibid.* S. 479.

sich steckten, als erreicht betrachtet werden. Von manchen Seiten[19]) wird die Sache so dargestellt, als ob eine Aufforderung seines Rivalen Tartaglia für Cardan die Ursache gewesen sei, welche ihn zu seinen Untersuchungen bestimmte; indess erwähnt hiervon weder er selbst etwas, noch aucht hut dies Libri. Dieser Letztere erwähnt allerdings, dass Tartaglia auch dieser Gattung von Aufgaben nicht fremd geblieben sei, weiss aber nichts davon, dass dieselbe in dem bekannten Wettstreite zwischen ihm und Cardan eine Rolle gespielt habe[20]).

Zu einer eigentlichen Theorie ward der uns hier interessirende Gegenstand erst ausgebildet durch Benedictis aus Venedig, welcher die Anregung dazu wohl von seinem Lehrer Tartaglia erhalten hatte. Derselbe legte seine Forschungen in einem eigenen Werke nieder[21]); nach der Analyse, welche Libri[22]) hiervon giebt, muss man dem Verfasser allerdings grosse Sagacität zuerkennen. Die gleichzeitigen, bezüglich früheren Spuren, welche wir von ähnlichen Tendenzen in Deutschland bei dem Verfasser der „Geometria deutsch“ und bei Albrecht Dürer treffen, stehen wohl in keinem Zusammenhang mit den italienischen Arbeiten; umgekehrt aber entgingen Erstere nicht der Aufmerksamkeit ihrer südlichen Nachbarn, wie denn auch die Werthe für die Winkel des Dürer'schen Fünfecks, welche wir oben (§ 6) nach Chasles anführten, bereits von dem nämlichen Benedictis berechnet worden sind. Dieselbe Aufgabe, welche für die damalige Zeit ebenso schwierig war, als sie uns jetzt leicht erscheint, wurde auch von Clavius[23]) behandelt und gelöst.

Seit jener Zeit treten uns häufig einzelne Probleme der genannten Art bei den verschiedensten Mathematikern entgegen, ohne doch nach Benedictis' umfassender Arbeit noch ein besonderes Interesse erwecken zu können. Eine Ausnahme macht der auch sonst durch manche originelle Ideen ausgezeichnete Daniel Schwenter, dessen wir in dieser Beziehung schon bei einer früheren Veranlassung Erwähnung thaten[24]). Derselbe sucht auch über die von allen Autoren anerkannte Einschränkung hinauszukommen, welche Cardan (s. o.) mit den Worten charakterisirt: „*Praeter circulorum solam inscriptionem et circumscriptionem.*“ Um nämlich die neunte Aufgabe des andern Theiles seiner „Erquickstunden“ — „Mit einem unverruckten Circul grosse, kleine und mittelmässige Circul zu reis-

---

19) Egen, Handbuch der allgemeinen Arithmetik, 2. Theil, Berlin 1849. S. 206.

20) *Libri*, S. 159.

21) *Benedictis, Resolutio omnium Euclidis problematum, aliorumque adhoc necessario inventorum, una tantummodo circini data apertura, Venetiae* 1553.

22) *Libri*, S. 266 flgg.

23) Chasles, S. 625.

24) Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche, Weissenburg 1872. S. 21.

sen" — zu lösen, nimmt er die Stereometrie zu Hilfe und schlägt vor[25]), entweder die Zirkelspitze auf den Scheitel eines geraden Kreiskegels zu stellen, oder aber auf der Ebene eine Senkrechte zu errichten und auf dieser eine Entfernung h von der Ebene so zu markiren, dass, wenn man aus diesem Punkte mit der gegebenen Oeffnung a einen Kreis beschreibt, diesem Kreise der ebene Radius r zukommt, d. h. es muss nach ihm

$$h = \sqrt{r^2 - a^2}$$

sein. In der That wird sich dies Auskunftsmittel so lange bewähren, als $r > a$ ist; für alle anderen Werthe ist die Aufgabe absolut unlösbar.

Als spätes Nachspiel sei noch auf eine Methode verwiesen, welche der Jesuit Kochanski zur Construction der Zahl π angab[26]); derselbe setzt

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Jedoch scheint der Erfinder selbst die Eigenthümlichkeit seines Verfahrens, nur einer einzigen Zirkelöffnung zu bedürfen, gar nicht beachtet und erst neuerlich Kunze[27]) auf dieselbe aufmerksam gemacht zu haben.

Es ist bekannt, wie gross die Umgestaltung ist, welche in neuerer Zeit Steiner[28]) in diesem speciellen Wissenszweige hervorrief, und es wurden dadurch jene älteren Leistungen ganz in den Hintergrund gedrängt. Ganz abgesehen vom historischen Standpunkt ist dies jedoch sogar didactisch unrichtig, indem diese Aufgaben in ihrer scheinbar veralteten Behandlungsweise ein ausgezeichnetes Mittel zur Schärfung des geometrischen Sinnes für Viele abgeben, die der projectivischen Behandlungsweise Steiner's noch zu wenig mächtig sind.

§ 8.

Kehren wir nach diesem Excurs wieder zu unserem eigentlichen Thema zurück. Die Regel, welche unser Verfasser zur Verzeichnung des regulären Siebenecks giebt, treffen wir sowohl bei Albrecht Dürer, als auch bei allen späteren Schriftstellern wieder, welche geometrische Handgriffe lehren. Gewöhnlich wird sie allerdings anders ausgedrückt, indem man sagt: „Die Siebenecksseite ist die Hälfte der Dreiecksseite." Offenbar ist diese Regel mit der unsrigen identisch, indem ja im gleichseitigen Dreieck alle Höhen gleichgross sind. Man scheint bisher Dürer[29]) für den Erfinder gehalten zu haben; auch Keppler ist wohl dieser Ansicht, wenn er in der „*Harmonice*

---

25) *Schwenter, Deliciae physico-mathematicae,* Nürnberg 1636, S. 131.

26) *Kochanski, Observationes cyclometricae, ad facilitandam praxin accomodatae. Acta Eruditorum, Lipsiae* 1685. S. 397.

27) Kunze, Lehrbuch der Geometrie, Jena 1851. S. 279.

28) Steiner, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833.

29) Dürer, Underweysung etc., S. 53.

mundi"[30]) sagt: „... *quas vel ipsa sollertior mechanica refutet, cum tamen Mechanices caussa obtrudantur juventuti, ut cum septanguli latus, ab Alberto Durero ponitur aequale semi lateri trigonico.*" Kästner hat den durch die Vorschrift bedingten Fehler berechnet und findet den Centriwinkel gleich $51^\circ 19' 14''$ statt

$$\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25' 43''.$$

Der Fehler ist somit für gewöhnliche Zeichnungen sehr unbeträchtlich[31]).

Derjenige, welcher zuerst auf diese Regel verfiel, wurde offenbar durch die Bemerkung geleitet, dass die halbe Dreiecksseite nur um wenig kleiner ist, als der Radius, welcher sich genau sechsmal auf der Peripherie abtragen lässt. Es möge hier jedoch anhangsweise gezeigt werden, wie man auch rein geometrisch zu dieser Construction gelangen könne.

Es sei A (Fig. 11) der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius 1, BK die Seite des darin beschriebenen regulären Dreiecks, J deren Mitte. Man mache $BF = BJ$, ziehe AB und AF und halbire den Winkel BAF durch die Gerade AD, welche BF in E schneidet. Ferner trage man $EH = DE$ ab, so dass auch $BH = BD$ wird, fälle von H auf AB die Senkrechte HG und ebenso von A auf die verlängerte BH die Senkrechte AC.

Alsdann beachte man die nachstehende Relation. Es ist offenbar sehr nahe richtig

$$\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{13}-2)}{4\sqrt{8-2\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}\,(\sqrt{13}-2)}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4},$$

oder ausgerechnet

$$18 = 5\sqrt{13}, \quad 324 = 325.$$

Nun ist nach Construction $BF = BJ = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$, also

$$BE = \tfrac{1}{2}\,BF = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$AE = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4} \quad \text{und} \quad DE = EH = \frac{4-\sqrt{13}}{4}.$$

Durch Subtraction folgt

$$AH = 1 - \frac{4-\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}-2}{2};$$

ferner ist

$$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{13}}}{2}.$$

Nun sind die beiden Dreiecke ACH und BEH ähnlich; folglich besteht die Proportion

30) *Keppleri Opera omnia ed.* Frisch, *Vol. V. Francofurti et Erlangae* 1864.

31) Kästner, Geometrische Abhandlungen, 1. Theil, Göttingen 1789, S. 249.

$$AC:AH = BE:BH = BE:BD,$$

woraus sich

$$AC = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}-2)}{4\sqrt{8-2\sqrt{13}}}$$

berechnet. Zieht man ebenso die ähnlichen Dreiecke AGH und AEB in Betracht, so findet man

$$HG:AH = BE:AB = BE:1,$$

und hieraus

$$HG = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}-2)}{8}.$$

Vergleicht man die oben aufgestellte Beziehung mit diesen Resultaten, so kann man jetzt auch schreiben

$$AC = HG + BE.$$

Es existirt aber ein von Weihrauch angegebenes Theorem, dessen Umkehrung man folgendermassen aussprechen kann[32]): „Es sei das Elementardreieck eines regulären Vielecks gegeben und mit dessen Grundlinie ein Kreis um einen der Basispunkte beschrieben, welcher den gegenüberliegenden Schenkel in einem zweiten Punkte schneidet, so dass ein neues stumpfwinkliges Dreieck entsteht. Hat dieses neue Dreieck die Eigenschaft, dass seine grössere Höhe der Summe der beiden kleineren gleich ist, so ist das genannte Polygon das reguläre Siebeneck."

Wie wir sehen, trifft dies hier zu; es ist also BD die Seite des Vierzehnecks und

$$BF = BJ = \tfrac{1}{2} BK$$

die Seite des Siebenecks. Hierbei sind wir von der nur sehr wenig unrichtigen Annahme der Gleichung

$$324 = 325$$

ausgegangen. Diese Ableitung dürfte einige Beachtung verdienen.

§ 9.

Der dem Siebeneck folgende Abschnitt unserer Schrift beschäftigt sich mit der Construction des regelmässigen Achtecks. Waren die Näherungen des Verfassers bisher auch ziemlich genau und durch den Umstand berechtigt, dass die exacte Verzeichnung theils überhaupt nicht möglich, theils doch nur weit complicirter zu bewerkstelligen war, so schien er doch die eigentlichen Methoden nicht zu kennen. Beim Achteck jedoch ist, wie man sich leicht überzeugt, die von ihm gegebene Construction streng richtig und zugleich die einfachste, wenn man ohne Zuhilfenahme des umschriebenen Kreises verfahren will.

Für die Zahl π kennt der Verfasser nur den archimedischen Näherungswerth $3\frac{1}{7}$; eigenthümlich ist die Art und Weise, wie er zur Darstellung

32) Weihrauch, Geometrischer Satz, Archiv d. Math. u. Phys. 48. Theil, S. 116.

dieser Zahl sich dreier ganz ausgezogener Kreise bedient. Die nächste Aufgabe und ihre Lösung sind ohne besonderes Interesse, insofern der Verfasser hier auf dem Boden der *στοιχεῖα* steht. Dagegen repräsentirt Nr. 8 durch ihre grosse Ungenauigkeit die frühe Zeitepoche, welcher Vergleichungen von Flächenräumen noch lange hinaus grosse Schwierigkeit bereiteten; der Inhalt des Dreiecks ist, seine Seite $=1$ gesetzt,

$$0{,}4430\ldots,$$

dagegen die des Quadrates

$$0{,}4444\ldots.$$

Die beiden letzten Aufgaben haben für den Historiker höchstens insofern einige Bedeutung, als sie das Bestreben der Zeit charakterisiren, das Schönheits- und Zweckmässigkeitsgefühl geometrisch zu unterstützen, ein Bestreben, das sich besonders auch in Albrecht Dürer's Versuchen zur Verbesserung der Buchstaben ausspricht. Negativ könnte man aus Nr. 9 vielleicht einen Anhaltspunkt für die frühe Abfassungszeit des Buches herleiten, indem Stech- (d. i. Tournier-) Helme bereits in der zweiten Hälfte des sechszehnten Jahrhunderts ganz ausser Gebrauch kamen, während gerade zu Ende des fünfzehnten die Tourniere eine Hauptbelustigung der reichsstädtischen Patrizierfamilien abgaben.

Anmerkung. Nach Beendigung dieses Aufsatzes erhielten wir die neueste Nummer dieser Zeitschrift. Curtze bemerkt[33]) darin, dass die beiden Werke, welche wir oben bezüglich als ersten und fünften Bestandtheil des beschriebenen Sammelbandes angaben, gewöhnlich vereinigt angetroffen werden, so dass also ihr Beisammensein hier kein ganz zufälliges ist.

33) Curtze, *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. f Math. u. Phys. 19. Jahrg. S. 453.

Recensionen.

Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen. Von Dr. VINCENZ NACHREINER. München, akademische Buchdruckerei. 1872.

Die vorliegende Inauguraldissertation ist zugleich eine gekrönte Preisschrift, indem sie ein von der Münchener philosophischen Facultät im Jahre 1871 gestelltes Thema behandelt. Da Schriften dieser Art durch den Buchhandel nur wenig verbreitet zu werden pflegen, so ist es wohl angezeigt, dieselbe hier etwas eingehender zu besprechen.

Es muss anerkannt werden, dass die Schrift viel Neues und Interéssantes bringt und in manchen Beziehungen die Theorie der Kettenbrüche wesentlich fördert. Dagegen ist es als ein Nachtheil zu bezeichnen, dass die Entwickelungen des Herrn Verfassers sehr aphoristisch gehalten sind und nur das durchaus Nothwendige geben. Allerdings ist es auf diese Weise möglich geworden, einen so bedeutenden Stoff auf kleinem Raume darzustellen, allein die Lecture ist dadurch erschwert. Ferner können wir uns mit der anscheinend principiellen Ausschliessung aller literarischen Nachweise durchaus nicht einverstanden erklären. Behandelt man in dieser Weise irgend einen Gegenstand ganz losgelöst von seiner historischen Entwickelung, so liegt, abgesehen von einer gewissen Trockenheit, auch noch die Gefahr sehr nahe, schon Gethanes zu wiederholen — wofür denn auch die vorliegende Arbeit einen Beleg liefert.

Der Verfasser nimmt die bekannte Darstellung eines endlichen Kettenbruches durch den Quotienten zweier um einen Grad verschiedenen „Kettenbruchdeterminanten“ als gegeben an und liefert dafür einen kurzen Beweis. Logisch wird man gegen dieses Verfahren sicherlich Nichts einwenden können; aber die ganze Darstellung erscheint so mehr als ein isolirter, künstlicher Griff, während bei der Auflösung des einen jeden Kettenbruch bedingenden Systems trinomischer recurrirender Gleichungen die Determinanten sich von selbst darbieten. In § 2 werden einige Fundamentalformeln der Kettenbruchlehre in eleganter Weise hergeleitet und besonders auch ein Beweis für die bekannte Relation

$$\cfrac{b}{a \pm \cfrac{b}{a \pm \ldots \pm \cfrac{b}{a_{(n)}}}} = b\,\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}\pm b}\right)^{n-1}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}\pm b}\right)^{n-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}\pm b}\right)^{n}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}\pm b}\right)^{n}}$$

geliefert. Derselbe isl mehrfach interessant, hat aber das gegen sich, dass er von den Determinanten blos einen ganz nebensächlichen Gebrauch macht, also mit dem Titel der Schrift nicht im Einklange steht. Uebrigens hat bereits vor 20 Jahren in den Abhandlungen der dänischen Akademie Ramus einen mit dem hier vorliegenden fast ganz übereinstimmenden Beweis gegeben — hierauf deuteten wir bereits oben hin.

Der dritte Paragraph behandelt die Transformation der Kettenbrüche in präciser und übersichtlicher Weise. Bekanntlich hat zuerst Möbius ganz allgemein das Problem in Angriff genommen, einen Kettenbruch in einen andern von weniger Theilbrüchen zu verwandeln. Sein Calcul gestaltet sich jedoch trotz der von ihm verwandten Euler'schen Algorithmen etwas weitläufig, und es tritt hier der grosse Vortheil der Determinantenbezeichnung recht augenfällig zu Tage. Es folgt weiter die Behandlung einer Aufgabe, welche, wie Referent gezeigt hat, als Verwandlung eines aufsteigenden Kettenbruches in einen absteigenden bezeichnet werden könnte; Herr Nachreiner entnimmt seiner Lösung auch eine Ableitung der bekannten, von Euler zuerst aufgestellten Transformationsformel

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 x_2 + \ldots + a_n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n = \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1 x_1}{a_0 + a_1 x_1 - \ldots - \cfrac{a_{n-2} a_n x_n}{a_{n-1} + a_n x_n}}}.$$

Die drei nächsten Abschnitte behandeln die Umformung von Kettenbrüchen in Reihen; allerdings hat sich der Verfasser auf endliche Gebilde beschränkt, aber seine Entwickelungen lassen sich leicht unter den nöthigen Cautelen auch auf eine unendliche Gliederzahl ausdehnen. Heine und Hankel haben nachgewiesen, dass Reihen, welche bezüglich nach ganzen positiven und ganzen negativen Potenzen des Arguments x fortschreiten, in Kettenbrüche sich verwandeln lassen, deren allgemeine Formen bezüglich

$$\cfrac{m_1 x}{1 - \cfrac{m_2 x}{1 - \ldots}} \quad \text{und} \quad \cfrac{a_1}{x + b_1 \pm \cfrac{a_2}{x + b_2 \pm \ldots}}$$

sind. Herr Nachreiner kehrt die Aufgabe um und lehrt die Kettenbruchdeterminanten

$$\begin{vmatrix} \varphi_x^{(0)} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \psi_x^{(1)} & \varphi_x^{(1)} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \psi_x^{(2)} & \varphi_x^{(2)} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_x^{(n-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \psi_x^{(n)} & \varphi_x^{(n)} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} x+b_1 & \pm 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & x+b_2 & \pm 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & x+b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+b_{n-1} & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & x+b_n \end{vmatrix}$$

als Reihen darstellen. Hierbei wäre ein Eingehen auf die verwandten Arbeiten der beiden erwähnten Mathematiker sehr erwünscht gewesen.

Den Schluss des Schriftchens bildet eine Anwendung der Kettenbruchdeterminanten auf Integralrechnung und die Umformung des bestimmten Integrals

$$\int_0^x e^{-y^2}\,dy$$

in einen unendlichen Kettenbruch.

Schliesslich kann Referent nicht umhin, seine Freude über die trotz mancher kleinen Mängel gleichwohl äusserst tüchtige Leistung auszudrücken, um so mehr, als die darin behandelte Theorie der Kettenbruchdeterminanten sich noch nicht überall die Anerkennung erworben zu haben scheint, welche sie unzweifelhaft verdient.

München. Dr. S. Günther.

Ueber eine besondere Art magischer Quadrate. Von v. Pessl, k. Gymnasialprofessor. Programm des Gymnasiums zu Amberg. Gedruckt bei H. v. Train. 1872.

Es wird gerechtfertigt sein, diese Gelegenheitsschrift einer, wenn auch sehr verspäteten, Besprechung zu unterziehen, da dieselbe einen wichtigen Fortschritt innerhalb eines allerdings sehr speciellen Wissensgebietes repräsentirt. Seit der umfangreichen, besonders auch das historische Element gebührend berücksichtigenden Zusammenstellung von Mollweide, welche im Jahre 1817 erschien, ist von grösseren Erzeugnissen der deutschen Literatur wohl nur die Schrift von Hugel zu verzeichnen, welche zwar mancherlei Neues enthält, durch ihre Darstellungsweise aber weiterer Verbreitung Hindernisse bietet. In neuerer und neuester Zeit haben sich besonders englische Mathematiker mit der Lehre von den magischen Quadraten beschäftigt und den Gegenstand so weit gefördert, dass es schwer schien, demselben eine neue Seite abzugewinnen. Gleichwohl ist dies Herrn v. Pessl im vollsten Masse gelungen.

Bekanntlich ist das magische Quadrat in seiner gewöhnlichen Bedeutung durch den Umstand charakterisirt, dass die Summe von je n eingeschriebenen Zahlen in horizontaler, verticaler und diagonaler Richtung stets die nämliche Zahl ergeben soll. Herr v. Pessl bemerkt nun mit Recht, dass diese Bestimmung nicht alle vorhandenen Zahlen gleichmässig berücksichtigt, dass vielmehr, wenn man die nöthigen

$$n+n+2=2(n+1)$$

Bedingungsgleichungen aufstellt, einige Zahlen nur in zwei, andere in drei und eine unter Umständen sogar in vier Feldern auftreten. Um diese Ungleichartigkeit aufzuheben, erweitert der Verfasser das Problem so, dass er zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates in parallele Kreisumfänge verwandelt und so gewissermassen an die Stelle des magischen Quadrates den magischen Cylindermantel treten lässt. Ist schon diese Erweiterung der Aufgabe interessant, so steigert sich das Interesse noch durch die zu ihrer Lösung angewandten Methoden, welche durchaus keinen rein algebraischen, resp. zahlentheoretischen Charakter tragen. Dieselben stützen sich nämlich vielmehr auf gewisse Betrachtungen, welche man sonst gewöhnlich nur in der sogenannten Topologie, bezüglich *Analysis situs*, anzustellen pflegt.

Kurz zusammengefasst behandelt der Verfasser folgendes Problem. Gesetzt, es sei die Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders durch je n durch die Axe hindurchgehende und auf derselben senkrecht stehende Ebenen in n^2 congruente Parallelogramme getheilt. Hebt man von diesen eine willkürliche Anzahl in willkürlicher Reihenfolge heraus, so fragt sich, wieviel es noch unbestrichene Felder giebt, d. h. solche, welche mit keinem der markirten in der nämlichen Horizontal- oder Verticalzeile liegen und auch von keiner der durch die Eckpunkte jener Parallelogramme bestimmten Schraubenlinien durchkreuzt werden. Ersichtlich kann man, mit Weglassung zufällig vorhandener Eigenthümlichkeiten, die Resultate für jede beliebige geschlossene Fläche verwerthen, welche, nach Riemann's Definition, den Zusammenhang 1 hat.

Die Aufgabe wird für den Fall, wo n eine Primzahl ist, eingehend discutirt, und es ergiebt sich folgendes elegante Theorem: Ist n eine Primzahl, so bilden die $(n-1)(n-3)$ von irgend einem Felde eines $n$zeiligen Quadrates nicht bestrichenen Felder $(n-3)$ Ketten von je $(n-1)$ unter sich weder orthogonal, noch diagonal zusammenhängenden Feldern.

Wie mit Hilfe dieser Ueberlegungen die Lösung des Hauptproblems, allerdings vorläufig nur in speciellen Fällen, erzielt wird, kann hier nicht weiter skizzirt werden; es wird das Vorstehende zum Beweise unsers Ausspruches dienen, dass ein an sich interessantes Capitel der Mathematik durch die hier besprochene Schrift eine bedeutende Vervollkommnung erfahren hat.

München. Dr. S. Günther.

Elemente der analytischen Geometrie und höheren Analysis, mit besonderer Berücksichtigung physikalischer Aufgaben. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, von Prof. Dr. HERMANN KLEIN, Lehrer der Mathematik und Physik am Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden. Mit einer Figurentafel. Dresden, Justus Naumann's Buchhandlung (Heinrich Naumann). 8°. VIII und 99 Seiten. Ladenpreis 1½ Mark.

Der Verfasser wünscht sein Werkchen dem letzten mathematischen und physikalischen Unterrichte auf Gymnasien und wohl höheren Lehranstalten überhaupt zu Grunde zu legen, wie aus der Vorrede hervorgeht. In dieser ist als Veranlassung zur Herausgabe des Schriftchens die Unzulänglichkeit der gewöhnlich vom Schüler erworbenen mathematischen Vorkenntnisse zu der durch § 66 des Regulativs für die Gymnasien im Königreiche Sachsen vorgeschriebenen eingehenden mathematischen Behandlung der Statik und Dynamik angegeben. Der Herr Verfasser glaubt mit Recht, dass durch einen kleinen Schritt in die höhere Analysis dem Uebelstande abgeholfen wird und die Schwerfälligkeit elementarer Beweismethoden durch Einfachheit und gefällige Kürze in der Beweisführung ersetzt wird. Auf diese Weise ist das Schriftchen mit dem schon durch den Titel angegebenen Inhalt zu Stande gekommen, welcher speciell Folgendes unter Zuziehung geeigneter Beispiele und Aufgaben umfasst.

§§ 1—19: Analytische Geometrie der Ebene in rechtwinkligen und Polarcoordinaten, und zwar hauptsächlich Bestimmung eines Punktes und der Entfernung zweier, Coordinatentransformation, Discussion der Gleichungen ersten und zweiten Grades, Ableitung von Kegelschnittsgleichungen. §§ 20—31: Höhere Analysis, und zwar über Functionen das Allgemeine und deren Wachsthum, sowie die Bildung der ersten Differentialquotienten, die unbestimmte Integration, Verlauf und Krümmung der Curven, Rectification und Quadratur, Maxima und Minima. §§ 33—50: Die eigentlichen mechanischen und physikalischen Anwendungen auf Interferenzerscheinungen und der Beweis des Ohm'schen Gesetzes, Elasticität mit Festigkeit (§§ 38—43), Centralbewegung, erweiterte Untersuchung der Schwingungsbewegung nach Helmholtz (nebst Fluorescenz und Combinationstönen) etc.

Ich glaube kaum, dass es einen gehörig mathematisch vorgebildeten Lehrer der Physik geben wird, welcher nicht gefällige, mit Hilfe der Anfänge der höheren Analysis gegebene Beweise deren zeitraubenden elementaren Umschreibungen (mit ängstlicher Vermeidung des Namens Differential) vorziehen wird; allein ebenso wenig, glaube ich, wird ein solcher seine sofortige Zustimmung zur Einführung der Elemente der höheren Analysis in den Schulunterricht geben können. Mir scheint es vielmehr vor Abgabe eines bestimmten Urtheils noch eines strengen Nachweises zu bedürfen, dass die vorgeschlagene Aufnahme des neuen Unterrichtsgegenstandes praktisch durchführbar ist. Wäre der Versuch eines solchen Nachweises durch die Aufstellung eines ganz detaillirten, Stunde für Stunde der gegebenen Zeit umfassenden Lehrplanes des gesammten mathematischen und letzten physikalischen Unterrichts, oder noch besser durch Ausarbeitung eines entsprechend detaillirten Leitfadens mit Angabe der Zeiteintheilung gemacht worden, so würde sich daraus vorerst ersehen lassen, ob sich die Aufnahme der Elemente der höheren Analysis in den Schulunterricht mit den Vorschriften des Regulativs über mathematische und physikalische Lehrgegenstände und deren Vertheilung, sowie über die Lehrziele in Einklang bringen liesse.

In Ermangelung eines solchen Nachweises oder seiner Grundlagen kann ich auch nur bedingungsweise ein Urtheil über das Schriftchen des Herrn Verfassers abgeben. Gesetzt den Fall, es wäre gelungen, die Möglichkeit der Aufnahme der Elemente der höheren Analysis in den Schulunterricht überzeugend nachzuweisen, so würde ich das Schriftchen des Herrn Verfassers für geeignet halten, dem Primaner bei der Repetition und zur Auffrischung der ihm durch den Vortrag schon bekannt gewordenen höheren mathematischen Beweismittel zu dienen, wünschte aber auch in diesem Falle eine gleichmässigere Berücksichtigung des Physikalischen, in welchem auf Kosten der Elasticität und Festigkeit z. B. Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Pendel, Fernewirkung elektrischer Ströme und Magneten unterdrückt worden sind.

Dr. Kahl.

Mathematische Aufgaben aus der Physik, nebst Auflösungen. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterrichte bearbeitet von Dr. phil. Emil Kahl. Zweite gänzlich umgearbeitete, vermehrte und verbesserte Auflage, mit allseitiger Berücksichtigung des metrischen Masssystems. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1874. 8°. XII und 311 Seiten. Ladenpreis 5 Mark.

Bei Herausgabe der ersten Auflage gegenwärtiger Aufgabensammlung vor einer Reihe von Jahren hatte ich die Absicht, den Schülern einer höheren Lehranstalt, an welcher ich damals thätig war, nach Absolvirung eines Cursus über Experimentalphysik Anregung zu einem wissenschaftlicheren Studium der Physik und tieferen Eindringen in deren Lehren zu geben. Die Beschäftigung mit den Aufgaben sollte den Schülern Gelegenheit verschaffen, die ihnen durch die Vorträge bekannt gewordenen physikalischen Kenntnisse zu reproduciren und durch Anwendung auf den concreten Fall klar zur Entwickelung zu bringen, wodurch sie am besten zum wohlverstandenen Eigenthum werden.

Vor circa einem Jahre, längst durch die Verhältnisse der früheren Lehrerthätigkeit entrückt, kam ich wieder auf die mir liebgewordene Bearbeitung einer Aufgabensammlung zurück, da ich, nachdem die alte Auflage vergriffen war, statt der blossen Durchsicht eine vollständige Umarbeitung vorzunehmen beschloss. Eine solche empfahl sich besonders, weil die ausschliessliche Durchführung des inzwischen eingeführten Metermasses überhaupt umfassende Umänderungen nothwendig machte, weil ferner die Fortschritte der Physik und einige bei der ersten Bearbeitung gebliebene Lücken zur Ergänzung aufforderten und endlich weil mir die Einstellung von mehreren numerischen Beispielen bei jeder Aufgabe im Interesse der die Aufgabensammlung benutzenden Lehrer geboten schien.

Bei der Neubearbeitung sind die früheren Aufgaben, zu deren Auflösung die Anfänge der höheren Analysis erforderlich waren, weggelassen worden; alle in die zweite Auflage aufgenommenen Aufgaben erfordern nur mathematische Vorkenntnisse, die in der Algebra nicht über die Gleichungen dritten Grades, in der Geometrie nicht über die Anfänge der Stereometrie und analytischen Geometrie hinausgehen. Dagegen ist von Haus aus vom Rechnen mit kleinen Grössen Gebrauch gemacht worden, wie es häufig bei der Ausrechnung von Versuchen und bei der Theorie von Instrumenten vorkommt, und dies hängt mit meinem Bestreben zusammen, die Zwecke der praktischen Physik möglichst im Voraus zu berücksichtigen. Inwiefern dies ausgeführt worden ist, zeigt Vorrede und Inhaltsverzeichniss, auf die ich hiermit verweise.

Zum Schlusse gestatte ich mir noch darauf aufmerksam zu machen, dass diesmal nach den buchhändlerischen Erfahrungen beim Absatz der ersten Auflage und im Interesse der Billigkeit Aufgaben und Auflösungen in einen Band vereinigt worden sind, ferner, dass nach erfolgter Umarbeitung eine bessere Ausnutzung des Raumes, als bei der früheren Auflage möglich wurde, und dass die geehrte Verlagshandlung in höchst dankenswerther Weise durch eine sehr sorgfältige äussere Ausstattung zu Gunsten der Benutzung meiner Aufgabensammlung gewirkt hat.

Dr. Kahl.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1874.

Periodische Schriften.

Mathematische Annalen, herausgegeben von C. NEUMANN. VIII. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von A. AUWERS und A. WINNECKE. 9. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Publicationen der Hamburger Sternwarte. Nr. I. Herausgegeben von G. RÜMKER. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 5 Mk.

Annalen der königl. Sternwarte bei München. 20. Bd. München, Franz. 6 Mk.

Fortschritte der Physik (im Jahre 1870). 26. Jahrg. Red. v. B. SCHWALBE. I. Abth. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Beobachtungen, magnetische und meteorologische, an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1873. Prag, Calve'sche Univ.-Buchh. 7 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

HANKEL, H., Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

WINCKLER, A., Ueber die unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Functionen. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. 2. Theil. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

SCHLÖMILCH, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2. Thl. 2. Aufl. Ebendas. 7 Mk. 60 Pf.

REUSCHLE, C. G., Entwickelung von Producten conjugirter Factoren. Tübingen, Fues. 60 Pf.

ADAM, W., Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra. 1. Thl. Neu-Ruppin, Petrenz. 2 Mk. 80 Pf.

TÄSCHNER, A., Abriss der Arithmetik und Algebra. 1. Theil. Breslau, Leuckart. 1 Mk.

Sommer, F., Leitfaden beim ersten Unterrichte in der Algebra. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Bessell, F., Dreistellige trigonometrische Zahlen und vierzifferige Quadrat- und Cubikwurzeln. Hannover, Schulze. 1 Mk.

Baur, M., Die Raumcurven dritter Ordnung und Classe. Tübingen, Fues. 2 Mk. 40 Pf.

Fialkowski, N., Die einheitliche Construction der drei Kegelschnitte mittels der durch zwei Parallelen begrenzten Transversalen. Wien, Sallmayer & Comp. 80 Pf.

Niemtschik, R., Ueber die Construction der Linien 2. Ordnung, welche 2, 3 oder 4 Linien derselben Ordnung berühren. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Zorer, Die harmonische Theilung. Tübingen, Fues. 1 Mk. 20 Pf.

Salmon, G., Analytische Geometrie des Raumes; deutsch von W. Fiedler. 2. Theil, 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Müller, J. H. T., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Herausgeg. von L. Bauer. 2. Theil. Halle, Waisenhausbuchhdlg. 2 Mk.

Worpitzky, Elemente der Mathematik. 4. Heft: Planimetrie. Berlin, Weidmann. 2 Mk. 40 Pf.

Hoffmann, A., Sammlung planimetrischer Aufgaben. 2. Aufl. Paderborn, Schöningh. 2 Mk. 70 Pf.

Angewandte Mathematik.

Fechner, Th., Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Kinkelin, H., Die Elemente der Lebensversicherungs-Rechnung. 2. Aufl. Basel, Schweighauser. 1 Mk. 60 Pf.

Spitzer, S., Tabellen für die Zinseszins- und Rentenrechnung, nebst Anwendung derselben auf die Berechnung von Anlehen, Amortisationen etc. 2. Aufl. Wien, Gerold. 15 Mk.

Baur, C. F., Elemente der Kartographie. Wien, Hölzel. 1 Mk. 20 Pf.

Jordan, W., Hilfstafeln für barometrische Höhenmessung. Stuttgart, Wittwer. 60 Pf.

Nehls, Ch., Ueber den Amsler'schen Polarplanimeter und über graphisch-mechanische Integration überhaupt. Leipzig, Felix. 3 Mk.

Reuleaux, F., Theoretische Kinematik. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.

Jost, E., Das Sonnensystem, von einem hydrodynamischen Gesichtspunkte betrachtet. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 50 Pf.

Hansen, P., Ueber die Darstellung der geraden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Holetschek, J., Bahnbestimmung des 1. Cometen vom Jahre 1871. 2. Abth. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Schönfeld, E., Zweiter Catalog veränderlicher Sterne. Mannheim, Schneider. 2 Mk. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

Berthold, G., Rumford und die mechanische Wärmetheorie. Heidelberg, Winter. 2 Mk. 40 Pf.

Steinhauser, A., Physikalische Karten. Nr. 5. Wien, Artaria & Comp. 1 Mk. 60 Pf.

Kahl, E., Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Krämer, J., Leitfaden zur elektrischen Telegraphie mit Ruhestrom (Syst. Morse). Leipzig, Grunow. 2 Mk. 60 Pf.

Neumann, C., Ueber das von W. Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. (Sächs. Ges.) Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Wiedemann, G., Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 2. Band: Wirkungen des galvanischen Stromes in die Ferne. 2. Abth. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 22 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Pseudo-Trithemius und Cam. Leonardi.

2. Nachtrag zum *Spec. Astr.* des Albertus Magnus, vergl. Zeitschr. f. Math. XVIII, 331.

Veterum Sophorum sigilla et imagines magicae. E. Joannis Trithemii (!) Abbatis etc. manuscripto eruta. 1612 in 8° erwähnt Fabricius (*Bibl. lat. inf.* unter Joh.). Das Schriftchen ist mit einem besonders betitelten und paginirten Anhang (*Catalogus rariorum magico-cabbalistico chymicorum, studio atque opera Frid. Roth-Scholzii*) wiedergedruckt in kl. Octav *Herrenstadii apud Sam. Roth-Scholtzium A.* 1732, enthält 48 Seiten und ist in 7 Tractate getheilt. Ich vermuthe einen literarischen Betrug oder wenigstens ein starkes Plagiat des ersten, mir unbekannten Herausgebers. Im VI. Tr. S. 40 liest man: *Hoc Anno* 1608 *Mercurius fortis et fortunatus repertus est circa* 11. *Maji ... Iterumque fortissimus et fortunatissimus existet circa* 14 *et* 15. *diem mensis Septembr.* Im VII. Tr. S. 46: *Frustra igitur Alexandrei ad manifestas qualitates omnia referre conati sunt, quod Scalig. exerc.* 318. *summae ait esse impudentiae etc.* Hier ist also ohne Zweifel Jul. Caes. Scaliger gemeint, dessen *Exotic. exercitt. lib. XV de subtilitate* 1582 und 1607 gedruckt sind.

Die ersten V Tractate sind mit einigen Umstellungen, Weglassungen und unbedeutenden Zusätzen fast wörtlich übereinstimmend mit Kap. 7—14 des *Speculum lapidum .. Camilli Leonardi*, wovon ich die Ausg. 4. August. Vindel. 1533 benutze — die erste Ausg. 4. Venedig 1502 citirt E. Narducci, *Libro de le virtudi de le pietre preziose*, Bologna 1869 S. 5, 25, 26 (vgl. Serapeum, her. v. Naumann, 1870 S. 295). — Eine kurze Nachweisung des Verhältnisses wird genügen, die Sache im Ganzen zu erhärten; im Einzelnen zeigt sich bei Leonardus ein natürlicherer Zusammenhang, während der Anonymus allerlei Vorbemerkungen und Uebergänge weglässt.

S. 1 hat einen ausführlicheren Titel: *Veterum sophorum sigilla et imagines magicae secundum nomina Dei (!) et constellationes astrorum, cum signatura planetarum constituta.* Tractatus I. *Sigilla Raphaelis*, anfangend: *Draconis formosi imago*, = Leonardus III Kap. 14 f. 54 .. *primo de his quae a Ragiel positae sunt*, nach der Vorbemerkung (über Ragiel s. Zeitschr. f. Math. XVI S. 385). — Im sogenannten grossen Rasiel f. 8^b erscheint Rafael dem Noah.

S. 6 Tr. II *Imagines seu Sigilla Chaelis.* Hinter der Vorbemerkung heisst es hier in Parenthese: *Haec verba reperiuntur in ipso libro à Chaele conscripto statim in principio.* Der Anfang bis S. 10 entspricht Leon. f. 55 bis 56^b; S. 10 (*viri juvenis ten. in capite coronam*) bis 12 enthält einzelne Stücke aus den *sig. Salomonis* bei Leon. 60^b bis 62^b (s. unten V), z. B. S. 12 *Arietis et simul Leonis*, bei L. 62 *et semi leonis.* — Chael (Cethel u. s. w) ist Bezalel, s. Serapeum 1870 S. 306.[1])

S. 13 Tr. III *Sigilla seu imagines Hermetis .. Hermes lib. quadripart.* 14(!) *has commemorat imagines.* Aber S. 13 *Hominis imago sculpta in diadochoc* (so) *stantis etc.* bis 14 ist der Rest aus Chael bei Leon. f. 56^b bis 58, dennoch hier zuletzt S. 17: „*Haec Hermes*"! — Ueber die 15 Bilder des Hermes bei Leon. f. 62^b s. Zeitschr. f. Math. XVI, 385.

S. 17 Tr. IV *Imagines seu Sigilla Thetelis. Thetel* [bei Leon. f. 58: *ut supra diximus*] *vetustiss. doctor.* — S. 18 zugesetzt: *Hactenus Thetel.*

S. 19 Tr. V *Imagines seu sigilla Salomonis. Vetustissimus inventus est* [bei Leon. f. 59· *vetustissimum .. inveni*] *libellus in deserto apud filios Israel, qui quoniam in eo multa Salomonis opera reperiebantur, Salomoni fuit asscriptus.* Bei Leonardus kann man sich noch denken, dass der von ihm vermuthete Verfasser Salomon sein Buch in der Ueberschrift auf ein von den Israeliten in der Wüste verfasstes zurückführe; aber hier finden die Israeliten Bücher Salomon's in der Wüste. Dieses Beispiel von Anachronismus ist sehr instructiv und beachtenswerth, da es noch immer Leute giebt, welche den Verfassern solcher pseudepigraphischen Schriften, von denen das Mittelalter überschwemmt worden, noch eine Spur von chronologischem Bewusstsein zuschreiben — wie z. B. G. Heine (*Bibliotheca anecdotor.* Leipzig 1848, S. 241) dem angebl. arabischen Virgil aus Cordova, welcher wirklich Seneca, Avicenna, Averroes und Algazel zu seinen Zeitgenossen macht, sowie noch Gallardo (*Ensayo de una biblioteca española* Madrid 1866, im *Indice de Manuscritos de la bibliot. nacional p.* 174) die Ansicht mittheilt, dass jener angebliche Araber ein Zeitgenosse des Avicenna sein soll, während der angebliche Virgil, der sich von Geistern belehren lässt, ohne Zweifel ein spanischer Christ, höchst wahrscheinlich Geistlicher, zu Ende des XIII. Jahrh. war.[2]) — Auch hier stimmt das angebl. MS. des Trithemius S. 19 bis 21 Z. 3 mit Leon. f. 59 bis 59^b Z. 8, dann S. 21 Z. 4 bis S. 27 mit dem Rest bei L. f. 59^b bis 62^b, mit Weglassung dessen, was bereits oben unter II excerpirt

1) *Libros (?) etiam cuiusdam judaei phylosophi nomine chetel in descriptione lapidum est secutus* heisst es in dem (unvollst.) *Tract. de naturis animalium* von einem Mönch des Prädicantenordens im XV. Jahrhund., Cod. Giessen 777 (in J. Val. Adrian's Catal. 4. Francf. 1840 S. 233), also wird das Werk sich wohl auch über das Mineralreich erstreckt haben?

2) Die gegenwärtige Notiz ist im Juli 1871 geschrieben, als ich Hrn. Professor Comparetti Mittheilungen über den Pseudo-Virgil machte, vergl. sein inzwischen erschienenes Werk: *Virgilio nel medio evo, Firenze* 1872, Bd. II S. 92.

war, und Einschaltung von Stücken aus dem Abschnitt bei L. f. 63: *Sigilla... a diversis doctoribus, quae sigilla hic apposui etc.*

Endlich S. 27 ohne Abtheilung *Igneae triplicitatis etc.* excerpirt aus L. Kap. 8 f. 49—50[b], und S. 28 *Saturni figura etc.* bis S. 36, entsprechend Leon. Kap. 9—13 f. 50[b]—54 (Kap. 8—12 sind im Texte nicht als solche bezeichnet, wohl aber im Index). M. Steinschneider.

Recensionen.

Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, von Dr. Hermann Hankel, weil. ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Tübingen. Leipzig, 1874. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 410 S.

Hermann Hankel sah die historisch-mathematischen Untersuchungen, mit denen er sich seit seinen Schuljahren beschäftigte, als eine Erholung von seinen eigentlich mathematischen Arbeiten an. So erzählt uns W. v. Zahn, der Jugendfreund des der Wissenschaft allzufrüh in dem Alter von 34½ Jahren Entrissenen, in dem kleinen, aber inhaltreichen Aufsatze: „Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel" (Mathematische Annalen Bd. VII, S. 583—590). Wir schicken diese aus zuverlässigster Quelle stammende Behauptung unserem Referate um dessenwillen voraus, weil aus ihr die ganze Grösse des Verlustes sich ermessen lässt, den die Mathematik und ihre Geschichte am 29. August 1873 erlitten haben. Wer aus eigener Erfahrung die Schwierigkeiten historisch-mathematischer Forschungen kennt, vorausgesetzt, dass man wirklich quellenmässig und unbefangen und nicht in blindem Zutrauen zu irgend einer fremden Autorität, oder gar zu irgend einer eigenen, aber vorgefassten Meinung seine Entscheidungen treffe, der wird es kaum begreiflich finden, wie als blosse Erholung gelten kann, was die volle productive Geisteskraft Anderer in Anspruch zu nehmen im Stande ist. Wir selbst gestehen gern zu, dass wir von vornherein diesen Ergebnissen nebensächlicher Beschäftigung sehr misstrauisch gegenübertraten. Wir glauben dem Todten diese Anerkennung zu schulden, denn gerade der Gegensatz unsers anfänglichen Misstrauens gegen vermutheten Dilettantismus zu dem Gefühle der Bewunderung, welches sich unserer bemächtigte, je tiefer wir uns in das zur Beurtheilung uns vorliegende Buch hineinlasen, dürfte das Lob, welches wir heute ihm unumwunden spenden, zu erhöhen geeignet sein. Auch der Umstand dürfte hier als ins Gewicht fallend hervorgehoben werden, dass wir keineswegs einem Buche uns gegenüber befinden, mit welchem wir überall und immer einverstanden sind. Wir werden in diesem Referate mehr als einen Punkt zu berühren haben, über welchen unsere Ansicht von der des Verfassers wesentlich abweicht, und wir also den Verfasser im Unrecht glauben. Aber streitige Punkte in der Geschichte der Wissenschaften wird es immer geben, und zwar um so mehr, als die Zeiten, um die es sich handelt, weiter zurück liegen, und die Gegnerschaft über Einzelnes schliesst nicht aus, dass man den Gegner schätze, ja sogar ihm eine auf Achtung gegründete Zuneigung widme.

„Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter", so lautet der Titel des Buches, über welches wir reden. In der That hätte es schwer gehalten, eine andere, passendere Bezeichnung zu finden. Wir haben es nicht mit einem Ganzen zu thun, sondern mit grösseren Abschnitten, welche bestimmt waren, ein Ganzes dereinst zu bilden, aber leider durch den Tod ihres Verfassers nicht dazu gelangten, eine ebenmässige Verbindung unter einander zu erhalten. Ja die Abschnitte selbst, welche wir vor uns haben, sind in Ausarbeitung und Vollendung nicht übereinstimmend. Während einige, allerdings die grösseren Capitel, vollständig druckreif waren und muthmasslich in dem Zustande, in welchem wir sie heute vor uns sehen, in die von Hankel geplante Geschichte der Mathematik in einem (?) Bande übergegangen wären, sind andere noch unvollendet und hätten ebenso muthmasslich bei der Vereinigung eine ergänzende, auch wohl berichtigende Umarbeitung erfahren. Haben die Herausgeber deshalb etwa Unrecht gethan, alle diese Beiträge zu veröffentlichen? Unser oben ausgesprochenes Gesammturtheil bezeugt, dass wir diese Frage durchaus verneinen. Wir können bedauern, dass wir nicht mehr, dass wir nicht Alles haben, aber wir danken Denen, die uns das Vorhandene nicht vorenthielten, aus welchem wir persönlich und, wie wir überzeugt sind, gleich uns alle irgend sachkundigen Leser vielfache Anregung und reiche Belehrung schöpfen. Nicht als ob dem Verfasser wesentlich neue Quellen zu Gebote gestanden hätten. Wir erkannten in den meisten Citaten dieselben Werke wieder, welche bei Behandlung der gleichen Perioden uns und anderen Fachgenossen gedient hatten, soweit sie zur Zeit unserer Veröffentlichungen schon erschienen waren, ja zur Benutzung einzelner dieser Schriften mögen wir dem Verfasser Anlass gegeben haben; aber Lesen und Lesen ist eben zweierlei, und Hermann Hankel hat es entschieden verstanden, sich in den Geist alter und ältester Schriftsteller besser hineinzulesen, als viele Andere, sich so gut hineinzulesen, dass er an nicht wenigen Stellen wagen durfte, Wiederherstellungen vorzunehmen, deren Zutreffen kaum einem Zweifel unterworfen sein dürfte.

Wir rechnen hierzu die Beweisführung für die Winkelsumme des Dreiecks nach Art der pythagoräischen Schule an den Einzelfällen des gleichseitigen, des gleichschenkligen und des ungleichseitigen Dreiecks* (S. 95

---

* Zur Unterstützung verweisen wir auf eine von Hankel nicht beigezogene Stelle der Geodäsie des Heron von Byzanz, die Dreieckswinkel seien die Hälfte der vier Rechten gleichen Viereckswinkel. Vergl. *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale, Tome XIX, Partie 2, pag. 368. Paris* 1858.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

bis 97); wir lehnen nicht vollständig ab die Vermuthung, Quadrat und Heteromekie ständen in der Kategorientafel des Aristoteles als Ersatz für die fehlenden Kategorien: Rationales und Irrationales (S. 110 in der Note); wir verweisen aber ganz besonders auf das, wie uns scheint, mit grosser Vorliebe bearbeitete Capitel: Mathematik der Inder, in welchem die Entstehung der cyklischen Methode (S. 201), der Beweis für den Satz vom rechten Winkel im Halbkreise aus dem Principe der Symmetrie (S. 207) die Entstehung des Werthes $\pi = \sqrt{10}$ (S. 216) und als bedeutendste, weil am Meisten gesicherte Entdeckung die Unterscheidung der Tetragone und Trapeze bei Brahmagupta (S. 213) uns ebensoviele freudige Ueberraschungen boten und uns wenigstens durchaus überzeugten.

Auch in einem andern historischen Punkte sind unsere gegenwärtigen Ansichten von denen Hankel's weit weniger verschieden, als unsere beiderseitigen Veröffentlichungen es vermuthen lassen, wir meinen bezüglich der Persönlichkeit des Pythagoras. Wir sind schon geraume Zeit von den in dieser Beziehung extremen Ansichten, welchen wir in unseren Mathematischen Beiträgen zum Culturleben der Völker huldigten, zurückgekommen, und wie wir diese unsere Bekehrung wiederholt in Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, sowie im persönlichen Verkehr mit Fachgenossen aussprachen, ergreifen wir gern die heute uns gebotene Gelegenheit, auch im Drucke dasselbe Zugeständniss zu machen. Hankel hat ganz Recht, wenn er (S. 330) gegen unsere Bereitwilligkeit, den Erzählungen der spätesten Alexandriner über den 34 Jahre langen Aufenthalt des Pythagoras im Orient und den sich daran knüpfenden Sagen Glauben zu schenken, polemisirt. Diese aus Pietät gegen das Röth'sche Werk, aus welchem wir sehr viel und namentlich die Quellen selbst zuerst kennen lernten, entstandene Auffassung haben wir längst aufgegeben. Für gesichert halten wir nur den vieljährigen Studienaufenthalt in Egypten, für welchen wir namentlich die Busirisstelle des Isokrates geradezu als zwingend erachten trotz der Bemängelungen, welche diese Stelle erfahren hat. Wenn Isokrates auch absichtlich Lügen über die Persönlichkeit des Helden seines Panegyrikus erzählt, so schliesst dieses Geständniss die Glaubwürdigkeit nebensächlicher, jenem Helden gegenüber ganz gleichgiltiger Dinge gewiss nicht aus; Busiris wird dadurch ein antikes Stück Geschichtsfälschung, aber noch lange keine Münchhausiade. Wir können heute ferner so wenig wie früher die Ueberzeugung aufgeben, dass in der pythagorischen Schule Lehren vorgetragen wurden, welche überraschende Aehnlichkeit mit solchen Dingen besassen, denen das Griechenthum zur Zeit Alexander des Grossen an dem zweiten Mittelpunkte ältester Culturverbreitung neben Egypten in Babylon wiederbegegnete, mag auch die Art, wie jene babylonischen Elemente in die pythagorische Lehre eindrangen, eine räthselhafte oder mindestens eine zweifelhafte sein. Wir betonen dabei heute noch die immerhin auffallende Thatsache, dass derselbe Jamblichus, welcher von dem Auf-enthalte des Pythagoras in Babylon erzählt, ein besonderes Werk über Babylon verfasst hat. Wir denken in diesem unserem, seit mehreren Jahren modificirten Glaubensbekenntnisse nicht weit von dem abzuweichen, was Hankel (S. 94), was aber auch Bretschneider (Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, S. 67 flgg.) für richtig halten.

Wir haben oben bereits gesagt, dass wir neben vielfacher Zustimmung auch nicht unbedeutende Meinungsverschiedenheiten geltend machen würden. Wir wollen hier einige derselben nach der Reihenfolge der Seitenzahl des Hankel'schen Buches hervorheben.

S. 37 wird das sogenannte herodianische System griechischer Zahlenschreibung als „noch vor Kurzem wenig bekannt" bezeichnet. Diese Behauptung dürfte sich kaum rechtfertigen lassen, nachdem jene Schreibart seit dem XVII. S., von Wallis, Montfaucon, Corsinus an, bis zu Franz, zu Nesselmann und zu unseren Mathematischen Beiträgen in einer grossen Reihe von Werken erläutert worden.

S. 104 giebt Hankel zu, dass die älteren Pythagoriker — ein Begriff, der auch bei ihm fast bis auf die Zeit der Akademie hinabführt — sich mit Summationen von Zahlenreihen viel beschäftigt haben. Ob sie, fährt er fort, auf die höheren Polygonalzahlen eingingen, lässt sich nicht constatiren. Wir meinen dagegen, es lasse sich dieses mindestens in hohem Grade vermuthen, und beziehen uns dafür auf die Existenz einer Schrift des Philippus Opuntius, des Schülers von Plato, über die Polygonalzahlen, welche Hankel entgangen zu sein scheint, wiewohl Bretschneider (*l. c.* S. 76) dieselbe besonders hervorhob. Was das erstere Zugeständniss betrifft, so können wir von ihm aus um so weniger von der Auffassung abgehen, welche wir über den arithmetischen Ursprung des erst in zweiter Linie geometrischen Lehrsatzes von den Quadraten der Hypotenuse und der Katheten uns gebildet haben. Wir bemerken dabei, dass wir, seit wir diese Darstellung — wie wir damals glaubten, als ganz neu — veröffentlicht haben, einem früheren Vertreter ähnlicher Ansichten in der Literatur begegnet sind. Jul. Fr. Wurm hat sich nämlich schon 1833 in Jahn's Jahrbüchern, Bd. IX S. 62, ausgesprochen wie folgt: „Schwerlich leitete den Pythagoras das nach ihm benannte geometrische Theorem auf seine arithmetischen Sätze, sondern umgekehrt mögen ihn die Beispiele zweier Quadratzahlen, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, auf die Relation zwischen den Quadraten der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufmerksam gemacht haben."

S. 151 in der Anmerkung heisst es, die Quadratrix rühre vielleicht von einem gewissen Hippias her, der aber sicherlich nicht der Sophist Hippias aus Elis in der Mitte des V. S. sei. Diese Verneinung ist uns keineswegs neu. Hankel selbst hat ihr im *Bulletino Boncompagni* für 1872, S. 297, bei Gelegenheit eines Referates über die sogenannte Geschichte der mathematischen Wissenschaften von Dr. Heinrich Suter Ausdruck gegeben. Ebenso sprach sich Friedr. Blass in den Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik, Bd. 105, in seinem dort (S. 27—35) abgedruckten Referate über Bretschneider aus. Dieselbe Ansicht vertritt Friedlein S. 8 seines Programmes von 1873, Beiträge zur Geschichte der Mathematik, III. Gleichwohl können wir diese Verneinung nur als irrig bezeichnen. Die Gründe, welche wir brieflich schon vor mehr als Jahresfrist gegen befreundete Gelehrte ausgesprochen haben, sind folgende. Der anonyme Hippias unserer Gegner, welcher mit Dinostratus wegen Erfindung der Quadratrix in die Schranken tritt, kann keinenfalls jünger als dieser sein Nebenbuhler sein. Dinostratus war aber Bruder des Menächmus, des Lehrers Alexander des Grossen in der Mathematik, kann demnach als untere Zeitgrenze für Hippias spätestens das letzte Drittel des IV. S. bedingen. Als Erfinder der Quadratrix wird uns nun Hippias von Proklus genannt, und zwar an zwei verschiedenen Stellen S. 272 und S. 356 nach der Friedlein'schen Ausgabe, nach welcher wir immer citiren werden. An der ersteren Stelle heisst es, Nikomedes habe die Dreitheilung des Winkels mittels der Conchoide vollzogen, Andere haben die Aufgabe mittels der Quadratricen des Hippias und Nikomedes gelöst, wieder Andere, indem sie von den archimedischen Spirallinien ausgingen. Die zweite Stelle besagt, Apollonius zeigte das Eigenthümliche jedes Kegelschnittes, Nikomedes dasselbe für die Conchoiden, Hippias für die Quadratrix, Perseus für die Spiren. Aus diesen beiden Stellen lässt sich über das Zeitalter so wenig, wie über die Persönlichkeit des Hippias ein unmittelbarer Schluss ziehen. Wollte man, wie es ja nahe genug liegt, die Reihenfolge der Namen als eine chronologische auffassen, so müsste Hippias gemäss der ersten Stelle vor, der zweiten wegen nach Nikomedes gelebt haben, überdies beide der zweiten Stelle zufolge nach Apollonius, also frühestens am Ende des III. S., was, wie wir sahen, für Hippias unmöglich ist. So sind wir für's Erste rathlos. Glücklicherweise besitzt Proklus in seinem Commentar zu Euklid die, soviel wir wissen, ausnahmslose Gewohnheit, einen Schriftsteller, welchen er citirt, sofern Missverständnisse möglich wären, mit deutlicher Benennung zu schildern und später nur dann den Namen schlechtweg zu benutzen, wenn ein vorhergegangenes Citat jeden Zweifel unmöglich machte. Zeno heisst S. 199 von Sidon, später nur Zeno; Leodamas heisst S. 66 von Thasos, später nur Leodamas; Oinopides heisst S. 66 von Chios, später nur Oinopides; Theätet heisst S. 66 von Athen, später nur Theätet; Eudemus heisst S. 125 der Peripathetiker, später meistens nur Eudemus; Hero tritt S. 41 neben Ctesibius auf, als dessen Schüler er damit charakterisirt ist, später bald als Hero der Mechaniker, bald als Hero schlechtweg; Hippokrates der Arzt wird S. 38, Hippokrates von Chios S. 66 genannt, Letzterer tritt S. 213 wiederholt auf und wird wieder als Hippokrates von Chios bezeichnet, eine negative Bestätigung unserer Behauptung, weil der alleinstehende Name hier zu Missverständnissen Anlass geben könnte. Fragen wir, nachdem diese Gewohnheit des Proklus festgestellt ist, ob vor den beiden oben angeführten Stellen noch früher ein Hippias vorkomme, so finden wir in der That S. 65 Hippias von Elis. Ebenderselbe muss also auch später unter Hippias schlechtweg verstanden werden. Zu diesem Beweise, der uns persönlich völlig genügen würde,* treten aber noch ihn ergänzende Umstände hinzu. Erstlich dass Hippias von Elis in jener der Mathematikerchronologie des Eudemus angehörigen Proklusstelle S. 65, wo er genannt ist, als Gewährsmann dafür auftritt, dass Mamerkus oder Ameristus, oder wie der Bruder des Stesichorus geheissen haben mag, *ἐπὶ γεωμετρίᾳ δόξαν ἔλαβε*, und als solchen Gewährsmann wird Eudemus doch wohl nur benutzt haben, wer von Mathematik Etwas verstand. Zweitens kommt dazu die Art, wie Plato sich über Hippias von Elis äussert. Mag Plato auch im Ganzen gegen Hippias sich eingenommen erweisen, zumeist wohl deshalb, weil dieser aus der Wissenschaft ein Gewerbe machte und auf seinen Reisen um Geldeslohn lehrte, die Stellen scheinen uns doch nicht rein ironisch aufgefasst werden zu können, in welchen es heisst: „Was du am besten verstehst, was die Sterne betrifft und was am Himmel sich zuträgt? ... Aber Etwas über Geometrie hören sie gern?“ (*Hippias major* 285) oder dass Hippias des Rechnens und der Rechenkunst kundig sei vor allen Anderen und kundig auch der Messkunst (*Hippias minor* 367, 368), oder endlich „denn die anderen Sophisten beeinträchtigen die Jünglinge; sie führen dieselben, die von den Künsten sich abwendeten, den Künsten wider deren Willen zu, indem sie Rechenkunst und Sternkunde und Messkunst und Musik sie lehren — und dabei warf er einen Blick auf Hippias —; kommt er aber zu mir, wird er über nichts Anderes Etwas lernen, als weshalb er zu mir kam“ (Protagoras 318). Wenigstens stimmt einer der genauesten Kenner platonischer Dialoge, Karl Steinhart, mit unserer Auffassung überein, welcher in seiner Einleitung zum grösseren Hippias (Platon's sämmtliche Werke, übersetzt von Hieronymus Müller, mit Einleitungen begleitet von Karl Steinhart, Bd. I, Leipzig 1850) den Hippias von Elis schildert: „Dieser ohne Zweifel in der jonischen Naturphilosophie herangebildete, gewiss aber auch mit der Weisheit der italischen Eleaten und des Empedokles nicht unbekannte Mann stand in der Fülle und Vielseitigkeit seines ethischen, grammatischen, geschichtlichen, wie seines naturwissenschaftlichen, mathematischen, astronomischen Wissens auf der Höhe der Bildung seiner Zeit.“

---

* Wir sind z. B., auf den ganz analogen Ideengang gestützt, überzeugt, dass der Philippus S. 305 identisch mit Philippus von Mende S. 67 ist, der selbstverständlich gegen eine voreuklidische Fassung des Satzes I, 16 der Elemente polemisirte.

S. 155 ist aus Plutarch der Tadel erwähnt, mit welchem Plato den Eudoxus, den Archytas und den Menächmus belegte, weil sie die Verdoppelung des Körperraumes auf instrumentale und mechanische Verfahrungsweisen zurückführten. Auch hier steht Hankel nicht allein. Bretschneider (*l. c.* S. 143flg.) meint auch, das Factum, dass Plato sich tadelnd ausgesprochen habe, könne nicht wohl bezweifelt werden. Beide Historiker fühlen den Widerspruch, in welchen dabei Plato gegen seine eigene, viel roher instrumentale Lösung des delischen Problems geräth, und suchen ihm durch die Annahme zu entgehen, Plato habe eigentlich nicht die mechanische Würfelverdoppelung getadelt, sondern die mechanische Construction von Kegelschnitten und dergleichen Curven höherer Art als der Kreis. Uns kann diese Erklärung um so weniger befriedigen, als ja auch der Kreis mit Hilfe eines Instrumentes beschrieben wird; gegen solche Instrumente anzukämpfen, hiess auch damals schon die ganze Geometrie über den Haufen werfen. Wir wagen es daher, wenn auch mit Zagen, da wir uns der fast übermässigen Kühnheit unserer Vermuthung bewusst sind, eine andere Möglichkeit der Prüfung der Fachgenossen öffentlich zu unterbreiten. Plato hat nicht die drei genannten Mathematiker ihrer Lösungen wegen getadelt, weil die dabei benutzten Curven, einmal als construirt vorausgesetzt, gar nicht mechanisch sind, er ist von ihnen seiner Lösung wegen getadelt worden. Plutarch, der von Mathematik gar Nichts verstand, hat nur im Allgemeinen gewusst, ein Streit über mechanische oder nichtmechanische Würfelverdoppelung habe zwischen Plato einestheils, Eudoxus, Archytas, Menächmus anderntheils stattgefunden, und aus der ihm sonst bekannten idealen Richtung Plato's hat er sich die Parteistellung der Gegner selbst zurechtgelegt, leider umgekehrt, wie sie wirklich war.

S. 158 ist Diophant als Vater der Arithmetik und Algebra in dem Sinne, wie wir diese Wissenschaften betreiben, gerühmt, ein Ruhm, der ihm bleiben müsse, so lange uns jede Spur fehlt, dass er Vorgänger gehabt, die zwischen ihm und einem Nikomachus oder Theon stehen. Wir sind weit entfernt davon, die geistige Grösse des Diophant verkürzen zu wollen, aber wir meinen, sie verliert gar nicht dabei, wenn wir auch eine grössere Allmäligkeit der Entstehung der Lehre von den Gleichungen zugeben. Diophant hatte — so däucht uns — in Griechenland selbst zu den verschiedensten Zeiten Vorgänger, deren Namen uns freilich nicht alle bekannt sind, zu denen vielleicht Heron von Alexandrien gehört. Auch Thymaridas z. B. war ein solcher. Ob der Erfinder des Epanthems Thymaridas von Tarent war, dafür einen zwingenden Beweis vorzulegen, dürfte freilich gegenwärtig schwierig sein, aber jedenfalls ist er vor Theon zu setzen, da Thymaridas, wie wir durch Jamblichus wissen, das Kunstwort „lineare Zahlen" für „Primzahlen" eingeführt hat, welches sich bei Theon von Smyrna, sowie bei Nikomachus von Gerasa findet. Auch Theon von Smyrna selbst ist als Vorgänger Diophant's in der unbestimmten Analytik zu bezeichnen, da er sich mit zwei quadratischen unbestimmten Gleichungen beschäftigt hat, die in modernen Zeichen $2x^2 \pm 1 = y^2$ heissen. Endlich müssen auch zu irgend einer Zeit vor Diophant Schriftsteller die Lösung der bestimmten Gleichungen gelehrt haben, da die Tradition dieser Auflösungsmethoden zu Diophant's Zeiten weit verbreitet war, und nur Dionysius persönlich mit denselben unbekannt war, wie aus der an diesen seinen Freund gerichteten Vorrede des Diophant zu entnehmen ist. Die Genialität dieses Schriftstellers wird dadurch, wir wiederholen es, nicht im Mindesten verkümmert, aber die Vermuthung verliert allerdings ihre Stütze, er gehöre seiner Abstammung nach zu den Barbaren, welche später Europa bevölkerten (S. 157). Für uns ist und bleibt Diophant Grieche im vollsten Sinne des Wortes, und wenn die arabischen Definitionen der Algebra mit denen des Diophant genau übereinstimmen, wie zweifellos ist, so kann als Grund ein beiderseitig, und zwar bei den Griechen in der Zeit jenseits Diophant wirkender fremdländischer Einfluss, aber auch eine unmittelbare Einwirkung Diophant's auf die Araber angenommen werden. Nicht erst am Ende des X. S. wurden seine Schriften übersetzt (S. 236 und 263), sondern muthmasslich waren sie schon im IX. S. den Arabern durch Kosta ben Luca bekannt geworden, wie Steinschneider (Zeitschr. Math. Phys. X, 499) gezeigt hat.

S. 268 wird aus Tabit ben Korra angeführt, dass die Pythagoriker den Begriff der befreundeten Zahlen bereits auf ihre Weise verwendet hätten. Wir wissen Nichts davon, fügt Hankel hinzu, dass schon die Alten solche Zahlenpaare betrachtet haben. Gleichwohl ist Tabit's Angabe ganz richtig. Jamblichus schreibt sogar in seinem Commentar zu Nikomachus (*ed. Tennulius* S. 47) dem Pythagoras selbst die Erfindung der *ἀριθμοὶ φίλοι* zu, welche der Weise als beantwortendes Beispiel auf die Frage, was ein Freund sei, benutzte: Einer, der ein anderes Ich ist, wie 284 und 220.

Ein Streitpunkt, der wohl noch geraume Zeit die Historiker in Parteien spalten wird, ist die Geometrie des Boethius mit ihrem Abacus und den Apices und den daraus zu ziehenden Folgerungen. Hankel's Standpunkt, der S. 328, 332, 334 am Entschiedensten sich kennzeichnet, dürfte folgender sein: Die uns überlieferte Geometrie des Boethius ist möglicherweise echt; die beiden arithmetischen Anhänge sind Interpolationen eines Abacisten aus nachgerbertischer Zeit, der die Erfindung des Abacus und der Ziffern, welche ihm ein wunderbares Geheimniss zu enthalten schienen, mit antiquarischer Gelehrsamkeit dem mythischen Vater aller Mathematik zuschrieb und nach der naiven Sitte seiner Zeit keinen Anstand nahm, seine Hypothese bei einer Redaction der vermeintlichen Geometrie des Boethius an der zwar sehr unpassenden, aber ihm passend scheinenden Stelle anzubringen. Woher die Ziffern stammen, darüber ist Hankel nicht im Zweifel. Sie sind Gobarziffern, d. h. magrebinische Zeichen der Westaraber und von Gerbert aus der Mark mitgebracht. Dagegen weder den Abacus, noch auch die Divisionsregeln, die er lehrte, konnte Gerbert von den Arabern entlehnen, und da er selbst weder jenes Instrument, noch diese Regeln selbstständig erfand, so bleibt die Frage nach der Quelle seines Wissens noch eine offene. Nicht im Stande, dieser Auffassung beizutreten, müssen wir hier uns begnügen, auf die ausführliche Begründung unserer Ansicht zu verweisen, die wir an einem andern Orte niedergelegt haben, dieselbe durch einen, wie es scheint, noch nicht veröffentlichten Beweis für die Echtheit der Geometrie des Boethius ergänzend. Das Wort κορυφή kommt bei den Griechen in mehrfacher Bedeutung vor, von welchen wir nur zwei betonen wollen. Hero gebraucht es als Scheitellinie, d. h. als obere Linie einer ebenen Figur, z. B. eines Vierecks. Die Uebersetzung oder Verketzerung in lateinischen Schriften, unter Anderen in Gerbert's Geometrie, heisst *coraustus*. Nikomachus braucht dann ferner κορυφή als Scheitelpunkt einer Pyramide. Dieses letztere κορυφή ist in der Arithmetik des Boethius regelmässig durch *vertex* übersetzt. Wenn nun in einer etwaigen Geometrie des Boethius das andere κορυφή zu übersetzen war, so kann wohl kein Zweifel daran sein, dass er wieder nur das Wort *vertex* benutzte, mochte es auch sonst von in lateinischer Sprache schreibenden Geometern hier nicht benutzt werden. In der That finden wir in der Geometrie des Boethius (*ed.* Friedlein S. 418) diese Anwendung unseres Wortes und damit eine neue Bestätigung der Echtheit der Geometrie. Ist aber die Geometrie echt, dann kann — diese Wiederholung müssen wir uns hier gestatten — von Naivität des Interpolators der arithmetischen Anhänge in keiner Weise die Rede sein. Dann haben wir es mit gleichfalls echten Stücken des Boethius oder mit der Arbeit eines bewussten Fälschers zu thun. Und um noch ein Wort über Abacus und complementäre Division zu sagen, wohin können sie denn verweisen, wenn Gerbert und die Araber als Erfinder ausser Frage sind? Wohin anders, als dahin, wohin wir ihre Uebermittelung wenigstens verlegen: nach Italien. Vielleicht dürfte auch als neuer, vereinzelt betrachtet vielleicht geringfügiger Unterstützungsgrund geltend gemacht werden können, dass eine subtractive Zahlenbezeichnung, deren allein die Römer theilhaftig waren, und der Begriff des Complements sich in einer noch nicht beachteten Weise decken. Wir können von dieser Auseinandersetzung nicht Abschied nehmen, ohne übrigens zu bemerken, dass es Hankel gelungen ist, einen wichtigen Gewährsmann unserer Anschauung zu vernichten. Der Jahresbericht über die Erziehungsanstalt in Einsiedeln von 1856 bis 1857 (von welchem Göser einen Auszug unter dem Titel: „Ein Studiengang im IX. Jahrhundert“ in dem Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen, herausgegeben von Frisch, Kratz und Holzer, October 1864, S. 225—240 hat abdrucken lassen) enthält die

Erzählung eines Walafrid Strabo* über seine Erziehung, worin folgende Stelle vorkommt: „Im Sommer 822 begann ich unter Tatto's Leitung das Studium der Arithmetik. Zuerst erklärte er uns die Bücher des Consuls Manlius Boethius über die verschiedenen Arten und Eintheilungen, sowie über die Bedeutung der Zahlen; dann lernten wir das Rechnen mit den Fingern und den Gebrauch des Abacus nach den Büchern, welche Beda und Boethius darüber geschrieben haben." Hankel, ein viel zu guter Historiker, um die Unwiderlegbarkeit dieser positiven Angabe in unserem Sinne nicht zu fühlen, trat darüber mit Pater Gall Morel in Einsiedeln in Briefwechsel und erfuhr (S. 311, Note), jenes Programm beruhe nicht auf neuen Quellen. Es liegt also, schliesst Hankel, in der Schrift eine Verwechselung des IX. mit dem XI. Jahrhundert vor. Da der Briefwechsel nicht ausführlicher veröffentlicht ist, beide Correspondenten aber inzwischen verstorben sind, so bleibt uns Nichts übrig, als die gezogene Folgerung ohne Weiteres anzunehmen, was wir persönlich ohne jegliches Bedenken thun.

S. 381 in dem Fragmente über Euclid ist das *γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου* übersetzt, er sei unter dem ersten Ptolemäer geboren. Unbedingt kann das Perfectum *γέγονε* grammatisch diese Bedeutung haben, wiewohl vielleicht der Aorist *ἐγένετο* doch eher benutzt worden wäre; aber ebenso unbedingt kann jenes Perfectum auch heissen: er war geboren, d. h. er lebte, oder *fuit*, wie seit Barocius allgemein übersetzt wird. Als Unterstützung für die gang und gäbe Auffassung dient die Anecdote von dem nicht vorhandenen Königswege (S. 382). Es ist doch wohl sehr unwahrscheinlich, dass König Ptolemäus sich eine so schnippige Antwort geholt und gefallen lassen hätte von einem erst in seiner Regierungszeit geborenen, also viel jüngeren Manne.

Diese kritischen Ausstellungen, welche, wiewohl sie zahlreich erscheinen mögen, leicht noch vermehrt werden könnten, entfliessen, wie man uns glauben darf, keineswegs einem Wunsche, die Verdienste des Verfassers herabzumindern. Wir wollen in ihnen einestheils den Nachweis liefern, mit welcher Aufmerksamkeit wir das neue Buch uns geistig zu eigen gemacht haben, anderntheils aber auch den Anschein stillschweigender Zustimmung vermeiden, wenn wir nur das nach unserem Dafürhalten Lobenswerthe hervorgehoben hätten. Giebt es doch dessen so viel! Abgesehen von den früher erwähnten schwierigen Wiederherstellungen begegnen wir schon S. 11 einer überaus geistvollen Bemerkung, die nicht treffender, als in Hankel's eigenen Worten wiedergegeben werden kann: „Von $2X$ ging man wieder durch Aggregation von 1, 2 zu $2X+1$, $2X+2$ fort und konnte

* Ueber die Persönlichkeiten des Walafrid Strabo und seines Lehrers Tatto in dem Kloster von Reichenau vergl. P. Trudpert. Neugart: *Episcopatus Constantiensis, Pars I Tom.* 1. *St. Blasien* 1803, *pag.* 154—158.

so nach einem festen Princip alle Zahlen bis $X.X$ unzweideutig bezeichnen. Die um X grössere Zahl $X.X+X$ aber konnte man entweder nach diesem Schema (im decimalen System zehnzig und zehn) oder nach dem Schema $(X+1)X$ (im decimalen System elfzig) darstellen — von der Wahl, die man traf, hing der gesammte systematische Aufbau der Zahlen ab."

S. 62 ist es dem Verfasser gelungen, dem Verfahren der griechischen Feldmesser zur Zerlegung eines gewöhnlichen Bruches in eine Summe von Stammbrüchen auf die Spur zu kommen. Er hätte dieses Verfahren ausdrücklich bei Leonardo von Pisa (Abacus S. 82) auseinandergesetzt finden können, eine spät erhaltene Spur, auf welche wir einiges Gewicht legen und woraus wir uns vorbehalten bei anderer Gelegenheit unsere Schlüsse zu ziehen.

S. 115—127. Die Quadratur des Kreises und die Exhaustionsmethode. Dieses Capitel verwerthet die aristotelischen Ansichten über Bewegung, über Stetigkeit, über das Unendliche in einer Weise, wie es von mathematischen Geschichtsschreibern noch nie geschehen ist, künftig aber nicht wird unterlassen werden dürfen.

S. 137—150. Die analytische Methode steht dem vorgenannten Capitel ebenbürtig zur Seite, ein Muster von Vertiefung in den philosophisch-mathematischen Geist der Griechen.

S. 162 erkennen wir einen der folgewichtigsten allgemeinen Aussprüche in dem Satze, „dass den Griechen die Idee von der Vieldeutigkeit einer geometrischen Aufgabe gänzlich fehlte, und sie, so zu sagen, des geistigen Organes beraubt waren, eine solche, selbst wenn sie offen vor ihnen lag, zu begreifen — ein interessanter Beweis für den Satz, dass wir nur Dasjenige wahrnehmen, wozu wir die Idee schon in uns finden".

S. 165 ist der geistige Charakter Diophant's vortrefflich in den Worten geschildert: „Er ist ein glänzender Virtuos in der von ihm erfundenen Kunst der unbestimmten Analytik; die Wissenschaft hat jedoch, wenigstens unmittelbar, diesem glänzenden Talente wenig Methoden zu verdanken, weil es ihm an dem speculativen Sinne fehlte, der in dem Wahren mehr als das Richtige sieht."

Den ganzen Abschnitt „Mathematik der Inder" (S. 172—222) haben wir schon am Eingange unserer Besprechung als einen mit Vorliebe bearbeiteten und überaus wohlgelungenen bezeichnet.

Sehr fleissig unter Verwerthung des gesammten, zum grossen Theil durch die Liberalität des Prinzen Boncompagni zugänglichen Materials gearbeitet, wenn auch im Vergleich zu den übrigen Abschnitten an neuen Ergebnissen unverhältnissmässig arm ist die Geschichte der Mathematik bei den Arabern (S. 223—293). Dieser Abschnitt ist der einzige des Buches, welchen der Verfasser schon bei Lebzeiten in dem *Bulletino Boncompagni* für 1872 veröffentlicht und dadurch als in seiner Auffassung druckreif erklärt hat. So sehr wir dieses Urtheil in formeller Beziehung mit unterschreiben, so wenig können wir unsere Meinung zurückhalten, dass der Verfasser eine glücklichere Auswahl für seine erste historische Veröffentlichung hätte treffen können, indem er mit diesem Capitel zwar eine Probe seines gewissenhaften Fleisses, aber keineswegs seiner sonstigen glänzenden Eigenschaften lieferte.

Uns hätte z. B. als solche Einführung in die Reihe der Geschichtsschreiber unserer Wissenschaft weit besser der kurze, aber vortrefflich übersichtliche und in dieser Gestalt ganz neue Abschnitt „Die Mathematik auf den Universitäten" (S. 354—359) gefallen, welcher uns rasch eines der liebsten Capitel des Buches geworden ist.

Auch aus dem Fragmente über Euklid endlich könnten wir manches Blatt anführen, aus welchem wir belehrende Anregung geschöpft haben, wie z. B. die Untersuchungen über die Veränderungen, welche Theon von Alexandrien an dem Texte der Elemente verschuldet hat.

So haben wir meistens beistimmend, an einzelnen Stellen unsere abweichende Meinung begründend, so ziemlich das ganze Werk an unseren Lesern im Fluge vorübergeführt, wenn wir es auch absichtlich vermieden haben, eine dürre Wiederholung der Ueberschriften sämmtlicher einzelner Abschnitte zum Abdrucke zu bringen. Unsere Leser, so hoffen wir, werden aus unserem Referate die Ueberzeugung gewonnen haben, dass es sich um keines von den Dutzendbüchern handelt, welche die Presse verlassen, um sofort zu Makulatur zu werden. Hankel's Geschichte der Mathematik hätte, wenn sie ihre Vollendung erreicht hätte, eine Epoche in dieser Wissenschaft gebildet. Auch in dem unvollendeten Werke erkennen wir den weiten, umfassenden historischen Blick neben dem in das Einzelne, Feinste sich vertiefenden mathematischen Geiste. Wir finden, wenn der Ausdruck gestattet ist, teleskopische und mikroskopische Eigenschaften vereinigt, das höchste Lob, welches wir einem Geschichtsforscher der Mathematik zuzuwenden im Stande sind.

Cantor.

Nicolaus Copernicus auf der Universität zu Krakau, von Prof. Dr. L. Prowe. Michaeli-Programm des Gymnasiums und der Realschule I. Ordnung zu Thorn. 1874.

Die 17 Quartseiten starke Abhandlung schliesst mit der Bemerkung ab, sie bilde einen Theil der demnächst (in der Weidmann'schen Buchhandlung) erscheinenden Biographie von Copernicus. Der Verfasser sei zur Veröffentlichung dieses Bruchstückes veranlasst worden, weil die für das Programm von anderer Seite vorbereitete Abhandlung nicht habe eingeliefert werden können. Wir sind der Ansicht, dass es keiner Entschuldigung bedurfte, um dem Leser dieses Programmes den Vorgeschmack eines Werkes zu bereiten, nach welchem er nur noch lüsterner sein wird, nachdem er die Probe gekostet, und wir sind überzeugt, dass wir im Namen Aller reden, denen dieses Capitel aus der Biographie des Copernicus zu Handen gekommen ist, wenn wir Wunsch und Hoffnung aussprechen, das zugesagte „demnächst" — ein Wort, gegen welches wir im Allgemeinen sehr misstrauisch sind — möge sich bewahrheiten. Herr Prowe hat über den Studienaufenthalt des Erfinders des modernen Weltsystems in Krakau vom Herbste 1491 wahrscheinlich bis 1495, also über eine Periode, von welcher die Biographen des Copernicus sonst nur Weniges zu sagen wussten, eine Fülle interessanten Materials zusammengetragen. Er hat die Hochschule Krakau, er hat die Richtungen, die sich an derselben gegenüberstannen, die Lehrer, die an ihr wirkten, insbesondere den Mann, der als der Lehrer unseres Copernicus bezeichnet werden muss, Albertus Blar de Brudzewo, in ein ebenso farbenreiches, als ansprechendes Bild gebracht, an dessen Treue Niemand zweifeln wird, welcher die vielfachen Noten unter dem Texte durchliest. Wir hatten schon früher die Voraussicht gehegt, die lange erwartete Biographie des Copernicus aus der Feder von Herrn Prowe werde ein in jeder Beziehung hervorragendes Werk werden; was wir jetzt davon kennen, hat uns nur in dieser Gewissheit zu bestärken vermocht.

Cantor.

Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper, von Dr. E. Abbe. Jena, Mauke's Verlag. 1874.

Die in der vorliegenden kleinen Monographie deutlich beschriebenen Apparate sind wesentlich zu dem Zwecke erfunden, um rasch und ohne dass grössere Gewandtheit erfordert wird, die Bestimmung des Brechungsexponenten von festen und flüssigen Körpern ausführen zu können. Für erstere Körper dient als Princip die Bestimmung der Richtung, die ein Lichtstrahl haben muss, damit er an der Hinterfläche des Prismas aus der zu untersuchenden Substanz so in der Richtung der Normalen reflectirt wird, dass er in der Einfallsrichtung nach der Lichtquelle zurückkehrt (Littrow's Vorschlag). Für flüssige Körper ist das Princip der Totalreflexion angewandt, und zwar in der Art, dass das Eintreten der Totalreflexion nach dem eben Verschwinden des durchgehenden Lichtes beurtheilt wird. Beide Principien haben den Verfasser auf sehr einfache Constructionen geführt, die trotzdem den Brechungsindex noch in der dritten Decimale sicher bestimmen lassen.

Wir erkennen nicht nur die praktisch höchst einfache und zweckmässige Construction der Apparate an, sondern rühmen namentlich auch die Erfindungsgabe des Verfassers für einzelne Theile des Apparates; vorzüglich hat uns die hübsche Combination zweier Amici'schen Prismen gefallen, die der Verfasser gelegentlich der Ermittelung der Dispersion von Flüssigkeiten vorschlägt. Ein genaueres Urtheil über die Apparate selbst kann freilich nur Derjenige abgeben, der mit des Verfassers Apparaten selbst gearbeitet hat, was dem Referenten aber bis jetzt noch nicht möglich gewesen ist.

Freiberg, 6. November 1874. TH. KÖTTERITZSCH.

Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende. Von Dr. SIEGM. GÜNTHER, Privatdocent am Polytechnikum in München. Erlangen, Verlag von Besold. 1875.

In der Vorrede bemerkt der Verfasser unzweifelhaft richtig, dass Baltzer's ausführliches Handbuch der Determinantentheorie durch seine ungemein knappe Darstellung bei dem ersten Studium besondere Schwierigkeiten darbietet und dass andererseits die Werke von Reidt, Dölp und Hattendorf fast ausschliesslich die Bedürfnisse der Anfänger im Auge haben. Der Verfasser hat deshalb einen Mittelweg einzuschlagen versucht, auf welchem die Darstellung anfangs elementar und zugleich unabhängig von der Combinationslehre gehalten ist, später aber um so mehr an Kürze gewinnt, je höhere Theile der Algebra resp. Analysis zur Verwendung kommen. Nach genauer Ansicht des nicht sehr umfänglichen Werkes gesteht Referent sehr gern, dass ihm der Versuch des Verfassers recht gelungen erscheint. Die Darstellung ist durchweg klar und behält diesen Vorzug auch bei zunehmender Gedrungenheit. Hierdurch ist es dem Verfasser möglich geworden, sowohl in der Theorie als in deren Anwendungen so weit zu gehen, dass er eine Reihe wichtiger Probleme zum Abschluss bringt. Besonderes Interesse gewähren die genauen historischen Untersuchungen, welche der Verfasser theils im 1. Capitel als „historische Skizze des Determinantencalcüls" vorausschickt, theils hier und da einstreut. Referent zweifelt nicht, dass dieses ebenso wissenschaftlich strenge, als elegant geschriebene Lehrbuch sich bald allgemeiner Beliebtheit erfreuen wird.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. bis 31. December 1874.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch physikalischen Classe der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 10. Bd. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 69. Bd. 1. Abth., Heft 1—4; 2. Abth., Heft 1—4; 3. Abth., Heft 1—5. Wien, Gerold. 48 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von OHRTMANN, MÜLLER und WANGERIN. 4. Bd. 1872. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 3 Mk. 60 Pf.

Archiv der Mathematik und Physik, begründet von A. GRUNERT, fortgesetzt von R. HOPPE. 57. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch's Verlag. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Ed. A. Metzger. 24. Jahrgang. 1. Heft: Januar—Juni 1874. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 90 Pf.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge, 21. u. 22. Bd. Wien, Wallishauser. à 11 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome V, livr. 1. Leipzig, Voss. 1 Mk.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome IX, livr. 1 *et* 2. Ebendas. 2 Mk.

Reine Mathematik.

WINCKLER, A., Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

GÜNTHER, S., Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen, Besold. 5 Mk.

HELMES, J., Die Elementarmathematik. 1. Thl., 2. Abth. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 2 Mk. 80 Pf.

Stegmann, A., Die Grundlehren der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Kempten, Kösel. 2 Mk.

Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung. 6 Nummern. Darmstadt, Brill. 9 Mk.

Waha, de, Quelques propriétés des courbes représentées par l'équation $y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Hx + K$. Luxemburg, Bück. 1 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Kenngott, A., Krystallnetze (120 Stück). 24. Aufl. Wien, Lechner. 2 Mk.

Ritter, A., Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik. 1. Hälfte. Hannover, Rümpler. 6 Mk.

Hansen, P. A., Dioptrische Untersuchungen. (Sächs. Gesellsch.) 2. Abth. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Rüdgisch, R. v., Instrumente und Operationen der niederen Vermessungskunst. 1. Abth. Cassel, Kay. 4 Mk. 50 Pf.

Friesach, K., Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Spörer, A., Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam. Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Physik und Meteorologie.

Fliedner, C., Lehrbuch der Physik. 1. Theil. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Burbach, O., Physikalische Aufgaben zur elementar-mathematischen Behandlung. 3. Aufl. Gotha, Thienemann. 1 Mk. 20 Pf.

Menzel, R., Wandtafeln für den physikalischen Unterricht. 2. Lief. Breslau, Morgenstern. 3 Mk.

Harder, E., Ergänzungen und Erläuterungen zu dem Werke „Das Molekulargesetz etc.". Hamburg, Meissner. 1 Mk.

Scheffler, H., Die Theorie der Wärme. Braunschweig, Vieweg. 2 Mk.

Odslrcil, J., Zur Erklärung der periodischen Aenderungen der Elemente des Erdmagnetismus. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1874.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Akustik

1. Anwendung der Schwingungen zusammengesetzter Stäbe zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LVII, 697.
2. *A contribution to the theory of resonators* *Rayleigh*. *Phil. Mag. XLVII*, 419.
3. Ueber den Einfluss des den Schall fortpflanzenden Mittels auf die Schwingungen eines tönenden Körpers. Friesach. Wien. Akad.-Ber. LVI, 316.
4. *A theory of the effects produced by fog and vapour in the atmosphere on the intensity of sound.* *Challis*. *Phil. Mag. XLVII*, 277.

Analytische Geometrie der Ebene.

5. *Sur quelques formules de géométrie infinitésimale.* *Ruchonnet*. *N. ann. math. XXXII*, 223.
6. *Solution analytique du tracé des courbes à plusieurs centres décrites d'après le procédé géométrique de Perronet.* *Revellat*. *Compt. rend. LXXVII*, 434.
7. *Courbes jouissant de la propriété que les sommets des angles droits circonscrits appartiennent à une circonférence.* *Doucet* *N. ann. math. XXXII*, 328. — *Bourguet ibid.* 571.
8. Ueber die Curven des Anklingens und des Abklingens der Lichtempfindungen. C. Exner. Wien. Akad.-Ber. LXII, 197.
9. *Propriété de l'ovale de Cassini.* *Lez*. *N. ann. math. XXXII*, 446.
10. *Propriété de la spirale équiangle.* *Pellissier*. *N. ann. math. XXXII*, 481.
11. *Enveloppe de la perpendiculaire d'un point donné à une droite mobile.* *Pellissier*. *N. ann. math. XXXII*, 450.

Vergl. Asymptoten 24. Ellipse. Kegelschnitte. Kreis. Parabel Trajectorie.

Analytische Geometrie des Raumes.

12. *Détermination des éléments infinitésimaux relatifs aux lignes à double courbure.* *De Saint-Germain*. *N. ann. math. XXXII*, 126, 179, 207.
13. *Propriété caractéristique de la droite rectifiante.* *Ruchonnet*. *N. ann. math. XXXII*, 315.
14. *Étant donné un système de lignes droites situées dans l'espace d'une manière quelconque on peut mener une infinité de plans dont chacun coupe toutes ces droites.* *Brocard*. *N. ann. math. XXXII*, 439.
15. *Sur la distance d'un point à une droite.* *Waille*. *N. ann. math. XXXII*, 269.

Vergl. Cubatur. Ellipsoid. Hyperboloid. Kugel. Normalen. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Paraboloid.

Astronomie.

16. Ueber die Bestimmung einer Cometenbahn. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. LVII, 219; LX, 918; LXIV, 676.
17. *Extension of the planet-problem to a space of* n *dimensions and constant integral curvature.* *Lipschitz*. *Quart. Journ. math. XII*, 349.
18. *Sur la formation des équations de condition qui résulteront des observations du passage de Venus du* 8 *Décembre* 1874. *Puiseux*. *Compt. rend. LXXVII*, 1505.
19. Ueber den Venusdurchgang des Jahres 1874. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. LXI, 515.

20. Bemerkungen zu Åstrånd's neuer Methode für Zeit- und Längenbestimmung. K. v. Littrow. Wien. Akad.-Ber. LVI, 345.
21. Neue einfache Methode für Zeit- und Längenbestimmung. Åstrand Wien. Akad.-Ber. LVI, 350.
22. Die Constanten der Präcession nach Le-Verrier. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. LVI, 579.
23 *Note concernant le changement de vitesse de régime dans les régulateurs isochrones. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXVII*, 151.
Vergl. Attraction. Hydrodynamik 147.

Asymptoten.

24. *Sur une propriété des asymptotes. Abel Transon. N. ann. math. XXXII*, 289.
25. *Sur la détermination des asymptotes dans les intersections des surfaces du second degré. Caron. N. ann. math. XXXII*, 270.

Attraction.

26. *Démonstration élémentaire de la gravitation universelle. Rodet. N. ann. math. XXXII*, 385.
27. Ueber eine kosmische Anziehung, welche die Sonne durch ihre Strahlen ausübt. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXI, 299.
28. *On the attraction of the ellipsoid for the law of the inverse fourth power of the distance. Townsend. Quart. Journ. math. XII*, 66.
29. *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. Bertrand. Compt. rend. LXXVII*, 849.

B.

Bestimmte Integrale.

30. Ueber einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LX, 857.
31. Beiträge zu einer Abel'schen Gleichung und zu einem Satze von Parseval. Prangbofer. Wien. Akad.-Ber. LVII, 29.
32. Ueber Fourier'sche Integrale und Analogien derselben. Frombeck. Wien. Akad.-Ber. LXV, 133.
33. *On the connection between certain theorems in definite integrals. W. Walton. Quart. Journ. math. XII*, 126.
34. *On the evaluation of a pair of definite integrals. W. Walton Quart. Journ. math. XII*, 181.
35. Ueber einige mit dem Laplace'schen verwandte bestimmte Integrale. Unferdinger Wien. Akad.-Ber. LV, 90.
36. *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. Catalan. Compt. rend. LXXVII*, 198.
37. Auswerthung bestimmter Integrale. Gegenbauer. Wien Akad.-Ber. LXIV, 703.
38. *Note on certain definite integrals. Glaisher. Quart. Journ. math. XII*, 165.
39. *On the evaluation of the definite integral* $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$, *where* $a<1$. *W. Walton. Quart. Journ. math. XII*, 39.
40. *On the evaluation of the integral* $\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{-m}}{(1+x)\log x}\,dx$, *where* $0<m<1$. *W. Walton. Quart. Journ. math. XII*, 184.
41. *Demonstration of* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\log(\tfrac{1}{2})$. *W. Walton. Quart. Journ. math. XII*, 192.
42. *Note on the integrals* $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ *and* $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$. *Cayley. Quart. Journ. math. XII*, 118.
43. Ueber einige vielfache Integrale. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LX, 379.

44. Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ \frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\,.\,dy\,.\,dz.$$

Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LXI, 105.

45. Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\,.\,dy\,.\,dz.$$

Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LXI, 417.

46. Zur Theorie der simultanen Substitutionen in zwei- und dreifachen Integralen. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 773.

Vergl. Cylinderfunctionen. Differentialquotient 68. Elliptische Transcendenten. Kugelfunctionen. Mittelgrössen. Potential. Ultraelliptische Transcendenten.

C.

Calender.

47. *On a new form of calender by which the year or month or month-day or week-day may be readily found when the other three components of a date are given.* *J. Herschel.* *Phil. Mag. XLVII,* 357.

Capillarität.

48. *Sur la capillarité.* *Resal.* *N. ann. math. XXXII,* 78.

49. *Du mouvement ascendant spontané des liquides dans les tubes capillaires.* *Decharme.* *Compt. rend. LXXVII,* 591.

Combinatorik.

50. *Théorèmes sur les combinaisons.* *André.* *N. ann. math. XXXII,* 84.

Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung 331.

Convergenzbedingungen.

51. *Sur l'identité des formules données par Cauchy pour déterminer les conditions de convergence de la série de Lagrange avec celles qui ont été établies par Lagrange lui-même.* *Ménabréa.* *Compt. rend. LXXVII,* 1358. — *Genocchi ibid.* 1541.

52. Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{2s_2}+\frac{1}{3s_3}+\ldots,\ \text{wenn}\ s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LV, 95.

Cubatur.

53. Segmente und Schichtenräume in Flächen zweiter Ordnung. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LX, 631.

54. *Recherche d'une methode facile pour mesurer approximativement la capacité des navires.* *D'Avout.* *Compt. rend. LXXVII,* 872.

55. *Relation entre les volumes correspondants de deux figures homographiques.* *Amigues.* *N. ann. math. XXXII,* 374.

Cylinderfunctionen.

56. Ueber die Bessel'schen Functionen zweiter Art. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXV, 38; LXVI, 220.

D.

Determinanten.

57. *Elementary demonstration of a fundamental theorem.* *Minchin.* *Quart. Journ. math. XII,* 172.

Vergl. Gleichungen 142. Maxima und Minima 193. Mechanik 213.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

58. *On the Plückerian caracteristics of a curve whose equation is a resultant or a discriminant in some general cases.* *S. Roberts.* *Quart. Journ. math. XII,* 281.

59. *Sur les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré.* *De Saint-Germain.* *N. ann. math. XXXII,* 356.

60. *Note on the Cartesian.* *Cayley.* *Quart. Journ. math. XII,* 16.

61. *Equations des focales d'une surface du second ordre.* *Saltel.* *N. ann. math. XXXII,* 436.

62. *Theorem in regard to the Hessian of a quaternary function.* Cayley. *Quart. Journ. math. XII*, 193.
63. *Sur les plans tangents triples à une surface.* Spottiswoode. *Compt. rend. LXXVII*, 1181.
Vergl. Cubatur 55. Krümmung 179. Kugel 184. Oberflächen 244, 245. Optik 261.

Differentialgleichungen.

64. *On a differential equation allied to Riccati's.* Glaisher. *Quart. Journ. math. XII*, 129. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 273.]
65. Ueber die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalen Coefficienten zweiten Grades. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 247.
66. Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 54.
Vergl. Singuläre Lösungen.

Differentialquotient.

67. Ueber die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von Ausdrücken, welche trigonometrische Functionen als Factoren enthalten. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LX, 605.
68. *On the* n^{th} *differentiation of an integral* $\int_b^c \Phi(x,a)\,dx$ *with regard to* a, *supposing* a *to lie between* b *and* c. W. Walton. *Quart. Journ. math. XII*, 215.

Differenzenrechnung.

69. *Expression de la différence d'ordre* $n^{ième}$ *d'une fonction au moyen de la dérivée du même ordre de cette fonction.* Picart. *N. ann. math. XXXII*, 418.

E.

Elasticität.

70. Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme. Borchardt. Berl. Akad.-Ber. 1873, 9.
71. Ueber Deformationen elastischer isotroper Körper durch mechanische an ihrer Oberfläche wirkende Kräfte. Borchardt. Berl. Akad.-Ber. 1873, 560.
72. *Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.* Mercadier. *Compt. rend. LXXVII*, 639, 671, 1292, 1366.

Elektrodynamik.

73. Ueber die Grundformeln der Elektrodynamik. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LIX 693.
74. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1872, 247.
75. Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1873, 91.
76. *Action mutuelle des courants voltaiques.* Bertrand. *Compt. rend. LXXVII*, 962, 1049.
77. Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 193.
78. Ueber die diamagnetische Induction. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 789.
79. Ein Beitrag zur Theorie transversal-magnetischer Flächen. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LVI, 669.
80. *A theory of the source of terrestrial magnetism.* Challis. *Phil. Mag. XLVII*, 14.
81. Ueber die Ströme in Nebenschliessungen zusammengesetzter Ketten. Waszmuth. Wien. Akad.-Ber. LVII, 47.
82. Ableitung des Potentials bewegter elektrischer Massen aus dem Potential für den Ruhezustand. Loschmidt. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 7.
83. Die Elektricitätsbewegung im galvanischen Strome. Loschmidt. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 596.
84. Ueber die elektrodynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LX, 69.
85. Ueber die Abhängigkeit des erregten Magnetismus von den Dimensionen der Magnetisirungsspirale. Waszmuth. Wien. Akad.-Ber. LVII, 413.
86. *Sur les résistances maxima des bobines magnétiques.* Du Moncel. *Compt. rend. LXXVII*, 347. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 257.]

87. *Sur les meilleures dimensions à donner aux électro-aimants.* Du Moncel. *Compt. rend. LXXVII*, 1017.
88. Ueber die Arbeit, die beim Magnetisiren eines Eisenstabes durch den elektrischen Strom geleistet wird. Waszmuth. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 6.
89. Nachträgliche Bemerkungen über aperiodische Bewegun ggedämpfter Magnete. Du Bois-Reymond. Berl. Akad.-Ber. 1873, 748.
90. Ueber die Bestimmung der Constanten eines galvanischen Elementes. Militzer. Wien. Akad.-Ber. LIX, 472.
91. *Sur la décharche des conducteurs électrisés.* Moutier. *Compt. rend. LXXVII*, 1238. — *Phil. Mag. XLVII*, 157.
92. *On Wheatstone's bridge.* Brough. *Phil. Mag. XLVII*, 22. — Heaviside *ibid.* 93.

Ellipse.

93. Ellipsenconstructionen. Staudigl. Wien. Akad.-Ber. LIX, 189.
94. *Trouver le lieu des sommets des triangles de périmètre constant formés par deux tangentes à une ellipse donnée et la corde des contacts.* L. P. *N. ann. math. XXXII*, 401.
95. *Aire du triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde commune de l'ellipse et d'un cercle osculateur.* Pellissier. *N. ann. math. XXXII*, 38.
96. *Propriété d'un triangle circonscrit à une ellipse.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 577.
97. *Lieu d'un foyer de l'ellipse inscrite à un triangle et dont l'autre foyer parcourt une ellipse donnée.* Lez. *N. ann. math. XXXII*, 455.
98. *Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur; trouver le lieu des milieux de ces cordes.* Desmons. *N. ann. math. XXXII*, 29.
99. *Par deux points fixes* A *et* B *pris sur une ellipse donnée on fait passer des cercles variables; on demande le lieu des points* M *où concourent les tangentes menées à l'ellipse et à chacun des cercles.* Doucet. *N. ann. math. XXXII*, 23.
100. *Trouver le lieu des pôles des cordes communes et la podaire du centre relative à l'enveloppe des cordes communes à une ellipse et à son cercle osculateur.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 36.
101. *Théorèmes sur l'ellipse.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 278.
102. *Intersection de deux ellipses assujetties à différentes conditions.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 572.

Vergl. Maxima und Minima 198, 199, 200, 201. Quadratur 291, 292.

Ellipsoid.

103. Ueber das Ellipsoid von kleinstem Volumen bei gegebenem Flächeninhalt einer Anzahl von Centralschnitten. Borchardt. Berl. Akad.-Ber. 1872, 505.
104. *On the duals of geodesics and lines of curvature on an ellipsoid and on its pedal surfaces.* Jeffery. *Quart. Journ. math. XII*, 322.

Vergl. Attraction 28.

Elliptische Transcendenten.

105. *On a special quartic transformation of an elliptic function.* Cayley. *Quart. Journ. math. XII*, 266.
106. *Verification of an elliptic transcendent identity.* Glaisher. *Phil. Mag. XLVII*, 437.

F.

Functionen.

107. *Sur la fonction exponentielle.* Hermite. *Compt. rend. LXXVII*, 18, 74, 226, 285.
108. Ein Beitrag zur Theorie der Functionen complexer Variabeln. Frombeck. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 495.
109. *Note on the* (2, 2) *correspondence of two variables.* Cayley. *Quart. Journ. math. XII*, 197. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 348.]
110. Darstellungen des Products
$$(a^2+b^2+c^2+d^2).(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\ldots(a^2_{n-1}+b^2_{n-1}+c^2_{n-1}+d^2_{n-1})$$
als Summe von vier Quadraten. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LIX, 455.

Vergl. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differenzenrechnung. Elliptische Transcendenten. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Maxima und Minima. Mittelgrössen. Potential. Productenfolge. Quadratische Formen. Quadratwurzel. Reihen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Geodäsie.

111. Geometrischer Beweis des Lehmann'schen Satzes über die Lage des Standortes in Bezug auf das Fehlerdreieck. Schell. Wien. Akad.-Ber. LVII, 67.
112. *Note descriptive du cryptographe.* *Pélegrin.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 469.

Geometrie (descriptive).

113. Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage. Fiedler. Wien. Akad.-Ber. LV, 659.
114. Die projectivischen Flächen. Schlesinger. Wien. Akad. Ber. LVIII, 435.
115. Darstellung der Collinearprojectionen und projectivischen Grundgesetze in einer für die descriptive Geometrie geeigneten Form. Schlesinger. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 658.
116. Darstellung der räumlichen Collinearprojectionen in orthogonalen Abbildungen. Schlesinger. Wien. Akad.-Ber. LIX, 636.
117. Ueber die Identität von Constructionen in perspectivischer, schiefer und orthogonaler Projection. Staudigl. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 490.
118. *Sur une question de géométrie de compas.* *Peaucellier.* *N. ann. math.* *XXXII*, 71.
119. Ueber Beleuchtungsconstructionen für Flächen, deren zu einer Axe senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LVII, 678.
120. Ueber das Problem der Glanzpunkte. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 730.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 6. Ellipse 93. Hyperboloid 149. Kegelschnitte 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162. Oberflächen 248. Oberflächen zweiter Ordnung 255, 256. Optik 262. Parabel 274. Perspective.

Geometrie (höhere).

121. *Exposition de la méthode des équipollences.* *Bellavitis.* *N. ann. math.* *XXXII*, 97, 145, 193, 241, 297, 501, 529.
122. *Rapport sur un mémoire de M. Mannheim: Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions.* *Chasles.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 752.
123. *Sur le nombre des points d'intersection que représente un point multiple commun à deux courbes planes, lorsque diverses branches de la première sont tangentes à des branches de la seconde.* *De la Gournerie.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 573.
124. *Application de la généralisation du principe de correspondance à la théorie de l'élimination.* *Saltel.* *N. ann. math.* *XXXII*, 565.
125. Studien aus der höheren Geometrie. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LVII, 449.
126. Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 633.
127. Ueber Curvenbüschel. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber LXI, 82.
128. Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXI, 600.
129. Geometrische Mittheilungen. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXI, 731, 819.
130. Ueber Evoluten räumlicher Curven. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXII, 804.
131. Ueber rationale Raumcurven vierter Ordnung. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 493.
132. *Sur les différentes formes de courbes du quatrième ordre.* *Zeuthen.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 270.
133. *Lieu du sommet d'un angle droit dont chacun des côtés rencontre deux droites données; enveloppe du plan de cet angle droit.* *Genty.* *N. ann. math.* *XXXII*, 332.
134. *Sur quelques propriétés géométriques du déplacement d'une figure plane dans son plan.* *Liguine.* *N. ann. math.* *XXXII*, 481.
135. *Sur les courbes gauches algébriques.* *Picquet.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 474.
136. *On the superlines of a quadric surface in five-dimensional space.* *Cayley.* *Quart. Journ. math.* *XII*, 176.

Geschichte der Mathematik.

137. *Notes sur différents polyèdres antiques en bronze.* *Hugo.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 433, 472, 562. — *Baudot ibid.* 1288.
138. *Christofori Hanstenii vita.* *Holst.* *N. ann. math.* *XXXII*, 433.
139. *Nécrologue de Cl. Burdin,* † 12 *Novembre* 1873. *Bertrand.* *Compt. rend.* *LXXVII*, 1148.

Vergl. Convergenzbedingungen 51.

Gleichungen.

140. Lösung algebraischer Gleichungen von beliebig hohem Grade, auch mit complexen Coefficienten, mit Hilfe des Gauss'schen Schemas für complexe Grössen. Raabe. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 733.
141. Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1873, 117.
142. *On Wronski's Theorem.* *Cayley.* *Quart. Journ. math. XII,* 221.
143. *On a theorem in elimination.* *Sylvester.* *Quart. Journ. math. XII,* 5.
144. *Propriété d'une équation du quatrième degré qui a une racine double.* *Moreau.* *N. ann. math. XXXII,* 437.

H.

Hydrodynamik.

145. *Further discussion of the analytical principles of hydrodynamics.* *Challis* *Phil. Mag. XLVII,* 25. — *Moon ibid.* 143. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 313.]
146. *On the motion of fluids* *Cockle.* *Quart. Journ. math. XII,* 19. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 325.]
147. *Elementary theory of the tides.* *Abbott.* *Quart. Journ. math. XII,* 7. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 23.]
148. Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1873, 501.

Hyperboloid.

149. Einfache Constructionen windschiefer Hyperbolide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXI, 381.
150. *Hyperboloïde engendré par une droite mobile.* *Moret-Blanc.* *N. ann. math. XXXII,* 357.

I.

Integrationen.

151. *Sur l'intégration des différentielles rationnelles.* *Catalan.* *N. ann. math. XXXII,* 423.
152. Ueber die beiden Integrale $\int e^{\sin x} \cdot {}^{\cos}_{\sin} [nx - \cos x]\, dx$. Unferdinger Wien. Akad.-Ber. LVII, 611.
153. Ueber die beiden Integrale $\int x^n \cdot {}^{\cos}_{\sin} \{m \cdot \log (a + bx)\}\, dx$ und einige verwandte Formen. Unferdinger. Wien. Akad. Ber. LIX, 437.

Invarianten.

154. *On an identical equation connected with the theory of invariants.* *Cayley.* *Quart. Journ. math. XII,* 115.

K.

Kegelschnitte.

155. *Sur un nouveau mode de construction des coniques.* *Abel Transon.* *N. ann. math. XXXII,* 5.
156. Durchführung verschiedener die Curven zweiten Grades betreffenden Constructionen mit Hilfe von Kugel- und Cylinderflächen. Staudigl. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 960.
157. Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird. Staudigl. Wien. Akad.-Ber. LXI, 607.
158. Construction der Kegelschnittslinien aus Punkten und Tangenten. Koutny. Wien. Akad.-Ber. LVII, 469.
159. Construction des Durchschnittes einer Geraden mit den Kegelschnittslinien. Koutny. Wien. Akad.-Ber. LVI, 303.
160. Ueber die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LIX, 39.
161. Ueber die Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittslinien. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LIX, 481.

162. Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittslinien und von confocalen Kegelschnittslinien unter sich. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 571.
163. Die Axen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punktcoordinaten. O. Stolz. Wien. Akad.-Ber. LV, 280.
164. *To find the foci and axes of a conic in trilinear coordinates. C. Smith. Quart. Journ. math. XII*, 240.
165. Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen. Ed. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 223.
166. *Théorèmes sur les coniques. Saltel. N. ann. math. XXXII*, 89.
167. Ueber ähnliche Kegelschnitte. Ed. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXII, 261.
168. *Théorème sur les polaires des sommets d'un triangle par rapport à une même conique. Pellissier. N. ann. math. XXXII*, 48.
169. *Théorème sur les coniques inscrites dans un quadrilatère fixe qui touche une courbe de troisième classe donnée. Koehler. N. ann. math. XXXII*, 186. — *Laguerre ibid.* 187.
170. *On the parallel curves of conics. S. Roberts. Quart. Journ. math. XII*, 58.
171. *Théorème sur deux coniques confocales. Koehler. N. ann math. XXXII*, 187.
172. *Lieu du point de concours des tangentes communes à une conique fixe et à une autre qui se meut autour du foyer commun. Jamet. N. ann. math. XXXII*, 41.
Vergl. Ellipse. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

173. *On Sylvester's and other forms of continued fraction for circle-quadrature. Muir. Phil. Mag. XLVII*, 331.
Vergl. Quadratwurzel.

Kreis.

174. *Théorème sur une infinité de cercles tangents en un même point. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXII*, 449.

Kreistheilung.

175. Zur Theorie der Kreistheilung. Frischauf. Wien. Akad.-Ber. LV, 113.

Krümmung.

176. *Curvature of curves and surfaces. Watson. Quart. Journ. math. XII*, 318.
177. Ueber Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und confocale Systeme solcher Flächen. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 60.
178. Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LIX, 169.
179. *On the principal radii of curvature of a surface referred to quadriplanar and tangential coordinates. Jeffery. Quart. Journ. math. XII*, 86.
180. *Du rayon de courbure d'une courbe décrite par un point d'une figure mobile. Saint-Loup. N. ann. math. XXXII*, 113.
Vergl. Ellipsoid 104.

Krystallographie.

181. Ueber die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Sohncke. Berl. Akad.-Ber. 1873, 578.
182. *On the ray-planes in biaxal crystals. W. Walton. Quart. Journ. math. XII*, 269.
183. Ueber eine Anwendung des Spectralapparates zur optischen Untersuchung der Krystalle. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 15.

Kugel.

184. *Rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. Dostor. N. ann. math. XXXII*, 370.
185. *Calcul du rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Dostor. N. ann. math. XXXII*, 367.
186. *Sur le théorème de Dandelin se rapportant à une sphère inscrite dans un cône de révolution et touchante à la fois un plan qui coupe ce cône. Abel Transon. N. ann. math. XXXII*, 21.
187. *Construction de deux points sur une sphère donnée jouissant d'une certaine propriété. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXII*, 360.
Vergl. Optik 263. Potential. Trigonometrie 314.

Kugelfunctionen.

188. Ueber die Functionen X_n^m und Y_n^m. Gegenbauer. Wien. Ak.-Ber. LXV, 373.
189. Zur Theorie der Functionen X_n^m. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 55.

190. Entwickelung nach den Functionen X_n^{2r+1}. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 415.

191. Integralausdrücke für die Functionen Y_n^m. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 374.

M.

Maxima und Minima.

192. Ueber die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlicher. Stolz. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 1063.

193. *Conditions for a maximum or a minimum in a function of any number of variables. B. Williamson. Quart. Journ. math. XII,* 18

194. Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen. A. Schwarz. Berl. Akad. Ber. 1872, 3.

195. Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhaltes von Minimalflächen im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besondern. A. Schwarz. Berl. Akad.-Ber. 1872, 718.

196. Ueber eine Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. Lipschitz. Berl. Akad.-Ber. 1872, 361.

197. *Sur un certain minimum. Korkine & Zolotareff. N. ann. math. XXXII,* 337.

198. *Sur l'ellipse maximum d'aire inscrite dans un triangle. Gambey. N. ann. math. XXXII,* 139. — *Moret-Blanc ibid.* 142.

199. *Parmi toutes les ellipses qui passent par quatre points, trouver celle dont l'aire est minimum Gambey. N. ann. math. XXXII,* 475, 524.

200. *Le minimum d'une tangente à l'ellipse comprise entre les axes est égal à la demi-somme* (a+b) *des axes. Lez. N. ann. math XXXII,* 44.

201. *Le maximum de la distance du point de contact d'une tangente à l'ellipse à la projection du centre sur cette tangente est égal à la demi-différence* (a—b) *des axes. Lez. N. ann. math. XXXII,* 45.

202. Ueber die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen Curven von Radien durchschnitten werden. C. Exner. Wien. Akad.-Ber. LVII, 75.

203. Ueber die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen krumme Flächen von Radien-Vectoren durchschnitten werden. C. Exner. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 149.

Vergl. Elektrodynamik 86. Ellipsoid 103.

Mechanik.

204. *Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces. Delègue. N. ann. math. XXXII,* 495.

205. *Mémoire sur le problème des trois corps. Em Mathieu. Compt. rend. LXXVII,* 1071.

206. Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung eines Systems von Punkten. Loschmidt. Wien. Akad.-Ber. LV, 523.

207. *Note in illustration of certain general theorems obtained by Dr. R. Lipschitz. Cayley. Quart. Journ. math. XII,* 346.

208. *Extension of Lagrange's equations. Ferrers. Quart. Journ. math. XII,* 1.

209. *On the integration of the accurate equations applicable to the motion in one plane of an indefinitely thin wire. Moon. Quart. Journ. math. XII,* 241.

210. *Sur un théorème de mécanique céleste. Siacci. Compt. rend. LXXVII,* 1288. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 121.]

211. *On some theorems in mechanics. Besant. Quart. Journ. math. XII,* 276.

212. *On the measure of work in the theory of energy. Moon. Phil. Mag. XLVII,* 291. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 332.]

213. *Sur l'application des déterminants à la théorie des moments des forces. Durrande. N. ann. math. XXXII,* 265.

214. *On the motion of a particle referred to a moving space. Watson. Quart. Journ. math. XII,* 204.

215. *Sur l'accélération normale à la trajectoire d'un point d'un système invariable mobile dans son mouvement le plus général. Sabinine. N. ann. math. XXXII,* 257. — *Resal ibid.* 264.

216. *Mouvement d'un segment sphérique sur un plan incliné en tenant compte du frottement. Didion. Compt. rend. LXXVII,* 167.

217. *Mouvement d'un point matériel pesant et libre dans un fluide homogène en repos. Dieu. N. ann. math. XXXII,* 161.

218. *On a property in the equilibrium of two circular cords repelling each other according to the law of the inverse cube of the distance.* Townsend. Quart. Journ. math. XII, 214.
219. *On tautochronous and brachistochronous curves for parallel and concurrent forces.* Townsend. Quart. Journ. math. XII, 247.
220. *A geometrical study of the kinematic equilibrium and small oscillations of a rigid body.* Stawell Ball. Quart. Journ. math XII, 41. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 120.]
221. *On a construction in rigid dynamics* Townsend. Quart. Journ. math. XII, 138.
222. *On a construction in the dynamics of a rigid body which rolls without sliding on a fixed rough surface.* Townsend. Quart. Journ. math. XII, 201.
223. *Nouvelles expériences relatives à la théorie de la poussée des terres.* Curie. Compt. rend. LXXVII, 142, 778. — De Saint-Venant ibid. 234. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 343.]
224. *Intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques qui se produisent à l'intérieur d'un massif ébouleux soumis à de fortes pressions.* Boussinesq. Compt. rend. LXXVII, 667.
225. *Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion.* Boussinesq. Compt. rend. LXXVII, 1521.
226. Ueber Longitudinalschwingungen elastischer Stäbe. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LV, 597.
227. Ueber die Eigenschaften der Schwingungen eines Systems von Punkten. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 159.
228. Ueber Schwingungen von Saiten, welche aus ungleichen Stücken bestehen. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LVII, 517.
229. Theorie der Schwingungscurven. v. Strzelecki. Wien. Akad.-Ber. LXV, 189.
230. Ueber die Festigkeit zweier mit Druck übereinandergesteckter cylindrischer Röhren. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LIX, 679.
231. *Notes on applied mechanics.* Stawell Ball. Quart. Journ. math. XII, 112.
232. *Essai sur la détermination du frottement de l'air sur un projectile oblong.* Resal. N. ann. math. XXXII, 561.
233. Die Hauschlagscurven des Mühlsteins. Martin. Wien. Akad.-Ber. LV, 309.
234. Ueber die Reduction der Barometerstände bei Gefässbarometern mit veränderlichem Niveau. Jelinek. Wien. Akad.-Ber. LVI, 655.
235. Ueber eine neue Art der Beobachtung an Heberbarometern. Handl. Wien. Akad.-Ber. LVII, 109.
236. Theorie der Waagebarometer. Handl. Wien. Akad.-Ber. LIX, 7.

Vergl. Akustik. Astronomie. Attraction. Capillarität. Elasticität. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Molekularphysik. Optik. Wärmelehre. Wahrscheinlichkeitsrechnung 332, 333.

Mittelgrössen.

237. Nähere Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel positiver Grössen und ein daraus abgeleitetes allgemeines Theorem der Integralrechnung. Unferdinger. Wien. Ak.-Ber. LVI, 272.

Molekularphysik.

238. Ueber das Wirkungsgesetz der Molekularkräfte. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 213.
239. Beiträge zur Molekulartheorie. Handl. Wien. Akad.-Ber. LVI, 569; LXV, 377; LXVI, 136.
240. *On the mathematical theory of isomers.* Cayley. Phil. Mag. XLVII, 444.
241. *Sur le maximum de densité de l'eau; explication mécanique de ce phénomène.* Piarron de Mondésir. Compt. rend. LXXVII, 1154.

N.

Normalen.

242. Einfaches Verfahren, Normalen zu Flächen zweiter Ordnung durch ausserhalb liegende Punkte zu ziehen. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 831.

O.

Oberflächen.

243. *Sur une réduction de l'équation à différences partielles du troisième ordre qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal.* Levy. Compt. rend. LXXVI, 1435.

244. *Demonstration of Dupin's theorem: that three families of surfaces intersecting everywhere at right angles intersect along their curves of curvature.* Cayley. *Quart. Journ. math. XII*, 185.
245. *On the transformation of the equation of a surface to a sed of chief axes.* Cayley. *Quart. Journ. math. XII*, 34.
246. *On the order of the condition that two surfaces may touch.* S. Roberts. *Quart. Journ. math XII*, 229.
247 Beitrag zur Construction von Berührungsebenen an Rotationsflächen. Matzek. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 44.
248. Ueber die Construction des Durchschnittes zweier krummen Flächen unter Anwendung von Kugeln und Rotationsflächen. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 117.
249. Studien über Flächen, deren zu einer Axe senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind. Niemtschik. Wien Akad.-Ber. LVII, 246.
250. *Rapport anharmonique de quatre points du plan.* Lucas. *Compt. rend. LXXVII*, 1463.
251. *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.* Laguerre. *N. ann. math. XXXII*, 55. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 334.]
252. Ueber einige besondere Arten von Flächen vierten Grades. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1872, 474.
253. *On the cyclide.* Cayley. *Quart. Journ. math. XII*, 148.
254. *Propriété du tore.* Doucet. *N. ann. math. XXXII*, 470.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 62, 63. Maxima und Minima 194, 195, 196.

Oberflächen zweiter Ordnung.

255. Anwendung der räumlichen Central- und Parallelprojection zur Lösung verschiedener, die Flächen zweiter Ordnung betreffender Probleme. Staudigl. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 811.
256. Ueber die Axenbestimmung von Centralprojectionen der Flächen zweiten Grades. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 481.
257. *Théorèmes sur les surfaces de second ordre.* Saltel. *N. ann. math. XXXII*, 91.
258. *Solution analytique d'un problème se rapportant à une surface du second degré et ses axes.* Gambey. *N. ann. math. XXXII*, 92.
259. *On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle passant par l'une ou l'autre des focales de la première.* Pellet. *N. ann. math. XXXII*, 464. — Painvin *ibid.* 579.
260. *Des surfaces* $a.\frac{y+z}{x}+b.\frac{x+z}{y}+1=0$. Gallois. *N. ann. math. XXXII*, 440.

Vergl. Asymptoten 25. Cubatur 53. Determinanten in geometrischer Anwendung 61. Ellipsoid. Hyperboloid. Krümmung 177. Kugel. Normalen. Paraboloid.

Optik.

261. *On geometrical optics.* Warren. *Quart. Journ. math. XII*, 371.
262. Construction der Curven bestimmter Beleuchtungsintensität an Rotationsflächen mit Benutzung berührender Kugelflächen. Matzek. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 49.
263. Zur Dioptrik eines Systems centrirter Kugelflächen. Lang. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 666.
264. *The boundary-conditions of reflection and refraction for the principal section of media in motion* Ketteler. *Phil. Mag. XLVII*, 411.
265. Ueber eine neue Methode zur Untersuchung des reflectirten Lichtes. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 561.
266. Ueber den Einfluss der Wärme auf die Brechung des Lichtes in festen Körpern. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 223.
267. Ueber absolute Intensität und Absorption des Lichtes. Handl. Wien. Akad.-Ber. LXV, 129.
268 Ueber die durch planparallele Krystallplatten hervorgerufenen Talbot'schen Interferenzstreifen. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LVII, 709.
269. Ueber einige neue Talbot'sche Interferenzerscheinungen. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 529.

270. *Étude analytique et expérimentale des interférences des rayons elliptiques.* Croullebois. *Compt. rend. LXXVII*, 1269.
271. *On the manufacture and theory of diffraction-gratings.* Rayleigh. *Phil. Mag. XLVII*, 81, 193.
272. Ueber den Gangunterschied und das Intensitätsverhältniss der bei der Reflexion an Glasgittern auftretenden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LX, 567.
273. Ueber eine einfache Vorrichtung zur Herstellung complementärer Farbenpaare mit Brücke's Schistoskop. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 554.
Vergl. Geometrie (descriptive) 119, 120. Krystallographie.

P.

Parabel.

274. Beschreibung der Parabel aus gegebenen Punkten und Tangenten. Koutny. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 760.
275. *Sur trois paraboles passant par les sommets d'un triangle pris deux à deux et ayant un point de contact commun.* Poujade. *N. ann. math. XXXII*, 190.
Vergl. Trajectorie.

Paraboloid.

276. *Du tétraèdre conjugué à un paraboloïde.* Gambey. *N. ann. math. XXXII*, 333.
Vergl. Hyperboloid 149.

Perspective.

277. Construction der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen in der Perspective unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen. Koutny. Wien. Akad.-Ber. LV, 215.
278 Ueber die directe Bestimmung von Kreisbildern. Morstadt. Wien. Akad.-Ber. LVI, 92.

Planimetrie.

279. Die allgemeine Formel für die Summe der Winkel eines Polygons. Unferdinger. Wien. Akad. Ber. LVII, 627.
280. *Demonstration of the equality of two angles of a triangle by the equality of their bisecting lines.* F. G. Hesse. *Phil. Mag. XLVII*, 355.
281. *Sur un point remarquable du plan d'un triangle.* Lemoine. *N. ann. math. XXXII*, 361.
282. *Aire d'un quadrilatère en fonction de ses quatre côtés et de la droite qui unit les milieux de deux côtés opposés.* Lecornu. *N. ann. math. XXXII*, 26.
283. *On triangles inscribed in a circle and circumscribed about another.* Besant. *Quart. Journ. math. XII*, 276.
284. *Théorème sur deux sécantes d'une circonférence.* Morel *N. ann. math. XXXII*, 137.

Potential.

285. *Mean potential over a spherical surface.* Percival Frost. *Quart. Journ. math. XII*, 197.
Vergl. Elektrodynamik 82.

Productenfolge.

286. *On W. G. Horner's method of factorials* Jos. Horner. *Quart. Journ math XII*, 258.

Q.

Quadratische Formen.

287. Ueber die algebraische Theorie der quadratischen Formen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1872, 490.

Quadratur.

288. Ueber die Bestimmung der Constanten des Polarplanimeters. A. Schell. Wien. Akad.-Ber. LVI, 325.
289. Allgemeine Theorie des Polarplanimeters. A. Schell. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 189.
290. *Note sur le planimètre polaire.* Resal. *Compt. rend. LXXVII*, 509.
291. *Trouver l'aire de l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 34.
292. *L'aire de la courbe, lieu du centre d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite fixe, est la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 451.
Vergl. Kettenbrüche. Maxima und Minima 198, 199.

Quadratwurzel.

293. *Sur deux différentes formes de la racine carrée approchée d'un nombre.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXII*, 477.

REES - LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

R.

Reihen.

294. *On semi-convergent series.* Glaisher. *Quart. Journ. math. XII*, 52.
295. *On the expansion of functions in trigonometrical series.* W. Walton. *Quart. Journ. math. XII*, 146.
296. Der Rest der Taylor'schen Reihe. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LIX, 533.
297. Ueber die Entwickelung und Summation einiger Reihen. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 799.
298. Ueber $\frac{1}{(m+\vartheta)^e}+\frac{1}{(m+2\vartheta)^e}+\dots+\frac{1}{[m+m(n-1)\vartheta]^e}$ bei $m=\infty$ und über das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LVII, 621.
299. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LX, 591.
300. Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LIX, 356.
301. *On certain series for π.* Glaisher. *Quart. Journ. math. XII*, 232.
302. Ueber $\lim\left[\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots+\frac{1}{2m}\right]_{(m=\infty)}$. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LV, 93.
303. Die Summe der Logarithmus- und Arcustangens-Reihe mit alternirenden Zeichengruppen. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LV, 75.
304. Die Summe der Exponential-, der Sinus- und Cosinusreihe mit alternirenden Zeichengruppen. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LVI, 257.
305. *Sommation de la série* $\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p.\,2^p.\,\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots(p+1)}$. *De Virieu. N. ann. math. XXXII*, 169.

Vergl. Convergenzbedingungen. Gleichungen 141. Kugelfunctionen 190. Trigonometrie 310, 311, 312.

S.

Singuläre Lösungen.

306. *On singular solutions.* Cockle. *Quart. Journ. math. XII*, 305.

Substitutionen.

307. *Sur les polynomes bilinéaires.* C. Jordan. *Compt. rend. LXXVII*, 1487.

T.

Tetraeder.

308. *Sur le tétraèdre.* Abel Transon. *N. ann. math. XXXII*, 519.

Vergl. Kugel 185. Paraboloid.

Trajectorie.

309. *Trouver la trajectoire orthogonale d'un système de paraboles égales tangentes en leur sommet à une droite fixe.* Gambey. *N. ann. math. XXXII*, 185.

Trigonometrie.

310. *On the expression for cosines of multiple angles in terms of powers of cosines and conversely.* W. Walton. *Quart. Journ. math. XII*, 168.
311. *Expressions de* $\sin m a$ *et* $\cos m a$ *en fonction de* $\sin a$ *ou* $\cos a$ *seulement.* Mourgue. *N. ann. math. XXXII*, 408.
312. *Sur les développements de* $\sin n a$, $\cos n a$ *suivant les puissances de* $2\cos a$ *et* $2\sin a$. Le Besgue. *N. ann. math. XXXII*, 425.
313. *Construction de* $\sin 3a$, $\sin 4a$, $\cos 3a$, $\cos 4a$. Demartres. *N. ann. math. XXXII*, 143.
314. Ueber einige merkwürdige Formeln der sphärischen Trigonometrie. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 30.

Vergl. Reihen 295, 300.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

315. Ueber die vollständigen Abel'schen Integrale. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 976.
316. Ueber die Relationen zwischen den vollständigen Abel'schen Integralen verschiedener Gattung. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXII, 49.

W.

Wärmelehre.

317. Elementare Ableitung der Grundgleichung der dynamischen Gastheorie. Pfaundler. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 159.
318. Der zweite Satz der mechanischen Wärmetheorie. Loschmidt. Wien. Akad.-Ber. LIX, 395.
319. *Démonstration directe des principes fondamentaux de la thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science. Ledieu. Compt. rend. LXXVII,* 94, 163, 260, 325, 414, 455, 517.
320. Zur dynamischen Theorie der Gase. Lang. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 485; LXV, 415.
321. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasmengen. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 63.
322. Untersuchungen über die Wärmeleitung in Gasen. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXV, 45.
323. Ueber die dynamische Theorie der Diffusion der Gase. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXV, 323.
324. Ueber die Anzahl der Atome in den Gasmolekülen und die innere Arbeit in Gasen. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LVI, 682.
325. Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 397.
326. Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 679.
327. Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXIII, 712.
328. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LXVI, 275.
329. Ueber Wärmemenge und Temperatur der Körper. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXII, 171.
330. Formel für die Spannkraft gesättigter Dämpfe. Herrmann. Wien. Akad.-Ber. LXIV, 623.

Vergl. Elasticität 70. Optik 276.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

331. *Sur un passage de la théorie analytique des probabilités. H. Laurent. N. ann. math. XXXII,* 176, 320. — *Moreau ibid.* 322.
332. Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 517.
333. Lösung eines mechanischen Problems. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LVIII, 1035.

Z.

Zahlentheorie.

334. Zur Theorie der Pell'schen Gleichung. Frischauf. Wien. Akad.-Ber. LV, 121.
335. *Solutions de l'équation* $t^2 - Du^2 = 4$, *dans laquelle* D *est de la forme* $(4n+2)^2+1$. *Moreau. N. ann. math XXXII,* 330.
336. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Zeller. Berl. Akad.-Ber. 1872, 846.
337. *Les nombres* A, B, α, β *étant des entiers supérieurs à zéro, si la somme* $A^\alpha + B^\beta$ *est un nombre premier, le plus grand commun diviseur de* α *et* β *est l'unité ou une puissance de* 2. *André. N. ann. math. XXXII,* 521.
338. a *et* m *étant des entiers* $\frac{(a^2+a)[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}]}{m-1}$ *et* $\frac{m(a^2+a)[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}]}{(m-1)[(a+1)^m-a^m]}$ *ne sont pas l'un la* m^{ième} *puissance d'un entier, l'autre un entier. Callandreau. N. ann. math. XXXII,* 450.
339. Ueber die Kriterien der Theilbarkeit der Zahlen. Unferdinger. Wien Akad.-Ber. LIX, 465.
340. *Scolies pour un théorème d'arithmétique. Realis. N. ann. math. XXXII,* 212.
341. *Sur un théorème erroné de Legendre. Moreau. N. ann. math. XXXII,* 323.

Vergl. Kreistheilung.

Historisch-literarische Abtheilung.

II.

Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's: „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert."

Von

M. Curtze

in Thorn.

Ich habe in dem ersten Hefte des 20. Jahrganges dieser Zeitschrift mit hohem Interesse die Abhandlung Günther's: „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert" gelesen. Es sei mir erlaubt, einige Bemerkungen, beziehungsweise Berichtigungen der darin mitgetheilten Notizen mitzutheilen.

Zunächst möchte ich die Bibliographen wenigstens vor der Anklage in Schutz nehmen, dass sie die von Herrn Günther behandelte „Geometria deutsch" nicht kannten. In Hain, *Repertorium Bibliographicum* (Stuttgardt 1821), findet sich unter Nr. 7576, bei welcher der vorgesetzte Stern anzeigt, dass der Verfasser das Buch selbst in Händen gehabt, folgende Notiz:

> * 7576. GEOMETRIA. *F.* 1*a tit.*: Geometria || deutsch. *F.* 2*a*: (A)Us der geome= || trey etliche nutz= || parliche stück dy || etc. *Term. f.* 6*a hac lin.*: riss vom . f. zum . d. ein exempel hernach stet. *Fig. mathemat. s. l. a. et typ. n.* 4. *g. ch. s. s. c. et pp. n.* 6 *ff. c. figg. mathemat. et litt. initial. florent.*

Da Hain die Drucke nur bis 1500 incl. verzeichnet, so steht soviel fest, dass seiner Meinung nach die Geometria deutsch vor 1500 gedruckt ist. Da sie bei Weller, *Repertorium Typographicum* (Nördlingen 1864, Anhang *ibid.* 1874) fehlt, so dürfte auch dieser tüchtige Bibliograph derselben Meinung sein.

Herr Günther irrt aber wieder, wenn er annimmt, dass eigentlich Dürer, von Roriczer abgesehen, der Erste sei, der über Geometrie in deutscher Sprache geschrieben hat. Zunächst besitzt die Münchner Hof- und Staatsbibliothek ein Manuscript aus dem Jahre 1477 (*Cod. German.* Nr. 328), in welchem auf Blatt 62 — 73 sich findet: Geometria (Feldmesskunst), deutsch, also offenbar von der obigen Geometria deutsch verschieden. Weiter aber giebt es noch andere Werke, die, wenn auch nicht hauptsächlich, so doch nebenbei geometrische Sachen in deutscher Sprache behandeln. Ich führe z. B. an: Ayn new kunstlich Buech | welches gar gewiß vnd behend | lernet nach der gemainen regel Detre, welschen | practic, regule falsi vñ etlichē regeln Cosse man | cherlai schöne vñ zuwissen notdürfftig Rechnūg | auff kauffmannschafft. Auch nach den propor- | tion der kunst des gesanngs jm diatonischen ge | schlecht auß zutailē monochordū, orgel- pfeiffē | vñ ander jnstrument auß der erfindung Pytha | gore. Weytter ist hier- jnnen begriffen buechhalt- | ten durch das Zornal, Kaps vnd schuldbuch | Visier zumachen durch das quadrat vnnd tri- | angel mit vil andern lustigen stücken der Geo- | metrey. Gemacht auff der löblichen hoen schul | zu Wieñ in Osterreich durch Henricū Gram- | mateum, oder schreyber von Erffurdt der sibē | freien Künsten Maister. | Mit Kayserlichē gnaden vnd | Priuilegien das buech nicht | nach zu truckē in sechs jarn. Am Ende: Gedruckt zu Nürnberg durch | Johan- nem Stüchs | für Lucas Alantsee Büchfurer | vnd Bürger zu Wien. Das Buch ist 1518 gedruckt, und befindet sich ein Exemplar in der Hof- und Staatsbibliothek zu München. Neuausgaben existiren mehrfach, z. B. Frankfurt a/M. c. 1540, Chr. Egenolph und ebendaselbst 1544, letztere Ausgabe ebenfalls in München; dann wieder gedruckt zu Nürnberg bei Johann Stüchs 1521, und zu Erfurd bei Matthes Maler 1523, beide Ausgaben in München.

Wenn Herr Günther aus der Sprache auf das Alter schliessen will, so dürfte er vielleicht nach dem oben angeführten Titel das Buch des Heinrich Schreiber, genannt Grammateus, ebenfalls um 1500 oder früher ansetzen.* Ist übrigens Ratdolt der Drucker, so fällt das Buch „Geometria deutsch" sicher nicht vor 1487, da erst nach dieser Zeit Ratdolt in Augsburg druckte. Uebrigens ist Ratdolt keineswegs der alleinige Erfinder der Kunst, mathematische Figuren in den Text zu drucken. In dem Werke des Oresme: *De latitudinibus formarum*, hat Mattheus Cerdonis von Windischgrätz, der zu Padua druckte, im Jahre 1482, also gleichzeitig mit Ratdolt, mathematische Figuren in Holzschnitt in Anwendung gebracht.

---

* Wahrscheinlich hat Herr Günther noch nicht Gelegenheit gehabt, die oft in wirklich haarsträubender Orthographie gedruckten Originalausgaben Luther'scher, Melanthon'scher und sonstiger Reformations- und Gegenreformationsschriften einzusehen; hätte er, wie ich, dieselben hundertweise in Händen gehabt, so würde er sicherlich nicht über den Mangel an orthographischem Sinn in einem Buche Klage führen, das zu den Incunabeln unserer Literatur gehört.

Ich komme zu einem andern Theile der Untersuchungen des Herrn Verfassers, zu dem § 7, zu dem ich im Stande bin, die Behauptung Egen's, dass Cardan durch Tartaglia zu den Problemen, die Aufgaben der Geometrie mit einer Zirkelöffnung zu vollführen, angereizt wurde, zu beweisen. Als Libri seine *Histoire des Mathématiques en Italie* schrieb, hatte er diese Beweismittel noch nicht in Händen, später hatte er sie erstanden, hat aber darüber Nichts veröffentlicht. Nur Prof. Gherardi in Florenz hat in den von mir übersetzten Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna die Materie eingehend behandelt, auf die Beweismittel gestützt, welche Libri später von ihm erstand, und die in der Libri'schen Auction (London 1861) für 20 £ 10 *s* verkauft wurden. Es bringt mich das zugleich auf das nachgelassene Werk H. Hankel's. Auch dieser hat, obgleich er die Materialien citirt, doch die ganze Geschichte der Erfindung der Gleichungen dritten Grades nur nach der tendenziös gefärbten Mittheilung Tartaglia's erzählt. Ueberhaupt enthält dieses im Allgemeinen so neue und überraschende Gesichtspunkte entwickelnde Buch in Einzelnheiten eine nicht geringe Zahl von Fehlern, so dass es nicht unbedingt als Autorität citirt werden kann. Doch zu meinem eigentlichen Zwecke zurück. Nachdem Cardan in seiner *Ars magna* die Auflösung der Gleichungen dritten Grades bekannt gemacht hatte, wie Tartaglia behauptete, indem er einen geleisteten Eid brach, kam bekanntlich zwischen Tartaglia und Cardan ein wissenschaftlicher Streit zum Ausbruch, der in den Jahren 1546—1547 zu einer vollständigen Herausforderung durch Cartelli wurde, über deren Art und Weise Hankel a. a. O. weitläufig gehandelt hat. Die Cartelli wurden jedoch nicht zwischen Cardan und Tartaglia gewechselt, sondern zwischen Ferrari und Tartaglia. In dem zweiten Cartello Ferrari's zeigt dieser den Grund, weshalb sich Cardan seines Eides für entbunden halten durfte; er hatte nämlich die Originalarbeit des Scipione dal Ferro über die Auflösung der Gleichungen dritten Grades bei dem Schwiegersohne des Ferro, dem Annibale dalla Nave, eingesehen und durchgearbeitet drei Jahre vor der Ausgabe der *Ars magna;* was er in seiner *Ars magna* mittheilte, war nicht die Erfindung Tartaglia's, sondern des Ferro, und der einzige Fehler, welchen Cardan bei der Veröffentlichung beging, war der, dass er nicht das wahre Sachverhältniss klarlegte. Tartaglia hat in seinem zweiten Cartello, der Antwort auf das eben erwähnte Ferrari'sche, diese Darstellung ausdrücklich als richtig anerkannt, freilich wohl nur, weil ihm Zeugen gegenübergestellt werden konnten, die ihn überführt haben würden. — In seinem vierten Cartello hatte Tartaglia dem Ferrari auch Aufgaben gestellt, welche das von Herrn Günther behandelte Problem betrafen; Ferrari antwortete darauf: *„Io m'allegro, Messer Nicolò, che in questi vostri quesiti, m'habbiate dato materia di giovare a quei che si dilettano di Geometria, et di Arithmetica, non essendo tut-*

tavia pervenuti anchora al colmo delle predette scienze. E questo, percioche ne' vostri primi diecesette quesiti si contiene quella bella invenzione di operare senza mutare l'apertura del compasso, la qual io non so da chi si havesse principio, ma iò so bene, che da circa a cinquant' anni in quà molti bei ingegni si sono affaticati per accrescerla, fra quali, in gran parte, e stato la felice memoria di messer Scipione dal Ferro cittadino Bolognese. Io dunque voglio esser quello, che a tal inventione dia tutta la perfettione, che può havere, dimostrando per questa via, non solamente alcune propositioni, trovate da nostri maggiori, ma etiandio tutto Euclide.

Da diese Stelle ihrem grössten Theile nach in dem Werke von Fantuzzi: *Notizie degli Scrittori Bolognesi, Tomo* 9, abgedruckt ist, so ist der Weg, auf welchem Egen zu seiner nach dem Obigen sehr begründeten Behauptung kam, dass nämlich Cardan und Ferrari durch Tartaglia zur Behandlung derartiger Probleme angereizt seien, deutlich genug gezeichnet. Die Stelle zeigt aber ausserdem noch vielmehr für die Geschichte gerade dieser mathematischen Theorie, was des Weiteren hier nicht auszuführen ist.

Hat Copernicus die Einleitung in sein Werk *de Revolutionibus* selbst gestrichen oder nicht?

Herr Prof. Cantor hat in diesen Blättern (Jahrg. XVIII, S. 31 — 33) die Säcularausgabe des Copernicus einer eingehenden Besprechung unterworfen. Später (*ibid.* S. 71—72) hat er mit Hinweis auf eine andere Besprechung (Augsburger Allgem. Zeitung, 17. Juli 1873, Beilage Nr. 198) zu derselben Berichtigungen und Ergänzungen gegeben. Da ich in Betreff der an beiden Stellen ventilirten Frage, ob die Einleitung in das erste Buch der *Revolutiones* mit Bewilligung des Copernicus unterdrückt wurde oder nicht, und ob dieselbe überhaupt nach der Widmung an Papst Paul III. überflüssig sei, anderer Meinung bin, als Herr Prof. Cantor, so erlaube ich mir hier, meine Gründe des Weiteren darzulegen.

Die Geschichte des Druckes der *Revolutiones*, wie sie in der Augsburger Allgem. Zeitung von Cantor aufgestellt wird, ist unhaltbar. Nach der gewöhnlichen Ansicht war die Originalhandschrift des fraglichen Werkes gegen 1530 beendigt — man schliesst dies daraus, dass einmal die letzte Beobachtung, welche Copernicus benützt, vom 12. März 1529 datirt, und der Brief des Cardinal Schönberg vom 1. November 1536, welcher der Originalausgabe vorgedruckt ist, von dem Buche als einem vollendeten spricht —, wir haben aber durch Rheticus bestimmte Nachrichten, dass dies für einen Theil — die Trigonometrie — nicht richtig ist, und dass speciell die letzte Revision des ganzen Werkes erst während der Anwesenheit des Letztern

(Mai 1539 bis Ende 1541) in Frauenburg gemacht ist.* Dieser letzten Revision gehören unzweifelhaft alle durch Tinte und Schrift sich deutlich abhebenden Correcturen, Zusätze und Streichungen des prager Manuscriptes an, durch welche dem Werke der Umfang gegeben ist, wie ihn die Ausgaben enthalten. Die Streichungen erstrecken sich nun wohl auf den der Hauptsache nach in die Widmung an Papst Paul III. aufgenommenen Schluss des ersten Buches der ursprünglichen Redaction mit dem Briefe des Lysis an Hipparch, aber nicht auf die Einleitung des Werkes, welche die ersten Herausgeber unterdrückten, und welche Herr Prof. Cantor von Copernicus selbst durch die Widmung an Paul III. ersetzt ansieht. Der von Cantor allegirte Brief des Osiander an Copernicus vom 20. April 1541 aber fällt noch in eine Zeit, wo das Manuscript sich noch in den Händen des Copernicus befand, der es erst Ende 1541, als Rheticus Frauenburg schon verlassen hatte, an Tiedemann Giese übergab, der es dann nach Wittenberg sendete, wo Rheticus daraus zunächst die Trigonometrie Anfang 1542 edirte. Hätte Copernicus also infolge des Briefwechsels mit Osiander die Einleitung in das ganze Werk streichen und durch die Widmung an Paul III. ersetzen wollen, so würde dies bei der Revision, die unter Assistenz des Rheticus gemacht wurde, sicher schon durch ein Durchstreichen des betreffenden Passus angedeutet sein, was aber nicht geschehen ist. Die Widmung stellt doch eine Art Vorrede — sie hat in der Originalausgabe den Columnentitel *Praefatio*** — des ganzen Werkes dar; kann nun eine solche wirklich die Einleitung eines Werkes ersetzen, oder ist es nicht vielmehr natürlich, dass die Vorrede die Gedanken der Einleitung und noch ein gut Stück mehr aus dem Gedankengange des Buches recapitulirt? Das thut aber die Widmung. Sie enthält viele Gedanken der Einleitung, aber auch manche nicht; sie enthält manche Gedanken, welche der Einleitung fremd sind, so die Verarbeitung des Passus über den Brief des Lysis an Hipparch u. A.

Im Mai 1542 brachte Rheticus das Manuscript der *Revolutiones* selbst nach Nürnberg (*Melanthon. Opp. IV. ep.* 2484), da nun in diesem Monat schon der Druck begann, vorher aber schon die Trigonometrie in wörtlicher Uebereinstimmung mit dem Hauptwerke gedruckt war, so kann das von Cantor Druckexemplar genannte Manuscript nicht erst in Nürnberg angefangen sein, obwohl es dort recht wohl erst vollendet sein wird. Hat also Jemand die Einleitung gestrichen, so war es Rheticus; darin stimmen wir mit Cantor überein, wir glauben aber nicht, dass Copernicus seine Einwilligung dazu gab. Bis Ende 1542 hat Rheticus auch selbst den Druck besorgt, erst nach seinem Weggange nach Leipzig trat Osiander

* *Ed. Thor., p. XVII,* Anm. 20.

** Auch Giese nennt sie in seinem später erwähnten Briefe an Rheticus mit diesem Namen.

an seine Stelle. Wer sich die Mühe giebt, die letzten Bücher der Originalausgabe in Bezug auf Correctheit des Textes mit den ersten Büchern zu vergleichen, wird fast bis auf die Seiten- und Capitelzahl genau den Punkt angeben können, wo dieser Wechsel der Redaction eintrat.

Der Druck des Buches hat doch sicher nicht mit der ersten dreifachen Bogenlage ohne Numeration begonnen, sondern mit dem *Cap. I. Quod mundus sit sphaericus.* Sollte Copernicus nun schon Ende 1541 die Widmung an Paul III. mit nach Wittenberg gesendet haben, so dass daraufhin Rheticus die Einleitung strich, und nicht vielmehr erst, als er hörte, das Werk ist bald fertig, diese Widmung geschickt haben? In dem bekannten Briefe Giese's an Rheticus vom 26 Juli 1543 wird freilich die ganze Schuld auf Osiander abgewälzt, diese *Epistola* aber, von der es heisst: *Epistolam ad te mitto cum ipsius exemplo*, nämlich des Copernicus, wie dieser die Einleitung haben wollte, kann doch kaum etwas Anderes sein, als eben die unterdrückte Einleitung, die — das wird Jeder sagen, der sie mit der *Praefatio* vergleicht — viel schärfer und klarer den Standpunkt des Verfassers zeigt, als die letztere. Mir scheint also aus Allem die Zustimmung des Copernicus zu der Unterdrückung der Einleitung in das ganze Werk sehr fraglich, mir scheint dagegen, dass Rheticus sie gestrichen, vielleicht auf Anrathen des Osiander aus Opportunitätsgründen. Der Brief Osiander's an Rheticus, ebenfalls vom 20. April 1541, würde dazu vielleicht die erste Veranlassung gegeben haben, gerade weil aber bis zum Verlassen Frauenburgs durch Rheticus Copernicus die Einleitung nicht gestrichen hat, trotzdem Osiander brieflich und Rheticus mündlich dazu drängten, kann ich nicht glauben, dass er später auf schriftliches Drängen des Rheticus zu einer solchen die Zustimmung ertheilt hat.

Thorn, April 1874. M. Curtze.

Recensionen.

Einleitung in die mechanische Wärmetheorie, von Dr. G. KREBS, Lehrer der Physik und Chemie an der höheren Gewerbe- und Handelsschule zu Frankfurt a. M. Mit 32 Holzschnitten im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1874.

Die deutsche Literatur leidet einen fühlbaren Mangel an Werken, welche zur Einführung Studirender in die Lehren der mechanischen Wärmetheorie geeignet sind, einer Wissenschaft, welche für die theoretische Physik ebenso wichtig ist, als für die Theorie aller auf Expansion von Luft oder Dampf gegründeten Maschinen. Die vorhandenen vollständigen und in sich geschlossenen Darstellungen der mechanischen Wärmetheorie bilden entweder einen Theil eines grösseren Werkes, z. B. von Grashof's theoretischer Maschinenlehre, oder von Wüllner, Experimentalphysik, 3. Ausg., oder sie sind wie das classische Werk von Zeuner (Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Aufl., 1866) und Röntgen (Grundlehren der mechanischen Wärmelehre, I. Theil, 1871) speciell für den Techniker geschrieben. Unter diesen Umständen empfiehlt sich das vorliegende Werkchen ganz besonders, indem es bei einem sehr billigen Preise (4 Mark) die Gelegenheit darbietet, gleichzeitig die experimentellen Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie, ihre mathematischen Entwickelungen und ihre Anwendung auf calorische und Dampfmaschinen kennen zu lernen. Dies lässt sich auch aus nachfolgender Inhaltsangabe des Werkchens erkennen, welches in Format (8°) und Umfang (218 S.) der ersten Auflage von Zeuner's Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie fast gleichkommt.

Abschnitt I: „Das mechanische Aequivalent der Wärme", S. 1—36, enthält die älteren und neueren Anschauungen über das Wesen der Wärme, die dem Messen von Arbeit und Wärme zu Grunde liegenden Definitionen und Sätze und die Beschreibung und Berechnung der älteren Rumford-schen, sowie vieler neueren Versuche von Joule und Hirn über das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit.

Abschnitt II: „Das Wesen der Wärme und die Theorie der Energie", S. 36—48, führt den Leser von den Vorstellungen des Clausius über die Einwirkung der Wärme auf die drei Aggregatzustände, auf die aus dem Princip der Erhaltung der Kraft hervorgegangene Begriffseintheilung der

Energie in kinetische und potentielle Energie und schliesst nach ausführlicher Besprechung dieser Begriffe an zahlreichen Beispielen mit dem mathematischen Ausdrucke der Aequivalenz von Wärme und Arbeit (1. Hauptgrundsatz).

Abschnitt III: „Der umkehrbare Kreisprocess“, S. 48—144, beginnt mit der Erläuterung des einfachen Carnot'schen Kreisprocesses, seiner graphischen Darstellung durch Clapeyron, den isothermischen und adiabatischen Curven (Rankine), der isodynamischen Curve (Cazin), dem Indicatordiagramm und dem 2. Hauptgrundsatze der mechanischen Wärmetheorie. Hieran schliesst sich die ausführliche Darstellung der Gesetze der Gase unter Einführung der absoluten Temperatur von Haus aus und die Berechnung des Carnot'schen Kreisprocesses für Gase. Nach Einschaltung eines mathematisch gehaltenen Capitels, betreffend die Krönig und Clausius'schen Ansichten über die Constitution der Gase, folgt für den einfachen und hierauf für den zusammengesetzten umkehrbaren Kreisprocess bei Gasen und dann bei einem beliebigen vermittelnden Körper der Beweis des Satzes, dass die Summe aller Verwandlungen Null ist $\left(\int\frac{dQ}{T}=0\right)$. Den Schluss des Abschnittes bildet die Ableitung der 1. und 2. Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie.

Abschnitt IV: „Gesetze der Dämpfe“, S. 144—184, enthält die Ableitung der äusseren und inneren latenten Wärme der Dämpfe und der Verdampfungswärme aus den empirischen Formeln Regnault's, sowie die Herleitung mit Hilfe der mechanischen Wärmetheorie von den gesetzmässigen Beziehungen gesättigter und überhitzter Dämpfe und ihren isothermischen, isodynamischen und adiabatischen Curven.

Abschnitt V: „Von den Dampf- und Heissluftmaschinen“, S. 184—213, beschäftigt sich mit den calorischen Maschinen, auf welche sich die Sätze vom Kreisprocesse in einfacher Weise anwenden lassen, und mit der Berechnung der idealen und wirklichen Dampfmaschine.

Abschnitt VI: „Energie und Entropie“, S. 213—218, giebt ein Resumé über die über Energie und Entropie des Weltalls angestellten Betrachtungen, nach Clausius, Rankine u. A.

Dem eben gegebenen Inhaltsverzeichniss, welches die gleichmässige Berücksichtigung des rein Theoretischen, des Experimentellen und Technischen, wie schon früher erwähnt wurde, erkennen lässt, füge ich zur Charakteristik des Buches noch hinzu, dass man bei der mathematischen Behandlung, welche hier bekanntlich nicht elementar sein kann, sondern von Differentialgleichungen mehrerer Variabelen und einfachen Integrationen ohne Nachtheil nicht absehen darf, einer gefälligen Darstellung begegnet. Ferner mögen zahlreiche Citate nicht unerwähnt bleiben, welche auf die Originalarbeiten oder andere bemerkenswerthe Arbeiten hinweisen.

In Anbetracht der eben hervorgehobenen Vorzüge und unter nochmaligem Hinweis auf den billigen Preis (4 Mark) verdient das Werkchen von Krebs die wärmste Empfehlung an Diejenigen, welche einen verständnissvollen Ueberblick über die mechanische Wärmetheorie anstreben oder einen Ausgangspunkt für tiefer eingehende Studien in dieser jungen, aber so wichtigen Wissenschaft suchen.

Dr. Kahl.

Die Rechenkunst im sechszehnten Jahrhundert, von A. Kuckuck. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1874.

Der uns vorliegenden Abhandlung von 26 Druckseiten hat, wie uns dünkt, der Verfasser ein ungünstigeres Loos bereitet, als sie eigentlich verdiente. Die viel zu pomphafte Ueberschrift erweckt nämlich Erwartungen, welche die Abhandlung weitaus nicht erfüllt. Herr Kuckuck giebt uns ganz interessante „Beiträge zur Geschichte der Rechenkunst in Deutschland", wie er allenfalls hätte sagen können, aber wir lernen keineswegs bei ihm die Rechenkunst im 16. Jahrhundert kennen. Als Quellen dienten ihm neben dem umfangreichen Artikel „Rechnen", welchen Herr Wildermuth für Schmid's Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens, Bd. VI, Gotha 1867, bearbeitet hat, insbesondere zwei Rechenbücher aus der Bibliothek des Gymnasiums, zu dessen dreihundertjährigem Gedenktage die Abhandlung selbst erschien. Das eine Buch ist verfasst von Johann Albrecht oder, wie er auch manchmal sich nennt, Johann Albert, Rechenmeister zu Wittenberg, das andere von dem bekanntesten deutschen Lehrer der Rechenkunst, von dem im Volksmunde noch heute fortlebenden Adam Riese zu Annaberg. Das erste Buch gehört der „Rechnung auf der Linien" an, jener Fortsetzung der alten Kunst des Abacus, welche nur die gegen den Rechner senkrechten Columnen in waagrechte Zeilen umzuwandeln veranlasst war, muthmasslich dadurch, dass man den vordem liegenden Abacus in den Schulen aufhängte, damit er von vielen Schülern gleichzeitig gesehen werden könne. Das zweite Buch vertritt die Classe der „Rechnung auf den Federen", d. h. also der Rechnung mit Zahlzeichen ohne Rechenbrett, wie sie schon von den Algorithmikern des 12. und 13. Jahrhunderts angebahnt wurde. In der That sehen wir — und das musste, meinen wir, hervorgehoben werden —, im 16. Jahrhundert nur eine anderweitige Stufe derselben Entwickelung vor uns, welche die Geschichte der Rechenkunst als kennzeichnend für einen über 300 Jahre früher gelegenen Zeitpunkt schildert. Damals sehen wir die Rechenkunst als Capitel der Gelehrtenwissenschaft von Klosterschule zu Klosterschule sich verbreiten, bald in gewohnter Beibehaltung des Abacus, wie sie seit Boethius und vielleicht noch im 8. Jahrhundert mit Zugrundelegung des Boethius gelehrt wurde, bald im Anschluss an arabische Schriften, insbesondere an das durch Atelhart von Bath um 1120 übertragene Lehrbuch des Mohammed ben Moussa Alkhovarezmi, so dass die neuere Methode anfänglich nur zaghaft neben der alten vorgetragen wird, dann aber dieselbe überwuchert und ganz verdrängt. Wir sehen diesen Verdrängungsprocess in Italien mit beschleunigter Geschwindigkeit vor sich gehen, seit Leonardo von Pisa 1202 sein Meisterwerk geschaffen. Im 15. und 16. Jahrhundert wird nun in Deutschland Volkseigenthum, was bisher nur ganz Vereinzelten in unserem Vaterlande zugänglich war. Die städtischen Schulen verbreiten den Elementarunterricht in weiteren und weiteren Kreisen, und Mittel zum Zwecke ebensowohl, als Belege für die Erfüllung des Zweckes sind die Lehrbücher der Rechenkunst in deutscher Sprache, welche mindestens seit 1489 (Johannes widmann von Eger, Behende und hübsche Rechnung auf allen Kauffmannschafft) beginnen, seit Luther und Melanchthon fast einzig im Gebrauche sind, wie Herr Kuckuck (S. 5) richtig hervorgehoben hat, und die Anwendung der Muttersprache geht Hand in Hand mit der Uebung (S. 17), als Rechenlehrer Männer anzustellen, die nicht wissenschaftlich gebildete Mathematiker sind, die nicht *ob doctrinam*, sondern *ob civilem prudentiam claruerunt.* Auch jetzt wieder beginnt der Volksunterricht mit der älteren Methode, und nur allmälig bürgert sich die Ziffernrechnung neben der mit Rechenpfennigen ein, schliesslich wieder, und diesmal endgiltig, die ältere Nebenbuhlerin beseitigend. Nur wo sehr einfache Zustände herrschen, wo es sich ausserdem um keine höhere Rechnungsoperation handelt, als um das Zusammenfassen wiederholt auftretender Einheiten zu einer Zahl, ist in dem Kerbholze ein letzter Rest der alten instrumentalen Rechenkunst übrig geblieben. Es hat sich bewahrheitet, was einer der trefflichsten Rechenmeister des 16. Jahrh. von dem Rechnen auf den Linien aussprach: „Wahr ist's, dass sie zu Haussrechnungen, da man viel Summierns, Aussgebens und Eynnemmens, bedarff, etwan förderlich erscheinen, aber in Kunstrechnungen, die ein wenig etwas wichtig, zum offtermal verhinderlich. Nicht sag ich, dass man auff den Linien dieselben Rechnungen nicht auch machen köndte, sondern soviel vortheils ein Fussgänger, der leichtfertig und mit keiner Last beladen ist, gegen einem, der unter einer schwären Last stecket, hat, soviel vortheils hat auch ein Kunstrechner auff oder mit den Ziphern für einem mit den Linien." So ist die Meinung Simon Jacob's, den die Zeitgenossen, allerdings mit ziemlicher Uebertreibung, einem Johannes Schoner, ja sogar einem Regiomontanus an die Seite stellen. Gleich diesen sei er ein Franke, singt Magister Johannes Ulrich Struppius von Gelnhausen, und habe seine Vaterstadt Coburg ebenso berühmt gemacht, wie diese Karlsstadt und Königsberg.

Da über das Leben Simon Jacob's unseres Wissens in keinem historischen Werke Etwas angegeben ist, so benutzen wir diese Gelegenheit, um zu bemerken, dass Simon Jacob ebenso wie sein Bruder Pancratius Jacob aus Coburg stammte, und dass sie nie versäumten, sich dem entsprechend Jacob von Coburg oder Coburgk zu nennen. Beide siedelten nach Frankfurt a. M. über, wo Simon Rechenmeister, Pancratius Rathschreiber war. Seit 1552 hatte Simon ein grosses Rechenbuch zum Drucke vorbereitet, von welchem er in der Vorrede mit stolzem Selbstbewusstsein sagt: „Denen Nichts dann was in jren Affenmodel gegossen wirdt, behagt und gefellt, wil ich hiemit gesagt haben, dass sie diese meine Arbeit, so lang auss jhrer Werckstat ein bessere komme, ungetadelt ligen lassen. Thu mich hierauff Gott dem Allmächtigen und dem Leser befehlen.“ Mancherlei Hindernisse waren Schuld, dass dieses Werk erst 1560 erschien, während ein Auszug 1557 veröffentlicht wurde. Bald wurde eine neue Ausgabe nothwendig, welcher Simon Jacob auch eine Geometrie beifügen wollte, da starb er am 24. Juni 1564. Der Bruder und Testamentserbe, Rathschreiber Pancratius Jacob, hielt es für seine Pflicht, die Absicht des Verstorbenen zu erfüllen, wozu in dessen Nachlasse das Material bereit lag. Seiner vom 24. August 1565 datirten Vorrede und dem auf diese Vorrede folgenden Leichencarmen des Magister Struppius entnehmen wir diese Notizen. Die Ausgabe, die uns zur Verfügung stand, gehört der Heidelberger Universitätsbibliothek an. Es ist ein stattlicher Quartband von über 700 Seiten mit dem Titel: „Ein new und wolgegründt Rechenbuch, auff den Linien und Ziffern, sampt der Welschen Practic und allerlei Vortheilen, neben der Extraction Radicum, und von den Proportionen, mit vielen lustigen Fragen und Aufgaben. Dessgleichen ein vollkommener Bericht der Regel Falsi, mit neuwen Inventionibus, Demonstrationibus, und Vortheilen, so biss anher für unmäglich geschetzt, gebessert, dergleichen noch nie an Tag kommen. Und dann von der Geometria, wie man mancherlei Felder und Ebene, auch allerlei Corpora, Regularia und Irregularia, messen, Aream finden und rechnen soll. Alles durch Simon Jacob von Coburg, Bürger und Rechenmeister zu Franckfurt am Mayn mit fleiss zusammengetragen und jetzt zum zweiptenmal getruckt. Getruckt zu Franckfurt am Mayn, bei Matthes Becker, In Verlegung Christian Egenolphs Erben, Anno 1600.“

Der Verfasser dieses Werkes lehrt nun allerdings Mancherlei, von welchem wenigstens in den Rechenbüchern Adam Riese's Nichts enthalten ist, während er das von Jenem behandelte Material durchaus beherrscht. Wir erwähnen als Beiden gemeinsam die Regula falsi, welche eine Darstellung des Rechnens im 16. Jahrhundert mehr als nur nennen (S. 24) musste. Wir erwähnen die von Herrn Kuckuck (S. 19) hervorgehobene Subtractionsmethode, wornach die dekadische Ergänzung einer Ziffer des Subtrahenden der entsprechenden Ziffer des Minuenden beigefügt wird, eine Methode, welche aber auch schon am Schlusse des 15. Jahrhunderts bei Johannes Widmann, sowie in der „Summa“ des Luca Pacioli vorkommt, wie Drobisch in seinem nicht genügend bekannten, überaus inhaltreichen Programm *De Joannis Widmanni Egerani compendio* (Leipzig 1840) auf S. 21 nachgewiesen hat. Von Eigenthümlichkeiten Simon Jacob's gegenüber Adam Riese erwähnen wir Wurzelausziehungen der verschiedensten Grade, erwähnen aus dem geometrischen Theile das Kunstwort Corauscus definirt als „eine Linie, so mit dem Basi Parallel oder gleichweitig ist". Wir haben es hier mit einer neuen Form des Wortes *caraustus* zu thun, welches von der Zeit der Agrimensoren bis zur *Margaritha philosophica* an den verschiedensten Orten sich findet, und welches von Gottfr. Hermann offenbar richtig als latinisirt aus dem griechischen Worte κορυστὸς (*sc.* γραμμή) gedeutet worden ist (vergl. Drobisch *l. c.* S. 30 in der Note). Wir erwähnen in derselben Richtung die wälsche Praktik, die wir Herrn Kuckuck's Behauptung (S. 24) widersprechend in dem Exemplar von Adam Riese's Rechenbuch, welches wir benutzen, nicht finden, womit übrigens nur eine offenkundige Verschiedenheit der vielen Ausgaben untereinander hervorgehoben sein soll. Auch die wälsche Praktik scheint uns historisch so bedeutsam, dass Herr Kuckuck sich nicht mit dem Namen derselben hätte begnügen dürfen. Sie besteht dem Gedanken nach in einer Zerlegung eines gebrochenen Multiplicators in eine Summe von sogenannten Stammbrüchen, d. h. von Brüchen mit Einheitszählern, wodurch die Multiplication in leichte Divisionen und eine nachfolgende Addition umgesetzt wird, ein Verfahren, welches die Geschichte der Rechenkunst als das älteste bei Bruchrechnungen auftretende kennen lehrt, welches aber bei dem sogenannten kaufmännischen Rechnen auch heute noch empfohlen zu werden pflegt, und für welches sich in England sogar der an „wälsche Praktik" erinnernde Name *Practice* erhalten hat. Besonders gepriesen und in zahlreichen Beispielen auseinandergesetzt finden wir es in einem andern Werke des 16. Jahrhunderts, nämlich bei Johann Krafft, „Bürger zu Memmingen, dieser Zeit Teutscher Schul Modist und Rechenmeister zu Ulm", der 1591 bei demselben Drucker, aus dessen Werkstätte Simon Jacob's Buch hervorging, ein Rechenbuch erscheinen liess.

Diese wenigen Bemerkungen, welche keineswegs auf Vollständigkeit Anspruch machen und zudem nur auf deutsche Verhältnisse sich beziehen, mögen den Ausspruch rechtfertigen, dass Herr Kuckuck seiner Abhandlung nicht wohl den Titel beilegen durfte, welchen sie trägt. Als das betrachtet, was sie ist, als Auszug aus den Büchern von Johann Albert und Adam Riese, an welchen manche beiläufige Notiz sich noch anfügt, ist sie dagegen ein recht schätzbarer Beitrag, welchem wir viele Leser wünschen.

Cantor.

Ueber Schwingungen verbundener Pendel, von W. Dumas. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1874.

In etwas aphoristischer Weise werden zunächst allgemein die Differentialgleichungen ohne Rücksicht auf Widerstände und für den Fall aufgestellt, dass alle Schwingungen in derselben Verticalebene erfolgen. Die Integration derselben erfolgt unter Vernachlässigung aller solcher Glieder, die bei kleiner Schwingungsamplitude aller Pendel ebenfalls sehr klein ausfallen. Alsdann wird die Aufgabe umgekehrt, indem die Bedingungen ermittelt werden, denen die Construction eines zusammengesetzten Pendels genügen muss, damit es gegebene Schwingungszustände darbiete. Schliesslich werden noch die beiden gesonderten Fälle betrachtet; dass entweder nur ein Haupt- und ein Nebenpendel vorhanden ist, oder dass sämmtliche Nebenpendel gleiche Schwingungsperiode besitzen und hinsichtlich ihrer Massen bedeutend gegen die des Hauptpendels zurückstehen.

Freiberg, 25. November 1874. Th. Kötteritzsch.

Neuere Untersuchungen über die Identität von Licht und strahlender Wärme, von Franz. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1874.

Das vorliegende kurze Schriftchen von nur 14 Seiten gr. 8°. enthält in engem Rahmen die klare, lichtvolle und umfassende Darstellung der geschichtlichen Entwickelung der heutigen Ansicht, dass Licht und Wärmestrahlen ihrer physikalischen Natur nach identisch sind. Es ist mit Recht Gewicht darauf gelegt, dass im Anfange sich grosser Widerspruch gegen eine solche Ansicht erhob, dass aber doch experimentelle Nachweise unbedingt zu dieser Ansicht zwingen, trotzdem der menschliche Organismus für beide Naturerscheinungen verschiedene Apparate zur Wahrnehmung zu benützen scheint. Es versteht sich von selbst, dass auch die übrigen Identitätsbeweise von Licht und Wärmestrahlen, die sich auf die Interferenz- und Polarisationserscheinungen beziehen, in das gehörige Licht gestellt sind. Rühmenswerth muss noch besonders der reiche Literaturnachweis anerkannt werden.

Freiberg, 3. December 1874. Th. Kötteritzsch.

Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, nach den Methoden der neueren Algebra (Invariantentheorie) behandelt von Dr. Hugo Rosenow. Breslau 1873. Verlag von Maruschke und Berendt.

Der Inhalt der uns vorliegenden, drei Druckbogen starken Abhandlung ist in der Ueberschrift deutlich angegeben. Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in Beziehung zu setzen zu drei binären cubischen Formen, und wie sehr eine solche Untersuchung zeitgemäss war, ergiebt das gewiss nur zufällige Zusammentreffen, dass Herr B. Igel in Wien sich genau dieselbe Aufgabe stellte, deren Lösung unter dem Titel: „Ueber ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt", datirt vom 13. Januar 1873, in den Mathematischen Annalen Bd. VI, S. 632—642, abgedruckt ist. Beide Verfasser kommen wie in der Methode, so in den Ergebnissen zu Aehnlichem, nur dass die Rosenow'sche Abhandlung, wie sich aus ihrem fast fünffachen Umfang im Voraus errathen liess, vollständiger und in sorgfältigerer Ausführung auf die in Frage kommenden Dinge eingeht. Sie verdient deshalb Allen empfohlen zu werden, welche ein Beispiel der Anwendung der modernen algebraisch-geometrischen Methoden auf eine bestimmte Aufgabe in fasslicher Form kennen zu lernen wünschen.

Cantor.

Directe Deduction der Begriffe der algebraischen und arithmetischen Grundoperationen aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe, von Josef Finger, Professor an d. Staats-Oberrealschule in Laibach. Laibach 1873. Druck und Verlag von Ignaz v. Kleinmayr und Fed. Bamberg. 26 S.

Um dem Verfasser dieser kleinen Monographie gerecht zu werden, müssen wir zunächst aus der Vorrede uns darüber vergewissern, was die Absicht bei ihrer Veröffentlichung war. Die Abhandlung soll den Uebelständen der meisten Lehrbücher begegnen, welche zum grossen Theil daraus hervorgehen, dass die Begriffe von Zahl, von Grösse und von Verhältniss nicht deutlich genug erläutert werden; sie soll als eine bessere Einleitung in die Algebra dienen, als man sie zu finden gewöhnt ist. In unseren Lehrbüchern befriedigt nach Herrn Finger's Ansicht diese Einleitung weder den Schüler, noch den Lehrer. „Der Grund hiervon liegt lediglich in der Menge schwülstiger, vieldeutiger Erklärungen, die dem Schüler ganz unverständlich sind, und ich möchte fast sagen, oft auch dem Verfasser selbst nicht deutlich sind." Wer in dieser Form, welcher das Prädicat der Schroffheit nicht leicht vorzuenthalten ist, über die grosse Menge unserer Schulbücher den Stab bricht, von dem kann man verlangen, dass er auch vollständig leiste, was er verspricht, dass er nämlich „dem Schüler nicht unverständlich bleibe und ihm durch Anleitung zum selbstständigen Denken Vergnügen gewähre". Wir fürchten, dies dürfe Herrn Finger nicht in dem von ihm beabsichtigten Maasse gelungen sein. Der Anfänger wird kaum zu verstehen vermögen, was Herr Finger ihm bietet, und dem weiter Vorgeschrittenen erschwert der Verfasser gleichfalls das Verständniss schon dadurch, dass er Wörter von so weiter Verbreitung, wie Arithmetik und

Algebra, in einem Sinne gebraucht, welcher dem Referenten wenigstens ganz neu war. Die Definition lautet nämlich: „Die Rechnungsoperation heisst eine „„algebraische““, wenn die gegebenen Elemente durchwegs oder zum Theil Grössen sind, eine „„arithmetische““, wenn dieselben durchwegs Zahlen sind“ (S. 10, § 8). Neben dieser Neuerung, welche zu rühmen wir keine Veranlassung finden, ist hervorzuheben, dass der Satz von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Theile einer Summe in die Definition der Grösse (S. 6, § 1, Nr. 2) mit hineingezogen wird, wodurch allerdings die Nothwendigkeit eines Beweises dieses Satzes wegfällt. Als neu dürfen wir ferner bezeichnen die Unterscheidung von Quotient und Verhältniss (S. 11, §§ 16 und 18), indem Quotient die Masseinheit ist, sofern die gemessene Grösse und die Masszahl der letzteren bezogen auf die erstere als Einheit bekannt sind, Verhältniss dagegen die Masszahl ist unter vorausgesetzter Kenntniss der Masseinheit und der gemessenen Grösse. Auf Zahlen übertragen, wird man hiernach unter Kenntniss des Productes zweier Factoren und des ersten derselben den einen, unter Kenntniss des Productes und des zweiten Factors den andern Namen für den gesuchten noch übrigen Factor zu benutzen haben. Erst der Beweis der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Zahlenfactoren gestattet dann in der Arithmetik die fünf Rechnungsoperationen (Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Verhältniss) durch Zusammenfallen der beiden letztgenannten auf vier Rechnungsarten zurückzuführen.

CANTOR.

La théorie des parallèles selon les géomètres Japonais mise en ordre par Claudel. Bruxelles 1875.

Von den 13 Druckseiten dieser im Selbstverlage des Verfassers erschienenen kleinen Abhandlung gehören vier der Vorrede an, in welcher unter der leicht durchsichtigen Verkleidung als Japanese tadelnde Bemerkungen über die üblichen, nichts weniger als strengen Begründungen der Parallelentheorie ausgesprochen werden. Dieser Tadel wird wohl bereitwilligen Anschluss finden, da vielleicht bis auf den heutigen Tag, auch nach Herrn Claudel's Veröffentlichung, keine Parallelentheorie existirt, die einem andern Mathematiker, als dem, der sie erfunden, völlig Genüge leistete. Die Maske aber wird ebenso ein Jeder sofort als das erkennen, was sie ist und als was sie Herr Claudel selbst auf unsere briefliche Interpellation zugestanden hat, als an sich unschuldiges Reizmittel der Neugier, um einem einigermassen verrufenen Gegenstande Leser zuzuwenden. Wiewohl wir durch unser obiges kurzgefasstes Urtheil schon erklärt haben, dass Herrn Claudel's Theorie uns nicht befriedige, wollen wir dieses Urtheil näher begründen, um zu zeigen, dass wir nach Descartes' Empfehlung Uebereilung wie Voreingenommenheit zu vermeiden gesucht haben. Eine Parallelentheorie aufstellen wird immer soviel heissen, als den Entwurf eines Lehrkörpers der Geometrie bis jenseits der Einführung der Parallellinien liefern. Einen solchen Entwurf bietet uns auch der Verfasser. Er geht aus von der Geraden und der Ebene und denjenigen Linien und Flächen, die nicht gerade, die nicht eben, oder, wie er lieber sagt, die nicht **einfach** sind. Die Gerade (Ebene) ist ihm die Linie (Fläche), welche sich selbst überall und in jeder Weise identisch ist, welche, wie man auch ein Stück von ihr auf das andere lege, mit sich zur Deckung gebracht werden kann. Daraus folgt, dass zwischen zwei gegebenen Punkten nur eine Gerade verläuft; dass es überhaupt nur eine Gerade giebt; dass alle Geraden durchaus zusammen fallen, wenn sie mit zwei Punkten aufeinanderliegen; dass eine Gerade, welche zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, ganz in diese hineinfällt; dass zwei Ebenen, welche zwei Punkte miteinander gemein haben, noch unendlich viele andere Punkte theilen, welche sämmtlich der Verbindungsgeraden jener beiden Punkte angehören; dass zwei Ebenen, die mit drei ihrer Punkte zusammenfallen, ganz zusammenfallen. Alle diese Sätze erkennen wir als bewiesen an, wenn auch manche Ausdrucksweise schärfer gefasst sein dürfte, wie auch im weiteren Verlauf mitunter die Bedingung als selbstverstanden unterdrückt ist, dass gewisse Geraden derselben Ebene angehören sollen. Der Satz dagegen, dass die Gerade AB kürzer sei als die gleichfalls aus geraden Theilen bestehende gebrochene Linie $ADCEB$ zwischen denselben Endpunkten, ist von einem sein sollenden Beweise begleitet, der gar Nichts beweist. Man kann ja gut und gern zugeben, was Herr **Claudel** fordert, dass nacheinanderfolgendes Auflegen eines als Maassstab dienenden geraden Stückchens in der Richtung AD nimmermehr nach B führe, dass dasselbe negative Ereigniss, ein Sichentfernen von B, die Folge des Ueberganges auf die DC, auf die CE wäre, wenn man auf jenen Linien bliebe, dass erst auf der EB nach B zu gelangen ist, und wenn man das Alles zugegeben hat, so folgt keineswegs, dass $AD + DC + CE + EB > AB$ ist. Herr **Claudel** schliesst weitere Sätze an, deren Beweise er verschweigt, indem er sich mit der Angabe ihrer Reihenfolge begnügt. Dreiecke, sagt er, sind congruent bei Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, bei Gleichheit einer Seite und der beiden anliegenden Winkel, bei Gleichheit der drei Seiten. In einem Punkte einer Geraden lässt sich nur eine Senkrechte erheben. Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden lässt sich nur eine Senkrechte auf sie fällen. Rechtwinklige Dreiecke sind congruent vermöge der Gleichheit der Hypotenuse und eines spitzen Winkels. Kann man wirklich mit keinen weiteren Vorkenntnissen versehen, als sie soweit geschildert wurden, beweisen, dass von einem Punkte ausserhalb einer Geraden nur eine Senkrechte auf sie möglich ist? Wir müssten den Beweis selbst gesehen und geprüft haben, um daran zu glauben. Und dennoch stützt sich auf diesen Satz und auf die Definition: Parallellinien sind solche, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, der Beweis dafür, dass Parallellinien sich niemals treffen können, weil sonst von ihrem Durchschnittspunkte aus zwei Senkrechte zu einer Geraden gezogen wären. Eine Erschleichung einer geometrischen Wahrheit liegt demnach bereits dem Anfange der Entwickelung zu Grunde. Nicht besser verhält es sich mit der Fortsetzung. Wenn der Beweis des Satzes, dass jede Senkrechte zu einer Parallelen auch die andere Parallele treffe, mit den Worten beginnt, man werde doch von irgend einem Punkte P aus eine Senkrechte ziehen können, welche beide Parallelen treffe, so ist auch das eine Voraussetzung ohne jede Rechtfertigung. Möchten daher auch — was aber nicht behauptet werden soll — die weiteren Folgerungen bis zum euklidischen Postulate, dass zwei Gerade sich schneiden, welche mit einer gemeinsamen Transversale verschiedene Richtungsunterschiede haben, noch so streng sein, wir könnten darum doch in dem neuen Versuche keine Parallelentheorie erkennen, welche voraussetzungslos Alles bewiese. Die Auswahl der Erfahrungssätze, welche an die Spitze der Geometrie zu stellen sind, mag bis zu einem gewissen Grade Geschmackssache sein; die Thatsache, dass solche Erfahrungssätze an der Spitze stehen, kehrt regelmässig wieder, nur dass der Verfasser sich dessen mehr oder weniger bewusst erscheint. Auch Herr Claudel hat diesem Gesetze sich nicht entziehen können; auch er hat, wie wir sehen, zwei bis drei unbewiesene, weil unbeweisbare Vordersätze nöthig, auf welche er sich zu stützen hat.

Cantor.

Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie, von Baron N. Dellingshausen. Heidelberg, Carl Winter's Universitätsbuchhandlung. 1874.

Das 119 Seiten 8° enthaltende Werkchen besteht aus vier gesonderten Abhandlungen, nämlich: 1. Mathematische Begründung der Vibrationstheorie der Wärme, S. 1—38; 2. Die inneren Bewegungen und ihr Einfluss auf den Aggregatzustand der Körper, S. 36—64; 3. Die Wärme, eine innere lebendige Kraft der Körper, S. 65—96, und 4. Die chemische Wärme der Körper, S. 97—119. Der Zweck der Schrift ist die nähere Beleuchtung und Ausführung einiger Theile in des Verfassers vorausgegangenem Werke: „Grundzüge einer Vibrationstheorie der Natur", 1872. Ueber die einzelnen vier gesondert dastehenden Abhandlungen müssen wir auch gesondert unser Urtheil abgeben.

Der erste Theil der ersten Abhandlung hat es zu thun mit der bekannten mathematischen Behandlung unendlich kleiner Schwingungen und deren Zusammensetzung. Da sich stehende Wellen bilden sollen, indem jeder Wellenzug an der Begrenzung eines Körpers reflectirt wird, so wird jedenfalls erfordert, dass die Wellenlänge ausserordentlich (unendlich) klein sei, weil sonst für verschiedene Dimensionen des Körpers das Entstehen stehender Wellen bei unveränderlicher Schwingungszeit (wie sie der Verfasser fordert) unbegreiflich erscheint. Die Körperwärme oder, wie der Verfasser sagt, ruhende Wärme soll aus longitudinalen, die gestrahlte aus transversalen Schwingungen bestehen. Wenn aber ein Körper beim Abkühlen Wärme ausstrahlt, wie kommt es, dass dann die longitudinalen Schwingungen in transversale übergehen? Weiter heisst es S. 38: „Die Schwingungsdauer der Wärmevibrationen eines Körpers ist somit im Allgemeinen unveränder lich und für jeden Körper genau bestimmt.“ Wie aber stimmt dies mit der Thatsache überein, dass ein immer höher erhitzter Körper auch Strahlen von immer kleinerer Wellenlänge aussendet? Ueber alle diese eben genannten Einwände bleibt der Verfasser die Antwort schuldig.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich in ihrem ersten Theile wiederum mit der mathematischen Betrachtung unendlich kleiner Schwingungen und enthält da nicht gerade Neues. Was weiter gesagt ist zur Erklärung von Krystall- und Aggregatsform, besteht nur in aneinandergereihten unwahrscheinlichen Behauptungen ohne Beweis.

Die dritte Abhandlung geht davon aus, dass die Wärme eine innere lebendige Kraft der Körper sei. Es werden nur die permanenten Gase als Beispiele der Rechnung zu Grunde gelegt und die gefundenen Resultate sind der Hauptsache nach identisch mit den längst bekannten der mechanischen Wärmetheorie. An einer Stelle, wo sich eine Differenz mit der von Clausius berechneten Geschwindigkeit der Gasmoleküle herausstellt, ist dieselbe einfach constatirt, nicht erklärt.

Die vierte Abhandlung endlich, welche sich mit der chemischen Wärme der Körper beschäftigt, versteht unter dieser Wärme die calorimetrisch messbare, die sich bei Entstehung der betreffenden chemischen Verbindung ergiebt. Da diese Wärme eine ganz andere Schwingungsamplitude der componirenden Körper verlangt, als die früher (Abhandlung 3) berechnete ist, so wird sie erklärt durch die Interferenz stehender Wellen.

Freiberg, 3. Februar 1875. TH. KÖTTERITZSCH.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 28. Februar 1875.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 19. Bd. (1874). Göttingen, Dieterich. 36 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1874. 2. Bd., 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 1875, Nr. 1—3. Wien, Gerold. pro compl. 3 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Ohrtmann, Müller und Wangerin. 4. Bd. 1872. 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 3 Mk. 60 Pf.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff. Jahrg. 1875. (154. bis 157. Bd.) Nr. 1. Leipzig, Barth. pro compl. 31 Mk.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, redigirt von C. Jelinek und J. Hann. 10. Bd. (1875). Nr. 1. Wien, Braumüller. pro compl. 9 Mk.

Bremiker, C., Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1877. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Du Bois-Reymond, P., Beweis für die Form der Coefficienten in der Fourier'schen Reihe. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 70 Pf.

Bardey, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Theile der Elementarmathematik. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Zwicki, M., Leitfaden für die Elemente der Algebra. 1. Heft, 4. Aufl. Bern, Dalp. 35 Pf.

Adam, W., Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra. 2. Thl. Neu-Ruppin, Petrenz. 1 Mk. 70 Pf.

Ott, C. v., Fünfstellige Logarithmentafeln. Prag, Calve. 1 Mk. 80 Pf.

Ribi, D., Aufgaben über die Elemente der Algebra. 1. Heft, 3. Aufl. Bern, Dalp. 25 Pf.

Herrmann, G., Das graphische Einmaleins. Braunschweig, Vieweg. 1 Mk. 20 Pf.

Rumpelt, Elemente der Planimetrie. Breslau, Gosohorsky. 2 Mk.

Brockmann, F. J., Lehrbuch der elementaren Geometrie. 2. Thl.: Die Stereometrie. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Pfaff, W., Die Curven der ebenen Kegelschnitte und ihre Projectionen. Cassel, Freyschmidt. 12 Mk.

Angewandte Mathematik.

Staudigl, R., Die axonometrische und schiefe Projection. Wien, Seidel & Sohn. 4 Mk.

Leipoldt, G., Ueber die mittlere Höhe Europas. Plauen, Neupert. 2 Mk.

Reuleaux, F., Theoretische Kinematik. 2. Abth. (Schluss). Braunschweig, Vieweg. 10 Mk.

Puluj, J., Ueber die Reibungsconstante der Luft als Function der Temperatur. 2. Abhandl. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Stürmer, C. M., Sonnentafeln nach Leverrier's Elementen berechnet. Würzburg, Staudinger. 4 Mk.

Hermann, L., Ueber den schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen und über eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystall-Linse. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 1 Mk. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

Lang, V. v., Krystallographisch-optische Bestimmungen. III. Abth. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Puschl, C., Ueber eine Modification der herrschenden Gastheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Weber, H. F., Die specifischen Wärmen von Kohlenstoff, Bor und Silicium. 1. Abth. Stuttgart, Metzler. 1 Mk.

Boltzmann, L., Ueber die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des kryst. Schwefels nach verschiedenen Richtungen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Menzel, R., Wandtafeln für den physikalischen Unterricht. 3. u. 4. Lief. Breslau, Morgenstern. à 3 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Otto Hesse

(geb. in Königsberg am 22. April 1811, gest. in München am 4. August 1874).

Von

Prof. M. NOETHER

in Erlangen.

Innerhalb zweier Jahre hat die deutsche algebraisch-geometrische Wissenschaft ihre beiden grössten Vertreter verloren: seinem so früh dahingeschiedenen Schüler Alfred Clebsch ist der Altmeister Otto Hesse jetzt nachgefolgt. Wir können in dieser Reihe noch den dritten analytischen Geometer anführen, der in Deutschland mit den Synthetikern Möbius und Steiner schon an der Spitze der aufstrebenden Wissenschaft stand und mit ihnen vereint der Geometrie einen wesentlichen Gehalt gab, den vor sechs Jahren einer wieder neu aufgenommenen geometrischen Thätigkeit entrissenen Julius Plücker (1801—1868).

Dem Verdienste dieses Letzteren hat Clebsch eine ausführliche Darstellung gewidmet*, welche auch die Entwickelung der die Geometrie beherrschenden Principien eingehend verfolgt. Auf Hesse, der, wie nach ihm Clebsch selbst, vor Allem Algebraiker war, wird dabei mehr nur wie im Gegensatz zu Plücker hingewiesen. Aber die wissenschaftliche Thätigkeit Hesse's weist in ihrer wichtigsten Seite zunächst auf Jacobi (1804—1851) hin, dessen Schüler im eminenten Sinne des Wortes Hesse war. Und während die späteren Entwickelungen gerade dieser Richtung durch die Darlegung der Arbeiten Clebsch's bereits eine eingehende Behandlung erfahren haben**, erscheint es auch nothwendig, diese Richtung

* A. Clebsch: „Zum Gedächtniss an Julius Plücker." Bd. 16 der Abh. der Gött. Akad. d. Wiss.

** Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen. Von einigen seiner Freunde. (Leipzig, Teubner 1873, aus Math. Ann. VII.)

noch weiter zurück zu verfolgen. Aus diesem Bedürfniss ist der vorliegende Versuch einer Würdigung der Arbeiten Hesse's hervorgegangen.

In der That muss aber bei diesem successiven Zurückverfolgen des historischen Zusammenhanges eine neue Lücke fühlbar werden. Wir können die Beziehungen der Hesse'schen Arbeiten zu denen Jacobi's nicht erledigen, ohne eine Darlegung dieser letzteren auch von algebraischer Seite her vorauszusetzen, wie es für die functionentheoretischen Arbeiten dieses Meisters in der Dirichlet'schen Gedächtnissrede* geschehen ist. Wenn wir also auch jene Beziehungen hier nur unvollkommen anführen können, so bleibt doch unsere eigentliche Aufgabe die Würdigung der Arbeiten Hesse's an sich; und diese wird durch deren ausgesprochene Eigenart und durch den Umstand, dass deren tiefgreifende Einwirkung auf die Entwickelung der Wissenschaft sich rasch vollzogen hat und im Ganzen beendet ist, eine verhältnissmässig einfache.

Diesem Umstande gemäss ist auch die Stellung Hesse's selbst eine anerkannte; und so mögen wir hier schon genauer bezeichnen, worin die Bedeutung desselben beruht. Es ist Hesse, der zuerst erkannt hat, dass die Theorie der homogenen Formen das von aller Geometrie losgelöste Untersuchungsfeld für den Algebraiker bildet, wobei dann die Resultate der Forschung ihre Interpretation in denjenigen geometrischen Eigenschaften der algebraischen Curven und Flächen finden, welche wir die projectivischen nennen. Er hat weiterhin jene Theorie auch wirklich eingeleitet, indem er wenigstens die nächste der von einer Grundform abhängigen Formen, die Determinante, welche jetzt Hesse's Namen trägt, aufstellte und ihre Bedeutung in wichtigen Problemen der Elimination und Geometrie systematisch verfolgte. So knüpfen die ersten Begriffe und die erste Entwickelung der Invariantentheorie an Hesse an. — Sehen wir zunächst, wie dessen Arbeiten selbst auf Jacobi zurückführen.

Die Arbeiten Jacobi's, die nach so vielen Seiten hin bahnbrechend gewirkt haben, sind für diejenigen Hesse's in zwei Richtungen von unmittelbarem Einfluss geworden: zunächst durch ihren gedanklichen Inhalt in den algebraischen Problemen, die sie behandeln, sodann durch die analytischen Methoden, die theils als Hilfsmittel bei Untersuchungen mannichfaltiger Art, theils auch als selbstständige Darstellungen, wie jene der Theorie der Determinanten (1841, Journal Crelle 22), auftreten. Es ist übrigens unmöglich, diese beiden Richtungen in ihrem Einflusse getrennt zu verfolgen. Denn überall zeigt sich bei Jacobi die originale Kraft, die zur Behandlung neuer Probleme neue Hilfsmittel ersinnt oder vorhandene verallgemeinert; und es zeigt sich auf der andern Seite, wie im Anschlusse an die Entwickelung selbst sich auch der Gedankenkreis nach und nach

* Journal Crelle, 52.

erweitert und auseinanderliegende Gebiete Zusammenhang gewinnen. Wir brauchen in diesem Sinne nur an die Vereinfachungen zu erinnern, welche Jacobi z. B. dem Pfaff'schen Probleme und dem der zweiten Variation zu Theil werden liess, um die Quelle genau bezeichnen zu können, aus der er einen wesentlichen Theil seiner folgenreichen Resultate schöpfte: die Macht einer methodisch gebildeten und der Verallgemeinerung fähigen Analyse.

Obwohl diese Art der Ideenerweiterung in keiner der umfassenden Arbeiten Jacobi's zu verkennen ist, so muss eine solche Behandlung doch vor Allem in den algebraischen Untersuchungen hervortreten. Wir denken hier zunächst an diejenigen über die lineare Transformation quadratischer Formen, an die sich die erste Entwickelung der Ideen Hesse's und auch vorzüglich die späteren systematischen Darstellungen der analytischen Geometrie in dessen Lehrbüchern anschlossen. Bei Jacobi erscheint das Problem im Gefolge von Fragen über Transformation vielfacher Integrale (1832, 1833, J. Cr. 8, 10, 12); und wir sehen dabei neben einer fortlaufenden Ausbildung des Determinantencalculs andere weitreichende Hilfsmittel entstehen, wie die elliptischen Coordinaten, die Jacobi über den von Cauchy eingenommenen Standpunkt (*Exerc. de Mathém. t. IV*) hinausführen.

Aus diesen formell vollendeten Arbeiten Jacobi's leiten wir vor Allem den in Hesse's Darstellungen überall hervortretenden Zug ab, die wirkliche algebraische Ausführung an Stelle blosser Deductionen zu setzen, und weiterhin insbesondere die Methode der Zurückführung allgemeiner Formen auf specielle, canonische, aus denen die Eigenschaften der allgemeinen Formen sich ablesen lassen.

Zu dieser Anregung hat sich für Hesse noch als zweite der Einfluss der neuen geometrischen Grundideen, soweit sie in den Werken von Poncelet und Steiner sich enthüllten, gesellt, und ihre Vereinigung erst hat ihm die individuelle Richtung gegeben. Die ersten Arbeiten Hesse's behandeln, abwechselnd auf dem Wege geometrischer Construction und auf analytischem Wege durch Transformation homogener Formen, die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. An Poncelet'sche Entwickelungen über conjugirte Linien dieser Flächen anknüpfend, wird eine Construction ihrer Hauptaxen geliefert (1837, J. Cr. 18); und dann entstehen die Begriffe der Polardreiecke und der Polartetraeder, der „Systeme conjugirter Punkte" (1840, J. Cr. 20), und die Beziehungen zwischen zweien solcher Systeme, als Interpretation analytischer Relationen. Aus diesen Betrachtungen ist die lineare Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung aus sieben gegebenen Schnittpunkten (J. Cr. 20, 26) hervorgegangen, und ferner, in Anlehnung an Steiner'sche Sätze, die lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten (1842, J. Cr. 24). — Hesse ist erst später und nur gelegentlich, wie bei Ausarbeitung des Lehrbuches über Raumgeometrie, auf die quadratischen Formen zurückgekommen. Aber wenn er auch ihre Theorie nicht eigentlich weitergeführt hat, was erst durch Weierstrass (1858) und in Arbeiten, die sich an diesen anschliessen, geschah, so hat er doch noch eine wichtige Anwendung derselben, die auf die Transformation der zweiten Variation eines einfachen Integrals mit einer zu bestimmenden Function, wesentlich gefördert (1857, J. Cr.-Borch. 54). Dem Vorgange Jacobi's folgend, und unter umfassender Anwendung der algebraischen Hilfsmittel, gelang ihm der Beweis der schon oben erwähnten, von diesem gegebenen Reduction des Problems, was dann weiter zur Inangriffnahme und zur Lösung des allgemeinen Problems der Variationsrechnung die Anregung lieferte*.

Von dem tiefsten Einflusse auf den Fortschritt der Wissenschaft ist eine andere Anregung geworden, die Hesse aus den Jacobi'schen Arbeiten empfing. Um die algebraische Operation fähig zu machen, den Gedankengehalt der Geometrie in sich aufzunehmen und die Probleme in eigener freier Gestaltung auszuführen, war vor Allem eine weitere Ausbildung der Theorie der Elimination der Variabeln aus mehreren Gleichungen nothwendig. Im 15. Bande von Crelle's Journal (1835) hatte Jacobi die Eliminationsmethode von Euler und Bézout, welche die Aufgabe für zwei Gleichungen n^{ten} Grades auf die Elimination aus einem System linearer Gleichungen zurückgeführt hatten (der erstere durch successive Eliminationen, der zweite auf directerem Wege), neu dargestellt und die Resultante als n-reihige Determinante gegeben. Aber diese Abhandlung discutirt auch ausführlich die Beziehungen zwischen den in die Formeln eingehenden Coefficientenaggregaten und insbesondere die Gleichungen, welche die Resultante selbst, und ihr Product mit einer bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Function, als Functionen der gegebenen beiden Formen darstellen.

Es lässt sich nun verfolgen, wie sich an diesen letzteren Gedankengang die Entwickelung der Eliminationstheorie anschliesst. Dem Charakter des analytischen Verfahrens entsprechend, strebt diese Ausbildung auch hier grössere Allgemeinheit dadurch an, dass sie nach und nach das von der zufälligen Gestalt der einzelnen Aufgabe Abhängige abstreift. Wenn die Schöpfung solcher Methoden auch einen tiefen Einblick in das Wesen des Problems voraussetzt, so zeigt sich doch, wie sich derselbe erst später, bei fortgesetzter Anwendung, zu völligem Verständniss erhebt.

Nachdem Hesse 1843 selbstständig auf die schon früher von Sylvester erhaltene, von diesem als „dialytische“ bezeichnete Methode der Elimination aus zwei Gleichungen, eine Modification des obengenannten Verfahrens, gekommen war, tritt nun in seiner wichtigsten Arbeit „Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen zweiten

* Vergl. die oben citirte Schrift über Clebsch, S. 7.

Grades mit zwei Variabeln" (Jan. 1844, J. Cr. 28) und in der unmittelbar folgenden Abhandlung über die Wendepunkte der Curven, der Gedanke klar hervor: nicht die Darstellung der Endgleichung an sich, sondern der Einblick in die Natur der Functionen, aus denen sie sich zusammensetzt, muss das Ziel sein. So wird denn die einfachste der von den drei quadratischen Grundformen abhängigen Formen, ihre Functionaldeterminante, gebildet und eine beliebige weitere Function dritten Grades linear durch diese vier Formen ausgedrückt, wodurch das Problem zunächst auf ein System linearer Gleichungen zurückgebracht wird. Indem aber weiter die quadratischen Formen sich als Polaren einer neuen Form dritten Grades ergeben, zeigt sich das Problem als zur Theorie einer cubischen ternären Form gehörig, und nun sehen wir, wie sich aus der frühern Eliminationsaufgabe die Theorie einer solchen Form, d. h. der Curven dritter Ordnung, entwickelt. Die bezeichnete Functionaldeterminante geht in die hier zum ersten Male auftretende Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten der cubischen Form, in die Hesse'sche Determinante derselben, über. Und es folgt der Fundamentalsatz der ganzen Theorie: dass die Determinante irgend einer Form $kf + \lambda\Delta$ der linearen Schaar, welche aus der cubischen ternären Form f und ihrer Determinante Δ gebildet ist, ebenfalls eine dieser Schaar angehörige Form ist.

Von dieser Covariante Δ der Form f wird sogleich auch ihre wesentliche Eigenschaft, bei linearer Transformation invariant zu sein, zur Ueberführung von f in eine canonische Form benutzt, welche die zweiten Potenzen der Variabeln nicht mehr enthält, eine auf vier Arten mögliche Reduction. Wenn sich so für die Theorie der homogenen Formen eine erste Grundlegung ergiebt, so geht Hesse auch auf die Interpretation des Zusammenhangs der gefundenen Formen für die Geometrie ein, und er findet das wichtige Resultat, dass die Wendepunkte einer Curve n^{ter} Ordnung allgemein als vollständiger Schnitt derselben mit einer Curve der Ordnung $3(n-2)$, der durch die Determinante gegebenen Hesse'schen Curve der erstern, bestimmt werden, ein Resultat, das vorher nur für Curven dritter Ordnung von Plücker erhalten worden war. Für diese Curven dritter Ordnung selbst ergiebt sich durch die oben erwähnte Reduction die interessante Gruppirung der Wendepunkte.

Hesse hatte den Ausgangspunkt für die Ableitung des allgemeinen, auf die Wendepunkte bezüglichen Satzes in der gewöhnlichen Theorie der Krümmung der Curven genommen, die für die gesuchte Function einen Ausdruck liefert, der in den Coordinaten der Schnittpunkte um zwei Einheiten zu hoch ist. So entstand das erste grössere Beispiel der Reduction der Resultanten mit Hilfe der Gleichung der gegebenen Curve, der Herausschaffung von Factoren, die zu der eigentlichen Frage nicht in Beziehung stehen, vielmehr von der speciellen Eliminationsmethode herrühren. Man kann wohl sagen, dass mit dieser bei Eliminationsfragen immer wiederkehrenden Aufgabe eine ganze Richtung weiterer Untersuchungen angedeutet ist und dass in ihrem Gefolge sich die Invariantentheorie erst entwickelt hat.

Der einfachste Fall einer solchen Aufgabe tritt schon bei der Gleichung der Tangente einer gegebenen Curve auf, wenn die Gleichung der letzteren in nicht homogener Gestalt vorliegt. Auch jene Gleichung wird in den Coordinaten des Berührungspunktes um eine Ordnung zu hoch, aber die Einführung der homogenen Form allein genügt schon, mit Hilfe der Gleichung der Curve den linearen Factor heraustreten zu lassen. Dieses Beispiel weist also auch schon auf die Nothwendigkeit der Einführung der homogenen Formen in die algebraische Theorie der geometrischen Gebilde hin.

Ein wesentliches Mittel zur Erreichung der Reduction der Resultanten hat die von Joachimsthal J. Cr. 33 angegebene Methode, nach der man die Bestimmung der Schnittpunkte einer Curve mit einer Geraden auf zwei in dieser letztern befindliche feste Punkte bezieht, geliefert. Wir finden diese Methode, welche Curvenprobleme theilweise auf solche binärer Formen zurückführt, zuerst in einer Abhandlung von Cayley (1846, J. Cr. 34) benutzt, in der die durch Hesse angeregten Eliminationsfragen nach mehreren Richtungen fortgeführt werden. Indem hier das Problem der Wendepunkte mehr in projectivischem Sinne gefasst wird, gelangt Cayley bereits hier zur Anwendung seiner schon früher aufgestellten symbolischen Methode, und er zeigt wenigstens, dass die weiteren analogen, aber complicirteren Probleme, wie das der Doppeltangenten einer Curve, von einer Ausbildung des Invariantencalculs abhängen.*

An dem Problem der Doppeltangenten vor Allem, insbesondere derjenigen der Curven vierter Ordnung, schreitet nun die Eliminationstheorie weiter. Im 36. Bande von Crelle's Journal (1847) schlägt Hesse denselben Weg ein, den nach dem Obigen Cayley genommen hatte, führt ihn aber in der eleganten und durchsichtigen Darstellung, die allen seinen Arbeiten eigen ist, bis zur Erledigung der Reduction für die Reihe der nächstliegenden Formen durch. Er gelangt so auch zu einer Erniedrigung der von Cayley gegebenen Gleichung, welche die Berührungspunkte der Dop-

* Wir haben hier übrigens zu erwähnen, dass diese Cayley'sche Arbeit verschiedene später erhaltene Resultate schon vorweg genommen hat; so das Verhalten der Hesse'schen Determinante einer Curve in einem Doppel- oder Rückkehrpunkte der letztern (s. Hesse, Brief an Jacobi v. 27. Nov. 1849, J. Cr. 40, und Jacobi's Erwiderung); so ferner das sogenannte „Uebertragungsprincip“, das später Clebsch entwickelt hat (das man nicht mit dem von Hesse ebenso genannten, noch unten S. 87 zu besprechenden Princip verwechseln wird). Dasselbe findet sich aber für einen speciellern Fall angewandt, und es ist in der That ja auch nichts Anderes, als eine besondere Form der Anwendung der Joachimsthal'schen Methode.

peltangenten einer Curve vierter Ordnung bestimmt, ohne jedoch damals den letzten noch übrigen quadratischen Factor beseitigen zu können.

Wie sehr diese Fragen alle Kräfte zur Begründung des Problems selbst und zur Schaffung neuer Hilfsmittel anregten, wird durch einen Brief von Hesse an Jacobi (27. Nov. 1849, J. Cr. 40) gezeigt. Jacobi war ein Beweis für die Möglichkeit der Reduction der zuletzt genannten Gleichung gelungen, ein Beweis, der später in seiner einfachsten Form von Clebsch (J. Cr.-Borch. 63) dargestellt worden ist. Hesse, dem ein solcher Beweis zur „Lebensfrage" geworden war, sah sogleich den „unberechenbaren Nutzen desselben für seine eigenen Bemühungen" voraus. Aus dem nächsten Briefe vom 7. December erhellt, wie die neue Anwendung der Determinantentheorie durch Ränderung, die in den späteren Arbeiten Hesse's eine hervorragende Rolle spielt, im Entstehen begriffen ist; und noch in demselben Monat (Brief vom 30. Dec. 1849, J. Cr. 40) gelingt es endlich Hesse, die langgesuchte Gleichung 14. Grades für die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung in reiner Form hinzustellen.

Später hat Salmon eine zweite Methode für dieses specielle Problem angegeben (1858). Die weitere Entwickelung des allgemeinen Problems, die unabhängig von Hesse verlaufen ist, haben wir hier nicht zu verfolgen, um so weniger, als schon in der oben citirten Schrift über Clebsch die Weiterführung der Ideen der Invariantentheorie, zunächst von Seiten der englischen, dann der deutschen Algebraiker, ausführlich betrachtet worden ist. Es möge nur erwähnt werden, dass die wirkliche Ausführung der Reduction um Potenzen linearer Factoren erst in neueren Arbeiten (vergl. Gordan: Ueber Combinanten, Math. Ann. V), in denen die Betrachtung von Formen mit mehreren Systemen von Variabeln, der Joachimsthal'schen Methode analog, wesentlich ist, zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist, der aber für das einzelne Problem noch ein weites Feld der Untersuchung übrig lässt.

Dagegen hat Hesse die Reduction für ein weiteres specielles Problem gegeben. Er hat die Aufgabe für die Wendepunkte nochmals direct, und zwar algebraisch von einer neuen Seite her, angefasst, die seitdem auch für höhere Probleme mehrfach angewandt worden ist, nämlich durch Umformung des Determinantenausdrucks, welcher in Differentialform die Bedingung ausdrückt, dass eine Gerade drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemein hat (1849, J. Cr. 41). Und auf dieselbe Weise wird auch das erweiterte Problem behandelt und gelöst: die Gleichung der Schmiegungsebene eines Punktes einer Raumcurve, die der vollständige Schnitt zweier Flächen ist, aufzustellen. Es sind diese Darstellungen aber geeignet, noch in anderem Sinne unser Interesse in Anspruch zu nehmen. Denn die Umformungen erhalten durch die Einführung von geränderten Determinanten eine besondere Leichtigkeit, und die Darstellung wäre sogar durch consequentere Anwendung auch der mehrreihig geränderten Determinanten noch zu vereinfachen gewesen (wie später Clebsch, J. Cr.-Borch. 63, gethan). Auch ist bemerkenswerth, dass nun, was früher bei Hesse nicht der Fall ist, das Problem in durchaus projectivischem Sinne aufgefasst wird, so dass die homogenen Coordinaten ohne Rücksicht auf metrische Bedeutung auftreten, ganz in der Weise, die später Clebsch nach diesem Vorgange allgemein angenommen hat*.

Wir haben schon angedeutet, dass der Gedankenkreis, in welchem sich die zur Invariantentheorie zu rechnenden Arbeiten Hesse's bewegen, der der Untersuchung von canonischen Formen ist; eine Art der Betrachtung, die, von so wichtigen Resultaten sie für speciellere Probleme begleitet sein kann, für die allgemeine Theorie in den Hintergrund treten muss, wie das denn in der That, besonders seit den Arbeiten Aronhold's, geschehen ist. Die geometrischen Resultate für die Curven dritter und vierter Ordnung, die Hesse in einer Reihe reicher und schöner Abhandlungen niedergelegt hat, sind an solche besondere Formen von Curvengleichungen geknüpft, insbesondere an die Darstellung derselben in Form von symmetrischen Determinanten, deren Elemente lineare Functionen der Coordinaten sind. Aus der Thatsache allein, die aus der ersten der Abhandlungen (J. Cr. 28) sich ergab, dass für die Curven dritter Ordnung diese Darstellung auf dreierlei Weise möglich ist, resultirte sofort eine Menge auf die Systeme von Paaren conjugirter Punkte dieser Curven bezüglicher Sätze (1847, J. Cr. 36), sowie Sätze über die mit diesen Systemen zusammenhängenden linearen Systeme von Berührungskegelschnitten, die vielfach über die von Maclaurin, Poncelet, Plücker und Steiner gegebenen Sätze hinausgehen.

Die Behandlung solcher symmetrischen Determinanten, besonders bezüglich ihres Verhaltens bei linearer Transformation der Variabeln und ihrer Beziehungen zu solchen Determinanten, die durch Ränderung, freilich auch hier nur durch eine einzige Ränderung, aus ihnen hervorgehen, bildet von jetzt an den Kern der algebraischen Betrachtungen Hesse's. Wir mögen hierbei an den Unterschied dieses Verfahrens von demjenigen Plücker's erinnern, der vielmehr mit algebraischen Symbolen den geometrischen Constructionen nachfolgte. Dieser Gang und die daraus fliessenden Resultate für die Gruppirung der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung waren von Hesse jedenfalls spätestens 1851 gewonnen (vergl. J. Cr. 45, S. 101), aber die systematische Darstellung ist von ihm erst 1853 (J. Cr. 49) gegeben worden.

Wenn schon diese Methode auch für sich zur Aufstellung von Systemen von Berührungscurven führte und zu Sätzen, die gleichzeitig auch von Steiner (J. Cr. 49) veröffentlicht worden sind (wie auch wenige einzelne derselben vorher schon von Salmon), so wurde jene Gruppirung doch erst

* Hieraus folgte eine Modification der bezüglichen Stelle der Clebsch-Schrift, S. 14.

durch eine elegante Combination der analytischen Behandlung mit der geometrischen Anschauung völlig übersichtlich. Vermöge derselben wird das ebene Problem mit einem Problem im Raume in Verbindung gesetzt und die Beziehungen der 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung an dem Bilde der 28 Verbindungslinien von acht Punkten im Raume erläutert. Und dieses Bild ist auch für alle übrigen Verhältnisse der Curve vierter Ordnung von Bedeutung: es geht direct aus der Darstellung ihrer Gleichung in Form einer vierreihigen symmetrischen Determinante hervor. Denn betrachtet man eine zweifach unendliche Schaar von Flächen zweiter Ordnung mit acht festen Grundpunkten, so genügen die Parameter der Kegelflächen dieser Schaar einer Bedingung, welche eben als jene Gleichung einer Curve vierter Ordnung aufgefasst werden kann.

Dieser Zusammenhang führte vor Allem zu dem Nachweise, dass die besondere Gleichungsform der Curve noch auf 35 weitere, von der ersteren wesentlich verschiedene Arten hergestellt werden kann, wobei man nur eine strengere explicite Begründung des Satzes vermissen mag, dass die allgemeine Curve vierter Ordnung überhaupt die gewählte canonische Gleichungsform erhalten kann. Damit waren denn auch die zweierlei Arten von Systemen von Berührungscurven dritter Ordnung gefunden und die Einordnung der Systeme von Berührungskegelschnitten und Doppeltangenten in jene Systeme klargelegt. Einer spätern Zeit (Clebsch in J. Cr.-Borch. 63) gehört die Erkenntniss der Identität dieser Probleme mit der Theilung der zugehörigen Abel'sehen Functionen an.

Es hat sich getroffen, dass einem, gerade aus diesen geometrischen Speculationen abgeleiteten Anspruche Steiner's auf die Ueberlegenheit der synthetischen Methode durch die algebraischen Resultate Hesse's zur selben Zeit, in der er erfolgte (J. Cr. 49) auch begegnet worden ist. In der That ist auch die Grundlage der Steiner'schen Auffassung überhaupt, die projectivische Zuordnung der Gebilde, völlig identisch mit der von Plücker und Hesse angenommenen, bei welcher die Zuordnung dieser Gebilde durch lineare Beziehungen zwischen ihren variabeln Parametern vermittelt wird. Ueber die weiteren Beziehungen Hesse's zu Steiner hat sich Hesse selbst in einem Nachruf an Steiner (J. Cr.-Borch. 62, 1863) ausgesprochen: es waren für ihn die Steiner'schen Entwickelungen von unmittelbarer Anregung geworden, als „ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Functionen, die in der höhern Algebra von grosser Bedeutung sind".

In diesem Sinne hat Hesse die von ihm eingeführte Determinante einer Function besonders eingehend weiter zu erforschen gesucht. So hat er die Bedeutung ihres identischen Verschwindens, dass die gegebene Form durch lineare Transformation in eine solche von weniger Variabeln übergeführt werden kann, zwar angegeben (J. Cr.-Borch. 42 und 56); indessen existirt bis jetzt meines Wissens kein genügender und vollständiger Beweis dieses wichtigen Satzes. Weiterhin hat er auch die Determinante für die algebraische Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades verwerthet (J. Cr. 38, 41), wobei besonders in der Behandlung der binären biquadratischen Form durch den Umstand, dass ihre Determinante mit ihr vom gleichen Grade wird, die Analogie derselben mit der ternären cubischen Form hervortritt.

Indem wir die algebraischen Gleichungen erwähnen, berühren wir ein neues Gebiet, welches von den Arbeiten Hesse's bereichert worden ist. Durch Abel kannte man eine ganze Classe von algebraisch auflösbaren Gleichungen, die irreducibeln von der Eigenschaft, dass eine Wurzel von einer zweiten durch einen rationalen Ausdruck abhängt, welcher, wiederholt, alle Wurzeln liefert. Bei der Untersuchung der Wendepunkte der Curve dritter Ordnung aber, für welche vorher nur die zwölf Geraden, welche dieselben zu je drei enthalten, bekannt waren, ergab sich durch den Nachweis der vier Dreiseite, in die sich die Geraden gruppiren, ein Einblick in die besondere Natur der Gleichung neunten Grades, welche die neun Punkte bestimmt. Hiermit war nun (J. Cr. 34) eine neue Classe algebraisch lösbarer Gleichungen aufgestellt: die Gleichungen neunten Grades, für welche zwischen irgend zweien der Wurzeln und einer dadurch bestimmten dritten eine rationale Relation vorliegt, von der besondern Art, wie sie durch die Existenz der zwölf Geraden des geometrischen Problems angedeutet ist. Und es war nicht nur ihre, schon durch diese Relationen allein bedingte Zurückführbarkeit auf eine biquadratische und reine cubische Gleichungen nachgewiesen; es war auch ein geometrisches Bild für alle auf die Gruppirungen der Wurzeln bezüglichen Verhältnisse gewonnen. Solche anschauliche speciellere Beispiele haben wesentlich auf die leichtere Auffassung und auch auf die Ausbildung der an sich so abstrusen Substitutionstheorie gewirkt, deren von Galois schon bald nach den Abel'schen Untersuchungen geschaffene Grundlagen auch erst nach dieser Arbeit Hesse's veröffentlicht worden sind. — Die Aufstellung der Resolventen seiner Gleichung in expliciter Form findet sich bei Hesse nicht; sie ist auch erst durch die Fortschritte der neuern Algebra möglich geworden.

Von hier an hat Hesse nicht nur noch weitere specielle, algebraisch auflösbare Gleichungen verfolgt, insbesondere zwei Arten von Gleichungen sechsten Grades, von denen die eine die in der Theorie der Gleichungen vierten Grades auftretende Resolvente ist, die andere drei Punktpaare einer Involution vorstellt; auch eine Reihe seiner geometrischen Untersuchungen lassen sich leicht unter den Gesichtspunkt bringen, die Theorie der algebraischen Gleichungen von geometrischer Seite her zu fördern. Dahin zählen die ausführlichen Darlegungen der Gruppirungen unter den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung; und von demselben Gesichtspunkte aus ist auch die wiederholte Beschäftigung mit der interessanten Figur aufzufassen, die aus dem Pascal'schen Sechseck vermittelst der 15 zugehörigen Steiner'schen Linien und der 20 Punkte, in denen dieselben sich zu je dreien schneiden, sich entwickelt. Es tritt in diesen Arbeiten (J. Cr.-Borch. 66, 68) die doppelte Absicht hervor, einmal für die Gleichungen und ihre Resolventen ein anschauliches Bild in der Ebene zu gewinnen, sodann auch umgekehrt die bekannten Beziehungen bei den algebraischen Gleichungen für die Geometrie der Gebilde von mehreren Dimensionen zu verwerthen. Indess liegen von Seiten Hesse's nur ganz wenige Ausführungen in dieser Richtung vor, ja wir können eigentlich nur auf das „Uebertragungsprincip" (J. Cr.-Borch. 66, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI) hinweisen, dem eine Gleichung zu Grunde liegt, die linear und homogen in einem System von drei Variabeln, quadratisch und homogen in einem zweiten System von zwei Variabeln ist. Indem vermöge dieser Gleichung die Punktpaare der Geraden den Punkten der Ebene entsprechend gesetzt werden, hat man Coordinaten eingeführt, durch welche wohl noch manches Problem der Ebene, insbesondere wenn ein Kegelschnitt der Ebene ausgezeichnet ist, auf ein binäres Problem zurückgebracht und einer einfachern Behandlung zugänglich wird.

Das Pascal'sche Sechseck hat Hesse auch Gelegenheit gegeben, in ausgedehntem Masse von den durch Bobillier und Plücker eingeführten symbolischen analytischen Darstellungen Gebrauch zu machen. Später (J. Cr.-Borch. 75) erfolgte sogar noch eine zweite analoge Darstellung, in der nur die Symbole geränderte Determinanten sind und die ganze Figur durch einen Cyclus von Identitäten zwischen denselben repräsentirt wird. Es scheint übrigens, dass Hesse sowohl eine genügende Kenntniss des Zusammenhangs der einzelnen auf die Figur bezüglichen Sätze, als auch ein anschauliches Bild der Figur noch vermisste.*

Wir haben uns im Vorhergehenden wesentlich auf die rein wissenschaftliche Thätigkeit Hesse's, die wir mit der Mitte der fünfziger Jahre als abgeschlossen betrachten können, beschränkt. Nur mit den zuletzt genannten Arbeiten haben wir schon ein Gebiet betreten, das mit der seit dieser Zeit entfalteten pädagogischen Wirksamkeit Hesse's zusammenhängt. Denn es war seine Absicht, an der Schwelle der analytischen Geometrie solch einfaches Material zu geben, an dem eine Reihe von Fragen, die später für wichtigere und complicirtere Probleme auftreten, bereits aufgeworfen und mittels analytisch ganz durchgearbeiteter Methoden auch völlig erledigt werden können. In diesem Sinne haben sich die Lehrvorträge Hesse's bewegt und in diesem Sinne sind die beiden geometrischen Lehrbücher, die Geometrie des Raumes (1. Auflage 1861) und die noch mehr elementare Geometrie der Geraden und des Kreises, sowie die später in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. zuerst veröffentlichten Vorlesungen abgefasst.

---

* Vergl. übrigens hierzu Bauer in den Berichten der Münchener Akademie vom December 1874.

Der Inhalt dieser Schriften ist denn auch vor Allem die Darstellung der erwähnten symbolischen Gleichungsformen, die in einer unübertrefflich klaren Form geschieht und von Anfang an sowohl die Macht der Analysis, als den Vortheil einer geometrischen Veranschaulichung fühlen lässt. Der weitere Inhalt der Raumgeometrie ist die an die Polarentheorie anknüpfende Theorie der Formen zweiten Grades, wie sie nach dem Frühern aus Jacobi's und den eigenen Arbeiten Hesse's hervorgegangen ist; und hier tritt besonders die Untersuchung über die beiden Gleichungen hervor, welche die Hauptaxen und die Axen eines ebenen Schnittes der Fläche zweiter Ordnung bestimmen, eine Untersuchung, die nach dem Vorgange Kummer's durch Zerlegung der Discriminante der Gleichungen in eine Summe von Quadraten geführt wird. Obwohl diese Bücher also nicht, wie die Salmon'schen, eine Vielseitigkeit in den Ausführungen und eine umfassende Einführung in alle Methoden der analytischen Geometrie angestrebt haben, so ist ihre Wirksamkeit doch eine bedeutende. Es ist hauptsächlich die durchsichtige Klarheit in der Auseinanderlegung bekannter und neuer Begriffe einfacherer Art und deren Einführung in ganz expliciter Weise, was diesen Hesse'schen Darstellungen ihren Werth verleiht und was wohl als ein Erbtheil der Jacobi'schen analytischen Technik anzusehen ist. Wir haben in diesen Schriften, wie in den classisch gewordenen Abhandlungen Methoden vor uns, die dem oberflächlichen Anblick nur ihre formal vollendete Seite zuwenden mögen, die aber bei näherem Eindringen die neuen Ideen, als deren Ausdruck sie sich nach und nach gebildet haben, und die in ihnen angesammelte Triebkraft zu weiteren Fortschritten der Wissenschaft erkennen lassen.

Heidelberg, im December 1874.

Recensionen.

Ein unächter Brief des Archimedes. Zum ersten Mal aus einer Londoner Handschrift herausgegeben von Dr. C. HENNING. Als Beilage zum Programm 1872 der Realschule zu Darmstadt. Darmstadt, 1872, Brill. 1 Bltt., 18 S. 4°.

Es ist wahrhaft zu bedauern, dass der Herausgeber diesem wirklich unechten Briefe des Archimedes eine so grosse Sorgfalt und so bewundernswerthen Fleiss zugewendet hat. Das freilich muss man ihm zugestehen: wäre der Brief echt, stammte er überhaupt aus dem Alterthum, so wäre es ein unschätzbares Document für mehr als eine Wissenschaft. Leider ist dem nicht so; der Brief ist keineswegs zum ersten Male gedruckt, und ist am Ende des XVI. Jahrhunderts gefälscht worden, wie ich im Folgenden des Nähern nachweisen will.

Die Universitätsbibliothek zu Heidelberg besitzt einen Quartband (Schrank 264, Nr. 318), in welchem sich folgender Druck befindet: *Archibaldi Pitcarnii Scoto-Britanni Dissertationes Medicae, quibus subjunguntur Epistola Archimedis et poemata selecta ejusdem auctoris. Editio quarta ad exemplar Edinburgense recognita. Hagae Comitum, apud Henricum Scheurleer MDCCXXII.* Der hier offenbar in vierter Auflage vorliegende Brief des Archimedes ist nun Nichts weiter, als der von Herrn Henning angeblich zum ersten Male herausgegebene. Die Vorrede der obigen Sammlung hat das Datum: *Dabam Edinburgi,* 10 *Junii CIƆIƆCCXIII,* und dies ist zugleich das Datum der edinburger Originalausgabe der Sammlung der kleineren Schriften des Pitcairn, welche dieser noch selbst besorgte. Bald nach derselben, am 13. October 1713, starb er zu Edinburg, wo er am 25. December 1652 geboren war. Er hatte eine Zeit lang eine Professur der Medicin zu Leyden inne und war später praktischer Arzt zu Edinburg. Die Gymnasialbibliothek zu Thorn besitzt eine noch spätere Ausgabe der obigen Sammlung des Pitcairn (P. 4°. 95), enthalten in der Gesammtausgabe seiner Schriften, betitelt: *Archibaldi Pitcarnii, Medici Celebratissimi Scoto-Britanni Opera Omnia Medica. Editio Novissima. Lugduni Batavorum, Apud Joh. Arnold. Langerak,* 1737. Hierin haben die kleineren Schriften ebenfalls einen eigenen Titel: *Archibaldi Pitcarnii Scoto-*

Britanni, Dissertationes Medicae. Quibus subjunguntur Epistolae (sic!) *Archimedis et Poemata Selecta ejusdem Auctoris. Editio Novissima.*

In den bis jetzt nachgewiesenen fünf Ausgaben des Briefes des Archimedes an König Gelo ist derselbe bei Weitem vollständiger als in der des Herrn Henning und besitzt den bei ihm fehlenden Schluss. Was den neuesten Herausgeber hätte stutzig machen sollen, dass nämlich die von ihm zu Grunde gelegte Handschrift mit einem Vorworte: *Typographus Lectori Salutem* beginnt, weist er einfach damit ab, dass es ihm trotz ausgedehntester Untersuchung nicht möglich gewesen sei, ein gedrucktes Exemplar zu finden, seine Handschrift also wahrscheinlich das nicht zum Druck gelangte Originalmanuscript sei. Hätte ihn aber nicht der Umstand, dass dieses angebliche Originalmanuscript sich unter lauter Abhandlungen medicinischen Inhalts findet — und, wie ich argwöhne, unter solchen des Pitcairn selbst — darauf führen sollen, in medicinischen Schriften aus jener Zeit, speciell denen des Pitcairn, Nachforschungen anzustellen?

Dass Pitcairn der Verfasser des Briefes des Archimedes ist, folgt aus dem Titel der obigen Sammlungen unzweifelhaft; denn entweder müsste Archimedes auch der Verfasser der *Poemata Selecta* sein, oder der Brief ist von demselben Verfasser, von dem diese Gedichte sind, welche auf ihrem speciellen Titelblatte dem Archimbald Pitcairn zugetheilt werden. Nun lässt sich aber sogar nachweisen, wenigstens zu hoher Wahrscheinlichkeit bringen, wie Pitcairn zu seiner Fälschung geführt wurde. Er gab nämlich im Jahre 1688 zu Edinburg eine kleine, in jeder der oben erwähnten Sammlungen ebenfalls enthaltene Schrift unter dem Titel heraus: *Solutio Problematis de Inventoribus.* In dieser untersucht er in streng mathematischer Form von Lehrsatz und Beweis, wer als eigentlicher Urheber einer Erfindung zu betrachten sei, und zu dieser Schrift *de Inventoribus* bildet der angebliche Brief des Archimedes an König Gelo die recht zweckmässige Einleitung. Von ihm heisst es nämlich auf dem Titel *Albae Graecae* (d. i. zu Belgrad) *reperta Anno aerae Christianae* 1688, und er dürfte sich wohl in der, von mir nicht gesehenen, ersten Ausgabe der *Solutio Problematis de Inventoribus* als Einleitung finden; jedenfalls dürfte um diese Zeit sein erstes Erscheinen zu setzen sein. In dem bei Henning fehlenden Schlusse wird übrigens in sehr durchsichtiger Weise auf Pitcairn als Verfasser hingewiesen. Der **Archim**edes, der den Brief schreibt, ist **Archim**bald Pitcairn; der Arzt **Archi**as, der darin erwähnt wird, ist ebenfalls der Arzt **Archi**baldus Pitcarnius, wie aus dem Folgenden deutlich hervorgeht: *At me* — so beginnt der Schluss des Briefes — *problematis de Inventoribus solutionem exhibiturum quo nullum nobilius agnoscit divinarum atque humanarum rerum scientia, per literas monuit ille meus* ***Archias****, Iove Opt. Maximo sospitante nuper in Patriam per maria tumultuosa redux, se solu-*

tionem problematis edidisse. Quapropter re ab **Archia** *confecta valere Te jubeo, Rex Optime, moneoque ne Romanorum opes in Sicilia diutius crescere sinas.* Sollte hier die Rückkehr des Archias über stürmisches Meer ins Vaterland nicht auch auf die Rückkehr des Pitcairn aus Leyden nach Edinburg sich beziehen?

Jedenfalls ist, wie Henning nachweist, der Brief sehr geschickt gefälscht und fast keine einzige geschichtliche Unwahrscheinlichkeit in demselben mit untergelaufen. In wissenschaftlicher Hinsicht aber spricht darin Archimedes von dem Laufe der Erde um die Sonne, ist darin mit Aristarch von Samos einverstanden — was er bekanntlich in der Stelle des *Arenarius* nicht ist —, spricht vom Blutumlauf, den Nerven, der Lebenskraft, Vivisection bei Hunden, Kälbern, Schafen u. s. w.; alles Sachen, welche auch Pitcairn in seinen Dissertationen behandelt.

In der Einleitung zu seiner Ausgabe ist Herrn Henning noch eine weitere Unkenntniss vorzuwerfen. Auf S. 4 schreibt er: „Hier und dort finden wir berühmten Namen oft erbärmliche Machwerke Späterer zugeschrieben, und wenn in dem von Abrahamus Ecchellensis 1661 aus einer arabischen Handschrift herausgegebenen und ins Lateinische übersetzten *Liber Archimedis Adsumptorum sive Lemmatum* nach Torelli wenn nicht Alles, so doch Einiges von Archimedes Herrührende sich befinden mag, so gehört gewiss zu den läppischsten Producten eine *Epistola supposilia sive problema Archimedis* an Eratosthenes, in alexandrinischen (?) Versen griechisch geschrieben, *de bobus Soli sacris*, die nach Fabricius (IV. 187, 188 *ed. Harles*) und dem Pariser Handschriftencatalog (*ed.* 1740) in einer Pariser Handschrift 2448 (*ancien fonds*) sich befinden soll“, und weiss also nicht, dass dieselbe schon 1773 von Lessing, dann 1821 von J. Struve und K. L. Struve Vater und Sohn, dann von Nesselmann in dessen Geschichte der Algebra bei den Griechen, endlich 1856 von A. J. H. Vincent im *Bulletin de Bibliographie etc. T. I* herausgegeben und erläutert worden ist. Lässt man übrigens die sehr einfachen Conjecturen Vincent's zu, so ist der Inhalt des Epigramms keineswegs ein läppischer, sondern führt zu einem wohlabgerundeten und möglichen Resultate, welches letztere noch Nesselmann in Zweifel zog. Uebrigens ist das Epigramm nicht in Alexandrinern, sondern in Distichen verfasst.

Schliesslich noch Herrn Professor Cantor meinen aufrichtigen Dank für eine Reihe von Nachweisungen, welche in den obigen Zeilen Verwerthung gefunden haben.

Thorn, 6. März 1875. M. Curtze.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Die Portraits des Nicolaus Copernicus, von Prof. Dr. F. Hipler. Leipzig 1875, Verlag von Eduard Peter. 89 S. Aus den Mittheilungen des Ermländischen Kunstvereins, Jahrgang 1875, Heft III, S. 73—162 besonders abgedruckt.

Referent hat schon einmal, wenn auch nicht in dieser Zeitschrift, sich mit der schriftstellerischen Thätigkeit des Verfassers der heute zu besprechenden Monographie beschäftigt. In einem Aufsatze „Zur Literatur der Copernicus-Feier" in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 17. Juli 1873 (Nr. 198) hatten wir über Hipler's *Spicilegium Copernicanum* zu berichten und haben damals, wie wir denken in unparteiischer Weise, die Belesenheit des gelehrten Verfassers gerühmt, die Zahl der Einzelforschungen, welche erforderlich waren, um zu dem in jener Aehrenlese vereinigten Stoffe zu gelangen, anerkannt, wenn wir zugleich auch die etwas trockene Schreibart bemäkeln und uns gegen die Tendenz ablehnend verhalten mussten, welcher das Buch zum Theil gewidmet war und welche wir weit mehr als eine theologisch-politische, denn als eine astronomisch-historische erkannten. Wir befinden uns heute in der Lage, unser damaliges Urtheil fast wörtlich zu wiederholen. Die Schreibart des neuesten Beitrages Hipler's zur Geschichte des Copernicus hat uns zwar weit besser gefallen, als die des Spicilegiums; ohne weniger Gelehrsamkeit zu verrathen, ist sein Styl doch weniger vom classischen Schulstaube überweht, liest sich leichter und angenehmer. Dagegen bleibt alles Andere, was wir sagten, das Lob des wirklich Historischen, wie der Tadel darüber, dass auch diesmal wieder der Verfasser es nicht unterlassen konnte, Dinge hineinzuziehen, welche absolut nicht dahin gehören. Wir würden uns denselben Vorwurf zuziehen, welchen wir Herrn Hipler machen, wenn wir ausführlich auf die Begründung dieser Beschuldigung eingingen. Nur um nicht dem andern Vorwurfe zu verfallen, als sprächen wir leichtfertig aus, was wir nicht begründen können, sei etwa an S. 67 erinnert, wo das Nichtzustandekommen eines Copernicusdenkmals in Frauenburg mit dem „augenblicklich bestehenden Conflict zwischen Staat und Kirche" in Zusammenhang gebracht wird, während die in dem Anhange S. 83—89 abgedruckte amtliche Correspondenz aus der Zeit vom 24. Mai 1871 bis zum 29. Januar 1872 jenen Conflict nicht mit einer Silbe berührt, wie dem Gegenstande nach auch wohl vorauszusehen war. Doch wenden wir uns nach dieser nicht von uns verschuldeten Abschweifung zu dem wissenschaftlich Neuen, welches von Herrn Hipler auf einem Gebiete gefunden worden ist, das schon vorher von einem ebenso fleissigen als begabten Forscher, von Professor Leopold Prowe, abgesucht worden war. Letzterer hat in den Neuen preussischen Provinzialblättern, 3. Folge Band XI, eine Abhandlung veröffentlicht, welche in besonderem Abdrucke unter dem Titel: „Das Andenken des Copernicus bei der dankbaren Nachwelt", Thorn 1870, 50 S., uns vorliegt, und welche S. 16—23 und S. 47

mit Bildnissen des grossen Astronomen sich beschäftigt. Herr Hipler hat die Prowe'schen Angaben vielfach zu ergänzen und zu berichtigen gewusst. So hat z. B. Prowe seinen Ausgangspunkt daher genommen, dass er Gassendi's Angabe von einem Bildnisse des Copernicus, welches dieser selbst gemalt habe, ohne Weiteres als zuverlässig anerkannt. Hipler beginnt mit der Frage, ob jene Angabe Glauben verdiene. Er bespricht die Pflege der bildenden Künste in Preussen seit dem XIV. Jahrhundert, in dessen Mitte Nicolaus von Preussen ein berühmter Maler war; er nennt Johannes Rawe am Beginn des XV. Jahrhunderts; er rühmt den Kunstsinn der Bischöfe Lucas Watzelrode (1489—1512), Fabian Merkelingerode (1512—1523), Mauritius Ferber (1523—1537), Johannes Dantiscus (1537—1548), unter deren Vorletztem und Letztem besondere Hofmaler, Crispinus Herranth und Hans Heffener, genannt werden; er zeigt inmitten dieser Entwickelung der Portraitirkunst Nicolaus Copernicus selbst als einen tüchtigen Zeichner, welchem (S. 13 mit Berufung auf *Bibl. Warm. I*, 115) die Anfertigung einer Karte seines Vaterlandes von bischöflicher Seite aufgetragen wurde, und so gewinnt Wahrscheinlichkeit, was vorher nur Glaube an einen über 100 Jahre nach des Copernicus Tode schreibenden Berichterstatter war. Hipler geht aber weiter. Er wirft die Frage auf, ob von jenem Originalbilde, welches er sich fast schematisch aus wenigen Umrissen vor dem Spiegel entworfen denkt, nicht während dem Leben des Copernicus Copien genommen worden seien? und er beantwortet sie mit der andern Frage (S. 16), ob es denkbar sei, dass Rheticus, der begeisterte Schüler, bei seiner Rückkehr nach Wittenberg im Jahre 1542 nicht auch ein Portrait seines verehrten Meisters mitgenommen haben sollte, um dasselbe nach der Sitte der Zeit dem Hauptwerke des greisen Astronomen oder doch der von ihm selbst verfassten Biographie des geliebten Lehrers als Schmuck und Zierde beizugeben? Herr Hipler hält es für unmöglich, dass dem nicht so gewesen sei, und findet eine Bestätigung seiner Ansicht in dem ältesten Holzschnitte des Copernicusportraits, welches in Wittenberg bei einem unbekannten Drucker oder Verleger, Sabinus Kauffmann, nach dem Urtheile Kunstverständiger in der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts herausgekommen, erst 1872 in Paris in einem einzigen Exemplare entdeckt worden ist, welches Herr Wladislaus Bartynowski seiner in Krakau befindlichen Kupferstichsammlung einverleibte, während eine treue Nachbildung der Monographie des Herrn Hipler beigefügt ist. So vortrefflich ein von der eigenen Hand des Abgebildeten entworfenes Portrait vor eine Biographie passt, so wenig will uns Copernicus mit der Maiblume in der Hand ohne irgend ein astronomisches Attribut, Copernicus als Physicus, wie Herr Hipler fein, vielleicht zu fein bemerkt, als Titelbild der Revolutionen einleuchten, mag auch das Format zu der Nürnberger Ausgabe jenes Werkes stimmen, und so möchten wir uns lieber jener zweiten Alternative anschliessen. Eine längst bekannte weitere Copie des Originalbildes oder vielleicht des eben besprochenen Holzschnittes ist das Portrait im Strassburger Münster neben der berühmten Uhr. Ueber dieses Bild war Prowe (S. 47 seiner Abhandlung) noch völlig im Unklaren. Herr Hipler hat ermittelt (S. 18), dass es von dem Schaffhauser Maler Tobias Stimmer (1534—1580) herrührt und etwa um 1570 nach einem Original, das Dr. Tidemann Giese von Danzig an den Strassburger Mathematiker Conrad Dasypodius gesandt haben soll, angefertigt wurde. Die Unterschrift *Nicolai Copernici vera effigies ex ipsius autographo depicta* ist von Herrn Hipler in ihrer ganzen Bedeutung für die einstige Existenz eines autographen Portraits verwerthet worden. Sie bildet in der That das älteste Zeugniss dafür, nachdem man das Datum des Strassburger Gemäldes kennen gelernt hat. Neben diesen Darstellungen sind noch zwei andere vorhanden, welchen Herr Hipler mit grosser Wahrscheinlichkeit nachrühmt, sie seien bei Lebzeiten des Copernicus entstanden, indem er zu denselben sass. Das eine Bild ist das von Dr. Melchior Pyrnesius († 1589) in die Johanneskirche in Thorn gestiftete, welches als Titelbild des *Spicilegium Copernicanum* weitere Verbreitung gefunden hat. Herr Hipler vermuthet, das Original desselben sei um 1508 auf Heilsberg durch den Hofmaler des Bischofs Lucas Watzelrode gemalt worden und sei nach dem Tode des Nicolaus Copernicus in die Gemäldegalerie der Familie aufgenommen worden, so dass es etwa um 1575 (eine von Lichtenberg ohne besondere Begründung angegebene Jahreszahl!) von einem Thorner Maler copirt werden konnte, der freilich, wie richtig hervorgehoben ist, kein sonderlicher Künstler gewesen sein muss, wenn ihm die mehrfachen Zeichenfehler zur Schuld fallen. Auf diesem Bilde kniet Copernicus mit gefalteten Händen vor einem Crucifix, neben welchem ein Todtenschädel an den ärztlichen Stand erinnert, während auf einem Wandbrette Zirkel und Globus ruhen, den Astronomen verrathend. In der Landschaft, welche man durch das offene Fenster erblickt, will Herr Hipler, hierin etwas kühn, die Gegend um Heilsberg erkennen. Unzweifelhaft dagegen ist die Aehnlichkeit der beiden beschriebenen Gemälde untereinander, wodurch die Authenticität eines jeden derselben um so gesicherter ist. Eine lateinische Strophe, welche dem Thorner Bilde als Unterschrift dient, wurde von Prowe (S. 27 seiner Abhandlung) noch verkannt. Herrn Hipler ist es auch hier gelungen, den Ursprung derselben als Bruchstück einer bereits 1444 von Bischof Aeneas Sylvius Piccolomini von Ermland, dem nachmaligen Papste Pius II., gefertigten Ode nachzuweisen. Als Copie dieses Thorner Bildes fasst Herr Hipler ferner das sonst sogenannte Ujeyski'sche Bild im Capitelsaale zu Frauenburg auf, welches sich nur darin von dem zu Thorn unterscheide, dass Crucifix, Landschaft und Unterschrift fehlen. Das letzte Bild, zu welchem nach Herrn Hipler's Vermuthung Copernicus selbst sass, ist ein Oelgemälde im Ossolinski'schen Institute in Lemberg (S. 24), den grossen Astronomen in rothem, mit Pelz verbrämtem Gewande darstellend, das geistvolle Gesicht nach rechts gewandt, in der rechten Hand die Sphära haltend; eine Auffassung, die durch zahlreiche Kupferstiche weit verbreitet ist. Auch dieses Lemberger Bild kann vermöge seiner Aehnlichkeit in allen charakteristischen Zügen mit dem Wittenberg-Strassburger und mit dem Thorner Bilde auf Glaubwürdigkeit seiner Echtheit Anspruch erheben.

Sind wir soweit in unserer Besprechung Herrn Hipler ziemlich genau gefolgt, so gestattet uns das für grössere Leserkreise weniger beträchtliche Interesse der weiterhin behandelten Gegenstände uns nunmehr ganz kurz zu fassen. Holzschnitte und Kupferstiche, Gemälde und Zeichnungen, Statuen und Monumente aller Art aus späterer Zeit hat der Verfasser noch behandelt, aber wenn auch, wie er selbst sagt (S. 2), Vollständigkeit nicht anstrebend, dennoch in viel zu eingehender Weise, als dass wir über Alles berichten könnten, während wir eine Auswahl zu treffen nicht vermögen. Ueberall bewährt sich Herr Hipler als emsiger Forscher, und wenn er, mehr als Andere es thun, auf polnische Quellen Gewicht legt, so soll dieser Umstand uns keinen Gegenstand des Tadels liefern. Lernen wir doch dadurch Schriften kennen, welche sonst den meisten deutschen Lesern Bücher mit sieben Siegeln sind.

CANTOR.

Tafeln vierstelliger Logarithmen, bearbeitet von Dr. C. BREMIKER. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1874. X Tafeln auf 60 S.

„Vierstellige Logarithmentafeln", so beginnt der Herr Verfasser sein Vorwort, „sind im Allgemeinen bisher wenig beachtet worden." Die Wahrheit dieses Ausspruches lässt sich auch aus einem Berichte erhärten, welchen die britische Gesellschaft für Fortschritte der Wissenschaft einer Commission von fünf Gelehrten, den Herren Cayley, Stokes, W. Thomson, Smith und Glaisher, auftrug, und welchen für diese Commission das zuletzt genannte Mitglied derselben, Herr J. W. L. Glaisher, unter dem Titel *Report of the Committee on mathematical tables. London* 1873, erstattet hat. In diesem, mit ausserordentlichem Fleisse und umfassender Sachkenntniss, der nur wenige deutsche Tabellen (z. B. die Tabellenwerke von E. F. August, Wittstein's Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, Hannover 1859, und die ähnliche Schrift Bremiker's, Berlin 1872) entgangen zu sein scheinen, verfassten Berichte sind auf S. 61 und 62 die hauptsächlichen Logarithmentafeln nach der Anzahl ihrer Decimalstellen geordnet übersichtlich zusammengefasst. Neben 25 Verfassern von acht- und mehrstelligen, neben 37 Verfassern von siebenstelligen, neben 28 Verfassern von sechsstelligen, neben 24 Verfassern von fünfstelligen Logarithmentafeln hat Herr Glaisher nur 8 Verfasser vierstelliger Logarithmentafeln namhaft machen können. Und doch hat Herr Bremiker sicherlich Recht, wenn er für manche Zwecke, insbesondere für Feldmesserarbeiten einfacherer Art, vierstellige Logarithmen für genügend erklärt. „Die Längenmessungen," sagt er, „haben selten einen geringeren Fehler, als ¼ Procent ihrer Länge, wogegen der vierstellige Logarithme einen zwanzigfach geringern hat. Auch die hier zur Anwendung kommenden kleinen Theodoliten, von anderen Winkelinstrumenten nicht zu reden, erreichen an Genauigkeit nicht den Werth des vierstelligen Logarithmen. Mit Ausnahme der Triangulation, wo fünf Stellen in Rechnung zu ziehen sind, genügen bei anderen goniometrischen Rechnungen vier Stellen." Mehr zu gebrauchen, beziehungsweise mehr zu drucken, als für den bestimmten Zweck nothwendig ist, erweist sich aber als zeitraubend und damit als schädlich. Wir zweifeln daher nicht, dass die neue Tabelle, welcher die älteren Schwestern, die sieben-, sechs- und fünfstelligen Logarithmentafeln desselben Verfassers, als Muster der Anordnung wie des Druckes dienten, und darum auch zur Empfehlung gereichen werden, sich als wohlberechtigt den ihr gebührenden Platz erwerben wird.

Cantor.

Einleitung in die mechanische Wärmetheorie, von G. Krebs. 14 Bogen mit 52 Holzschnitten im Text. Leipzig, B. G. Teubner. Preis 4 Mk.

Bei den vielseitigen Anwendungen, welche die mechanische Wärmetheorie in den reinen und angewandten Naturwissenschaften gefunden hat, ist es wohl erklärlich, dass sehr verschiedenartige Darstellungen dieser Disciplin ihren Leserkreis finden und die Bedürfnisse desselben befriedigen.

Die vorliegende Arbeit ist für Anfänger bestimmt und beabsichtigt durch Behandlung einiger für die Praxis wichtigen Capitel in die eigenthümlichen Operationsmethoden der mechanischen Wärmetheorie einzuführen und mit einigen Hauptresultaten derselben bekannt zu machen. Dem Zwecke einer Einleitung entsprechend, befasst sich das Buch weder mit tieferen theoretischen Untersuchungen, noch mit ausführlicher Behandlung praktischer Fälle.

Es werden zunächst in dem ersten Capitel die Grundbegriffe des ersten Hauptsatzes: Arbeit und Wärme, ihrer mathematischen und physikalischen Bedeutung nach erörtert und die experimentelle Begründung des Satzes von der Aequivalenz von Arbeit und Wärme mitgetheilt.

Das zweite Capitel behandelt den Begriff der Zustandsänderung eines Körpers und die damit zusammenhängenden Eintheilungen der Gesammtenergie.

Bei Besprechung der Kreisprocesse wird im dritten Capitel, wenigstens der Grundlage nach, der zweite Hauptsatz eingeführt. Der Erörterung der Eigenschaften der isothermischen, isodynamischen und adiabatischen Curven folgt die Anwendung der vorher gewonnenen Begriffe auf vollkommene

Gase. Hieran schliesst sich eine kurze Skizze der dynamischen Gastheorie und der Clausius'schen Hypothese über die Mechanik der Aggregatzustände und Aggregatänderungen. In § 42 wird hierauf in äusserst knapper und präciser Form der Clausius'sche Beweis des zweiten Hauptsatzes wiedergegeben. Diesen Auseinandersetzungen folgt die Bestimmung des Verhältnisses der im Kreisprocesse nützlich verwertheten zu der vom heissen auf den kältern Körper übergeführten Wärme und die Erweiterung der früher für vollkommene Gase gefundenen Sätze auf beliebige Kreisprocesse beliebiger Körper. Die graphischen Methoden, welche wir Clapeyron, Rankine und Cazin verdanken, werden ungefähr in derselben Weise dargestellt, wie dies von Zeuner in dessen „Grundzügen" geschehen ist.

Den Schluss dieses inhaltsreichen Capitels bildet in §§ 55 und 56 die Aufstellung der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie in den von Clausius, Thomson und Zeuner gegebenen Formen.

Das vierte Capitel beschäftigt sich mit den physikalischen Eigenschaften der Dämpfe und erörtert sehr ausführlich die Gleichungen und Beziehungen der thermischen Linien des gesättigten Wasserdampfes. Hier wird auch ausgesprochenerweise von dem zweiten Hauptsatze Gebrauch gemacht und mit dessen Hilfe die bekannte Clapeyron'sche Gleichung abgeleitet. Die Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe, welche auf S. 172 beigegeben, ist ein Auszug aus der Zeuner'schen Haupttabelle (Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, Tabelle 10), der noch einige Reihen neu berechneter Zahlwerthe zugefügt sind. Bei der Besprechung der Eigenschaften überhitzter Dämpfe sind die Resultate der Herwig'schen Versuche über die Abweichungen solcher Dämpfe vom Ausdehnungsgesetze vollkommener Gase der von Zeuner in dessen „Grundzügen" gegebenen Uebersicht über den Stand der Angelegenheit neu hinzugefügt.

Das fünfte Capitel handelt von den Heissluft- und Dampfmaschinen. Von den Heissluftmaschinen wird jedoch fast ausschliesslich das ältere Ericsson'sche System erwähnt, dessen Diagramm bekanntlich aus zwei parallelen Geraden zur Volumenaxe und zwei adiabatischen Curven besteht. Ausführlicher sind dafür die Theorie der Dampfmaschinen und die Ursachen der mangelhaften Uebereinstimmung der Theorie mit den praktischen Erfahrungen auseinandergesetzt.

Im sechsten, dem Schlusscapitel, greift der Verfasser in das Gebiet der reinen Wissenschaft zurück und behandelt die bei unvollkommenen Kreisprocessen eintretende Zerstreuung der Energie und die damit in Verbindung stehende Tendenz des Weltsystems, einem Endzustande zuzustreben. Die Darstellung ist der ähnlich, welche der Verfasser dieser Besprechung in der Ergänzung* zu den Verdet'schen Vorlesungen über mechanische Wärmetheorie gegeben hat.

* Handbuch der mechanischen Wärmetheorie, S. 136 — 144.

Aus dieser Angabe des Inhalts wird schon zur Genüge hervorgehen, dass es nicht das Bestreben des Verfassers gewesen ist, eine vollständige Uebersicht über die Resultate und Methoden der mechanischen Wärmetheorie zu geben, sondern dass sich derselbe auf diejenigen Gebiete beschränkt hat, welche den Anwendungen in der Maschinenlehre am nächsten liegen; es sind dies besonders die Ausdehnungserscheinungen vollkommener Gase und das Verhalten gesättigten Wasserdampfes.

Die interessanten experimentellen Bestätigungen der mechanischen Wärmetheorie durch die Joule'schen Versuche über die Compression von Flüssigkeiten und durch die Wärmeerscheinungen bei Dehnung von Metallen und Kautschuck, ebenso die Ausflusserscheinungen und die Kirchhoff'schen Untersuchungen über die Absorptions- und Lösungserscheinungen sind ganz weggelassen; auch die Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Drucke ist nur nebenbei erwähnt, ohne dass auf den Zusammenhang dieser Erscheinungen mit den Gleichungen der mechanischen Wärmethorie Rücksicht genommen wäre. Wir wollen dem Verfasser deshalb keinen Vorwurf machen, sondern führen dies nur an, um die Stellung dieses Buches zu den übrigen Werken, welche denselben Gegenstand behandeln, zu charakterisiren.

Aus der Anführung des Inhaltes des Buches und derjenigen Gebiete, welche nicht berücksichtigt worden sind, scheint hervorzugehen, dass das Krebs'sche Buch besonders als Einleitung für Solche dienen soll, welche zunächst nicht die Absicht haben, sich wissenschaftlich in diese Disciplin zu vertiefen, sondern für Solche, welchen es mehr darum zu thun ist, eine Einsicht in die Grundlagen einer rationellen Theorie der Wärmemaschinen zu gewinnen.

Wir halten daher das vorliegende Werk für besonders geeignet, um auf Gewerbeschulen und ähnlichen Fachschulen der Mittelstufe als Grundlage der Vorträge über mechanische Wärmetheorie zu dienen, welche dort meist in den letzten Studiensemestern gehalten werden.

Auch vielen theoretisch gebildeten älteren Technikern, welche während ihrer Studienzeit noch keine Gelegenheit hatten mechanische Wärmetheorie auf den Polytechniken zu hören, wird das Buch willkommen sein, um sich in nicht zu langer Zeit mit dem Nothwendigsten vertraut zu machen. Ebenso wird es, seines geringen Umfangs wegen, gelegentlich dem jungen Techniker bei Repetitionen zu bevorstehenden Examina gute Dienste leisten.

Die Darstellung ist klar und einfach, allenorts ist innerhalb des behandelten Feldes das Wichtigste mit grossem Geschicke ausgewählt. Die vorausgesetzten Vorkenntnisse sind gering; Jeder, der nur mit den Elementen der Differential- und Integralrechnung und mit den Grundlagen der Experimentalphysik vertraut ist, wird ohne Schwierigkeit die Lectüre des Buches durchführen können.

Nachdem wir so Inhalt und Form der Krebs'schen Einleitung in die mechanische Wärmetheorie gebührend anerkannt haben, wollen wir noch, da dies einmal bei Besprechungen üblich ist, kurz einige Punkte erwähnen, in denen wir nicht ganz mit dem Verfasser einverstanden sind.

Was zunächst den Stoff betrifft, so hätten wir es allerdings für wünschenswerth gehalten, dass die Ausflusserscheinungen der Gase und Dämpfe mit aufgenommen worden wären. Diese sind ebenfalls von hoher praktischer Wichtigkeit und sind in den Zeuner'schen Entwickelungen so leicht auffassbar, dass sie ganz besonders geeignet sind, dem Anfänger ein Beispiel von der Anwendbarkeit der Methoden der mechanischen Wärmetheorie zu geben.

Wir wollen es ferner dahingestellt sein lassen, ob es sehr geeignet ist, gerade das Bunsen'sche Calorimeter zu beschreiben, wenn man die Kenntniss von Calorimetern nicht voraussetzen will; der Bunsen'sche Apparat ist weniger leicht zu verstehen und sein Gebrauch erfordert bekanntlich die umfänglichsten Vorbereitungen und das grösste experimentelle Geschick. Ebenso würden wir bei Anführung der Versuche, welche zur Begründung des ersten Hauptsatzes dienen, die magneto-elektrischen Untersuchungen Joule's lieber bei Seite gelassen haben, da auf dem Standpunkte physikalischer Kenntnisse, für den das Buch seiner ganzen Ausführung nach bestimmt ist, meist alle Vorbedingungen für ein vollständiges Verständniss der hier stattfindenden Vorgänge fehlen. Ausserdem sind diese Versuche wegen ihrer geringen Zuverlässigkeit mehr von historischem Interesse, als dass man dieselben für eine numerische Feststellung des Arbeitsäquivalents der Wärme besonders geeignet halten könnte.

Ferner will es uns nicht ganz einleuchten, dass es praktisch sei, bei der Einleitung in die Theorie der Kreisprocesse gesättigten Dampf als Beispiel zu wählen; durch die eintretenden Aggregatsänderungen werden die Erscheinungen complicirt und durch das gleichzeitige Auftreten von Wasser und Dampf weniger übersichtlich, als wenn man diesen Betrachtungen ein vollkommenes Gas zu Grunde legt.

Ebenso ist es mit der Einführung der isodynamischen Curven in solche elementare Darstellungen; die Auffassung des Begriffes der constanten innern Energie macht dem Anfänger gewiss mehr Schwierigkeiten, als an Einsicht durch die Benutzung dieses Begriffes gewonnen werden kann.

Verschiedene Kleinigkeiten, als z. B. die Schreibweise cp und cv für die specifischen Wärmen, die gelegentliche Weglassung des Beiwortes „gesättigt" an Stellen, an denen von Dampf im Allgemeinen gesprochen wird und doch nur gesättigter gemeint ist, der Mangel der Angabe, dass sich $\lambda \equiv$ Gesammtwärme und $q \equiv$ Flüssigkeitswärme nur auf die Gewichtseinheit beziehen, sollen nur ganz beiläufig erwähnt werden, obgleich das Verständniss durch dieselben mehrfach etwas erschwert wird.

Wir können uns jedoch damit durchaus nicht einverstanden erklären, dass der Verfasser den für die Theorie der Heissluftmaschinen so wichtigen Satz:

$$T_1 . T_2 = T . T_3$$

aus einer zufälligen Constructionseigenthümlichkeit einer besondern Art calorischer Maschinen herleitet, während sich diese Formel doch so bequem mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes für jeden umkehrbaren Kreisprocess der Gase nachweisen lässt, in welchem die Linienpaare, welche die Zustandsänderung darstellen, Curven von der Art

$$p^m . v^n = Const. \text{ und } p^\mu . v^\nu = const.$$

sind. In der Krebs'schen Darstellung erhält das wichtige Capitel von den Heissluftmaschinen eine gewisse Unsicherheit und unnöthige Beschränkung dadurch, dass sich die wichtigsten Betrachtungen an ein bestimmtes Beispiel, an das ältere Ericsson'sche System anschliessen.

Daraus, dass sich der Verfasser fast vollständig an die Nomenclatur und Buchstabenbezeichnung Zeuner's angeschlossen hat, wollen wir ihm gewiss keinen Vorwurf machen; nur bezüglich der Ausdrücke „Wirkungsgrad“ und „Verwandlungscoefficient“ sind wir nicht einverstanden, sondern ziehen vor, die älteren Bezeichnungen beizubehalten, welche von Rankine, Clausius und Redtenbacher gewählt worden sind.

Jedenfalls sind die hier angeführten kleinen Ausstellungen nur von geringer Bedeutung im Vergleich mit den vielen Vorzügen des Buches, die wir früher erwähnt haben.

Was die Ausstattung des Buches anbetrifft, so ist dieselbe, wie dies der Teubner'sche Verlag ohnehin erwarten lässt, durchaus sachentsprechend und trefflich. Unter den Figuren hat uns nur die Zeichnung des Indicators (Fig. 18) etwas zu primitiv erscheinen wollen, und in Fig. 47, welche wohl Röntgen entlehnt ist, hätten füglich die Andeutungen der Bewegungsmechanismen wegbleiben können, da dieselben wohl nicht geeignet sind, in dieser Darstellung zur Vergrösserung des Verständnisses beizutragen.

Nach allem Angeführten können wir die Krebs'sche „Einleitung in die mechanische Wärmetheorie“ als ein recht gutes Lehrbuch für mittlere Fachschulen und ähnliche Bildungsstufen aus voller Ueberzeugung empfehlen.

In künftigen Auflagen, deren wir dem Buche recht viel wünschen, wird sich leicht Gelegenheit finden, ohne Beeinträchtigung der Vorzüge die geringfügigen Mängel der Arbeit noch vollends zu beseitigen.

Chemnitz. Dr. Richard Rühlmann.

Grundzüge einer Vibrationstheorie der Natur, von Baron N. Dellingshausen. Reval, Verlag von Franz Kluge. 1872. Leipzig, Rud. Hartmann.

In diesem nur 405 Seiten langen Werke, das äusserlich recht gut von der Verlagsbuchhandlung ausgestattet ist, werden die Naturerscheinungen erklärt oder zu erklären versucht aus dem einen Princip der Bewegung.

Wie mannichfach der Inhalt ist, mag aus der folgenden kurzen Inhaltsangabe hervorgehen.

S. 1—94: Elemente der Naturtheorie. S. 95—132: Von den Gasen. S. 133—160: Von den Flüssigkeiten und Dämpfen. S. 161—182: Von den festen Körpern. S. 183—300: Das chemische Verhalten der Körper. S. 301—326: Elektricität und Magnetismus. S. 327—367: Gravitation und Schwere. S. 368—405: Naturphilosophie.

Es ist natürlich von vornherein klar, dass die erwähnte Materie nicht erschöpfend behandelt sein kann, sondern dass nur Einzelnes in allgemeinen Zügen berücksichtigt ist; dennoch beginnt der letzte Abschnitt mit den Worten: „Mit Hilfe unserer Vibrationstheorie ist es uns gelungen, die bedeutendsten an den Körpern beobachteten Erscheinungen zu erklären. Wir haben nicht allein die qualitativen, sowie die quantitativen Verschiedenheiten der Körper — ihre verschiedene Dichtheit, ihre Temperatur, ihre specifische Wärme, ihre Zusammensetzung, ihre Aggregatzustände, die Krystallbildungen, die Allotropie, Isomerie, Metamerie, Polymerie u. s. w. —, auf die rein quantitativen Unterschiede in der Dauer und in der Intensität der Wärmevibrationen, sowie auf die verschiedene Zusammensetzung, Anordnung und Beschaffenheit der stehenden Wärmewellen oder der Vibrationsatome zurückgeführt, sondern auch alle Kräfte, welche bisher in der Wissenschaft als die Ursache der Naturerscheinungen galten — die Cohäsions- und Expansionskraft der Körper, die Schwere, die Gravitation der Weltkörper, die Affinität, die elektrischen und magnetischen Kräfte u. s. w. —, durch Wellenbewegung erklärt; mit einem Worte: wir haben in dem innern, vibratorischen Bewegungszustande der Körper die allen Naturerscheinungen zu Grunde liegende Einheit erkannt."

Das Resultat wird S. 402 ausgesprochen, indem es dort heisst:

„Das Wesen der Materie ist bewegte Ausdehnung.

Die innere Elasticität der Materie ist das Verhältniss der Geschwindigkeiten der continuirlich nebeneinanderliegenden Punkte.

Die absolute Dichtheit der Materie ist gleich Null; die Dichtheit der Körper ist dagegen das Verhältniss ihrer inneren Bewegungen oder, beim normalen gasförmigen Zustande, das Verhältniss der Dauer ihrer Wärmevibrationen und kann deshalb nur relativ, nie absolut bestimmt werden."

Wir wollen gern glauben, dass der Verfasser viel Zeit und Arbeit verwendet hat, um das vorliegende Werk zu Stande zu bringen, wenn nur nicht zugleich das Gefühl des Mitleids mit rege würde, weil *loves labor lost*. Denn offenbar kann von einer scharfen, zwingenden Erklärung aller der behandelten Naturerscheinungen in so engem Rahmen nicht die Rede sein, aus gleichem Grunde aber auch nicht von einer eingehenden Kritik. Nur soviel mag kurz erwähnt werden, dass eine so strenge mathematische Grundlage, wie sie der Verfasser seinen Erklärungen zu Grunde legt, auch eine streng mathematische Durchführung aller Erklärungen verlangt; leider findet man aber meist nur Andeutungen, keine Durchführung, Behauptungen, aber keine Folgerungen aus diesen Behauptungen.

Wir wollen nicht weiter betonen, dass alle sonst geläufigen Erklärungen der Erscheinungen in der Molekularphysik als unwahr zurückgewiesen sind, dass eigentlich nur die mechanische Wärmetheorie als richtig anerkannt wird. Der Verfasser geht sogar so weit, dass er Leuten, wie Clausius, da Fehler nachweisen zu können glaubt, die er selbst verschuldet hat. Man vergl. die Gleichung 57), S. 108. Hätte der Verfasser die beiden Gleichungen 54) und $V:V_1 = i:i_1$ miteinander multiplicirt, so würde er zum richtigen Resultat gelangt sein.

Wir wollen nicht mit dem streng wissenschaftlichen Urtheil an Abschnitte herantreten, wie sie z. B. S. 379—387 vorkommen, wo über das unendlich Kleine und über das unendlich Grosse gehandelt wird; es möge die dortige, wenig strenge Darstellung entschuldigt sein mit dem populären Zweck des Werkchens.

Als wir im Anhange des Verfassers Vorstellung über die sogenannten Vibrationsatome lasen („stehende Wärmewellen, welche nach allen Seiten hin durch unbewegliche Knotenflächen von den anderen stehenden Wärmewellen des Körpers abgegrenzt werden") glaubten wir einer recht plausiblen Vorstellung über die Constitution der Materie zu begegnen; leider aber wurde dieser erste gute Eindruck nur zu bald verwischt, denn wir fanden zwar in der Folge manchen Erklärungsversuch, aber keine Erklärung, man müsste denn das für eine Erklärung halten, wenn statt des bisherigen Begriffes der Masse M der Quotient $\frac{M}{T}$ eingeführt wird, wo T die Periode der Schwingung der Vibrationsatome bezeichnet, und wo nun dieser Werth von T benützt wird, um das zu erklären, was man sonst durch den Begriff des M erklärt.

Will der Verfasser seiner Ansicht Geltung verschaffen, so muss er sein Werk noch bedeutend erweitern, indem er durch Maass und Zahl aus seiner Hypothese heraus die Naturerscheinungen construirt; wir glauben aber, dass dieser Anforderung die Naturtheorie des Verfassers zu genügen nicht im Stande sein wird. Es ist etwas wesentlich Anderes, einzelne Erscheinungen, z. B. Krystallformen, zu erklären, als nun mit Hilfe dieser Erklärung alle Erscheinungen, die an irgendwelchen krystallinischen Körpern vorkommen, *à priori* mathematisch zu berechnen.

Wir erachten daher das ganze Werk für einen ersten Versuch, der aber noch viel weiter und strenger zu verfolgen ist, wenn er sich der vollen Beachtung des Publikums erfreuen soll.

Freiberg, 3. Februar 1875. Th. Kötteritzsch.

Vorlesungen über mathematische Physik, von Dr. Gustav Kirchhoff. 2. Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner.

Mit Vergnügen kann Referent constatiren, dass diese zweite Lieferung des Kirchhoff'schen Werkes der ersten in Inhalt und Form entspricht, so dass man um so mehr zu der Erwartung berechtigt ist, dass das ganze Werk eine Zierde der deutschen mathematischen Literatur werden wird. Es mag hier verstattet sein, nur kurz eine Inhaltsangabe der vorliegenden zweiten Lieferung zu geben; eine eingehendere Besprechung aber mag bis dahin verschoben werden, wo das ganze Werk vollständig erschienen ist.

Die 12. Vorlesung, welche den Anfang der vorliegenden Lieferung bildet, beschäftigt sich mit der Hydrostatik. Die besonderen betrachteten Fälle sind die, wo die wirksamen Kräfte entweder von der Anziehung der Erde oder von der eines Punktes herkommen, oder wo die einzelnen Theilchen der Flüssigkeit nach dem Newton'schen Gesetze gegeneinander gravitiren; die Flüssigkeit selbst befindet sich übrigens entweder im Ruhezustande, oder im Zustande gleichförmiger Rotation. Die 13. Vorlesung hat es zu thun mit den Capillarerscheinungen, sie schliesst mit der Betrachtung eingetauchter fester Körper, indem zugleich die Capillaritätskräfte mit berücksichtigt werden.

Die 14. Vorlesung setzt die Betrachtungen der 13. fort, indem hier die Differentialgleichungen integrirt werden für den Fall, dass zwei schwere Flüssigkeiten einander in Rotationsflächen berühren und nur Punkte betrachtet werden, die entweder der Rotationsaxe sehr nahe liegen, oder sehr weit von ihr entfernt sind.

Mit der 15. Vorlesung beginnt die Hydrodynamik, und nachdem der parate mathematische Apparat kurz und bündig entwickelt ist, werden bis zur 20. Vorlesung eine Reihe hierher gehöriger Probleme behandelt, wie die Theorie der Wirbellinien und Wirbelfäden, die Bewegung eines oder zweier fester Körper in einer incompressiblen Flüssigkeit (speciell angewendet auf Kugel und Ellipsoid) und die Wirbelbewegungen.

Nachdem ferner die 21. Vorlesung einen kurzen Abriss der Theorie complexer Functionen gegeben hat, wird diese Theorie in der 22. Vorlesung angewendet auf die Betrachtung der Flüssigkeitsstrahlen.

Freiberg, 3. Mai 1875. Th. Kötteritzsch.

Report of the committee on mathematical tables, consisting of Professor A. Cayley, F. R. S., Professor G. G. Stockes, F. R. S., Professor Sir W. Thomson, F. R. S., Professor H. J. S. Smith, F. R. S., Mr. J. W. L. Glaisher, B. A. Reporter Mr. J. W. L. Glaisher (from the Report of the British Association for the advancement of science for 1873). London 1873.

Das Urtheil des Unterzeichneten über die hier genannte Schrift ist zwar im Allgemeinen bereits in der obenstehenden Anzeige von Bremiker's Logarithmentafeln ausgesprochen, doch wäre es der Bedeutung des von Herrn Glaisher erstatteten Berichts wohl kaum angemessen, wenn ihm nur solche beiläufige Worte, und seien sie noch so lobend, gewidmet würden. Schon die Entstehung des Berichts an und für sich verdient sicherlich hervorgehoben zu werden. Jedem Mathematiker, welcher von den rein theoretischen Arbeiten zu praktischen Anwendungen den Uebergang macht, tritt sofort neben dem Bewusstsein von der Nützlichkeit tabellarisch geordneter, ein- für allemal berechneter Hilfswerthe die Frage entgegen, wo er solche Hilfswerthe zu suchen habe? Freilich die einfachsten Tabellen, die Einsundeins- sowie die Einmaleins-Tabellen, sind in Jedermanns Kopfe, die nächsteinfachen Logarithmentabellen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen sind in Jedermanns Händen, aber mit diesen und einigen anderen, meistens anhangsweise den Logarithmentafeln beigefügten Tabellen ist die Sache zu Ende, so zu Ende, dass man, ohne auf den Namen eines tüchtigen Mathematikers verzichten zu müssen, sehr wohl im Zweifel darüber sein kann, ob es Tabellen gewisser Integrale z. B. schon gebe, oder ob deren Berechnung noch zu den frommen Wünschen gehöre. Es war daher eine höchst zeitgemässe und ihrer Natur nach zusammengehörige Doppelaufgabe, welche die Britische Gesellschaft für Fortschritte der Wissenschaft einem besonders dazu ernannten Fünferausschusse stellte, indem sie von demselben erstlich einen Bericht über sämmtliche vorhandene mathematische Tafeln verlangte und ihm zweitens den Neudruck oder die Neuberechnung vergriffener oder noch nicht bearbeiteter Tabellen häufig vorkommender Functionalwerthe auferlegte. Es ist der erste Theil jenes Berichts, der uns heute aus der Feder von Herrn Glaisher in einer elf Druckbogen erfüllenden Ausdehnung vorliegt, einer Ausdehnung, welche annähernd einen Begriff von dem Umfange der Arbeitsleistung geben kann, welche dem Berichterstatter auferlegt war. Nur auf mathematische Tafeln einfachster Natur sollte er sein Augenmerk richten. Tabellen empyrischen Ursprungs, wie Sterncataloge, Refractionstafeln, chemisch-physikalische Tafeln, Sterblichkeitstafeln u. s. w. blieben grundsätzlich ausgeschlossen; ausgeschlossen blieben auch die durch Rechnung entstandenen Tabellen, welche, ausschliesslich dem Handelsverkehr dienend, eine wissenschaftliche Beachtung von Seiten des Mathematikers unnöthig machen, wie z. B. Lebensversicherungs- und Annuitätentafeln, Zinstabellen u. dergl.; ausgeschlossen und einem zweiten und dritten Theile des Berichts vorbehalten blieben Functionen (insbesondere bestimmte Integrale) und zahlentheoretische Tafeln. Und dennoch blieb Stoff für 175 Druckseiten übrig, und dennoch sagt der Verfasser in, wie uns dünkt, übertriebener Bescheidenheit: „Der Bericht ist eingestandenermassen sehr unvollkommen; er enthält muthmasslich nicht die Hälfte der Werke, welche ebenso gut wie die aufgenommenen einen Anspruch auf Erwähnung gehabt hätten" (S. 12). Das ist entschieden zuviel zugegeben; in so weiten Grenzen bewegt sich die Mangelhaftigkeit des Berichtes nicht, mindestens nicht in jenen Theilen, welche der Unterzeichnete zu benutzen und mit eigenen, da und dort gesammelten Notizen zu vergleichen Gelegenheit hatte. Weit einverstandener können wir uns mit dem Berichterstatter erklären, wenn er auf derselben Seite nach einigen weiteren Sätzen fortfährt: „Trotzdem wird man finden, dass der Bericht in seinem gegenwärtigen Zustande mehr über Tabellen mittheilt, als an irgend einer andern Stelle gefunden werden kann.“ Freilich kommt es bei bibliographisch-historischen Schriften nicht allein auf das Wieviel des Gebotenen an, sondern vielmehr auf das Wie zuverlässig. Die Liste der auf unkritisches Nachschreiben fremder Irrthümer sich beschränkenden Schriftsteller ist auch nach Griffet's *Traité des différentes sortes de preuves qui servent à établir la vérité de l'histoire* (*Liège* 1769) in immerwährendem Wachsen geblieben; jeder Buchhändlercatalog enthält neue Schriften der genannten Art, um so gefährlicher, wenn sie eine scheinbare Beglaubigung an der Spitze tragen, wie etwa die *Histoire des mathématiques* von Ferd. Hoefer in Gestalt einer Widmung an den verdienten Veteranen der Geschichte der Mathematik, Herrn Michel Chasles. Herr Glaisher hat sich die Sache nicht so leicht gemacht, und wir wissen ihm um so grösseren Dank dafür. „Mit Ausnahme von drei oder vier Werken wurde jedes Buch nach eigenem Augenscheine beschrieben und die Beschreibung niedergeschrieben, während das Buch noch vor uns lag“ (S. 14). So und nur so lässt Zuverlässigkeit der Angaben sich verbürgen, und wo allenfalls doch ein oder der andere Irrthum sich eingeschlichen haben sollte, wird er durch die äussere Schwierigkeit erklärt. Es ist eine mehr als ausreichende Entschuldigung, dass die Arbeit „oft in öffentlichen Bibliotheken vollzogen werden musste, welche nur wenige Stunden des Tages geöffnet waren, so dass Jeder, der nicht über eine unbegrenzte Zahl von Tagen zu verfügen hat, manchmal unter Hochdruck zu arbeiten genöthigt ist. So entstehen Auslassungen, welche, sechs Monate später bei Gelegenheit einer Revision entdeckt, ohne grossen Zeitverlust nicht berichtigt werden können, vorausgesetzt sogar, dass man sich erinnere, welche Bibliothek es gerade war, die das betreffende Werk enthielt.“ Wir sind nach diesen Bekenntnissen des Verfassers, deren Wahrheitstreue unanfechtbar ist, um so begieriger auf die Nachträge, welche er uns für eine spätere Zeit in Aussicht stellt. Möge ihm dazu die von ihm ausdrücklich erbetene Beihilfe anderer Gelehrten nicht mangeln, welche oft zufälliges Auffinden von bibliographischen Seltenheiten nicht als Quelle persönlichen Vergnügens allein zu betrachten aufgefordert werden. Die Adresse des Verfassers, an welche alle solche Tabellenwerke betreffende Notizen einzusenden sind, lautet: *Mr. J. W. L. Glaisher, Trinity College, Cambridge.* Mit noch grösserer Spannung als den Nachträgen zu diesem ersten Theile des Berichts sehen wir aber den beiden folgenden Hauptheilen desselben entgegen, welchen wir nur eine gleich befriedigende Ausführung im Voraus wünschen können.

Cantor.

Die vierte Säcularfeier der Geburt von Nicolaus Copernicus, Thorn, 18. und 19. Februar 1873. Thorn 1874.

Erst vor wenigen Wochen hat dieser ausführliche Bericht über die Thorner Säcularfeier die Presse verlassen, sicherlich eine Anregung zu freudiger Erinnerung für Alle, die dem schönen Feste persönliche Theilnahme widmen konnten, eine Quelle halb eifersüchtigen Bedauerns für Diejenigen, welche ihm fern zu bleiben gezwungen waren. Die 13 Druckbogen starke Gelegenheitsschrift meldet auf's Ausführlichste von den Erlebnissen der Festtage des Februars 1873, ohne die ausgebrachten Trinksprüche, ja selbst ohne die eingegangenen Glückwünsche von Körperschaften, wie von Einzelnen zu vergessen. Am Interessantesten dürfte jedoch für den Leser, welcher nicht in Thorn anwesend war, also nicht sein Gedächtniss mit Einzelheiten erfüllt hat, die beim Lesen des Berichts wieder wach werden, ohne in dem Berichte selbst vorkommen zu können, die Festrede des Vorsitzenden des Copernicus-Vereins, Prof. Dr. L. Prowe, sein, welche von S. 36—76 ein der Weihe des Tages entsprechendes Bild des Gefeierten in markigen Zügen liefert.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. März bis 15. Mai 1875.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Classe. 1874, I u. II. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1875. Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von Schönfeld und Winnecke. 9. Jahrg. 3. und 4. Heft. Leipzig, Engelmann. à 1 Mk. 50 Pf.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge, 23. Bd. (1873). Wien, Wallishauser. 11 Mk.

Repertorium für Meteorologie, red. von H. Wild. 4. Bd., 1. Heft, Leipzig, Voss. 11 Mk. 80 Pf.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, fortges. v. Borchardt. 80. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Annales de l'observatoire de Moscou. Vol. I et II. Moskau, Lang's Buchhandl. 12 Mk.

Reine Mathematik.

GAUSS, C. F., Gesammelte Werke. 6. Bd. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 25 Mk.

GEGENBAUER, L., Ueber einige bestimmte Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

AUTENHEIMER, F., Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Weimar, Voigt. 7 Mk. 50 Pf.

RIBI, D., Aufgaben über die Elemente der Algebra. 2. Heft, 3. Aufl. Bern, Dalp. 40 Pf.

REUSCHLE, C. G., Tafeln complexer Primzahlen, welche aus Wurzeln der Einheit gebildet sind. (Akad.) Berlin, Dümmler. 24 Mk.

HABLÜZEL, J., Lehrbuch der synthetischen Geometrie. 1. Bd. Leipzig, Wentzel's Verlag. 5 Mk.

MAUR, A., Die Seiten- und Ecktransversalen des Dreiecks; harmonische und involutorische Beziehungen. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

FISCHER, F. W., Lehrbuch der Geometrie. 2. Thl.: Stereometrie. Freiburg i. B., Herder. 1 Mk. 20 Pf.

HOCHHEIM, A., Ueber Pole und Polaren der parabolischen Curven dritter Ordnung. Halle, Nebert. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

KOPP, H., Sechs Tafeln mit Netzen zu Krystallmodellen. Braunschweig, Vieweg. 1 Mk. 60 Pf.

RÜDGISCH, R. v., Die Instrumente und Operationen der niedern Vermessungskunst. 2. Abth. Kassel, Kay. 3 Mk. 50 Pf.

KUNZE, M., Hypsometrische und meteorologische Tafeln. Dresden, Schönfeld's Verlag. 4 Mk.

HÜBLER, P., Zur Theorie elastischer Platten. Dresden, v. Zahn. 1 Mk.

BOLTZMANN, L., Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

HANDL, A., Ueber die Ausdehnung fester Körper bei steigender Temperatur. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

DVORAK, V., Ueber die Schallgeschwindigkeit des Wassers in Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

HIRZEL, C., Die Bewegungsgesetze und ihre Anwendung auf die Ballistik. Frauenfeld, Huber. 2 Mk. 40 Pf.

Mittlere Sternörter für 1875 von 539 Sternen u. s. w. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

SCHORR, F., Der Venusmond und die Untersuchungen über frühere Beobachtungen desselben. Braunschweig, Vieweg. 5 Mk.

SCHERING, E., Verallgemeinerung der Poisson-Jacobi'schen Störungsformeln. (Ges. d. W.) Göttingen, Dieterich. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

MARTIN, R., Die letzten Elemente der Materie in den Naturwissenschaften und in Herbart's Metaphysik. Crimmitschau, Burkhardt. 1 Mk.

WÜLLNER, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Bd.: Die Lehre vom Licht. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

MÜLLER, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 12. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

MOHN, H., Grundzüge der Meteorologie. Berlin, D. Reimer. 6 Mk.

RHODIUS, A., Ueber Mittelzahlen aus Beobachtungen von Naturerscheinungen. Berlin, Ernst & Korn. 1 Mk.

ERHARD, TH., Untersuchungen über die Absorption des Lichtes in einigen Chromsalzen. Freiberg, Engelhardt. 1 Mk. 50 Pf.

BREFIN, R., Zur Geschichte und Theorie der Beugungserscheinungen. Aarau, Sauerländer. 1 Mk.

ROMICH und FAJDIGA, Experimentaluntersuchung über die Fernwirkung dielektrischer Körper. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

NOWAK und ROMICH, Experimentaluntersuchung über die dielektrische Nachwirkung. Ebendas. 40 Pf.

BOLTZMANN, L., Ueber einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen. Ebendas. 60 Pf.

DVORAK, V., Ueber eine neue Art von Vibrationstönen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

ZETZSCHE, K., Die Entwickelung der automatischen Telegraphie. Berlin, Springer. 1 Mk. 60 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Gottfried Friedlein †,
ein Nekrolog von M. CANTOR.

„Sein Gedächtniss wird nicht erlöschen; seiner Asche sei Friede!" Das sind die Schlussworte eines Nachrufes, welchen Gymnasialprofessor Unger in Hof am Grabe Friedlein's, des am 31. Mai in seinem 48. Lebensjahre Dahingegangenen, vortrug. Wir können keinen bessern Anfang zu dieser Lebensskizze wählen. Sein Gedächtniss wird nicht erlöschen, und es soll uns eine mit Trauer gemischte Freude sein, das Unsrige dazu beizutragen, dass die Verdienste des Mannes nachhaltig anerkannt werden, der, so lange er schriftstellerisch wirkte, zu unseren wissenschaftlichen Gegnern gehörte und manche Fehde mit uns auskämpfte, welcher nun im Angesichte seiner Asche der Friede folgt. Diese unsere gegenseitige Stellung durfte von vornherein nicht unbetont bleiben, da wir es ebenso dem Verstorbenen schuldig zu sein glauben, seine niemals von uns verkannte geistige Bedeutung in das richtige Licht zu setzen, als uns selbst und den von uns vertretenen Anschauungen, nicht heute plötzlich für falsch zu erklären, dessen Wahrheit wir seit zwei Jahrzehnten verfechten. Die biographischen Nachrichten im engeren Sinne des Wortes entnehmen wir dem erwähnten Nachrufe, der uns zum Zwecke dieses Nekrologs mit dankend zu rühmender Bereitwilligkeit durch die Familie des Verstorbenen zur Verfügung gestellt wurde.

Johann Gottfried Friedlein ist am 5. Januar 1828 als Sohn eines Bäckermeisters in Regensburg geboren, das zweite von vier Kindern, welche der 1838 erfolgte Tod des Vaters zu Halbwaisen machte, für ihre Erziehung nur auf die treffliche Mutter angewiesen, welche der schwierigen Aufgabe, die ihr zugefallen war, sich völlig gewachsen zeigte. Gottfried, ein strebsamer, hochbegabter Knabe von eisernem Fleisse und seltener Willenskraft, widmete sich der Wissenschaft und bezog 1846 die Universität München, um Philologie und Mathematik zu studiren, für welche beiden Fächer er schon als Gymnasiast besondere Fähigkeiten an den Tag gelegt hatte. Dort warfen ihn die Anstrengungen, die er machte, eine akademische Preisfrage zu lösen, zum ersten Male auf ein gefahrdrohendes Krankenlager. Eine Gehirnentzündung stellte sich ein und liess eine Zeit lang das Schlimmste befürchten. Grund genug, in der Energie des Studiums einigermassen nachzulassen, und dennoch bestand Friedlein schon 1849 den Concurs für das Gymnasiallehramt, 1851 den für das Lehramt der Mathematik an Gymnasien. Im November 1851 erfolgte Friedlein's erste Anstellung als Assistent an dem Gymnasium seiner Vaterstadt, und nun sehen wir ihn befördert von Schule zu Schule, wenn wir ihn im December 1853 als Studienlehrer nach Erlangen begleiten, wo er auch die philosophische Doctorwürde sich erwarb, wenn wir ihm am 1. Oct. 1862 als Professor der Mathematik an das Gymnasium zu Ansbach folgen, am 16. März 1868 als Rector an die Studienanstalt in Hof zunächst mit der Lehrstelle an der Oberclasse, seit October 1868 mit der Professur der Mathematik, womit er später auch noch das Rectorat der von der Stadt neu organisirten höheren Töchterschule verband.

Die drei letztgenannten Orte: Erlangen, Ansbach, besonders aber Hof waren die Geburtsstätten zahlreicher Schriftstücke bald kleineren, bald grösseren Umfanges, bis 1860 mehr philologischen Inhaltes, von da an ziemlich ausschliesslich der Geschichte der Mathematik gewidmet. In dieser Richtung eröffnete sein Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern 1861 den Reigen, eine Abhandlung von nicht ganz vier Druckbogen, aber genügend, ihren Verfasser zum Haupte einer wissenschaftlichen Partei in Deutschland zu machen. Das Glaubensbekenntniss derselben lässt sich in die wenigen Sätze kleiden: „Das Columnenrechnen beginnt erst seit Gerbert, und zugleich damit auch die Benutzung von Gobarziffern. Alle angeführten Spuren früheren Columnenrechnens und früherer Anwendung sogenannter Apices beruhen theils auf beabsichtigten, theils auf unabsichtlichen Fälschungen. Die Rechenkunst der Römer und Griechen beschränkte sich neben einer Fingerrechnung auf Benutzung von Rechenpfennigen auf horizontalen Linien, dem Vorbilde des späteren Rechnens auf der Linie in Deutschland, welches dagegen mit dem Columnenrechnen keinen Zusammenhang besitzt.“ Im Grossen und Ganzen finden sich diese Sätze schon in der historischen Erstlingsarbeit Friedlein's, wenn sie auch genauer erst in späteren Veröffentlichungen begründet werden, so in Abhandlungen in dieser Zeitschrift aus den Jahren 1864 und 1865, in Besprechungen von naheliegende Gegenstände betreffenden Werken in der Literaturzeitung ebendieser Zeitschrift bis 1867, hauptsächlich in einem $10^1/_4$ Druckbogen starken Bändchen: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis zum 13. Jahrhundert. 1869.

Diese Anschauungen waren nicht gerade neu, so wenig, wie die ihnen diametral gegenüberstehenden Ansichten, zu deren Vertretern der Schreiber dieser Zeilen sich zählt. Seit dem Ende der dreissiger Jahre, um von früheren Versuchen in der Geschichte der Zahlzeichen zu schweigen, wurde derselbe Widerstreit der Meinungen in Frankreich zwischen Libri und

Chasles geführt. Vincent und Martin unterstützten der Hauptsache nach den Letzteren, während ein in Paris lebender deutscher Gelehrter Wöpcke, den leider die Wissenschaft schon am 25. März 1864 verlor, eine Art von Mittelstellung zwischen den Parteien einnahm. Die wir in Deutschland den Kampf führten und noch führen, haben vielfach von den Waffen Gebrauch gemacht, die bereits in anderen Händen sich bewährt zu haben schienen, doch dürfte Jedem von uns die Anerkennung nicht abzusprechen sein, dass wir emsig bemüht waren, auch neue Gründe, neues handschriftliches und gedrucktes Material aus den verschiedensten Literaturzweigen herbeizuschaffen, und wir persönlich erklären bereitwilligst, manches Neue in dieser Beziehung aus Friedlein's Schriften kennen gelernt zu haben. Wir haben seinen aufspürenden Fleiss stets auf's Höchste geachtet, auch da, wo sein auf sprachliche Kleinigkeiten gebanntes Auge ihm, wie wir meinen, den grösseren Fernblick nicht gestattete, welcher allein das richtige Verständniss historischer Dinge hervorbringt und ermöglicht. Wer als Maler sich ängstlich nur an die Richtigkeit der Wiedergabe jeder einzelnen Hautfalte klemmt, wird nie ein lebensvolles Bildniss, ähnlich in Charakter und Ausdruck, schaffen, und nicht anders scheint es uns sich mit der Kunst der Geschichtsschreibung zu verhalten.

Zu dem Materiale, welches immer auf's Neue in der Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlenrechnens benutzt wird, gehören die drei Werke, welchen die Handschriften die Titel: Arithmetik, Musik und Geometrie des Boetius beilegen. Die Frage nach dem Verfasser — ein Theil der obenerwähnten Streitfragen — kann hier nicht erörtert werden. Jedenfalls braucht jede Partei den genauen Text, wenn sie es mit der Wahrheit ernst meint und diese, nicht sich selbst, im Vordergrunde sieht. Friedlein hat eine neue vortreffliche Ausgabe dieser Bücher besorgt (Leipzig, 1867) und damit ebenso, wie mit dem Abdrucke des Rechenbuches des Victorius (1871 in dieser Zeitschrift und in demselben Jahre in nicht damit identischer Weise im *Bulletino Boncompagni*) sich wohlverdienten Dank erworben.

Die Geschichte der Zahlzeichen im Abendlande war, wie uns durch Prof. Unger berichtet wird, theilweise eine Vorarbeit zu einer Geschichte der Mathematik in Deutschland, welche Friedlein für den Cyclus der durch die historische Commission veröffentlichten Geschichtswerke einzelner Wissenschaften in ihrer Entwickelung in Deutschland übernommen hatte. Er hatte dieser Aufgabe sich unterziehen wollen ohne Schonung seiner durch eine in Erlangen überstandene Rippenfellentzündung auf's Neue geschädigten Gesundheit; aber mit den nach seiner Versetzung nach Hof ihm zufallenden, bald verdoppelten Rectoratsgeschäften, mit der schon in Ansbach übernommenen hälftigen Redaction einer von den Lehrern der bayrischen Gymnasien gegründeten Zeitschrift, mit der Sorge für Unterricht und Erziehung heranwachsender Kinder, welche er mit seiner Gattin redlich theilte, liess sich — das fühlte er wohl — eine so umfassende Arbeit nicht bewältigen, und so trat er wieder zurück, worauf, soviel wir wissen, die Aufgabe in die Hände von Prof. C. J. Gerhardt übergegangen ist.

Friedlein wandte sich nun Forschungen über die Geschichte der griechischen Geometrie zu, welche er nur einmal zu einem unangenehmen Streite mit Herrn Wohlwill über den galileischen Inquisitionsprocess (vergl. Zeitschrift für mathematischen Unterricht Bd. I und diese Literaturzeitung für 1871 und 1872) verliess. Auch auf dem Gebiete ältester Geometrie sind wir uns, wir möchten nicht sagen feindlich, aber als scharfe Gegner gegenübergestanden. Friedlein's Programme der Studienanstalt zu Hof von 1868, 1872, 1873, betitelt Beiträge zur Geschichte der Mathematik I, II, III, sind ebensoviele Streitschriften gegen uns, auf deren beide letzten wir in dieser Literaturzeitung geantwortet haben. Verweilen wir nicht bei diesen vielleicht beiderseitig in etwas gereizter Stimmung geschriebenen Aufsätzen. Wir nennen auch nur kurz die Abhandlungen in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht Bd. II und im *Bulletino Boncompagni* von 1871, in welchem er viele, auch wohl allzuviele Mühe anwandte, die Echtheit der sogenannten Definitionen des Heron von Alexandrien zu widerlegen. Wir heben lieber einige andere Leistungen hervor, in deren Schätzung Einstimmigkeit aller Fachgenossen herrscht. Schon 1866 hatte Friedlein in einem Ansbacher Programm zum Danke Derer, welche für die heronische Frage sich interessiren, die Geometrie des Pediasimus zum Drucke befördert, ein spätes Machwerk des XIV. Jahrh., aber dadurch überaus wichtig, dass Pediasimus ausgesprochenermassen aus Heron von Alexandrien schöpfte, und die Annahme doch wohl gerechtfertigt ist, dass ihm ältere und damit auch zuverlässigere Handschriften von dessen Geometrie zu Gebote standen, als uns heute, deren ältester heronischer Codex *A* in Paris nicht vor das XIII. Jahrhundert gesetzt werden kann. Noch verdienstlicher war die Herausgabe des griechischen Textes des Proklus Diadochus (Leipzig, 1873), mit welcher einem wahren Bedürfnisse abgeholfen wurde, da der alte Basler Abdruck dieses Commentars zu den euklidischen Elementen äusserst selten und kaum lesbar, die lateinische Uebersetzung des Barocius aber mehr als mangelhaft ist und die gleichfalls nicht sehr verbreitete englische Uebersetzung des Taylor, welche wir z. B. noch nie zu Gesicht bekommen haben, ganz von Barocius abhängen soll. Auch eine eigene Abhandlung Friedlein's aus dem *Bulletino Boncompagni* vom Jahre 1873 müssen wir noch erwähnen: *De Hypsicle mathematico*. Friedlein hat darin unwiderleglich, wie wir meinen, bewiesen, dass das sogenannte XV. Buch des Euklid oder II. Buch des Hypsikles nicht von diesem Letztern herrühren könne, sondern einer viel spätern Zeit, mindestens dem IV. oder V. nachchristlichen Jahrhundert, angehöre.

Diese Abhandlung bildet Friedlein's wissenschaftliches Testament. Im Frühling 1871 hatte ein Blutsturz als ernste Mahnung die Gefahr verkündet, welche dereinst dem geschwächten Körper drohe. Im Herbst 1874 traten bedenkliche Ohnmachtsfälle ein. Seit Anfang April begann in der Erkrankung seiner Lunge ein rascherer Verlauf. Am 31. Mai erlag Friedlein den schmerzlichen Leiden. Seiner Familie, wie der Wissenschaft ist er viel zu früh entrissen worden.

„Sein Gedächtniss wird nicht erlöschen; seiner Asche sei Friede!“

Nachträge zu einer früheren mathematisch-historischen Arbeit.

(Hierzu Taf. III, Fig. 5—9.)

Gegen eine im 1. Hefte dieses Bandes abgedruckte Abhandlung des Verf. hat M. Curtze[1]) einige Einwendungen erhoben, und ebenso hat sich M. Cantor[2]) gegen die Zeitbestimmung erklärt, welche wir bei jener Gelegenheit für das Alter der „Geometria deutsch“ zu geben versuchten. Obwohl mit einzelnen dieser Einwürfe nachgerade vollkommen einverstanden, glauben wir doch anderen auch nach nochmaliger genauer Prüfung der Sachlage nicht ganz beipflichten zu können, und erlauben uns deshalb, die streitigen Punkte hier nochmals kurz zur Sprache zu bringen. Allein auch noch aus anderen Rücksichten ist es uns wünschenswerth, auf jene frühere Arbeit zurückkommen zu können. Erstlich nämlich verdient die kurze Bemerkung, welche wir dort der angegebenen Näherungsconstruction des regulären Siebenecks widmeten, eine genauere historische Ausführung, und weiterhin ist es uns gelungen, für die in § 7 skizzirte Entwickelungsgeschichte der Geometrie Einer Zirkelöffnung eine Reihe neuer Belege beizubringen, welche bisher gar nicht beachtet worden zu sein scheinen. So wird denn die nachstehende Studie naturgemäss aus drei wesentlich verschiedenen Partien sich zusammensetzen.

I.

Die Bemerkungen Curtze's lassen sich folgendermassen formuliren:

1. Die „Geometria deutsch“ ist von den Bibliographen nicht durchweg übersehen worden;
2. es war nicht gestattet, aus Sprach- und Darstellungsform auf das muthmassliche Alter der Schrift zu schliessen;

---

1) Curtze, Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's: „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. S. 253 flgg.

2) Herr Cantor hat uns seine Ansicht über die Sache in einem ausführlichen Privatbriefe auseinandergesetzt, dessen Benützung für den angedeuteten Zweck uns gestattet wurde.

3. die Ansicht, dass zwischen Roriczer und Dürer kein geometrisches Werk deutscher Zunge existire, ist irrig.

Was nun Punkt 1 anlangt, so ist derselbe durch den von Curtze gelieferten Beweis in seinem Sinne *eo ipso* erledigt, und wir können nur bedauern, das Hain'sche Repertorium nicht damals beigezogen zu haben. Für's Zweite müssen wir uns der Meinung eines Gelehrten gegenüber allerdings bescheiden, welcher durch seine Betheiligung bei Neuordnung grosser Bibliotheken die ausgedehnteste bibliographische Kunde erlangen musste; indess möchten wir doch behaupten, dass in den frühesten Druckwerken Oberdeutschlands (vor Allem der schwäbisch-fränkischen Districte) durchweg ein (in unserem jetzigen Sinne) weit besseres Deutsch anzutreffen ist, als in mancher, einer spätern Zeit angehörigen Schrift mittel- oder niederdeutschen Ursprungs; auch bewog uns zu unserer Auffassung eine entschieden hervortretende sprachliche Aehnlichkeit zwischen der „Geometria deutsch" und dem erwähnten Büchlein Roriczer's.

Was aber drittens unsere Aufstellung bezüglich geometrischer Werke innerhalb des Zeitraumes 1486—1525 betrifft, so bekennen wir uns auch jetzt noch dazu, ohne freilich damit Curtze Unrecht geben zu wollen. Wir meinten damas ausschliesslich gedruckte Bücher, die nicht nur vorwiegend, sondern ausschliesslich geometrischen Inhalts wären, und in diese Kathegorie gehört weder das von Curtze angezogene Münchener Manuscript, noch, wie auch an jenem Orte bemerkt wird, das Rechenbuch des Grammateus. Dass wir nicht auch jene literarischen Leistungen mit zu subsumiren geneigt sein konnten, welche nebenher geometrische Dinge mitbehandeln, geht schon aus dem Umstande hervor, dass wir bei unserer Aufzählung nicht einmal der berühmten Incunabel Johann Widmann's[3]) gedachten, welche wohl Keinem, der sich mit Geschichte der Mathematik befasst, unbekannt sein kann — bekanntlich bietet jenes Werk viel geometrisches Material, so auch den Heron'schen Satz, welcher die Dreiecksfläche als Function der drei Seiten ausdrücken lehrt.

Nachdem wir so die Punkte discutirt haben, welche wir den Angriffen Curtze's gegenüber aufzugeben oder festzuhalten uns genöthigt sahen, wenden wir uns zur zweiten Hauptfrage, und hier erkennen wir denn, dass Curtze bezüglich des Alters der Schrift — wenn auch hauptsächlich aus negativen Gründen — mit uns übereinstimmt, dass ihm nämlich dieselbe mit grösserer Wahrscheinlichkeit in das fünfzehnte, als in das folgende Jahrhundert zu gehören scheint. Dass er als obere Grenze für die Epoche des Druckes das Jahr 1487 fixirt, sagt unserer Anschauungsweise vollkommen zu, wie dies auch aus unserer früheren Darstellung hervorgeht. Die Thatsache, dass die mathematische Xylographie bereits im Jahre 1482 zu Padua

3) Widmann, Behēde und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschaft, Leypzick 1489.

REES · LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

ausgeübt wurde, war uns durch eine frühere Schrift Curtze's bereits bekannt[4]), indess glaubten wir nach Falkenstein diese Neuerungen nicht als spontan entstanden, sondern als von Ratdolt beeinflusst ansehen zu müssen.

Cantor nun meint die Entstehungszeit der „Geometria deutsch“ mit Entschiedenheit nach Dürer ansetzen zu müssen, indem er die darin mitgetheilten Regeln doch zu hoch stellt, um sie einem reinen Praktiker zuschreiben zu können. Wir wollen uns dem Gewicht dieser Gründe nicht verschliessen, halten aber — ganz abgesehen von den jetzt durch Curtze aufgefundenen Beweismitteln — doch dafür, dass Dürer's Autorität eine viel zu bedeutende und festbegründete war, um nicht jedem Nachfolger die unbedingte Erwähnung seines Vorgängers zur Pflicht gemacht zu haben. Autorenangabe war freilich in jenen Zeiten gerade keine beliebte Sache, aber Dürer's Name machte eine leicht begreifliche Ausnahme, und aus dem Umstande, dass der unbekannte Verfasser unserer Vorlage gar keine Quelle citirt, kann wohl auch kein weitertragender Schluss abstrahirt werden, denn wen hätte er, der wohl kaum von Euclid wusste, überhaupt namhaft machen sollen?

II.

Wir besprachen in unserem Aufsatze (S. 11) die hübsche Näherungsverzeichnung des regelmässigen Siebenecks und versuchten die Genesis derselben ins richtige Licht zu stellen. Dabei wurde eine Kepler'sche Stelle angeführt, welche an sich von hohem Interesse ist, weil sie eine vollständige Uebersicht über die bis zu jener Zeit bekannt gewordenen Bemühungen liefert, jenes Problem zu lösen. Nachdem Kepler die von ihm als Dürer'sche bezeichnete Auflösung besprochen und — wohl nicht ganz mit Recht, wie wir darlegten, als *„experimentatio manuaria nimium rudis“* — verurtheilt hat, fährt er[5]) weiter fort: *„De Caroli Mariani Cremonensis et Francisci Flussatis Candallae paralogismis circa heptagonum vide Chr. Clavium Geometriae Practicae lib. VIII. prop. 30. et in commentariis in Euclidis lib. IV. pr. 16.*

Excitavit haec palaestra etiam Jllustrissimum D. Marchionem de Mala Spina, legatum anno 1614. Ser^mi Ducis Parmensis ad aulam Caesaream, qui diagrammate ingeniosissimo omnes omnium descriptiones superavit, existimans, subtensam $\frac{3}{14}$ *circuli aequalem esse* $\frac{5}{4}$ *semidiametri et sic effabilem longitudine: demonstrationis apparatus tantae fuit sollertiae, ut vel Euclidem lateret, assumtum aliquid fuisse indemonstratum.“*

Ueber die Genauigkeit dieser letzteren Bestimmung können wir uns sehr leicht ein Urtheil bilden. Ist 1 der Kreisradius und $3x$ der Winkel, welchen die Sehne $\frac{5}{4}$ spannt, so besteht die Gleichung

4) Curtze, Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme, Berlin 1870, S. 9.

5) *Johannis Kepleri Astronomi opera omnia*, ed. Frisch, *Vol. V, Francofurti et Erlangae MDCCCLXIV*, S. 107.

$$\left(\tfrac{5}{4}\right)^2 = 1 + 1 - 2\cos 3x,$$

also

$$\cos 3x = \tfrac{7}{32}, \quad \log\cos 3x = 0{,}84510 - 1{,}50515 = 9{,}34995 - 10$$

und

$$3x = 77^0\,3'\,54'', \quad x = 25^0\,41'\,18''.$$

Multiplicirt man diesen Werth mit 2, so erhält man den Centriwinkel des Siebenecks gleich

$$51^0\,22'\,36'',$$

und dieser Werth liegt zwischen dem wahren und dem durch die einfachere Zeichnung gelieferten gerade in der Mitte — wenigstens scheint es so.

Sehen wir nun auch zu, bis zu welchem Grade die Methoden der anderen von Kepler aufgeführten Mathematiker sich als exact erweisen. Was Clavius in seinem Commentar zum Euclid giebt[6]), ist nur geringfügig; eingehender behandelt er die Materie an der andern Stelle[7]), bei Gelegenheit seiner dreissigsten Proposition: „*Inventionem lateris heptagoni in dato circulo non recte à quibusdam tradi, demonstrare.*“ Dieser Beweis erstreckt sich, wie auch schon aus Kepler's Worten hervorgeht, auf zwei anscheinend damals sehr bekannte Regeln.

„*Carolus Marianus Cremonensis totum unum libellum edidit de inventione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione*“: Man verlängere den Kreisradius AB (Fig. 5) über B, mache $BC = \frac{1}{4} AB$ und beschreibe um C mit AB als Halbmesser einen neuen Kreis, welcher den ursprünglichen einmal in D schneidet; alsdann soll BD die gesuchte Siebenecks-Seite sein. Die erreichte Genauigkeit ist dieselbe, welche die Vorschrift der „Geometria deutsch“ liefert, indem $51^0\,19'$ für den Centriwinkel erhalten werden.

Es ist nun gewiss höchst eigenthümlich, dass diese Methode des Cremonesers, für welche Kepler (s. o.) nur den Titel *paralogismus* kennt, mathematisch genau die gleiche ist, deren Erfindung dem italienischen Grafen so hohe Lobsprüche einträgt, und wir dürfen annehmen, dass die hohe Stellung des Dilettanten wohl etwas auf den bestimmbaren Kepler eingewirkt haben mag. Dass unsere Behauptung richtig, ist leicht zu erweisen. Denn lassen wir Malaspina's Satz als wahr gelten, so ist im Dreieck ACD, weil es nach Construction gleichschenklig ist:

$$\angle ADC = \frac{2 \cdot 3\pi}{14} = \frac{3\pi}{7}$$

und

$$\angle CAD = \frac{\pi - \angle ADC}{2} = \frac{7\pi - 3\pi}{14} = \frac{2\pi}{7},$$

6) *Euclidis elementorum libri XV. Auctore Christophoro Clavio Bambergensi S. J. Romae* 1574. Bl. 142.

7) *Clavius, Geometria practica, Romae* 1604. S. 407 flgg.

wie bemerkt war. Die herausgerechnete Ungleichförmigkeit beider Methoden ist also nur scheinbar und müsste bei einer schärferen Berechnung mit mehrstelligen Logarithmen verschwinden.

Die andere Regel rührt her von Candalla, dem durch seine geometrischen Leistungen und Extravaganzen bekannten Prälaten von Toulouse. Clavius bemerkt hierzu: „*Franciscus Flussas Candalla vir nobilissimus ac doctissimus conatus est construere triangulum Jsosceles habens utrumvis angulorum aequalium ad basem triplum reliqui anguli, ut beneficio ipsius in dato circulo heptagonum inscribatur.*“ Seine Idee ist folgende: Man bilde den Sextanten MND (Fig. 6), ziehe die Sehne ND und halbire die Höhe DO in P; alsdann beschreibe man um N mit PO als Radius einen Kreis, welcher den ersten in Q trifft, und ziehe NQ, QM, so ist MNQ das gleichschenklige Dreieck, in welchem

$$\varphi = \angle QMN = \pi - 2.3\ \angle QMN = \frac{\pi}{7}$$

sein soll. Die Rechnung ergiebt, da im Einheitskreise

$$NQ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ist:

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(1 + 1 - \tfrac{3}{16}\right) = \tfrac{29}{32},$$

und hieraus

$$\varphi = 25^{\circ}\ 1'.30'',\quad 2\varphi = 50^{\circ}\ 3';$$

diese Construction ist somit bei Weitem ungenauer, als alle die, welche wir vorher kennen lernten. Clavius schliesst mit den Worten: „*Paralogismos tum Caroli Mariani, tum Candallae, quas committunt, non est hujus loci manifestare: satis nobis est, indicasse eos non rectè descripsisse heptagonum aequilaterum, ac aequiangulum.*“

Die von der „Geometria deutsch“ und von Dürer angegebene Regel ist neuerdings wieder von Plagge[8]) als scheinbar neu producirt worden. Derselbe nennt auch noch eine zweite, für welche er zwar mehrere neuere Lehrbücher als Quellen anführt, ohne jedoch ihren eigentlichen Ursprung zu erkennen. Dieselbe ist nämlich nur ein Specialfall der einst so berühmten Renaldin'schen Generalregel, auf deren Unzulänglichkeit zuerst von Jacob Bernoulli[9]) aufmerksam gemacht worden ist.

III.

Für die Geschichte der Einen Zirkelöffnung hat Curtze[10]) ein wichtiges, von uns in der Schwebe gelassenes Factum nunmehr als unumstösslich sicher dargethan, die Thatsache nämlich, dass die Lösung solcher Auf-

8) Plagge, Zwei Näherungswerthe für die Seite des regulären Siebenecks im Kreise, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 4. Bd., S. 356.

9) *J. Bernoulli, Disputatio tertia de seriebus infinitis, Basileae* 1696. These.

10) Curtze, Bemerkungen etc., S. 59.

gaben in dem zwischen Tartaglia einer- und Cardan-Ferrari andererseits ausgefochtenen Problemduell eine wichtige Rolle spielte. Aus der von Curtze wörtlich angeführten Originalstelle der „Cartelli" geht aber noch weiter die für unsern Zweck besonders wichtige Erkenntniss hervor, dass bereits Ferro auf diesem Gebiete mit Erfolg thätig war. In Betreff der Art und Weise, wie die Leistungen des Genannten dem Ferrari bekannt wurden, bemerkt Gherardi[11]): „Woher kannte aber Ferrari die Existenz dieser speciellen geometrischen Untersuchungen des berühmten Mitbürgers? Vielmehr wie konnte er sie so untersuchen, dass er ein so bestimmtes lobendes Urtheil abgeben konnte? Waren sie etwa in demselben Werke von der Hand Ferro's, das Dalla Nave besass, enthalten oder in einem zweiten Werke desselben Verfassers separat behandelt, das ebenso wie das erste, Ferrari und Cardan mitgetheilt war?" Persönlich von Ferro konnte Cardan's Schüler jene Notiz wohl nicht gehabt haben.

Des Altdorfer Mathematikprofessors Daniel Schwenter gedachten wir bereits früher in dieser Angelegenheit; derselbe hat aber noch mehr darin zu leisten versucht, als wir damals glaubten, und es wird deshalb hier am Platze sein, unsere frühere Mittheilung durch einige Auszüge aus seinem Lehrbuche der praktischen Geometrie[12]) zu ergänzen. Die erste hierher gehörige Aufgabe ist diese[13]): „Mit unverrucktem Circkel, auß einem für gegebenen Punct, einer für gegebenen Lini, eine parallel-Linie zuziehen, doch daß der Circkel so weit offen, daß man damit auß dem Punct auff die Lini geraum reichen könne." Die Lösung (Fig. 7) ist folgende: „Mir ist für gegeben die Lini bc, und der Punct a, der Circkel aber ist so weit offen, daß ich auß a damit ins c reichen kan; mach also auß a mit solcher apertur die zwey Zeichen de, auff bc, und den Bogen f, also unverruckt setze ich den Circkel mit einem Fuß ins e, und mach auch den Bogen f, in f, den vorigen durchschneidend, und durch af eine Lini; diese wird der Lini bc parallel sein." Diese Construction ist offenbar ganz unrichtig; sie würde nur dann mit der Wahrheit stimmen, wenn $Laed = \frac{\pi}{3}$ wäre, wie dies denn auch wirklich in der Figur dargestellt ist. Es ist unbegreiflich, wie ein sonst so geschickter Geometer in eine solche Verirrung fallen konnte, um so mehr, wo doch die richtige Verzeichnung, selbst ohne Zuhilfenahme des vollständigen Vierecks, so überaus leicht ist. Allein überhaupt hatte er hier kein Glück; nicht besser gelingt Schwenter die Lösung der Aufgabe[14]): „Mit unverrucktem Circkel, eine jede Lini, in etliche für gegebene Theil

11) Gherardi, Einige Beiträge zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna, deutsch von Curtze, Archiv d. Math. u. Phys. 52. Bd., S. 130.

12) *Schwenter, Geometriae practicae novae et auctae libri IV*, Nürnberg MDCLXVII.

13) *Ibid.* S. 53.

14) *Ibid.* S. 73.

ausʒutheilen." Er leitet seine Betrachtung folgendermassen ein: „Cardanus und Tartaglia, die zween fürtreffliche Männer, haben mit dieser Frage einander exerciret, und ob ich zwar nicht eigentlich weiß, wie solches einer oder der ander aufgelöset, wil ich doch solches, nach meiner Meinung zu verrichten, lehren." Ist dann ab (Fig. 8) die vorläufig nur in drei gleiche Theile zu theilende Strecke, cd die constante Zirkelöffnung, so mache man $ae = bg = cd$ und errichte über ae und bg nach entgegengesetzten Seiten die gleichseitigen Dreiecke aef und bgp, ferner mache man auch $ai = bq = cd$. Werden damit die (parallelen) Geraden fi und pq gezogen, so schneiden sie die Strecke ab bezüglich in y und x so, dass

$$ay = yx = xb$$

wird. Der Beweis der Unrichtigkeit gestaltet sich sehr einfach, und ganz ähnlich lässt sich auch der allgemeine Fall einer n-Theilung erledigen.

Späterhin beschreibt Schwenter auch die Dürer'sche Fünfeckconstruction, über deren wahren Charakter er sich jedoch ausnahmsweise nicht täuscht[15]). Dies ist für uns hier besonders von Interesse deshalb, weil daraus zwei Jahrhunderte später ein Liebhaber der Wissenschaft seine Anregung zu eigener erfolgreicher Beschäftigung mit diesen Gegenständen herleitete.

Wir meinen hiermit einen mathematischen Dilettanten, Namens Bernet, welcher uns sonst durchaus nicht bekannt ist. In dem gelehrten Briefwechsel Lambert's, welchen Jean Bernoulli edirt hat, findet sich auch ein Schreiben jenes Herrn an seinen berühmten Landsmann[16]): Er bemühe sich schon lange, durch Behandlung irgend einer schwierigeren Aufgabe der Wissenschaft einen kleinen Dienst zu leisten, und glaube jetzt ein passendes Thema gefunden zu haben, „da es Schwenter in seinem Buche, die *Geometria practica* betitelt, meldet, er finde, es seye ohnmöglich, mit unverrücktem Circul einen Triangel zu beschreiben, dessen zween Winkel an der Basis doppelt so gross als der dritte". Wo diese Stelle bei Schwenter sich finden soll, konnten wir nicht bestimmen; es will uns vielmehr scheinen, als habe Bernet etwas zwischen den Zeilen gelesen, um seine eigene Leistung ein wenig höher zu schrauben. Wie dem aber auch sei, soviel wird man zugestehen müssen, dass seine Lösung die eleganteste der ganzen Periode vor Steiner ist.

Er beschreibt (Fig. 9) einen Kreis ABC, zieht einen willkürlichen Diameter BK und errichtet in B auf jenem senkrecht $BD = BK$. Dann wird D mit dem Centrum E durch eine Gerade verbunden, welche die Peripherie in A und C schneidet, und schliesslich auf CD ein gleichschenkliges Dreieck so errichtet, dass $CH = DH = CA$ wird — dies ist das verlangte. In der

15) *Ibid.* S. 197.

16) Joh. Heinr. Lambert's gelehrter Briefwechsel, 2. Band, Berlin 1782. S. 298.

That ergiebt sich, wie auch Lambert[17]) auf einem dem Briefe beigelegten Papierchen bemerkt hat, sofort die charakteristische Proportion

$$BD:DC=DC:(BD-DC).$$

Eine kleine Schwierigkeit ist hier allerdings noch nicht gehoben, nämlich die Verzeichnung des Dreiecks CDH, doch würde dieselbe sich etwa so bewerkstelligen lassen: Man halbire CD in M und beschreibe über CM das gleichschenklige Dreieck CMN mit der gegebenen Zirkelöffnung, verlängere hierauf CN und ziehe durch D die Gerade $DJ \| MN$, bis sie die CN in H schneidet. Die fundamentalen Constructionen durfte Bernet natürlich als bekannt voraussetzen.

Dies sind die neuen Documente, zu welchen uns wiederholte Beschäftigung mit der Geschichte dieses Specialfaches verholfen hat.

München. Dr. Günther.

17) *Ibid.* S. 300.

Recensionen.

Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, von J. THOMAE.

Seit längerer Zeit u. A. damit beschäftigt, des Genauesten die Grundlagen der Integralrechnung zu studiren, habe ich einige meiner Ergebnisse schon in Abhandlungen veröffentlicht, und gedenke meine Resultate im Zusammenhange in einem schon einigemale angekündigten Werke über Convergenz und Divergenz niederzulegen.

Meine Untersuchungen behandelten die Aufgabe, ein Princip aufzustellen, auf welches man in einheitlich durchgeführter Weise alle Grundlehren der Integralrechnung gründen könnte. Es war erwünscht, dazu die allgemeine Bedingung der Integrirbarkeit verwenden zu können, welche Riemann zuerst aufgestellt hat, und deren Nothwendigkeit sich leicht einsehen lässt. Es handelte sich zunächst darum, festzustellen, ob die Bedingung sich analytisch zu solchem Gebrauch eignete. Dass dies glücklicherweise der Fall ist, habe ich dadurch gezeigt, dass ich nacheinander alle wichtigen Grundsätze der Integralrechnung der einfachen Integrale auf jene Bedingung zurückführte* und ihr auch eine wohl nicht überflüssige neue und erweiterte Form ertheilte**. Diese Forschungen dringen schliesslich bis zu dem Satze durch, dass eine durch eine trigonometrische Reihe darstellbare, jener Bedingung genügende Function auch durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar ist.

Es muss mir im Hinblick auf die von mir beabsichtigte Zusammenfassung meiner Untersuchungen über die angeführten Gegenstände natürlich von grossem Werthe sein, wenn ein so guter Mathematiker, wie Herr Thomae, einzelne Theile ihres Gebietes schon früher einer für das grössere mathematische Publikum bestimmten Bearbeitung unterwirft. Auch aus deren Mängeln, wenn sie solche enthält, werde ich Vortheil ziehen können.

---

* Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen etc., Borch. Journ. Bd. 79, S. 21; Allgemeine Lehrsätze etc., Borch. Journ. Bd. 79, S. 38 Art. 1; Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen, Borch. Journ. Bd. 79, S. 259; Beweis, dass die Coefficienten etc., Abh. d. k. bayrischen Akad. d. II. Cl., XII. Bd., S. 119.

** Die vorstehend citirte Note: Ueber eine veränderte Form etc.

Ueber die Art und Weise aber, wie Herr Thomae in seiner Schrift meiner Urheberschaft verschiedener Sätze gerecht oder vielmehr nicht gerecht wird, habe ich ernsten Grund, mich zu beklagen. Ich meine, man muss entweder gar nicht citiren, oder so vollständig, dass man Missdeutungen nicht ausgesetzt ist. Die Redaction des Herrn Thomae zeigt, wie man in der Beobachtung jener Vorschrift nicht aufmerksam genug sein kann, denn sie lässt allerdings schwere Missdeutungen zu, die er nicht entfernt beabsichtigt hat. Im Vorwort sagt er, dass die Untersuchungen, auf denen er fusst, theils durch die Riemann'sche Definition des bestimmten Integrals, theils durch Mittheilungen Weierstrass'scher Schüler aus dessen Vorlesungen angeregt wurden. Alsdann theilt Herr Thomae verschiedene Sätze mit, die ich schon veröffentlicht habe, allerdings mit anderen Beweisen, und erwähnt meiner Betheiligung an diesen Untersuchungen bei den Hauptsätzen nicht, sondern erst spät bei einem Corollarsatze (§ 35*a*). Hieraus könnte Jemand, der meine Arbeiten kennt und die Thomae'sche Schrift liest, schliessen, dass die in Rede stehenden Sätze auf Mittheilungen Weierstrass'scher Schüler zurückzuführen sind. Nun ist aus Weierstrass'schen Anregungen schon manches Treffliche hervorgegangen, und ich würde, wenn ich mich bei den in Rede stehenden Arbeiten auf ihn berufen könnte, darin die wirksamste Empfehlung meiner Publicationen erblicken. Aber da in meinen gedruckten Aufsätzen von Mittheilungen seiner Schüler keine Erwähnung geschieht, so müsste mich mein literarisches Gewissen — und ich habe eines — einer Veruntreuung geistigen Gutes bezichtigen, wenn die Behauptung des Herrn Thomae, soweit sie sich auf mich beziehen kann, wahr wäre. Mein Gewissen ist aber rein. Ich verdanke Herrn Weierstrass manche wichtige Begriffserweiterung, habe aber nie davon gehört, dass er auf die obenerwähnten Untersuchungen bezügliche Mittheilungen seinen Schülern gemacht habe.

Um jetzt auf die Schrift selbst näher einzugehen, so enthält sie vieles Gute, und namentlich gewisse Grundsätze der Functionentheorie sind durch directe Einführung dekadischer Zahlen hübsch bewiesen. Jene folgerichtige und durchsichtige Anordnung des Stoffes und der Beweise, in der sich die eigentliche Kunst der Darstellung zeigt, wird nur dem gelingen können, der die Schwierigkeiten der Autorschaft in den aus häufig sehr zarten Fragen sich aufbauenden Urelementen einer Theorie nicht unterschätzt. Heben wir einige Punkte besonders hervor.

Erstens: Unter den numerischen Vorbegriffen ziehe ich für die Existenz der von mir aufgestellten Unbestimmtheitsgrenzen (§ 3) auch den von mir (Münch. Abhandl. Bd. XII, S. 125) mitgetheilten Beweis vor.

Ohne sodann über die Zweckmässigkeit der Einführung eines vorwärts und eines rückwärts genommenen Differentialquotienten gegenüber der allgemeinen Form $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon+\varepsilon_1}$ rechten zu wollen, gehe ich sofort auf einige Punkte ein, die den Integralbegriff anlangen.

Nachdem meine Umformung, die zum Zwecke hat, Sätze der Integralrechnung, die für mit Ausnahme einzelner Punkte stetige Functionen gelten, auf nur integrirbare zu übertragen (Borch. Journ. Bd. 79, S. 41 flgg., Münch. Abh. Bd. XII, S. 129 flgg.), in § 15 in unwesentlich geänderter Form eingeführt, wendet sich der Verfasser zum Beweis des Hauptsatzes, dass (in meinen Bezeichnungen) $b-a=\delta_1+\delta_2+\ldots\delta_n$ gesetzt und, unter σ_p die grösste Werthdifferenz der Function $f(x)$ im Intervall δ_p verstanden, der Werth des $\lim\limits_{n=\infty} \Sigma\delta_p f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots\Theta\delta_p)$, $0\leqq\Theta\leqq 1$, dann unabhängig von der Art ist, wie die δ verschwinden, wenn $\lim\limits_{n=\infty} \Sigma\delta_p\sigma_p=0$ ist. Ueber die Methoden, diesen Beweis zu führen, habe ich Einiges zu bemerken.

Ich kenne deren zwei. Nach der einen denkt man sich bei zwei zu vergleichenden Eintheilungen des Intervalles $b-a$, die ich mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ und $\delta'_1, \delta'_2, \ldots$ bezeichnen will, zunächst die Anzahl der δ und δ' ins Unbegrenzte zunehmend, mithin diese selbst abnehmend. Man vergleicht dann die Eintheilungen δ und δ' mit einer dritten $\Delta_1+\Delta_2+\ldots$, bei der das kleinste Δ ausserordentlich viel grösser als das grösste der δ, δ' angenommen wird. Indem man die Intervalle Δ bis auf die unvermeidlichen Differenzen, deren Einflusslosigkeit schliesslich nachgewiesen werden muss, aus den Intervallen δ und δ' zusammensetzt, ergiebt sich durch leichte Umformungen der Satz.

Der andere Beweis, den ich in einem vor einigen Semestern in Freiburg gehaltenen Colleg begonnen, aber nicht ganz durchgeführt habe, weil ich unvermuthet auf Schwierigkeiten stiess (ich habe mich eben erst später völlig davon überzeugt, dass die Riemann'sche Bedingung zur analytischen Grundlage der Theorie der bestimmten Integrale sich eignet), dieser andere Beweis geht in seinem Grundgedanken von den nicht integrirbaren Functionen aus, und zwar von folgendem Satze: Wenn $f(x)$ irgend eine voraussetzungslose Function vorstellt, und man bezeichnet mit g_p und k_p ihren grössten und kleinsten Werth in einem Theilintervall δ_p des Intervalls $b-a$, so sind die Grössen $\lim\limits_{n=\infty}\sum_1^n \delta_p g_p$, $\lim\limits_{n=\infty}\sum_1^n \delta_p k_p$ der Function eigenthümliche, von der Art des Nullwerdens der δ unabhängige Grössen. Wenn die δ_p in der Weise abnehmen, dass die Theilpunkte jeder vorhergehenden Eintheilung von $b-a$ in Partialintervalle unter denen jeder folgenden enthalten sind, so ist klar, dass z. B. $\sum_1^n \delta_p g_p$ sich nirgends wachsend einer festen Grenze nähern muss. Nun ist noch ein doppelter Nachweis zu leisten.

Erstens, dass dieselbe Grenze für jede Annahme über die δ_p erreicht wird, wenn diese in der Weise abnehmen, dass die früheren Theilpunkte stets unter den späteren bei Abnahme der δ sich befinden, zweitens, dass diese Voraussetzung aufgegeben werden darf, d. h. dass für eine bedingungsfreie Abnahme der δ (bei der sie z. B. periodisch in einzelnen Strecken des Intervalls wieder zunehmen können) dieselbe Grenze erreicht wird. Diese beiden Punkte lassen sich durch eine Schlussform erledigen.

Man denkt sich zwei verschiedene Eintheilungen $\delta_1, \delta_2, \ldots; \delta'_1, \delta'_2, \ldots$ und beide Arten δ schon so klein, dass die Summe $\Sigma\delta_p g_p$, $\Sigma\delta'_p g'_p$ um ein beliebig Kleines von ihren Grenzen G, G' entfernt sind; aber man nimmt das grösste δ' ausserordentlich viel kleiner an, als das kleinste δ. Alsdann kann man nachweisen, dass man zu den Theilpunkten der δ' noch die Theilpunkte der δ mit den dadurch neu hinzukommenden Intervallen fügen kann, ohne dass dies einen andern als verschwindenden Einfluss übte, so dass die Eintheilung δ' als eine Fortsetzung der Eintheilung δ mit Einreihung der früheren Theilpunkte unter die späteren angesehen werden kann. Somit wird also $G=G'$. Nun werde eine Eintheilung δ betrachtet, bei der die Abnahme der δ an keine Bedingung geknüpft ist. Wenn die δ schliesslich alle Null werden, wird es Anzahlen $n_1, n_2, \ldots$ der δ geben, der Art, dass z. B. das kleinste der $n_1 \delta$ ungemessen viel grösser als das grösste der $n_2 \delta$ ist, und dann wird man die Theilpunkte der $n_1 \delta$ und die dadurch entstehenden Intervalle ohne Einfluss übenden Fehler zu den Theilpunkten und Intervallen der $n_2 \delta$ fügen dürfen, und wird somit diesen Fall auf den vorigen reducirt haben, wo die Theilpunkte der früheren Eintheilungen zu denen der späteren gehören. Somit kann auch dem zweiten Beweisverfahren volle Genauigkeit gegeben werden.

Da sich nämlich alle diese Sätze von vornherein grosser innerer Wahrscheinlichkeit erfreuen, so kann Verdienst und Kunst des Mathematikers bei ihrer Darlegung doch wohl nur darin bestehen, dass er wirklich arithmetisch genaue Beweise ersinnt, die keine durch die geometrische Phantasie des Lesers auszufüllenden Lücken offen lassen.

Das zweite Beweisverfahren ist erheblich länger als das erste, allein es hat den Vorzug, uns zu neuen Begriffsfestsetzungen betreffs der voraussetzungslosen Functionen, welche die Bedingung der Integrirbarkeit nicht erfüllen, zu verhelfen. Es sei $f(x)$ eine solche Function, so sind also die

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n \delta_p g_p, \quad \lim_{n=\infty} \sum_1^n \delta_p k, \quad \text{wenn} \quad \sum_1^n \delta_p = x-a \quad \text{ist, feste Grössen, also}$$

Functionen von x, die man mit $G(x)$, $K(x)$ bezeichnen kann, und zwar sind diese Functionen, wie leicht zu sehen, stetig. Es wird also jede beliebige Function auf ihrem voraussetzungslosen Gange von zwei ihr eigenthümlichen stetigen Functionen begleitet. Wenn man mit einer nicht integrirbaren Function $f(x)$ das Integral $\lim \Sigma \delta_p f(a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots \Theta \delta_p)$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$, bildet, so wird es unbestimmt, und zwar werden die Unbestimmtheitsgrenzen von dem Gesetze der Abnahme der δ abhängen, so dass für verschiedene Gesetze die Unbestimmtheitsgrenzen des Integrals selbst unbestimmt sind. Die Functionen $G(x)$, $K(x)$ sind nun die Unbestimmtheitsgrenzen der Unbestimmtheitsgrenzen des Integrals $\int f(x)\, d(x)$.

Ich habe mich viel mit diesen Functionen beschäftigt, die für mich ein ausserordentliches Interesse haben. Namentlich habe ich untersucht, von welchen integrablen Functionen, wenn eine voraussetzungslose Function vorliegt, $G(x)$, $K(x)$ die Integrale sind; dann habe ich die Darstellung von $G(x)$ und $K(x)$ nach den Principien der Notiz (Borch. Journ. Bd. 79, S. 259) durchgeführt und endlich Beispiele betrachtet. Ich werde meine Resultate seiner Zeit mittheilen.

Ich habe (Borch. Journ. Bd. 79, S. 22) den Definitionssatz des bestimmten Integrals nach dem ersten Verfahren bewiesen, weil es das kürzere war und die Nebenfragen bei dem zweiten Verfahren noch nicht erledigt sind. Herr Thomae hat den zweiten Weg eingeschlagen; allein es fehlt der Nachweis, dass man die Abnahmeform der δ, wobei die früheren Theilpunkte sich unter den späteren finden müssen, durch eine beliebige ersetzen kann. Die Consequenzen in Bezug auf voraussetzungslose Functionen zu ergeben, war der Gang seiner Betrachtungen nicht angethan, der im Gegensatz zu dem meinigen bei den stetigen Functionen beginnt, während ich in der Abhandlung „Versuch etc." von der Function ohne Beschränkungen ausgehe, um nach und nach immer grössere Beschränkungen einzuführen.

Die äussere Anordnung seines Beweises anlangend, so ist Folgendes nicht recht klar. Er will vom Limes der Summe

$$S_n = \sum_0^{n-1}{}_\mu (a_{\mu+1} - a_\mu)[g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)], \quad 0 \leqq \xi \leqq 1$$

zeigen, dass er erstens von der Wahl der ξ, zweitens von der Wahl der Theilpunkte $a_1, a_2, \ldots$ unabhängig ist, wenn der Limes der Summe $\Sigma(a_{\mu+1} - a_\mu)(G_\mu - g_\mu)$ Null ist, in der die Differenzen $a_{\mu+1} - a_\mu$, $G_\mu - g_\mu$ positiv sind. Versteht sich die Unabhängigkeit von den ξ, deren Nachweis erst nach anderthalb Seiten fertig ist, unter solchen Umständen nicht von selbst, da man doch stets einen mittleren Werth der ξ von der Summe $\sum_0^{n-1} \xi_\mu (a_{\mu+1} - a_\mu)(G_\mu - g_\mu)$ nehmen kann?

Die zweite Anmerkung S. 17 über die Functionen ohne Differentialquotienten ist — Herr Thomae nehme mir das nicht übel — eine seltsame Lesefrucht. Ich habe (Borch. Journ. Bd. 79, S. 27 flgg.) ungefähr das Gegentheil gesagt.

Den zweiten Mittelwerthsatz anlangend, so hatte ich schon den übersichtlichen Beweis des Herrn G. F. Meyer dahin ergänzt, dass der Function unter dem Integralzeichen nur die Integrirbarkeit auferlegt ist (Borch. Journ. Bd. 79, S. 42, Anm.). Wenn weiter Herr Thomae in der Formel

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx, \quad a \leqq \xi \leqq b,$$

im Falle $f(a)$ von $f(a+0)$, $f(b)$ von $f(b-0)$ verschieden ist, die Werthe $f(a)$ und $f(b)$ geschrieben wissen will, so ist zu bemerken, dass man auch $f(a+0)$ und $f(b-0)$ darin einsetzen darf. Der genaue Satz lautet, dass in vorstehender Formel statt $f(a)$ irgend ein Werth $\leqq f(a+0)$, statt $f(b)$ irgend ein anderer Werth $\geqq f(b-0)$ stehen darf, ohne dass ξ das Intervall $a \leqq \xi \leqq b$ verlässt. Das Integral links bleibt dabei unverändert.

Was ferner die Differentiation unter dem Integralzeichen betrifft, so hat man hier zweierlei auseinander zu halten. Man kann fragen: Ist allgemein zu reden, d. i. für continuirlich sich folgende Werthe von β

$$\frac{d}{d\beta}\int_a^b d\alpha\, f(\alpha,\beta) = \int_a^b d\alpha\,\frac{df(\alpha,\beta)}{d\beta}\,?$$

Und dann: Findet diese Beziehung für besondere Werthe von β bisweilen nicht statt? Die letztere Frage scheint mir indessen in ein allgemeineres Capitel zu gehören. Denn da es sich um die Vergleichung der Grenzwerthe

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_a^b d\alpha\,\varphi(\alpha,\varepsilon) \text{ und } \int_a^b d\alpha\,\varphi(\alpha,0)$$

handelt, wo im vorliegenden Falle $\varphi(\alpha,\varepsilon) = \dfrac{f(\alpha,\beta+\varepsilon)-f(\alpha,\beta)}{\varepsilon}$ ist, so hat man es überhaupt mit Grenzwerthen von Integralen für besondere Werthe eines Parameters zu thun, eine der feinsten und schwierigsten Fragen der Analysis*. Diese Punkte werden in der besprochenen Schrift nicht recht auseinander gehalten.

Betreffs der Differentiation des Integrals $\int_a^b d\alpha\, f(\alpha,\beta)$ für allgemeine Werthe von β hat man, wenn $f(\alpha,\beta)$ zwischen den Grenzen der Integra-

---

* Wenn für einzelne Werthe von α die Function φ unendlich wird, so giebt es unzählige Beispiele dafür, dass die vorstehenden beiden Grenzwerthe nicht gleich zu sein brauchen. Die Schwierigkeiten liegen in der Annahme, dass $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ durchweg endlich sei.

tion als sein Zeichen nicht wechselnd angenommen wird, und für beliebige incl. unendliche) Werthe der Grenzen die Regel: Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist gestattet in einem Intervall von y, in welchem, $f'(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ gesetzt, das Integral $\int\limits_a^b dx\, f(\alpha,\beta)$ absolut convergent ist und die Grösse

$$\frac{f'(x,y+\varepsilon)}{f'(x,y)}$$

der Einheit sich nähert, wie man auch gleichzeitig ε verschwinden lassen und x zwischen den Grenzen des Integrals hin und her bewegen möge.

Wenn aber die Function $f(x,y)$ zwischen den Grenzen der Integration ihr Zeichen in der Weise wechselt, dass dieses Zeichenwechseln durch eine hinzuaddirte Function nicht beseitigt werden kann, so behaupte ich gegen Herrn Thomae (S. 29), dass es allerdings Methoden giebt, mit deren Hilfe man in sehr vielen Fällen die Integrale in solche, die unter dem Integralzeichen differentiirbar sind, überführen kann (Borch. Journ. Bd. 79, S. 32, Anm.). Im Ganzen steht aber allerdings die Sache so: Wenn man von den in endlicher Form aus algebraischen, logarithmischen, periodischen Functionen, aus Thetas, Gammas u. s. f. zusammengesetzten Functionen absieht, so können wir nur äusserst wenige Functionen differentiiren, und jene Functionen sind doch kaum Strandwasser des unendlichen Functionenmeeres zu nennen. Von den Functionen, die nicht differentiirbar sind, weil sie keinen Differentialquotienten haben, gar nicht zu reden, so ist es eine seltene Ausnahme, wenn man eine durch eine Reihe oder ein bestimmtes Integral gegebene Function differentiiren kann. Welches ist z. B. der Differentialquotient von $\int\limits_0^\infty dx \frac{e^{\cos e^{x}(\alpha+1)}}{\alpha^2+x^2}$ nach x? Ich vermuthe, dass die Functionentheorie hier aushelfen wird, indem sie lehren wird, die zu einer Function mit complexem Argumente ergänzte Function sammt ihren Differentialquotienten durch Grenzbedingungen zu bestimmen.

Bei Gelegenheit der Convergenz der Integrale wird deren bedingte Convergenz nicht deutlich erklärt. Weil aber das Riemann'sche Beispiel eines convergenten Integrals einer Function, die unendlich wird, angeführt ist, in welchem Beispiele die Convergenz auf dem Zeichenwechseln beruht, so will ich hier ein Beispiel mittheilen einer Function, die ohne Zeichenwechsel dasselbe leistet. Ich beweise die Convergenz des Integrals

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx \sin^2 x\, e^{x+\cos x}}{x^2\left[x+e^x(e^{\cos x}+1)\right]}.$$

Die Maxima der Function unter dem Integralzeichen liegen in der Curve $y = x^{-4} e^x$, die Minima in der x-Axe. Man setze

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x+e^x(e^{\cos x}-1)}=\frac{1+e^x(e^{\cos x}-1)}{[x+e^x(e^{\cos x}-1)]^2}-\frac{e^{x+\cos x}\sin x}{[x+e^x(e^{\cos x}-1)]^2}=U-V$$

und bilde

$$\int_a^\infty V\frac{\sin x}{x^2}\,dx=\int_a^\infty U\frac{\sin x}{x^2}\,dx-\int_a^\infty dx\frac{\sin x}{x^2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x+e^x(e^{\cos x}-1)}.$$

Das erste Integral rechts ist convergent, weil U nicht unendlich wird. Dem zweiten gebe ich die Form

$$\int_a^\infty dx\frac{\sin x}{x^2}\,\frac{d\varphi}{dx}=-\int_a^\infty dx\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)\int_a^x dx\frac{d\varphi}{dx},$$

wodurch auch dessen Convergenz einleuchtet.

In der Anmerkung zu S. 25 sagt Herr Thomae, wir Beide, Herr Worpitzky und ich, hätten uns mit der Frage beschäftigt, ob es nicht eine Function $\psi(x)$ gebe, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildete. Eins von Beidem, convergent oder divergent, müsste das Integral

$$\int\psi(x)\,\partial x$$

doch sein. Nun, für Reihen geht aus der bekannten, gegen Olivier gerichteten Note von Abel hervor, dass es nicht divergent sein kann. Aus dem Satze, dass, unter R den Rest der Reihe $u_1+u_2+\ldots$ verstanden, die Reihe mit dem Gliede $\frac{u_p}{R_p^\mu}$, $\mu<1$, convergent ist (Borch. Journ. Bd. 76, S. 85) folgt zweitens, dass das Integral nicht convergent sein kann. So verhält sich die Sache. Was ich an der von Herrn Thomae erwähnten Stelle bewiesen habe, ist etwas Anderes. Und Herr Worpitzky hat nicht die Priorität des dadurch widerlegten Irrthums, sondern Herr O. Bonnet.

Auf die Behandlung der Doppelintegrale in der Schrift des Herrn Thomae gehe ich hier nicht ein, weil ich nächstens darüber einige selbstständige Mittheilungen zu machen haben werde.

Ich möchte zum Schlusse dieser Kritik nur der Bemerkung gedenken, die Herr Thomae am Schlusse seiner Schrift meinem Beweise des Fundamentalsatzes der Integralrechnung (Münchener Abhandlungen XII, 45) widmet. Er sagt, ich beweise den bei ihm in § 23 enthaltenen Satz. Wenn er vielmehr gesagt hätte, dass das, was in seinem § 23 enthalten ist, sich im Wesentlichen schon in meinem Aufsatze „Versuch etc." (Borch. Journ. Bd. 79, S. 33) findet, so würde dagegen wenig einzuwenden sein. Im Uebrigen hat er sich seither vielleicht selbst schon klar gemacht, dass ich an der betreffenden Stelle etwas ganz Anderes behaupte und beweise, als sich aus seinem § 23 folgern lässt. Oder sind zwei Functionen nothwendig bis auf eine Constante identisch, wenn sie denselben Differentialquotienten nicht durchweg besitzen, sondern nur in Punkten, die in jedem kleinsten Intervall ihrer Variabeln vorkommen?*

Tübingen, 10. Juni 1875. PAUL DU BOIS-REYMOND.

Die trigonometrische Punktbestimmung im Netzanschluss. Mit besonderer Rücksicht auf eine rationelle Fehlerausgleichung. Von Dr. J. H. FRANKE, Trigonometer und Abtheilungsvorstand am königl. bayr. Katasterbureau. München 1875. Verlag von Jul. Grubert. VIII und 69 Seiten in 8°.

Diese Schrift bildet in mancher Hinsicht eine Ergänzung zu dem Werke desselben Verfassers über die Dreiecksnetze vierter Ordnung (München 1871) und soll, wie die Einleitung versichert, in möglichster Kürze, ohne umfangreiche theoretische Entwickelungen, vielmehr in wesentlich populärer Weise ihr Thema abhandeln. Dies ganz zu erreichen, ist nicht leicht, namentlich bei einem so delicaten Gegenstande, wie der Frage nach ausreichenden Näherungsmethoden zur Berechnung eingeschalteter Punkte bei überschüssigen Winkelmessungen. Das Gefühl, dass jede Lösung nur einen mehr oder weniger subjectiven Werth hat, veranlasst leicht zu dem Fehler, in viele unnöthige, oft wiederholende Worte zu verfallen, um dem Widerspruch gleich von vornherein zu begegnen. Auch dem Verfasser vorliegender Schrift ist dies passirt und die klare Kürze hat darunter sehr gelitten; ist doch u. A. eine einfache Entwickelung, die auf zwei Seiten bequem Platz finden konnte, auf S. 24 bis 37 in einzelnen Brocken zusammenzusuchen. Mit den philosophischen Excursen der Schrift, die namentlich in einem Princip des kleinsten absoluten Zwanges gipfeln, uns zu befreunden, dünkt uns nun ganz unmöglich und ist auch in Ansehung des Hauptthemas ganz überflüssig, weil der Zusammenhang damit kein innerer geworden, sondern nur ein rein localer geblieben ist, was wirklich dem Verfasser ganz entgangen sein muss.

Für das Pothenot'sche Problem, welches unter den Einschaltungsmethoden nach der Theorie und in Uebereinstimmung mit den Erfahrungen des Verfassers einen hervorragenden Platz einnimmt, giebt die Schrift folgende Ausgleichungsmethode.

Zuerst Berechnung scharfer Näherungscoordinaten x und y des gesuchten Punktes aus den geeignetsten drei Visuren; sodann Berechnung der den n beobachteten Richtungen entsprechenden Richtungswinkel $\varphi_1 \dots \varphi_n$ mit

---

* Dem möchte u. A. sein eigenes Beispiel (§ 38) einer Function, deren Differentialquotient in jedem kleinsten Intervall einmal unendlich wird, widersprechen, da er sie nur umzukehren braucht, um eine Function zu haben, deren Differentialquotient in jedem kleinsten Intervall einmal verschwindet, ohne constant zu sein.

Hilfe von x und y. Ist nun o_i die zu φ_i gehörende Beobachtung ($i=1\ldots n$), so wird die Differenz

$$(\varphi_1+\zeta+o_i)-\varphi_i$$

bei geeigneter Wahl der Grösse ζ (die man aber nicht geradezu, wie in der Schrift, als Unsicherheit der Anfangsrichtung einführen darf) eine kleine Grösse v_i sein. Setzt man

$$\lambda_i=\varphi_1+o_i-\varphi_i$$

und ist r_i die Entfernung des i^{ten} Fixpunktes von (x,y), so wird jetzt

$$\zeta=-\frac{[r\lambda]}{[r]}$$

gesetzt, wobei die eckige Klammer in bekannter Weise die Summirung andeutet und die Gewichte der Richtungsbeobachtungen o_i proportional den Entfernungen r_i angenommen worden sind. Mittelst der Formeln

$$\Delta_i=\frac{r_i v_i}{206265},$$

$$x^{(i)}=x\mp\Delta_i\sin\varphi_i,\quad y^{(i)}=y\pm\Delta_i\cos\varphi_i$$

denkt sich Verfasser gewissermassen n Orte des gesuchten Punktes hergestellt und setzt endlich dessen definitive Coordinaten $x+\xi$, $y+\eta$ gleich

$$x+\xi=\frac{[S_i x^{(i)}]}{[S_i]},\quad S_i=\frac{\sin^2\varphi_i}{r_i},$$

$$y+\eta=\frac{[C_i y^{(i)}]}{[C_i]},\quad C_i=\frac{\cos^2\varphi_i}{r_i}.$$

Eigentlich hat der Verfasser die Absicht, die Summe der in ihre Gewichte r_i multiplicirten Quadrate der Richtungsverbesserungen $d\varphi_i$ zu einem Minimum zu machen, wenn gesetzt wird

$$d\varphi_i=\frac{\sin\varphi_i}{r_i}(x^{(i)}-x-\xi)-\frac{\cos\varphi_i}{r_i}(y^{(i)}-y-\eta);$$

Da aber eine Ausgleichung mit zwei Unbekannten vermieden werden soll, so wird für jeden der zwei Theile von $d\varphi_i$, also für die partiellen Aenderungen von φ_i nach x, resp. y, das Minimum separat erzielt.

Betrachtet man sich nun diese neue Methode der Ausgleichung näher, so wird man, meinen wir, ihre Wichtigkeit nicht der Art ihrer Einführung seiten des Verfassers entsprechend finden. Vortheilhaft fällt nur die Berücksichtigung der Entfernung bei der Gewichtsbestimmung der Richtungsbeobachtungen mittelst einer ganz brauchbaren Annäherungsformel (wie oben angegeben) auf; im Uebrigen unterscheidet sich die Methode gar nicht erheblich von der Methode der kleinsten Quadrate, wenn man da bei der Annäherung in der successiven Auflösung der Normalgleichungen stehen ersten bleibt. Dies kurz zu zeigen, sei uns noch vergönnt.

Versteht man unter $-u$ eine Verbesserung des oben angegebenen ζ-Werthes, so fordert die Methode der kleinsten Quadrate die Ermittelung von u, ξ und η aus den Formeln

$$u[r]+\xi[\sin\varphi]-\eta[\cos\varphi]=[vr],$$
$$u[\sin\varphi]+\xi\left[\frac{\sin^2\varphi}{r}\right]-\eta\left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right]=[v\sin\varphi],$$
$$-u[\cos\varphi]-\xi\left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right]+\eta\left[\frac{\cos^2\varphi}{r}\right]=-[v\cos\varphi],$$

und in erster Annäherung ist hiernach

$$1)\qquad \xi=+\frac{[v\sin\varphi]}{206265}:\left[\frac{\sin^2\varphi}{r}\right],\quad \eta=-\frac{[v\cos\varphi]}{206265}:\left[\frac{\cos^2\varphi}{r}\right],$$

während des Verfassers Formeln nach einiger Reduction ergeben

$$2)\qquad \xi=+\frac{[v\sin^3\varphi]}{206265}:\left[\frac{\sin^2\varphi}{r}\right],\quad \eta=-\frac{[v\cos^3\varphi]}{206265}:\left[\frac{\cos^2\varphi}{r}\right].$$

Zeigt die Vergleichung beider Systeme einerseits, dass die Formeln 2) wohl eine brauchbare, ja sogar starke Annäherung geben können (was überdies an vielen Beispielen nachgewiesen wird), so hat 1) doch den Vorzug, dass man aus der Lage der Punkte hier leicht den Grad der Annäherung beurtheilen kann. Ist dieselbe ganz symmetrisch, so ist das System 1) eine strenge Auflösung, System 2) aber nicht! Was Verfasser gegen die Methode der kleinsten Quadrate sagt, trifft überdies Alles ebenso sehr seine Ausgleichungsmethode, macht aber ausserdem den Eindruck, als sei ihm die von so vielen Mathematikern behandelte allgemeine Bedeutung jener Methode als vortreffliches Interpolationsmittel wenig bekannt worden.

Nächst dem Pothenot'schen Problem werden auch die Einschaltungsverfahren durch Dreiecke und Dreiecksnetze, sowie mittelst gestreckter polygonaler Seitenzüge besprochen und genäherte Ausgleichungsmethoden angegeben. Auch hier scheint uns Verfasser nicht glücklich, jedoch wollen wir uns gern bescheiden, dass dies nur eine ganz subjective Ansicht ist. Doch erwähnen wir, dass bei Einschaltung durch Dreiecke ebenfalls die Coordinatenausgleichung in erster Annäherung besondere Beachtung verdient, zum Theil schon aus dem Grunde der Conformität mit dem vorhin erledigten Falle.

Vielen Werth legt Verfasser auf graphische Berechnungen mittels Curventafeln. Gleich im Eingange der Schrift giebt er eine Auseinandersetzung über die graphische Auswerthung der Correctionsglieder an sphärischen rechtwinkligen Coordinaten wegen der Kugelgestalt der Erde, wozu nur gerade eine Figur fehlt. Wirklich verdient die Anwendung des graphischen Verfahrens auf viele Theile der Geodäsie die allgemeine Aufmerksamkeit der Fachmänner; es wurde dasselbe auch schon früher von Vogler und Löwe mit Vortheil zur Berechnung von Neigungscorrectionen bei dem bayerischen Präcisionsnivellement angewandt*.

Aachen, 1. Juni 1875. Prof. Helmert.

* Das bayerische Präcisionsnivellement, von C. M. Bauernfeind. 1875. S. 5 und 31.

Grundzüge der Meteorologie. Die Lehre von Wind und Wetter nach den neuesten Forschungen gemeinfasslich dargestellt von H. MOHN, Professor der Meteorologie an der Universität zu Christiania, Director des k. norwegischen meteorologischen Instituts. Deutsche Originalausgabe. Mit 24 Karten und 36 Holzschnitten. Berlin, Verlag von Dietrich Reimer. 1875. 6 Mk.

Wer sich nur einigermassen eingehend mit dem Studium der Meteorologie, vorzüglich der neueren Zeit, beschäftigt hat, dem ist gewiss Professor Mohn als einer der bedeutendsten Männer dieser Wissenschaft bekannt. Nicht allein durch unermüdliche scharfsinnige Forschungen hat sich derselbe um die Wissenschaft grosse Verdienste erworben, sondern auch durch praktische Verwerthung seiner Arbeiten Diejenigen unterstützt, welche, der Natur ihrer Beschäftigung nach, auf Beobachtung der Wetterveränderungen hingewiesen sind, wie dies z. B. mit den Seeleuten der Fall ist. Bei der Ausführung des vorliegenden Werkes leitete den Verfasser die Absicht, die wichtigsten Resultate der meteorologischen Forschungen, wie sie jetzt vorliegen, in allgemein verständlicher Weise darzustellen und den Leser in den Stand zu setzen, selbständig zuverlässige Beobachtngen anzustellen und aus deren Ergebniss Nutzen für sich und Andere zu ziehen. Dass dem Verfasser die Abfassung seines Buches in diesem Sinne vollständig gelungen ist, beweist die Vorrede, welche von dem rühmlichst bekannten Hydrographen unserer deutschen Marine, Dr. Neumayer, herrührt. In der That verdiente das Werk die Empfehlung einer so gewichtigen Autorität um so mehr, als die deutsche Literatur auf dem nautisch-meteorologischen Gebiete kein Buch aufzuweisen hat, welches in so leicht verständlicher, zwar kurzer, aber doch umfassender Weise diese Disciplin behandelt, ohne sich auf viele, zum Theil unsichere Hypothesen einzulassen und ohne dem Leser durch einen grossen Zahlenballast das Studium der Meteorologie zu erschweren oder ganz zu verleiden. Der Verfasser hält sich einfach an die Thatsachen und bemüht sich stets, eine scharfe Grenze zu ziehen zwischen dem, was man weiss und dem, was man blos vermuthet; ein Verfahren, welches in einem zum Leitfaden bestimmten Buche besonders zu rühmen ist.

Die Einleitung giebt die nöthigen Definitionen in kurzer, präciser Weise. Die fünf ersten Capitel handeln von den meteorologischen Elementen, und zwar das erste von der Wärme der Luft, des Meeres und der Erde, das zweite von den Wasserdämpfen in der Luft, das dritte vom Drucke der Luft, das vierte von der Bewegung der Luft und des Meeres (Wind und Meeresströmungen) und das fünfte vom Niederschlag. In diesen Capiteln beschreibt der Verfasser die gebräuchlichen meteorologischen Instrumente, sowie die Methoden der Beobachtungen in so umfassender Weise und stets durch Beispiele erläutert, dass der Leser vollständig befähigt wird, selbst Beobachtungen anzustellen und diese verwerthen zu können. Zu letzterem

Zwecke sind dem Buche sechs zwar kurz gefasste, aber doch völlig genügende Tabellen beigefügt. Ausserdem enthalten auch diese Capitel das Wichtigste aus der allgemeinen Klimatologie und sind mit Figuren und Kärtchen reichlich ausgestattet. Im sechsten Capitel betrachtet er das Zusammenwirken der in den vorhergehenden Capiteln gesondert ins Auge gefassten meteorologischen Elemente, aus welchem sich die verschiedenen Zustände der Atmosphäre ergeben, oder mit anderen Worten, deren Resultat das Wetter ist. Er macht zunächst darauf aufmerksam, dass der Wind die atmosphärischen Eigenschaften eines Ortes einem andern Orte, nach welchem er hinweht, übermittelt, dass daher das Wetter an einem bestimmten Orte hauptsächlich auf der augenblicklich stattfindenden Windrichtung beruht. Die Richtung des Windes aber wird durch die Vertheilung des Luftdruckes bedingt; daher muss die Hauptaufgabe der Meteorologie in der Erforschung der Gesetze bestehen, nach welchen die Vertheilung und die Veränderung des Luftdruckes stattfinden. Im weitern Verlaufe des Capitels behandelt der Verfasser die verschiedenen Arten der Windrosen für diejenigen Orte der Erde, an denen meteorologische Beobachtungen gemacht wurden, und stellt das Resultat derselben im Allgemeinen zusammen. Dann unterwirft er die Wechselwirkung der übrigen meteorologischen Elemente einer kurzen Betrachtung und zeigt, in welcher Weise durch dieselben eine Veränderung des Luftdruckes, d. h. ein Fallen oder Steigen des Barometers herbeigeführt wird. Zum Verständniss der Beziehungen zwischen den meteorologischen Elementen, die innerhalb eines grössern Gebietes der Erdoberfläche nebeneinander auftreten, wählt er Beispiele aus der Witterungsgeschichte Europas und macht mit Hilfe von synoptischen Wetterkarten die Vorgänge der Wetterveränderung während kurzer Zeiträume auch denen begreiflich, die sich wenig mit dem Studium der Meteorologie beschäftigt haben. Aus diesen Beispielen ergiebt sich in schlagender Weise, dass, wie schon oben bemerkt, die ungleiche Vertheilung und Veränderung des Luftdruckes das Agens bilden, welches die Richtung und Stärke des Windes verursacht und so die verschiedenen Zustände des Wetters herbeiführt.

Die Vertheilung des Luftdruckes um einen gegebenen Punkt herum ist durch die Richtung und Grösse des barometrischen Gradienten hinreichend bestimmt. Auf der Grösse desselben beruht die Stärke des Windes und von seiner Richtung hängt die des Windes zum grössten Theil ab. Derselbe weht immer, wo nicht locale Hindernisse, wie z. B. Gebirge und Thäler, die Luftbewegung verändern, in einer Richtung, welche zwischen der des Gradienten und der der Isobare, jedoch näher der letzteren liegt. Zu diesem Schlusse gelangt der Verfasser ebenfalls durch Discussion von synoptischen Karten, deren grosser Werth wohl jetzt allgemein anerkannt ist.

In dem übrigen Theile des sechsten Capitels entwickelt Prof. Mohn seine Ansichten über die Entstehung der Wirbel und ihre Bahnen, sowie über die Fortbewegung der barometrischen Minima und die gleichzeitig stattfindenden Veränderungen, welche der Luftdruck und die übrigen meteorologischen Elemente erfahren. Er gelangt so, sich stets auf Thatsachen stützend und die Ergebnisse derselben aneinanderreihend, zu einer neuen Ausdrucksform des Gesetzes der Winddrehung, welche, weil sie auf viele gleichzeitig über ein grösseres Gebiet der Erde beobachtete Wetterzustände basirt ist, mehr für sich haben dürfte, als manche der früheren Hypothesen. Das siebente Capitel handelt von den Stürmen und ihrem Auftreten in den verschiedenen Zonen. Alle — und bei denen der Tropen ist dies am einleuchtendsten — entstehen durch aufsteigende, mit Wasserdampf gesättigte Luftströme. Nach des Verfassers Ansichten bestehen zwischen den Orkanen und Tornados, sowie zwischen diesen und den Tromben nur Gradunterschiede und schwankende Grenzen. Im achten Capitel werden die optischen und elektrischen Erscheinungen der Atmosphäre betrachtet; das letzte Capitel handelt von der praktischen Meteorologie. „Die Aufgabe der praktischen Meteorologie," sagt Prof. Mohn, „beschränkt sich wesentlich darauf, nahende Stürme vorauszusagen oder zu signalisiren. Solche Sturmsignale dürfen jedoch nicht als sichere Vorausbestimmungen angesehen werden, sondern nur als Warnungen, dass der Zustand der Atmosphäre gefahrdrohend ist. Sie besagen eigentlich nur, dass ein barometrisches Minimum mit starken Gradienten in der Nähe, also die Möglichkeit vorhanden ist, dass der dazu gehörige Wirbel über den betreffenden Ort hingehen wird. Mehr kann man bei unserer unvollkommenen Kenntniss der Gesetze für die Veränderung des Luftdruckes vor der Hand nicht leisten."

Schliesslich theilt er noch seine Ansichten über ein Sturmsignal-System mit und giebt eine kurze Uebersicht über das Wirken des norwegischen Signalsystems, welches seinen Centralpunkt in Christiania hat.

Berlin. J. Asmus,
techn. Hilfsarb. im hydrogr. Bureau.

Zahlentheoretische Spielerei. In den Messbuden, welche Stück für Stück zum Preise von 12 Pf. verkaufen, wird gegenwärtig eine kleine Spielerei feilgeboten, welche auf den ersten Anschein sehr überraschend wirkt. Es sind sieben Kärtchen, welche nach folgenden Principien mit Zahlen bedruckt sind. Das Kärtchen I enthält alle ungeraden Zahlen von 1 beginnend bis 99. Kärtchen II beginnt mit 2 und 3, dann fehlen 4 und 5, dagegen folgen wieder 6 und 7 u. s. w. bis 99, so dass sämmtliche Zahlen von den Formen $4n+2$ und $4n+3$ darauf enthalten sind. Kärtchen III beginnt mit 4, 5, 6, 7, worauf die vier nächsten Zahlen der Zahlenreihe fehlen, die vier weiteren und immer die von den Formen $8n+4$, $8n+5$, $8n+6$, $8n+7$ sich vorfinden, als letzte 95. Kärtchen IV, V, VI, VII setzen das gleiche Zahlengesetz fort. Sie beginnen mit 8 (mit 16, mit 32, mit 64) und enthalten acht (beziehungsweise sechzehn, zweiunddreissig, vierundsechzig) aufeinanderfolgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, nach welchen ebensoviele fehlen u. s. w. Die Formen sind also $16n + 8$ bis $16n + 15$ ($32n + 16$ bis $32n + 31$, $64n + 32$ bis $34n + 63$, $128n + 64$ bis $128n + 127$). Die letzten Zahlen dieser Kärtchen heissen 95, 95, 99, 99, indem grundsätzlich die dreiziffrigen Zahlen ausgeschlossen sind. Das Kunststück besteht nun in Folgendem. Man lässt Jemand eine unterhalb 100 liegende Zahl (der gedruckten Vorschrift nach das Alter der betreffenden Person) in den Kärtchen aufsuchen und lässt sich die Kärtchen angeben, auf welchen jene Zahl sich findet; die Summe der Anfangszahlen jener Kärtchen bildet alsdann die gedachte Zahl. Z. B. 37 findet sich auf den Kärtchen I, III, VI und $1 + 4 + 32 = 37$. Der Grund dieser Erscheinung wird sofort klar, wenn man die Zahlen unter 100 statt nach dem dekadischen System nach dem dyadischen schreibt, dessen Einheiten aufeinanderfolgender Rangstufen eins, zwei, vier, acht, sechzehn, zweiunddreissig, vierundsechzig heissen, also die Anfangszahlen unserer sieben Kärtchen sind und dyadisch 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 geschrieben werden. Jede dyadische Zahl zwischen 1 und 1111111 (um so mehr zwischen 1 und 1100011 = neunundneunzig) ist nun Summe lauter dyadischer Einheiten verschiedenen Ranges, und setzt man sie auf die Kärtchen, deren Anfangszahl in ihr als 1 auftritt, lässt sie dagegen auf denjenigen Kärtchen weg, deren Anfangszahl in ihr nicht zur Darstellung kommt (durch 0 ersetzt ist), so ergiebt sich die erwähnte Vorschrift von selbst. Z. B. siebenunddreissig = 100101 muss auf den Kärtchen I, III, VI und nur auf diesen vorkommen. Höchstens lässt sich nun zweifeln, ob mit dieser Regel in Uebereinstimmung sei, was vorher über das Zahlengesetz der einzelnen Kärtchen gesagt war. Aber auch dieses ist leicht erweislich. Das Kärtchen A z. B. beginnt mit 2^{A-1}, d. h. mit 1 und $A-1$ darauf folgenden Nullen in dyadischer Schreibweise. Ihm müssen daher alle Zahlen bis zu der dyadisch durch A Einer geschriebenen angehören, und das sind eben im Ganzen 2^{A-1} als Anzahl der Variationen aus $A-1$ Reihen von je 2 Elementen. Genau ebensoviele Zahlen werden alsdann fehlen müssen, welche links 10 heissen mit $A-1$ sich rechts anschliessenden Nullen oder Einern u. s. w.

Cantor.

Bibliographie

vom 16. Mai bis 30. Juni 1875.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der k. bayr. Akademie der Wissenschaften in München. 1875, 1. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. C. Ohrtmann, F. Müller und A. Wangerin. 5. Bd. Jahrg. 1873. Berlin, G. Reimer. 2 Mk. 40 Pf.

Publicationen des k. preuss. geodätischen Instituts. Astronomisch-geodät. Arbeiten i. d. J. 1873 u. 1874. Berlin, Stankiewicz. 9 Mk.

Die veränderlichen Tafeln des astronom. u. chronolog. Theils des k. preuss. Normalkalenders für 1876. Berlin, Statist. Bureau. 6 Mk. 70 Pf.

Astronomisches Jahrbuch (Berliner) für 1877, mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (136) für 1875. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld u. A. Winnecke. 10. Jahrg. 1. Hft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Repertorium für Experimentalphysik, physikal. Technik und Instrumentenkunde; herausgeg. von Ph. Carl. 11. Bd. (6 Hefte). 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 19 Mk. 20 Pf.

Monatsberichte über die meteorolog. Beobachtungen der k. sächs. Stationen im J. 1874, herausgeg. v. C. Bruhns. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt f. Meteorologie und Erdmagnetismus. N. F., 10. Bd. Jahrg. 1873, herausgeg. v. Jelinek u. Osnaghi. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. A. Metzger. 24. Jahrg. 2. Heft, Juli-December 1874. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Thomae, J., Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle, Nebert. 2 Mk. 80 Pf.

Goering, L., Ueber die Theorie derjenigen complexen Zahlen, welche aus drei Quadratwurzeln gebildet sind. (Gött. Gesellsch.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

KRANKENHAGEN, F., Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Gött. Gesellsch.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

WINCKLER, A., Integration zweier linearen Differentialgleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

THOMAE, J., Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordn. genügt. Halle, Nebert. 1 Mk. 50 Pf.

KREY, H., Die Invarianten und Covarianten der binären Formen siebenter Ordnung. (Gött. Ges.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 60 Pf.

HEIS, E., Die hyperbolischen Functionen. Halle, Schmidt. 60 Pf.

BRAND, C. v., Grundriss der Differentialrechnung. 1. Thl. Berlin, Königsmann. 3 Mk.

SCHNELLINGER, J., Grundlehren der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Wien, Hölder. 1 Mk. 50 Pf.

MATTHIESSEN, L., Commentar zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben etc. von ED. HEIS. 2. Aufl. Cöln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk.

SEDLACZEK, E., Tafeln zur Berechnung zwölfstelliger gemeiner Logarithmen und umgekehrt. Wien, Braumüller. 1 Mk. 20 Pf.

TEICHMANN, K. und H. GROSS, Vierstellige mathematische Tafeln. Stuttgart, Lindemann. 60 Pf.

CREMONA, L., Elemente des graphischen Calcüls. Uebers. v. M. CURTZE. Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk. 80 Pf.

WEYR, E., Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunkte. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

RODENBERG, C., Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten. (Gött. Gesellsch.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 60 Pf.

SCHULTE, A., Ueber die stereographische Projection des Ellipsoids. (Gött. Gesellsch.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 60 Pf.

GYSEL, J., Synthetische Untersuchung eines Orthogonalflächensystems. Zürich, Schabelitz. 2 Mk. 40 Pf.

WIEGAND, H., Analytische Geometrie. Halle, Schmidt. 1 Mk. 60 Pf.

——, Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Ebendas. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

NATANI, L., Methode der kleinsten Quadrate. Berlin, Winckelmann & Söhne. 1 Mk.

CULMANN, C., Die graphische Statik. 2. Aufl. 1. Bd. Zürich, Meyer & Zeller. 24 Mk.

FRANKE, J., Die trigonometrische Punktbestimmung im Netzanschluss. München, Grubert. 1 Mk. 60 Pf.

SCHRADER, C., Ueber die Wirkung der astronomischen Strahlenbrechung auf Beobachtungen mit dem Kreismikrometer. (Gött. Gesellsch.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

WEISS, E., Beobachtung des Venusdurchganges vom 8. December 1874 in Jassy und Bestimmung der geographischen Länge des Beobachtungsortes. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

GRUBER, L., Ueber einen Apparat zu Coincidenzbeobachtungen bei Schwerebestimmungen mittels des Reversionspendels. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

DVORAK, V., Ueber die Schwingungen des Wassers in Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

OBERMAYER, A. v., Ueber die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten der atmosphärischen Luft von der Temperatur. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

DOMALIP, K., Ueber eine Folgerung aus der Analogie der Temperatur und der Potentialfunction. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

Physik und Meteorologie.

PUSCHL, C., Ueber das Verhalten gesättigter Dämpfe. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

HANKEL, W., Elektrische Untersuchungen. 11. Abhdlg.: Die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspaths, Berylls etc. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

STEFAN, J., Ueber die Gesetze der magnetischen u. elektrischen Induction und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

ROSICKY, W., Ueber die Beugungserscheinungen im Spectrum. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

SECCHI, A., Die Einheit der Naturkräfte. 1. Lief. Leipzig, Frohberg. 3 Mk.

MÜLLER, J., Lehrbuch der kosmischen Physik. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 24 Mk.

——, Grundriss der Physik und Meteorologie. Mathematischer Supplementband. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

——, Auflösungen hierzu. 3. Aufl. Ebendas. 1 Mk. 60 Pf.

WÜLLERSTORFF-URBAIR, B. v., Die meteorologischen Beobachtungen etc. während der Polarexpedition unter Weyprecht und Payer 1872—1874. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1874.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

342. Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur in einer Halbebene. Schlaefli. Crelle LXXVIII, 63.

Vergl. Functionen 408.

Aerodynamik.

343. *Observations relatives à un récent mémoire de Mr. Helmholtz sur la navigation aérienne. W. de Fonvielle. Compt. rend. LXXVIII,* 549.
344. *Sur le mouvement de l'air dans les tuyaux. Bontemps. Compt. rend. LXXVIII,* 904, 1430, 1488, 1540, 1652.

Analytische Geometrie der Ebene.

345. *Questions traitées dans l'analyse infinitésimale des courbes planes. Aoust. Compt. rend. LXXVIII,* 50.
346. *Propriétés géométriques des fractions rationelles. F. Lucas. Compt. rend. LXXVIII,* 140, 180, 271.
347. *Théorèmes concernant lés équations algébriques. F. Lucas. Compt. rend. LXXVIII,* 431.
348. Eigenschaften der aus rationalen ganzen Functionen dritten Grades entspringenden Curven. Stoeckly. Grun. Archiv LVI, 180.
349. Rationale ebene Curven dritter Ordnung. Zahradnik. Grun. Archiv LVI, 134.
350. Harmonische Punktsysteme auf rationalen Curven dritter und vierter Ordnung. Zahradnik. Grun. Archiv LVI, 349.
351. Eine Aufgabe aus der Theorie der einhüllenden Curven. C. Wagner. Grun. Archiv LVI, 1.
352. Cissoidalcurven. Zahradnik. Grun. Archiv LVI, 8.
353. Bewegung des Schwerpunktes eines veränderlichen Dreiecks. Zahradnik. Grun. Archiv LVI, 11.
354. Zur Theilung des Winkels. v. Wasserschleben. Grun. Archiv LVI, 335.

Vergl. Kegelschnitte. Singularitäten.

Analytische Geometrie des Raumes.

355. Zur Frage über isotherme Coordinatensysteme. Kötteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 265.
356. Einfacher Beweis der Gleichung zwischen homogenen Ebenencoordinaten. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 94. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 1; Bd. XVII, Nr. 44.]
357. Principien der analytischen Curventheorie. R. Hoppe. Grun. Archiv LVI, 41. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 192.]
358. *Sur les intégrales des équations différentielles des courbes dont le lieu des centres des ellipsoïdes osculateurs, semblables et semblablement placés, est une courbe donnée. Aoust. Compt. rend. LXXVIII,* 1548.
359. *Déplacement d'un système de points. Propriétés géométriques dépendant des paramètres différentiels du second ordre. Durrande. Compt. rend. LXXVIII,* 1036. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 187.]
360. Ueber die Curve, die entsteht, wenn sich leichte haftende Körperchen auf einer krummen Fläche aufhäufen. Ritsert. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 180.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

361. Zur Berechnung elliptischer Planeten- und Cometenbahnen bei Anwendung der Euler'schen Gleichung. Chandrikoff. Astr. Nachr. LXXXI, 57.
362. Entwickelung einer Correctionsformel, betreffend die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Knorre. Astr. Nachr. LXXXI, 193.
363. Ueber die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Sonnenparallaxe und die in neuerer Zeit nach denselben gefundenen Resultate. Powalky. Astr. Nachr. LXXX, 97.
364. *Sur l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes.* Stéphan. *Compt. rend. LXXVIII,* 1008.
365. Berichtigung zu Brünnow's sphärischer Astronomie. Peters. Astr. Nachr. LXXX, 231.

Vergl. Attraction. Reihen 523.

Attraction.

366. *Sur la loi de l'attraction astronomique, sur les masses des divers corps du système solaire et en particulier sur la masse et sur la durée du soleil.* Vicaire. *Compt. rend. LXXVIII,* 790.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

367. Zur independenten Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen. Naegelsbach. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 219.

Bestimmte Integrale.

368. Ueber die Auswerthung des Integrales $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+\mu}$. Worpitzky. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 90.

Vergl. Cylinderfunctionen. Elliptische Transcendenten. Quadratur. Ultraelliptische Transcendenten.

C.

Cartographie.

369. *Projection gnomonique de la surface terrestre sur un octaèdre et sur un cube circonscrit à la sphère.* Thoulet. *Compt. rend. LXXVIII,* 627.

Combinatorik.

370. Zur mathematischen Theorie des Schachbrettes. S. Günther. Grun. Archiv LVI, 281.

Correspondenzprincip.

371. *Considérations sur le caractère propre du principe de correspondance.* Chasles. *Compt. rend. LXXVIII,* 577.
372. *Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace.* Zeuthen. *Compt. rend. LXXVIII,* 1553.

Cubatur.

373. Inhalt des Sechsflachs zwischen orthogonalen Flächen zweiten Grades und seiner Seiten. R. Hoppe. Grun. Archiv LVI, 354.

Cylinderfunctionen.

374. Bemerkungen über Cylinderfunctionen. S. Günther. Grun. Archiv LVI, 292.

D.

Determinanten.

375. Zur Determinantentheorie. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 354.
376. *Propriétés des déterminants.* Dostor. Grun. Archiv LVI, 238.

Vergl. Combinatorik. Functionen 409. Zahlentheorie 549.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

377. *Surface des quadrilatères exprimée en déterminants.* Dostor. Grun. Archiv LVI, 240.
378. *Propriétés du tétraèdre.* Dostor. Grun. Archiv LVI, 245.
379. Ueber den Halbmesser eines Kreises, welcher drei Kreise, und einer Kugel, welche vier Kugeln berührt. Mertens. Crelle LXXVII, 102.

380. Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Hesse. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 1.
381. Zur Transversalentheorie der ebenen algebraischen Curven. Gundelfinger. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 68. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 99.]
382. *Sur les courbes unicursales.* *Painvin.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1194.
383. Ueber einige Eigenschaften der Oberflächen zweiten Grades. Van Geer. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 82.

Differentialgleichungen.

384. Zur Theorie der singulären Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Zajacrkowski. Grun. Archiv LVI, 175.
385. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. L. W. Thomé. Crelle LXXVIII, 223. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 231.]
386. Ueber die Vertauschung von Argument und Parameter in den Integralen der linearen Differentialgleichungen. Frobenius. Crelle LXXVIII, 93.
387. *Intégration géometrique de l'equation* $L(x.dy - y.dx) - M.dy + N.dx = 0$, *dans laquelle* L, M, N *désignent des fonctions linéaires de* x *et* y. *Fouret.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1837.
388. *Sur les intégrales des équations différentielles des courbes qui ont une même surface polaire.* *Aoust.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1290, 1481. — *J. A. Serret ibid.* 1329. — *Combescure ibid.* 1639.
389. Zur Integration eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Zajacrkowski. Grun. Archiv LVI, 163.
390. *Théorème concernant des équation aux différences partielles simultanées.* *Combescure.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1212.
391. *Sur les équations aux différentielles partielles qui peuvent être intégrées sans fonctions arbitraires engagées sous le signe somme.* *De Pistoye.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1102.
392. Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Gauss'sche Reihen. J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 273.
393. *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* *Picart.* *Compt. rend. LXXVIII,* 882.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 358. Substitutionen 529.

Differentialquotient.

394. Ueber die Herstellung des Ausdruckes ΔF und der Differentialgleichungen elastischer isotroper Medien in allgemeinen orthogonalen Coordinaten. Pochhammer. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 234.

E.

Elasticität.

395. Die Gleichung der elastischen Linie beliebig belasteter gerader Stäbe bei gleichzeitiger Wirkung von Horizontal- (Axial-) Kräften. J. Weyrauch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 536. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 46.]
396. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale. Aron. Crelle LXXVIII, 136.
397. Beweis eines Satzes der Elasticitätslehre. Lipschitz. Crelle LXXVIII, 329.

Vergl. Differentialquotient.

Elektrodynamik.

398. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Helmholtz. Crelle LXXVIII, 273. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 212.]
399. *Sur la loi élémentaire des actions électrodynamiques.* *J. Moutier.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1221.
400. Ueber stationäre Inductionsströme in bewegten körperlichen Leitern. Oberbeck. Grun. Archiv LVI, 394.
401. *L'analyse d'un cohibent armé et clos démontre que l'influence électrique ne traverse pas les masses conductrices.* *Volpicelli.* *Compt. rend. LXXVIII,* 901.

Vergl. Potential.

Ellipse.

402. Verallgemeinerung eines geometrischen Satzes von Fermat. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 462.

Ellipsoid.

403. *Sur la projection stéréographique.* *Catalan.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1040.

Vergl. Variationsrechnung 536.

Elliptische Transcendenten.

404. Bemerkungen über die Reduction der vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die vollen elliptischen Integrale erster Gattung für denselben Modul. Meissel. Grun. Archiv LVI, 337.

405. *Sur l'addition des fonctions elliptiques. Catalan. Compt. rend. LXXVIII*, 1479.

Evolute.

406. Bestimmung der Ordnung und Classe der Evolute einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 182.

F.

Functionen.

407. Ueber ebene algebraische Isothermen. H. A. Schwarz. Crelle LXXVII, 38.

408. Ueber die Abbildung durch algebraische Functionen. Fuchs. Crelle LXXVII, 339; LXXVIII, 338.

409. Ueber die Determinante mehrerer Functionen einer Variabeln. Frobenius. Crelle LXXVII, 245.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 346, 348. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Elliptische Transcendenten. Homogene Functionen. Quadratische Formen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Geodäsie.

410. Zur höheren Geodäsie. Nell. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 324.

411. Ueber das Problem, aus dem Breiten- und dem Längenunterschiede zweier Oerter auf dem Erdsphäroid ihre Entfernung und die gegenseitigen Asimuthe zu berechnen. Oudemans. Astr. Nachr. LXXXI, 303.

412. Zur Theorie des Schlussfehlers geometrischer Nivellementspolygone. Zachariae. Astr. Nachr. LXXX, 305. — Wittstein *ibid.* LXXXI, 291. — Helmert *ibid.* LXXXI, 297.

Geometrie (descriptive).

413. Ueber die Construction von Ovallinien. Schloemilch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 263.

414. Beziehungen in den Projectionen des regelmässigen Zwölfflachs und Zwanzigflachs. Schubert. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 460.

Geometrie (höhere).

415. Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Sohncke. Crelle LXXVII, 47.

416. *Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définies par deux caractéristiques. Fouret. Compt. rend. LXXVIII*, 831, 1693.

417. Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume. Schroeter. Crelle LXXVII, 105.

418. Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme. Reye. Crelle LXXVII, 269.

419. *Démonstration geométrique de quelques théorèmes, au moyen de la considération d'une rotation infiniment petite. Mannheim. Compt. rend. LXXVIII*, 633. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 226.]

420. *Questions relatives à des séries de triangles semblables assujettis à plusieurs conditions communes. Chasles. Compt. rend. LXXVIII*, 1373, 1599.

421. *Sur les polygones inscrits et circonscrits à des courbes. Chasles. Compt. rend. LXXVIII*, 922.

422. Zur Geometrie der ebenen Curven dritter Ordnung. Milinowski. Crelle LXXVIII, 177.

423. Ueber Curven dritter Ordnung. Milinowski. Crelle LXXVII, 263. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 67.]

424. Zur Erzeugung von Curven vierter und dritter Ordnung durch zwei collineare Strahlsysteme. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 170. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 70.]

425. Ueber Büschel von Raumcurven dritter Ordnung in Verbindung mit Strahlencomplexen. Silldorf. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 391.

426. Zwei Erzeugnisse krumm-geometrischer Gebilde. Milinowski. Crelle LXXVIII, 175.
427. *Détermination des nombres Pluckeriens des enveloppes.* *Zeuthen.* *Compt. rend. LXXVIII,* 274, 339.
428. Ueber die Steiner'sche Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 115. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 15.]
429. Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe. Schroeter. Crelle LXXVII, 230.

Vergl. Correspondenzprincip. Evolute. Homogene Functionen. Involution. Mechanik 464, 465. Singularitäten.

Geschichte der Mathematik.

430. Das angebliche Werk des Euklides über die Waage. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 262.
431. *Sur un cadran solaire grec trouvé, par M. O. Rayet, à Héraclée du Latmos.* *G. Rayet.* *Compt. rend. LXXVIII,* 840.
432. *Sur le kestre des anciens.* *A. Bertrand.* *Compt. rend. LXXVIII,* 756.
433. Einige Bemerkungen zu dem Aufsatze Steinschneider's: „Thabit ben Korra". Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 95. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 75.]
434. Zur Algebra der Chinesen. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 270.
435. *Reliquiae Copernicanae.* *Curtze.* Zeitschr. Math. Phys. XIX, 76, 432.
436. Zur Geschichte der Prosthaphäresis. Wolf. Astr. Nachr. LXXXI, 233.
437. Fünf ungedruckte Briefe von Gemma Frisius. Curtze. Grun. Archiv LVI, 313.
438. Johann Kepler's Heirathsbrief von 1597. Peinlich. Grun. Archiv LVI, Literar. Bericht CCXXII, 15.
439. Die graphische Statik. J. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 361.
440. *Sur l'enseignement de la mécanique appliquée donné par Poncelet.* *Morin.* *Compt. rend. LXXVIII,* 229.
441. *Notices nécrologiques sur Jacques Adolphe Lambert Quetelet.* *Bertrand, Chasles, Sainte-Claire Deville et Dumas.* *Compt. rend. LXXVIII,* 612.
442. Todesanzeige von Christopher Hansteen, Director der Sternwarte in Christiania † 15. April 1873. Fearnley. Astr. Nachr. LXXXI, 273.
443. *Nécrologue de B. A. Hansen.* *Bertrand.* *Compt. rend. LXXVIII,* 921.
444. Nekrolog von F. Kaiser, Director der Sternwarte in Leyden, † 28. Juli 1872. Valentiner. Astr. Nachr. LXXX, 33.

Vergl. Mechanik 486.

Gleichungen.

445. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Siebel. Grun. Archiv LVI, 422.
446. Ueber die Auflösung des linearen Systems von Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{r=m} x_r \sin \frac{r n \pi}{m+1} = k_n, \quad (n=1, 2, \ldots m).$$

Unferdinger. Grun. Archiv LVI, 105.
447. Construction der reellen Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades mittels einer festen Parabel. R. Hoppe. Grun. Archiv LVI, 110.
448. Ueber die allgemeine Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Nell. Grun. Archiv LVI, 407.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 347. Substitutionen.

H.

Homogene Functionen.

449. *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie plane.* *Laguerre.* *Compt. rend. LXXVIII,* 744.
450. Darstellung quaternärer cubischer Formen durch fünf Cuben. Reye. Crelle LXXVIII, 114.
451. Darstellung quaternärer biquadratischer Formen als Summen von zehn Biquadraten. Reye. Crelle LXXVIII, 123.

Vergl. Quadratische Formen.

Hydrodynamik.

452. Zur Theorie der inneren Reibung. O. E. Meyer. Crelle LXXVIII, 130. [Vergl. Bd. VII, Nr. 315.]
453. *Sur la théorie de la houle.* *Resal.* *Compt. rend. LXXVIII,* 665.

454. *Sur les vagues de hauteur et de vitesse variables.* *L. E. Bertin.* *Compt. rend. LXXVIII,* 676.
Vergl. Variationsrechnung 536.

I.

Integration (unbestimmte).

455. *Sur une formule d'intégration indéfinie.* *Cayley.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1624.
456. Ueber einige unbestimmte Integrationen. Stern. Crelle LXXVIII, 340.

Involution.

457. Zur Theorie der cubischen und biquadratischen Involution. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 205.

K.

Kegelschnitte.

458. *On the caracteristic (viz. focal) equation of conic sections.* *Hall.* Astr. Nachr. LXXX, 13.
459. *Recherche des conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe donnée, un contact d'ordre déterminé.* *Painvin.* *Compt. rend. LXXVIII,* 55, 436, 835.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 380. Ellipse. Kreis. Krümmung. Parabel.

Kreis.

460. *Equation du cercle en valeur des dérivées et du rayon.* *Dostor.* Grun. Archiv LVI, 103.
461. Bedingungsgleichung dafür, dass vier Punkte in einem Kreise liegen. Zahradnik. Grun Archiv LVI, 15.
462. *Sur l'emploi des lames flexibles pour le tracé d'arcs de courbe d'un grand diamètre.* *Resal.* *Compt. rend. LXXVIII,* 709.
Vergl Determinanten in geometrischer Anwendung 379. Geometrie, höhere, 429. Planimetrie 511. Rectification.

Krümmung.

463. Ueber die osculatorischen Kegelschnitte ebener Curven. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 138.
Vergl. Normalien. Oberflächen 499. Oberflächen zweiter Ordnung 502.

M.

Mechanik.

464. Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 154.
465. Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und collinear-veränderlicher ebener Systeme. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 465.
466. *Sur le problème des trois corps.* *Siacci.* *Compt. rend. LXXVIII,* 110.
467. *Mémoire sur le problème des trois corps.* *E Mathieu.* *Compt. rend. LXXVIII,* 408. [Vergl. Nr. 205]
468. Ueber einige Probleme aus der Theorie der Centralbewegungen. Matthiessen. Grun. Archiv LVI, 225.
469. Ueber den Beschleunigungszustand des ebenen, unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems. Schell. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 185.
470. *Sur les petits mouvements d'un système matériel en équilibre stable.* *F. Lucas.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1636.
471. *Sur un cas spécial du viriel.* *Clausius.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1731.
472. Ueber die Wechselwirkung in endlichen Entfernungen. Umow. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 97.
473. *Sur la décomposition du travail des forces.* *Ledieu.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1182.
474. Relative Bewegung sich berührender Rotationsflächen. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 242.
475. *Sur la relation géométrique équivalente à la condition de l'isochronisme en mécanique.* *Durrande.* *Compt. rend. LXXVIII,* 1550, 1697.
476. *Sur la théorie des chocs.* *Resal.* *Compt. rend. LXXVIII,* 153.
477. *Du mouvement ondulatoire d'un train de wagons dû à un choc.* *Resal.* *Compt. rend. LXXVIII,* 521.

478. *Sur le choc des corps.* Darboux. *Compt. rend. LXXVIII*, 1421, 1559, 1645, 1767.
479. *Théorie du choc des corps en tenant compte des vibrations atomiques.* Ledieu. *Compt. rend. LXXVIII*, 1733, 1783.
480. Ueber den Einfluss, welchen auf die Bewegung eines Pendels mit einem kugelförmigen Hohlraume eine in ihm enthaltene reibende Flüssigkeit ausübt. Lübeck. Crelle LXXVII, 1.
481. *Sur le mouvement du pendule conique en ayant égard à la résistance de l'air.* Resal. *Compt. rend. LXXVIII*, 1449.
482. Ueber das Drehungsmoment eines rotirenden Schwungrades. Finger. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 520.
483. *Physiologie du vol des oiseaux.* Marey. *Compt. rend. LXXVIII*, 117. — *Rapport sur ce mémoire.* Tresca *ibid.* 4?6.
484. *Sur la théorie du vol des oiseaux.* H. et L. Planavergne. *Compt. rend. LXXVIII*, 262.
485. *Principes du vol des oiseaux.* Bertin. *Compt. rend. LXXVIII*, 421.
486. *Historique de la question du glissement de l'oiseau dans l'air.* Pénaud. *Compt. rend. LXXVIII*, 329.

Vergl. Aerodynamik. Analytische Geometrie der Ebene 353. Analytische Geometrie des Raumes 359, 360. Elasticität. Elektrodynamik. Geschichte der Mathematik 432, 439. Hydrodynamik. Molekularphysik. Optik. Potential. Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

487. Ueber die Bestimmung des mittleren Fehlers. Zachariae. Astr. Nachr. LXXX, 67; LXXXI, 225. — Jordan ibid. LXXX, 189; LXXXI, 51. — Helmert ibid. LXXXI, 49. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 315, 316.]

Molekularphysik.

488. Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes. Simony. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 299. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 129.]
489. *Sur les lois de la distribution plane des pressions à l'intérieur des corps isotropes dans l'état d'équilibre limite.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXVIII*, 757, 786.
490. Ueber die Bewegungsgleichungen der Energie in continuirlichen Körpern. Umow. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 418.

Vergl. Mechanik 479.

N.

Normalen.

491. *Sur les normales abaissées d'un point donné sur une surface du second ordre.* Laguerre. *Compt. rend. LXXVIII*, 438.

Normalie.

492. *Construction directe du centre de courbure en un point de la section faite dans une surface par un plan quelconque.* Mannheim. *Compt. rend. LXXVIII*, 959.
493. *Construction directe du rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan.* Mannheim. *Compt. rend. LXXVIII*, 1214.

O.

Oberflächen.

494. Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems. R. Hoppe. Grun. Archiv LVI, 153, 250. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 355.]
495. Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen. Reye. Crelle LXXVIII, 97.
496. Ueber die Kugelflächen, welche den Poltetraedern einer Fläche zweiten Grades umschrieben werden können. Reye. Crelle LXXVIII, 345.
497. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Affolter. Grun. Archiv LVI, 113.
498. Eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 259.
499. *Sur les lignes de courbure des surfaces réglées.* E. Weyr. *Compt. rend. LXXVIII*, 1649.
500. *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde.* Mannheim *Compt. rend. LXXVII*, 839.

Vergl. Differentialgleichungen 388. Mechanik 474. Normalie. Variationrechnung 537.

Oberflächen zweiter Ordnung.

501. Ueber den Axencomplex der Flächen zweiter Ordnung. Schilke. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 550.
502. *Sur les droites qui sont doublement tangentes à la surface lieu des centres de courbure d'une surface du second ordre. Laguerre. Compt. rend. LXXVIII*, 556.
Vergl. Cubatur. Determinanten in geometrischer Anwendung 383. Ellipsoid. Normalen. Sphärik.

Optik.

503. Elementarer Beweis zweier bekannten Theoreme aus der Optik. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 176.
504. *Sur la réfraction des gaz. Mascart. Compt. rend. LXXVIII*, 617.
505. *Sur la dispersion des gaz. Mascart. Compt. rend. LXXVIII*, 679.
506. *Études sur la diffraction. A. Cornu. Compt. rend. LXXVIII*, 113.

P.

Parabel.

507. Ueber einen Satz von der Parabel. Silldorf. Grun. Archiv LVI, 107.
Vergl. Gleichungen 447.

Philosophie der Mathematik.

508. Ueber einige Anwendungen und Erweiterungen des Hauber'schen Theorems. S. Günther. Grun. Archiv LVI, 26.

Planimetrie.

509. Zur Lehre der Transversallinien. L. Külp. Grun. Archiv LVI, 437.
510. Verschiedene Sätze über Dreieckstransversalen. Hain. Grun. Archiv LVI, 99.
511. Ueber sechs in einem Punkte sich schneidende Kreise. August. Grun. Archiv LVI, 327.

Potential.

512. Zur Theorie der Tangentenboussole. Oberbeck. Grun. Archiv LVI, 387.

Q.

Quadratische Formen.

513. Ueber einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen. Grube. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 492.
514. Ueber die binären und ternären quadratischen Formen. Selling. Crelle LXXVII, 143.
515. *Sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-même. Hermite.* Crelle LXXVIII, 325. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 384.]
516. *Sur la réduction des formes bilinéaires. C. Jordan. Compt. rend. LXXVIII*, 614. [Vergl. Nr. 307.]
517. *Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilineaires. Kronecker. Compt. rend. LXXVIII*, 1181. [Vergl. Nr. 287.]
518. *Sur les systèmes de formes quadratiques. C. Jordan. Compt. rend. LXXVIII*, 1736.

Quadratur.

519. *Sur le degré d'exactitude de la formule de Simpson relative à l'évaluation approchée des aires. Chevilliet. Compt. rend. LXXVIII*, 1841.

R.

Rectification.

520. Bemerkung zu Herrn Ligowski's Kreisberechnungsformel. Dickstein. Grun. Archiv LVI, 332. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 387.]

Reihen.

521. *Calcul élémentaire du nombre des boulets contenus dans les piles des arsenaux d'artillerie. Dostor.* Grun. Archiv LVI, 298.
522. Summirung der Reihe $\frac{l_2}{2^2}+\frac{l_3}{3^2}+\frac{l_4}{4^2}+\dots$ *in inf.* auf 17 Decimalstellen. Mertens. Crelle LXXVII, 104.
523. Ueber eine gewisse Classe in der Trigonometrie und Astronomie häufig in Anwendung kommender unendlicher Reihen. Ligowski. Grun. Archiv LVI, 328.
Vergl. Differentialgleichungen 392. Taylor's Reihe.

S.

Singularitäten.

524. *Sur les points singuliers des courbes algébriques planes.* Halphen. *Compt. rend. LXXVIII,* 1105.

Sphärik.

525. Ueber sphärische Curven. S. Günther. Grun. Archiv LVI, 267.
526. Bestimmung der grössten Anzahl gleichgrosser Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen. Bender. Grun. Archiv LVI, 302.

Vergl. Cartographie.

Stereometrie.

527. Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederoberflächen. Becker. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 459. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 156.]
528. *Sur des exécutions en plâtre des polyèdres semi réguliers de Mr. Catalan.* Tresca. *Compt. rend. LXXVIII,* 83.

Substitutionen.

529. *Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires.* C. Jordan. *Compt. rend. LXXVIII,* 741.
530. *Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée.* C. Jordan. *Compt. reud. LXXVIIL,* 1217.
531. Zur Theorie der zusammengesetzten Gruppen. Netto. Crelle LXXVIII, 81.

T.

Taylor'sche Reihe.

532. *Sur une transformation de la formule de Taylor.* Jourjon. *Compt. rend. LXXVIII,* 493.

Tetraeder.

533. Einfacher Beweis eines Satzes vom Tetraederinhalt. S. Günther. Grun. Archiv LVI, 17.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 378.

Trigonometrie.

534. Zwei Dreieckssätze. Bermann. Grun. Archiv LVI, 109.

Vergl. Reihen 523.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

535. *Sur un point de la théorie des fonctions abéliennes.* Halphen. *Compt. rend. LXXVIII,* 1833.

V.

Variationsrechnung.

536. Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders. Lipschitz. Crelle LXXVIII, 245.
537. Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. Lipschitz. Crelle LXXVIII, 1.

W.

Wärmelehre.

538. *Interprétation mécanique des lois de Dulong et Petit et de Woestyn sur les chaleurs spécifiques atomiques.* Ledieu. *Compt. rend. LXXVIII,* 30. [Vergl. Nr. 319.]
539. *Idées générales sur l'interprétation mécanique des propriétés physiques et chimiques des corps.* Ledieu. *Compt. rend. LXXVIII,* 1345, 1393.
540. *Démonstration directe de l'équation* $\int\frac{dQ}{T}=0$ *pour tout cycle fermé et reversible.* Ledieu. *Compt. rend. LXXVIII,* 221, 309, 537.
541. *Sur une équation mécanique qui correspond à l'équation* $\int\frac{dQ}{T}=0.$ Clausius. *Compt. rend. LXXVIII,* 461.

542. *Sur un calcul de Pouillet relatif au refroidissement de la masse solaire.* Faye. *Compt. rend. LXXVIII,* 1073.
543. *Sur un calcul de Pouillet relatif au refroidissement de la masse solaire.* Ledieu. *Compt. rend. LXXVIII,* 1255.

Vergl. Attraction.

Z.

Zahlentheorie.

544. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. G. Cantor. Crelle LXXVII, 258.
545. Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. Mertens. Crelle LXXVII, 289.
546. Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Mertens. Crelle LXXVIII, 46.
547. Zur Theorie periodischer Decimalbrüche. Broda. Grun. Archiv LVI, 85.
548. Ueber die unbestimmten Gleichungen ersten Grades. C. Reuschle jun. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 272.
549. Ueber die Formen, in denen die Lösungen einer diophantischen Gleichung vom ersten Grade enthalten sind. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 53.
550. *Théorèmes d'analyse indéterminée.* Pepin. *Compt. rend. LXXVIII,* 144.
551. *Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles.* Genocchi. *Compt. rend. LXXVIII,* 433.
552. Die rationalen Dreiecke. Rath. Grun. Archiv LVI, 188. — R. Hoppe *ibid.* 223.
553. Ueber die Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = \pm 4$, wo D eine positive ungerade Zahl und kein Quadrat ist. W. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XIX, 92.

Vergl. Geschichte der Mathematik 434. Quadratische Formen.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

L'étalon des mesures Assyriennes, fixé par les textes cunéiformes par M. J. Oppert. Extrait du Journal Asiatique (Août-Septembre 1872 *et Octobre-Novembre* 1874). *Paris, Imprimerie nationale* 1875. 90 S.

Der Referent hätte doppelten Grund, sich einer Besprechung der in der Ueberschrift genannten Abhandlung zu enthalten. Es handelt sich um Deutung von Keilinschriften und da sollte, wem die Kunde der assyrischen Sprache und Schrift abgeht, sich begnügen zu lernen. Es handelt sich um Metrologisches, und da sollte nur, wer mit Metrologie vollständig vertraut ist, sich einmengen. Aber neben diesen Veranlassungen zum Schweigen sind wir doch auch im Besitze einer doppelten Mahnung zum Reden. Wir meinen die freundliche Aufforderung des Verfassers, der uns um einen Bericht ersuchte; wir meinen zugleich auch die Thatsache, dass nicht blos über das Maasssystem der Assyrer, sondern auch über manche mathematische Kenntniss derselben aus dieser Untersuchung Schätzbares hervorgeht, und in diesen Fragen glauben wir allerdings auf einige Competenz Anspruch machen zu dürfen. Wir werden demgemäss unser Referat so einrichten, dass wir über die metrologischen Dinge nur so weit uns verbreiten, als mehr oder weniger Mathematisches dabei zur Rede kommt, und sodann zum Schlusse zusammenstellen, was für die Geschichte der ältesten orientalischen Mathematik dabei gewonnen wurde.

Oppert hatte sich die Aufgabe gestellt, die Längenmaasse, Flächenmaasse und Hohlmaasse, sowie die Gewichte der Assyrer soviel als möglich aus assyrischen Quellen abzuleiten und ohne der von seinen Vorgängern, z. B. von J. Brandis (Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander den Grossen. Berlin 1866) hauptsächlich benutzten Identification babylonischer und griechischer Maasse bei Herodot die Entscheidung zuzuweisen. Vielmehr wurden der Hauptsache nach nur drei Angaben verwerthet: der Umfang der Stadt Khorsabad nach König

Sargon (S. 9), der Flächenraum des Palastes dieses Königs (S. 43 und 49 bis 50), der Inhalt des ehernen Meeres im salomonischen Tempel (S. 59).

Den Umfang von Khorsabad liest Oppert: „$3\frac{1}{3}$ Ner, 1 Soss, 3 Kani, 2 U“, und vorausgesetzt, dass diese Uebersetzung richtig, hat nunmehr die Aufgabe sich verschoben: es handelt sich noch um Auffindung des gegenseitigen Verhältnisses der einzelnen Längennamen, um Vergleichung des Ergebnisses mit dem wirklich gemessenen Umfange von Khorsabad, um endgiltige Bestimmung der Längeneinheit U in modernen Maassen. Was jenes gegenseitige Verhältniss betrifft, so erleichtern zunächst die beiden Wörter Ner und Soss die Sache ungemein. Schon lange weiss man, dass es im Assyrischen drei Wörter Soss, Ner, Sar giebt, welche Zahlenbedeutung haben und zwar nicht beim Zahlensprechen überhaupt, aber doch häufig in Verbindung mit irgend zu zählenden Gegenständen gebraucht werden. Dem Deutschen geben die Wörter Dutzend = 12, Mandel = 15, Schock = 60, Gross = 144 eine vortreffliche Verdeutlichung, indem jedes dieser Wörter mit beliebigen Dingwörtern verbunden werden kann, so dass man von einem Dutzend Jahre, einem Gross Stahlfedern spricht, ohne dass es Jemand einfiele, darum 6015 als hundert Schock und eine Mandel oder 12144 als tausend Dutzend und ein Gross oder dergleichen zu lesen. Von den drei assyrischen Wörtern bedeutet Soss durch einen neckischen Zufall des Gleichklanges dasselbe wie unser lautverwandtes Schock, d. h. 60; Ner bedeutet 10 Soss oder 600, Sar endlich das Quadrat von Soss oder 3600. Steht kein Zeichen der gezählten Dinge hinter jenen Wörtern, so muss aus dem Sinne eine zu Grunde liegende Einheit hinzugedacht werden, und so war leicht begreiflich bei der Angabe des Umfanges von Khorsabad die erste Vermuthung die, es handle sich um Ner und Soss der nächstgenannten Einheit, d. h. der Kani. Für Kanu selbst war alsdann in dem hebräischen Kane die Erläuterung gegeben, welches z. B. aus Hesekiel 40, 5 als ein Maass von 6 Ellen bekannt ist. Das U wäre sonach zu dem Kanu in dasselbe Zahlenverhältniss zu setzen, wie die hebräische Elle zu dem Kanu, und wir hätten Kanu als 6 U, Soss als 60 Kani oder 360 U, Ner als 10 Soss oder 3600 U. Demgemäss wäre für den Umfang von Khorsabad die Länge gegeben $3\frac{1}{3}.3600 + 1.360 + 3.6 + 2.1 = 12380$ U.

Zwei Einwürfe sind nun zu machen, welche Oppert nicht umgeht. Zuerst fragt er, wie man an eine Interpretation glauben könne, welche eine so auffallende Zerlegung der angegebenen Zahl benutze, wie die von ihm gelesene, mit $3\frac{1}{3}$ Ner beginnend? Sollte man nicht vielmehr erwarten $12380 = 3.3600 + 4.360 + 23.6 + 2.1$, also 3 Ner, 4 Soss*, 23 Kani, 2 U zu finden? Gerade der Nachweis, dass dem nicht so ist, bildet den genialsten Theil der Oppert'schen Untersuchung, welcher nicht genug hervorgehoben

* Bei Oppert S. 13 Z. 2 v. u. steht in der erwarteten Zerlegung fehlerhaft 34 Soss.

werden kann. Oppert zeigt (S. 11), dass die Messungen, welche von unbefangenen Architekten auf den Trümmerstätten von Persepolis vorgenommen worden sind, niemals vollständig richtige Quadratformen der alten Umrisse ergeben haben, sondern stets Rechtecke, deren kürzere Seite eine runde Zahl zum Längenmaasse hat. In zwei Fällen verhalten sich, wie Oppert bemerkt, die beiden Seiten des Rechtecks wie 4:3; für die übrigen Fälle haben wir die Rechnung angestellt und finden die längere Seite durch die kürzere ausgedrückt als 1,00961, 1,02713, 1,03571, 1,05002, 1,01639 durchschnittlich als 1,02777 oder fast genau als $\frac{37}{36}$. Wir kommen auf dieses Verhältniss später zurück. Für jetzt begnügen wir uns mit der Thatsache der ungleichen Seiten und ziehen mit Oppert die Folgerung: Auch Khorsabad wird schon in einem solchen Rechtecke erbaut gewesen sein, und $3\frac{1}{3}$ Ner bedeutet die Länge der vier als gleich angenommenen Seiten, 1 Soss 3 Kani 2 U den Ueberschuss der beiden längeren Seiten. Die kürzeren Seiten würden darnach je $\frac{5}{6}$ Ner oder, in U ausgerechnet, 3000 U als eine runde Maasszahl besessen haben, wie jene Baulichkeiten zu Persepolis; die längeren Seiten würden je 3190 U Länge besessen haben. Nur in dem Verhältnisse $\frac{3190}{3000} = 1,06333$ $= \frac{17}{16}$ etwa ist das spätere persische Verhältniss nicht zu erkennen, doch scheint uns gerade darin eine eingetretene Veränderung nicht zu den unannehmbaren Vermuthungen zu gehören.

Der erste Einwurf ist somit erledigt, keineswegs aber der zweite. Ein zu Senkereh aufgefundenes Täfelchen (S. 21) enthält eine vollständige Maasstabelle, aus welcher zu entnehmen ist, dass ein Soss nicht 60 Kani, sondern 60 Sa ist, während 1 Sa = 2 Kani und dann wieder 1 Kanu = 6 U (S. 27). Gegenüber von U verdoppeln sich demnach die Verhältnisszahlen der höheren Einheiten 1 Soss = 720 U, 1 Ner = 7200 U und der Umfang von Khorsabad $= 3\frac{1}{3} . 7200 + 1 . 720 + 3 . 6 + 2 . 1 = 24740$ U (S. 28), wovon auf jede kürzere Seite des Rechtecks 6000 U mit wieder runder Maasszahl, auf jede längere Seite 6370 U kommen, und das Verhältniss $\frac{6370}{6000} = 1,06166$ unterscheidet sich kaum von dem vorhin berechneten.

Freilich könnten auch hier wieder Zweifel erhoben werden, welchen die Widerlegung auf dem Fusse folgt, und da Oppert sie nicht hervorhebt, so mag uns diese Ergänzung gestattet werden. Zuerst könnte man fragen, ob Soss, Ner denn wirklich allgemeine Zahlen sein können, während die Tafel von Senkereh sie ganz genau definirt? Wir antworten, dass dem in Wirklichkeit nicht so ist, dass auf jener Tabelle vielmehr das Wort Us für 60 Sa, dann Kasbu für 30 Us gebraucht ist und nur die Wörter U und Kanu eine Identification der Tabelle mit den Maasszahlen von Khorsabad in den unteren Werthen erzwingen, während die Gleichheit des Soss mit den Us erst von Oppert aus dem sogleich zu besprechenden wirklichen Umfange von Khorsabad errechnet wurde. Diesen Zweifel hat also nur unser Bericht verschuldet, der absichtlich einen Augenblick vorgriff. Aber ein weiterer Zweifel ist folgender: wenn 2 Kani = 1 Sa, so ist es auffallend, die Angabe 1 Soss 3 Kani 2 U zu finden; es sollte heissen 1 Soss 1 Sa 1 Kanu 2 U. Wir antworten, es sollte nicht blos so heissen, es heisst wirklich beinahe so in einer Variante (S. 35), indem die Länge als 1 Soss $1\frac{1}{2}$ Sa 2 U benannt wird, wodurch die Existenz jener Länge Sa und ihr Werth Bestätigung finden.

Der Umfang von Khorsabad, sagten wir, ist durch die Herren Botta und Flandin gemessen worden, und zwar zu 6790^m, wovon je 1645 den beiden kleineren, je 1750 den beiden grösseren Seiten des Rechtecks zufielen (S. 10). Khorsabad war also wirklich ein Rechteck mit nicht sehr verschiedenen Seiten. Mag man nun irgend eine der drei Gleichungen wählen $6000\ U = 1645$, $6370\ U = 1750$, $24740\ U = 6790$, immer bekommt man Werthe von U, welche in den Millimetern noch übereinstimmen, so dass Oppert mit Recht, eine Mittelzahl wählend, $U = 0{,}27425^m$ setzt. Bereits im Jahre 1853 hat Oppert aus ganz anderen Materialien, welche er bei seiner Expedition nach Mesopotamien selbst gemessen hatte, die Ergebnisse veröffentlicht, dass die assyrische Elle etwa $0{,}525^m$ gewesen sein müsse, dass 360 derselben ein Stadion ausmachten, dass 3 Ellen in 5 Fuss zerfielen. Damit vereinigt sich die neueste Entdeckung zu der eine Grundlage bietenden Thatsache: das U der Sargon'schen Angaben ist eine halbe gewöhnliche assyrische Elle und entspricht etwa der griechischen Spithame. Die Elle oder 2 U erhält die Länge von $0{,}5485^m$ und weiter wird 1 Kanu $= 1{,}6455^m$, 1 Sa $= 3{,}291$, 1 Us oder mit dem griechischen Namen 1 Stadion $= 197{,}46^m$ u. s. w. Wir kommen auf die anderweitigen Längenmaasse in ihrer systematischen Verbindung in dem letzten Theile dieses Referats noch zurück. Hier müssen wir nur noch einige Namen mit ihren Werthen zusammenstellen, deren wir uns im Verlauf der Betrachtungen fortwährend zu bedienen haben. So setzt Oppert (S. 38—39) 6 Sa oder, wie er sagt, 6 Toisen = 1 Ruthe (*perche*), 10 Sa = 1 Plethron. Von kleineren Längen als die Halbelle U findet er als minimales Maass die Haarbreite $= \frac{1}{3600}$ U $= 0{,}000076^m$ beiläufig $= \frac{1}{13}$ Millimeter. Wieder aufsteigend bilden 12 Haarbreiten = 1 Punkt, 5 Punkte = 1 Nagelbreite, 6 Nagelbreiten = 1 Daumenbreite, 12 Daumenbreiten = 1 Fuss, 20 Nagelbreiten = 1 Handflächenbreite (*palme*).

Eine Gattung von Längenmaassen dürfen wir nicht so kurz abmachen, deren Verhältniss zu den übrigen so auffallend von den gewohnten Zahlen, d. h. von Vielfachen oder Theilern von 10 und 60 abweicht, dass im ersten Augenblick ihre ganze Existenz nur Unglauben hervorrufen kann. Oppert spricht von der grossen assyrischen Elle (*aune*, während er die gewöhnliche Elle *coudée* nennt) von 37 Daumenbreiten, von dem Kalamus von 37 Handflächenbreiten, zu dessen Vergleich an den Sa von 36 Handflächenbreiten erinnert sein mag. Sollte wirklich die Primzahl 37 urplötzlich hier auftreten?

Ganz vereinzelt stünde diese Abnormität allerdings nicht. Auch eine andere, weder dem Decimal- noch dem Duodecimalsystem, also auch nicht dem dieselbe verbindenden Sexagesimalsystem angehörige Zahl spielt in babylonischen Messungen eine Rolle. Nach Herodot's nicht anzuzweifelndem Zeugnisse findet die Königselle mit 7 Handflächenbreiten neben der gewöhnlichen Elle von 6 Handflächenbreiten in der Maasstabelle ihren Platz. Aber *quod licet Jovi, non licet bovi;* der heiligen Planetenzahl 7, der Zahl der Wochentage, der Zahl, bei welcher geschworen wird, konnte man fast erwarten irgendwie zu begegnen; doch wie kam man auf den Gedanken, 37 zu benutzen?

Oppert hat diese Frage nicht aufgeworfen; um so lauter wollen wir sie betonen in der Hoffnung, doch bei irgend einem Fachmanne ein Echo hervorlocken zu können. Wäre das 37 ein Flächenmaass, dann wären wir um eine Erklärung nicht verlegen. Ist doch $37 = 1^2 + 6^2$, oder besser noch $3700 = 10^2 + 60^2$ und damit die Fläche des Quadrats der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks von den Katheten 10 und 60, d. h. von den Katheten, welche durch die beiden Grundzahlen babylonischer Metrologie gemessen werden. Aber die Maasse, für welche die Zahl 37 die Grundlage bildet, sind eben keine Flächen, sondern Längen, und somit ist unsere Erklärung nicht zu gebrauchen, ganz abgesehen von der Frage, ob man die Kenntniss irrationaler Seiten so weit hinaufschieben dürfe, eine Frage, welche wir selbst verneinen möchten. Wir dachten auch an eine andere Erklärung. War vielleicht die Addition mannigfacher Reihen, das arithmetische Experiment, wie wir es in unseren mathematischen Beiträgen zum Culturleben der Völker genannt und bei den Griechen unanfechtbar nachgewiesen haben, bereits babylonische Gewohnheit? Hat man dort vielleicht die beiden Systeme 1, 10, 100 und 1, 60, 3600 zu dem neuen System 2, 70, 3700 vereinigt und so gleichzeitig eine theoretische Erklärung für die Königselle und ein ganz neues Maass, den Kalamus, gefunden, aus welchem vielleicht rückwärts die grosse assyrische Elle abgeleitet werden mochte? Ist der Punkt die Einheit, von welcher man ausgeht, so heisst die eine Reihe: Punkt, doppelte Nagelbreite, Handflächenbreite; die andere Reihe: Punkt, doppelte Daumenbreite, Sa. Die Addition ergiebt: Doppelpunkt, 70 Punkte, Kalamus. Es hängt also unsere Vermuthung wesentlich davon ab, ob 70 Punkte eine Königselle bilden. Das ist aber leider nicht der Fall, vielmehr ist die Königselle 700 Punkte lang, und wenn es nicht gelingt, ihren zehnten Theil als Maass nachzuweisen, schwebt auch unser zweiter Erklärungsversuch haltlos in der Luft. Bei solchen Ausnahmefällen kann man nämlich nicht behutsam genug sein und darf ganz besonders niemals ein Maass als zur Theorie nothwendig heraus-, vielleicht besser gesagt hineinrechnen, welches nicht ganz bestimmte Existenz besitzt. Bei Maassen dagegen, die in ein ganzes System von wohlbekannten Einheiten passen, ist eine so strenge Beschränkung auf das traditionell Gegebene nicht geboten.

Nehmen wir somit zunächst nur die Thatsache für erwiesen an, dass die Assyrer eine grosse assyrische Elle von 37 Daumenbreiten, einen Kalamus von 37 Handflächenbreiten besassen, so ist immerhin als uns auffallend erscheinende Bemerkung zu Oppert's Betrachtungen hinzuzusetzen, dass das Verhältniss $\frac{37}{36}$ der Seiten jener Rechtecke zu Persepolis verständlich wird, sowie man die Rechtecke als Pseudoquadrate sich denkt, d. h. um dieses neue Wort für einen neuen Begriff zu erläutern, als Rechtecke, deren Seiten sämmtlich dieselbe, und zwar dieselbe runde Maasszahl besitzen, wenn man sie mit verschiedenen Maassstäben mass, die kürzeren mit dem Sa, die längeren mit dem Kalamus und den Unterabtheilungen dieser Messstangen.

Oppert unterstützt die Existenz der grossen assyrischen Elle, auf die es hauptsächlich ankommt, durch die Bemerkung (S. 38), die Juden hätten gleichfalls einen Kalamus von 37 Handflächenbreiten besessen, und er beruft sich dafür auf Hesekiel 42. Offenbar ist dies einer von den wenigen Irrthümern, welche durch die Augenkrankheit des Verfassers, der zu dictiren genöthigt war, sich einschlichen. Oppert muss Hesekiel 40, 5 in Verbindung mit 43, 13 in Gedanken gehabt haben. Diese beiden Verse lauten, soweit sie uns interessiren: „Und der Mann hatte die Messruthe in der Hand, die war 6 Ellen lang; eine jegliche Elle war eine Handbreit länger denn eine gemeine Elle“ und „dies ist aber das Maass des Altars nach der Elle, welche eine Handbreit länger ist, denn eine gemeine Elle.“ Wir meinen, das könnte sich nur auf die Königselle beziehen? Die Vulgata freilich übersetzt „*Et in manu viri calamus mensurae sex cubitorum et palmi*“, giebt also die überschüssige Handbreite zu sämmtlichen 6 Ellen statt zu jeder einzelnen, und gelangt so zu dem Kalamus von 37 Handbreiten. Ebenso erklären es die rabbinischen Commentatoren des betreffenden Hesekielverses*, aber, wie es scheint, nur alter Tradition folgend, dagegen im Widerspruch zur Textesstelle, welche keine andere Uebersetzung als die Luther's zulassen soll. Andererseits kommt Fenner von Fenneberg durch ihm eigenthümliche Berechnungen zu der jetzt auch von Oppert ohne zweifelnden Zusatz ausgesprochenen Entscheidung, so dass wir solchen Fachmännern gegenüber verstummen müssen.

Ohnedies kommt es auf eine bei den Juden nachweisbare oder nicht nachweisbare Analogie wenig an. Oppert's grosse assyrische Elle von 37 Daumenbreiten hat ihre Bürgschaft in dem Zusammenhange mit der Grundfläche des Palastes des Königs Sargon. Wir gelangen damit zugleich zu dem zweiten Abschnitte Oppert's von den Flächenmaassen (S. 42—57). Ein solches von hervorragender Bedeutung nennt Oppert (S. 51) bald das grosse Agrar-U, bald die Aroura. Um die Vermischung des Längen-U

* L. Fenner von Fenneberg, Untersuchungen über die Längen-, Feld- und Wegemaasse der Völker des Alterthums, insbesondere der Griechen und der Juden. Berlin 1859. S. 108 flg.

mit dem Flächen-U zu vermeiden, welche uns beim Lesen oftmals in die Quere kam, wollen wir uns nur des zweiten griechischen Namens bedienen. 10 Arouren also war die Fläche, welche nach der Inschrift einer kleinen Silberplatte (S. 49—50) Sargon's Palast bedeckte, und andererseits wird als erwiesen angegeben, dass dieselbe Fläche 319680 Quadratellen gleich war, oder 2220 Quadraten, deren Seiten jeweil 12 Ellen = 2 Sa = $6{,}582^{m}$ lang sind. Folglich muss eine Aroura 222 solcher Quadrate enthalten, beziehungsweise sich als Rechteck denken lassen, dessen eine Seite 222 Ellen, die andere 144 Ellen lang ist. Nun ist 1 Elle = 20 Daumenbreiten, somit 222 Ellen = 222.20 Daumenbreiten = 120.37 Daumenbreiten und 144 Ellen = 144.20 Daumenbreiten = 120.24 Daumenbreiten (S. 51). Heisst also 24 Daumenbreiten = 1 Doppelfuss und 37 Daumenbreiten = 1 grosse assyrische Elle, so wird die Aroura ein Pseudoquadrat, wie wir uns vorhin ausdrückten, mit der Maasszahl 120 für jede Seite, das eine Mal gemessen nach dem Doppelfuss, das andere Mal nach der grossen assyrischen Elle, und diese beiden Einheiten müssen folglich Bestand gehabt haben.

Die grosse assyrische Elle von 37 Daumenbreiten oder 222 Nagelbreiten ist, wie Oppert hinzusetzt, selbst die Summe dreier Längeneinheiten, nämlich = 140 + 72 + 10 Nagelbreiten = 1 Königselle + 1 Fuss + 1 halbe Handbreite*. Ebenso zerlegt sich die Aroura von 222 Quadratdoppelsa in drei Quadrate, vermöge $222 = 14^2 + 5^2 + 1^2$, d. h. die Aroura besteht aus dem Quadrate von 28 Sa, aus dem von 10 Sa und dem von 2 Sa, oder aus den Quadraten von 144 Königsellen, von 1 Plethron und von 1 Doppelsa.

Aber, wird man vielleicht sagen, damit fällt ja die ganze Bestätigung der grossen assyrischen Elle wieder weg! Sie selbst enthüllt sich uns als Summe dreier Längen. Das Rechteck, bei welchem sie eine Rolle spielen sollte, enthüllt sich als Summe dreier Quadrate von Längen, die anderen Systemen angehören. In dem Bauplane des Palastes des Sargon kommt, wie wir noch sehen wollen, jede andere Zahl eher vor, als 37. Wenn keine anderen Gründe für die grosse assyrische Elle aufzutreiben sind, so ist sie eitel Schwindel.

Oppert, welcher sonst mit selbstgemachten Einwürfen nicht sparsam ist, hat diesen nicht aufgenommen. Eine Entgegnung wäre ihm sonst leicht gefallen. Er hatte nur den einen Umstand in Erinnerung zu bringen, dass die Aroura, mag sie mit anderen Flächenmaassen, von denen gleichfalls noch die Rede sein wird, in einer Zusammensetzungsgleichung irgendwelcher Form vorkommen, vermöge der Angabe des Silberplättchens ohne allen Zweifel zugleich auch eine Flächeneinheit war. Wo aber finden wir im ganzen Verlaufe menschlicher Geschichte jemals eine Flächeneinheit, die eine andere Gestalt hatte, als die eines Vierecks mit vier rechten Winkeln und rationalen, wenn auch nicht nothwendig gleichen Seiten? Alsdann

* Bei Oppert S. 51 Z. 4 steht dafür irrthümlich 1 Handbreite.

aber tritt für die Aroura stets in der einen Seitenlänge der Factor 37 hervor und zwingt uns zu der behaupteten Annahme eines dieselbe Primzahl irgendwie zur Geltung bringenden Längenmaasses. Wir bemerken ferner, dass unter dieser Voraussetzung zwar sehr mannigfache Verbindungen von Seiten zu einem Rechtecke von dem Inhalte der Aroura möglich sind, dass aber die von Oppert gewählte den grossen Vorzug besitzt, in jeder Seite auch den Factor 60 zu enthalten, so dass es von ihr aus leicht war, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{600}$, $\frac{1}{3600}$ der Aroura zu bilden, und diese Bruchtheile müssen nach aller Wahrscheinlichkeit vorgekommen sein.

Wir haben gesagt, bei dem Bauplane des Sargon'schen Palastes spiele die Zahl 37 keine Rolle. Der Grundriss jenes Palastes (Taf. VI, Fig. 13) bestand aus einem Achtecke mit 6 Winkeln von 90° und 2 Winkeln von 270° oder, wie man die Figur vielleicht deutlicher beschreibt, aus zwei ungleichen Rechtecken, welche mit der jeweil grösseren Seite aneinander stiessen. Das grössere Rechteck hatte die Dimensionen 48 und 29, das kleinere 36 und 23, überall mit dem Doppelsa als Einheit, und wirklich ist $48.29 + 36.23 = 2220$. Jene Längen mag man aber additiv oder subtractiv combiniren wie man will, nie wird man der Zahl 37 begegnen. Oppert hat dagegen der Zahl $52 = 29 + 23$, d. h. der combinirten Tiefe beider Rechtecke zusammen, beziehungsweise der Primzahl 13, der Zahl der assyrischen Götter (S. 55), als viertem Theile von 52 eine hervorragende Rolle zugewiesen. Wir folgen ihm nicht in diesen Vermuthungen, in welchen uns der geistvolle Forscher, den wir bisher mit Vergnügen begleitet haben, seiner arithmetischen Phantasie etwas zuviel Nachgiebigkeit erwiesen zu haben scheint. Wir meinen, der Grundriss des Gebäudes werde sich nach dem zur Verfügung stehenden Gelände gerichtet haben, und es werde nicht umgekehrt erst ein Plan mit mystischen Zahlenverhältnissen aufgezeichnet und zu diesem Plane der Bauplatz gesucht worden sein, wie wir annehmen müssten, wenn Oppert hier das Richtige getroffen hätte.

Die Aroura war also ein Flächenmaass, aber nicht sie allein. Oppert nimmt (S. 56) noch andere Flächenmaasse an, welche aus den dem Sexagesimalsystem angehörigen Längen sich ableiten. Die Quadratruthe ist ein solches, deren Seite also 1 Ruthe = 6 Sa war. Ihr Hundertfaches, das Quadratstadion, kommt gleichfalls vor. Ein anderes System geht von 6 Quadratruthen als Einheit aus, deren Soss, Ner und Sar, d. h. also 360, 3600 und 21600 Quadratruthen wiederum existiren. Wir unterlassen nicht, darauf aufmerksam zu machen, dass fast alle diese letzteren Flächenmaasse nur in Gestalt von Rechtecken, nicht mit Quadraten mit rationalen Seiten möglich sind.

Die Raummaasse bilden einen dritten Abschnitt von Oppert's Untersuchungen (S. 58—68). Das gegenseitige Verhältniss der einzelnen Maasse scheint hier aus hebräischen Analogien ziemlich gesichert. Es war nur nothwendig, die Seite eines einzigen dieser cubischen Gefässe zu ermitteln, um auf bekanntem Boden zu stehen, und diese Kenntniss besitzt man gleichfalls schon geraume Zeit. Man nahm schon lange an, das Bath oder Epha sei der Cubus der Halbelle. Auch Oppert sieht in diesem Hohlmaasse den Würfel mit der Seite U und bestätigt diese Ansicht durch Angaben biblischer und profaner Schriftsteller über das eherne Meer aus dem Tempel Salomon's. Wir kommen nachher auf diese Rechnung zurück und wenden uns zuvor nur noch mit wenigen Worten zu den Gewichten.

Ihnen ist der vierte und letzte Abschnitt der uns vorliegenden Abhandlung (S. 69 — 90) gewidmet. Die Bestimmung alter Gewichte ist stets von grossen Schwierigkeiten begleitet. Wenn aus irgendwelchen Schriftquellen eine Länge, eine Fläche angegeben ist, so besitzen wir heute wenn nicht mehr das gemessene Object selbst, doch vielleicht dessen Trümmer, und wir haben gesehen, wie eine geistreiche Divination solche Trümmer zu benutzen versteht. Ganz anders bei Gewichten. Zwar sind uns hier in gar nicht seltenen Fällen alte Gewichte erhalten, auch aus der hier in Betracht kommenden altassyrischen Zeit; aber bedenken wir die Feinheit der Technik, welche nöthig war, damit jene Gewichte überhaupt jemals ihrem Nominalwerthe genau entsprachen, rechnen wir dazu die chemischen Einflüsse, welchen die Gewichte durch Jahrtausende unterworfen waren und welche, wenn sie auch die Form weniger beeinflussten, gerade das am meisten veränderten, was man vor Allem unberührt wünschen möchte: seine Substanz, seine Dichtigkeit und damit sein Gewicht, so wird es erklärlich, wie hier noch immer ein gewisses Dunkel über der Lösung des Räthsels schwebt. Wenigstens ist der Mathematiker als solcher kaum in der Lage, die aufgestellten Vermuthungen zu prüfen, zu bestätigen oder zu widerlegen, und somit haben wir den Schluss unserer Besprechung im engern Sinne des Wortes erreicht.

Wir stellen nur noch die eine Frage, welche freilich für uns fast die grösste Wichtigkeit besitzt, die Frage: Was geht aus der Oppert'schen Abhandlung unmittelbar oder mittelbar für die Mathematik der Assyrer hervor? wobei wir diesen Völkernamen nicht in ethnographisch bestimmtem Sinne fassen, sondern allgemein solche Verfasser meinen, deren Literatur in den Zeichen der Keilschrift erhalten ist.

Wir haben am Anfange dieser Besprechung schon die Zahlenbedeutung der Wörter Soss, Ner, Sar hervorgehoben. Wir müssen hier noch näher auf diesen Gegenstand eingehen. Brandis* hat gezeigt, dass Hincks der Erste war, der die Anwendung des Sexagesimalsystems bei den Keil-

---

* J. Brandis, Das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander den Grossen. Berlin 1866. Die Untersuchungen von Hincks S. 595, von Rawlinson S. 8; Brandis' eigene Ansichten S. 9 und 15. Von mathematisch-historischer Seite ist das Buch von Brandis zuerst im Druck verwerthet durch Hankel, Zur Geschichte der Mathematik, S. 49 und 67.

schriftvölkern entdeckte. Eine astronomische Tafel enthielt dieselbe, auf welcher der beleuchtete Theil des Mondes für jeden der 15 Monatstage vom beginnenden Mondscheine bis zum Vollmonde angegeben ist. In modernen Zahlen geschrieben, sind von den 240 Theilen der ganzen Mondscheibe der Reihe nach beleuchtet:

5 , 10 , 20 , 40 , 1 20, 1 36, 1 52, 2 8,
2 24, 2 40, 2 56, 3 12, 3 28, 3 44, 4.

Hiecks erkannte, dass die vereinzelt nach links gerückten Ziffern 1, 2, 3, 4 stets Sechziger bedeuten, dass die beleuchteten Theile an den fünf ersten Tagen eine geometrische Reihe mit dem Exponenten 2, von da an eine arithmetische Reihe mit der Differenz 16 bilden. Rawlinson vervollständigte die von Hincks begonnene Entdeckung unabhängig von demselben. Ihm verdankt man die Kenntniss und Entzifferung einer Tafel der Quadrate sämmtlicher aufeinanderfolgender Zahlen von 1 bis 60, alle unter Benutzung des Sexagesimalsystems geschrieben, z. B.

54 9 Quadrat 57,

welches bedeutet $54.60 + 9 (= 3249) = 57^2$. Ihm verdankt man die Wörter Soss, Sar in ihrer Zahlenbedeutung. An diese Entdeckung schliesst begrifflich wieder eine weitere sich an, welche, wenn wir Oppert (S. 21) richtig verstehen, das Verdienst von George Smith ist. Auf dem Täfelchen von Senkereh, welches auf der einen Seite eine vergleichende Maasstabelle zeigt, von welcher aus in Verbindung mit dem Umfange von Khorsabad Oppert die Längenmaasse erschloss, findet sich auf der Rückseite eine mathematisch noch viel merkwürdigere Tabelle: die Kubikzahlen, welche auf dem Fragmente, das leider allein erhalten ist, bis zu

9 8 6 Kubus 32,

d. h. $9.60^2 + 6.60 + 8 (= 32768) = 32^3$ reicht (S. 23), ohne die naheliegende Vermuthung zur Gewissheit zu erheben, auch diese Tabelle werde sich, ähnlich wie die der Quadrate, bis zur Potenzerhebung von 60 erstreckt haben. Noch ohne Kenntniss der Kubustafel hat Brandis mit grosser Schärfe die von jeder chronologischen Nebenbedeutung entkleidete Zahleneigenschaft der Wörter Soss und Sar hervorgehoben, hat die Stelle des Hesychios aufgefunden, in welcher ausdrücklich definirt wird: Σαρός· ἀριθμός τις παρὰ Βαβυλωνίοις, hat auch darauf hingewiesen, dass das Sexagesimalsystem nicht bei Einern, Sossen und Saren stehen zu bleiben genöthigt war, sondern nach aufwärts noch höhere Einheiten 60^3, 60^4 u. s. w., nach abwärts Sexagesimalbrüche gestattete, welche letztere ebensowohl in Keilinschriften nachgewiesen sind, als sie seit der Mitte des II. Jahrh. v. Chr. vielleicht durch Hipparch in Griechenland sich einbürgerten. Oppert, der das Verdienst von Brandis um das Verständniss des ganzen Gegenstandes etwas zu gering zu veranschlagen scheint, hat als Ergänzung noch den reinen Zahlenbegriff des Wortes Ner gesichert, welches nicht blos, wie man lange meinte, in Verbindung mit Jahr eine Zeitperiode von 600 Jahren bedeutet, sondern ebenso, wie wir früher sahen, als ein Ner von Sa in Gebrauch ist, ebenso von Gewichten gilt: ein Ner von Talenten, ebenso von Menschen, wie der Titel eines Befehlshabers des Ner des Landes, d. h. eines Hauptmannes über 600 Leute (oder vielleicht Herr über 600 Flächeneinheiten?) verbürgt (S. 7 und 9). Ebendazu stimmt auch der Uebergang des Ner zu den Römern als *sexcenti* = sehr viel, auf welcher wir schon vor zwölf Jahren in einer von Assyrologen leicht begreiflicher Weise unbeachtet gebliebenen Notiz aufmerksam gemacht haben*.

An der Zahleneigenschaft der drei Wörter Soss, Ner, Sar ist also nicht zu zweifeln, und zwar in dem Sinne, den wir früher hervorhoben, dass dieselben zur zusammenfassenden Bezeichnung einer Anzahl von Gegenständen, dann, wie wir jetzt gelernt haben, zum Rechnen benutzt wurden, während neben ihnen die allgemeinere Zahlenbezeichnung einherlief, welche das dekadische System in ziemlich consequenter Weise festhielt**. Ob bisher eine Zahlenangabe gefunden worden ist, in welcher alle drei Wörter Soss, Ner und Sar vorkommen, ist uns unbekannt. Oppert führt in der uns vorliegenden Abhandlung kein solches Beispiel an. Wir selbst, ohne jegliche Kenntniss von Keiltexten, möchten an ein eigenthümliches gemeinsames Auftreten von Soss, Hundert und Ner in einer verwandten Literatur hinweisen. Wir meinen Genesis 6, 15, wo die Vorschrift zum Bau der Arche Noah's in die Worte gekleidet ist: „300 Ellen sei die Länge, 50 Ellen die Weite und 30 Ellen die Höhe.“ Nun haben wir oben gesehen, dass nicht die Elle, sondern die Halbelle U die eigentliche Einheit ist; alle Zahlen sind darum zu verdoppeln und sofort erscheinen die von uns angekündigten Einheiten höherer Art. Wir wissen nicht, ob diese Stelle schon nach dieser Richtung geprüft worden ist, wir wissen noch weniger, ob in der babylonischen Sündfluthserzählung die gleichen Zahlen auftreten; wir machen nur diese Bemerkung, um Sachverständige zur Beachtung dieses Umstandes anzuregen.

Bei den Maassen, und besonders bei den Längenmaassen treten verschiedene Systeme von nach Potenzen von 60 fortschreitenden Reihen auf, welche sich zwischen einander einschieben. Allerdings erscheinen dabei mitunter Verdoppelungen, einmal eine Halbirung einer bei Oppert uns bekannt gewordenen Länge; allerdings sind die Einer auch noch mit dem Coefficienten 6 versehen, doch wollen wir dieser Mängel ungeachtet umstehend eine kleine Tabelle einschalten, welche vielleicht deutlicher, als dieses in der Darstellung Oppert's möglich ist, den Zusammenhang der Maasse veranschaulicht.

Selbstverständlich wollen wir mit unseren Bezeichnungen nicht den Begriff verbunden wissen, auch den Keilschriftvölkern sei Einheit gewesen,

---

* Math. Beitr. z. Culturl. d. Völker. Halle 1863. S. 362.

** Math. Beitr. z. Culturl. d. Völker. Halle 1863. S. 28 flgg.

was wir als solche darstellen. Wissen wir doch, dass der Sa eine Einheit, das Stadion sein Soss war, dass also sicherlich die doppelte Daumenbreite als $\frac{1}{60}$ Sa, der Punkt als $\frac{1}{3600}$ Sa aufzufassen ist, und ähnlich mag es in den anderen Systemen sich verhalten haben.

60^4.	60^3.	60^2.	60.	1.
		1 U.	1 Nagelbr.	1 Haarbr.
1 Dekastadion.	1 Plethron.	1 Elle (= 2 U).	2 Nagelbr.	2 Haarbr.
1 Parasange.	$\frac{1}{2}$ Stadion.	1 Kanu.	1 Daumenbr.	6 Haarbr. (= $\frac{1}{2}$ Punkt).
1 Schoinion.	1 Stadion.	1 Sa.	2 Daumenbr.	1 Punkt.
		1 Ruthe.	1 Fuss.	6 Punkte.

Dessenungeachtet können wir uns nicht enthalten, auf einen eigenthümlichen, wenn auch vielleicht durchaus zufälligen Umstand hinzuweisen. Wir haben in den drei vollständigeren Systemen unserer kleinen Tabelle Einheiten von fünf aufeinanderfolgenden Rangordnungen vor uns, den dekadischen Rangordnungen der Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender entsprechend. Wir haben aber früher einmal* auf Bibelstellen hingewiesen, welche, unter dem Einflusse des babylonischen Exils entstanden, eine Beschränkung des einfachen Zahlenbegriffes mit der Ordnung der Zehntausender sehr wahrscheinlich machen. Wir meinen Buch Daniel 7, 10: „Tausend mal tausend dieneten ihm und Zehntausend mal zehntausend standen vor ihm;“ Buch Samuel I, 18, 7: „Saul hat Tausend geschlagen, David aber Zehntausend,“ und Psalm 68, 18: „Der Wagen Gottes ist zehntausend mal tausend.“**

Eine höchst interessante Frage geht dahin, wie man dazu gekommen sein mag, zwischen dem Soss und Sar noch ein Ner zu erfinden? Da unsers Wissens diese Frage noch nie gestellt wurde, so darf ein Versuch der Beantwortung wohl auch dann auf Entschuldigung hoffen, wenn man ihn nicht

---

* Math. Beitr. z. Culturl. d. Völker, S. 30 u. 148.

** Die höchst auffallende Form der Vervielfachung der kleinern Einheit durch den grössern Coefficienten hat sehr späte Nachahmungen erfahren. So heisst es in Milton's *Paradise lost V*, 588: *Ten thousand thousand ensigns high advanced*, und *VI*, 768: *Attended with ten thousand thousand saints*, und Wieland lässt in seinem I. Göttergespräche Jupiter zu Herkules sagen: „Und doch war dieses nämliche Königreich Thespia vielleicht ein zehntausendmal tausendmal grösserer Theil vom Erdboden, als der Planetenkreis, den ich regiere, von dem Ganzen ist, welches wir in unserer Göttersprache die Welt nennen.“ Bezüglich der Beschränkung des einfachen Zahlenbegriffes bei 10000 wollen wir nicht unterlassen, auch auf eine unserer Ansicht entgegenstehende Bibelstelle aufmerksam zu machen. I. Chronik 23, 14: „Siehe ich habe in meiner Armuth verschafft zum Hause des Herrn hunderttausend Centner Goldes und tausend mal tausend Centner Silbers.“

annehmbar finden sollte. Wir wiederholen nur unsere langjährige These, wenn wir für alle Völker des Alterthums, namentlich aber für das Handelsvolk der Babylonier, Rechenbretter in Anspruch nehmen, auf welchen mit festen oder losen Marken — auf diesen sonst wesentlichen Unterschied kommt es uns gegenwärtig nicht an — gerechnet wurde. Ja wir glauben sogar, dass dieses Rechenbrett, der spätere Abacus, von Babylon aus seine Wanderungen nach Osten wie nach Westen antrat. Der Abacus muss sich dem herrschenden Zahlensystem angeschlossen haben, und wo es zwei Zahlensysteme gab, ein Decimal- und ein Sexagesimalsystem, müssen auch zwei Bretter existirt haben, oder es muss auf demselben Brette, nur mit Hilfe von mehr oder weniger Marken, die Rechnung möglich gewesen sein. Der Abacus des Decimalsystems forderte für jede Rangordnung höchstens 9 Marken, derjenige des Sexagesimalsystems 59 Marken. Mit einer solchen Anzahl war instrumental nicht zu rechnen. Alle Uebersichtlichkeit ging dabei verloren, wenn nicht innerhalb des Abacus das Decimalsystem selbst wieder zu Hilfe gezogen wurde. Das hatte aber keine Schwierigkeit. Wir haben uns nur in jeder Columne oder an jedem Drahte des Rechenbrettes zwei Abtheilungen, eine obere und eine untere, zu denken. Jene ist für die Einer, diese für die Zehner der betreffenden Ordnung bestimmt; jene bedurfte zur Bezeichnung aller vorkommenden Zahlen 9, diese 5 Marken. Um die obere Abtheilung der ersten Columne von der untern zu unterscheiden, hatte man die althergebrachten Namen der Einer und Zehner. In der folgenden Columne dagegen war neben dem Namen Soss für jede Marke der obern Abtheilung ein zweiter Name für eine Marke der untern Abtheilung nothwendig, und zu diesem Zwecke entstand das Ner. Freilich würde diese unsere Vermuthung voraussetzen, dass auch für die untere Abtheilung der dritten Columne ein Name existirt haben werde, dem man indessen soviel seltener begegnen dürfte, als in Rechnungsoperationen grauer Vorzeit die Zahl 36000 seltener vorkam als 600.

Neben den Sexagesimalbrüchen besassen die Keilschriftvölker auch noch andere. So hat Oppert (S. 35) die Zeichen und Namen von $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ vereinigt; er durfte für nicht-mathematische Leser wohl deutlicher, als er es gethan hat, hervorheben, dass diese Brüche sämmtliche aufeinanderfolgende Sechstel sind. Auch in der Sargon'schen Angabe des Umfanges von Khorsabad (S. 9) liest Oppert, wie wir am Anfange unsers Berichtes sagten, einen Bruch: „$3\frac{1}{3}$ Ner“, und die gezogenen Folgerungen in ihrer sich gegenseitig stützenden Beweiskraft möchten wir als Bürgen für die richtige Lesart anerkennen. Trotzdem fällt es schwer zu begreifen, wie die dort vereinigte Zeichengruppe $3\frac{1}{3}$ Ner bedeuten kann. Das Wort Ner besteht gewöhnlich aus zwei Zeichen *r* und *s*, die neben einander sich befinden; *r* ist einem aus 4 geneigten Keilen gebildeten unregelmässigen Viereck ähnlich, *s* besteht aus einem Verticalkeile und einem kleineren, an dessen rechtes oberes Ende sich anlehnenden und schräg nach rechts und unten verlaufenden Keile. Nun fand Oppert die Gruppe *rrrrsss* und las sie $3\frac{1}{3}$ Ner. Er sagt selbst (S. 13), es bleibe eine offene Frage, wieso diese Zahl durch die angegebenen Zeichen dargestellt sein könne. Er macht indessen dazu einen doppelten, leider recht unglücklichen Vorschlag. Erstlich meint er, der Ueberschuss der *r* über die *s* solle Zähler eines Bruches sein, dessen Nenner die Anzahl der *s* bedeute, während diese selbe Anzahl der *s* doch auch für die Ganzen der gemischten Zahl in Anspruch genommen ist. Mag Oppert immerhin $rs = 1$, $rrss = 2$, $rrrss = 2\frac{1}{2}$, $rrrsss = 3$, $rrrrsss = 3\frac{1}{3}$ nach seiner Hypothese bilden, wir wollen ihn nicht fragen, ob er irgendwo solche Gruppen vorgefunden hat, die der Analogie jeglichen uns bekannten Princips von Bruchbezeichnungen spotten, wir wollen ihn nur bitten, nach seinem Grundgedanken einmal $2\frac{1}{3}$ oder $3\frac{1}{2}$ zu schreiben, so wird er sich alsbald von der Unhaltbarkeit seines Vorschlages überzeugen. Etwas weniger unmöglich ist seine zweite Vermuthung, von ihm selbst freilich weniger betont. Vielleicht, sagt er, heisst *r* soviel als $\frac{1}{3}$ Ner, *s* soviel als $\frac{2}{3}$ Ner. Immerhin ist es unter dieser Voraussetzung auffallend, dass noch keines jener Zeichen allein, *r* für 200, *s* für 400 aufgefunden worden ist, und so bleibt hier ein ebenso wichtiges, wie schwieriges Problem für weitere Forschung übrig.

Zu solchen Erörterungen wesentlich arithmetischer Natur führten uns allmälig die Wörter Soss, Ner, Sar. Eine ganz kurze geometrische Betrachtung knüpft sich an das eherne Meer Salomon's und das Hohlmaass Bath. Ueber das eherne Meer sind drei einander theilweise widersprechende Angaben bekannt. II. Chronik 4, 2 und 5 heisst es von ihm: „Und er machte ein gegossen Meer, 10 Ellen weit von einem Rande an den andern rund umher und 5 Ellen hoch, und ein Maass von 30 Ellen mocht's umher begreifen ... und es fasste 3000 Bath.“ I. Könige* 7, 23 und 26 lauten: „Und er machte ein Meer, gegossen, 10 Ellen weit von einem Rande zum andern, rund umher und 5 Ellen hoch, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Maass ringsum ... und ging drein 2000 Bath.“ Endlich der bekannte Schriftsteller der jüdischen Antiquitäten, der nach der Zerstörung Jerusalems Titus nach Rom begleitete, Flavius Josephus schildert das eherne Meer, welches um seiner Grösse willen diesen Namen geführt habe, als halbkugelförmig mit einem Durchmesser von 10 Ellen und einer Fassungskraft von 3000 Bath**. Trotz der Uebereinstimmung von Chronik und Josephus nehmen die meisten Commentatoren an, der Inhalt des ehernen Meeres sei nur 2000 Bath gewesen, wie die ausführlichste und darum wohl zuverlässigste Be-

* Nicht II. Könige, wie irrthümlich bei Oppert steht.

** Josephus Antiqu. VIII, 3, 5: *'Εχώνευσε δὲ καὶ θάλασσαν χαλκῆν εἰς ἡμισφαίριον ἐσχηματισμένην. 'Εκλήθη δὲ τὸ χαλκούργημα θάλασσα διὰ τὸ μέγεθος· ἦν γὰρ ὁ λουτὴρ τὴν διάμετρον πηχῶν δέκα καὶ ἐπὶ παλαιστιᾶιον πάχος κεχωνευμένος ... 'Εδέχετο δὲ ἡ θάλασσα βάδους τρισχιλίους.*

schreibung angiebt; die Veränderung von 2000 in 3000 beruhe auf leicht erklärlicher Verwechslung zweier Buchstaben: 2000 wird nämlich durch den mit zwei Punkten bedeckten Buchstaben Beth geschrieben, und fallen die Schriftzüge einigermassen klein aus, so kann der Buchstabe sehr leicht für ein Gimmel angesehen und als 3000 gelesen werden. Oppert folgt gleichfalls dieser Ansicht und nimmt von Josephus nur die halbkugelförmige Gestalt des ehernen Meeres an. Der Inhalt der Halbkugel, $\frac{2}{3}\pi r^3$, ist alsdann bei 5 Ellen Halbmesser $= \frac{2}{3} . 3{,}1415926 . 5^3 = 261{,}8$ Kubikellen* $= 2094{,}4$ Kubikhalbellen oder Kubik-U (S. 59). Das stimmt nahe genug mit den 2000 Bath der einen biblischen Angabe überein, um sie selbst und zugleich die altrabbinische Behauptung zu rechtfertigen, das Bath sei ein kubisches Hohlmaass von der Seite U gewesen.

Die Rechnung, sowie die Folgerung, welche Oppert daraus zieht, erscheinen unanfechtbar. Wenn wir noch einen Zusatz beifügen, so ist es der, dass wir glauben, dieselben Zahlen noch etwas anders verwerthen zu können unter Berücksichtigung der Angabe über den Umfang des ehernen Meeres, welche Oppert als für seine Zwecke höchst gleichgiltig unbeachtet lassen durfte. Wir wollen nämlich π als die Unbekannte der beiden durch den Bibeltext gegebenen Gleichungen $2\pi r = 30$ und $\frac{2}{3}\pi r^3 = 2000$ betrachten. In der ersten ist $r = 5$ und daraus $\pi = 3$. In der zweiten sind, wie wir gesehen haben, die 2000 nicht Kubikellen, sondern Kubikhalbellen, demnach muss hier $r = 10$ gesetzt werden, und wieder erscheint $\pi = 3$!

An sich ist nun freilich nicht unmöglich, dass ein neckischer Zufall hier sein Spiel hätte. Unsere Textesstelle giebt zu verstehen, der Umfang des Beckens sei mit Hilfe einer Schnur wirklich gemessen worden. Auch den Inhalt könnte man thatsächlich durch Einfüllen von Flüssigkeit aus kleineren Gefässen von bekannter Fassungskraft gefunden und alsdann die beiden überlieferten Zahlen abgerundet haben. Allein wenn auch nicht unmöglich, so bliebe es immer eine überaus auffallende Erscheinung, dass zwei Versuchen entstammende Zahlen, durch Messungen ganz verschiedener Gattung erhalten, jede für sich abgerundet, genau denselben gleichfalls runden Werth von π ergeben haben sollten. So gewinnt die Vermuthung an Wahrscheinlichkeit, die Verhältnisszahl $\pi = 3$ habe altorientalischer Messkunde angehört. Ist dem aber so, und ist diese Zahl so alt wie Chronik und Buch der Könige, dann müssen wir mit Nothwendigkeit für eben jene Zeit und Gegend die Kenntniss der Formeln $2\pi r$ für den Kreisumfang, $\frac{4}{3}\pi r^3$ für den Kugelinhalt in Anspruch nehmen. Dazu zwingen uns alle Folgerungen.

Dieser für die Geschichte der ältesten Mathematik hochwichtige erste Einblick in eine babylonische Geometrie neben einer wohlverbürgten babylonischen Arithmetik verdient, wie uns scheint, die Aufmerksamkeit von

* Bei Oppert irrthümlich Quadratellen.

Gelehrten der verschiedensten Fachrichtung. Zunächst wird es sich fragen, ob noch anderweitige Spuren des Werthes $\pi=3$ gefunden werden können und ob diese nach Babylon als Wiege hinverweisen?

Wir heben einige ziemlich unbekannte Thatsachen in dieser Beziehung hervor. Erstens tritt die Annahme $\pi=3$ bei einem griechischen Mathematiker auf, in dem *Μετρήσεις* oder *Mensurae* überschriebenen Buche, welches zu den heronischen Sammlungen gehört*. Mögen die betreffenden Stellen herrühren von wem sie wollen, soviel ist durch dieselben gesichert, dass wirklich zu irgend einer Zeit von griechisch schreibenden Geometern 3 als die Verhältnisszahl des Kreisumfanges zum Durchmesser angesehen wurde. Zweitens findet sich dieselbe Annahme $\pi=3$ in China, wie Ed. Biot 1841 bemerkt hat. Man vergl. dessen Aufsatz: *Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé: Tcheou-Pei, littéralement Style ou signal dans une circonférence* im Juniheft 1841 des *Journal Asiatique, troisième Serie, Tome XI*, S. 593—639, wo sich S. 608 in der Note findet: *Le texte calcule les circonférences en multipliant le diamètre par trois*, während mannigfache Beispiele auf den Seiten 608, 609, 613, 623, 625 und ganz vorzugsweise 617 abgedruckt sind. Wir dürfen vielleicht hervorheben, dass von einem astronomischen Werke die Rede ist und dass, wie Prof. A. Weber in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 10. April 1862 S. 223 gezeigt hat, die chinesische Astronomie unabweisbare Verbindungen mit Babylon darbietet. Wir dürfen weiter daran erinnern, dass wir in unseren Mathem. Beitr. z. Culturl. d. Völker, S. 101 flgg., noch andere in China wie in Griechenland auftretende, muthmasslich von einander abhängige Zahlenspielereien erwähnt haben, für welche wir ein verbindendes Mittelglied in Babylon annahmen, ohne uns darüber auszusprechen, ob dort die gemeinsame Heimath oder nur eine Zwischenstation zu suchen sei; lauter Vermuthungen, welche sich gegenseitig ergänzen und stützen.

Eine letzte Bemerkung verdanken wir zwei verehrten Collegen, den Herren Prof. Fuchs und Lefmann, deren Einer sie als Reminiscenz zufälliger Unterhaltung mit einem Schriftgelehrten im Gedächtniss bewahrt hatte, deren Anderer die grosse Güte hatte, die Stelle selbst nach unseren Andeutungen aufzusuchen und für uns zu übersetzen. In dem babylonischen Talmude, und zwar in dem *Succha* überschriebenen Theile, welcher von der Einrichtung und Gestalt der Laubhütte handelt, *fol.* 7 *verso* ist nämlich die Grösse besprochen, welche eine in Ofenform (oder in Thurmform) gebaute Succha, d. h. Laubhütte, haben soll; 24 im Umkreis auf 8 im Durchmesser, so lautet die Vorschrift, welche begründet wird mit den Worten: „jedes Kreisrund, das im Umfange 3 Spannen hat, hat in der Breite 1 Spanne" und mit dem Hinweis auf die von uns abgedruckte Stelle der Chronik. Dann folgen noch weitere sehr schwer verständliche Auseinan-

* Vergl. unsere Monographie: Die römischen Agrimensoren, S. 46—47.

dersetzungen über Flächeninhalte des Kreises, des umschriebenen und des eingeschriebenen Quadrates, für deren Erläuterung wir sehr dankbar wären. Mögen Gelehrte, deren Sprachkenntnisse von mathematischem Wissen unterstützt ihnen die Fähigkeit verleihen, jenes Material zu überschauen und zu sichten, sich der für sie wohl nicht übermässigen Mühe unterziehen. Eine Frage, welche gleichfalls von solcher Seite her beantwortet werden müsste, ist die nach dem Alter der betreffenden Talmudstelle. Es ist ja bekannt, dass von den beiden Bestandtheilen des babylonischen Talmuds die Mischnah erst 200 nach Chr., die Gemara gar erst 500 ihren Abschluss fand, so dass im Allgemeinen ein dort erhaltener Satz verhältnissmässig sehr späten Ursprungs sein könnte, wenn auch die Möglichkeit alter Ueberlieferung keineswegs ausgeschlossen ist.

So lassen wir uns für's Erste auch an der blossen Möglichkeit genügen, dass der Werth $\pi = 3$ aus babylonischer Uebung sich weiter vererbt habe. Die Schlussentscheidung werden diejenigen Assyriologen zu geben haben, welche ihr Studium den astronomischen und mathematischen Keiltexten zuwenden

CANTOR.

Die graphische Statik, von C. CULMANN, Professor am eidgen. Polytechnikum in Zürich. 2. neu bearbeitete Auflage. 1. Bd., mit 210 Holzschnitten und 17 Tafeln. Zürich, Meyer & Zeller. 1875.

Nachdem nun die graphische Statik von Zürich aus ihren Weg an alle polytechnischen Schulen Deutschlands und Oesterreichs gefunden, nachdem sie an den technischen Lehranstalten Italiens eingeführt ist (vergl. *Favaro*, *La statica grafica nell' insegnamento tecnico superiore*, *Venezia*, *Grimaldo*, 1873) und man sie in Frankreich als Ganzes auffasst (*Levy*, *La statique graphique*, *Paris*, *Gauthier Villars*, 1874), nachdem auch England, Russland, Ungarn, Schweden Beiträge und Aufsätze geliefert haben, muss man die genannte Disciplin wohl als definitiv begründet ansehen. Das Werk, durch welches diese Begründung erfolgte, war „Die graphische Statik von Culmann, Zürich 1866". Von demselben liegt uns heute der erste Band der zweiten Auflage vor.

Dass überhaupt schon eine neue Auflage nöthig wurde, ist in mehrfacher Hinsicht ein gutes Zeichen. Denn das Buch war von vornherein nicht für Bauhandwerker oder Techniker mit ähnlicher Vorbildung geschrieben, sondern für mathematisch gebildete Ingenieure. Es setzte die Kenntniss der Geometrie der Lage voraus, wenn auch kein sehr umfangreicher Gebrauch davon gemacht wurde. Dass die neuere Geometrie nicht in höherem Maasse zur Verwendung kam, ist dem Werke von manchen Seiten als ein entschiedener Mangel angerechnet worden (siehe z. B. Grunert's Archiv, Lit.-Ber. CLXXXXVI, S. 10). Die neue Auflage dürfte in dieser Hinsicht jedenfalls mehr befriedigen.

Merkwürdigerweise wurde von anderer Seite der graphischen Statik gerade das Gegentheil vorgeworfen. Herr Professor Mohr hegt die Ansicht: „die interessanten und für die Praxis brauchbaren Resultate, welche die graphische Statik enthält, würden bereits allgemein Eingang gefunden haben, wenn nicht der gelehrte Apparat der neueren Geometrie viele Ingenieure vom Studium dieses Gegenstandes abgeschreckt hätte" (Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1868, S. 19). Man darf wohl erwarten, dass die Meinung, es sei für technische Hochschulen als gelehrter Apparat zu betrachten, was nun schon in Realschulen eingeführt zu werden beginnt, keine weitere Verbreitung erlange. Als im Jahre 1871 in Italien das Ministerium eine radicale Reform der technischen Hochschulen berieth, wurde die neuere Geometrie ohne Bedenken in die Studienpläne des zweiten Cursus eingeführt (*Ordinamento degli Instituti tecnici, Firenze, Tip. Claudiana*, 1871, oder Favaro a. a. O. S. 57). So weit sind wir freilich noch nicht.

Diejenigen, welche sich gegen die neuere Geometrie aussprechen, sind überhaupt dafür, „den Vorrath von wissenschaftlichen Hilfsmitteln, welchen jeder Techniker nothwendig sich anzueignen hat, auf das zulässige Minimum zu beschränken" (siehe die Literarische Revue von Mohr im „Civilingenieur" 1875, S. 32, worin auch mehrere missverständliche Auffassungen aus der Abhandlung „Die graphische Statik", Jahrg. 1874 der Zeitschrift f. Math. u. Phys., vorgetragen werden). Wir halten die Tendenz für richtiger, in Bezug auf wissenschaftliche Hilfsmittel nach dem zulässigen Maximum zu trachten. Allerdings könnten sich hierdurch einige Minderbefähigte abschrecken lassen; aber wäre dies ein so grosses Unglück?

Jeder Ingenieur hat wohl die Erfahrung gemacht, dass die praktischen Fächer, welche er am Polytechnikum hörte, ihm verhältnissmässig am wenigsten genützt haben; Mangel an wissenschaftlicher Ausbildung aber lässt sich nach dem Verlassen der Schulen nicht leicht nachholen. Die praktischen Kenntnisse kommen, wo Bildung vorhanden, mit der Praxis grösstentheils von selbst, und ein Ingenieur mit gehörigen wissenschaftlichen Hilfsmitteln hat seine praktischen Collegen bald überflügelt. Es ist der Mangel an mathematischen Kenntnissen, welcher die „alten Praktiker" entstehen lässt, die bekanntlich nach dem Gefühl construiren und ganz genau wissen warum.

Wir sind weit davon entfernt, mit diesen Bemerkungen für die graphische Statik ausschliesslich plaidiren zu wollen, Referent bedient sich sogar bei seinen Untersuchungen mit Vorliebe analytischer Hilfsmittel. Aber dafür müssen wir uns erklären, dass der Studirende nicht nur nach Recepten arbeiten, sondern wenigstens auf einem Wege selbstständig vorgehen lerne. Hierzu reichen dann eine Anzahl specieller Lösungen nicht mehr aus, es müssen umfassende mathematische Grundlagen vorhanden sein, und diese können nur durch recht häufigen Gebrauch befestigt werden. — Gewiss muss es auch Mittel geben, sich die einfacheren Constructionen der graphischen Statik möglichst schnell anzueignen, gewiss sind auch auf analytischen Untersuchungen beruhende graphische Methoden berechtigt, gewiss haben auch Lehrbücher der graphischen Statik ohne neuere Geometrie einen Zweck; aber andererseits ist es doch ebenso unmotivirt, als fruchtlos, der graphischen Statik das Recht abzusprechen (wie es geschehen ist), sich als selbstständige Disciplin zu entwickeln, Alles von ihrem Standpunkte und auf systematische Weise in Angriff zu nehmen, selbst wenn es nicht gerade praktisch nothwendig ist. Hat doch Niemand dies Recht der darstellenden Geometrie abgesprochen, die in vieler Beziehung ähnlich gestellt ist wie die graphische Statik. Wir können hier viele Worte sparen und einfach auf die Vorrede zu „Fiedler, Die darstellende Geometrie. Leipzig, Teubner, 1871" verweisen. Das meiste dort Gesagte gilt direct auch für die graphische Statik. Uebrigens kann die Concurrenz der verschiedenen Methoden der Ingenieurmechanik nur Nutzen bringen; dem praktischen Ingenieur steht es frei, welche der ersteren er im gegebenen Falle verwenden will, Niemand denkt daran, ihm Beschränkungen aufzuerlegen.

Nach allem Gesagten gereicht es uns zur Freude, von vornherein berichten zu können, dass die zweite Auflage der graphischen Statik nicht nur auf keiner tieferen, sondern entschieden auf einer höheren wissenschaftlichen Stufe steht wie die erste. Nicht allein ist die Geometrie der Lage mehr verwendet worden, sondern es hat auch Culmann den graphischen Lösungen analytische, grossentheils mittels neuerer analytischer Geometrie erhaltene beigefügt. Hierdurch ist vor Allem erreicht, dass auch die allgemein-metrischen Beziehungen hervortreten und behandelt werden konnten. Da nun die neuere analytische Geometrie und selbst die Geometrie der Lage bisher nur wenig Anwendung auf statische Probleme gefunden hat, so wird der vorliegende theoretische Theil der neuen Auflage auch für Mathematiker von Interesse sein, denen technische Fragen fern liegen. Nur muss man dabei im Auge behalten, zu welchem Zwecke das Buch geschrieben wurde, und dass in Rücksicht darauf eine andere Auswahl des Stoffes zu treffen war, wie in der reinen Statik. Es ist nicht überflüssig, dies gelinde anzudeuten, indem ein Recensent der ersten Auflage sich durch die aufgenommenen Einzelprobleme enttäuscht fand; er glaubte ein Lehrbuch der reinen Statik in der Hand zu haben.

Hier sind die Ueberschriften der Hauptabtheilungen des erschienenen ersten Bandes. — Das graphische Rechnen: Die Operationen mit Linien; Logarithmen und Rechenschieber; Verwandlung der Flächen; Verwandlung der Körper. — Die Zusammensetzung der Kräfte: Zusammensetzung der Kräfte, die auf einen Punkt wirken oder in einer Ebene liegen; das Moment der Kräfte und unendlich ferne Kräfte in der Ebene; die Kräfte im Raum; die projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und dem Seilpolygon. — Momente paralleler Kräfte: Parallele Kräfte; der Schwerpunkt;

das Trägheitsmoment; Construction der Centralellipse und des Kernes von ebenen Figuren; Trägheitsmomente, Centralellipsoide und Kerne einiger Körper. — Elemente der Elasticitätstheorie: Kräfte, welche Linien proportional sind; die elastige Linie; der elastige Bogen; die elastige Parabel bei constantem 𝔈; der gerade elastige Balken. — Eine Probe der Behandlungsweise mittels Plücker'scher Geometrie findet man in der „Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. zu Zürich" 1870, S. 1 („Ueber das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kräfte." Vergl. auch *Darboux et Hoüel, Bull. d. sciences math. et astron.* 1873.)

Was die Aenderungen bezüglich des Stoffes gegen die erste Auflage betrifft, so erlaubt uns der beschränkte Raum nur Andeutungen.

Der Abschnitt über graphisches Rechnen hat viele Zugaben erhalten. Die Construction rein analytischer Ausdrücke wie Polynome, die Integration mittels des Seilpolygons, Einiges über graphische Darstellungen bei drei Dimensionen im Anschluss an Lalanne (*Ann. d. ponts et chauss., II. Sér.* 1846, 1850), ein Capitel über Maximalflächen bei gegebenem Umfange und gegebener Richtung der Seiten, wie es bei Canalprofilen vorkommt, mit directem Beweis, dass die Seiten des Polygons einen Halbkreis berühren müssen, dessen Mittelpunkt in der Oberfläche des Wassers liegt (den Beweis von Steiner siehe Crelle's Journal XXIV) wurden aufgenommen. Im Vorbeigehen wird eine Lanze für die Parmentier'sche Formel (*Nouv. Ann. de math. Oct.* 1855) gegenüber der Simpson-schen gebrochen, bei welch letzterer sich jeder Anfänger fragt, warum die Ordinaten theils einfaches, theils doppeltes Gewicht haben sollen. Als sehr willkommen ist zu erwähnen eine vom Begriff des Logarithmus ausgehende Theorie der Rechenschieber, bei welcher Gelegenheit auch mehrere verbesserte und zu speciellen Zwecken dienende Instrumente dieser Art vorgeführt werden. Weggelassen ist Nichts gegen die erste Auflage, obwohl vielleicht Manches dafür reif gewesen wäre, z. B. die Parabeltafel, die doch nur etwa als Beispiel beim Studium dienen könnte; es sind aber genügend andere vorhanden.

Die erwähnten neuen Capitel, wie noch weiter folgende lassen darauf schliessen, dass das Culmann'sche Buch zu einem Compendium der graphischen Methoden des Ingenieurs überhaupt werden soll. Für die graphische Statik selbst ist so ziemlich alles im ersten Abschnitt Enthaltene entbehrlich. Um diese zu studiren, könnte man ganz gut auf S. 155 mit dem Capitel „Kräfte im Allgemeinen" beginnen. Andererseits werden die nichtstatischen graphischen Methoden von Vielen angewandt, die mit der graphischen Statik wenig zu thun haben. Es wäre deshalb ganz gut möglich, die erwähnten graphischen Methoden, denen sich noch manche andere anreihen liessen, unter Vorausschickung einer ganz gedrängten Darstellung des graphischen Rechnens, als selbstständiges Werkchen erscheinen zu lassen. Cremona hat zwar das graphische Rechnen für sich herausgegeben

(*Elementi di calcolo grafico, Torino, Paravia*, 1874, auch übers. von Curtze), aber ohne alle Anwendungen.

Die graphische Statik selbst beginnt mit einem geometrischen Beweise des Parallelogramms der Kräfte. Es wird angedeutet, dass die Statik eben deshalb eine geometrische Wissenschaft sei und die projectivische Geometrie in jeder Form auf sie Anwendung finden müsse, weil das Grössenverhältniss zweier in bestimmten Richtungen wirkender Kräfte und die Mittelkraftsrichtung projectivisch sind. Die Erweiterungen im Abschnitte über die Zusammensetzung der Kräfte betreffen zunächst die Behandlung mittels neuerer analytischer Geometrie. Die Symbolik derselben gestattet, die Zusammensetzung beliebiger Kräfte im Strahlenbündel durch eine einfache Summenformel als Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft auszudrücken. Durch eine ähnliche Summenformel als Gleichung der Mittelkraftlinie lässt sich die Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene geben. Aus der Erweiterung und Verbindung beider folgt die analytische Zusammensetzung der Kräfte im Raume. Die aus den gegebenen Hauptformeln hervorgehenden Lösungen specieller Probleme werden im Weitern am Schlusse der Capitel in kleinem Drucke kurz aufgeführt und gestalten sich oft überraschend einfach. Auch manche schon aus der ersten Auflage bekannten Untersuchungen sind vervollständigt, so die Zusammensetzung der Kräfte mit Hilfe der unendlich fernen Kräfte (Kräftepaaren entsprechend); beigefügt ist noch die Zerlegung einer Kraft in zwei und drei Seitenkräfte mit besonderer Beziehung auf das Fachwerk.

Die Zusammensetzung der Kräfte im Raume ist in vollständiger und vielfach neuer Weise behandelt worden. Seit Möbius war hier wenig Neues zu verzeichnen. Culmann knüpft direct an ihn an, stützt sich aber bei seinen Beweisen auf die Staudt'sche Geometrie der Lage, besonders auf das dort rein geometrisch und am Ausführlichsten behandelte Nullsystem Es sind dies Entwickelungen, die mehr Interesse für den Mathematiker als für den Techniker haben und mit vielen anderen gutes Material für ein dem jetzigen Standpunkte der Geometrie entsprechendes Lehrbuch der reinen Statik abgeben. Den Untersuchungen über projectivische Verwandtschaft zwischen Kräfte- und Seilpolygon sind die diesbezüglichen Arbeiten von Clerk Maxwell (*On reciprocal figures and diagramms of forces*, *Phil. Mag.* 1864, S. 250) und Cremona (*Le figure reciproche nella statica grafica, Milano, Laenger*, 1872) eingefügt, welche in der Folge besonders bei Bestimmung des Einflusses des Eigengewichts von Brückenconstructionen Verwendung finden sollen.

Die Lehre von den parallelen Kräften ist ebenfalls sehr reich vermehrt worden. 'Die Zusammensetzung der Kräfte mit Kräftepaaren, wie sie beim continuirlichen Träger vorkommt, kann als Anwendung des Vorhergehenden schon hier angedeutet werden. Die Untersuchungen, welche zur ungünstigsten Belastung einfacher gerader Träger durch Systeme von concentrirten

Lasten führen, haben Ergänzungen erfahren, ebenso das Capitel vom Schwerpunkte und in ausgedehntem Maasse die Lehre vom Trägheitsmoment. Auch eine kurze Beschreibung und sehr einfache Theorie eines Amsler'schen Momentenplanimeters ist beigegeben.

Vollständig neu eingeführt und von hervorragender Wichtigkeit ist der letzte Abschnitt des ersten Theiles, die Elemente der Elasticitätstheorie, wozu die Anregung wie die ersten wichtigen Gesichtspunkte und Anwendungen Herrn Mohr zu verdanken sind (Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-V. Hannover 1868, S. 19). Was speciell die Auffassung der elastigen Linie als Seilpolygon betrifft, so findet sich dieselbe auch bei Poisson (Lehrb. d. Mechanik, übers. v. Schmidt, Stuttgart, Cotta, 1825, Vol. I Cap. 6). Culmann leitet zunächst auf rein geometrischem Wege ganz allgemeine Sätze über Kräfte ab, welche Linien proportional sind, wie solche bei der Biegung im Innern der Körper auftreten; daran schliessen sich Untersuchungen über die elastige Linie, soweit sie sich ohne Voraussetzung specieller Probleme durchführen lassen; und endlich wird in ausführlicher Weise der elastige Bogen und zum Zwecke der Bestimmung der Auflagendrücke auch der einfache eingespannte oder überragende Balken behandelt. Auf die äusserst sinnreiche und neue Anwendung der Trägheitsmomente in dieser Theorie, sowie auf einige durch gewisse vereinfachende Annahmen (Cap. 4) erhaltene Resultate ist noch besonders aufmerksam zu machen.

Culmann hat auch in dieser Auflage die systematische Bezeichnungsweise beibehalten, welche er in die Statik eingeführt hat. Es besteht dieselbe in der Wahl bestimmter Alphabete für Grössen von bestimmter Dimensionszahl. So werden beispielsweise Grössen der ersten Dimension, Linien, immer durch kleine lateinische Buchstaben, Flächen durch grosse lateinische, Volumina durch grosse deutsche Buchstaben bezeichnet. Für Coefficienten als Grössen nullter Dimension ist das kleine griechische Alphabet vorbehalten, Kräfte sind den Flächen coordinirt, also statische Momente den Körpern u. s. w. Man erkennt, dass hierdurch die in der Statik immer nothwendige Homogenität der Gleichungen auf den ersten Blick hervortreten muss, und dass die Prüfung neuer Gleichungen, sowie Umrechnungen bei verschiedenen Maasssystemen ganz bedeutend erleichtert werden. Der Verband deutscher Ingenieur- und Architektenvereine befasst sich denn auch gerade in diesem Jahre mit der Frage, ob das Culmann'sche Bezeichnungssystem mit geringen Modificationen in der Ingenieurmechanik allgemein einzuführen sei.

Aus unseren Andeutungen wird man ersehen haben, dass sich die zweite Auflage der graphischen Statik mit Recht auf dem Titel eine Neubearbeitung nennt. Fast zwei Drittel des im vorliegenden ersten Bande Enthaltenen ist neu hinzugekommen, worunter sehr interessante und wichtige Capitel. Wer in allen Theilen der graphischen Statik auf der Höhe bleiben will, wird die neue Auflage nicht entbehren können.

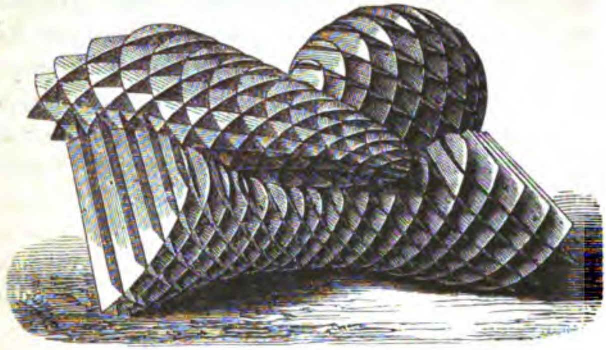
Freilich hat der beträchtliche Zuwachs auch seine Schattenseiten. Den Stoff vollständig zu bewältigen, erfordert viel Eifer und Zeit, nicht Jeder kann sich für alles Gegebene interessiren; der Preis entspricht aber in ziemlich fühlbarer Weise dem Ganzen. Das Werk würde ein bei Weitem grösseres Publikum finden und dadurch an directem Einfluss gewinnen, wenn es in einzeln für sich erhältlichen und passend begrenzten Lieferungen erschienen wäre, wie dies in ähnlichen Fällen mehr geschieht und worauf wir schon oben beim graphischen Rechnen hingewiesen haben.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Ausstattung der neuen Auflage sowohl in Bezug auf den Text, als auf die theilweise sehr schwierigen Tafeln eine vorzügliche genannt werden muss.

Stuttgart. WEYRAUCH.

Modelle von Flächen zweiter Ordnung, construirt nach Angabe von Dr. A. BRILL, ord. Professor am Polytechnikum zu Darmstadt. Verlag von L. Brill in Darmstadt. 1874.

So wünschenswerth es beim Unterrichte in der analytischen Geometrie ist, die Flächen zweiter Ordnung durch Modelle zur unmittelbaren Anschauung bringen zu können, so wenig hat sich bisher die pädagogische Industrie mit der Herstellung des genannten Lehrmittels beschäftigt; man findet in den Modellsammlungen gewöhnlich nur einige Holzmodelle für Rotationsflächen und allenfalls einige, nach Olivier's Vorgange aus Fäden zusammengesetzte Modelle für das einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Die Lehrer werden es daher Herrn Prof. Brill Dank wissen, dass er eine Reihe von Modellen construirt hat, die sich durch vollkommene Anschaulichkeit, geringen Raum (alle sechs Modelle stecken in einem Etui von der Grösse eines kleinen Octavbandes) und durch Wohlfeilheit (9 Mark) auszeichnen. Die Vortheile sind dadurch erreicht, dass die parallelen Kreisschnitte des dreiaxigen Ellipsoids, der beiden Hyperboloide, des Kegels und des elliptischen Paraboloids aus Carton hergestellt und auf sehr sinnreiche Weise zusammengefügt wurden. Die Verbindung ist aber keine starre, vielmehr lässt sich der Neigungswinkel zwischen den beiden Systemen der Kreisschnitte durch leisen Druck oder Zug ändern; bei der Verpackung im Etui ist dieser Neigungswinkel $=0$, mithin jede der Flächen eine Ebene, beim Auspacken vergrössert man nach und nach den Winkel und hat dann an jedem einzelnen Modelle eine Schaar von Flächen derselben Art mit verschiedenen Axenverhältnissen. Die umstehend beigedruckte Figur giebt ein deutliches Bild von drei solchen Modellen. Selbstverständlich fehlt das hyperbolische Paraboloid, weil dasselbe keine reellen Kreisschnitte hat; da aber gerade diese Fläche dem Verständnisse des Anfängers die meiste Schwierigkeit bereitet, so möchten wir Herrn



Professor Brill ersuchen, die genannte Lücke auszufüllen. Dies wird zwar nicht leicht sein, weil sich parabolische oder hyperbolische Schnitte viel weniger bequem als Kreisschnitte mechanisch herstellen lassen, indessen: Schwierigkeiten sind ja keine Unmöglichkeiten.

Abgesehen von dem Fehlen der letzten Fläche ist das Gebotene so instructiv, so compendiös und elegant, dass es allseitige Empfehlung verdient.

Schlömilch.

Lehrbuch für den Rechen-Unterricht. Propädeutik der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten von Julius Henrici, Professor an der höheren Bürgerschule in Heidelberg. Heidelberg, Verlag von Georg Weiss. 1875. XIV und 252 S.

Der dem Referenten persönlich ganz unbekannte, wiewohl seit einer Anzahl von Jahren in derselben Stadt mit ihm lebende Verfasser sagt in seinem Vorworte, welche Hoffnungen er mit der Veröffentlichung seines Buches verbinde. Es soll dazu dienen, „den Rechenunterricht an den höheren Lehranstalten so zu organisiren, dass er den Anforderungen der allgemeinen Arithmetik genüge und eine sichere Grundlage für den gesammten mathematischen Unterricht bilde. An den Mittelschulen, deren mathematischer Unterricht nicht über den Rahmen des Buches hinausgeht, soll es diesen Unterricht zu einem Bildungsmittel gestalten, wie es die höheren Schulen in der Mathematik besitzen". Demnach hat der Verfasser, wie es auch den Anstalten gemäss erscheint, deren Zöglinge er als nach seinem Buche zu Unterrichtende im Auge hat, nicht erste Anfangsgründe des Rechnens überhaupt, sondern wissenschaftlich geordnete und begründete Lehren zu schreiben beabsichtigt, dadurch allein eine Besprechung in dieser Zeitschrift rechtfertigend. Von diesem Gesichtspunkte aus müssen wir in dem originell angelegten Buche Manches loben, Manches missbilligen.

Um mit Letzterem zu beginnen, fragen wir, was die grundsätzliche Benutzung von Zahlen zunächst nur zwischen 1 und 19 beim Addiren und Subtrahiren, dann zwischen 1 und 99 beim Multipliciren und Dividiren soll, welchen in einem dritten Capitel erst das Rechnen mit den Zahlen des dekadischen Systems überhaupt und in ihm eine nothgedrungene Wiederholung der beiden ersten Capitel folgt? Das mag für einen ersten Rechenunterricht bei der Wahl der Uebungsbeispiele zweckmässig sein; für die Schüler, welche bereits fähig sind, das Buch des Herrn Henrici zu verstehen, das elementarste Rechnen also hinter sich haben*, ist es sicherlich überflüssig. Wissenschaftliche Berechtigung vollends besitzt es gewiss nicht, in irgend einem Stadium des Unterrichts bei der zweiziffrigen Zahl stehen zu bleiben oder gar innerhalb der zweiziffrigen Zahl noch eine Grenze zu ziehen, deren Ueberschreitung man sich untersagt. Das ist freilich der Hauptmangel, den wir zu rügen haben, indem die Wahl mancher uns nicht zusagender Ausdrücke und Redewendungen (formelle und reelle Summe S. 6 u. dgl.) bei anderen Lesern vielleicht keinen Anstoss erregen mögen.

Zu dem entschieden Guten gehören die mannigfachen aus dem Leben gegriffenen Erläuterungen, welche dazu dienen, dem Schüler über manche begriffliche Schwierigkeit hinwegzuhelfen. Ebendazu gehört die Lehre von der Subtraction, welche wir an einem Beispiele darstellen wollen. Um etwa 54 von 82 abzuziehen, sagt der Verfasser wie folgt: 4 und 8 ist 12 mit der Randziffer 2. Ich schreibe 8 als Facit und merke 1 für die künftige Addition. Das gemerkte 1 und 5 und 2 giebt das verlangte 8 zur Summe. Ich schreibe 2 hin. Die ganze Bedeutsamkeit des Unterschiedes dieses Verfahrens von den älteren Methoden zeigt sich bei der Division, wo das neue Verfahren auch dem weniger geübten Rechner verstattet, die Multiplication einer Quotientenziffer mit dem Divisor und die vorzunehmende Subtraction vom Dividenden in einen Act zu verbinden, so dass stets nur die Reste, d. h. also jetzt die Ergänzungen zur Summe mit voraus bestimmter Randziffer, hingeschrieben werden. Sehr wohl hat uns ferner ein Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7 gefallen: „Eine Zahl ist durch 7 theilbar, wenn die doppelte letzte Ziffer von den vorhergehenden Ziffern als Zahl abgezählt einen Rest ergiebt, der durch 7 theilbar ist“ (S. 72). Wir wissen nicht, ob dieses Kriterium neu ist; uns wenigstens ist es noch nicht begegnet.

Vielleicht dürfen wir uns gestatten, diesem Referate eine kurze Notiz über eine Darstellung zweier sehr elementarer Dinge beizufügen, welche wir dem Urtheile, vielleicht der Benutzung von Schulmännern empfehlen möchten. Vielen Knaben bereitet das Subtrahiren algebraischer Zahlen und das Dividiren mit Brüchen Schwierigkeit. Wir schlagen folgende Herleitung vor, die wir schon als zweckmässig erprobt haben.

1. Man kann Nichts abziehen, was nicht vorhanden ist. Soll also von dem Minuenden M der Subtrahend $a-b$ abgezogen werden, so verwandle ich den Minuenden erst in $M+a-a+b-b$, lasse dann $a-b$ weg und bekomme den Rest $M-a+b$.

---

* In dem Jahresberichte der höhern Bürgerschule zu Heidelberg, August 1875, ist unter den Bedingungen zur Aufnahme in die unterste Classe „Fertigkeit im Rechnen der vier Rechnungsarten in unbenannten Zahlen, im Kopf und auf der Tafel“ ausdrücklich vorgeschrieben.

2. Man kann nur Zahlen gleicher Benennung durch einander dividiren, wobei die Benennung von selbst wegfällt. Soll also $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividirt werden, so bringe ich beide Brüche auf gleichen Nenner bd, d. h. ich habe dann $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ oder ad durch bc zu dividiren.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. Juli bis 30. September 1875.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. aus dem J. 1874. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 50 Pf.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch., mathem.-phys. Classe. 1874, III—V. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Dieselben. 1875, I. Ebendas. 1 Mk.

Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der k. bayr. Akademie der Wissenschaften in München. 1875, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien, mathem.-naturw. Classe. 1875. I. Abth., 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. pro compl. 20 Mk.

Dieselben. 1875. II. Abth., 1. Heft. Ebendas. pro compl. 16 Mk.

Dieselben. 1875. III. Abth., 1. u. 2. Heft. Ebendas. pro compl. 12 Mk.

Mathematische Annalen, herausgegeben von C. NEUMANN. 9. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Archiv d. Mathematik u. Physik, begr. v. GRUNERT, fortges. v. R. HOPPE. 58. Thl., 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. SCHÖNFELD u. A. WINNECKE. 10. Jahrg. 2. u. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. von C. A. PETERS. 86. Bd., Nr. 1. Kiel, Schwers. pro compl. 15 Mk.

Annalen der Physik und Chemie. Namenregister zu Bd. 1—150, Ergänzungsbd. 1—6, Jubelbd. u. Sachregister zu Bd. 121—150, Ergänzgsbd. 5 u. 6 nebst Jubelbd. Bearb. v. W. BARENTIN. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Fortschritte der Physik. 26. Jahrgang, 1870. Redigirt von B. SCHWALBE. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Dieselben. 27. Jahrgang, 1871. 1. Abth. Ebendas. 8 Mk.

Jahresbericht 6 der meteorologischen Centralstation Carlsruhe über die Ergebnisse der an den badischen meteorol. Stationen im J. 1874 angestellten Beobachtungen. Bearb. v. O. RUPPEL. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Gordan, P., Ueber d. Formensystem binärer Formen. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Ligowski, Neue Näherungsformeln zur Berechnung bestimmter Integrale. Kiel, Univers.-Buchhdlg. 1 Mk.

Baltzer, R., Die Elemente der Mathematik. 1. Bd. 5. Aufl. Leipzig, Hirzel. 4 Mk.

Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft. Hannover, Rümpler. 3 Mk.

Wienhold, F., Aufgaben aus der element. Geometrie. Leipzig, Hahn. 75 Pf.

Huberti, F., Rein geometrische Lösungen systematisch geordneter Aufgaben. Bonn, Cohen & Sohn. 3 Mk. 75 Pf.

Fischer, J. G., Leitfaden zur Elementargeometrie. 3. Curs: Stereometrie. 3. Aufl. Leipzig, Mauke. 80 Pf.

Müller, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. 2. Thl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Köstler, H., Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Geometrie. 2. Heft. Halle, Nebert. 65 Pf.

Gysel, J., Synthetische Untersuchung eines Orthogonal-Flächensystems. Zürich, Schabelitz. 2 Mk. 40 Pf.

Grelle, F., Analytische Geometrie der Ebene. 2. Aufl. Hannover, Rümpler. 5 Mk.

Koutny, E., Ueber die Sätze von Pascal und Brianchon und die Construction der Kegelschnitte. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Niemtschik, R., Ueber die Construction der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 70 Pf.

Angewandte Mathematik.

Burmester, L., Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen. 2. Ausg. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Zipernovszky, K., Neue Constructionen für die Perspectivconturen von Flächen zweiter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 50 Pf.

Franke, J. H., Die trigonometrische Punktbestimmung im Netzanschluss, mit besonderer Rücksicht auf eine rationelle Fehlerausgleichung. Jena, Deistung. 60 Pf.

Narr, F., Einleitung in d. theoretische Mechanik. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Kummer, E., Ueber die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper v. versch. Gestalt insbes. auch auf Geschosse. (Akad.) Berlin, Dümmler. 4 Mk.

Wassmuth, A., Ueber das Potential elektrischer Ströme und Stromsysteme. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Stark, F., Ueber die Möglichkeit einer Axenänderung der Erde. München, Ackermann. 1 Mk. 20 Pf.

Galle, J., Ueber eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus correspondirenden Beobachtungen d. Flora. Breslau, Maruschke & Berendt. 2 Mk.

Gruber, L., Bahnbestimmung des Planeten Tolosa (138) nebst Ephemeriden für die Opposition 1875. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Holetschek, J., Ueber die Bahn des Planeten Ate (111). Ebendas. 50 Pf.

——, Bahnbestimmung des Planeten Peitho (118). Ebendas. 40 Pf.

Schönfeld, E., Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Mannheim. 2. Abth. Carlsruhe, Braun. 6 Mk.

Hansen, P. A., Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Looff, F. W., Geschichte der Astronomie. Langensalza, Schulbuchhandlg. v. Gressler. 3 Mk.

Plantamour, E. et A. Hirsch, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre la station du Simplon et les observatoires de Milan et de Neuchâtel. Basel, Georg. 6 Mk. 40 Pf.

Physik und Meteorologie.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 3. Bd. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Gerding, Th., Grundriss der Physik für Volks- und Mittelschulen. Neuwied, Heuser. 1 Mk.

Steinhauser, A., Physikalische Karten. Nr. 8: Isobaren und Dunstdruck. Wien, Artaria. 1 Mk. 60 Pf.

Handl, A., Weitere Beiträge zur Molekulartheorie. (V). (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Puluj, J., Ueber einen Schulapparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

——, Beitrag zur Bestimmung d. mech. Wärmeäquivalents. Ebendas. 20 Pf.

Stefan, J., Untersuchungen üb. d. Wärmeleitung in Gasen. Ebendas. 50 Pf.

Pfaundler, L., Ueber Kältemischungen und insbesondere über jene aus Schnee und Schwefelsäure. Ebendas. 80 Pf.

Tyndall, J., Die Wärme als eine Art der Bewegung. Deutsche Ausg. v. Helmholtz u. Wiedemann. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Fitz-Gerald Minarelli, A. v., Ueber d. thermoelektrische Verhalten einiger Metalle beim Schmelzen u. Erstarren. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Exner, F., Ueber d. galvan. Ausdehnung einiger Metalldrähte. Ebdas. 60 Pf.

Lang, V. v., Ueber die Abhängigkeit der Circumpolarisation des Quarzes von der Temperatur. Ebendas. 20 Pf

Exner, K., Ueber die Quetelet'schen Interferenzstreifen. Ebendas. 50 Pf

Wassmuth, A., Ueb. d. Ableitung d. Biot-Savart'schen Gesetzes. Ebdas. 15 Pf.

Mach, E. und J. Wosyka, Ueber einige mechanische Wirkungen des elektrischen Funkens. Ebendas. 50 Pf.

Karsten, G., Die physikalischen Beobachtungen an den deutschen Ostsee- und Nordseeküsten über Wassertemperaturen bei der Expedition im J. 1871. Berlin, Wiegandt, Hempel & Parey. 2 Mk.

Hann, J., Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Tagestemperatur. (Akad.) Wien, Gerold 1 Mk. 60 Pf.

REESE LIB OF THE UNIVERSITY

RETURN TO → CIRCULATION DEPARTMENT
202 Main Library 642-3403

LOAN PERIOD 1	2	3
4	5	6

LIBRARY USE

This book is due before closing time on the last date stamped below

DUE AS STAMPED BELOW

LIBRARY USE		
MAR 29 197		
REC. CIR. MAR 29 '78		
JUN 15 1998		

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
FORM NO. DD6A, 8m, 4'77 BERKELEY, CA 94720

GENERAL LIBRARY - U.C. BERKELEY

B000285876

72586

QA1
Z4
v.20

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY