3/1 8

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXI. Jahrgang.

Mit 8 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1876.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mechanik und Molecularphysik.

I

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.

Von

Dr. Otto Hesse,

Professor am Polytechnikum zu München.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Harmonische Pole und harmonische Polaren. Tangentenpaare und Punktepaare eines Kegelschnittes.

Wir haben in der siebenzehnten Vorlesung die Bedingungsgleichung 9) für harmonische Pole eines gegebenen Kegelschnittes $f=0$ abgeleitet oder, indem wir den einen Pol 0 als gegeben betrachteten, den geometrischen Ort des andern Poles als die Polare:

$$1) \qquad x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0$$

des gegebenen Punktes 0 festgestellt.**

---

* In dem Hesse'schen Nachlasse fanden sich die obigen beiden Vorlesungen, welche den Schluss des Art. I im Jahrg. 1874 dies. Zeitschr. bilden, soweit druckfertig vor, dass nur in formaler Beziehung Einiges zu ändern war. Die Durchsicht hat Herr Prof. Gundelfinger in Tübingen freundlichst übernommen.

P. d. B. R.

** In der zwölften Vorlesung wurden die 60 Pascal'schen Sechsecke vorgeführt, welche dieselben sechs Ecken haben. Drei von den ihnen entsprechenden Pascal'schen Linien wurden durch die Symbole r, drei andere durch die Symbole ϱ ausgedrückt, und es ergab sich, dass die drei Linien r sich in einem Punkte δ und dass die drei Linien ϱ sich in einem Punkte d schneiden. Am Ende der Vorlesung wurde nur historisch angegeben, dass dieses Punktepaar δ und d ein Polepaar sei des den 60 Pascal'schen Sechsecken umschriebenen Kegelschnittes $k=0$. Die Richtigkeit dieser Angabe können wir jetzt prüfen, wenn wir die in der Anmerkung aufgeführte Kegelschnitt-Gleichung $k=0$ zu Grunde legen:

$$r^2 + r'^2 + r''^2 - \varrho^2 - \varrho'^2 - \varrho''^2 = 0,$$

Rücksichtlich desselben Kegelschnittes, in der reciproken Form $F=0$ ihrer Gleichung, wurde alsdann in der neunzehnten Vorlesung die Bedingung 9) für harmonische Polaren oder, indem wir eine Polare 0 als gegeben annehmen, die Gleichung ihres Poles entwickelt:

$$2)\qquad uF'(u_0)+vF'(v_0)+wF'(w_0)=0.$$

Jede von diesen beiden Gleichungen entspringt aus der andern unter Vermittelung der Gleichung $f_{01}=F_{01}$, welche mit Weglassung des Index 1 in 10) der neunzehnten Vorlesung ausführlich dargelegt worden ist. Erinnern wir uns nun der Bedeutung der Function F_{01} in 7) der genannten Vorlesung und ersetzen die Coordinaten der Polare nach den bekannten Relationen durch die Coordinaten ihrer Pole, so können wir die Gleichung 1) der Polare des Punktes 0 auch in Determinantenform so wiedergeben:

$$1^*)\qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x_0 \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y_0 \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z_0 \\ x, & y, & z, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ebenso ergiebt 7) der siebenzehnten Vorlesung folgende Form der Gleichung 2) des Poles einer durch die Coordinaten u_0, v_0, w_0 gegebenen gerade Linie:

$$2^*)\qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u_0 \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v_0 \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w_0 \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Dieselbe Form 1) der Bedingungsgleichung für harmonische Pole des Kegelschnittes behält die Gleichung auch bei, wenn man an Stelle der

---

und bemerken, dass in derselben sowohl die Symbole r, als die Symbole ϱ lineare homogene Ausdrücke der variabelen Punktcoordinaten x, y, z bedeuten.

Der Ausdruck r lässt sich nämlich so darstellen:

$$r=x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z},$$

und wir wollen annehmen, dass r in (r) übergehe, wenn man in demselben für x, y, z setzt x_0, y_0, z_0, dass also sei

$$(r)=x_0\frac{\partial r}{\partial x}+y_0\frac{\partial r}{\partial y}+z_0\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Das Gleiche soll auch gelten für die übrigen Symbole r und ϱ.

Bilden wir alsdann nach Vorschrift von 1) die Bedingungsgleichung für harmonische Pole des vorliegenden Kegelschnittes, so erhalten wir

$$r(r)+r'(r')+r''(r'')-\varrho(\varrho)-\varrho'(\varrho')-\varrho''(\varrho'')=0.$$

Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn wir unter x, y, z die Coordinaten des Punktes δ verstehen, in welchem sich die drei Linien r schneiden, und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes d sind, in welchem sich die drei Linien ϱ schneiden; denn jedes einzelne Glied der Gleichung verschwindet unter dieser Annahme.

homogenen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z homogene Dreiecks-coordinaten X, Y, Z einführt durch die Substitutionen:

$$3)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha_0 X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \\ y &= \beta_0 X + \beta_1 Y + \beta_2 Z, \\ z &= \gamma_0 X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z, \end{aligned}$$

durch welche die Function f übergehen mag in:

$$4)\qquad f(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z).$$

Denn differentiiren wir diese Gleichung nach den Variabelen X, Y, Z, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 f'(x) + \beta_0 f'(y) + \gamma_0 f'(z) &= \varphi'(X), \\ \alpha_1 f'(x) + \beta_1 f'(y) + \gamma_1 f'(z) &= \varphi'(Y), \\ \alpha_2 f'(x) + \beta_2 f'(y) + \gamma_2 f'(z) &= \varphi'(Z), \end{aligned}$$

und wenn wir mit X_0, Y_0, Z_0 die Dreieckscoordinaten des durch seine rechtwinkligen Coordinaten x_0, y_0, z_0 gegebenen Punktes 0 bezeichnen, so erhalten wir nach Multiplication der Gleichungen mit diesen Coordinaten durch Addition

$$5)\qquad x f'(x_0) + y f'(y) + z f'(z_0) = X_0 \varphi'(Y) + Y_0 \varphi'(Y) + Z_0 \varphi'(Z).$$

Es wird also

$$1^{**})\qquad X \varphi'(X_0) + Y \varphi'(Y_0) + Z \varphi'(Z_0) = 0$$

die Bedingungsgleichung sein für ein Polepaar des durch Dreieckscoordinaten ausgedrückten Kegelschnittes $\varphi(X, Y, Z) = 0$.

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die Dreieckscoordinaten U_0, V_0, W_0 der Polare des Punktes 0 abnehmen: $\frac{1}{2}\varphi'(X_0) = U_0$, $\frac{1}{2}\varphi'(Y_0) = V_0$, $\frac{1}{2}\varphi'(Z_0) = W_0$, und allgemein die Relationen zwischen den Coordinaten X, Y, Z eines beliebigen Poles und den Coordinaten U, V, W seiner Polare in den Dreieckssysteme aufstellen:

$$6)\qquad \tfrac{1}{2}\varphi'(X) = U, \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(Y) = V, \quad \tfrac{1}{2}\varphi'(Z) = W.$$

Bezeichnen wir nun mit $\Phi(U, V, W)$ die reciproke Function von $\varphi(X, Y, Z)$, so haben wir die Gleichung:

$$7)\qquad \varphi(X, Y, Z) = \Phi(U, V, W),$$

welche die oben angegebenen Substitutionen zu einer identischen machen.

Hieraus ist ersichtlich, dass $\Phi(U, V, W) = 0$ die Gleichung unseres Kegelschnittes ist, ausgedrückt durch Liniencoordinaten des Dreieckssystems, und dass man die mit 6) äquivalenten Relationen hat:

$$8)\qquad \tfrac{1}{2}\Phi'(U) = X, \quad \tfrac{1}{2}\Phi'(V) = Y, \quad \tfrac{1}{2}\Phi'(W) = Z.$$

Benützen wir endlich die angegebenen sechs Relationen 6) und 8), um die Bedingungsgleichung 1**) für harmonische Pole durch Liniencoordinaten des Dreieckssystems auszudrücken, so finden wir:

$$2^{**})\qquad U \Phi'(U_1) + V \Phi'(V_1) + W \Phi'(W_1) = 0,$$

die Bedingung für harmonische Polaren des Kegelschnittes $\Phi = 0$, weil nach einem Satze der neunzehnten Vorlesung die Polaren von harmonischen Polen des Kegelschnittes harmonische Polaren sind.

Ebenso wenig, als sich die Form der Bedingungsgleichung 1) für harmonische Pole oder der Bedingungsgleichung 2) für harmonische Polaren ändert, wenn die Kegelschnitt-Gleichung auf ein Dreieckssystem bezogen ist, ändern sich die Formen der Gleichungen 1*) und 2*). An Stelle der Grössen e und a treten nur resp. die Coefficienten in Φ und φ ein.

Wir nehmen hieraus die Gelegenheit, auf die Anmerkung in der elften Vorlesung zurückzukommen, nach welcher

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0,$$
$$U=0, \quad V=0, \quad W=0$$

die Gleichungen von drei Linienpaaren sind, welche sich in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, wenn man identisch hat

$$U=\tfrac{1}{2}\varphi'(X), \quad V=\tfrac{1}{2}\varphi'(Y), \quad W=\tfrac{1}{2}\varphi'(Z)$$

und unter X, Y, Z lineare Ausdrücke der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten versteht. Der Beweis ergab sich daraus, dass, wenn man die Coefficienten in der Function φ mit $b_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{X}{b_{12}}+\frac{Y}{b_{20}}+\frac{Z}{b_{01}}=0$$

sich aus je zwei von den angegebenen correspondirenden Gleichungen zusammensetzen lässt. Damit haben wir zugleich einen Satz von den Kegelschnitten bewiesen. Um ihn kurz auszusprechen, nennen wir **reciproke Dreiecke** eines Kegelschnittes solche, in welchen die Ecken und Seiten des einen die Pole und Polaren der Seiten und Ecken des andern sind. In dieser Voraussetzung stellt sich der angekündigte Satz mit seinem reciproken Satze so dar:

Die correspondirenden Seiten zweier reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes schneiden sich in drei Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen.

Die Verbindungslinien der correspondirenden Ecken zweier reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Die reciproken Dreiecke eines Kegelschnittes können auch zusammenfallen, wodurch sie Poldreiecke des Kegelschnittes werden, von welchen im Folgenden die Rede sein wird.

Wenn man in 1) die Coordinaten des Poles 0 ersetzt durch die Coordinaten seiner Polare und in 2) die Coordinaten der Polare 0 durch die Coordinaten ihres Poles, so erhält man

$$xu_0+yv_0+zw_0=0,$$
$$ux_0+vy_0+wz_0=0,$$

Gleichungen, die folgende charakteristische Eigenschaften von harmonischen Polen und harmonischen Polaren erkennen lassen:

Von den Polaren zweier harmonischen Pole eines Kegelschnittes geht jede durch den Pol der andern.

Von den Polen zweier harmonischen Polaren eines Kegelschnittes liegt jeder auf der Polare des andern.

Richten wir nun unser Augenmerk auf Specialitäten harmonischer Polaren eines gegebenen Kegelschnittes.

Jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes geht, heisst Durchmesser. Wenn zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes sich in dem Mittelpunkte des Kegelschnittes schneiden, so nennt man sie conjugirte Durchmesser. Der Pol des einen liegt nach dem letztgenannteu Satze auf dem andern und beide Pole liegen in dem Unendlichen, weil ihre Polaren durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen. Es ist darum eine charakteristische Eigenschaft der conjugirten Durchmesser, dass jede Sehne des Kegelschnittes, welche parallel geht einem Durchmesser, durch den conjugirten Durchmesser halbirt wird.

Daraus ergiebt sich nun eine leichte Construction der conjugirten Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes. Die Axen des Kegelschnittes sind selbst conjugirte Durchmesser, weil, wie aus der Axengleichung des Kegelschnittes zu ersehen ist, die der einen Axe parallelen Sehnen durch die andere Axe halbirt werden. Sie sind conjugirte Durchmesser, welche aufeinander senkrecht stehen. Es behält die Kegelschnitt-Gleichung auch dieselbe einfache Form, wenn man statt des rechtwinkligen Coordinatensystems der Axen ein schiefwinkliges wählt, dessen Axen conjugirte Durchmesser sind, weil jede Sehne des Kegelschnittes, welche parallel geht der einen Axe des schiefwinkligen Coordinatensystems, durch die andere Axe halbirt wird.

In dem Kreise halbirt jeder Durchmesser alle Sehnen, welche auf ihm senkrecht stehen. Es sind deshalb für den Kreis jede zwei Durchmesser conjugirte Durchmesser, wenn sie aufeinander senkrecht stehen. Der Mittelpunkt des Kreises hat demnach die charakteristische Eigenschaft, dass je zwei gerade Linien, welche sich in ihm senkrecht schneiden, harmonische Polaren des Kreises sind. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes hat die hervorgehobene Eigenschaft des Kreismittelpunktes nicht. Denn unter den conjugirten Durchmessern stehen nur die Axen des Kegelschnittes aufeinander senkrecht. Eine Ausnahme davon bildet der in der einundzwanzigsten Vorlesung eingeführte imaginäre Kegelschnitt $u^2+v^2=0$, der zwar nach der Regel 13) der neunzehnten Vorlesung keinen Mittelpunkt hat, für welchen aber jeder beliebige Punkt Mittelpunkt wäre, wenn man die hervorgehobene charakteristische Eigenschaft des Kreismittelpunktes als Definition des Mittelpunktes nehmen wollte. Denn jede zwei aufeinander senkrecht stehenden geraden

Linien sind, wie wir gesehen haben, harmonische Polaren des genannten imaginären Kegelschnittes.

Wenn nun der Mittelpunkt des Kegelschnittes die obengenannte charakteristische Eigenschaft des Kreismittelpunktes nicht hat, so erhebt sich die Frage, ob in dem gegebenen Kegelschnitte sich nicht andere Punkte der bezeichneten Art auffinden lassen? Da aus dem Kegelschnitte ein Kreis wird, wenn die Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen, so können möglicherweise die Brennpunkte die verlangte Eigenschaft haben. Und in der That lässt sich dieses auch nachweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke aus der zweiundzwanzigsten Vorlesung die homogen gemachte Gleichung 8) des Kegelschnittes, auf den Mittelpunkt und seine Axen bezogen:

$$9) \qquad (u^2e^2 - w^2) + (a^2 - e^2)(u^2 + v^2) = 0,$$

so ist die Bedingung, dass die geraden Linien 0 und 1 harmonische Polaren des vorliegenden Kegelschnittes seien, folgende:

$$(u_0 u_1 e^2 - w_0 w_1) + (a^2 - e^2)(u_0 u_1 + v_0 v_1) = 0.$$

Geht nun jede der beiden Linien durch den einen Brennpunkt des Kegelschnittes, so hat man:

$$u_0 e + w_0 = 0, \quad u_1 e + w_1 = 0.$$

Setzt man alsdann die Werthe von w_0 und w_1 aus diesen Gleichungen in die vorhergehende, so geht dieselbe über in:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die beiden geraden Linien aufeinander senkrecht stehen. Da die erste von den vier Gleichungen sich aus den drei anderen zusammensetzt, so ist der folgende Satz ihre Interpretation:

Jede zwei geraden Linien, welche sich in einem Brennpunkte des Kegelschnittes senkrecht schneiden, sind harmonische Polaren des Kegelschnittes.

Dieser Satz gilt auch für die Parabel. Denn drücken wir die auf den Brennpunkt bezogene Parabelgleichung 19) der zweiundzwanzigsten Vorlesung durch Liniencoordinaten aus, so finden wir:

$$10) \qquad u^2 + v^2 - \frac{2uw}{\varkappa} = 0,$$

und die Bedingungsgleichung für zwei harmonische Polaren 0 und 1:

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 - \frac{1}{\varkappa}(u_0 w_1 + u_1 w_0) = 0$$

setzt sich wieder zusammen aus den drei Gleichungen:

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 0, \quad u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0,$$

deren geometrische Bedeutung selbstverständlich ist.

Wenden wir uns nach dieser Digression über die Brennpunkte des Kegelschnittes wieder den conjugirten Durchmessern zu. Aus der oben angegebenen Definition der conjugirten Durchmesser des Kegelschnittes als zweier harmonischen Polaren, welche sich in dem Mittelpunkte des Kegelschnittes schneiden, ferner aus der Definition der Asymptoten in der einundzwanzigsten Vorlesung ergiebt sich sofort der Zusammenhang zwischen conjugirten Durchmessern und Asymptoten:

Ein jedes Paar conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes ist harmonisch zu seinem Asymptotenpaare,

und der Zusammenhang conjugirter Durchmesser unter sich:

Je drei Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes bilden eine Involution.

Man braucht daher von einem Kegelschnitte Nichts weiter zu kennen, als zwei Paare conjugirter Durchmesser, um sowohl die Asymptoten, als auch die Axen des Kegelschnittes zu construiren. Die Asymptoten sind nämlich dasjenige Linienpaar, welches harmonisch ist mit jedem Paare conjugirter Durchmesser, und die Axen des Kegelschnittes, welche aufeinander senkrecht stehen, bilden mit jeden zwei Paaren conjugirter Durchmesser eine Involution.

Wir gingen zu Anfang unserer Vorlesung von zwei harmonischen Polen des Kegelschnittes aus. Die Polare des einen geht immer durch den andern Pol, und der Schnittpunkt der beiden Polaren wird harmonischer Pol zu jedem der beiden harmonischen Pole. Drei solcher Punkte bilden ein System harmonischer Pole des Kegelschnittes. Man versteht also unter einem System harmonischer Pole drei Punkte, von welchen je zwei harmonische Pole des Kegelschnittes sind. Das Dreieck, dessen Ecken zu zweien combinirt harmonische Pole des Kegelschnittes sind, heisst Poldreieck — ein specieller Fall der oben angegebenen conjugirten Dreiecke des Kegelschnittes.

Was die Seiten des Poldreiecks anbetrifft, so sind je zwei derselben harmonische Polaren des Kegelschnittes. Man kann daher das Poldreieck auch definiren als das Dreieck, von dem jede zwei Seiten harmonische Polaren des Kegelschnittes sind.

Aus dieser Definition ergiebt sich nun, dass ein gegebener Kegelschnitt unendlich viele Poldreiecke hat. Denn die eine Ecke des Dreiecks kann man ganz beliebig annehmen, die zweite Ecke wird auf der Polare der ersten Ecke beliebig gewählt werden können. Erst die dritte Ecke des Dreiecks wird durch die beiden anderen bestimmt sein.

Hiernach erhebt sich die Frage, wieviele Kegelschnitte erforderlich sind, um ein Poldreieck als ein gemeinschaftliches für alle festzustellen? Die Beantwortung dieser Frage soll der nächstfolgenden Vorlesung vorbehalten bleiben.

In der siebenzehnten Vorlesung ist die in λ quadratische Gleichung

11) $$f(x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1)=0,$$

welche entwickelt die Form erhielt

12) $$f_{00}+2\lambda f_{01}+\lambda^2 f_{11}=0,$$

als die Quelle weiterer geometrischer Sätze in Aussicht gestellt worden. Wir nehmen diese nur zum Theil verwerthete Gleichung wieder auf, indem wir auf die dort eingeführten Beziehungen verweisen. Es lagen nämlich zwei beliebige Punkte 0 und 1 vor. Ihre Verbindungslinie schneidet den Kegelschnitt $f(x, y, z)=0$ in zwei Punkten, die durch die quadratische Gleichung 12) bestimmt werden. Der eine Fall, wenn das Verhältniss der Wurzeln gleich -1 ist, führte auf die harmonischen Pole des Kegelschnittes. Die Untersuchung des andern Falles, wenn das Verhältniss der Wurzeln gleich $+1$ ist, wodurch die Verbindungslinie der beiden Punkte eine Tangente des Kegelschnittes wird, blieb an der genannten Stelle vorbehalten. Dieser Fall, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung 12) einander gleich sind, soll hier discutirt werden.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung 12) sind

$$\frac{1}{f_{11}}\left\{-f_{01}\pm\sqrt{f^2_{01}-f_{00}f_{11}}\right\}.$$

Sie werden einander gleich unter der Bedingung

13) $$f_{00}f_{11}-f^2_{01}=0.$$

Man erhält diese Bedingungsgleichung auf eine einfachere Art, wenn man die Gleichung 12) dadurch homogen macht, dass man für λ setzt $\frac{\lambda}{\varkappa}$ und mit $\varkappa$ multiplicirt. Differentiirt man hierauf partiell nach $\varkappa$ und λ und eliminirt, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung 13).

Der linke Theil dieser Gleichung ist eine homogene Function zweiter Ordnung der Variabelen u, v, w:

$$y_0z_1-y_1z_0=u,\quad z_0x_1-z_1x_0=v,\quad x_0y_1-x_1y_0=w.$$

Denn wählt man die Determinantenform der Gleichung 13):

$$\begin{vmatrix} x_0f'(x_0)+y_0f'(y_0)+z_0f'(z_0), & x_0f'(x_1)+y_0f'(y_1)+z_0f'(z_1) \\ x_1f'(x_0)+y_1f'(y_0)+z_1f'(z_0), & x_1f'(x_1)+y_1f'(y_1)+z_1f'(z_1) \end{vmatrix}=0,$$

so lässt sie sich nach einem bekannten Satze von den Determinanten auch so darstellen:

$$u\{f'(y_0)f'(z_1)-f'(y_1)f'(z_0)\}+v\{f'(z_0)f'(x_1)-f'(z_1)f'(x_0)\}$$
$$+w\{f'(x_0)f'(y_1)-f'(y_0)f'(x_1)\}=0;$$

schliesslich wird

$$f'(y_0)f'(z_1)-f'(y_1)f'(z_0)=\tfrac{1}{2}AF'(u),$$
$$f'(z_0)f'(x_1)-f'(z_1)f'(x_0)=\tfrac{1}{2}AF'(v),$$
$$f'(x_0)f'(y_1)-f'(x_1)f'(y_0)=\tfrac{1}{2}AF'(w),$$

und unsere Gleichung geht über in die Gleichung $F(u, v, w) = 0$ des Kegelschnittes, ausgedrückt durch Liniencoordinaten.

Ein grösseres Gewicht als auf diese Bemerkung ist auf die Gleichung 13) selbst zu legen, welche mit Unterdrückung des den Coordinaten anhaftenden Index 1 sich so darstellt:

$$14)\quad 4f(x_0, y_0, z_0)\,f(x, y, z) - \{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0)\}^2 = 0.$$

Wenn wir den Punkt 0 als gegeben betrachten, so drückt diese Gleichung einen Kegelschnitt aus, von dem jeder Punkt mit dem gegebenen durch eine gerade Linie verbunden, eine Tangente des gegebenen Kegelschnittes giebt. Da aber von dem gegebenen Punkte sich an den gegebenen Kegelschnitt nur zwei Tangenten ziehen lassen, so muss die Gleichung 14) die Gleichung des von dem gegebenen Punkte 0 an den Kegelschnitt gezogenen Tangentenpaares sein. Und in der That treffen auch die unter 15) der siebenzehnten Vorlesung aufgeführten Bedingungen für ein Linienpaar an dem Kegelschnitte 14) zu. Wir haben hiermit in 14) eine andere Auflösung der mit der Gleichung 12) der achtzehnten Vorlesung abgeschlossenen Aufgabe:

Die Gleichung des Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt gezogen werden kann.

Zu demselben Resultate gelangen wir auch auf folgendem Wege, der zugleich die Ausbeute eines neuen Satzes liefern wird.

Die Gleichungen des Kegelschnittes $f(x, y, z) = 0$ und der Polaren irgend zweier Punkte 0 und 1:

$$xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0) = 0, \quad xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1) = 0$$

seien gegeben. Alsdann stellt die Gleichung

$$15)\quad \begin{array}{c} f(x, y, z) \\ -\lambda\{xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z)\}\{xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1)\} = 0 \end{array}$$

mit dem willkürlichen Factor λ alle Kegelschnitte dar, welche durch die vier Punkte gehen, in welchen die Polaren den Kegelschnitt schneiden. Aus dieser Schaar von Kegelschnitten wollen wir nur den einen hervorheben, der durch den Punkt 0 geht, und den diesem Kegelschnitte entsprechenden Werth von λ bestimmen. Setzen wir zu diesem Zwecke in 15) für die Variabelen die Coordinaten des Punktes 0 ein, so finden wir:

$$\lambda = \frac{1}{2\{x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)\}},$$

und die Gleichung des hervorgehobenen Kegelschnittes, der durch den gegebenen Punkt 0 geht, wird:

$$16)\quad \begin{array}{c} 2\{x_0 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)\}\, f(x, y, z) \\ -\{(xf'(x_0) + yf'(y_0) + zf'(z_0)\}\{xf'(x_1) + yf'(y_1) + zf'(z_1)\} = 0. \end{array}$$

Aus dem Umstande, dass bei Vertauschung der Punkte 0 und 1 die Gleichung ungeändert bleibt, können wir den folgenden Satz schliessen, dem wir gleich seinen reciproken Satz beigesellen:

Wenn man durch die Schnittpunkte zweier geraden Linien und eines Kegelschnittes einen Kegelschnitt legt, der durch den Pol der einen geraden Linie geht, so geht derselbe auch durch den Pol der andern geraden Linie.

Wenn man von zwei Punkten an einen Kegelschnitt die vier Tangenten legt und einen Kegelschnitt beschreibt, der die vier Tangenten berührt und zugleich auch die Polare des einen Punktes, so berührt er auch die Polare des andern Punktes.

Wenn die Punkte 0 und 1 zusammenfallen, so wird 16) die Gleichung eines Kegelschnittes, der den gegebenen Kegelschnitt in den Schnittpunkten der Polaren des Punktes 0 berührt und die Gleichung 14) geht über in die Gleichung 14) des von dem Punkte 0 ausgehenden Tangentenpaares.

Zu den Specialitäten der Tangentenpaare eines Kegelschnittes gehört das Asymptotenpaar. Fällt nämlich der gegebene Punkt 0 mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes zusammen, so wird $f'(x_0)=0$, $f'(y_0)=0$ und aus 14) geht die Gleichung des Asymptotenpaares hervor:

$$17)\qquad f(x,y,z)-\frac{z^2}{2z_0}f'(z_0)=0,$$

eine Gleichung, welche es bestätigt, dass man in der Gleichung eines Kegelschnittes nur das constante Glied so zu ändern braucht, dass die Gleichung in lineare Factoren zerlegbar wird, um die Asymptotengleichung zu erhalten.

Die Gleichung des imaginären Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem Brennpunkte des Kegelschnittes ausgeht.

Die Lösung der vorliegenden Aufgabe lässt sich nach dem ersten Theile der gegenwärtigen Vorlesung voraussagen. Nach demselben stehen jede zwei harmonische Polaren des Kegelschnittes, welche von dem Brennpunkte desselben ausgehen, aufeinander senkrecht wie die conjugirten Durchmesser eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist. Das von demselben Brennpunkte ausgehende Tangentenpaar des Kegelschnittes ist harmonisch zu jedem der genannten harmonischen Polarenpaare. Es wird sich also das gesuchte Tangentenpaar auffassen lassen als das von dem Mittelpunkte des Kreises ausgehende, an den Kreis gelegte Tangentenpaar. Daraus lässt sich weiter schliessen, dass die Gleichung des gesuchten Tangentenpaares die Kreisgleichung mit verschwindendem Radius sein wird, der Brennpunkt des Kegelschnittes für den Mittelpunkt des Kreises genommen. Die nachfolgende Rechnung wird die Schlussfolgerung bestätigen.

Gehen wir von der Gleichung der confocalen Kegelschnitte aus:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$$

und bemerken, dass $x_0=e$, $y_0=0$, $z_0=1$ die Coordinaten eines Brennpunktes sind, so wird die Gleichung 14) in dem vorliegenden Falle:

$$\left\{\frac{e^2}{a^2+\lambda}-1\right\}\left\{\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1\right\}-\left\{\frac{ex}{a^2+\lambda}-1\right\}^2=0,$$

eine Gleichung, welche mit Rücksicht auf die Relation $e^2=a^2-b^2$ übergeht in:

$$(x-e)^2+y^2=0.$$

Liegt dagegen die Parabelgleichung vor

$$y^2-2\varkappa\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)=0$$

mit dem Brennpunkte, dessen Coordinaten $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=1$ sind, so wird die Gleichung 14) des von dem Brennpunkte ausgehenden Tangentenpaares

$$4\varkappa^2\left\{y^2-2\varkappa\left(x+\frac{\varkappa}{2}\right)\right\}+\{2\varkappa x+2\varkappa^2\}^2=0,$$

eine Gleichung, welche sich schliesslich reducirt auf:

$$x^2+y^2=0.$$

Wir fassen die eben gewonnenen Resultate zusammen, wenn wir sagen:

Das von einem Brennpunkte eines Kegelschnittes ausgehende imaginäre Tangentenpaar ist ein Kreis mit verschwindendem Radius, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist.

Die conjugirten Durchmesser dieses Kreises sind demnach harmonische Polaren des Kegelschnittes. Ausserdem lässt die geführte Untersuchung folgenden Satz erkennen:

Wenn man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes 0 so bestimmt, dass die Gleichung 14) eine Kreisgleichung wird, so fällt der Punkt 0 in einen Brennpunkt des Kegelschnittes $f(x, y, z)=0$.

Dass der Kreis alsdann einen verschwindenden Radius haben muss, folgt daraus, dass die Gleichung 14) unter allen Umständen in lineare Factoren zerfällt. Dieser Satz wird bei Aufgaben über Brennpunkte von Kegelschnitten gute Dienste leisten.

Um auf eine neue Form der Gleichung 14) des Tangentenpaares zu kommen, welche Gleichung sich leicht in Determinantenform bringen lässt, erinnern wir daran, dass wir bereits in 12) der achtzehnten Vorlesung die Gleichung des Tangentenpaares entwickelt haben. Es handelte sich dort um die Elimination der Variabelen u, v, w aus folgenden drei Gleichungen:

$$F(u, v, w) = 0,$$
$$u x_0 + v y_0 + w z_0 = 0,$$
$$u x + v y + w z = 0.$$

Wählen wir für die erste dieser Gleichungen die Form

$$u \tfrac{1}{2} F'(u) + v \tfrac{1}{2} F'(v) + w \tfrac{1}{2} F'(w) = 0,$$

so sehen wir, dass sich zwei Grössen λ und μ derart bestimmen lassen, dass man hat

$$\tfrac{1}{2} F'(u) + \lambda x_0 + \mu x = 0,$$
$$\tfrac{1}{2} F'(v) + \lambda y_0 + \mu y = 0,$$
$$\tfrac{1}{2} F'(w) + \lambda z_0 + \mu z = 0.$$

Eliminiren wir nun aus diesen drei Gleichungen und den beiden zuletzt angegebenen linearen Gleichungen die fünf Unbekannten u, v, w, λ, μ, so erhalten wir die Gleichung des von dem Punkte 0 an den gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangentenpaares:

$$18) \qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x_0, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y_0, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z_0, & z \\ x_0, & y_0, & z_0, & 0, & 0 \\ x, & y, & z, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Punktpaares zu bestimmen, in welchem ein gegebener Kegelschnitt von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird.

Wenn wir mit u_0, v_0, w_0 und u_1, v_1, w_1 die Coordinaten zweier gegebenen geraden Linien 0 und 1 bezeichnen, so hängt die Bestimmung des von dem Schnittpunkte der geraden Linien an einen gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangentenpaares von der quadratischen Gleichung 4) der neunzehnten Vorlesung ab:

$$19) \qquad F_{00} + 2\lambda F_{01} + \lambda^2 F_{11} = 0.$$

Die beiden Tangenten fallen nur dann zusammen, wenn die beiden geraden Linien 0 und 1 sich in einem Punkte des Kegelschnittes schneiden. Sie schneiden sich in einem Punkte des Kegelschnittes, wenn die quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat, nämlich unter der Bedingung:

$$20) \qquad F_{00} F_{11} - F^2_{01} = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung die Coordinaten der einen geraden Linie 0 als gegeben, die Coordinaten der andern als Varabeln, so hat man die Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

Zu demselben Resultate gelangt man auf folgendem Wege. Die Pole der gegebenen geraden Linie 0 und 1 werden ausgedrückt durch die Gleichungen $u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0) = 0$, $u F'(u_1) + v F'(v_1) + w F'(w_1) = 0$, und das Product der beiden Gleichungen stellt die beiden Pole dar. Es ist darum die Gleichung

$$21) \quad \begin{gathered} F(u, v, w) \\ - \lambda \{u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0)\}\{u F'(u_1) + v F'(v_1) + w F'(w_1)\} = 0 \end{gathered}$$

der analytische Ausdruck für alle Kegelschnitte, welche die von den beiden Polen an den gegebenen Kegelschnitt $F = 0$ gezogenen Tangenten liefern.

Unter diesen Kegelschnitten giebt es einen, der die gerade Linie 0 berührt. Sein analytischer Ausdruck ist:

$$22) \quad \begin{gathered} 2\{u_0 F'(u_1) + v_0 F'(v_1) + w_0 F'(w_1)\} F(u, v, w) \\ - \{u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0)\}\{u F'(u_1) + v F'(v_1) + w F'(w_1)\} = 0. \end{gathered}$$

Der geometrischen Bedeutung des Umstandes, dass diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn man die Indices 0 und 1 miteinander verwechselt, ist in einem der vorausgegangenen Sätze bereits Ausdruck gegeben worden.

Fallen die beiden geraden Linien 0 und 1 zusammen, so hat man die Auflösung der vorgelegten Aufgabe:

$$23) \quad 4 F(u_0, v_0, w_0) F(u, v, w) - \{u F'(u_0) + v F'(v_0) + w F'(w_0)\}^2 = 0$$

in einer Gleichung, welche das Punktepaar ausdrückt, in welchem die gegebene gerade Linie 0 den Kegelschnitt $F = 0$ schneidet.

In der sechszehnten Vorlesung erhielt die Auflösung 12) derselben Aufgabe eine andere Form, weil dort die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten gegeben war. Es handelte sich an der angeführten Stelle um die Elimination der Variabelen x, y, z aus folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \\ x u_0 + y v_0 + z w_0 &= 0, \\ x u + y v + z w &= 0. \end{aligned}$$

Wenn man diese Elimination nicht direct, sondern in der im Vorhergehenden angedeuteten Weise vollführt, so erhält man folgende Determinantengleichung des gesuchten Punktepaares:

$$24) \quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u_0, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v_0, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w_0, & w \\ u_0, & v_0, & w_0, & 0, & 0 \\ u, & v, & w, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Weder die Gleichung 14) eines Tangentenpaares des Kegelschnittes $f = 0$, noch die Gleichung 23) eines Punktepaares desselben Kegelschnittes $F = 0$ sind so durchsichtiger Art, dass man sie gern als Basis weiterer Untersuchungen der Kegelschnitte nehmen möchte. Wir haben darum in 18) und 24) andere Formen derselben Gleichungen vorgeführt, welche, wie die Gleichungen 1*) und 2*), ihre Zusammensetzung aus den Elementen sogleich erkennen lassen. Auch den Kegelschnittgleichungen 16) und 21) kann man ähnliche Formen geben. Setzt man nämlich in der vorletzten Horizontalreihe der Gleichung 18) an Stelle des Index 0 den Index 1, so erhält man eine andere Form der Gleichung 16); verändert man in der vorletzten Horizontalreihe der Gleichung 24) den Index 0 in 1, so hat man einen andern Ausdruck für die Gleichung 21). Wenn man ferner bedenkt, dass nach der neunzehnten und einundzwanzigsten Vorlesung selbst die Kegelschnittgleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ sich in Determinantenform darstellen lassen:

$$25)\qquad \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{01}, & e_{02}, & x \\ e_{10}, & e_{11}, & e_{12}, & y \\ e_{20}, & e_{21}, & e_{22}, & z \\ x, & y, & z, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & u \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & v \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22}, & w \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so kann man zweifelhaft sein, ob nicht diese Determinantengleichungen bei der analytischen Behandlung der Kegelschnitte den Vorzug verdienen. In dieser Richtung verweisen wir auf die Abhandlung „Ein Cyclus von Determinantengleichungen“ in Crelle's Journal Bd. 75, S. 1, welche weiteres Material liefern wird zur Durchführung der angeregten Idee.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Die Auflösung von zwei Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Gegen das Ende der sechszehnten Vorlesung haben wir auseinandergesetzt, wie die Algebra das Problem der Auflösung zweier Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten mit ihren Hilfsmitteln unternimmt. Sie führt das Problem zurück auf eine biquadratische Gleichung mit einer Unbekannten, welche, wie bekannt, durch eine kubische Gleichung gelöst wird. Da aber die biquadratische Gleichung nicht direct gegeben ist, so kann man sich wohl die Frage vorlegen, ob es nicht einfacher sei, zuerst die kubische Gleichung festzustellen und darauf die Auflösung zu begründen als umgekehrt. Die Operation soll die aufgeworfene Frage beantworten.

Das geometrische Bild zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten sind zwei Kegelschnitte, welche sich in vier Punkten schneiden. Diese vier Schnittpunkte zu bestimmen, verlangt das Problem. Nun haben wir aber am Ende der oben citirten sechszehnten Vorlesung angedeutet, dass durch die vier Schnittpunkte sich drei Linienpaare legen lassen, deren Bestimmung von einer leicht zu bildenden kubischen Gleichung abhängt. Sind alsdann durch Auflösung der kubischen Gleichung die drei Linienpaare bestimmt, so bedarf es noch der

Auflösung von drei quadratischen Gleichungen, um die drei Linienpaare in einzelne gerade Linien zu trennen. Auf diese Weise gelangen wir zu sechs geraden Linien, von welchen sich immer drei in einem der zu bestimmenden vier Punkte schneiden. Die gesuchten vier Punkte ergeben sich dann schliesslich als die Schnittpunkte von bekannten geraden Linien.

Dieses ist der Ideengang, der uns in der gegenwärtigen Vorlesung zum Wegweiser dienen soll. Er stimmt auch überein mit der Auflösung der biquadratischen Gleichung 1) in der siebenten Vorlesung, die zurückgeführt wurde auf die kubische Gleichung 13) und unter Vermittelung von 14) auf drei quadratische Gleichungen 7).

Wenn wir mit f und φ die Ausdrücke bezeichnen:

$$1)\quad \begin{aligned} f &= a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy, \\ \varphi &= b_{00}x^2 + b_{11}y^2 + b_{22}z^2 + 2b_{12}yz + 2b_{20}zx + 2b_{01}xy, \end{aligned}$$

so stellt die Gleichung

$$2)\qquad f - \lambda\varphi = 0$$

alle Kegelschnitte dar, welche durch die Schnittpunkte der durch ihre Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ gegebenen Kegelschnitte gehen.

Der Kegelschnitt 2) wird ein Linienpaar, wenn sich Werthe von x, y, z, λ derart bestimmen lassen, dass folgenden drei Gleichungen zu gleicher Zeit genügt wird:

$$3)\quad f'(x) - \lambda\varphi'(x) = 0,\quad f'(y) - \lambda\varphi'(y) = 0,\quad f'(z) - \lambda\varphi'(z) = 0.$$

Durch Elimination der Unbekannten x, y, z erhalten wir hieraus, wenn wir setzen:

$$4)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01}, & a_{02} - \lambda b_{02} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12} \\ a_{20} - \lambda b_{20}, & a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22} \end{vmatrix},$$

die in λ kubische Gleichung

$$5)\qquad \Delta = 0,$$

von deren Lösung die drei Linienpaare abhängen, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ gelegt werden können.

Wenn λ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\Delta=0$ ist, so bedeuten x, y, z in 3) die Coordinaten des Punktes, in welchem sich das der genannten Wurzel entsprechende Linienpaar schneidet. Nehmen wir daher an, dass λ_0, λ_1, λ_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta=0$ seien und dass ihnen drei Punkte 0, 1, 2 entsprechen, von denen jeder ein Schnittpunkt ist eines der drei Linienpaare, so ergeben sich aus 3) die drei Systeme Gleichungen

$$6)\quad \begin{aligned} &f'(x_0) - \lambda_0\varphi'(x_0) = 0, && f'(x_1) - \lambda_1\varphi'(x_1) = 0, && f'(x_2) - \lambda_2\varphi'(x_2) = 0, \\ &f'(y_0) - \lambda_0\varphi'(y_0) = 0, && f'(y_1) - \lambda_1\varphi'(y_1) = 0, && f'(y_2) - \lambda_2\varphi'(y_2) = 0, \\ &f'(z_0) - \lambda_0\varphi'(z_0) = 0, && f'(z_1) - \lambda_1\varphi'(z_1) = 0, && f'(z_2) - \lambda_2\varphi'(z_2) = 0, \end{aligned}$$

und aus ihnen wieder folgende beiden Systeme, welche eine geometrische Interpretation zulassen:

$$7)\quad \begin{aligned} x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2) &= 0, \\ x_2 f'(x_0) + y_2 f'(y_0) + z_2 f'(z_0) &= 0, \\ x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) &= 0, \end{aligned}$$

$$8)\quad \begin{aligned} x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2) &= 0, \\ x_2 \varphi'(x_0) + y_2 \varphi'(y_0) + z_2 \varphi'(z_0) &= 0, \\ x_1 \varphi'(x_0) + y_1 \varphi'(y_0) + z_1 \varphi'(z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Denn multiplicirt man die Gleichungen des zweiten Systems 6) resp. mit x_2, y_2, z_2 und addirt, so erhält man:

$$\{x_2 f'(x_1) + y_2 f'(y_1) + z_2 f'(z_1)\} - \lambda_1 \{x_2 \varphi'(x_1) + y_2 \varphi'(y_1) + z_2 \varphi'(z_1)\} = 0.$$

Ebenso geht aus dem dritten System 6) durch Multiplication mit x, y, z und Addition die Gleichung hervor:

$$\{x_1 f'(x_2) + y_1 f'(y_2) + z_1 f'(z_2)\} - \lambda_2 \{x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2)\} = 0.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so wird:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\{x_1 \varphi'(x_2) + y_1 \varphi'(y_2) + z_1 \varphi'(z_2)\} = 0.$$

Da nun der erste Factor $(\lambda_2 - \lambda_1)$ in dieser Gleichung nicht verschwinden kann, weil λ_2 und λ_1 verschiedene Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ sind, so muss der zweite Factor verschwinden, was eben durch die erste Gleichung 8) ausgedrückt ist. Die erste Gleichung 7) ergiebt sich dann aus jeder der beiden anderen zuletzt aufgestellten Gleichungen.

Wir wollen nicht unterlassen zu bemerken, dass wir in unserer Discussion nur den allgemeinen Fall vor Augen haben werden, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ wirklich voneinander verschieden sind. Für den Fall zweier oder dreier gleicher Wurzeln bedarf es einer besondern Untersuchung.

Die Gleichungen 7) und 8) beweisen, dass die drei Punkte 0, 1, 2 die Ecken eines Poldreiecks bilden sowohl für den einen Kegelschnitt $f = 0$, als für den andern $\varphi = 0$. Ausserdem ist ersichtlich, dass dieses gemeinschaftliche Poldreieck auch jedem Kegelschnitte angehört, welcher durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte geht.

Die Gleichungen 7) und 8), die Bedingungen für das gemeinsame Poldreieck, gingen hervor aus den neun Gleichungen 6). Umgekehrt lassen sich aus den sechs Gleichungen 7) und 8) die drei Systeme 6) herstellen. Vergleicht man beispielsweise, um zum ersten dieser Systeme zu gelangen, die beiden letzten Relationen in 7) mit den beiden letzten Relationen in 8), so sieht man, dass die Grössen $f'(x_0)$, $f'(y_0)$, $f'(z_0)$ dieselben Verhältnisse besitzen wie $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(y_0)$, $\varphi'(z_0)$, und dass also ein Factor λ_0 sich finden lässt, für welchen:

$$f'(x_0) = \lambda_0 \varphi'(x_0), \quad f'(y_0) = \lambda_0 \varphi'(y_0), \quad f'(z_0) = \lambda_0 \varphi'(z_0).$$

Hieraus schliessen wir auf den Satz:

Es giebt nur ein Poldreieck, welches zweien gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlich ist.

In dem vorliegenden Falle drücken sich die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiecks der beiden Kegelschnitte analytisch in doppelter Art so aus:

$$9)\quad \begin{aligned} x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) &= 0, & x \varphi'(x_0) + y \varphi'(y_0) + z \varphi'(z_0) &= 0, \\ x f'(x_1) + y f'(y_1) + z f'(z_1) &= 0, & x \varphi'(x_1) + y \varphi'(y_1) + z \varphi'(z_1) &= 0, \\ x f'(x_2) + y f'(y_2) + z f'(z_2) &= 0, & x \varphi'(x_2) + y \varphi'(y_2) + z \varphi'(z_2) &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben eben das gemeinschaftliche Poldreieck abhängig gemacht von den Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Denn aus 6) ergeben sich die Coordinaten der Ecken 0, 1, 2 durch Auflösung linearer Gleichungen. Wie solche lineare Gleichungen mit Einmischung willkürlicher Constanten sich auflösen lassen, zeigt die Anmerkung*. Man kann aber

---

* Es ist eine häufig wiederkehrende Aufgabe, die Coordinaten des Schnittpunktes zweier geraden Linien zu bestimmen, welche durch ihre Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben sind. Die gesuchten Coordinaten ergeben sich, wie bekannt, aus je zweien von den drei Gleichungen

$$\mathrm{I)}\qquad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0,$$

welche sämmtlich durch sie befriedigt werden.

Welche zwei Gleichungen man aber auch zu diesem Zwecke verwenden mag, die Ausdrücke für die Coordinaten werden unsymmetrisch. Man muss allen drei Gleichungen zugleich Rechnung tragen, um zu einem befriedigenden Resultate zu gelangen.

Bezeichnen wir die Determinante der Function f mit A und mit $A_{\varkappa\lambda}$ die Unterdeterminanten der letzteren, so erhalten wir durch Auflösung je zweier Gleichungen

$$x:y:z = A_{00}:A_{10}:A_{20}, \quad x:y:z = A_{01}:A_{11}:A_{21}, \quad x:y:z = A_{02}:A_{12}:A_{22}.$$

Hieraus setzen sich nun unter Einführung von drei willkürlichen Factoren $\varkappa$ die allgemeinsten Auflösungen der Gleichungen I) zusammen

$$\mathrm{II)}\qquad \begin{aligned} x &= A_{00}\varkappa^0 + A_{01}\varkappa^1 + A_{02}\varkappa^2, \\ y &= A_{10}\varkappa^0 + A_{11}\varkappa^1 + A_{12}\varkappa^2, \\ z &= A_{20}\varkappa^0 + A_{21}\varkappa^1 + A_{22}\varkappa^2. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke der Unbekannten genügen den Gleichungen I). Denn setzt man dieselben in die Gleichungen ein, so verschwinden einzeln die Coefficienten der willkürlich angenommenen Factoren $\varkappa$. Diese Auflösungen II) umfassen aber auch die oben angegebenen. Denn lässt man zwei von den Constanten $\varkappa$ verschwinden, so erhält man jene speciellen Auflösungen.

Die vorgetragene Auflösungsmethode ist keineswegs beschränkt, weder auf die Zahl der Variabeln und Gleichungen, noch auf die Form der letzteren. Denn lassen wir die Gleichung

$$\mathrm{III)}\qquad a_0^\lambda x_0 + a_1^\lambda x_1 + \ldots + a_n^\lambda x_n = 0$$

ein ganzes System linearer homogener Gleichungen bedeuten mit den Unbekannten x, indem wir unter λ alle Zahlen 0, 1, ... n verstehen, so haben wir die Auflösungen des Systems mit den willkürlichen Constanten $\varkappa$

$$\mathrm{III)}\qquad x_\lambda = A^0_\lambda \varkappa^0 + A^1_\lambda \varkappa^1 + \ldots + A^n_\lambda \varkappa^n.$$

auch umgekehrt die kubische Gleichung abhängig machen von dem gemeinschaftlichen Poldreiecke. Denn multiplicirt man die Gleichungen des ersten Systems 6) mit x_0, y_0, z_0 und addirt, so erhält man für λ_0 den Ausdruck

$$10) \qquad \lambda_0 = \frac{x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0)}{x_0 \varphi'(x_0) + y_0 \varphi'(y_0) + z_0 \varphi'(z_0)}.$$

Es soll sich nun darum handeln, diesen Ausdruck für die Wurzel λ_0 der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ geometrisch zu deuten.

Zu diesem Zwecke müssen wir die beiden Functionen f und φ näher fixiren, denn die kubische Gleichung $\Delta = 0$ wird eine andere, wenn man die beiden Functionen mit willkürlichen Factoren multiplicirt, während die durch sie ausgedrückten Kegelschnitte sich dadurch nicht ändern. Wir werden deshalb festsetzen, dass die Function $2f$ der Einheit gleich werde, wenn man in derselben $z = 1$ setzt und die beiden anderen Coordinaten die Coordinaten m des Mittelpunktes des Kegelschnittes $f = 0$ bedeuten lässt. Ebenso soll die Function 2φ der Einheit gleich werden, wenn man in ihr $z = 1$ setzt und für die beiden anderen Coordinaten die Coordinaten des Mittelpunktes n des Kegelschnittes $\varphi = 0$. Man hat daher für den Mittelpunkt m des Kegelschnittes $f = 0$ die Gleichungen

$$11) \qquad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 1,$$

und für den Mittelpunkt n des Kegelschnittes $\varphi = 0$

$$12) \qquad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi'(z) = 1.$$

Ausserdem wird es vortheilhaft sein, sämmtlichen z-Coordinaten den Werth der Einheit beizulegen, so dass man hat $z = z_0 = z_1 = z_2 = 1$.

Wir entnehmen aus 9) die Gleichung der geraden Linie 12:

$$x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0,$$

welche durch Multiplication mit dem Factor $-\frac{1}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}$ auf die Normalform gebracht wird. Aus ihr erhalten wir dann den senkrechten Abstand p_0 eines durch die Coordinaten x, y, $z = 1$ gegebenen Punktes p von der geraden Linie 12:

$$p_0 = \frac{x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0)}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}} = \frac{x_0 f'(x) + y_0 f'(y) + z_0 f'(z)}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich nun auf Grund der Gleichungen 11) der senkrechte Abstand m_0 des Mittelpunktes m des Kegelschnittes $f = 0$ von der geraden Linie 12:

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{f'(x_0)^2 + f'(y_0)^2}}.$$

Wir haben deshalb

$$\frac{p_0}{m_0} = x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0).$$

Das gleiche Verfahren, ausgeführt an dem Kegelschnitte $\varphi = 0$, ergiebt:

$$\frac{p_0}{n_0} = x\,\varphi'(x_0) + y\,\varphi'(y_0) + z\,\varphi'(z_0),$$

wenn wir unter n_0 den senkrechten Abstand des Mittelpunktes n des Kegelschnittes $\varphi = 0$ von der geraden Linie 12 verstehen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt endlich

$$13)\qquad \frac{n_0}{m_0} = \frac{x\,f'(x_0) + y\,f'(y_0) + z\,f'(z_0)}{x\,\varphi'(x_0) + y\,\varphi'(y_0) + z\,\varphi'(z_0)},$$

ein Ausdruck für das Verhältniss der Abstände m_0 und n_0 der Mittelpunkte m und n der Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ von der geraden Linie 12, welcher unabhängig ist von der Lage des Punktes p. Lässt man diesen Punkt p zusammenfallen mit dem Punkte 0, so ergiebt sich aus dem Vergleiche von 13) und 10) die geometrische Bedeutung der Wurzel

$$\lambda_0 = \frac{n_0}{m_0}.$$

In dem angegebenen Verhältnisse $n_0 : m_0$ der senkrechten Abstände der Mittelpunkte n und m von der geraden Linie 12 können wir auch die Entfernungen $\overline{[0]n} : \overline{[0]m}$ des Schnittpunktes [0] der geraden Linien nm und 12 an Stelle der Abstände substituiren. Bezeichnen wir deshalb die Schnittpunkte der Verbindungslinie der Mittelpunkte n und m mit den Seiten des Poldreiecks resp. mit den Zeichen [0], [1], [2], so haben wir folgende geometrische Interpretation der Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$:

$$14)\qquad \lambda_0 = \frac{\overline{[0]n}}{\overline{[0]m}},\quad \lambda_1 = \frac{\overline{[1]n}}{\overline{[1]m}},\quad \lambda_2 = \frac{\overline{[2]n}}{\overline{[2]m}}.$$

Die Beschränkung der Functionen f und φ, welche wir nur gemacht haben, um zu diesem Resultate zu gelangen, ist für das Folgende nicht nothwendig. Wir heben sie darum wieder auf.

Dass die Gleichung $f - \lambda\varphi = 0$ ein Linienpaar darstellt, wenn λ eine Wurzel der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ ist, drückt sich algebraisch aus, wenn man sagt, dass der Ausdruck $f - \lambda\varphi$ in lineare Factoren zerfällt. Zum Zwecke dieser Zerfällung in Factoren ist es nützlich, an Stelle der Variabelen x, y, z neue Variabelen X, Y, Z einzuführen durch folgende Gleichungen:

$$15)\qquad \begin{aligned} x\,\varphi'(x_0) + y\,\varphi'(y_0) + z\,\varphi'(z_0) &= 2X,\\ x\,\varphi'(x_1) + y\,\varphi'(y_1) + z\,\varphi'(z_1) &= 2Y,\\ x\,\varphi'(x_2) + y\,\varphi'(y_2) + z\,\varphi'(z_2) &= 2Z,\end{aligned}$$

und mit φ_0, φ_1, φ_2 die Ausdrücke zu bezeichnen:

$$16)\qquad \begin{aligned} x_0\,\varphi'(x_0)+y_0\,\varphi'(y_0)+z_0\,\varphi'(z_0)&=2\varphi_0,\\ x_1\,\varphi'(x_1)+y_1\,\varphi'(y_1)+z_1\,\varphi'(z_1)&=2\varphi_1,\\ x_2\,\varphi'(x_2)+y_2\,\varphi'(y_2)+z_2\,\varphi'(z_2)&=2\varphi_2.\end{aligned}$$

Es liegen nun drei lineare Ausdrücke der variabelen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p vor:

$$f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x),\quad 2Y,\quad 2Z,$$

welche verschwinden, wenn der Punkt p mit dem Punkte 0 zusammenfällt. Es müssen sich daher zwei Factoren ϱ derart bestimmen lassen, dass man identisch hat

$$f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x)=2\varrho_1 Y+2\varrho_2 Z.$$

Diese Factoren bestimmen sich in der identischen Gleichung dadurch, dass man für die Variabeln setzt entweder die Coordinaten des Punktes 1 oder des Punktes 2. Hierdurch wird

$$\begin{aligned} f'(x_1)-\lambda_0\,\varphi'(x_1)&=2\varrho_1\varphi_1,\\ f'(x_2)-\lambda_0\,\varphi'(x_2)&=2\varrho_2\varphi_2\end{aligned}$$

oder, da $f'(x_1)-\lambda_1\,\varphi'(x_1)=0$ und $f'(x_2)-\lambda_2\,\varphi'(x_2)=0$ ist, so wird

$$\begin{aligned} (\lambda_1-\lambda_0)\,\varphi'(x_1)&=2\varrho_1\varphi_1,\\ (\lambda_2-\lambda_0)\,\varphi'(x_2)&=2\varrho_2\varphi_2.\end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe der Factoren in die identische Gleichung ein und vertauschen die Coordinaten, so erhalten wir ein ganzes System Gleichungen, welche die Substitution 15) zu identischen Gleichungen machen:

$$17)\qquad \begin{aligned} f'(x)-\lambda_0\,\varphi'(x)&=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(x_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(x_2)\,Z,\\ f'(y)-\lambda_0\,\varphi'(y)&=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(y_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(y_2)\,Z,\\ f'(z)-\lambda_0\,\varphi'(z)&=\frac{(\lambda_1-\lambda_0)}{\varphi_1}\,\varphi'(z_1)\,Y+\frac{(\lambda_2-\lambda_0)}{\varphi_2}\,\varphi'(z_2)\,Z.\end{aligned}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen resp. mit x, y, z und addiren, so wird mit Rücksicht auf die Substitution 15)

$$f-\lambda_0\varphi=\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\varphi_1}\,Y^2+\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\varphi_2}\,Z^2$$

oder

$$(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_1-\lambda_2)=-P\left\{\frac{Y^2}{\varphi_1(\lambda_2-\lambda_0)}-\frac{Z^2}{\varphi_2(\lambda_0-\lambda_1)}\right\},$$

wenn wir mit P das Product bezeichnen:

$$18)\qquad P=(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_0).$$

Bezeichnen wir endlich mit α, β, γ die Ausdrücke

$$19)\qquad \alpha=\sqrt{\varphi_0(\lambda_1-\lambda_2)},\quad \beta=\sqrt{\varphi_1(\lambda_2-\lambda_0)},\quad \gamma=\sqrt{\varphi_2(\lambda_0-\lambda_1)},$$

so kann man aus der letzten identischen Gleichung durch erlaubte Vertauschungen ein ganzes System Gleichungen ableiten:

$$(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_1-\lambda_2)=-P\left\{\frac{Y^2}{\beta^2}-\frac{Z^2}{\gamma^2}\right\},$$
$$20)\qquad (f-\lambda_1\varphi)(\lambda_2-\lambda_0)=-P\left\{\frac{Z^2}{\gamma^2}-\frac{X^2}{\alpha^2}\right\},$$
$$(f-\lambda_2\varphi)(\lambda_0-\lambda_1)=-P\left\{\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}\right\},$$

welches sich auch so darstellen lässt:

$$(f-\lambda_0\varphi)(\lambda_2-\lambda_2)=-P\left\{\frac{Y}{\beta}+\frac{Z}{\gamma}\right\}\left\{\frac{Y}{\beta}-\frac{Z}{\gamma}\right\},$$
$$21)\qquad (f-\lambda_1\varphi)(\lambda_2-\lambda_0)=-P\left\{\frac{Z}{\gamma}+\frac{X}{\alpha}\right\}\left\{\frac{Z}{\gamma}-\frac{X}{\alpha}\right\},$$
$$(f-\lambda_2\varphi)(\lambda_0-\lambda_1)=-P\left\{\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}\right\}\left\{\frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}\right\}.$$

Setzen wir nun diese umgewandelten Ausdrücke gleich 0, so erhalten wir die Gleichungen der drei Linienpaare, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ gelegt werden können.

Zu gleicher Zeit sieht man aber auch, wie jedes Linienpaar sich in einzelne Linien trennt, und welche von den sechs geraden Linien zu dreien in einem der gesuchten vier Schnittpunkte der Kegelschnitte sich schneiden. So schneiden sich die drei geraden Linien

$$22)\qquad \frac{Y}{\beta}-\frac{Z}{\gamma}=0,\quad \frac{Z}{\gamma}-\frac{X}{\alpha}=0,\quad \frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}=0$$

in einem und demselben Punkte, weil die Summe ihrer Gleichungen identisch verschwindet.

Die drei anderen Zusammenstellungen von drei der genannten sechs geraden Linien, welche sich in einem der gesuchten Punkte schneiden, erhalten wir aus 22) durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen α, β, γ.

Es bleibt noch übrig, die Coordinaten selbst eines Schnittpunktes der gegebenen beiden Kegelschnitte zu berechnen. Hierzu dienen die Gleichungen 22), welche wir in anderer Form so ausdrücken:

$$X:Y:Z=\alpha:\beta:\gamma.$$

Da es sich aber nur um die Verhältnisse der homogenen Coordinaten des Schnittpunktes handelt, so können wir für die angegebenen Verhältnisse auch folgende Gleichungen nehmen:

$$X=\alpha,\quad Y=\beta,\quad Z=\gamma,$$

welche sich mit Rücksicht auf 15) ausführlich so darstellen:

$$x\,\varphi'(x_0)+y\,\varphi'(y_0)+z\,\varphi'(z_0)=2\alpha,$$
$$23)\qquad x\,\varphi'(x_1)+y\,\varphi'(y_1)+z\,\varphi'(z_1)=2\beta,$$
$$x\,\varphi'(x_2)+y\,\varphi'(y_2)+z\,\varphi'(z_2)=2\gamma.$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten. Wir multipliciren die Gleichungen der Reihe nach mit X_0, X_1, X_2, addiren und richten die Coefficienten so ein, dass man hat:

$$\begin{aligned}
&X_0\,\varphi'(x_0) + X_1\,\varphi'(x_1) + X_2\,\varphi'(x_2) = 1,\\
24)\quad &X_0\,\varphi'(y_0) + X_1\,\varphi'(y_1) + X_2\,\varphi'(y_2) = 0,\\
&X_0\,\varphi'(z_0) + X_1\,\varphi'(z_1) + X_2\,\varphi'(z_2) = 0.
\end{aligned}$$

Alsdann erhalten wir den Werth der Unbekannten x:

$$x = 2(\alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma X_2).$$

Die Werthe der zu bestimmenden Coefficienten ergeben sich aber aus 24), wenn man diese Gleichungen entweder mit x_0, y_0, z_0 oder mit x_1, y_1, z_1 oder mit x_2, y_2, z_2 multiplicirt und dann addirt:

$$X_0 = \frac{x_0}{2\varphi_0}, \quad X_1 = \frac{x_1}{2\varphi_1}, \quad X_2 = \frac{x_2}{2\varphi_2}.$$

Hiernach wird

$$x = \frac{\alpha x_0}{\varphi_0} + \frac{\beta x_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma x_2}{\varphi_2},$$

und wir erhalten auf diese Weise die Auflösung der Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ in homogenen Cordinaten

$$\begin{aligned}
&x = \frac{\alpha x_0}{\varphi_0} + \frac{\beta x_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma x_2}{\varphi_2},\\
25)\quad &y = \frac{\alpha y_0}{\varphi_0} + \frac{\beta y_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma y_2}{\varphi_2},\\
&z = \frac{\alpha z_0}{\varphi_0} + \frac{\beta z_1}{\varphi_1} + \frac{\gamma z_2}{\varphi_2}.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichungen 25) die Auflösungen der linearen Gleichungen 23) sind, welche letzteren sich von den Substitutionen 15) nur in ihren rechten Theilen unterscheiden, so gehen die Gleichungen 25) über in die Auflösungen der Substitutionen, wenn man die Buchstaben α, β, γ verändert in X, Y, Z.

Die drei anderen Auflösungen derselben beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ gehen aus diesen Auflösungen hervor durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen α, β, γ.

Multipliciren wir die Gleichungen 25) mit den variabelen Liniencoordinaten u, v, w und setzen die Summe gleich 0, so erhalten wir die Gleichung des gesuchten Schnittpunktes der gegebenen beiden Kegelschnitte. Wenn wir demnach die Bezeichnungen einführen:

$$\begin{aligned}
U_0 &= (x_0 u + y_0 v + z_0 w)\sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\varphi_0}},\\
U_1 &= (x_1 u + y_1 v + z_1 w)\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\varphi_1}},\\
U_2 &= (x_2 u + y_2 v + z_2 w)\sqrt{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\varphi_2}},
\end{aligned}$$

so stellen sich die Gleichungen der vier Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte in der eleganten Form dar

$$
27)\qquad
\begin{aligned}
U_0 + U_1 + U_2 &= 0, \\
-U_0 + U_1 + U_2 &= 0, \\
U_0 - U_1 + U_2 &= 0, \\
U_0 + U_1 - U_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Nachdem wir unser am Anfange der Vorlesung aufgestelltes Problem vollständig gelöst haben, so werfen wir noch einen Blick zurück auf die durch die Substitutionen 15) identischen Gleichungen 20). Die ersten Theile der letzteren enthalten nur die Quadrate der neuen Variabelen X, Y, Z. Betrachtet man in zwei von diesen Gleichungen die Factoren f und φ als Unbekannte, so drücken sich dieselben durch die Quadrate der neuen Variabelen aus. Es werden sich daher immer lineare Substitutionen neuer Variabelen finden lassen, welche die gegebenen Functionen f und φ auf die Quadrate der neuen Variabelen zurückführen.

Lineare Substitutionen ähnlicher Art haben ihre geometrische Bedeutung in der elften Vorlesung in den Dreieckcoordinaten erhalten. Wir verlassen daher nicht das Gebiet der Geometrie, wenn wir noch eine zweite Art der Auflösung unsers Problems in Anregung bringen.

Es lassen sich zwei gegebene homogene Functionen f und φ des zweiten Grades der drei Variabelen x, y, z durch lineare Substitutionen anderer Variabelen X, Y, Z auf die Quadrate zurückführen wie folgt:

$$
28)\qquad
\begin{aligned}
f &= \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2, \\
\varphi &= \varkappa_0 X^2 + \varkappa_1 Y^2 + \varkappa_2 Z^2.
\end{aligned}
$$

Denn die Substitutionen enthalten neun zu bestimmende Coefficienten, und die Gleichungen 28) sechs zu bestimmende Grössen μ und $\varkappa$, also im Ganzen 15 zu bestimmende Grössen. Macht man nun in den angegebenen Gleichungen die Substitutionen und setzt die Coefficienten der Quadrate und der Producte der Variabelen einander gleich, so erhält man nur zwölf Gleichungen, welchen die zu bestimmenden 15 Grössen zu genügen haben. Es können deshalb von den 15 zu bestimmenden Grössen gewisse drei beliebig angenommen werden. Welche Grössen dieses sind, ergiebt folgende Betrachtung.

Die Gleichungen 28) sind Folgen aus den Substitutionen. Verändert man in den Substitutionen die Variabelen X, Y, Z in $\varrho_0 X$, $\varrho_1 Y$, $\varrho_2 Z$, so muss auch in den Gleichungen 28) die gleiche Veränderung eintreten. Die sechs Coefficienten μ und $\varkappa$ in 28) verändern sich dadurch in $\mu_0\varrho_0^2$, $\mu_1\varrho_1^2$, $\mu_2\varrho_3^2$; $\varkappa_0\varrho_0^2$, $\varkappa_1\varrho_1^2$, $\varkappa_2\varrho_2^2$. Was sich bei dieser Gelegenheit nicht ändert, das sind die Verhältnisse λ_0, λ_1, λ_2 der Grössen μ und $\varkappa$:

$$
\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\varkappa_0}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu_1}{\varkappa_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{\varkappa_2}.
$$

Es können daher drei von den sechs Grössen μ und $\varkappa$ beliebig angenommen werden unter der einzigen Beschränkung, dass die drei Grössen λ von der gemachten Annahme unberührt bleiben. Wie die Untersuchung lehren wird, ergeben sich dann die drei Grössen λ als die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta = 0$. Als Wegweiser zur Ausführung der Transformation wird die zwanzigste Vorlesung meiner Raumgeometrie dienlich sein, welche die Zahl der Variabelen unbeschränkt lässt.

Stellen wir uns nun vor, dass wir die Substitutionen kennen, welche die Transformationen 28) bewirken, so haben wir die aufzulösenden Gleichungen auf die Form zurückgeführt

$$29) \qquad \begin{aligned} \mu_0 X^2 + \mu_1 Y^2 + \mu_2 Z^2 = 0, \\ \varkappa_0 X^2 + \varkappa_1 Y^2 + \varkappa_2 Z^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus sich sofort mit Einmischung eines unbestimmten Factors ϱ die Ausdrücke ergeben

$$30) \quad X = \varrho \sqrt{\mu_1 \varkappa_2 - \mu_2 \varkappa_1}, \quad Y = \varrho \sqrt{\mu_2 \varkappa_0 - \mu_0 \varkappa_2}, \quad Z = \varrho \sqrt{\mu_0 \varkappa_1 - \mu_1 \varkappa_0},$$

welche den beiden Gleichungen 29) zu gleicher Zeit genügen.

Da in diesen Gleichungen X, Y, Z bekannte lineare Ausdrücke der Coordinaten x, y, z sind, so handelt es sich nunmehr um die Auflösung linearer Gleichungen, um die Coordinaten der Schnittpunkte der gegebenen beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ festzustellen.

Wenn man es unternimmt, auf dem eben angegebenen Wege die gegebenen beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ aufzulösen, so wird man sich nicht befriedigt finden, wenn man nicht auf das einfache Resultat 25) zurückkommt.

Heben wir zum Schlusse unserer Vorlesung noch eine Specialität hervor, nämlich die, wenn die gegebenen beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$ denselben Mittelpunkt haben.

Aus der in 14) angegebenen Construction der Wurzeln λ der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ von den Mittelpunkten der Kegelschnitte aus durch das gemeinschaftliche Poldreieck wäre man geneigt zu schliessen, dass sämmtliche Wurzeln einander geich seien und dass gerade der Fall gleicher Wurzeln vorläge, den wir in unserer Untersuchung ausdrücklich ausgeschlossen haben. Der Fall gleicher Wurzeln braucht aber nicht vorzuliegen. Denn wenn der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kegelschnitte in eine Ecke des Poldreiecks fällt, so giebt die Construction eine ganz bestimmte Wurzel, die beiden anderen aber werden illusorisch. Und in der That hat in dem vorgelegten Falle die kubische Gleichung drei ganz bestimmte, voneinander verschiedene Wurzeln.

Wie wir gesehen haben, wurden die Coordinaten x, y, z einer Ecke des gemeinschaftlichen Poldreiecks und der dieser Ecke zugehörige Werth von λ durch die drei Gleichungen 3) bestimmt:

$$f'(x) - \lambda \varphi'(x) = 0, \quad f'(y) - \lambda \varphi'(y) = 0, \quad f'(z) - \lambda \varphi'(z) = 0.$$

Bedeuten nun x, y, z die Coordinaten des gemeinschaftlichen Mittelpunktes der beiden Kegelschnitte, so werden die beiden ersten Gleichungen von selbst erfüllt und die letzte Gleichung giebt den zugehörigen Werth von λ. Dieses beweist, dass der gemeinsame Mittelpunkt wirklich mit einer Ecke des Poldreiecks zusammenfällt, und dass der dieser Ecke zugehörige Werth λ der Wurzel der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ sich unabhängig von dieser Gleichung angeben lässt.

Mit der Kenntniss einer der Wurzeln der kubischen Gleichung $\varDelta = 0$ liegt nunmehr statt der kubischen eine quadratische Gleichung vor. Da die übrigen für den allgemeinen Fall vorgezeichneten Operationen zur Feststellung der Coordinaten der vier Schnittpunkte der gegebenen beiden Kegelschnitte auch Nichts weiter verlangen, als die Auflösungen von quadratischen Gleichungen, so ist ersichtlich, dass die Auflösung der vorliegenden Specialität nur von quadratischen Gleichungen abhängt.

Was das Poldreieck anbetrifft, dessen Ecke 2 zusammenfallen mag mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kegelschnitte, so liegt die dieser Ecke gegenüberliegende Seite 01 in dem Unendlichen, weil sie die Polare des Mittelpunktes ist. Die beiden anderen Ecken ergeben sich alsdann als dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist zu den Schnittpunktepaaren der geraden Linie im Unendlichen mit den beiden Kegelschnitten.

Die Seiten 20 und 21 des eben beschriebenen Poldreiecks sind harmonische Polaren für jeden der beiden Kegelschnitte, und da sie von dem gemeinsamen Mittelpunkte ausgehen, so sind sie conjugirte Durchmesser für jeden der beiden Kegelschnitte. Wir können daraus schliessen:

Zwei Kegelschnitte mit gemeinsamem Mittelpunkte haben ein Paar conjugirter Durchmesser gemeinschaftlich.

Durchsichtiger noch wird dieses, wenn wir annehmen, dass die Gleichungen der gegebenen Kegelschnitte auf den Mittelpunkt bezogen seien, dass also $a_{20} = a_{21} = b_{20} = b_{21} = 0$. Denn alsdann zerfällt die Determinante $\varDelta$ in die Factoren

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11} \end{vmatrix} (a_{22} - \lambda b_{22}),$$

und in der Gleichung $\varDelta = 0$ tritt der lineare Factor $(a_{22} - \lambda b_{22})$ sichtbar hervor, der fortgelassen die kubische Gleichung zu einer quadratischen Gleichung macht:

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda b_{00}, & a_{01} - \lambda b_{01} \\ a_{10} - \lambda b_{10}, & a_{11} - \lambda b_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Dass die Eckpunkte 0 und 1 des gemeinschaftlichen Poldreiecks in dem Unendlichen liegen, folgt aus denjenigen Gleichungen 6), welche in dem vorliegenden Falle die Gestalt annehmen $(a_{22} - \lambda_0 b_{22}) z_0 = 0$, $(a_{22} - \lambda_1 b_{22}) z_1 = 0$. Sie können aber nicht anders befriedigt werden, als wenn $z_0 = z_1 = 0$ sind. Die übrigen Coordinaten der Eckpunkte ergeben sich dann aus einer der specialisirten Gleichungen 3)

$$(a_{00} - \lambda b_{00}) x + (a_{01} - \lambda b_{01}) y = 0,$$
$$(a_{10} - \lambda b_{10}) x + (a_{11} - \lambda b_{11}) y = 0,$$

wenn man unter λ die eine oder die andere Wurzel der vorgenannten quadratischen Gleichung versteht. Unter dieser Annahme stellen diese Gleichungen zugleich die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser der beiden Kegelschnitte dar in doppelter Ausdrucksweise.

Wenn wir endlich annehmen, dass der Kegelschnitt $\varphi = 0$ ein Kreis sei, dass also $b_{00} = b_{11} = 1$ und $b_{01} = 0$, und bemerken, dass die conjugirten Durchmesser eines Kreises immer aufeinander senkrecht stehen, so werden die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser die Axen des Kegelschnittes $f = 0$. Und in der That sieht man, dass die obengenannte quadratische Gleichung in dem vorliegenden Falle

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda, & a_{01} \\ a_{10}, & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

mit der Gleichung 8) in der zehnten Vorlesung und mit der Gleichung 4) in der einundzwanzigsten Vorlesung übereinstimmt, von welcher Gleichung dort das Axenproblem des Kegelschnittes $f = 0$ abhängig gemacht worden ist. Die Gleichungen der Axen selber ergeben sich dann aus den vorhergehenden beiden Gleichungen wieder in gleichbedeutenden Ausdrücken:

$$(a_{00} - \lambda) x + a_{01} y = 0,$$
$$a_{10} x + (a_{11} - \lambda) y = 0.$$

Wir wollen die quadratische Gleichung, von welcher die Axen eines Kegelschnittes abhängen, und die Gleichungen der Axen selber nicht wiederholt haben, ohne daran die Bemerkung zu knüpfen, dass diese Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man in ihnen für a_{00} und a_{11} resp. setzt

$$a_{00} - \varkappa \text{ und } a_{11} - \varkappa$$

und zugleich für λ setzt $\lambda - \varkappa$, welchen Werth auch $\varkappa$ habe. Daraus ziehen wir den Schluss:

Alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte gehen, in welchen sich ein Kegelschnitt und irgend ein Kreis schneiden, haben gleiche Richtungen ihrer Axen.

Wenn wir nämlich mit $f = 0$ eine Kegelschnittgleichung in gewöhnlichen Punktcoordinaten und mit $\varphi = 0$ die Kreisgleichung in der Normalform bezeichnen, so ist $f - \varkappa\varphi = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes, von welchem der Satz handelt. Bei der Bestimmung der Richtungen der Axen dieses Kegelschnittes kommen nur die Glieder zweiter Ordnung in Betracht:

$$(a_{00}-\varkappa)\,x^2+2\,a_{01}\,xy+(a_{11}-\varkappa)\,y^2.$$

Man erhält also aus der oben aufgestellten quadratischen Gleichung die dem vorliegenden Falle entsprechende quadratische Gleichung, wenn man für a_{00} und a_{11} resp. setzt

$$a_{00}-\varkappa \text{ und } a_{11}-\varkappa.$$

Ist aber λ eine Wurzel jener Gleichung, so ist $\lambda-\varkappa$ eine Wurzel dieser Gleichung. Diese Veränderungen bringen jedoch, wie schon bemerkt wurde, keine Aenderungen in den die Richtungen der Axen bestimmenden Gleichungen hervor.

II.

Ueber einige Anwendungen eines besondern Falles der homographischen Verwandtschaft (der Affinität).

Von

Dr. J. Korteweg

zu Breda.

Die Lehre von der Affinität wurde, wie bekannt, ausführlicher besprochen von Möbius in seinem „Barycentrischen Calcul" Cap. III, S. 191 § 144, und von Chasles in seinem berühmten „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*", und zwar in dem beigefügten „*Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science la dualité et l'homographie*". (*Deuxième partie* § *XXIII*: sie war jedoch schon früher von Euler in der *Introductio in anal. inf. Tome II, Cap. XVIII* benannt und bestimmt worden. Ob sie später jemals einen Gegenstand von speciellem Studium ausgemacht hat, ist mir nicht bekannt; in den allgemeineren Schriften über neuere Geometrie von Poncelet, Chasles, Steiner, Magnus, Plücker, v. Staudt, T. Reye, Schlesinger, Salmon, Fiedler u. s. w. wird sie meistens nur sehr nebenbei, bisweilen gar nicht genauer behandelt. Eine gute Uebersicht über das schon von Möbius und Chasles Angeführte giebt F. Reye in seiner „Geometrie der Lage". Wir wollen nun zeigen, dass damit die Lehre von der Affinität noch nicht abgeschlossen, dass sie im Gegentheil geeignet ist, verschiedene Untersuchungen der Geometrie und Mechanik (namentlich die Frage nach grössten und kleinsten um- und eingeschriebenen Figuren und die Theorie des Trägheitsellipsoids) in dem Gebiete der neueren Geometrie unterzubringen.

1. Es ist bekannt, dass Affinität der besondere Fall von Homographie oder Collineation ist, wobei die Ebenen im Unendlichen der beiden homologen Systeme einander entsprechen. Hieraus leitet man folgende Theoreme ab:

a) Nennen wir, in Uebereinstimmung mit dem Ausdruck Doppelverhältniss $\frac{AC}{BC}$ das Einzelverhältniss dreier Punkte A, B, C einer

Geraden, so sind die Einzelverhältnisse dreier Punkte auf einer Geraden und ihrer Homologen einander gleich.

b) Parallele Linien sind mit parallelen Linien homolog.

c) Das Verhältniss zwischen zwei parallelen begrenzten Linien ist dem zwischen ihren Homologen gleich.

d) Denkt man sich zwei homologe schiefwinklige Axensysteme in beiden affinen Systemen, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der einen Figur homolog und proportional den entsprechenden Coordinaten des homologen Coordinatensystems in der andern Figur. Zwei affine Figuren können also dadurch aus einander abgeleitet werden, dass man die gleichartigen Coordinaten aller Punkte der einen Figur in gleichem Verhältniss verändert und auf ein neues Axensystem überträgt.

e) Die Inhalte geschlossener Figuren in parallelen Ebenen verhalten sich wie die Inhalte der homologen Figuren. Die Volumina körperlicher Figuren sind proportional den Rauminhalten der homologen Figuren.

2. Diesen Theoremen, die man zum Beispiel im Lehrbuch des Herrn Reye bewiesen findet, fügen wir folgende hinzu:

f) Es ist immer möglich, durch jeden Punkt des ersten Systems ein rechtwinkliges Coordinatenaxen-System zu legen, homolog mit einem solchen im zweiten System.

Obwohl diese Eigenschaft auf rein elementarem Wege zu beweisen wäre, so würde dies hier zu weitläufig sein. Denkt man sich aber im ersten System eine Kugel, welcher im zweiten ein Ellipsoid entspricht, so correspondiren mit den Hauptaxen des Ellipsoids rechtwinklige Durchmesser der Kugel, und diese Axen und Durchmesser, welche man die orthogonalen Affinitätsaxen der beiden Systeme nennen könnte, bilden zusammen die verlangten homologen rechtwinkligen Coordinatenaxen.

3. Endlich müssen wir noch den Begriff von affinen Figuren einführen. Es sind dies bestimmte geometrische Figuren, welche sich durch Affinität von einander ableiten lassen. Einander affin sind z. B. alle Tetraeder, alle Parallelepipede, alle dreiseitigen Prismen, alle Ellipsoide, alle elliptischen Cylinder und Kegel u. s. w. Sie können es eindeutig oder mehrdeutig sein, je nachdem sie auf eine oder auf mehrere verschiedene Weisen als affin betrachtet werden können. So ist jedes Paar Tetraeder vierundzwanzigdeutig affin, da man die vier Flächen A, B, C, D des einen und die vier Flächen A', B', C', D' des andern paarweise in beliebiger Combination als miteinander homolog betrachten kann. Jedes Paar Ellipsoide kann auf unendlich viele Weisen als affin angesehen werden. Zwei unregelmässige Pentaeder dagegen sind, wenn affin, dann meistens eindeutig affin. Denkt man sich zwei affine Figuren nach der einen oder andern Auffassungsweise als Theile affiner Systeme,

so kann man von homologen Punkten, Linien, Flächen in beiden Figuren sprechen. Zwei Punkte in zwei Tetraedern können also gemäss einer der 24 Betrachtungsweisen homolog sein. In jedem Paar Tetraeder ist nur ein einziges Punktepaar, nämlich die Schwerpunkte, in allen 24 Fällen homolog. Diese Betrachtungen führen zu Untersuchungen, die jetzt nicht zu unserem Zwecke gehören. Wir ziehen es vor, jetzt zu unserer ersten Anwendung überzugehen.

4. Man denke sich zwei beliebige Figuren A und B, z. B. ein Tetraeder und eine Kugel. Mit A_p, A_q, A_r, allgemein $A_n \dots$, bezeichnen wir allerlei verschiedene Figuren, die miteinander und mit A affin sind, ebenso mit B_p, B_q, $B_r, \dots$, allgemein B_n . ., verschiedene Figuren affin mit B. Wählen wir dann zwei Figuren A_p und A_r, beide affin mit A und also auch einander affin, übrigens aber willkürlich, dann kann A_r aus A_p nach einer oder mehreren Betrachtungsweisen durch Affinität abgeleitet werden. Denkt man sich nun Figuren affin mit B um A_p und A_r beschrieben, so stimmt mit jeder Figur B_n um A_p eine andere um A_r beschriebene überein, und umgekehrt. Ihre Volumina sind dabei proportional. Die kleinste Figur oder die kleinsten Figuren B_n um A_p sind also homolog mit der kleinsten Figur oder die kleinsten Figuren B_n um A_r; daher:

g) D a s V e r h ä l t n i s s z w i s c h e n b e l i e b i g e n m i t A a f f i n e n F i g u r e n u n d d e n k l e i n s t e n u m g e s c h r i e b e n e n, d i e m i t B a f f i n s i n d, i s t e i n e c o n s t a n t e G r ö s s e k.

h) B e i z w e i m i t A a f f i n e n F i g u r e n s i n d d i e k l e i n s t e n F i g u r e n B_n u m d i e e i n e h o m o l o g m i t d e n k l e i n s t e n F i g u r e n B_n u m d i e a n d e r e.

Ganz dieselben Regeln gelten für die grössten eingeschriebenen Figuren B_n.

5. Wenn nun ferner k die soeben genannte constante Grösse bezeichnet, so wird eine Figur B_n um A_n niemals k l e i n e r sein können als $k A_n$. Darum wird auch irgend eine Figur A_n in B_n nie g r ö s s e r sein können wie $\frac{1}{k} B_n$. Betrachten wir nun die k l e i n s t e Figur B_r um A_r, dann ist

$$B_r = k A_r$$

und also auch

$$A_r = \frac{1}{k} B_r.$$

Daher muss ebenso, wie B_r die k l e i n s t e Figur um A_r ist, auch A_r die g r ö s s t e in B_r sein oder zu den grössten gehören.

i) G e h ö r t v o n z w e i u m- u n d e i n g e s c h r i e b e n e n F i g u r e n d i e e r s t e z u d e n k l e i n s t e n u m g e s c h r i e b e n e n v o n a l l i h r e n

Affinen, so gehört auch die letzte zu den grössten eingeschriebenen von all ihren Affinen, und umgekehrt.

Das grösste Ellipsoid z. B. in einem Tetraeder wird so gelegen sein, dass das Tetraeder zu den kleinsten gehört, die um das Ellipsoid beschrieben werden können. Da nun so ein Tetraeder mit einem der kleinsten um die Kugel homolog ist, reducirt sich die Aufgabe, in ein Tetraeder das grösste Ellipsoid zu beschreiben, auf die reciproke Aufgabe, um eine Kugel das kleinste Tetraeder zu legen.

Der gefundene Lehrsatz findet ebenso gut Anwendung auf alle Fragen, betreffend grösste oder kleinste Tetraeder, dreiseitige Prismen, Parallelepipede, Ellipsoide, elliptische Kegel oder Cylinder, halbe Ellipsodie, um oder in einander beschrieben. Bei allen diesen Figuren gilt der Satz, dass, wenn die eine eine Maximaleingeschriebene ist, die andere Umgeschriebene einen Minimalwerth hat, und umgekehrt.

6. Ferner gilt der gegebene Beweis ebenso gut für den etwas allgemeineren Lehrsatz:

k) Steht irgend eine Figur A_p zu einer andern Figur B_p in einer Beziehung, welche durch affine Projection nicht geändert wird, und ist A_p die grösste von allen Figuren A_n, die in dieser Beziehung denkbar sind, so ist B_p die kleinste aller Figuren B_n, die mit A_p in gleichartige Beziehung gebracht werden können wie B_p.

Gilt es z. B. das kleinste Ellipsoid zu finden, welches durch eine der Ecken eines Tetraeders geht, das Tetraeder einschliesst und die gegenüberstehende Seitenfläche zur Mittelfläche hat, so muss das Tetraeder zu den grössten gehören, welche so in das Ellipsoid beschrieben werden können, dass ein Eckpunkt in die Oberfläche fällt und die gegenüberliegende Seitenfläche durch dessen Mittelpunkt geht. Es muss also die Tangentenfläche des Ellipsoids im Eckpunkte des Tetraeders der Grundfläche des Tetraeders parallel sein. Oder gilt es das grösste Ellipsoid zu bestimmen, welches die sechs Kanten eines Tetraeders (und nicht deren Verlängerungen) berührt, so wird dieses Tetraeder das kleinste Tetraeder sein müssen, dessen Kanten selbst (und nicht ihre Verlängerungen) Tangenten des Ellipsoids sind.

7. Es ist unsere Absicht wieder nicht, die Fragen, zu deren Lösung diese Lehrsätze führen, weiter zu erörtern, denn wir würden meistens nur zu solchen besonderen Resultaten gelangen, die sich auch auf anderem Wege ableiten lassen; wir bezweifeln aber, ob es möglich sein wird, auf anderem Wege die genannten Beziehungen zwischen ein- und umgeschriebenen Figuren von so allgemeinem Gesichtspunkte aus zu betrachten. Nur wollen wir noch folgenden Satz als eine unmittelbare Folge des gefundenen aussprechen:

e) Wenn eine geschlossene Oberfläche einem Polyeder dergestalt einbeschrieben ist, dass die Polyederflächen in ihren Schwerpunkten von der Oberfläche berührt werden, so ist diese Oberfläche unter allen eingeschriebenen affinen Oberflächen ein Maximum.

Selbstverständlich hat dieser Satz nur Bedeutung, wenn die Anzahl der Flächen des Polyeders das Einschreiben mehrerer Affinen erlaubt. Als besonderer Fall ergiebt sich sofort: Wenn sich einem Polyeder ein Ellipsoid dergestalt einschreiben lässt, dass die Flächen des Polyeders in ihren Schwerpunkten berührt werden, so ist das Ellipsoid unter allen eingeschriebenen ein Maximum, und dieser Satz genügt vollkommen, um die Position des grössten, dem Tetraeder, resp. einem dreiseitigen Prisma oder einem Parallelepiped eingeschriebenen Ellipsoids oder des elliptischen Cylinders und des elliptischen Kegels zu bestimmen. Ein analoger Satz, obwohl nicht so einfach, gilt für umgeschriebene affine Maximaloberflächen.

8. Gehen wir nun zu einer zweiten Anwendung über. Diese bezieht sich auf die Trägheits- oder mehr speciell die Centralellipsoide einiger einfachen Körper. Die Eigenschaften dieser Ellipsoide leitet man gewöhnlich auf analytischem Wege ab, doch wird es nicht schwierig sein, sie auch auf rein geometrischem Wege zu finden. Das würde hier aber wieder zu weitläufig sein und wir scheuen uns daher nicht, von den vorhin entwickelten Eigenschaften Gebrauch zu machen.

Es sind die drei Hauptaxen des Trägheitsellipsoids eines Punktes O zugleich die Axen, um welche die Centrifugalkräfte einander das Gleichgewicht halten oder eine einzige Resultante besitzen. Nehmen wir diese Axen zu Coordinatenaxen und nennen ZZ_1, ZZ_2, ZZ_3 die Coordinaten eines Punktes Z, so haben wir

$$\Sigma ZZ_1 . ZZ_2 \Delta V = 0, \quad \Sigma ZZ_2 . ZZ_3 \Delta V = 0, \quad \Sigma ZZ_3 . ZZ_1 \Delta V = 0;$$

diese Bedingungen reichen hin, um die Identität der Coordinatenaxen und der Axen des Trägheitsellipsoids zu constatiren.

9. Setzen wir zunächst den sehr besondern Fall, dass dieses rechtwinklige Coordinatensystem mit einem ebenfalls rechtwinkligen Coordinatensystem in einer andern affinen Figur homolog sei, so gilt für jeden Punkt Z' dieser Figur

$$Z'Z'_1 = k_1 . ZZ_1, \quad Z'Z'_2 = k_2 . ZZ_2, \quad Z'Z'_3 = k_3 . ZZ_3,$$
$$\Delta V' = k_1 k_2 k_3 \Delta V$$

und daher

$$\Sigma Z'Z'_1 . Z'Z'_2 \Delta V' = k_1^2 k_2^2 k_3 \Sigma ZZ_1 . ZZ_2 \Delta V = 0 \text{ u. s. w.},$$

so dass die homologen Coordinatenaxen nun auch in affinen Körperaxen des Trägheitsellipsoids des Punktes O' sind, dessen Axen also in diesem besondern Falle mit den Axen desjenigen

Ellipsoids zusammenfallen, welches in der zweiten Figur homolog ist mit dem Centralellipsoid der ersten.

10. Was übrigens das Verhältniss der Axen dieser verschiedenen Ellipsoide betrifft, so verhalten sich die des Trägheitsellipsoids des ersten Körpers wie

I) $$\frac{1}{\sqrt{B+C}}:\frac{1}{\sqrt{C+A}}:\frac{1}{\sqrt{A+B}},$$

worin

$$A=\Sigma ZZ_1^2\Delta V,\quad B'=\Sigma ZZ_2^2\Delta V,\quad C=\Sigma ZZ_3^2\Delta V;$$

die Axen des Trägheitsellipsoids des zweiten affinen Körpers verhalten sich daher wie

II) $$\frac{1}{\sqrt{k_2^2 B+k_3^2 B}}:\frac{1}{\sqrt{k_3^2 C+k_1^2 A}}:\frac{1}{\sqrt{k_1^2 A+k_2^2 B}},$$

dagegen die des Ellipsoids in dem zweiten System, welches homolog ist mit dem Trägheitsellipsoid des ersten Systems, wie

III) $$\frac{k_1}{\sqrt{B+C}}:\frac{k_2}{\sqrt{C+A}}:\frac{k_3}{\sqrt{A+B}}.$$

Das mit dem ersten Trägheitsellipsoid homologe Ellipsoid ist also dem zweiten Trägheitsellipsoid nicht ähnlich.

11. Der in 9 besprochene Satz gilt nur für den Fall, dass die Hauptaxen des ersten Körpers für den Punkt O mit den orthogonalen Affinitätsaxen homolog sind. Er wird nur dann eine allgemeinere Bedeutung erhalten, wenn das Trägheitsellipsoid des ersten Körpers in eine Kugel übergeht. Dann lassen sich nämlich in der Kugel stets drei senkrechte Durchmesser angeben, welche mit drei senkrechten Geraden (den orthogonalen Affinitätsaxen) der andern Figur übereinstimmen. Diese Durchmesser der Kugel sind dann von selbst Hauptaxen des ersten Körpers, die homologen Axen sind also auch Hauptträgheitsaxen im zweiten Körper und somit Hauptaxen des Trägheitsellipsoids im homologen Punkte des zweiten Körpers, zugleich aber Hauptaxen des Ellipsoids, welches mit der Trägheitskugel homolog ist; dann fallen also die Axen des mit der Kugel homologen Ellipsoids mit denen des Trägheitsellipsoids im homologen Punkte des zweiten Körpers zusammen.

f) Betrachtet man irgend einen Körper als affine Projection eines andern, welcher in einem gegebenen Punkte eine Trägheitskugel besitzt, so werden in diesem Körper die Axen des Trägheitsellipsoids und die Axen des mit der Trägheitskugel homologen Ellipsoids zusammenfallen; dieses Ellipsoid und das Trägheitsellipsoid gehen [wie es die Verhältnisse II) und III), wo jetzt $A=B=C$, zeigen] gleichzeitig in Rotationskörper über.

So ist z. B. jedes Tetraeder affin mit dem regelmässigen Tetraeder; es lässt sich aber leicht auf rein geometrischem Wege zeigen, dass letzteres eine Centralkugel besitzt, welche natürlich mit der eingeschriebenen Kugel homothetisch ist. **Das Centralellipsoid für das Tetraeder hat daher dieselben Hauptaxen, wie die affine Projection jener Trägheitskugel oder jener eingeschriebenen Kugel, d. h. wie das grösste eingeschriebene Ellipsoid.**

In jedem Tetraeder sind die Axen des Centralellipsoids mit den Axen des grössten eingeschriebenen Ellipsoids gleichgerichtet; beide Ellipsoide werden gleichzeitig zu Rotationskörpern.

Ganz derselbe Lehrsatz gilt für Parallelepipede. Für dreiseitige Prismen, elliptische Cylinder oder Kegel, halbe Ellipsoide u. s. w. muss vorher ihre Axe nach einem gegebenen Verhältnisse, welches sich leicht bestimmen lässt (für dreiseitige Prismen $\sqrt{6}:2$, für elliptische Cylinder $\sqrt{3}:1$) verkleinert werden. Das grösste Ellipsoid des neuen Körpers wird dann stets gleiche Axenrichtungen mit dem Centralellipsoid des Körpers mit ungeänderten Axen besitzen. Es ist übrigens das mit der Centralkugel affine Ellipsoid identisch mit dem Ebenen-Trägheitsellipsoid, welches Culmann in seiner graphischen Statik bespricht.

12 Betrachten wir zum Schluss noch einmal das Verhältniss II), so sehen wir, dass sich die Verhältnisszahlen durch zweckmässige Wahl der Coefficienten k_1, k_2, k_3 einander gleich machen lassen. Dazu wird nur gefordert

$$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

g) **Es lässt sich zu jedem Körper für jeden Punkt O eine ganze Reihe affiner, untereinander ähnlicher Körper construiren, die im homologen Punkte O' eine Trägheitskuge besitzen.**

13. Setzen wir für die Trägheitskugel eines affinen Körpers

$$A = B = C = M,$$

so finden wir für das Axenverhältniss des Trägheitsellipsoids des ursprünglichen Körpers

$$\frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} : \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + k_1^2}} : \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad \text{[vergl. Verh. II)]}$$

und für das Axenverhältniss des mit der Centralkugel homologen Ellipsoids

$$k_1 : k_2 : k_3.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

h) **Verbindet man die drei Axenendpunkte des mit der Trägheitskugel affinen Ellipsoids, so verhalten sich die Höhen des entstandenen Dreiecks wie die Axen des Trägheitsellipsoids.**

Wo sich also, wie bei dem Centralellipsoid des Tetraeders, das mit der Centralkugel affine Ellipsoid leichter als das Trägheitsellipsoid bestimmen lässt, kann es von Nutzen sein, zu wissen, wie die Gestalten beider Ellipsoide auf einfache Weise auseinander abgeleitet werden können.

---

14. Wir wollen noch zeigen, wie sich die gefundenen Sätze auf sehr allgemeine Probleme anwenden lassen.

Es sei gegeben ein beliebiger Körper A, einer seiner ebenen Durchschnitte α und ein beliebiger Punkt P; es besteht dann eine unendliche Zahl affiner Figuren, die den Durchschnitt α entsprechend gemein und als Trägheitsellipsoide ihrer mit P homologen Punkte Rotationskörper besitzen. Man fragt jetzt nach dem geometrischen Orte dieser mit P homologen Punkte.

Die Antwort auf diese Frage wird die Lösung vieler mehr speciellen Probleme enthalten. Es kann nämlich A ein Ellipsoid sein, das, wie bekannt, zugleich mit seinem Trägheitsellipsoid in einen Rotationskörper übergeht; es ist dann die Frage gelöst nach dem geometrischen Orte des Mittelpunktes der Rotationsellipsoide, die einen ebenen Durchschnitt entsprechend gemein haben. Es sind weiter alle Cylinder und Kegel affin, sobald sie einen congruenten ebenen Durchschnitt besitzen, der mit ihrer Grundfläche parallel ist. Man wird also auch den geometrischen Ort des Schwerpunktes aller Kegel und Cylinder gefunden haben die ihre Grundfläche entsprechend gemein und jede für sich ein Central-Rotationsellipsoid besitzen, welches Problem sich auf verschiedene Weise wieder mehr verallgemeinern lässt, ohne aus der betreffenden Lösung herauszukommen.

15. Zur Lösung des allgemeinen Problems denke man sich einen mit A affinen Körper A', der im Punkte P', homolog mit P, eine Trägheitskugel R' besitze. Eine dieser Kugel R' concentrische Kugel R'_1 tangire die Ebene des Durchschnittes α' homolog mit α in einem Punkte M', und es werde in der Ebene α' um diesen Punkt mit dem Radius $P'M'$ ein Kreis beschrieben, dem im Durchschnitte α eine Ellipse E homolog entsprechen möge. Es sei jetzt A'' einer der angedeuteten affinen Körper, welche den Durchschnitt α entsprechend gemein und welche ein Trägheits-Rotationsellipsoid im Punkte P'' homolog mit P besitzen. Es wird aber dieses Trägheitsellipsoid nur zugleich mit der affinen Projection R''_1 der Kugel R'_1 zum Rotationsellipsoid. Legen wir durch den Mittelpunkt P'' von R''_1 eine Ebene parallel zur Ebene α, dann wird diese das Ellipsoid R''_1 in einer Ellipse E_1 congruent und gleichgerichtet mit E schneiden. Der conjugirte Durchmesser dieses elliptischen Durch-

schnittes kann nichts Anderes sein, als die Linie MP'' (M Mittelpunkt der Ellipse E), weil das Ellipsoid R''_1 die Ebene α in M berührt. Ein solcher conjugirter Durchmesser darf sich aber nach einem bekannten Satze im Rotationsellipsoid nur auf die kleine oder grosse Axe des elliptischen Durchschnittes projiciren. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz: Der geometrische Ort der Punkte P' muss in einer der beiden auf α senkrechten Ebenen liegen, welche durch die grosse und kleine Axe der Ellipse E im Durchschnitte α gehen.

Setzen wir zuerst den Fall, dass P'' in der durch die grösste Axe gehenden Ebene liegt. Nennen wir ϱ den Abstand MP', φ den Winkel jener Verbindungslinie mit der Ebene α, a und b die Axen der congruenten Ellipsen E und E_1, dann ist b also die kleine Axe des durch den Punkt P'' parallel mit α gelegten Durchschnittes des Ellipsoids R''_1 und daher auch der Radius des grössten Kreisschnittes dieses Rotationsellipsoids. Der Durchschnitt dieses Ellipsoids mit einer Ebene, welche durch die grossen Axen der Ellipse E und E_1, sowie durch den Punkt P' geht, ist daher eine Ellipse, welche b zur kleinen Axe, eine gewisse Linie p zur grossen Axe und ferner die Linien a und ϱ zu conjugirten Durchmessern hat, die sich unter dem Winkel φ schneiden. So erhalten wir

$$pb = a\varrho \sin\varphi, \quad p^2 + b^2 = a^2 + \varrho^2$$

oder durch Elimination von p, indem wir setzen

$$\varrho \cos\varphi = x, \quad p \sin\varphi = y,$$

die Beziehung

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1;$$

daher bewegt sich der Punkt P' in einer Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren imaginäre Axe die halbe lineare Excentricität, deren reelle Axe der kleinen Axe der Ellipse E gleich ist und die sich also sehr einfach bestimmen lässt. Ebenso kann sich der Punkt P'' in der Ebene, welche durch die kleine Axe senkrecht auf die Ellipse E gelegt wird, in einer Ellipse $\mathfrak{E}$ bewegen, welche diese kleine Axe der Richtung nach zu einer ihrer Axen hat. Ihre auf E senkrechte Axe ist der halben kleinen Axe, die andere der halben Excentricität der Ellipse E gleich.

Das Problem ist hiermit vollständig gelöst.

16. Von geehrter Seite wurde mir die Bemerkung gemacht, dass diese Lösung in interessanter Beziehung stehe zu einem von Herrn J. Binet (*Journal de l'Ecole polytechnique XIV. Cah.*, *p.* 41) entwickelten Satze. Man kann nämlich in der Ebene α' um den Mittelpunkt M' einen dritten Kreis E'_2 affin mit einer Ellipse E_2 beschreiben, der die Eigenschaft hat, im Punkte P' eine mit der des Körpers A' concentrische Trägheitskugel zu besitzen. Es genügt dazu, seinen Radius $= 2M'P'$ zu

nehmen. Werden jetzt Körper und Kreis zusammen affin projicirt, so lässt sich sehr leicht beweisen, dass auch diese Projectionen im Punkte P'' homolog mit P homothetische Trägheitsellipsoide besitzen. Weil aber alle früher betrachteten Körper A'' den Durchschnitt α entsprechend gemein haben, so ist E_2 für diese Alle die affine Projection des Kreises E'_2, und die Trägheitsellipsoide dieser Körper in den Punkten P'' müssen den entsprechenden Trägheitsellipsoiden der Ellipse E_2 homothetisch sein. Es ist also die Ellipse E und die Hyperbel H der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide der Ellipse E_2, und es ergiebt sich daraus folgender Satz:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide der Ellipse ($2a$, $2b$) besteht aus einer Hyperbel ($2\sqrt{b^2-a^2}$, $2b$) und einer Ellipse ($2\sqrt{a^2-b^2}$, $2a$); die zweiten Axen dieser Hyperbel und dieser Ellipse stehen senkrecht auf der Ebene der gegebenen Ellipse und gehen durch ihren Mittelpunkt; die ersten Axen der Hyperbel und Ellipse fallen resp. mit der ersten und zweiten Axe der gegebenen Ellipse zusammen.

Weil man aber statt des Kreises E'_2 eine unendliche Zahl ebener Figuren hätte wählen können, welchen in der Ebene α andere affine Figuren correspondiren, so muss sich dieser Satz allgemeiner aussprechen lassen. Es ist ja möglich, die ebene Figur in der Ebene α ganz beliebig zu nehmen, wenn man sich eine zweckmässige Wahl des Körpers A' vorbehält; weil aber der Beweis des Satzes von der Gestalt dieses Körpers A' unabhängig ist, so muss ganz allgemein der geometrische Ort der Mittelpunkte der Trägheits-Rotationsellipsoide einer ebenen Figur aus einer Hyperbel und einer Ellipse nach Analogie des vorigen Satzes bestehen, indem sich die Ellipse, die man statt der Ellipse ($2a$, $2b$) nehmen müsste, leicht bestimmen lassen würde.

Es gilt dieser Satz nach den angeführten Untersuchungen auch für Körper, was sich zwar synthetisch nachweisen lässt, uns aber zu weit führen würde. Umgekehrt könnte man aus diesem Satze die Lösung unseres Problems entwickeln.

Obwohl es uns möglich wäre, noch mehr Beispiele einfach gelöster Probleme beizubringen, so werden die gewählten doch schon die Fruchtbarkeit der Methode der affinen Verwandtschaft darthun.

III.

Ueber die Klangfiguren einer quadratischen Platte von Flüssigkeit und des cubischen Volumens einer Luftmasse.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

(Hierzu Taf. I, Fig. 1—5.)

In dem 134. Bande, S. 107–117, und dem 141. Bande, S. 375—393, von Poggendorff's Annalen ist von mir eine eingehende experimentelle Untersuchung über den Schwingungszustand der Faraday'schen Klangfiguren (Kräuselungen), sowie eine Reihe von Messungen über die Beziehungen zwischen der Schwingungsdauer und der Wellenbreite innerhalb der Klangfiguren von Platten tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten mitgetheilt worden, worüber in den Berl. Ber. über die Fortschritte der Physik im J. 1868, S. 199—202, und im J. 1870, S. 259 bis 264, von Prof. Roeber berichtet ist.

Von der a. a. O. aufgestellten Ansicht über den Schwingungszustand der Flüssigkeitstheilchen, dass nämlich die Kräuselungen durch zwei sich einander senkrecht durchsetzende stehende Wellen entstehen, möge es mir gestattet sein, im Folgenden auch eine theoretische Erklärung des Phänomens durch die Discussion der Formeln für die Wellenbewegung zu geben. Die Deductionen lassen sich sowohl auf die Rippungen der in den auf einer Glasplatte schwingenden Flüssigkeitsschichten suspendirten Kreideschlempe, sowie auf die zuerst von Faraday (*Phil. Trans. f.* 1831, *p. II*, *pag.* 299, und Pogg. Ann. Bd. XXVI, S. 248, *prop.* 125) beobachteten, kürzlich von Prof. Kundt (Pogg. Ann. Bd. CXXXVII, 456—470, Fig. 6) beschriebenen Klangfiguren von eingeschlossenen quadratischen Luftplatten, als auch auf einige specielle Fälle von Chladnischen Klangfiguren auf quadratischen Platten von Glas oder Metall übertragen.

Angenommen, es durchsetzen sich gegenseitig unter einem rechten Winkel zwei stehende Flüssigkeitswellen von gleicher Breite und Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Richtungen AA' und CC' (Fig. 1, Taf. I). Die Distanz je zweier Knotenlinien AA' ist gleich einer halben Wellenbreite und der Abstand der äussersten Knotenlinien vom Rande der Platte gleich einer viertel Wellenbreite, indem wir analog den Schwingungszuständen stehender Flüssigkeitswellen in tiefen Gefässen diejenigen Stellen mit dem Namen „Knoten" bezeichnen, in welchen sich Wellenberg des einen Zuges und Wellenthal des entgegenkommenden Zuges vereinigen. Für eine begrenzte Flüssigkeitsschicht ist nun bei einer einfachen stehenden Welle der reflectirende Rand eine Stelle der grössten verticalen Deviation (Berg und Thal), wie solches in Fig. 2a und b dargestellt ist. Wegen der Incompressibilität des Flüssigen und wegen des Umstandes, dass die Flüssigkeit durch die Glastafel daran gehindert wird, nach unten auszuweichen, sind nun die obenerwähnten Knotenlinien AA' oder KK' Stellen der stärksten horizontalen Bewegung, also der Mechanismus der Bewegung der Theilchen, wie er sich im Laufe einer ganzen Schwingung vollzieht, der Darstellung in Fig. 2a und b entsprechend.

Bei Luftplatten, welche von unbeweglichen Wandungen eingeschlossen sind, ist eine transversale Deviation der schwingenden Molecule unmöglich; es bilden sich deshalb wegen der grossen Elasticität der Luft Longitudinalwellen. Dieselben Knotenlinien AA' oder KK' sind hier also ebenfalls Stellen der stärksten horizontalen Bewegung, also der Mechanismus der Bewegung der Molecule ist der Darstellung in Fig. 3 entsprechend. Unter „Knotenlinien" KK' sollen hier wiederum analog den stehenden Flüssigkeitswellen diejenigen Stellen verstanden werden, in denen sich die Expansionen E und die Compressionen C (Verdünnungen und Verdichtungen) begegnen. Sie sind also nicht zu verwechseln mit den Knotenlinien, welche man bei stehenden Longitudinalwellen gewöhnlich darunter begreift, nämlich die Stellen der Maxima der Verdichtungen und Verdünnungen. Zu diesen sind bei Luftsäulen ebenfalls die Ränder der Wandungen zu zählen. In beiden Schwingungszuständen nehmen wir also der Einfachheit der Betrachtungen wegen dieselben Knotenlinien an und die Stellen der stärksten Verdichtungen und Verdünnungen entsprechen den Stellen der Wellenberge und Wellenthäler der schwingenden flüssigen Platten. Wir gehen dabei von der gerechtfertigten Annahme aus, dass bei ganz geschlossenen Luftsäulen der tiefste Ton gleich einer halben Wellenbreite ist, also die beiden Enden derselben abwechselnd im Zustande der Verdichtung und Verdünnung sich befinden. Ist demnach die Länge der schwingenden flüssigen oder luftförmigen Säule gleich n Wellenbreiten, so bilden sich abwechselnd bei einer Flüssigkeit n Berge, $n+1$ Thäler und $n+1$ Berge,

n Thäler, bei der Luft abwechselnd ebensoviele Verdichtungen und Verdünnungen.

Wenn nun eine einfache stehende Welle AA' (Fig. 1) von einem andern stehenden Wellenzuge CC' derselben Wellenbreite durchsetzt wird (dieses ist immer der Fall, wenn die Schwingungszahl oder Tonhöhe dieselbe ist), so bilden sich aus den in der schwingenden Substanz suspendirten schweren Theilchen Klangfiguren an denjenigen Stellen vorzugsweise, wo die parallel der Wandung oder Glastafel gerichtete Bewegung der Molecule sich im Maximum, Berg und Thal oder Verdichtung und Verdünnung sich im Minimum befinden. Die Klangfiguren oder Rippungen sind aus parallelen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt, welche überall senkrecht gegen die horizontale Bewegung gerichtet sind, also im eigentlichen Sinne Normalcurven. Ihre Gleichung lässt sich also genau bestimmen, sobald für jeden einzelnen Punkt der Platte die Resultante der Bewegung der Richtung und Grösse nach bekannt ist. Bei den Luftschwingungen liegen sie voneinander getrennt in nahezu gleichen Abständen l. Bei einer gleichen Dicke der Schicht ist nahezu $l^2 = m\,T$. Diese Intervalle rühren von den verticalen Schwingungen her, wodurch die Molecule veranlasst werden, in zackigen Bahnen zu schwingen. Die Rippungen fallen aber keineswegs mit den Knotenlinien AA' und CC' zusammen, sondern dies nur in den speciellen Fällen, wo die Amplitude der einen oder der andern Wellenbewegung gleich Null ist. Sind die beiden Amplituden gleich, so fallen die Rippungen der Maximalbewegung zusammen mit der Diagonalen der Quadrate E der Knotenlinien; die übrigen bilden geschlossene concentrische Curven, welche in der Nähe des Centrums der Felder B und T in Kreise übergehen. Sind die Amplituden verschieden, so bilden die Rippungen theils wellenförmige Curven (Figg. 4 und 5), welche in der Nähe des Centrums der Felder E in Hyperbeln übergehen, theils geschlossene concentrische Curven, welche in der Nähe des Centrums der Felder B und T in Ellipsen übergehen. Diese Sätze beweisen die von mir bisher angestellten Versuche auf's Deutlichste und sie werden durch die im Folgenden angestellten mathematischen Betrachtungen vollkommen bestätigt.

In Fig. 1 ist nun ein solches System von drei Wellenbreiten dargestellt; dasselbe enthält vier einfache Wellenzüge, T bezeichnet die Thäler (Verdünnungen), B die Berge (Verdichtungen), TB die Quadrate der Knotenlinien, in welchen Berg und Thal zusammentreffen. In Figg. 4 und 5 gelten dieselben Bezeichnungen und E ist an die Stelle von TB gesetzt. Die Platte E entspricht genau dem Schwingungszustande einer quadratischen Glasplatte, welche die Chladni'sche Klangfigur zeigt, wenn sie den zweiten Ton angiebt. Sie zeigt zwei gekreuzte Diagonalen, concentrisch von gleichseitigen Hyperbeln eingehüllt, wenn die Amplituden gleich sind; sie zeigt zwei hyperbelähnliche Curven, concentrisch von ungleichseitigen Hyperbeln umgeben, wenn die Amplituden verschieden sind. Die Fläche E ist eine Interferenzfläche und auf ihr bilden sich die Klangfiguren am deutlichsten aus. Am schwächsten bilden sich die Rippungen aus auf denjenigen Flächen, wo keine Interferenzen auftreten und sich die Amplituden summiren, also auf den Flächen B und T. Die Hauptrippe verbindet diejenigen Punkte, in welchen sich die parallel der Tafel gerichtete Bewegung der Molecule im Maximum befindet. Sie ist wellenförmig und verläuft durch sämmtliche Knotenpunkte der Knotenlinie AA', wenn die Amplitude a_1 der in der Richtung AA' laufenden Welle die kleinere ist; ist dagegen die Amplitude a_1 grösser als die der in der Richtung CC' laufenden Welle, so verläuft die Hauptrippe durch sämmtliche Knotenpunkte der Knotenlinie CC'. Bei den Faraday'schen Klangfiguren sind die Amplituden abhängig von den Krümmungshalbmessern der Hauptnormalschnitte der schwingenden Glastafel. Die Wellen laufen nämlich den Hauptnormalschnitten der gebogenen Glastafel parallel. Ist ϱ_1 der Krümmungshalbmesser desjenigen Hauptnormalschnittes, welcher der Knotenlinie AA' parallel ist, ϱ_2 der Krümmungshalbmesser desjenigen Hauptnormalschnittes, welcher der Knotenlinie CC' parallel ist, so ist $a_2 > a$, wenn $\varrho_2 < \varrho_1$ ist; wenn ϱ_2 gleich ∞ ist, so ist a_1 gleich Null; wenn $\varrho_2 = \varrho_1$ ist, so ist auch $a_2 = a_1$. (Vergl. Pogg. Ann. Bd. 134, die Figurentafel.)

Wir betrachten hier zunächst die Bewegungszustände einer vibrirenden Flüssigkeitsschicht; die der Luftplatten sind ihnen ganz analog. Nur ist die Breite bei den Wellen auf Flüssigkeiten verschieden und variirt zwischen den Tönen D und c^6 zwischen 28 Cm. und 200 Cm.; ausserdem ist die Wellenbreite viel kleiner, sie beträgt für den Ton c^3 nur 1 Mm., wogegen die Wellenlänge desselben Tones in atmosphärischer Luft nur 1 Fuss beträgt. Um die Bewegung in einem beliebigen Punkte P (Fig. 5) kennen zu lernen, so seien λ die Wellenbreite, $AP = u$, $CP = v$ die Coordinaten des Punktes P, a_1 die Amplitude der von A und A' ausgehenden Wellen, a_2 die Amplitude der von C und C' ausgehenden Wellen. Die Deviationen infolge der beiden stehenden Wellen, wenn die einzelnen Wellen in dem Abstande $d = n\lambda$ ihre Bewegung gleichzeitig in demselben Sinne beginnen, sind

$$\eta_1 = 2a_1 \cos\pi \frac{2u}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\eta_2 = 2a_2 \cos\pi \frac{2v}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bei Flüssigkeiten sind die Wellenbreiten beider Systeme stets einander gleich, da nahezu $\lambda^2 = mT$ ist. Die gesammte transversale Deviation ist demnach

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \cos\pi \frac{2u}{\lambda} + a_2 \cos\pi \frac{2v}{\lambda}\right).$$

Für $a_2 = a_1$ ist

$$\eta = 4 a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \pi \frac{u+v}{\lambda} \cos \pi \frac{u-v}{\lambda}.$$

Durch diese Gleichungen ist der Bewegungszustand der Flüssigkeit in jedem Punkte u, v vollständig bestimmt. Um die Gleichung der Curven genauer übersehen zu können, wählen wir den Punkt O, also den Durchschnittspunkt zweier Knotenlinien zum Coordinatenanfangspunkte, und setzen demgemäss

$$v = \frac{4n+1}{4}\lambda - y, \quad u = \tfrac{1}{4}\lambda + x.$$

Darnach wird nun

$$\eta = 2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(- a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} + a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda}\right).$$

Dies ist die Gleichung aller Rippungen für den angenommenen Fall. Für die stärkste Rippung ist η gleich Null und

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \left\{\frac{a_1}{a_2} \sin \pi \frac{2x}{\lambda}\right\}.$$

Die Curve ist wellenförmig und $y = 0$ für $x = \frac{n}{2}\lambda$; ferner ist y ein Maximum für $x = \frac{4n+1}{4}\lambda$, ein Maximum für $x = \frac{4n+3}{4}\lambda$; der zugehörige Werth von y ist

$$y_1 = \pm \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_1}{a_2}.$$

Ist $a_2 = a_1$, so ist $y = \pm \frac{1}{4}\lambda$; allgemein $y = x$ (Gleichung der Diagonale). Ist a_2 gleich Null, so muss auch x Null werden (Gleichung der Knotenlinie CC'). Ist dagegen a_1 gleich Null, so muss es auch y sein (Gleichung der Knotenlinie AA').

Für die Klangfiguren der eingeschlossenen Luftmassen sind die Formeln ganz dieselben; sie lassen sich aus den Resultanten der componirenden Kräfte der Bewegung ableiten. Die Componenten der Longitudinalschwingungen sind für gleiche Wellenbreiten

$$\xi = 2 a_1 \sin \pi \frac{2u}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\eta = 2 a_2 \sin \pi \frac{2v}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bei schwingenden Luftsäulen sind die Wellenbreiten beider Systeme nicht immer gleich, sondern abhängig von der Länge der Säulen.

Substituirt man wiederum $u = \frac{1}{4}\lambda + x$, $v = \frac{4n+1}{4}\lambda - y$, so erhält man, indem das Vorzeichen in der Richtung von η sich umkehrt:

$$\xi = 2 a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$-\eta = 2 a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Um die Richtung und Grösse der resultirenden Deviation zu erhalten, so ist die Grösse bestimmt durch $J = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, die Richtung durch

$$\tang \tau = \frac{\xi}{-\eta} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Da die Richtung der Rippungen senkrecht gegen die Richtung der Bewegung der Massentheilchen ist, so wird $\frac{\xi}{-y} = \frac{\partial y}{\partial x}$ zu setzen sein, mithin wird

$$\xi \partial x + \eta \partial y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} + const.$$

Diese Curvenschaaren sind sogenannte Gleichgewichtsfiguren und schliessen lauter Luftschichten constanter Dichtigkeit ein.

Nun ist J ein Maximum, wenn $t = \frac{1}{4} T$ und zugleich x und y gleich Null sind. In diesem Falle ist die Constante auch Null. Wir erhalten hier die Gleichung der Hauptrippe; sie ist, wie oben

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \arc \sin \left\{ \frac{a_1}{a_2} \sin \pi \frac{2x}{\lambda} \right\}.$$

Untersuchen wir die Gleichung einer Rippung, welche eine Knotenlinie CC' (Fig. 4) tangirt. Für $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = \frac{1}{4}\lambda$ ist $\xi = -2a_1$, $\eta = 0$ und die Constante gleich $-a_2$. Folglich ist die Gleichung der Rippung

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} - a_2.$$

Für $x_1 = \frac{3}{4}\lambda$ ist $y_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arc \sin \frac{a_2 - a_1}{a_2}$. Der Werth der halben Nebenaxe ist also $\frac{1}{4}\lambda - y_1$, der Werth der Hauptaxe gleich $\frac{1}{2}\lambda$. Ist $a_2 = a_1$, so sind die beiden Axen gleich und die Rippungen sind nahezu kreisförmig innerhalb des Feldes T und B. Ist $a_2 > a_1$, so ist die Nebenaxe kleiner. Die Rippungen innerhalb des Feldes T sind nahezu elliptisch und die grosse Axe in der Richtung AA' gelegen. Die Curven sind geschlossen, denn sie geben innerhalb der Grenzen $x = \frac{1}{2}\lambda$ und λ immer zwei Werthe für y innerhalb der Grenzen $y = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda$. Zwischen den Grenzen $x = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda$ ist y für diesen Fall stets imaginär.

Um die Gleichung einer Rippung zu erhalten, welche die Knotenlinie AA' berührt, so setzen wir $x = \frac{3}{4}\lambda$, $y = 0$. Die Constante wird $+ a_1$ und die Gleichung

$$a_1 \sin \pi \frac{2x}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{2y}{\lambda} + a_1.$$

Der Werth der Nebenaxe ist $\frac{1}{4}\lambda$, der der Hauptaxe gleich $\frac{3}{4}\lambda - x_1$, wobei $x_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \frac{a_2 - a_1}{a_1}$. Ist $a_2 > 2a_1$, so läuft diese Curve in die andere Hyperbelschaar über.

Untersuchen wir noch die Gleichungen der Curven in der Nähe der Centra E und F (Fig. 4), und zwar zunächst für E. Bezeichnen ω, ϑ und ψ sehr kleine Dimensionen und setzen wir $x = \frac{1}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{1}{4}\lambda + \vartheta$, also

$$a_1 \sin \pi \frac{\frac{1}{2}\lambda + 2\omega}{\lambda} = a_2 \sin \pi \frac{\frac{1}{2}\lambda + 2\vartheta}{\lambda} + const.,$$

so wird die Constante gleich $a_1 - a_2 \pm \psi$ und

$$a_1 \cos \pi \frac{2\omega}{\lambda} = a_2 \cos \pi \frac{2\vartheta}{\lambda} + a_1 - a_2 \pm \psi.$$

Führt man wegen der Kleinheit der Grössen ω und ϑ die Winkel ein, so reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{\omega^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_1}} - \frac{\vartheta^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_2}} = \mp 1.$$

Dies ist die Gleichung zweier Hyperbelschaaren, deren Hauptaxen senkrecht aufeinander stehen. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\vartheta^2}{b^2} = \mp 1,$$

so ist $\tan \varphi = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$, wo φ den halben Asymptotenwinkel FEG bezeichnet. Für $a_2 = a_1$ ist $\varphi = 45^0$. Wir fanden früher für die Tangente der Hauptrippungen

$$\tan \tau = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_1 \cos \pi \frac{2x}{\lambda}}{a_2 \cos \pi \frac{2y}{\lambda}}.$$

Für den Knotenpunkt ist $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = 0$, mithin $\tan \tau = -\frac{a_1}{a_2}$ und für $a_2 = a_1$ der Winkel $\tau = 45^0$. Ist demnach $a_2 = a_1$, so fallen die Asymptoten und die Tangenten der Hauptrippen in den Knotenpunkten mit den Diagonalen der Quadrate E zusammen; in den übrigen Fällen divergiren sie in einem bestimmten Sinne. Die eine Hyperbelschaar gehört den Wellenbergen an, die andere den Wellenthälern.

Um noch die Gleichungen der Curven in der Nähe der Centra von T zu erhalten, so setzen wir $x = \frac{3}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{1}{4}\lambda + \vartheta$. Will man dieselben für B bestimmen, so setze man $x = \frac{1}{4}\lambda + \omega$, $y = \frac{3}{4}\lambda + \vartheta$. Man erhält im ersteren Falle

$$-a_1 \cos \pi \frac{2\omega}{\lambda} = a_2 \cos \pi \frac{2\vartheta}{\lambda} - a_1 - a_2 + \psi$$

oder, wenn man die Bogen einsetzt:

$$\frac{\omega^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_1}} + \frac{\vartheta^2}{\frac{\lambda^2 \psi}{2\pi^2 a_2}} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipsenschaar, deren Hauptaxen den Knotenlinien parallel laufen. Für $a_2 = a_1$ bilden sie concentrische Kreise. Ist $a_2 > a_1$, so ist $a > b$ und $b : a = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$.

In den vorstehenden Betrachtungen ist meiner Meinung nach die Theorie der Faraday'schen Klangfiguren in erschöpfender Weise entwickelt. Man kann sie mit Leichtigkeit ausdehnen auf die Theorie der Luftschwingungen in geschlossenen cubischen Räumen. Es kommt ein drittes Wellensystem mit der Amplitude a_3 hinzu. Die Schichten gleicher Schwingungsrichtung und Dichtigkeit der vibrirenden Luftmasse sind von eigenthümlichen Flächen eingeschlossen, deren Verlauf aus den vorstehenden Entwickelungen entnommen werden kann.

Da aus den angestellten Beobachtungen hervorgeht, dass in cubischen Räumen sich die Schwingungszahlen der Grundtöne umgekehrt wie homologen Linien verhalten, so lässt sich hieraus die Reihe der Obertöne, welche den Grundton begleiten müssen, genau ableiten. Bei dem Grundton ist ein Schwingungsbauch in der Mitte des Würfels; bei dem ersten Oberton treten acht solcher Bäuche auf, bei dem zweiten 27 u. s. w. Die grossen Axen der Bäuche verhalten sich nun offenbar wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ u. s. w.; mithin bilden die Obertöne des Grundtones c die harmonische Oberreihe g, $\bar{c}$, e. Möglicherweise und sehr wahrscheinlich tritt bei dem Grundton in der Mitte des Würfels gar kein Bauch auf; ist in diesem Falle c der Grundton, so wird die Reihe der Obertöne sein $\bar{c}$, $\bar{g}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{e}}$. Diese stereometrischen Klangfiguren lassen sich sichtbar machen, indem man einen hohlen Glaswürfel von etwa 1 Cubikdecimeter Inhalt fast ganz mit trockenem Lycopodiumstaub anfüllt oder mit Rauch, und die eingeschlossene Luft durch einen auf die Obertöne abgestimmten Glasstab in Schwingungen versetzt. Nimmt man nach Seebeck die Schallgeschwindigkeit in Röhren zu 328 M. an, so ist die Schwingungszahl des ersten Obertones 3280, die des zweiten 4920 u. s. w. Die zugehörigen isochronen Glasstäbe haben die Länge 75 Cm., 50 Cm. u. s. w.

Es ist ferner nicht unmöglich, dass man auch ohne Anwendung von Staub die Schwingungszustände der Luftmasse durch die optische Interferenzmethode von Boltzmann und Töpler (Pogg. Ann. CXLI, 321) zu analysiren oder gar in grösseren cubischen Räumen direct wahrzunehmen im Stande sein wird.

Die im Vorstehenden beschriebenen Klangfiguren von Flüssigkeiten und Luftmassen gehören einer und derselben Kathegorie an. Ihnen gebührt mit Recht die Bezeichnung „Faraday'sche Klangfiguren". Um diese Behauptung ausser allen Zweifel zu setzen, mögen hier am Ende noch die eigenen Worte Faraday's ihren Platz finden. Ich entnehme sie dem Aufsatze in Pogg. Ann. Bd. XXVI, S. 248.

123. „Alle die bisher beschriebenen Erscheinungen können sich auf der Oberfläche derjenigen Flüssigkeiten zeigen, welche man für gewöhnlich als unelastisch betrachtet und bei denen die Elasticität, welche sie besitzen, keine wesentliche Eigenschaft ausmacht; es ist nicht möglich, dass sie sich im Innern dieser Masse zeigen können. Erweitert man die Schlüsse, so erscheint es indess nicht ganz unmöglich, dass ähnliche Erscheinungen auch in Gasen und Dämpfen stattfinden, wobei die Elasticität die für das Vibriren nöthige Bedingung liefert, welche bei den Flüssigkeiten in einer plötzlichen Begrenzung der Masse durch eine nicht eingeschlossene verschiebbare Oberfläche gegeben ist.

124. Wenn dem so ist, so muss, wenn eine Platte in der Atmosphäre vibrirt, die unmittelbar mit ihr in Berührung stehende Luft sich in zahlreiche Portionen theilen, welche zwei abwechselnde Reihen wie die beschriebenen Häufchen bilden, eine dichter und eine dünner als die gewöhnliche Atmosphäre. Bei jeder Vibration der Platte wechseln diese Reihen durch ihre Expansionen und Condensationen miteinander ab.

125. In der Hoffnung, einige Vorgänge der Art zu entdecken, befestigte ich eine kreisrunde Zinnscheibe, die mit einem hervorstehenden Rande von dreiviertel Zoll versehen war, auf einem Lineal, streute etwas Lycopodium auf dieselbe und liess sie stark ertönen, so dass das Pulver in der Luft nur eine einzige Wolke gebildet haben würde, welche wegen des Randes und der gleichen Bewegung aller Theile der Platte keine Neigung zu ihrer Anhäufung besitzen konnte. Sogleich sah man das Lycopodium, statt eine gleichförmige Wolke zu bilden, das Ansehen einer dicken Wabe annehmen, die ganz in einer zitternden Bewegung begriffen war, und bei aufmerksamer Betrachtung konnte man Wellen wahrnehmen, welche die Wolke in entgegengesetzter Richtung durchsetzten. Es war genau die Erscheinung, welche sich gebildet haben würde, wenn eine staubige Atmosphäre auf der Oberfläche einer Platte ruhte und in eine Anzahl abwechselnd und zugleich sich ausdehnender und zusammenziehender Portionen gefallen wäre."

IV.

Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen.

Von

Dr. Arnold Giesen.

I. Theil. Homogene Ellipsoide.

§ 1. Näherungsformeln für das Potential eines homogenen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten.

Es sei ein homogenes Ellipsoid gegeben mit den Halbaxen a, b, c, welche in dieser Reihenfolge nach ihrer Grösse absteigend geordnet sein sollen. Die linearen Excentricitäten e und ε seien durch die Gleichungen bestimmt $a^2 - c^2 = e^2$, $b^2 - c^2 = \varepsilon^2$. Als Coordinatenaxen nehmen wir die Halbaxen des Ellipsoids an, dessen Dichtigkeit ϱ sei. Dann ist das Potential desselben in einem beliebigen Punkte (x, y, z):

$$V = abc\pi\varrho \int_\sigma^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right] dt.$$

Dabei ist die untere Integrationsgrenze σ für einen innern Punkt gleich Null, für einen äussern dagegen die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma} + \frac{y^2}{b^2+\sigma} + \frac{z^2}{c^2+\sigma} - 1 = 0.$$

Wir setzen jetzt $a^2 = c^2 + e^2$, $b^2 = c^2 + \varepsilon^2$, ferner mit Vernachlässigung derjenigen Potenzen von e und ε, welche die zweite übersteigen:

$$\frac{1}{a^2+t} = \frac{1}{c^2+t}\left(1 - \frac{e^2}{c^2+t}\right); \quad \frac{1}{b^2+t} = \frac{1}{c^2+t}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2+t}\right),$$

Dann wird

$$V = abc\pi\varrho \int_\sigma^\infty \frac{1}{(c^2+t)^{3/2}} \left(1 - \frac{e^2+\varepsilon^2}{2(c^2+t)}\right)\left[1 - \frac{r^2}{c^2+t} + \frac{e^2 x^2 + \varepsilon^2 y^2}{(c^2+t)^2}\right] dt,$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also r den Radius vector des angezogenen Punktes bedeutet. Es ist nun aber

$$\int_\sigma^\infty \frac{dt}{(c^2+t)^{\frac{m}{2}}} = \left[\frac{(e^2+t)^{-\frac{m}{2}+1}}{-\frac{m}{2}+1}\right]_\sigma^\infty.$$

Setzen wir daher $\sqrt{c^2+\sigma}$ für den äussern Punkt gleich c', so wird dieses Integral für einen innern Punkt $\frac{2}{(m-2)c^{m-2}}$ und für einen äussern $\frac{2}{(m-2)\,c'^{m-2}}$. Demnach erhält man für das innere Potential V_i des gegebenen Ellipsoids

$$\begin{aligned} V_i &= abc\pi\varrho \int_0^\infty \left[\frac{1}{(c^2+t)^{1/2}} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{2(c^2+t)^{3/2}} - \frac{r^2}{(c^2+t)^{3/2}} + \frac{(e^2+\varepsilon^2)r^2}{2(c^2+t)^{5/2}} + \frac{e^2x^2+e^2y^2}{(c^2+t)^{5/2}}\right] dt \\ 1) \quad &= 2ab\varrho\pi \left\{1 - \frac{e^2+\varepsilon^2}{6c^2} - \frac{r^2}{c^2}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{10c^2}\right] + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^4}\right\}. \end{aligned}$$

Speciell für ein Rotationsellipsoid hat man

$$V'_i = 2a^2\varrho\pi\left\{1 - \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)(x^2+y^2) - \frac{1}{c^2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)z^2\right\}.$$

Für den Ausdruck des äussern Potentials brauchen wir zunächst nur c' statt c zu setzen:

$$V_a = 2abc\varrho\pi\left\{\frac{1}{c'} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{6c'^3} - \frac{r^2}{c'^3}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{e^2+\varepsilon^2}{10c'^2}\right] + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c'^5}\right\}.$$

Es kommt jetzt auf die Bestimmung von $c' = \sqrt{c^2+\sigma}$ an. Zur Bestimmung von σ dient die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2+\sigma}\left(1 - \frac{e^2}{c^2+\sigma}\right) + \frac{y^2}{c^2+\sigma}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2+\sigma}\right) + \frac{z^2}{c^2+\sigma} - 1 = 0$$

oder auch

$$\frac{r^2}{c'^2} - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c'^4} - 1 = 0.$$

Hiernach hat c'^2 als ersten Näherungswerth r^2; setzten wir also $c'^2 = r^2 + \Delta$, so wird bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von Δ

$$1 - \frac{\Delta}{r^2} - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^4} - 1 = 0, \text{ also } \Delta = -\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^2},$$

also ist bis auf Glieder zweiter Ordnung $c'^2 = r^2 - \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^2}$. Hiernach ist nun weiter

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2r^4}\right) \text{ und } \frac{1}{c'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2r^4}\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obige Formel für das äussere Potential in den Gliedern, welche im Zähler die Excentricitäten nicht enthalten, so kommt, da in den übrigen c' einfach durch r zu ersetzen ist:

$$V_a = 2abc\pi\varrho\left\{\tfrac{2}{3}\frac{1}{r} - \tfrac{1}{15}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3} + \tfrac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\}.$$

Bezeichnet man die Masse $\frac{4}{3}abc\pi\varrho$ des Ellipsoids mit M, so kommt für das äussere Potential in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z und dessen Entfernung vom Mittelpunkte r ist:

$$2)\qquad V_a = M\left\{\frac{1}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich noch für die Punkte der Oberfläche. Für diese ist

$$\frac{x^2}{c^2+e^2} + \frac{y^2}{c^2+\varepsilon^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bei gehöriger Entwickelung hat man hierfür

$$\frac{x^2}{c^2}\left(1-\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{c^2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder $r^2 = c^2 + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^2}$, weiter also $\frac{1}{r} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right)$.

Nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 2) kommt für Punkte der Oberfläche

$$3)\qquad V_0 = M\left\{\frac{1}{c} - \tfrac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{c^3} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{c^5}\right\}.$$

Speciell für ein Rotationsellipsoid hat man allgemein

$$V'_a = M\left\{\frac{1}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{e^2(x^2+y^2)}{r^5}\right\}$$

und für die Oberfläche im Besondern

$$V'_0 = M\left\{\frac{1}{c} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2}{c^3} - \tfrac{1}{5}\frac{e^2(x^2+y^2)}{c^5}\right\}.$$

Umformung. Drückt man a und b durch c aus vermittelst der Formeln

$$a = c\left(1+\frac{e^2}{2c^2}\right),\quad b = c\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right),$$

so wird

$$1')\quad V_i = 2\pi\varrho\left\{c^3 + \tfrac{1}{3}(e^2+\varepsilon^2) - \tfrac{1}{3}r^2\left(1+\frac{e^2+\varepsilon^2}{5c^2}\right) + \frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^2}\right\},$$

$$2')\quad V_a = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c^3+\frac{1}{2}c(e^2+\varepsilon^2)}{r} - \tfrac{1}{10}\frac{c^3(e^2+\varepsilon^2)}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{c^3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{r^5}\right\}.$$

§ 2. Gestalt eines um einen Centralkörper rotirenden, homogenen flüssigen Satelliten.

Eine homogene flüssige Masse bewege sich als Satellit in einem Kreise um einen Centralkörper derart, als wenn beide in fester Verbindung ständen, so dass also der Satellit dem Centralkörper stets dieselbe mittlere Axe a ist die, welche die Bahn tangirt, die kleinste besteht auf der Bahnebene senkrecht.

Da $\frac{a-c}{c}$ näherungsweise gleich $\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2}$, so sind die Abplattungen beider durch die längste Axe c gelegten Hauptschnitte

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2} = -\frac{15}{4}\frac{c^3\vartheta^2}{Sf} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{c^2} = -5\frac{c^3\vartheta^2}{Sf}.$$

Die in obigen Formeln vorkommenden Grössen sind z. B. für unsern Mond wenigstens näherungsweise bekannt. Zur Elimination von f setze man $\frac{Cf}{r^2} = g$, unter C die Erdmasse, r den Erdhalbmesser, g die Schwere an der Erdoberfläche verstanden, also $f = \frac{gr^2}{C}$. Dadurch kommt

$$\frac{e^2}{c^2} = -\frac{15}{2}\frac{C\vartheta^2c^3}{gr^2S}, \quad \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -10\frac{C\vartheta^2c^3}{gr^2S}.$$

Der Bruch $\frac{C}{S}$ der Erd- und Mondmasse ist nahe $= 81$; der Bruch $\frac{c}{r}$ des mittlern Erd- und Mondhalbmessers ist $= 0{,}27234$, c selbst $= 234$ geogr. Meilen (à 7420,44 Meter), g im Mittel $= 9{,}7974$ Meter. Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist $27^d\ 7^h\ 43^m\ 11{,}5^s$ (nahe $27\frac{1}{3}$ Tage à 86400 Sec.), demnach $\vartheta = \frac{2\pi}{86400 \,.\, 27\frac{1}{3}}$ oder genauer $= \frac{2\pi}{86400 \,.\, 27{,}3217}$. Durch Ausrechnung findet sich für die Abplattungen der beiden Hauptschnitte durch die längste der Erde zugewandte Axe des Mondes

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2} = \frac{a-c}{c} = -\frac{1}{35800}, \quad \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{c^2} = \frac{b-c}{c} = -\frac{1}{26800}.$$

Demnach ist die Abweichung des Mondes von der Kugelform äusserst gering; man findet für den Ueberschuss des längsten der Erde zugewandten Halbmessers über den mittlern etwa 49 Meter und über den kleinsten etwa 65 Meter; der Unterschied der beiden für uns sichtbaren Halbmesser wäre demnach etwa 16 Meter. Mit diesen theoretischen Ergebnissen im Einklange steht die Thatsache, dass die Beobachtungen ausser den physischen Ungleichheiten der Oberfläche am Monde keinerlei Abweichung von der Kugelgestalt erkennen lassen.

§ 3. Ebbe und Fluth.

Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth sollen hier nur unter mehreren, die Theorie wesentlich vereinfachenden Annahmen behandelt werden. Man denke sich die Erde bestehend aus einem kugelförmigen Kerne vom Radius A und einer denselben allseitig bedeckenden homogenen Flüssigkeit. Die ganze Erdmasse sei E, diejenige des festen

Kernes Ek, also die der Flüssigkeit $E(1-k)$; die Dichte der Flüssigkeit sei ϱ, die mittlere des festen Kernes $\sigma\varrho$. Man denke sich ferner einen zweiten auf die Erde anziehend wirkenden Körper von der Masse M, die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens von dessen Mittelpunkte heisse R, die Entfernung seines Mittelpunktes von dem der Erde sei D. Beide Körper bewegen sich infolge ihrer gegenseitigen Anziehung um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in Kegelschnitten, die wir als Kreise voraussetzen werden. Der Abstand dieses gemeinschaftlichen Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Erde sei d. Von der Rotation der Erde um ihre Axe sehen wir ab, und es geschehe die Bewegung so, als wenn beide Körper fest miteinander verbunden wären, indem sie sich stets dieselbe Seite zukehren. Unter diesen Umständen wird sich dann für die die Erde bedeckende Flüssigkeit ein Zustand des relativen Gleichgewichts einstellen, der eben bestimmt werden soll. Die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Erde bei dessen Rotation um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt sei ϑ. Dann muss, unter f die Attractionsconstante verstanden, die Gleichung bestehen $\vartheta^2 d = \frac{Mf}{D^2}$. Der Mittelpunkt der Erde sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen z-Axe der Verbindungslinie beider Himmelskörper entgegengesetzt gerichtet sei, während die x-Axe die Bahn des Mittelpunktes der Erde bei der Rotation um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt tangire und die y-Axe auf dieser Bahn senkrecht stehe. Wir fragen, ob die die Erde bedeckende Flüssigkeit sich unter den angegebenen Umständen dadurch ins Gleichgewicht setzen könne, dass sie die Gestalt eines von der Kugelform wenig abweichenden Ellipsoids annimmt, dessen Halbaxen a, b, c resp. in die x-, y-, z-Axe fallen. Die Excentricitätsquadrate a^2-c^2 und b^2-c^2 mögen wieder mit e^2 und ε^2 bezeichnet werden.

Die Componenten der Centrifugalkraft in den Punkten x, y, z sind, auf die Masseneinheit bezogen, die partiellen Differentialquotienten von

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(z+d)^2].$$

Das Potential des festen Kernes der Erde sei U, dasjenige der ihn bedeckenden flüssigen Schichte V, endlich das des anziehenden Körpers (des Mondes, der Sonne) W; dann muss im Gleichgewichtszustande für die Oberfläche der Flüssigkeit folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\alpha) \qquad f(U+V+W)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2[x^2+(z+d)^2] = Const.$$

Bezeichnet r die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens vom Mittelpunkte der Erde, so ist erstlich $U=\frac{Ek}{r}$ oder, da für einen Punkt der als ellipsoidisch angenommenen Flüssigkeitsoberfläche ist (vergl. § 1)

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right),$$

so können wir setzen

$$\beta)\qquad U=\frac{Ek}{c}\left(1-\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{2c^4}\right).$$

Für V haben wir nach Gleichung 2') in § 1

$$V=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c\left(c^2+\frac{e^2+\varepsilon^2}{2}\right)-A^2}{r}-\tfrac{1}{10}\frac{c^3(e^2+\varepsilon^2)}{r^3}+\tfrac{3}{10}\frac{c^3(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{r^5}\right\}$$

oder, wenn wir in den die Excentricitäten e und ε nicht enthaltenden Theilen dieses Ausdruckes für $\frac{1}{r}$ wieder seinen obigen Werth, in den übrigen dagegen für r einfach c setzen

$$\gamma)\qquad V=\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{c\left(c^2+\frac{e^2+\varepsilon^2}{2}\right)-A^3}{c}-\frac{e^2+\varepsilon^2}{10}+\frac{(5A^3-2c^3)(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}\right\}.$$

Endlich haben wir für das Potential des anziehenden Körpers M

$$W=\frac{M}{R}=\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+(D+z)^2}}$$

$$=\frac{M}{D}\left\{1-\frac{z}{D}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2D^2}+\tfrac{3}{2}\frac{z^2}{D^2}+\dots\right\},$$

also mit Vernachlässigung der folgenden Glieder

$$\delta)\qquad W=\frac{M}{D}\left\{1-\frac{z}{D}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{2D^2}\right\}.$$

Mit Benutzung der Gleichungen β), γ), δ) geht demnach die Bedingungsgleichung α) für die Oberfläche der Flüssigkeit in die nachstehende über, wenn man die constanten Glieder gleich in eine einzige Constante $\mathfrak{C}$ zusammenfasst:

$$\mathfrak{C}-\frac{Ekf(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2c^5}+\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho f(5A^3-2c^3)(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}-\frac{Mf}{D^2}z$$
$$-\frac{Mf}{2D^3}(x^2+y^2-2z^2)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+z^2+2dz)=Const.$$

Aus dem Ausdrucke links in dieser Gleichung heben sich die beiden Glieder mit z auf, da nach dem Obigen $-\frac{Mf}{D^2}+\vartheta^2 d=0$. Für z^2 hat man

$$z^2=c^2-x^2-y^2+\frac{e^2}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}y^2.$$

Da indess z^2 nur mit sehr kleinen Factoren $\left(\frac{Mf}{D^3}\text{ und }\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right)$ multiplicirt vorkommt, so setzen wir einfacher $z^2=c^2-x^2-y^2$. Ferner ist, da $\frac{4}{3}\pi\varrho A^3=Ek\frac{1}{\sigma}$, wegen des kleinen Factors $(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)$ näherungsweise zu setzen

$\frac{4}{3}\pi\varrho c^3 = Ek\frac{1}{\sigma} + E(1-k)$, also weiter $\frac{4}{3}\pi\varrho(5A^3-2c^3) = \left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]E.$

Dann wird obige Bedingungsgleichung, wenn wir wieder constante Glieder in $\mathfrak{C}$ einrechnen:

$$\mathfrak{C} - \frac{Ekf(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{2c^5} + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]Ef(e^2x^2+\varepsilon^2y^2)}{10c^5}$$
$$-\frac{3Mf}{2D^3}(x^2+y^2) - \frac{Mf}{2dD^2}y^2 = Const.$$

Wegen der Unabhängigkeit von x^2 und y^2 zerfällt diese Gleichung wieder in nachstehende zwei:

$$-\frac{Ek}{2c^5}e^2 + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]E}{10c^5}e^2 - \frac{3M}{2D^3} = 0,$$

$$-\frac{Ek}{2c^5}\varepsilon^2 + \frac{\left[3\frac{k}{\sigma}-2(1-k)\right]E}{10c^5}\varepsilon^2 - \frac{3M}{2D^3} - \frac{M}{2dD^2} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$e^2 = -\frac{15Mc^5}{\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]ED^3},$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{5Mc^5\left(3+\frac{D}{d}\right)}{\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]ED^3}.$$

Da diese Werthe für die Excentricitätsquadrate stets möglich und im Allgemeinen auch sehr klein sind, so ist also nachgewiesen, dass in der That die die Erde umgebende Flüssigkeitsmasse die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids in ihrem relativen Gleichgewichtszustande annehmen kann. Die längste Axe der ellipsoidischen Wasseroberfläche ist dem anziehenden Körper zugewendet, die mittlere liegt in der Bahnebene der beiden Körper und die kürzeste steht auf der Bahnebene senkrecht. Da ferner $e^2 = a^2 - c^2$ nahe $= 2c(a-c)$ und ebenso $\varepsilon^2 = b^2 - c^2$ nahe $= 2c(b-c)$ ist, so können wir statt der obigen beiden Formeln auch setzen

$$c - a = \frac{15}{2\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]} \cdot \frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 \cdot c,$$

$$c - b = \frac{5\left(3+\frac{D}{d}\right)}{2\left[2+3k\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]} \cdot \frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 \cdot c.$$

Es lassen sich hier nun zwei Hauptfälle unterscheiden. In dem ersten setzen wir eine sehr geringe Meerestiefe voraus, dann ist k sehr nahe $=1$, in dem zweiten setzen wir die ganze Erde als flüssig voraus und demgemäss $k=0$.

Wir erhalten sonach im ersten Hauptfalle ($k=1$):

$$c-a=\frac{3}{2\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{\sigma}\right)}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,\quad c-b=\frac{3+\frac{D}{d}}{2\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{\sigma}\right)}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,$$

im zweiten Hauptfalle dagegen ($k=0$)

$$c-a=\tfrac{15}{4}\cdot\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,\quad c-b=\tfrac{5}{4}\left(3+\frac{D}{d}\right)\frac{M}{E}\left(\frac{c}{D}\right)^3 c,$$

welch letztere Formeln sich auf die des § 2 zurückführen lassen, sobald $\frac{D}{d}=1$ gesetzt wird.

Behufs einer numerischen Ausrechnung setzen wir für die durch den Mond bewirkte Fluth $\frac{M}{E}=\frac{1}{81}$, $c=858{,}5$ geogr. Meilen à 7420,44 Meter oder 23643′ pr., $D=51762$ geogr. Meilen, $\sigma=5{,}5$. Dann kommt in den beiden extremen Fällen für $c-a$ **erstens** bei sehr geringer Meerestiefe 0,604 Meter oder 1,924′ pr., **zweitens**, wenn die ganze Erde flüssig wäre, 1,343 Meter oder 4,282′ pr. Da $\frac{D}{d}$ nahe $=82$, so ist die Differenz $c-b$ bedeutend, und zwar $28\frac{1}{3}$mal grösser als $c-a$.

Hinsichtlich der durch die Sonne bewirkten Fluth ist die Sonnenmasse 355500·81 mal grösser, als die Mondmasse, die Entfernung D der Sonne dagegen auch nahe 400 mal grösser als die Entfernung des Mondes. Der Werth der Differenz $c-a$ für die Sonnenfluth verhält sich daher zum Werthe derselben Differenz für die Mondfluth wie $\frac{355500.81}{400^3}$ zu 1, woraus sich ergiebt, dass diese Differenz für die Sonnenfluth nahe $2\frac{1}{4}$mal kleiner ist als für die Mondfluth. Ihre Werthe für die Sonnenfluth sind **erstens** bei geringer Meerestiefe 0,268 Meter oder 0,855′ pr., **zweitens** bei ganz flüssiger Erde 0,597 Meter oder 1,903′ pr. Für das System von Erde und Sonne ist $\frac{D}{d}$ sehr nahe $=1$; daher verhält sich für die Sonnenfluth $c-a$ zu $c-b$ wie $3:4$.

Denken wir uns nun die Erde in der That um ihre Axe **rotirend**, diese Rotation aber so langsam vor sich gehend, dass man den vorhin bestimmten Zustand des relativen Gleichgewichts als in jedem Augenblicke erreicht ansehen kann, und ferner die Mondbahn mit der Ebene des Aequators zusammenfallend. Die Pole behalten jetzt immer dieselbe vorhin bestimmte Höhe des Wasserstandes, die Punkte des

Aequators dagegen gehen abwechselnd durch die Gegenden des höchsten und tiefsten Wasserstandes hindurch. Zur Zeit des Neu- und Vollmondes, wo die Gesammthöhe der Fluth sehr nahe die Summe der einzelnen Höhen der Sonnen- und Mondfluth ist, wird der Unterschied des höchsten und tiefsten Wasserstandes am Aequator erstens für den Fall einer geringen Meerestiefe 0,872 Meter oder 2,779′ pr., zweitens für den Fall einer ganz flüssigen Erde 1,940 Meter oder 6,185′ pr. Zur Zeit der Quadraturen dagegen sind dieselben Grössen 0,336 Meter oder 1,069′ pr. und 0,746 Meter oder 2,379′ pr.

Die obige vorläufige Voraussetzung, dass trotz der Axendrehung der Erde der relative Gleichgewichtszustand stets erreicht sei, kann nun aber bei der verhältnissmässig raschen Rotation der Erde durchaus nicht als zulässig gelten; es findet vielmehr ein stetes Schwanken der Meeresoberfläche um ihre relative Gleichgewichtsfigur statt. Daher kann auch die hier vorliegende Theorie der Ebbe und Fluth nicht als das Wesen dieser Erscheinungen vollständig erschöpfend betrachtet werden; eine solche erschöpfende Untersuchung muss vielmehr die Theorie der betreffenden Erscheinungen als Problem der Oscillationen des Meeres auffassen, nicht als Problem einer relativen Gleichgewichtsfigur. Eine derartige Durchführung dieser Theorie giebt Laplace in der *Mécanique céleste.*

§ 4. Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse, deren Theilchen nur ihrer eigenen Anziehung unterworfen sind.

1. Wir denken uns eine homogene flüssige Masse, auf deren Theilchen blos die gegenseitige Massenanziehung ihrer Theilchen wirkt. Dieselbe nimmt im Gleichgewichtszustande die Gestalt einer Kugel an und dieses Gleichgewicht ist ein stabiles. Wird nun die Flüssigkeitskugel einer kleinen Erschütterung ausgesetzt, so entfernen sich die Theilchen derselben ein wenig von ihrer anfänglichen Lage und es entstehen dadurch infolge der gegenseitigen Anziehung der Theilchen fortdauernde Oscillationen derselben um ihre Gleichgewichtslage. Die Gestalt, welche die Oberfläche der Flüssigkeit in den verschiedenen Stadien einer Oscillation darbietet, kann offenbar sehr verschieden sein und hängt von der Art der anfänglichen Erschütterung ab. Der denkbar einfachste Fall dieser Oscillationen scheint der zu sein, in welchem die Oberfläche stets die Gestalt eines Ellipsoids zeigt, dessen Mittelpunkt stets in den Mittelpunkt der ursprünglichen sphärischen Gleichgewichtsfigur fällt und dessen Axen stets dieselbe Richtung behalten, sich aber abwechselnd verkürzen und verlängern, — vorausgesetzt, dass eine derartige Bewegung überhaupt möglich ist. Wir machen demgemäss über die zu untersuchende Bewegung folgende Unterstellungen. Die Theilchen, welche sich ursprünglich im Mittelpunkte der sphärischen Gleichgewichtsfigur befinden, sollen während der ganzen Bewegung in Ruhe bleiben; die anderen Theilchen

dagegen sollen eine desto grössere Oscillationsamplitude besitzen, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind, und alle Theilchen, welche sich einmal auf einer Axe der nacheinander auftretenden Oberflächengestalten befinden, sollen auch fortwährend auf derselben verbleiben. Die Dauer T einer Oscillation sei für alle Theilchen die gleiche. Alle Oscillationen sollen fortwährend sehr klein und geradlinig bleiben. Wir haben also zu untersuchen, ob eine Bewegung, wie sie bisher im Allgemeinen charakterisirt wurde, möglich ist, und in diesem Falle ihre näheren Attribute zu bestimmen.

2. Den Mittelpunkt der ursprünglichen Kugelfläche und der nach unserer Annahme nachher auftretenden Ellipsoide nehmen wir zum Coordinatenanfangspunkt, die Axen der fraglichen Ellipsoide zu Coordinatenaxen. Die Dichtigkeit der Flüssigkeit werde mit ϱ, der Radius der ursprünglichen sphärischen Oberfläche mit R bezeichnet. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Theilchens im ursprünglichen Ruhezustande, x, y, z diejenigen desselben Theilchens zu einer beliebigen Zeit t; ξ, η, ζ die Projectionen der Verschiebung dieses Theilchens zur Zeit t auf die Axen. Dem oben dargestellten Charakter der Bewegung genügen nun folgende Annahmen über die Grössen ξ, η, ζ:

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta = \mu_3 z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

unter μ_1, μ_2, μ_3 gewisse kleine Constante verstanden. Denn zwischen den ursprünglichen Coordinaten x_0, y_0, z_0 eines Theilchens, welches ursprünglich in der sphärischen Oberfläche lag und demzufolge auch stets in der Flüssigkeitsoberfläche verbleibt, besteht die Beziehung $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$. Nun ist aber

$$x = x_0 + \xi = x_0 \left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$y = y_0 + \eta = y_0 \left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$z = z_0 + \zeta = z_0 \left(1 + \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

folglich

$$\frac{x^2}{R^2\left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2\left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} + \frac{z^2}{R^2\left(1 + \mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2} = 1.$$

Die Oberfläche ist also ein Ellipsoid. Dass die übrigen Voraussetzungen erfüllt sind, ist sofort klar. Es bleibt also noch zu untersuchen, ob die angenommene Bewegung den Gesetzen der Hydrodynamik gehorche.

3. Für tropfbare Flüssigkeiten muss die cubische Dilatation, resp. Compression verschwinden, welche Bedingung sich ausspricht durch die sogenannte Continuitätsgleichung, die für diesen Fall (bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung) folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}=0.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}=\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y_0}=\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z_0}=\mu_3 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

und die Continuitätsgleichung geht über in

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0.$$

Nach dem d'Alembert'schen Princip muss ferner in jedem Augenblicke Gleichgewicht bestehen zwischen den an der Flüssigkeit wirkenden verlorenen Kräften. Ist V das Potential der flüssigen Masse, f die Anziehungsconstante, so sind die verlorenen Kräfte, auf die Masseneinheit bezogen

$$f\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad f\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad f\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

oder

$$f\frac{\partial V}{\partial x}+\mu_1 x\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial y}+\mu_2 y\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial z}-(\mu_1+\mu_2) z\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung x, y, z statt x_0, y_0, z_0 gesetzt ist. Wenn also in irgend einem Momente an der Flüssigkeit Kräfte angebracht würden, deren Componenten durch die vorstehenden Ausdrücke dargestellt sind und die Flüssigkeitstheilchen zugleich in diesem Momente ihre Geschwindigkeiten verlören, so würde die Flüssigkeitsmasse in der Gestalt, welche sie in diesem Moment gerade besitzt, im Gleichgewicht verharren. Die Gleichung für den hydrostatischen Druck wird sonach

$$p=\varrho\left\{fV+\tfrac{1}{2}\left[\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2)z^2\right]\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}+Const.$$

und also endlich die Gleichung für die Oberfläche

$$fV_0+\tfrac{1}{2}\left[\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2)z^2\right]\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}=Const.$$

Diese Gleichung muss in allen Punkten der Oberfläche in jedem Augenblicke erfüllt sein, wenn die vorausgesetzte Bewegung der Flüssigkeit möglich sein soll. Wir müssen jetzt zunächst das Potential V bilden. Zur Zeit t besitzt nach dem Obigen die Flüssigkeit die Gestalt eines Ellipsoids mit den Halbaxen

$$R\left(1+\mu_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right), \quad R\left(1+\mu_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\right), \quad R\left(1-[\mu_1+\mu_2] \sin 2\pi\frac{t}{T}\right);$$

nennen wir diese kurz a, b, c, so haben wir weiter bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$a^2 = R^2\left(1 + 2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$
$$b^2 = R^2\left(1 + 2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$
$$c^2 = R^2\left(1 - 2\,[\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Hieraus findet sich für die Quadrate der numerischen Excentricitäten $\varkappa$ und λ der Oberfläche, wieder bei Beschränkung auf kleine Grössen erster Ordnung

$$\varkappa^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = 2\,(2\,\mu_1 + \mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T},$$
$$\lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2} = 2\,(\mu_1 + 2\,\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Für das innere Potential eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c haben wir nun aber bei Beschränkung auf die Quadrate der Excentricitäten nach 1), § 1

$$V_i = 2ab\varrho\pi\,[1 - \tfrac{1}{6}(\varkappa^2 + \lambda^2)] - \frac{2ab}{c^2}\varrho\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(3\varkappa^2 + \lambda^2)]\,x^2$$
$$- \frac{2ab}{c^2}\varrho\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(\varkappa^2 + 3\lambda^2)]\,y^2 - \frac{2ab}{c^2}\varrho\pi\,[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10}(\varkappa^2 + \lambda^2)]\,z^2.$$

Bei fortwährender Beschränkung auf die Grössen der niedrigsten Ordnung erhält man nach dem Obigen

$$ab = R^2\left(1 + [\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad \frac{ab}{c^2} = 1 + 3\,[\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Hieraus folgt nun durch Einsetzung in die Formel für V_i mit demselben Grade der Annäherung

$$V_i = 2R^2\varrho\pi - 2\varrho\pi\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{6}{5}\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]x^2 - 2\varrho\pi\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5}\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]y^2$$
$$- 2\varrho\pi\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}(\mu_1 + \mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]z^2.$$

Dieser Ausdruck ist jetzt in die obige Bedingungsgleichung für die Oberfläche einzusetzen. Nach gehöriger Ordnung lässt sich diese dann in folgender Form schreiben:

$$\left\{-\tfrac{4}{3}\varrho\pi f\left[1 - \tfrac{6}{5}\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right] + \tfrac{1}{2}\mu_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} x^2$$
$$+ \left\{-\tfrac{4}{3}\varrho\pi f\left[1 - \tfrac{6}{5}\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right] + \tfrac{1}{2}\mu_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} y^2$$
$$+ \left\{-\tfrac{4}{3}\varrho\pi f\left[1 + \tfrac{6}{5}(\mu_1 + \mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right] - \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} z^2 = Const.$$

Das Bestehen dieser Gleichung für alle Punkte der Oberfläche erfordert, dass die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in derselben den entsprechenden Coefficienten in der Gleichung der Oberfläche proportional sind. Die

Gleichung der Oberfläche können wir aber wegen der Kleinheit von μ_1 und μ_2 auch so schreiben:

$$x^2\left[1-2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+y^2\left[1-2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+z^2\left[1+2(\mu_1+\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]=R^2.$$

Behufs der bequemern Vergleichung schreiben wir die vorige Bedingungsgleichung in folgender noch etwas geänderter Form:

$$\begin{aligned}&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1-2\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right]\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} x^2\\ +&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1-2\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right]\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} y^2\\ +&\left\{-\tfrac{2}{3}\varrho\pi f\left[1+2(\mu_1+\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]\right.\\ &\quad\left.-\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f\right](\mu_1+\mu_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}\right\} z^2=Const.\end{aligned}$$

In dieser Form zeigt nun diese Gleichung sofort durch Vergleichung mit der Gleichung der Oberfläche, dass ihr Bestehen für alle Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit blos an folgende Bedingung geknüpft ist:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\tfrac{8}{15}\varrho\pi f=0.$$

Wenn diese Gleichung erfüllt ist, so besteht in jedem Augenblick das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Princips und die hypothetisch angenommene Bewegungsart der flüssigen Masse ist dann also in der That möglich. Es dient aber offenbar die vorige Gleichung zur Bestimmung der Oscillationsdauer T, für welche sie giebt

$$T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}.$$

Da dieser Werth reell ist, so kann also auch die vorhergehende Gleichung stets befriedigt werden, und wir ziehen daher aus allem Vorhergehenden jetzt folgendes Gesammtresultat:

Unter den möglichen Bewegungen der Flüssigkeitskugel giebt es auch regelmässige sehr kleine Oscillationen, bei welchen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids behält und deren Charakter oben näher beschrieben wurde. Die Zeit einer ganzen derartigen Oscillation der Flüssigkeit ist gegeben durch die Gleichung $T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}$ und die Verschiebungen eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens, dessen Coordinaten im ursprünglichen Ruhezustande x_0, y_0, z_0 waren, zur Zeit t sind gegeben durch die Gleichungen

$$\xi=\mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta=\mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta=-(\mu_1+\mu_2) z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

unter μ_1 und μ_2 zwei willkürliche sehr kleine Constante verstanden. Die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche der Flüssigkeit sind zur Zeit t

$$R\left(1+\mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1+\mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad R\left(1-[\mu_1+\mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

4. Wir wollen die gefundene Bewegung noch etwas näher discutiren.

a) Die Formel für die Oscillationsdauer T zeigt, dass diese Grösse von den Dimensionen der Flüssigkeitsmasse ganz unabhängig ist, dagegen ist dieselbe der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit umgekehrt proportional. Bezeichnet E den mittlern Halbmesser und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde, g die Acceleration der Schwere, so haben wir, da eine homogene oder concentrisch geschichtete Kugel nach aussen so wirkt, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, $\frac{\frac{4}{3}\pi E^3 \sigma f}{E^2}=g$ oder $f=\frac{3g}{4\pi\sigma E}$. Mittels dieses Werthes von f wird die Gleichung für T

$$T=\pi\sqrt{\frac{5E}{g}\cdot\frac{\sigma}{\varrho}}.$$

Nehmen wir als Werth des mittlern Erdhalbmessers E 858,5 geogr. Meilen à 7420,44 Meter, ferner für die Acceleration der Schwere $g=$ 9,7974 Meter pro Secunde, und setzen, um die Oscillationsdauer einer Wasserkugel zu bestimmen, $\frac{\sigma}{\varrho}=5{,}62$, so ergiebt die Ausrechnung der vorigen Formel

$$T=13430 \text{ Secunden} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Stunden (nahe).}$$

Für eine Flüssigkeitskugel von derselben mittlern Dichtigkeit wie die Erde wäre die Oscillationsdauer 2,37 mal kleiner. Es versteht sich von selbst, dass die betrachtete Bewegung nur bei Flüssigkeitskugeln von grossem Radius überhaupt vorkommen kann, indem bei kleinem Radius die Wirkung der gegenseitigen Anziehung der Theilchen gegen die Wirkung der Molecularkräfte, welche die Wirkung der Oberflächenspannung bedingen, verschwindet.

b) Die erörterte Bewegung lässt sich folgendermassen geometrisch charakterisiren. Zu den Zeiten $t=0$, $=\frac{1}{2}T$, $=T$, $=\frac{3}{2}T$, $=\ldots$ geht jedes Theilchen durch seine ursprüngliche Ruhelage und die Oberfläche der Flüssigkeit durch ihre sphärische Gleichgewichtsfigur. Die Richtung, in welcher ein Theilchen oscillirt, dessen Coordinaten im Gleichgewichtszustande x_0, y_0, z_0 sind, bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie

$$\mu_1 x_0 : \mu_2 y_0 : -(\mu_1+\mu_2) z_0 .$$

Die Oscillationsrichtungen der Theilchen stehen also sämmtlich senkrecht auf den durch die Ruhelage derselben gehenden Hyperboloiden, deren Gleichung ist

$$\mu_1 x_0^2 + \mu_2 y_0^2 - (\mu_1 + \mu_2) z_0^2 = Const.$$

Oder denken wir uns die Orthogonalcurven, welche sich diesen Hyperboloiden zuordnen, so ist die Oscillationsrichtung jedes Theilchens Tangente an derjenigen dieser Orthogonalcurven, welche durch die Ruhelage des Theilchens geht. Die Differentialgleichungen dieser Orthogonalcurven sind

$$\frac{d x_0}{d s_0} : \frac{d y_0}{d s_0} : \frac{d z_0}{d s_0} = \mu_1 x_0 : \mu_2 y_0 : -(\mu_1 + \mu_2) z_0,$$

und deren Integrale, unter A und B zwei Constante verstanden,

$$y_0 = A x_0^{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad z_0 = B x_0^{-\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1}}.$$

Es sind also diese Strömungscurven parabolische Curven, und zwar im Allgemeinen solche doppelter Krümmung.

c) Die Gleichung der Oberfläche lässt sich schreiben

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2[\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2] \sin 2\pi \frac{t}{T} = R^2.$$

Sie wird stets befriedigt für jedes t durch solche Werthe von x, y, z, welche den beiden Gleichungen genügen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2 = 0.$$

Es schneiden sich also sämmtliche im Verlaufe der Bewegung auftretenden ellipsoidischen Oberflächengestalten in einer und derselben Raumcurve, in welcher auch die ursprüngliche Kugelfläche von einem gewissen Kegel zweiten Grades geschnitten wird.

d) Es sollen endlich noch zwei besonders interessante Specialfälle kurz hervorgehoben werden. Es sei erstens $\mu_2 = -\mu_1$. Jetzt wird $\zeta = 0$ und die Oscillationen aller Theilchen finden also parallel der xy-Ebene statt. Die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche zur Zeit t werden jetzt, wenn wir einfach μ statt μ_1 schreiben

$$a = R\left(1 + \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad b = R\left(1 - \mu \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad c = R;$$

die in die z-Axe fallende Axe der Flüssigkeit bleibt also in diesem Falle stets von gleicher Länge $2R$; von den beiden anderen Axen verlängert sich die eine stets, wenn die andere sich verkürzt, und umgekehrt. Die oben berührte Kegelfläche besitzt in diesem Falle die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$, d. h. sie zerfällt in das System zweier in der z-Axe sich schneidender Ebenen, dargestellt durch $x + y = 0$, $x - y = 0$; es sind dieses die beiden Ebenen, welche die von der xz- und yz-Ebene gebildeten Winkel halbiren. Die besagten Ebenen schneiden die ursprüngliche Kugelfläche in zwei grössten Kreisen, in welchen dieselbe sonach in diesem Falle auch von allen der Reihe nach auftretenden ellipsoidischen Oberflächen geschnitten wird. Die Strömungslinien werden in diesem Falle, wie vorauszusehen war, ebene Curven, deren Gleichungen sind $y=Ax^{-1}$, $z=B$. Die erstere charakterisirt dieselben als gleichseitige Hyperbeln, deren Horizontalprojectionen sich an die x- und y-Axe als Asymptoten anschmiegen.

Ein zweiter ausgezeichneter Specialfall ist derjenige, in welchem man $\mu_1=\mu_2$ hat. Schreiben wir dann wieder μ statt μ_1, so sind die Halbaxen der ellipsoidischen Oberfläche

$$a=R\left(1+\mu\sin 2\pi\frac{t}{T}\right),\quad b=R\left(1+\mu\sin 2\pi\frac{t}{T}\right),\quad c=R\left(1-2\mu\sin 2\pi\frac{t}{T}\right),$$

ferner die Gleichung der besagten Kegelfläche $x^2+y^2-2z^2=0$ und endlich die Gleichungen der Strömungscurven $y=Ax$, $z=Bx^{-2}$. Hieraus folgt, dass in diesem Falle sämmtliche ellipsoidische Oberflächen Rotationsellipsoide sind, deren Axe in die z-Axe und deren Aequatorebene in die xy-Ebene fällt, und zwar abwechselnd verlängerte und abgeplattete. Der Abstand des Polarhalbmessers von seinem Mittel ist absolut genommen immer doppelt so gross, wie der entgegengesetzte Unterschied des Aequatorhalbmessers von seinem Mittel. Die oben besagte Kegelfläche ist jetzt auch ein Rotationskegel um die z-Axe, dessen Seiten gegen die z-Axe um einen Winkel geneigt sind, dessen Tangente $=\sqrt{2}$ ist. Diese Kegelfläche schneidet jetzt wieder die ursprüngliche Kugelfläche in zwei Kreisen, durch welche ebenso alle ellipsoidischen Oberflächen gehen. Die Strömungscurven sind wieder ebene Curven, deren Ebenen durch die z-Axe gehen. Betrachten wir z. B. diejenigen, welche in der xz-Ebene liegen; es sind hyperbolische Curven dritten Grades, welche sich aber an die x-Axe viel enger anschliessen, als an die z-Axe.

II. Theil. Nicht homogene Ellipsoide.

§ 1. Näherungsformeln für das Potential eines nicht homogenen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten.

Denken wir uns zuerst eine homogene ellipsoidische Schale, begrenzt von zwei Ellipsoiden mit gleichgerichteten Axen, die sich beide nicht weit von der Kugelform entfernen. Dieselben seien bestimmt durch die eine Axe und die Excentricitäten c_0, e_0, ε_0; c_1, e_1, ε_1; die Dichtigkeit sei ϱ. Das Potential der Schale für einen Punkt des innern Hohlraumes oder des äussern Raumes stellt sich dann dar durch die Differenz der Potentiale für die Ellipsoide c_0, e_0, ε_0 und c_1, e_1, ε_1, und wir erhalten, wenn wir diese Differenz durch Δ andeuten,* gemäss der Formeln 1') und 2')

---

* Es ist also beispielsweise

$$\Delta\left(\frac{e_i^2}{c_i^2}\right)=\frac{e_i^2}{c_i^2}-\frac{e_{i-1}^2}{c_{i-1}^2}.$$

in § 1 des I. Theiles zunächst für das Potential in einem Punkte des innern Hohlraumes

$$v_i = 2\pi\varrho\left\{\Delta(c^2+\tfrac{1}{3}[e^2+\varepsilon^2]) - \frac{r^2}{15}\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + \frac{x^2}{5}\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{5}\Delta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\right\},$$

und ebenso für das äussere Potential der Schale

$$v_a = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\left\{\frac{\Delta(c^3+\frac{1}{2}c[e^2+\varepsilon^2])}{r} - \frac{1}{10}\frac{\Delta(c^3[e^2+\varepsilon^2])}{r^3} + \frac{3}{10}\frac{x^2\Delta(c^3e^2)+y^2\Delta(c^3\varepsilon^2)}{r^5}\right\}.$$

Nun denke man sich eine nicht homogene ellipsoidische Schale. Die Flächen, in denen die Dichtigkeit sich stetig oder discontinuirlich ändert, sollen aber, ebenso wie die beiden Oberflächen, sämmtlich Ellipsoide mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten sein. Dieselben theilen die gegebene nicht homogene Schale in eine endliche oder unendlich grosse Reihe homogener Schalen und wir erhalten also das Potential der gegebenen Schale durch eine Summation über alle homogenen Elementarschalen. Die Dichtigkeit ϱ, ebenso wie die Excentricitäten e und ε, sind hier als Functionen der Axe c zu betrachten. Die der innern und äussern Grenzfläche der gegebenen Schale entsprechenden Werthe von c seien c_0 und c_n. Dann ist für das innere Potential

$$4)\quad \begin{aligned} V_i = 2\pi\Bigg\{&\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta(c^2+\tfrac{1}{3}[e^2+\varepsilon^2]) - \tfrac{1}{15}r^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}+\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) \\ &+ \tfrac{1}{5}x^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \tfrac{1}{5}y^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\Bigg\}, \end{aligned}$$

und für das äussere Potential

$$5)\quad \begin{aligned} V_a = \tfrac{4}{3}\pi\Bigg\{&\frac{\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta(c^3+\frac{1}{2}c[e^2+\varepsilon^2])}{r} - \frac{1}{10}\frac{\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta(c^3[e^2+\varepsilon^2])}{r^3} \\ &+ \frac{3}{10}\frac{x^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta(c^3e^2) + y^2\sum_{c_1}^{c_n}\varrho\Delta(c^3\varepsilon^2)}{r^5}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ist die Dichtigkeitsänderung eine stetige, so treten Differentiale und Integrale an die Stelle der Differenzen und Summen. Das äussere Potential eines vollen Ellipsoids, in welchem die Dichtigkeit nach ellipsoidischen Flächen mit gleichgerichteten Axen und kleinen Excentricitäten wechselt, wird aus der letzten Formel erhalten, wenn man nur c_0 durch Null ersetzt oder, was auf dasselbe hinauskommt, als untere Summationsgrenze Null nimmt.

§ 2. Gleichgewichtsfigur eines Systems von Flüssigkeiten, welche einen ellipsoidischen Kern umgeben, wenn das System eine Rotationsbewegung mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit ϑ um die z-Axe ausführt.

1. Man habe ein Ellipsoid, dessen Oberfläche nur wenig von der Kugelform abweicht und durch die Halbaxen a', b', c' und die Excentricitäten $e'=\sqrt{a'^2-c'^2}$ und $\varepsilon'=\sqrt{b'^2-c'^2}$ bestimmt ist. Im Falle dasselbe nicht homogen ist, seien die Flächen constanter Dichtigkeit sämmtlich Ellipsoide von kleinen Excentricitäten, deren Axen mit denen der Oberfläche gleichgerichtet sind. Die Dichte werde mit σ bezeichnet, welches dann eine Function von c ist. Man kann nun das äussere Potential des Ellipsoids durch folgende Formel darstellen:

$$V_a=\frac{M}{r}-\tfrac{1}{10}\,\frac{P+Q}{r^3}+\tfrac{3}{10}\,\frac{Px^2+Qy^2}{r^5}; \tag{6}$$

dabei ist im Falle der Homogenität nach Gleichung 2) des § 1 im I. Theile

$$M=\tfrac{4}{3}\pi\sigma a'b'c'=\tfrac{4}{3}\pi\sigma[c'^3+\tfrac{1}{2}c'(e'^2+\varepsilon'^2)],$$
$$P=Me'^2=\tfrac{4}{3}\pi\sigma c'^3e'^2,\quad Q=M\varepsilon'^2=\tfrac{4}{3}\pi\sigma c'^3\varepsilon'^2;$$

für ein nicht homogenes Ellipsoid ist nach Gleichung 5)

$$M=\tfrac{4}{3}\pi\sum_0^{c'}\sigma\Delta[c^3+\tfrac{1}{2}c(e^2+\varepsilon^2)],$$

$$P=\tfrac{4}{3}\pi\sum_0^{c'}\sigma\Delta(c^3e^2),\qquad Q=\tfrac{4}{3}\pi\sum_0^{c'}\sigma\Delta(c^3\varepsilon^2).$$

2. Denken wir uns jetzt ein System flüssiger Schichten verschiedener Dichtigkeit, die sich aber nicht mischen, über dem ellipsoidischen Kerne ausgebreitet, und das ganze System um die z-Axe mit der kleinen Winkelgeschwindigkeit ϑ gleichförmig rotirend. Wir fragen, ob das Gleichgewicht sich dadurch herstellen könne, dass alle Grenzflächen der einzelnen Schichten sich nach wenig excentrischen Ellipsoiden krümmen, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleichgerichtet sind. Dies vorausgesetzt, seien die Bestimmungsstücke der einzelnen Grenzflächen, von innen angefangen: c', e', ε'; c_1, e_1, ε_1; c_2, e_2, ε_2; ... c_n, e_n, ε_n; die Dichtigkeiten der einzelnen Schichten ϱ_1, ϱ_2, .. ϱ_n, ihre Potentialfunctionen V_1, V_2, ... V_n. Dann muss für jede Grenzfläche zweier Schichten und die äussere Oberfläche der äussersten die Bedingung erfüllt sein

$$f(V_a+V_1+V_2+\ldots+V_n)+\tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2)=Const.,$$

worin f die Anziehungsconstante bezeichnet.

3. Um den Ausdruck des Gesammtpotentials für die Punkte der durch die Grössen c_i, e_i, ε_i bestimmten Trennungsfläche zwischen der i^{ten} und $(i+1)^{\text{ten}}$ Schichte aufzustellen, haben wir für die Schichten von

der ersten bis zur i^{ten} incl. das äussere, für die Schichten von der $(i+1)^{\text{ten}}$ bis zur n^{ten} das innere Potential zu nehmen. Dann erhalten wir gemäss den Gleichungen 5) und 1')

$$V_a + V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$= \frac{M + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta [c^3 + \frac{1}{2} c (e^2 + \varepsilon^2)]}{r} - \frac{1}{10} \frac{P + Q + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta [c^3 (e^2 + \varepsilon^2)]}{r^3}$$

$$+ \frac{3}{10} \frac{x^2 \left[P + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta (c^3 e^2)\right] + y^2 \left[Q + \frac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta (c^3 \varepsilon^2)\right]}{r^5}$$

$$+ 2\pi \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho\, \varDelta (c^2 + \tfrac{1}{3} e^2 + \tfrac{1}{3} \varepsilon^2) - \frac{2\pi}{15} r^2 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho\, \varDelta \left(\frac{e^2}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)$$

$$+ \frac{2\pi}{5} x^2 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho\, \varDelta \left(\frac{e^2}{c^2}\right) + \frac{2\pi}{5} y^2 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho\, \varDelta \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right).$$

In denjenigen Gliedern dieses Ausdruckes, in welchen Grössen von der Ordnung der Excentricitätsquadrate vorkommen, ist r einfach durch c_i zu ersetzen, im ersten Gliede dagegen ist zu schreiben (vgl. § 1, I. Thl.)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_i} - \frac{e_i^2 x^2 + \varepsilon_i^2 y^2}{2 c_i^5}.$$

Setzt man diesen Werth des Gesammtpotentials in obige Bedingungsgleichung ein, so erhält man durch Annullirung der Coefficienten der beiden unabhängigen Variabeln x^2 und y^2 zwei Gleichungen, welche nach Multiplication mit $10 c_i^5$ folgende Gestalt annehmen:

$$-5 \left[M + \tfrac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta (c^3)\right] e_i^2 + 4\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta (c^3 e^2) + 4\pi c_i^5 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho\, \varDelta \left(\frac{e^2}{c^2}\right)$$
$$= -3P - \frac{5\vartheta^2 c_i^5}{f},$$

$$-5 \left[M + \tfrac{4}{3}\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta (c^3)\right] \varepsilon_i^2 + 4\pi \sum_{c_1}^{c_i} \varrho\, \varDelta (c^3 \varepsilon^2) + 4\pi c_i^5 \sum_{c_{i+1}}^{c_n} \varrho\, \varDelta \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)$$
$$= -3Q - \frac{5\vartheta^2 c_i^5}{f}.$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen zwischen den Excentricitätsquadraten $e_1^2, e_2^2, \ldots e_n^2$; $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \ldots \varepsilon_n^2$. Lässt man i die Werthereihe 1, 2, ... n durchlaufen, d. h. bildet man die entsprechenden zwei Gleichungen für jede Schichte, so erhält man $2n$ lineare Gleichungen zwischen den $2n$ unbekannten Excentricitätsquadraten, die sich also hierdurch eindeutig bestimmen. Auch sind die für dieselben sich ergebenden Werthe im Allgemeinen sehr kleine. Hat man also ein System beliebiger

Flüssigkeitsschichten, welche über einem wenig excentrischen ellipsoidischen festen Kerne ausgebreitet sind, und lässt das ganze System um eine der Axen des festen Kernes mit kleiner Winkelgeschwindigkeit rotiren, so ist ein einziger Gleichgewichtszustand möglich, bei welchem alle Grenzflächen der einzelnen flüssigen Schichten Ellipsoide von geringen Excentricitäten werden, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleichgerichtet sind.

4. Ist das feste Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so wird $P = Q$, $\varepsilon' = e'$, woraus folgt, dass, da die Coefficienten der Gleichungen für die Excentricitäten e und ε jetzt einander gleich werden, auch die ellipsoidischen Grenzflächen der verschiedenen Schichten der Flüssigkeit jetzt Rotationsellipsoide werden.

Obige zwei Gleichungen liefern auch dann noch für die Excentricitäten e und ε eindeutige und im Allgemeinen auch kleine Werthe, wenn $\vartheta = 0$ ist, woraus folgt, dass der oben definirte Gleichgewichtszustand auch dann noch ein möglicher ist, wenn das System keine Rotationsbewegung besitzt.

Ohne das vorliegende allgemeine Theorem in seinen Specialfällen zu discutiren, wollen wir nur noch zeigen, wie die Formeln dieses Paragraphen als Grundlage für eine Theorie der Gestalt der Erde dienen können.

§ 8. Zusammenhang zwischen der Dichtigkeit und der Abplattung der inneren Erdschichten.

Lässt man in § 2 die Annahme eines festen Kernes fallen, so wird $P = Q = M = 0$, $e' = \varepsilon' = 0$; also ist auch jetzt ein einziger Gleichgewichtszustand möglich, bei welchem alle Grenzflächen der einzelnen Schichten der Flüssigkeit concentrische Rotationsellipsoide werden, deren gemeinschaftliche Axe die Gerade ist, um welche das System sich dreht. Die Excentricitäten der einzelnen n-Flächen bestimmen sich durch ein System von n linearen Gleichungen, welches durch die folgende eine repräsentirt ist, in der i alle Werthe von 1 bis n zu durchlaufen hat:

$$\tfrac{3}{5}\sum_{0}^{c_i}\varrho\,\Delta(c^3)\,e_i^2 - \sum_{0}^{c_i}\varrho\,\Delta(c^3 e^2) - c_i^5\sum_{c_{i+1}}^{c_n}\varrho\,\Delta\left(\frac{e^2}{c^2}\right) = \frac{5 c_i^5 \vartheta^2}{4\pi f}.$$

Im Folgenden soll nun ϱ eine stetige Function des Polarhalbmessers c sein. Dann verwandelt sich obige Gleichung, wenn wir c_1 und e_1 statt c_n und e_n für die Werthe c und e an der Oberfläche setzen, in die folgende:

$$\tfrac{3}{5}\int_{0}^{c}\varrho\, d(c^3)\,.\,e^2 - \int_{0}^{c}\varrho\, d(c^3 e^2) - c^5\int_{c}^{c_1}\varrho\, d\left(\frac{e^2}{c^2}\right) = \frac{5 c^5 \vartheta^2}{4\pi f}.$$

Die Abplattung $\frac{a-c}{c}$ irgend einer der ellipsoidischen Flüssigkeitsschichten werde mit q bezeichnet; dann ist $\frac{e^2}{c^2}=q\,(2+q)$, also bei dem hier anzustrebenden Grade der Genauigkeit $q=\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{c^2}$. Unsere nächste Aufgabe ist es nun, dieselbe als Function von c zu bestimmen, wenn ϱ als Function von c gegeben ist. Führen wir statt der Excentricität die Abplattung ein, so kommt

$$\tfrac{1}{3}c^2 q\int_0^c \varrho\, d\,(c^3)-\tfrac{1}{5}\int_0^c \varrho\, d\,(c^5 q)-\frac{c^5}{5}\int_c^{c_1}\varrho\, dq=\frac{c^5\vartheta^2}{8\pi f}$$

und nach Ausführung der Differentiation

$$c^2 q\int_0^c \varrho\, c^2\, dc-\int_0^c \varrho\, q\, c^4\, dc-\tfrac{1}{5}\int_0^c \varrho\, c^5\frac{dq}{dc}\,dc-\frac{c^5}{5}\int_c^{c_1}\varrho\frac{dq}{dc}\,dc=\frac{c^5\vartheta^2}{8\pi f}.$$

Um q ganz aus den Integralen zu entfernen, differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach dem variabeln Polarhalbmesser c. Die erste Differentiation liefert, wenn man zugleich mit c^4 dividirt, um durch die zweite Differentiation das Glied mit ϑ zu entfernen:

$$\frac{2q}{c^3}\int_0^c \varrho\, c^2\, dc+\frac{1}{c^2}\,\frac{dq}{dc}\int_0^c \varrho\, c^2\, dc-\int_c^{c_1}\varrho\frac{dq}{dc}\,dc=\frac{5\vartheta^2}{8\pi f}.$$

Die zweite Differentiation liefert

$$7)\qquad \frac{d^2q}{dc^2}+\frac{2\varrho c^2}{\int_0^c \varrho\, c^2\, dc}\,\frac{dq}{dc}+2\left(\frac{\varrho c}{\int_0^c \varrho\, c^2\, dc}-\frac{3}{c^2}\right)q=0.$$

Es ist dies eine lineare Differentialgleichung in Hinsicht auf q, welche sich auch bei Laplace (*Méc. cél. l.* 3, *n.* 30) in fast ganz gleicher Gestalt findet. Ist ϱ als Function von c gegeben, so werden die Coefficienten derselben auch bekannte Functionen von c; sie ist also dann integrabel und bestimmt somit q als Function von c.

Auf specielle Annahmen über die unbekannte Function ϱ wollen wir hier nicht eingehen (vergl. hierüber die Abhandlung von Lipschitz, Crelle's Journal Bd. 62) und nur noch zeigen, wie sich das Clairot'sche Theorem aus Gleichung 6) ergiebt.

§ 4. Zusammenhang zwischen der Anziehung und Abplattung an der Oberfläche der Erde.

Die Componente der Schwere in einem Punkte der Oberfläche, d. h. der gesammten dort wirkenden Kraft, wie sie sich aus der reinen Anziehung und der Centrifugalkraft zusammensetzt, sind die partiellen Differentialquotienten der folgenden Function U, unter V wieder das Potential verstanden:

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2) + Vf,$$

oder nach Entwickelung von V, unter r den Radius vector verstanden:

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2(x^2+y^2) + f\left\{\frac{M}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P(x^2+y^2)}{r^5}\right\},$$

wobei gesetzt ist [vergl. Gleich. 6)]

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^{c_1}\varrho\, d(c^3 + ce^2), \quad P = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^{c_1}\varrho\, d(c^3 e^2).$$

1. Da die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Niveaufläche ist, so muss die Richtung der Schwere oder Gesammtkraft in jedem Punkte derselben auf ihr senkrecht stehen, und wir müssten also, um die ganze Intensität der Schwere in einem Punkte der Oberfläche zu erhalten, U nach der Normalen der Oberfläche in diesem Punkte differentiiren. Statt dessen können wir aber auch U nach r oder dem Radius vector differentiiren, da der Cosinus des Winkels zwischen Normale und Radius vector erst um eine kleine Grösse zweiter Ordnung von der Einheit abweicht. Um U nach der Richtung des Radius vector bequem differentiiren zu können, führen wir in diesen Ausdruck den Winkel φ ein, den der Radius vector mit der xy-Ebene oder der Aequatorealebene macht. Dieser Winkel wird sonst als „verbesserte Breite" bezeichnet und ist für die Erde von der „Breite" oder Polhöhe nur um eine kleine Grösse erster Ordnung verschieden. Wir setzen also $x^2 + y^2 = r^2 \cos\varphi^2$ und haben darnach

$$U = \tfrac{1}{2}\vartheta^2 r^2 \cos\varphi^2 + f\left\{\frac{M}{r} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{r^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{r^3}\right\},$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \vartheta^2 r \cos\varphi^2 - f\left\{\frac{M}{r^2} - \tfrac{3}{5}\frac{P}{r^4} + \tfrac{9}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{r^4}\right\}.$$

Um beide Formeln auf die Oberfläche anzuwenden, setzen wir in dem ersten Gliede des eingeklammerten Ausdruckes bezüglich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c_1} - \frac{e_1^2\cos\varphi^2}{2c_1^3}; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} - \frac{e_1^2\cos\varphi^2}{c_1^4},$$

wie sich aus dem früher (I. Theil, § 1) benutzten Ausdrucke

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{e^2x^2 + \varepsilon^2 y^2}{2c^4}\right)$$

ergiebt. In allen übrigen Gliedern, die schon kleine Factoren enthalten, ist r einfach durch c_i zu ersetzen. Deuten wir die Werthe von U und $\frac{\partial U}{\partial r}$ für die Oberfläche mit U_{c_1} und $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1}$ an, so ist demnach

$$U_{c_1} = \tfrac{1}{2}\vartheta^2 c_1^2 \cos\varphi^2 + f\left\{\frac{M}{c_1} - \tfrac{1}{5}\frac{P}{c_1^3} - \frac{M e_1^2 \cos\varphi^2}{2c_1^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{c_1^3}\right\},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1} = \vartheta^2 c_1 \cos\varphi^2 - f\left\{\frac{M}{c_1^2} - \tfrac{3}{5}\frac{P}{c_1^4} - \frac{M e_1^2 \cos\varphi^2}{c_1^4} + \tfrac{9}{10}\frac{P\cos\varphi^2}{c_1^4}\right\}.$$

Aus dem letzten Ausdrucke müssen wir P wegschaffen. Die Bedingung, dass U_{c_1} für die ganze Oberfläche constant sein muss, erfordert die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\vartheta c_1^2 + f\left(-\frac{M e_1^2}{2c_1^3} + \tfrac{3}{10}\frac{P}{c_1^3}\right) = 0.$$

Hieraus folgt für P

$$\frac{P}{c_1^3} f = -\tfrac{5}{3}\vartheta^2 c_1^2 + \tfrac{5}{3}\frac{M e_1^2 f}{c_1^3}.$$

Demgemäss erhalten wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1} = -\left[\vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1^2}\left(1 - \frac{e_1^2}{c_1^2}\right)\right] + \left[\tfrac{5}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1^2 f}{c_1^4}\right]\cos\varphi^2.$$

Bezeichnet nun g den absoluten Werth der Intensität der Schwere, so ist

$$g = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{c_1}.$$

Daraus folgt

$$g = A - B\cos\varphi^2,$$

wo

$$A = \vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1^2}\left(1 - \frac{e_1^2}{c_1^2}\right), \quad B = 2\tfrac{1}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1^2 f}{c_1^4}.$$

Da wegen der Kleinheit der Aenderungen der Schwere an der Erdoberfläche B klein sein muss gegen A, so kann man bei Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen zweiter Ordnung statt φ die „Breite" oder Polhöhe ψ schreiben:

$$g = A - B\cos\psi^2.$$

In diesem Resultate spricht sich der bekannte Satz aus, dass die Abnahme der Schwere von den Polen nach dem Aequator hin proportional dem Quadrate des Cosinus der Breite ist.

2. Ist g_p und g_q bezüglich die Intensität der Schwere an den Polen und am Aequator, so ist

$$g_p = A, \quad g_q = A - B.$$

Hiernach haben wir also

$$g_p = \vartheta^2 c_1 + \frac{Mf}{c_1^2}\left(1 - \frac{e_1^2}{c_1^2}\right), \quad g_p - g_q = \tfrac{5}{2}\vartheta^2 c_1 - \tfrac{1}{2}\frac{M e_1^2 f}{c_1^4}.$$

Wir wollen hier für $\frac{e_1^2}{c_1^2}$ wieder den sehr nahe gleichen Ausdruck $2q_1$ setzen, unter q_1 die Abplattung $\frac{a_1-c_1}{c_1}$ verstanden. Dann erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$q_1=\frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 c_1-(g_p-g_q)}{\frac{Mf}{c_1^2}}.$$

Für den Nenner dieses Ausdruckes, der in erster Annäherung die Schwere an der Erdoberfläche darstellt, können wir, da im Zähler kleine Grössen stehen, an sich beliebig g_p oder g_q, oder irgend einen mittlern Werth von g setzen. Am genauesten aber verfährt man, wie es scheint, in folgender Weise. Man setzt in die erste der obigen zwei Gleichungen für q_1 den Näherungswerth ein, den man erhält, wenn man im Nenner des vorigen Ausdruckes $\frac{Mf}{c_1^2}$ einfach durch g_p ersetzt. Dieselbe liefert dann bei angenäherter Entwickelung

$$\frac{Mf}{c_1^2}=g_p+4\vartheta^2 c_1-(g_p-g_q).$$

Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in die obige Formel für die Abplattung der Erde ein. Dann haben wir endlich

$$8)\qquad q_1=\frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 c_1-(g_p-g_q)}{g_q+4\vartheta^2 c_1-(g_p-g_q)}.$$

Für den Polarhalbmesser c_1 können wir wegen des sehr kleinen Factors ϑ^2 auch den mittlern Erdhalbmesser oder den Halbmesser a_1 des Aequators setzen. Schreibt man, was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, statt des Nenners blos g_q, so hat man

$$q_1=\frac{2\frac{1}{2}\vartheta^2 a_1-(g_p-g_q)}{g_q}.$$

In dieser Gestalt wurde das Theorem von Clairaut entdeckt und lautet in Worten: Die Abplattung der Erde, vermehrt um den Quotienten aus dem Ueberschusse der Schwere an den Polen über die am Aequator, und der Schwere am Aequator ist gleich dem $2\frac{1}{2}$fachen des Quotienten aus der Centrifugalkraft am Aequator und der Schwere am Aequator.

Die letzte Gleichung liefert für die Abplattung der Erde den Werth $\frac{1}{2\,8\,0}$, während sich aus Gleichung 8) der Werth $\frac{1}{2\,9\,3}$ ergiebt.

Kleinere Mittheilungen.

I. Aufgabe.

Nach der vierten meiner Vorlesungen über Homographie, welche von einem neuen Uebertragungsprincip handelt, entspricht jedem Punktepaare auf der Fundamentallinie eindeutig ein Punkt p in der Ebene. Wenn das Punktepaar auf der Fundamentallinie fortrückt, ohne dass das von demselben begrenzte Stück der Fundamentallinie sich der Grösse nach ändert, so soll der geometrische Ort des Punktes p gefunden werden.

Für einen ganz speciellen Fall ist die Auflösung der Aufgabe nach der vierten Vorlesung bekannt. Bildet nämlich das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie fortrücken soll, einen Doppelpunkt, so entsprechen den Doppelpunkten auf der Fundamentallinie in der Ebene Punkte, welche auf der Directrix liegen. In diesem Falle beschreibt der Punkt p also einen Kegelschnitt. Wir werden nun untersuchen, ob im allgemeinen Falle eine Aenderung eintritt.

Das gegebene Punktepaar, welches auf der Fundamentallinie das gegebene Stück a begrenzen soll, nehmen wir der Einfachheit wegen als das Fundamentalpunktepaar, dessen Gleichungen in der Normalform gegeben sein mögen:

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0.$$

Die Punkte dieses Paares gehen nach der Verrückung um die Entfernung r in zwei andere über, deren Gleichungen nach 32) der ersten Vorlesung von der Form sind:

$$T_0 - \lambda_0 T_1 = 0, \quad T_0 - \lambda_1 T_1 = 0,$$
$$\lambda_0 = \frac{r}{r-a}, \quad \lambda_1 = \frac{r+a}{r}.$$

Nehmen wir nun an, dass A, B, C gegebene lineare Ausdrücke in Punktcoordinaten des Punktes p seien, so müssen dieselben der Gleichung genügen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wenn man darin für λ setzt λ_0 und λ_1.

Wir haben demnach zur Bestimmung des Punktes p die beiden, die willkürliche Grösse r involvirenden Relationen:

$$A(r-a)^2+Br(r-a)+Cr^2=0,$$
$$Ar^2+Br(r+a)+C(r+a)^2=0.$$

Sie stellen zwei Tangenten der Directrix dar, welche sich in dem Punkte p schneiden.

Die Elimination von r aus den beiden Gleichungen ergiebt:

$$(A+B+C)^2-(B^2-4AC)=0,$$

somit einen Kegelschnitt als geometrischen Ort des Punktes p.

Da die letzte Gleichung linear zusammengesetzt ist aus der Gleichung

$$B^2-4AC=0$$

der Directrix und dem Quadrate der Gleichung einer geraden Linie

$$A+B+C=0,$$

so beweist dieses, dass der Kegelschnitt, welcher der geometrische Ort des Punktes p ist, die Directrix immer in zwei Punkten berührt.

Man kann darin einen Widerspruch finden. Denn der Berührungspunkt des Kegelschnittes und der Directrix entspricht, weil er auf dem Kegelschnitte liegt, einem Punktepaare auf der Fundamentallinie, welches das Stück a begrenzt; er entspricht zugleich einem Doppelpunkte der Fundamentallinie, weil er der Directrix angehört. Dieser Widerspruch wird allein beseitigt, wenn der Doppelpunkt und das von dem Kegelschnitte herrührende Punktepaar beide im Unendlichen liegen. Nun haben wir aber zwei Berührungspunkte des Kegelschnittes und der Directrix. Da für den zweiten Berührungspunkt dasselbe gilt, so müssen die beiden Berührungspunkte zusammenfallen und die gerade Linie $A+B+C=0$ Tangente der Directrix sein.

Hieraus schliessen wir endlich, dass der geometrische Ort des Punktes p ein Kegelschnitt ist, welcher die Directrix in einem Punkte vierpunktig berührt, und dieser Berührungspunkt entspricht auf der Fundamentallinie dem Doppelpunkte im Unendlichen.

Dasselbe ergiebt sich analytisch aus einer der mit r behafteten Gleichungen, wenn man $r=\infty$ setzt.

Von einem andern, unverändert auf der Fundamentallinie fortrückenden Punktepaare lässt sich Gleiches sagen. Daraus ziehen wir den Schluss:

Wenn man auf der Directrix den Punkt fixirt, der dem auf der Fundamentallinie unendlich entfernten Punkte entspricht, und einen beliebigen Kegelschnitt construirt, der die Directrix in jenem Punkte vierpunktig berührt, so entsprechen den Punkten des Kegelschnittes Punktepaare auf der Fundamentallinie, deren jedes dasselbe Stück auf der Fundamentallinie begrenzt.

O. Hesse.

II. Ueber Flächen von gegebenen Eigenschaften.

Eine im Punkte xyz einer Fläche auf letzterer errichtete Normale schneidet die Horizontalebene xy unter einem Neigungswinkel ν, welcher bekanntlich durch die Formel

$$1)\qquad cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

bestimmt wird. Ist z eine explicite Function von x, y, und wird dem Winkel ν irgend ein constanter Werth ertheilt, so gilt die vorige Gleichung für die Horizontalprojectionen aller derjenigen Flächenpunkte, deren Normalen unter jenem constanten Winkel gegen den Horizont geneigt sind, d. h. die Gleichung 1) ist die Gleichung der Horizontalprojection der sogenannten Curve isokliner Normalen, welche jenem Winkel entspricht. Diese Betrachtung lässt sich auf folgende Weise umkehren. In der Gleichung

$$cot\,\nu = \psi(x, y)$$

bezeichne $\psi(x, y)$ eine gegebene Function von x und y; zu jedem constanten ν gehört dann die im Voraus bestimmte Curve, und die Aufgabe ist nun, die entsprechende Fläche zu finden. Mit anderen Worten, es handelt sich um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$2)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = [\psi(x, y)]^2;$$

einige Bemerkungen hierüber sind vielleicht nicht überflüssig.

Der vorstehenden Gleichung genügt man zunächst durch die Annahme

$$3)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \psi(x, y)\cos\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x, y)\sin\omega,$$

worin ω einen unbekannten, von x und y unabhängigen Bogen bezeichnet. Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach y, die zweite nach x, so erhält man linker Hand dasselbe, mithin ist durch Vergleichung der rechten Seiten, wenn für $\psi(x, y)$ kurz ψ geschrieben wird,

$$4)\qquad \cos\omega\,.\frac{\partial\omega}{\partial x} + \sin\omega\,.\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial l\psi}{\partial y}\cos\omega - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\sin\omega.$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung lässt sich nach dem bekannten allgemeinen Verfahren auf die beiden simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen

$$\cos\omega\,.\,dy - \sin\omega\,.\,dx = 0,$$

$$\cos\omega\,.\,d\omega - \left(\frac{\partial l\psi}{\partial y}\cos\omega - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\sin\omega\right)dx = 0$$

oder

$$5)\qquad \frac{dy}{dx} = \tan\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial l\psi}{\partial y} - \frac{\partial l\psi}{\partial x}\tan\omega.$$

Die Integrale derselben mögen sein

$$\varphi(x, y, \omega) = c, \quad \Phi(x, y, \omega) = C,$$

das allgemeine Integral von 4) ist dann

$$6)\qquad C = F(c) \text{ oder } \Phi(x, y, \omega) = F[\varphi(x, y, \omega)].$$

Hieraus ergeben sich ω, $\cos\omega$, $\sin\omega$, und dann ist nach Nr. 3)

$$7)\qquad z = \int \psi . \cos\omega\, \partial x = \int \psi . \sin\omega\, \partial y,$$

wobei sich die Integrationen partiell auf x, resp. y beziehen.

Ein Beispiel hierzu bietet die Annahme

$$\cot\nu = \frac{h}{Ax + By},$$

bei welcher [wie überhaupt im Falle $\cot\nu = f(Ax + By)$] die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen eine Schaar von parallelen Geraden bilden. Aus Nr. 4) wird dann

$$8)\qquad \cos\omega . \frac{\partial\omega}{\partial x} + \sin\omega . \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{A\sin\omega - B\cos\omega}{Ax + By}$$

und die Gleichungen 5) sind

$$9)\qquad \frac{dy}{dx} = \tan\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{A\tan\omega - B}{Ax + By}.$$

Giebt man der zweiten Gleichung die Form

$$Ax + By = \frac{A\tan\omega - B}{\omega'},$$

differenzirt sie nach x und ersetzt linker Hand $\frac{dy}{dx}$ durch $\tan\omega$, so erhält man sehr einfach

$$\omega'' = \omega'^2 \tan\omega$$

und hieraus nacheinander

$$\omega' = \frac{1}{c . \cos\omega}, \quad \sin\omega = \frac{x + c_1}{c},$$

mithin nach der zweiten Gleichung in 9)

$$\frac{Ax + By}{A\sin\omega - B\cos\omega} = c.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung und setzt $c_1 = BC$, so wird

$$\frac{x\cos\omega + y\sin\omega}{A\sin\omega - B\cos\omega} = C.$$

Das Integral der partiellen Differentialgleichung 7) ist demnach

$$10)\qquad \frac{x\cos\omega + y\sin\omega}{A\sin\omega - B\cos\omega} = F\left(\frac{Ax + By}{A\sin\omega - B\cos\omega}\right).$$

Um für einen einfachen Fall die Rechnung völlig auszuführen, nehmen wir $F(u)=u$, $A=\cos\gamma$, $B=\sin\gamma$; die beiden Auflösungen der Gleichung

$$x\cos\omega+y\sin\omega=x\cos\gamma+y\sin\gamma$$

sind dann

$$\omega=\gamma \text{ und } \omega=2\,\mathrm{arctan}\frac{y}{x}-\gamma.$$

Die erste Auflösung liefert nach Nr. 3), wenn k_1 die Integrationsconstante bezeichnet,

$$z=\int\frac{h\cos\gamma}{x\cos\gamma+y\sin\gamma}\partial x=hl\left(\frac{x\cos\gamma+y\sin\gamma}{k_1}\right)$$

oder in homogener Form

$$z=hl\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Die zweite Auflösung giebt

$$\begin{aligned} z&=\int\frac{h}{x\cos\gamma+y\sin\gamma}\cdot\frac{(x^2-y^2)\cos\gamma+2xy\sin\gamma}{x^2+y^2}\partial x\\ &=hl\left[\frac{x^2+y^2}{k_2(x\cos\gamma+y\sin\gamma)}\right]\end{aligned}$$

oder in homogener Form

$$z=hl\left(\frac{x^2+y^2}{ax+by}\right).$$

Die anfängliche allgemeine Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe von Cylindercoordinaten behandeln. Für $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ geht nämlich die Gleichung 1) in die folgende über

$$\cot^2\nu=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2,$$

und wenn nun eine Gleichung von der Form

$$\cot\nu=\psi(r,\theta)$$

gegeben ist, so handelt es sich, analog Nr. 2), um die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$11)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=[\psi(r,\theta)]^2.$$

Aus dieser erhält man, wenn

$$12)\qquad \frac{\partial z}{\partial r}=\psi(r,\theta)\cos\omega,\qquad \frac{\partial z}{\partial\theta}=r\psi(r,\theta)\sin\omega$$

gesetzt und im Uebrigen wie früher verfahren wird,

$$13)\qquad r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}+\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=\frac{\partial l\psi}{\partial\theta}\cos\omega-\left(r\frac{\partial l\psi}{\partial r}+1\right)\sin\omega.$$

Diese partielle Differentialgleichung zerfällt in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

14) $$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=\frac{\partial l\psi}{\partial\theta}-\left(r\frac{\partial l\psi}{\partial r}+1\right)\tan\omega,$$

deren Integrale

$$\varphi(r,\theta,\omega)=c,\quad \Phi(r,\theta,\omega)=C$$

sein mögen. Das allgemeine Integral von Nr. 13) ist dann

15) $$C=F(c)\ \text{oder}\ \Phi(r,\theta,\omega)=F[\varphi(r,\theta,\omega)]$$

und schliesslich geben die Gleichungen 12)

16) $$z=\int\psi.\cos\omega\,\partial r=\int r\psi.\sin\omega\,\partial\theta.$$

Wenn ψ eine Function von r allein ist, so bilden die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen eine Schaar concentrischer Kreise, und die Gleichungen 13) und 14) werden dann weit einfacher. Z. B. für

$$\cot\nu=\frac{a}{r}$$

gehen die Gleichungen 14) über in

$$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=0;$$

die zweite liefert $\omega=c$ und nachher die erste

$$\theta=lr.\tan c-C\ \text{oder}\ lr.\tan\omega-\theta=C;$$

das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}+\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=0$$

ist daher

$$lr.\tan\omega-\theta=F(\omega).$$

Dem speciellen Falle $F(\omega)=lb.\tan\omega$ entspricht die Auflösung

$$\tan\omega=\frac{\theta}{l\left(\frac{r}{b}\right)},\quad z=\int\frac{a}{r}\cos\omega\,\partial r=a\sqrt{\left[l\left(\frac{r}{b}\right)\right]^2+\theta^2}.$$

Ein bemerkenswerthes Resultat giebt die Annahme

$$\cot\nu=\frac{r}{a}.$$

Die Gleichungen 14) sind dann

$$r\frac{d\theta}{dr}=\tan\omega,\quad r\frac{d\omega}{dr}=-2\tan\omega,$$

aus denen man zunächst $2\,d\theta+d\omega=0$ oder

$$2\theta+\omega=c$$

erhält und ausserdem durch Integration der zweiten Gleichung

$$r^2\sin\omega=C.$$

Das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$r \cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial r} + \sin\omega \frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -2\sin\omega$$

ist hiernach

$$r^2 \sin\omega = F(\omega + 2\theta).$$

Die specielle Wahl $F(\omega + 2\theta) = b^2 \sin(\omega + 2\theta)$ liefert

$$\tan\omega = \frac{b^2 \sin 2\theta}{r^2 - b^2 \cos 2\theta}, \quad z = \int \frac{r}{a} \cos\omega \,\partial r,$$

d. i.

$$z = \frac{\sqrt{r^4 - 2b^2 r^2 \cos 2\theta + b^4}}{2a}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$4a^2 z^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + b^4.$$

Wie eine leichte Discussion zeigt, besteht jede der beiden Verticalspuren dieser Fläche aus zwei sich schneidenden Parabeln; die Horizontalschnitte sind Cassini'sche Curven, die für $z < \frac{b^2}{a}$ zwei geschlossene Blätter bilden, für $z = \frac{b^2}{a}$ in Lemniscaten übergehen und für $z > \frac{b^2}{a}$ zu Ovalfiguren werden; die Inflexionspunkte der letzteren haben die Lemniscate $r^2 = -b^2 \cos 2\theta$ zur Horizontalprojection.

Schlömilch.

III. Sätze über die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von Quadratzahlen.

In den folgenden Sätzen bedeuten λ, μ, ν die Null und alle ganzen Zahlen.

I. Die Zahlen von der Form

$$(8\lambda + 7)4^\mu$$

sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als vier Quadratzahlen darstellen lassen.

II. Die Zahlen von der Form

$$(4\lambda + 3)2^\mu$$

und alle, welche durch Multiplication von je zwei solchen Zahlen, die relative Primzahlen sind, entstehen, sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als drei Quadratzahlen darstellen lassen.

III. Die Zahlen von der Form

$$[4(\lambda^2 + \nu^2 + \nu) + 1]2^\mu$$

sind diejenigen, welche sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lassen.

IV. Multiplicirt man je n Zahlen von der Form

$$4(\lambda^2 + \nu^2 + \nu) + 1,$$

die nicht alle einander gleich sind, untereinander und noch mit 2^μ, so erhält man diejenigen Zahlen, welche auf $n$fache Weise als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar sind.

V. Die Gleichung

$$x^2+y^2=2z^2$$

wird in ganzen Zahlen gelöst durch die Werthe

$$x=2\lambda\mu+(\lambda^2-\mu^2),\quad y=2\lambda\mu-(\lambda^2-\mu^2),\quad z=\lambda^2+\mu^2.$$

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

IV. Construction für die Krümmungsmittelpunkte von Ellipsen und Hyperbeln.

Es sei C der Mittelpunkt einer Ellipse, P ein Peripheriepunkt derselben, durch welchen eine Normale gelegt ist, die in M die grosse, in N die kleine Axe schneidet, und welche von der in C auf CP errichteten Senkrechten in Q getroffen wird; trägt man nun von M nach N hin die Strecke $MR=NQ$ ab, so ist R der zum Punkte P gehörende Krümmungsmittelpunkt.

Für die Hyperbel bleibt die Construction im Wesentlichen dieselbe; für die Parabel wird sie selbstverständlich illusorisch.

Die Aufsuchung des Beweises möge dem Leser überlassen bleiben, da dieselbe keine Schwierigkeiten darbietet.

Tarnowitz. Dr. Geisenheimer,
Bergschul-Director.

V.

Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective.

Von

GUIDO HAUCK,

Professor an der Oberrealschule und Hilfslehrer an der Universität zu Tübingen.

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—7.)

Definiren wir die Axonometrie allgemein als Methode, welche lehrt, perspectivische Bilder von Objecten, die durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte gegeben sind, dadurch zu verfertigen, dass die projicirenden Parallelepipeda der einzelnen Objectpunkte abgebildet werden, so müssen wir die Vaterschaft dieser Disciplin Desargues zuerkennen. Seine „*Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis etc.*“ (*Paris* 1636)* behandelt die Centralperspective in dem genannten Sinne und stellt damit die Grundzüge der axonometrischen Methode fest. Die eigentliche Carrière der Axonometrie knüpft sich jedoch erst an die Namen Weisbach und Pohlke. Erst durch die Einführung der rationalen Verhältnisse der Einheiten der Massstäbe** und die Aufstellung und Verwerthung des Pohlke'schen Satzes*** hat die an und für sich alte Methode die Leichtigkeit und Handlichkeit erlangt, die eben das Charakteristische der modernen Axonometrie ausmacht. Beide Errungenschaften erstrecken sich nun aber blos auf die Parallelperspective. Wir hatten bisher in der Centralper-

* Vergl. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra. Paris 1864. T. 1, pag. 55—95.*

** Vergl. Weisbach, Die monodimetrische und anisometrische Projectionsmethode. In den polytechn. Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Tübingen 1844 S. 125—140.

*** Vergl. Pohlke, Darstellende Geometrie, I. Abthlg., 3. Aufl. Berlin 1872. S. 112—115 — Ferner: Schwarz, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. In Crelle's Journal Bd. 63, S. 309—314.

spective weder ein Analogon für die rationalen Verhältnisse der Massstäbe, noch für den Pohlke'schen Satz. So kam es, dass trotz Desargues' Anregung die moderne Axonometrie die Centralperspective ganz ausserhalb ihres Bereichs liess. — Eine leidige Folge hiervon war, dass sich für die Centralperspective und Parallelperspective zwei von Grund aus verschiedene Behandlungsweisen ausbildeten, welche beide Perspectiven als ihrem Wesen nach heterogen erscheinen lassen, während doch in Wahrheit die eine nur ein Specialfall der andern ist.

In einer im verflossenen Sommersemester an hiesiger Hochschule von mir gehaltenen Vorlesung über Perspective suchte ich die oben angedeuteten Lücken auszufüllen durch Aufstellung einer allgemeinen axonometrischen Theorie und damit gleichzeitig einen einheitlichen Gesichtspunkt zu gewinnen, von dem aus sich das gesammte Gebiet der darstellenden Perspective (incl. Reliefperspective) behandeln lässt. Durch diese Theorie wird vor Allem zwischen der Centralperspective und Parallelperspective die gebührende enge Beziehung hergestellt, insofern sich sämmtliche axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective unmittelbar aus denen der Centralperspective als einfache Modificationen ergeben. Durch die Constatirung der Thatsache, dass den bekannten axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective auch eine Bedeutung in der Centralperspective zukommt,* gewinnen diese ein neues Interesse. Der Umstand ferner, dass die allgemein übliche Methode der Linearperspective sich aus unserer Theorie gleichsam spielend ergiebt,** lässt auch diese in einem neuen Lichte erscheinen.

Vorliegende Mittheilung ist ein Auszug aus der von mir in nächster Zeit beabsichtigten Publication meiner Vorlesungen. — Die Uebertragung der Theorie auf die Reliefperspective und die projectivische Collineation behalte ich einer spätern Mittheilung vor.

---

§ 1.
Exposition.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem o, xyz *** bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen centralperspectivisches Bild zu construiren, wenn die relative Lage von Bildebene und Auge gegen das Object gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

---

* Vergl. z. B. Gleichungen 39) und 56).

** Vergl. S. 96, Zeile 19 flgg.

*** Mit Rücksicht auf Objecte aus der Natur denken wir uns die z-Axe vertical.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der Dreistrahl ω, $\xi\eta\zeta$. (Fig. 1.) Derselbe ist bestimmt durch die drei Winkel $\xi\omega\eta$, $\eta\omega\zeta$, $\zeta\omega\xi$, die wir die scheinbaren Axenwinkel nennen und mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen.

Wir denken uns ferner die x-Coordinaten der einzelnen Punkte des Objects auf der x-Axe aufgetragen, sie seien $oX = x$, $oX' = x'$, $oX'' = x''$ u. s. f. Die Bilder der Punkte X, X', ... seien Ξ, Ξ', ... Wir bezeichnen die Abscissen dieser Punkte $\omega\Xi$, $\omega\Xi'$, ... durch ξ, ξ', .. und nennen diese Grössen die reducirten x-Coordinaten.

Es bilden nun die Punkte X und Ξ zwei projectivische Punktreihen. Jedem Punkte der einen Reihe entspricht ein und nur ein Punkt der andern Reihe. Der analytische Ausdruck hierfür ist eine zwischen den Abscissen x und ξ zweier entsprechenden Punkte X und Ξ bestehende Gleichung, die sowohl nach x als nach ξ linear ist und deren Absolutglied $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch $\xi = 0$ wird. Diese Gleichung sei

1) $$x\xi - f_1 x - g_1 \xi = 0.$$

Dann folgt aus ihr für ξ der Ausdruck

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}.$$

Die geometrische Bedeutung der beiden Grössen f_1 und g_1 ergiebt sich leicht. Für $x = g_1$ wird $\xi = \infty$. Also ist g_1 die Abscisse desjenigen Punktes G_1 der Punktreihe X, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe Ξ entspricht. Andererseits zeigt die nach x aufgelöste Gleichung, dass f_1 die Abscisse desjenigen Punktes F_1 der Punktreihe Ξ ist, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe X entspricht. Wir nennen F_1 den Fluchtpunkt der ξ-Axe, G_1 den Gegenpunkt der x-Axe.*

Gleiches gilt für die zwei anderen Axen. Bezeichnen wir also die Fluchtpunkte der drei Axen mit F_1, F_2, F_3, und deren Abscissen mit f_1, f_2, f_3, ferner die drei Gegenpunkte mit G_1, G_2, G_3, und deren Abscissen mit g_1, g_2, g_3, so haben wir für die reducirten Coordinaten folgende Ausdrücke:

I. 2) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3}.$$

Wir nennen die drei Grössen f_i die drei Fluchtstrecken, die drei Grössen g_i die drei Gegenstrecken. Fluchtstrecken und Gegenstrecken fassen wir zusammen unter dem gemeinsamen Namen: die sechs Reductionsconstanten.

---

* Gewöhnlich gebraucht man für die Punkte F und G eine und dieselbe Benennung. Die Einführung verschiedener Namen in der darstellenden Perspective erscheint gerechtfertigt als mit der Unterscheidung zwischen Originalfigur und Bildfigur correspondirend. Wir werden ebenso in der Reliefperspective unterscheiden zwischen „Fluchtebene“ und „Gegenebene“.

Vergegenwärtigen wir uns, dass die Bilder aller mit einer der drei Coordinatenaxen parallelen Geraden sich in dem zugehörigen Fluchtpunkte schneiden müssen, dass ferner die Verbindungslinien der drei Fluchtpunkte die Fluchtlinien der drei Coordinatenebenen sind, dass folglich z. B. alle mit der xy-Ebene parallelen Geraden ihre Fluchtpunkte in F_1F_2 haben: so ist es leicht, vorausgesetzt, dass die sechs Reductionsconstanten bekannt seien, das Bild des projicirenden Parallelepipedons irgend eines Objectpunktes P und damit das Bild Π dieses Punktes aufzutragen. Es ist jedoch einleuchtend, dass es nicht nothwendig ist, das vollständige Bild des Parallelepipedons zu zeichnen, um Punkt Π zu erhalten. Es genügt die Zeichnung des in der xy-Ebene liegenden Rechtecks $XoYp$ und des Diagonalrechtecks $ZopP$. Man hat folgende Construction (Fig. 1):

Man trägt zuerst auf den scheinbaren Axen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ die Strecken $\omega F_1 = f_1$, $\omega F_2 = f_2$, $\omega F_3 = f_3$ ab und zieht F_1F_2, bestimmt sodann die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes P nach den Gleichungen I und trägt dieselben auf den scheinbaren Axen in $\omega\Xi$, ωH, ωZ auf. Zieht man hierauf ΞF_2 und HF_1, die sich in π schneiden, so ist $\Xi\omega H\pi$ das Bild des Rechtecks $XoYp$. Man zieht nun $\omega\pi$, welche F_1F_2 in D schneidet, dann ist D der Fluchtpunkt von $\omega\pi$. Zieht man daher schliesslich ZD und πF_3, die sich in Π schneiden, so ist $Z\omega\pi\Pi$ das Bild des Rechtecks $ZopP$, also Π das Bild des Punktes P.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass zur Erledigung der an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Aufgabe blos erforderlich ist die Ermittelung der drei scheinbaren Axenwinkel und der sechs Reductionsconstanten. Wir fassen daher diese neun Grössen zusammen unter dem Namen: die neun axonometrischen Grundconstanten. — Die sechs Grössen, durch welche die Lage von Bildebene und Auge gegen das Object bestimmt ist, nennen wir die sechs Orientirungsconstanten. Unsere Aufgabe kommt hiernach darauf hinaus, die neun axonometrischen Grundconstanten auszudrücken als Functionen der sechs Orientirungsconstanten.

§ 2.

Berechnung der Grundconstanten.

Die Lage des Auges A gegen das Object sei gegeben durch seine auf das Object-Coordinatensystem bezogenen Coordinaten a_1, a_2, a_3. Die Bildebene schneide die drei Coordinatenaxen in den Punkten M_1, M_2, M_3, ihre Lage gegen das Object sei gegeben durch die drei Axenabschnitte $oM_1 = m_1$, $oM_2 = m_2$, $oM_3 = m_3$. — a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3 sind also unsere sechs Orientirungsconstanten.

Der „**Centralstrahl**“ AO schneide die Bildebene in ω. Dann ist ω das Bild des Coordinatenursprungs; ωM_1, ωM_2, ωM_3 sind die Bilder der drei Coordinatenaxen. Wir bezeichnen die drei Strecken ωM_i mit μ_i, ferner Ao mit r, $A\omega$ mit ϱ. — Legt man durch A eine Ebene parallel zur Bildebene, so schneidet diese die drei Axen in den drei Gegenpunkten G_1, G_2, G_3.

Die Gleichung dieser Parallelebene ist

$$3)\qquad \frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}+\frac{z}{m_3}=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}.$$

Führt man der Kürze halber die Bezeichnung ein

$$4)\qquad \varkappa=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3},$$

so erhält man aus Gleichung 3) für die drei Gegenstrecken die Werthe

$$5)\qquad g_i=\varkappa m_i.$$

Als geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ folgt hieraus

$$6)\qquad \varkappa_i=\frac{g_i}{m_i}=\frac{r}{r-\varrho}.$$

Nach dieser Bemerkung haben die Coordinaten des Punktes ω die Werthe $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, und daher erhält man für die Strecken ωM_i die Ausdrücke

$$7)\qquad \mu_i^2=\left(m_i-\frac{a_i}{\varkappa}\right)^2+\frac{a_k^2}{\varkappa^2}+\frac{a_l^2}{\varkappa^2}$$

oder, wenn man der Kürze halber die Bezeichnung einführt:

$$8)\qquad r^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

$$9)\qquad \mu_i^2=m_i^2-2\frac{m_i a_i}{\varkappa}+\frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Diese Werthe setzen uns nunmehr in den Stand, die drei Fluchtstrecken zu berechnen. Da nämlich z. B. Punkt M_1 den zwei Punktreihen X und Ξ entsprechend gemein ist, so hat man vermöge Gleichung I:

$$10)\qquad \mu_i=\frac{f_i m_i}{m_i-g_i}=\frac{f_i m_i}{m_i-\varkappa m_i},$$

woraus

$$11)\qquad f_i=(1-\varkappa)\mu_i.$$

Schliesslich ergeben sich die Werthe für die drei scheinbaren Axenwinkel aus den drei Dreiecken $M_i\omega M_k$:

$$12)\qquad \cos w_{ik}=\frac{\mu_i^2+\mu_k^2-m_i^2-m_k^2}{2\mu_i\mu_k}.$$

Für gewisse Zwecke* ist es vortheilhafter, statt der Grössen a_i und m_i andere Orientirungsconstanten zu benützen. Wir bezeichnen die **Richtungswinkel** des Centralstrahls (d. s. die Winkel, die der Centralstrahl mit den drei Coordinatenaxen macht) mit σ_1, σ_2, σ_3 und nehmen die vier Grössen r, σ_1, σ_2, σ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage des Auges. Wir bezeichnen ferner den Abstand der Bildebene vom Coordinatenursprung mit ε, die Richtungswinkel von ε mit τ_1, τ_2, τ_3, und nehmen die vier Grössen ε, τ_1, τ_2, τ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage der Bildebene. — Um die Grundconstanten auszudrücken in diesen neuen Orientirungsconstanten, wenden wir auf die obigen Gleichungen die Transformationsformeln

$$a_i = r\cos\sigma_i, \tag{13}$$

$$m_i = \frac{\varepsilon}{\cos\tau_i} \tag{14}$$

an und führen die Hilfsgrössen $\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{r}\varkappa$ und $\nu_i = \frac{\mu_i}{\varepsilon}$ ein. Dabei bedeutet der Hilfswinkel φ den von ε und r eingeschlossenen Winkel. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen in der rechten Columne der folgenden Zusammenstellung:

II. $\varkappa = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3}$,

II′. $\cos\varphi = \cos\sigma_1\cos\tau_1 + \cos\sigma_2\cos\tau_2 + \cos\sigma_3\cos\tau_3$,

III. $\mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2}$,

III′. $\nu_i^2 = \frac{1}{\cos^2\tau_i} - 2\frac{\cos\sigma_i}{\cos\tau_i\cos\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}$,

IV. $g_i = \varkappa m_i$,

IV′. $g_i = r\frac{\cos\varphi}{\cos\tau_i}$,

V. $f_i = (1-\varkappa)\mu_i$,

V′. $f_i = (\varepsilon - r\cos\varphi)\nu_i$,

VI. $\cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2}{2\mu_i\mu_k}$,

VI′. $\cos w_{ik} = \frac{\nu_i^2 + \nu_k^2 - \frac{1}{\cos^2\tau_i} - \frac{1}{\cos^2\tau_k}}{2\nu_i\nu_k}$.

§ 3.

Praktisches Verfahren. Reductionsmassstäbe.

Gleichung V liefert für die drei Fluchtstrecken nur die absoluten Werthe. Bezüglich der Vorzeichen, d. h. der Richtungen, in welchen diese absoluten Werthe auf den scheinbaren Axen vom Punkte ω aus abzutragen sind, lässt sich leicht folgender Satz beweisen:

Liegen Coordinatenursprung und Bildebene auf einer und derselben Seite des Auges, so haben für jede der drei Coordinatenaxen die

* Vor Allem für den Fall, dass die Bildebene durch den Coordinatenursprung geht oder dass das Auge ins Unendliche fällt.

Abscissen von Fluchtpunkt und Gegenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen. Liegt das Auge zwischen Coordinatenursprung und Bildebene, so haben sie gleiche Vorzeichen.

Im ersten Falle nennen wir das resultirende Bild ein directes, im letztern Falle ein inverses.*

Nach diesem Satze bestimmen sich die Vorzeichen der drei Grössen f_i aus denen der drei Grössen g_i. Für diese liefert Gleichung IV Zahlenwerth sammt Vorzeichen, und zwar lässt sich bezüglich letzterer vermöge Gleichung 6) folgender Satz aussprechen:

Die Abscissen der Gegenpunkte haben mit den entsprechenden Axenabschnitten gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Bildebene zwischen Auge und Coordinatenursprung oder hinter dem Coordinatenursprung liegt.

Bei der folgenden Darlegung des praktischen Verfahrens nehmen wir an, die Bildebene liege zwischen Auge und Coordinatenursprung, sie gehe im äussersten Falle durch den Coordinatenursprung; es sei also

15) $$r \geqq \varrho > 0.$$

Ferner nehmen wir an, das Auge liege in dem von den positiven Aesten der drei Coordinatenaxen gebildeten Octanten, das Object liege dagegen in dem Octanten $-x$, $-y$, $+z$.** Die Bildebene wählen wir so, dass m_1, m_2, m_3 positiv sind oder dass sie parallel mit einer dieser Annahme entsprechenden Ebene durch den Ursprung gehe. Bei Zugrundelegung dieser Annahmen sind g_1, g_2, g_3 positiv, f_1, f_2, f_3 negativ.

Nachdem die Grundconstanten aus den Gleichungen II—VI berechnet sind, ferner das scheinbare Axensystem vermittelst der Winkel w_{12}, w_{23}, w_{31} gezeichnet ist (Fig. 2) und auf den negativen Aesten der scheinbaren Axen die Strecken $\omega F_1 = f_1$, $\omega F_2 = f_2$, $\omega F_3 = f_3$ abgetragen sind, handelt es sich des Weitern darum, die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ jedes einzelnen Objectpunktes zu bestimmen. Hierzu können die Gleichungen I benützt werden; ein graphisches Reductionsverfahren ist jedoch vorzuziehen.

Ein solches ergiebt sich aus dem bekannten Satze, dass zwei projectivische Punktreihen jederzeit, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können; man hat sie nur so zu legen, dass irgend ein Paar entsprechender Punkte zusam-

---

* Die inversen Bilder bieten ein nicht geringeres Interesse als die directen, insofern sie identisch sind mit den von einer Sammellinse entworfenen reellen Bildern. (Auge im optischen Mittelpunkt der Linse.)

** Diese Annahme hat den Zweck, die Lage des Objects hinter der Bildebene zu ermöglichen, auch für den Fall, dass letztere durch den Coordinatenursprung geht. Eine gegebenen Falls nothwendige Transformation auf diesen Octanten bietet keine Schwierigkeit.

menfällt; das Projectionscentrum ergiebt sich alsdann als Schnitt der Verbindungslinien irgend zweier Punkte der einen Punktreihe mit den homologen Punkten der andern. Wir legen nun die zwei projectivischen Punktreihen X und Ξ so, dass die Punkte o und ω zusammenfallen, und benützen zur Bestimmung des Projectionscentrums einerseits den unendlich fernen Punkt der Reihe X und dessen homologen Punkt F_1 der Reihe Ξ, andererseits den unendlich fernen Punkt der Reihe Ξ und dessen homologen Punkt G_1 der Reihe X. — Es ergiebt sich hiernach folgendes praktische Reductionsverfahren:*

Ziehe durch einen Punkt o (Fig. 3) unter beliebigem Winkel zwei unbegrenzte Gerade $x'x$ und $\xi'\xi$, ox und $o\xi$ seien ihre positiven Aeste. Schneide auf $o\xi'$ eine Strecke $oF_1 = f_1$ ab, ziehe durch F_1 eine Parallele mit ox und mache auf ihr $F_1C_1 = g_1$. Um nun vermittelst dieses Apparates irgend ein x zu reduciren, mache auf $x'x$ eine Strecke $oX = x$, ziehe C_1X, welche $\xi'\xi$ in Ξ schneidet, so ist $o\Xi = \xi$.

Für die y- und z-Axe gilt genau dasselbe Verfahren. Es möge blos daran erinnert werden, dass nach der zu Grunde gelegten Annahme die x und y negativ, folglich auf den negativen Zweigen ox' und oy' aufzutragen sind, dass dagegen die z als positiv auf dem positiven Zweige oz aufzutragen sind.

R e d u c t i o n s m a s s s t ä b e, von welchen die ξ, η, ζ direct abgenommen werden können, falls die x, y, z in Masszahlen gegeben sind, erhält man, wenn man auf $x'x$, $y'y$, $z'z$ von o aus den Originalmassstab aufträgt, von C_i aus durch die einzelnen Theilpunkte Strahlen zieht und deren Schnittpunkte mit $\xi'\xi$, $\eta'\eta$, $\zeta'\zeta$ markirt.

Es kann übrigens (Fig. 4) der Reductionsapparat auch der Hauptfigur selbst einverleibt werden. Um z. B. die x und y zu reduciren, ziehe man durch ω eine Parallele mit F_1F_2, trage auf ihr von ω aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, mache auf F_1F_2 die Strecke $F_1C_1 = g_1$ und $F_2C_2 = g_2$, und ziehe von C_1 und C_2 Strahlen nach den einzelnen Theilpunkten des Originalmassstabes. Wir nennen bei diesem Verfahren die Punkte C_1 und C_2 die T h e i l u n g s p u n k t e der ξ- und η-Axe.

Will man jedoch die Operation des Reducirens auf einem Nebenblatte ausführen, so gewährt eine Modification des Verfahrens bedeutende Vortheile. Man kann nämlich für alle drei Massstäbe einen und denselben Strahlenbüschel benützen und damit die drei Reductionsfiguren in eine einzige verschmelzen: Trägt man auf einer geraden Linie $L'L$ (Fig. 5) von einem Punkte o aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, so kann die so entstehende Punktreihe jede von den drei Reihen X, Y, Z repräsentiren. Verbindet man jeden Theilpunkt mit einem ausserhalb

* Dasselbe kann übrigens auch aus den Reductionsformeln I abgeleitet werden.

$L'L$ beliebig gewählten Punkte C, so ist der so entstehende Strahlenbüschel perspectivisch zu der Punktreihe $L'L$ und daher projectivisch zu den drei Punktreihen Ξ, H, Z. Von diesen drei Punktreihen kann daher nach bekanntem Satze jede in perspectivische Lage zu dem Strahlenbüschel C gebracht werden, man hat sie nur so zu legen, dass drei ihrer Punkte in die ihnen entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels fallen. Als diese drei Punkte wählt man den Nullpunkt, den Fluchtpunkt und den unendlich fernen Punkt. — Aus dieser Erwägung ergiebt sich folgende Construction:

> Auf einer Geraden $L'L$ trage von einem Punkte o aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf. Errichte auf $L'L$ in o eine Senkrechte und verbinde einen beliebigen Punkt C derselben mit sämmtlichen Theilpunkten der $L'L$. Schneide auf $L'L$ von o aus die Strecken $oG_1 = g_1$, $oG_2 = g_2$, $oG_3 = g_3$ ab, ziehe CG_1, CG_2, CG_3, schneide auf ihnen die Strecken $CU_1 = f_1$, $CU_2 = f_2$, $CU_3 = f_3$ ab, ziehe durch die drei Punkte U_1, U_2, U_3 Parallelen mit LL', welche die Co schneiden in ω_1, ω_2, ω_3, ziehe durch ω_1, ω_2, ω_3 Parallelen mit CG_1, CG_2, CG_3: so schneiden diese den Strahlenbüschel nach den drei Reductionsmassstäben Ξ, H, Z.

Der Vortheil dieser letztern Construction beruht hauptsächlich darin, dass man ein und dasselbe Netz zur Herstellung der Massstäbe für eine ganze Reihe von axonometrischen Grundconstanten-Systemen verwenden kann. (Ein solches Netz kann auch umgekehrt benützt werden, um aus dem Bilde die natürlichen Masse zu entnehmen.)

Kehren wir nunmehr zur Hauptconstruction (Fig. 2) zurück! Nachdem das scheinbare Axensystem construirt und sämmtliche Coordinaten reducirt sind, oder — um bildlich zu reden — nachdem das Baugerüste errichtet und die einzelnen Bausteine zugehauen sind, handelt es sich blos noch darum, dieselben zum Bau zusammenzufügen, — eine Operation, die in § 1 bereits besprochen wurde.

Sollten die Grenzen des Zeichnungsblattes der Construction Schwierigkeiten bereiten, so kann man sich dadurch helfen, dass man mit den in einem bestimmten Verhältnisse verjüngten Fluchtstrecken und reducirten Coordinaten die Construction am scheinbaren Axensystem ausführt; ist alsdann Π' das hierdurch gewonnene Bild von P, so verlängert man schliesslich $\omega\Pi'$ im richtigen Verhältniss nach Π. Selbstverständlich wird man in solchen Fällen auch die Reductionsmassstäbe in verjüngtem Massstabe zeichnen, um die verjüngten reducirten Coordinaten direct zu erhalten.*

* Den Ausführungen am Schlusse des § 5 zufolge wird dieses Verfahren häufig praktisch werden.

Soll das Bild einer durch ihre Gleichungen $\varphi(xyz)=0$ und $\psi(xyz)=0$ gegebenen Curve construirt werden, so construirt man die Bilder einzelner Punkte der Curve, indem man jedesmal eine Coordinate beliebig wählt und die zugehörigen zwei anderen aus den obigen zwei Gleichungen bestimmt. — Ist eine Fläche $F(xyz)=0$ abzubilden, so construirt man das Bild der Berührungscurve des vom Auge an die Fläche gelegten Berührungskegels, welche bestimmt ist durch die zwei Gleichungen

$$F(xyz)=0,$$

$$(x-a_1)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-a_2)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-a_3)\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

§ 4.

Elimination der Orientirungsconstanten.

Unsere neun Grundconstanten sind Functionen der sechs von einander unabhängigen Orientirungsconstanten. Diese Functionen sind in den Gleichungen IV—VI ausgedrückt. Eliminirt man nun aus diesen neun Gleichungen die sechs Orientirungsconstanten, so bleiben noch drei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten übrig. Eine derselben ist sofort ersichtlich, nämlich

VII. 16) $$w_{12}+w_{23}+w_{31}=360^0.$$

Die zwei anderen ergeben sich aus den in VI enthaltenen drei Gleichungen, wenn man in dieselben die aus IV und V folgenden Werthe

17) $$m_i=\frac{g_i}{\varkappa} \text{ und } \mu_i=\frac{f_i}{1-\varkappa}$$

einsetzt. Führt man die Bezeichnung ein:

18) $$\lambda=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}=\frac{\varrho}{r},$$

so erhält man zunächst:

19) $$\cos w_{ik}=\frac{f_i^2+f_k^2-\lambda^2(g_i^2+g_k^2)}{2f_if_k}$$

oder

VIII. 20) $$\lambda^2(g_i^2+g_k^2)=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik},$$

woraus schliesslich durch Elimination von λ^2 die gesuchten zwei Beziehungen folgen. Wir behalten jedoch die zweckmässigere Form VIII bei.

Diese Beziehungen lassen sich unmittelbar geometrisch deuten. Bezeichnen wir nämlich die Seiten des Gegenpunktendreiecks $G_1G_2G_3$ mit $\mathfrak{g}_{12}\,\mathfrak{g}_{23}\,\mathfrak{g}_{31}$ und die Seiten des Fluchtpunktendreiecks $F_1F_2F_3$ mit $\mathfrak{f}_{12}\,\mathfrak{f}_{23}\,\mathfrak{f}_{31}$, so ist:

21) $$\mathfrak{g}_{ik}^2=g_i^2+g_k^2,$$

22) $$\mathfrak{f}_{ik}^2=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik}.$$

Die in VIII enthaltenen drei Gleichungen sprechen also den Satz aus:

Gegenpunktendreieck und Fluchtpunktendreieck sind ähnlich.

Aus der geometrischen Bedeutung von λ (vergl. Gleichung 18) folgt ferner:

Das Fluchtpunktendreieck ist kleiner als das Gegenpunktendreieck, oder ihm congruent, oder grösser als dasselbe, je nachdem die Bildebene vor dem Coordinatenursprung liegt, oder durch denselben geht, oder hinter demselben liegt.

Unser Satz ergiebt sich übrigens auch direct aus der geometrischen Erwägung, dass drei durch das Auge mit den drei Coordinatenaxen gezogene Parallelen die Bildebene in den drei Fluchtpunkten F_1, F_2, F_3 schneiden, dass also die zwei Tetraeder $AF_1F_2F_3$ und $oM_1M_2M_3$ parallele Seitenflächen haben und folglich ähnlich sind. Ebenso sind die zwei Tetraeder $oG_1G_2G_3$ und $oM_1M_2M_3$ ähnlich. Hieraus folgt: Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind beide dem Spurendreieck ähnlich.

Aus der Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks mit dem Spurendreieck folgt weiter der Satz:

Die Winkel des Fluchtpunktendreiecks sind sämmtlich spitz. Erreicht ein Winkel den Grenzwerth 90^0, so wird auch noch ein zweiter Winkel $=90^0$, die dritte Ecke fällt ins Unendliche.

Ist nun die Aufgabe, überhaupt ein perspectivisch richtiges Bild eines gegebenen Objects zu fertigen, ohne dass die Lage von Bildebene und Auge ausdrücklich festgesetzt ist, so können die Werthe der neun Grundconstanten beliebig gewählt werden, doch so, dass sie die Gleichungen VII und VIII befriedigen.

Aus unserm obigen Satze ergiebt sich unmittelbar folgende graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems:

Wähle die drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3 beliebig, construire aus je zweien derselben als Katheten rechtwinklige Dreiecke und construire aus den drei Hypotenusen $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{23}$, $\mathfrak{g}_{31}$ als Seiten ein Dreieck $G_1G_2G_3$. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt ω mit den Ecken des Dreiecks, nehme die von den drei Verbindungslinien eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und irgend drei den drei Verbindungslinien proportionirte Strecken als Fluchtstrecken.

Soll ein Grundconstantensystem mittels Rechnung aufgestellt werden, so wählt man sechs Grundconstanten beliebig und bestimmt die drei übrigen mittels der Gleichungen VII und VIII. Der Willkürlichkeit der Wahl jener sechs Grundconstanten sind jedoch gewisse Schranken gesetzt: die Wahl ist so zu treffen, dass man für die übrigen Grundconstanten und ferner für die Orientirungsconstanten, wenn diese in den sechs willkürlich gewählten Grundconstanten ausgedrückt werden, reelle Werthe erhält.

Ein Blick auf Gleichung VIII zeigt, dass es zweckmässig sein wird, in jedem Falle die drei Grössen f_i willkürlich zu wählen. Es wird sich daher vorzugsweise um folgende zwei Fälle handeln:

1. wir wählen f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, λ willkürlich;
2. wir wählen f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 willkürlich.

Die erste Annahme bietet keine Schwierigkeiten und führt unmittelbar zu folgendem Satze:

Zieht man (Fig. 6) in einer Ebene von einem Punkte ω aus unter beliebigen Winkeln gegeneinander drei Strecken von beliebiger Länge, jedoch so, dass das von den Endpunkten F_1, F_2, F_3 gebildete Dreieck spitzwinklig ist, so können die drei Strecken immer als das perspectivische Bild eines rechtwinkligen Axensystems und die drei Endpunkte als die Fluchtpunkte der drei Axen angesehen werden.

Die zugehörigen Gegenstrecken ergeben sich entweder durch Rechnung aus der Gleichung

23) $$\lambda^2 g_i^2 = f_i^2 + f_k f_l \cos w_{kl} - f_l f_i \cos w_{li} + f_i f_k \cos w_{ik}$$

24) $$= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f}_{ik}^2 - \mathfrak{f}_{kl}^2 + \mathfrak{f}_{li}^2),$$

oder durch folgende aus dieser Gleichung abgeleitete Construction:

Beschreibe über den drei Seiten des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$ nach aussen Halbkreise, welche von den Verlängerungen der drei Höhen $F_1 V_1$, $F_2 V_2$, $F_3 V_3$ des Dreiecks in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ geschnitten werden. Verbinde diese drei Punkte mit den Ecken des Dreiecks: so sind je zwei von derselben Ecke ausgehende Verbindungslinien gleich. Nehme irgend drei diesen Verbindungslinien proportionirte Strecken als Gegenstrecken.*

Dem zweiten obengenannten Falle widmen wir als dem wichtigeren eine ausführlichere Besprechung.

§ 5.
Willkürliche Wahl der Reductionsconstanten.

Werden f_i und g_i willkürlich gewählt, so giebt uns Gleichung 19) die Werthe von $\cos w_{ik}$ ausgedrückt in f_i und g_i, wenn uns gelingt, λ^2 in f_i und g_i auszudrücken. Dies geschieht dadurch, dass man die Werthe der Cosinusse aus 19) in die aus VII) folgende Gleichung

25) $$\cos^2 w_{12} + \cos^2 w_{23} + \cos^2 w_{31} - 2 \cos w_{12} \cos w_{23} \cos w_{31} - 1 = 0$$

einsetzt. Man erhält alsdann für λ^2 die Gleichung:

IX. 26) $$A\lambda^4 - 2B\lambda^2 + C = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C folgende Werthe haben:

---

* Vergl. zu dieser Construction die Bemerkung S. 95 Z. 4.

$$A=(g_1^2+g_2^2)(g_2^2+g_3^2)(g_3^2+g_1^2),$$
$$B=f_1^2g_1^2(g_2^2+g_3^2)+f_2^2g_2^2(g_3^2+g_1^2)+f_3^2g_3^2(g_1^2+g_2^2),$$
$$C=g_1^2(f_2^2-f_3^2)^2+g_2^2(f_3^2-f_1^2)^2+g_3^2(f_1^2-f_2^2)^2.$$

Die Discriminante dieser Gleichung: $\varDelta=B^2-AC$ lässt sich mit Benützung der in Gleichung 21) definirten Bezeichnungen $\mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{23}, \mathfrak{g}_{31}$ auf folgende Form bringen:

$$27)\quad \begin{aligned}\varDelta=(g_1^2g_2^2+g_2^2g_3^2+g_3^2g_1^2)&(f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12})(f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}-f_3\mathfrak{g}_{12})\\ &(f_1\mathfrak{g}_{23}-f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12})(-f_1\mathfrak{g}_{23}+f_2\mathfrak{g}_{31}+f_3\mathfrak{g}_{12}).\end{aligned}$$

Der Willkürlichkeit der Wahl der f_i und g_i sind somit folgende Schranken gesetzt:

$$\text{X. } 28)\qquad f_i\sqrt{g_k^2+g_l^2}+f_k\sqrt{g_l^2+g_i^2}>f_l\sqrt{g_i^2+g_k^2}.$$

Innerhalb dieser Schranken entsprechen aber jedem Werthsystem $f_1f_2f_3$, $g_1g_2g_3$ zwei Werthsysteme $w_{12}w_{23}w_{31}$, die sich aus der Gleichung

$$\text{XI. } 29)\qquad \cos w_{ik}=\frac{f_i^2+f_k^2-\lambda^2(g_i^2+g_k^2)}{2f_if_k}$$

ergeben, wenn in dieselbe die aus Gleichung IX folgenden zwei Werthe von λ^2 eingesetzt werden.

Da ein perspectivisches Bild dem Auge nur dann einen mit dem Original vollkommen übereinstimmenden Eindruck macht, wenn beim Betrachten Auge und Bildebene in die richtige Lage im Raum gebracht werden, so ist es von Wichtigkeit, die Orientirungsconstanten, welche diese Lage bestimmen, ebenfalls auszudrücken als Functionen von f_i und g_i. Man erhält aus den Gleichungen II bis V mit Benützung von 18) folgendes Formelnsystem:

$$\text{XII. } 30)\qquad m_i=(1-\lambda)g_i,$$

$$\text{XIII. } 31)\qquad a_i=\frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda^2\frac{1}{g_i}\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)},$$

$$\text{XIV. } 32)\qquad \varepsilon^2=\frac{(1-\lambda)^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}},$$

$$\text{XV. } 33)\qquad \cos\tau_i=\frac{\frac{1}{g_i}}{\sqrt{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}},$$

$$\text{XVI. } 34)\qquad r^2=\frac{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-1}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}},$$

$$\text{XVII. 35)}\quad \cos\sigma_i=\frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda\frac{1}{g_i}\sqrt{\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}-\lambda^2\right)}},$$

$$\text{XVIII. 36)}\quad tg\varphi=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-2}.$$

Durch die seither von uns benützten Orientirungsconstanten wird sowohl Auge als Bildebene auf das Objectcoordinatensystem bezogen, wird also die relative Lage des Auges zur Bildebene nur mittelbar bestimmt. Es ist nun aber von besonderer Wichtigkeit, Auge und Bildebene in directe Beziehung zu setzen.

Eine ungefähre, *in praxi* häufig ausreichende Orientirung des Auges kann mittels des Tetraeders $AF_1F_2F_3$ geschehen, dessen Dreikant an der Spitze A ein Octant ist: Man construire in Gedanken über dem Fluchtpunktendreieck als Basis ein solches Tetraeder, bringe sodann die Bildebene in eine solche Lage, dass die Seitenkante AF_3 vertical steht, und bringe das Auge in den Punkt A.

Eine genauere Orientirung ist diejenige mittels **Hauptpunkt** (Fusspunkt der vom Auge auf die Bildebene gefällten Senkrechten) und **Augdistanz** (Abstand des Auges von der Bildebene). Bestimmt man die Lage des Hauptpunktes H in der Bildebene durch seine Entfernungen h_1, h_2, h_3 von den drei Fluchtpunkten, beziehungsweise durch die Verhältnisse dieser drei Entfernungen, und bezeichnet die Augdistanz AH mit d, so liefert das rechtwinklige Dreieck AHF_i, dessen Hypotenuse $AF_i=\lambda g_i$ und dessen Winkel $HAF_i=\tau_i$ ist, für h_i und d die Werthe:

$$\text{XIX. 37)}\quad h_i=\lambda g_i\sqrt{\frac{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}}=\varrho g_i\sqrt{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}},$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist,

$$\text{XX. 38)}\quad d^2=\frac{\lambda^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}.$$

Die geometrische Interpretation von XIX liefert den (auch direct einleuchtenden) Satz:

> Der Hauptpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkte der Höhen des Fluchtpunktendreiecks.

Um die Bildebene in die richtige Lage im Raume zu bringen, bemerke man, dass F_1F_2 parallel M_1M_2, also horizontal ist. Man stelle daher die Bildebene so, dass F_1F_2 horizontal und der Horizontalneigungswinkel der Bildebene $=\tau_3$ ist.

Die fünf Grössen τ_3, h_1, h_2, h_3, d, deren Kenntniss nach dem Vorhergehenden zur Orientirung von Bildebene und Auge ausreichend ist, können sämmtlich auch auf graphischem Wege bestimmt werden. Man vergl. hierzu Fig. 6. In derselben können die drei rechtwinkligen Dreiecke $F_i F_k \mathfrak{A}_l$ als die Umklappungen der drei Seitenflächen des Tetraeders $A F_1 F_2 F_3$ angesehen werden. H ist der Hauptpunkt, $HF_i = h_i$. Construirt man ein rechtwinkliges Dreieck $H V_3 \mathfrak{A}_0$ aus $H V_3$ als Kathete und $V_3 \mathfrak{A}_3$ als Hypotenuse, so ist $H \mathfrak{A}_0$ gleich der Augdistanz und Winkel bei $V_3 = \tau_3$.

Bezüglich einer rationellen Wahl der f_i und g_i mögen schliesslich noch folgende Winke genügen. Ueber den Einfluss ihrer absoluten Grösse bei feststehenden Verhältnissen folgt aus unseren Gleichungen unmittelbar folgender Satz:

In jedem Grundconstantensystem können die Reductionsconstanten nach Belieben proportional vergrössert oder verkleinert werden. Eine solche Vergrösserung oder Verkleinerung geht Hand in Hand mit einer proportionalen Vergrösserung oder Verkleinerung der Augdistanz. Dagegen hat sie keine Einwirkung auf die scheinbaren Axenwinkel, auf den Winkel τ_3 und auf die Verhältnisse von h_1, h_2, h_3.

Bei der Wahl der absoluten Grösse der Reductionsconstanten beachte man, dass die Augdistanz den Minimalwerth von $2{,}5^{\text{dm}}$ (Weite des deutlichen Sehens) nicht überschreiten sollte.

Was sodann den Einfluss der Verhältnisse der f_i und g_i anbelangt, so influiren die Grössen g_i vermöge ihrer Proportionalität mit den Axenabschnitten lediglich auf die Lage der Bildebene. Für die Wahl der Grössen f_i ist sodann die Lage des Auges, die sich in der relativen Lage des Punktes ω zum Hauptpunkte geltend macht, massgebend. Hat man sich also für die Verhältnisszahlen der g_i entschieden, so erfolgt die Wahl der f_i mit Zuratheziehung der Gleichung XIX.

Als Beispiel diene das folgende, nach diesen Regeln aufgestellte Grundconstantensystem:

$$\begin{array}{lll}
g_1 = 4^{\text{dm}}, & f_1 = -3^{\text{dm}}, & w_{12} = 130^0\,36{,}5', \\
g_2 = 5^{\text{dm}}, & f_2 = -4^{\text{dm}}, & w_{23} = 111^0\,53{,}5', \\
g_3 = 10^{\text{dm}}, & f_3 = -9^{\text{dm}}, & w_{31} = 117^0\,30',
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lambda^2 = 0{,}9908, & h_1 = 2{,}654^{\text{dm}}, \\
\tau_3 = 72^0\,39', & h_2 = 3{,}995^{\text{dm}}, \\
d = 2{,}968^{\text{dm}}, & h_3 = 9{,}501^{\text{dm}}.
\end{array}$$

§ 6.

Specialfälle.

Es ist leicht, die im Vorangehenden aufgestellten allgemeinen Formeln und Constructionen für die verschiedenen Perspectivarten zu specialisiren. Hierüber mögen folgende Andeutungen genügen.

1. Fällt Punkt ω mit dem Hauptpunkte zusammen (also in den Schnittpunkt der Höhen des Fluchtpunktendreiecks), so haben wir den Specialfall der Orthogonalperspective (Centralstrahl senkrecht zur Bildebene). Zu den in VIII enthaltenen Gleichungen kommen alsdann noch zwei weitere Beziehungen zwischen den sechs Reductionsconstanten hinzu, die sich unmittelbar aus Gleichung XIX mit $f_i^2 = h_i^2$ ergeben. Vermöge dieser Beziehung geht Gleichung XI über in die folgende:

$$39) \quad \cos w_{ik} = -\frac{1}{2\frac{f_i}{g_i}\frac{f_k}{g_k}} \sqrt{\left(-\frac{f_i^2}{g_i^2}+\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)\left(\frac{f_i^2}{g_i^2}-\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)}.$$

2. Fällt die Ecke F_3 des Fluchtpunktendreiecks ins Unendliche, so werden die Winkel bei F_1 und F_2 je $= 90^0$, und wir haben den Specialfall der malerischen Perspective (Bildebene vertical). f_3 und g_3 werden $= \infty$. Setzt man den Grenzwerth von $\frac{f_3}{g_3} = p$, so wird $\lambda = p$. Die Reductionsformel für die z-Coordinaten reducirt sich auf $\zeta = pz$. Die Gleichungen VIII gehen über in die folgenden:

$$40) \quad p^2(g_1^2 + g_2^2) = f_1^2 + f_2^2 - 2f_1 f_2 \cos w_{12},$$

$$41) \quad f_1 \cos w_{31} = f_2 \cos w_{23}.$$

Diesen Gleichungen zufolge modificirt sich die S. 91 besprochene graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems folgendermassen (Fig. 7):

Wähle g_1, g_2, p beliebig. Construire ein rechtwinkliges Dreieck $\mathfrak{A} F_1 F_2$ mit den im Verhältniss p verkürzten Strecken g_1 und g_2 als Katheten; $F_1 F_2$ sei die Hypotenuse. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt ω mit F_1 und F_2 und ziehe $\omega\zeta$ senkrecht zu $F_1 F_2$. Nehme die von $\omega\zeta$ und den Rückverlängerungen von ωF_1 und ωF_2 eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und ωF_1 und ωF_2 als Fluchtstrecken. — Fällt man $\mathfrak{A} H \perp F_1 F_2$, so ist H der Hauptpunkt, $\mathfrak{A} H$ die Augdistanz.

Wählt man den Punkt ω auf $\mathfrak{A} H$, so hat man den Specialfall der Escarpperspective* (die durch Centralstrahl und z-Axe gelegte Ebene senkrecht zur Bildebene). Fällt ω in den Punkt $\mathfrak{A}$, so wird die

* Ich habe hier die Namen der einzelnen Perspectivarten von der Parallelperspective herübergenommen und unterscheide dann z. B. „cavalière Centralperspective" und „cavalière Parallelperspective". Für die von mir „Escarpperspective" oder „escarpe Perspective" genannte Perspectivart existirte seither kein mir convenirender Name. — Der Name „Vogelperspective", der sonst wohl in den verschiedensten Bedeutungen gebraucht wird, erscheint mir zur Bezeichnung einer Perspectivart nicht geeignet, insofern er — ebenso wie sein Oppositum „Froschperspective" — der Ausdruck für einen disparaten, innerhalb jeder einzelnen Perspectivart möglichen, Begriff ist. — Leider herrscht bezüglich der Benennungen der einzelnen Perspectivarten eine grosse Uneinigkeit und Verwirrung und erscheint eine Verständigung in diesem Punkte höchst wünschenswerth.

Escarpperspective zur **Militärperspective** (Horizontalneigung des Centralstrahls $= 45^0$).

Fällt noch ein zweiter Eckpunkt des Fluchtpunktendreiecks, z. B. F_2, ins Unendliche, so haben wir den Specialfall der **Cavalierperspective** (Bildebene parallel der yz-Ebene). f_2 und g_2 werden $= \infty$ und $\frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = p$. Winkel w_{23} wird $= 90^0$. Die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, f_1, g_1, p ist vollkommen willkürlich.

§ 7.

Uebergang zur Parallelperspective.

Wird $r = \infty$, so werden f_i und $g_i = \infty$, ihre Verhältnisse haben jedoch endliche Werthe. Setzt man den Grenzwerth

$$42)\qquad \frac{f_i}{g_i} = p_i,$$

so gehen die Reductionsformeln I über in

$$\text{I}'.\ 43)\qquad \xi = p_1 x, \quad \eta = p_2 y, \quad \zeta = p_3 z$$

und ergeben sich aus den Gleichungen IV′ und V′ für p_i die Werthe:

$$\text{IV}''.\ 44)\qquad p_i = v_i \cos \tau_i .$$

Die Gleichungen II′, III′ und VI′ bleiben in Giltigkeit. — Man bemerke, dass ε ganz ausfällt.

Die Constructionen am scheinbaren Axensystem vereinfachen sich wie folgt: Schneide auf der ξ-Axe die Strecke $\omega \Xi = \xi$ ab, ziehe durch Ξ eine Parallele zur η-Axe und schneide auf ihr $\Xi\pi = \eta$ ab, ziehe endlich durch π eine Parallele zur ζ-Axe und mache auf ihr $\pi\Pi = \zeta$.

In dem Massstabnetze (Fig. 5) werden $\omega_i F_i$ sämmtlich parallel LL', ihre Abstände von C werden: $C\omega_i = p_i \,.\, Co$.

An Stelle unserer seitherigen Grössen f_i und g_i treten nunmehr in der Parallelperspective deren Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i}$ und $\frac{g_i}{g_k}$. Die drei Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i} = p_i$ sind die **Reductionsconstanten** der Parallelperspective. Die drei Verhältnisse $\frac{g_i}{g_k}$ spielen die Rolle von **Hilfsgrössen**, deren Beibehaltung bei der willkürlichen Wahl der Grundconstanten bedeutende Vortheile mit sich bringt. Um übrigens die Symmetrie unserer Formeln zu wahren, setzen wir

$$45)\qquad \frac{g_i}{g_k} = \frac{\gamma_i}{\gamma_k},$$

wo γ_1, γ_2, γ_3 endliche Grössen sein mögen.

Da nunmehr die neun Grössen p_1, p_2, p_3, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$, $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, w_{12}, w_{23}, w_{31} Functionen der vier von einander unabhängigen Variabeln sind, welche die Richtung der Bildebene und der parallelen Sehstrahlen bestimmen, so bestehen fünf Relationen zwischen denselben. Von diesen ergeben sich zwei direct, nämlich die Winkelrelation VII und die Gleichung $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=1$. Die drei übrigen ergeben sich aus VIII, wenn man bemerkt, dass für $r=\infty$: $\lambda=1$ wird und wenn man an Stelle von f_i überall $\frac{f_i}{g_i}g_i=\frac{f_i}{g_i}\gamma_i$ einsetzt.* Man erhält alsdann die drei Gleichungen:

VIII'. 46) $\gamma_i^2+\gamma_k^2=p_i^2\gamma_i^2+p_k^2\gamma_k^2-2\,p_i p_k \gamma_i \gamma_k \cos w_{ik}$.

Wir dürfen nun vier Grundconstanten willkürlich wählen. Statt zwei Grössen p_i willkürlich zu wählen, können wir auch deren Verhältnisse — oder, wenn wir

47) $$p_i=\varrho\pi_i$$

setzen, die drei Grössen π_i beliebig nehmen. Dabei gewährt es bedeutende Vortheile, die π_i als **rationale ganze Zahlen** zu wählen. — Es sind nun folgende zwei Annahmen von besonderer Wichtigkeit:

1. wir wählen π_1, π_2, π_3, w_{12}, w_{23}, w_{31} (in Uebereinstimmung mit VII) willkürlich;
2. wir wählen π_1, π_2, π_3, γ_1, γ_2, γ_3 willkürlich.

Die erste Annahme ist für die allgemeine Parallelperspective die naturgemässeste und führt zu dem **Pohlke'schen Theorem**, sie bietet jedoch ungleich mehr Schwierigkeiten, als die zweite. Die zweite Annahme erledigt zwar wegen der Beibehaltung der Hilfsgrössen γ_i die allgemeine Parallelperspective nicht so direct wie die erste, erweist sich aber für die Anwendung auf Specialfälle ungleich fruchtbarer als jene. Sie erfordert nur eine einfache Modification unserer centralperspectivischen Resultate. Dieselbe besteht darin, dass man in den centralperspectivischen Formeln IX—XVIII

48) $$\lambda=1$$

setzt und die Substitution

49) $$f_i=\frac{f_i}{g_i}g_i=p_i\gamma_i=\varrho\pi_i\gamma_i$$

anbringt. Bei diesem Verfahren liefert zunächst Gleichung IX für ϱ^2 die Gleichung

IX'. 50) $$\mathfrak{C}\varrho^4-2\mathfrak{B}\varrho^2+\mathfrak{A}=0,$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgende Werthe haben:

---

* Die Substitution von γ_i an Stelle von g_i ist erlaubt, da die Gleichungen nach g_i homogen sind.

$$\mathfrak{A} = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\gamma_3^2 + \gamma_1^2),$$
$$\mathfrak{B} = \pi_1^2\gamma_1^4(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \pi_2^2\gamma_2^4(\gamma_3^2 + \gamma_1^2) + \pi_3^2\gamma_3^4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$
$$\mathfrak{C} = \gamma_1^2(\pi_2^2\gamma_2^2 - \pi_3^2\gamma_3^2)^2 + \gamma_2^2(\pi_3^2\gamma_3^2 - \pi_1^2\gamma_1^2)^2 + \gamma_3^2(\pi_1^2\gamma_1^2 - \pi_2^2\gamma_2^2)^2.$$

Die Untersuchung der Discriminante dieser Gleichung liefert die Bedingung:

$$\text{X}'.\ 51)\qquad \pi_i\gamma_i\sqrt{\gamma_k^2+\gamma_l^2} + \pi_k\gamma_k\sqrt{\gamma_l^2+\gamma_i^2} > \pi_l\gamma_l\sqrt{\gamma_i^2+\gamma_k^2}.$$

Des Weitern gehen die Gleichungen XI, XV, XVII, XVIII über in die folgenden:

$$\text{XI}'.\ 52)\ \cos w_{ik} = \frac{p_i^2\gamma_i^2 + p_k^2\gamma_k^2 - (\gamma_i^2+\gamma_k^2)}{2p_ip_k\gamma_i\gamma_k} = \frac{\pi_i^2\gamma_i^2 + \pi_k^2\gamma_k^2 - \frac{1}{\varrho^2}(\gamma_i^2+\gamma_k^2)}{2\pi_i\pi_k\gamma_i\gamma},$$

$$\text{XV}'.\ 53)\ \cos\tau_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{1}{\gamma_3^2}}},$$

$$\text{XVII}'.\ 54)\quad \cos\sigma_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i^2}(p_k^2+p_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2}+\frac{1}{\gamma_l^2}\right)(1-p_i^2)}{2\frac{1}{\gamma_i}\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{1}{\gamma_3^2}\right)(p_1^2+p_2^2+p_3^2-1)}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\gamma_i^2}(\pi_k^2+\pi_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2}+\frac{1}{\gamma_l^2}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2}-\pi_i^2\right)}{2\frac{1}{\varrho}\frac{1}{\gamma_i}\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{1}{\gamma_3^2}\right)\left(\pi_1^2+\pi_2^2+\pi_3^2-\frac{1}{\varrho^2}\right)}},$$

$$\text{XVIII}'.\ 55)\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2-2} = \sqrt{\varrho^2(\pi_1^2+\pi_2^2+\pi_3^2)-2}.\,*$$

Modificirt man die allgemeinen centralperspectivischen Formeln für die in § 6 angedeuteten Specialfälle und wendet alsdann auf die modificirten Formeln die Substitutionen 48) und 49) an, so resultiren die bekannten parallelperspectivischen Specialformeln. Z. B. ergeben sich aus 39) unmittelbar die Weisbach'schen Formeln:

$$56)\qquad \cos w_{ik} = -\frac{1}{2\pi_i\pi_k}\sqrt{(-\pi_i^2+\pi_k^2+\pi_l^2)(\pi_i^2-\pi_k^2+\pi_l^2)}.$$

---

* Gleichung XVIII' wurde schon von Pohlke gegeben. Vergl. Pohlke, Darst. Geom., 2. Aufl., S. 115.

VI.

Ein Fall, in welchem die Differentialgleichung $x(1-x)(1-kx)y''' + (u+vx+wkx^2)y'' + (\tau + w'kx)y' + w''ky = 0$ integrirt werden kann.

Von

J. THOMAE,

Professor an der Universität Freiburg.

Die sieben Constante enthaltende Differentialgleichung

1) $x(1-x)(1-kx)y''' + (u+vx+wkx^2)y'' + (\tau + w'kx)y' + w''ky = 0$

ist in zwei Fällen integrirt worden, in denen die Constanten nur zwei Bedingungen unterworfen sind. Erstens in dem Falle, in welchem dieselbe den mit allgemeinem Zeiger gebildeten (Liouville'schen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$X_{\lambda,\mu,\nu} = x^\lambda (1-x)^\mu (1-kx)^\nu$$

zum Integral hat, der von den Herren Pochhammer und Hossenfelder behandelt ist. Aus dem einfachen Ausdrucke

$$y = \frac{d^\xi x^\lambda (1-x)^\mu (1-kx)^\nu}{dx^\xi}$$

(in dem ξ jedwede auch complexe Zahl bedeuten kann), der in diesem Falle ein Integral der Gleichung 1) bildet, kann man leicht einige Relationen zwischen contiguen Functionen herleiten. Z. B. dadurch, dass man die Identität

$$x^\lambda (1-x)^\mu (1-kx)^\nu - x.x^{\lambda-1}(1-x)^\mu (1-kx)^\nu = 0$$

ξmal differenzirt, erhält man die Gleichung

$$\frac{d^\xi X_{\lambda,\mu,\nu}}{dx^\xi} - x\frac{d^\xi X_{\lambda-1,\mu,\nu}}{dx^\xi} - \xi\frac{d^{\xi-1} X_{\lambda,\mu,\nu}}{dx^{\xi-1}} = 0.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung lassen sich in diesem Falle durch bestimmte Integrale ausdrücken.

Weiter ist die Gleichung 1) in dem Falle integrirt worden, in welchem $k=1$ und $u+v+w=0$ oder $k=\infty$, $v=qk$, $\tau=q'k$ ist. Die

Lösungen lassen sich in diesem Falle durch bestimmte Doppelintegrale ausdrücken. Ich habe in den Leipziger Annalen, Bd. II S. 437, gezeigt, dass in diesem Falle zwischen je vier contiguen Functionen eine lineare homogene Relation mit ganzen Coefficienten (ähnlich wie bei der Gauss-schen Reihe zwischen je drei contiguen Functionen) stattfindet.

Beide Fälle lassen eine Verallgemeinerung zu, ohne dass die Integrabilität geschädigt wird.

Im ersten Falle nämlich sind die Exponenten der Anfangsglieder der drei nach absteigenden Potenzen von x geordneten Reihen, welche particuläre Lösungen und zusammen die vollständige Lösung der Differentialgleichung sind, β, β', $\beta'+1$, worin β und β' willkürlich sind. Wenn aber diese Exponenten β, β', $\beta'+n$ sind, und wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und wenn die Reihen keine logarithmischen Terme enthalten, so ist die Differentialgleichung noch integrabel.* Aehnlich ist die Verallgemeinerung, die der zweite Fall zulässt. Im Folgenden wird noch ein Fall der Integrabilität hinzugefügt, nämlich der, in welchem die Gleichung 1) eine Gauss'sche Reihe und natürlich ihre gesammte Fortsetzung als particuläres Integral enthält. Da man alsdann zwei particuläre Lösungen der Gleichung 1) besitzt, so folgt aus allgemeinen Sätzen der Theorie der Differentialgleichungen, dass man die Gleichung 1) vollständig integriren könne, und es kann daher ein besonderer Werth auf die Integration an sich nicht gelegt werden. Allein da sich dieser specielle Fall zum allgemeinen gerade so verhält, wie die specielle Gauss'sche Reihe $F(1, b, c, x)$ zur allgemeinen $F(a, b, c, x)$, und da sich die Eigenschaften der allgemeinen in denen der speciellen fast ungetrübt abspiegeln, so scheint es keine überflüssige Arbeit zu sein, die Integrale der Gleichung 1) für den besprochenen beschränkten Fall zusammenzustellen, was hier im Art. II geschieht. Vielleicht dass einiges Licht aus diesen Formeln auf die Eigenschaften der Integrale der allgemeinen Gleichung 1) fällt.

Wendet man auf die drei erwähnten Fälle der Integrabilität die Methode der Differentiation mit beliebigem Zeiger an, so bleiben die beschränkenden Bedingungen unberührt und es werden daher die Resultate durch diese Methode nicht verallgemeinert.

Einiges über die allgemeine Differentialgleichung 1) und die Bezeichnung ihrer Integrale wird in Art. I vorausgeschickt. Der Untersuchung des Zusammenhanges der Zweige der behandelten Function werde ich eine Fortsetzung dieses Aufsatzes später widmen.

---

* Man gelangt nämlich durch $(-\beta')$-malige Differentiation zu der von mir in dieser Zeitschrift, Bd. XIX S. 273, behandelten Differentialgleichung.

I.

Das Interesse, welches die Differentialgleichung 1) bietet, besteht hauptsächlich darin, dass sie für $\omega''=0$, $y''=\eta$ in die Gleichung

$$2)\quad x(1-x)(1-kx)\,\eta''+(u+vx+wkx^2)\,\eta'+(\tau+w'kx)\,\eta=0$$

übergeht, welche die natürlichste Verallgemeinerung der die Gaussschen Reihen definirenden Differentialgleichung [die für $k=0$ aus 2) entspringt] ist. Die Integration der letzten Gleichung würde die der Gleichung 1) in unmittelbarem Gefolge haben, wenn man auf das Integral derselben die Methode der Differentiation mit beliebigem Zeiger anwendete.* Allein wir besitzen ebenso wenig Mittel, die Gleichung 2) zu integriren, als deren vorhanden sind, das Integral der Gleichung 1) aufzustellen, und es scheint gerathen, die Untersuchung der Gleichung 1) vor der der Gleichung 2) in die Hand zu nehmen, obgleich jene einfacher scheint, weil eine nicht unwichtige Eigenschaft, die den Integralen von 1) zukommt, denen der speciellen Gleichung 2) abgeht, nämlich die weiter unten durch die Gleichung 3) ausgesprochene Eigenschaft, dass ihre Lösungen zugleich Lösungen einer Recursionsformel sind.

Integrirt man eine Differentialgleichung durch eine nach Potenzen von $x-a$ geordnete Reihe, deren Exponenten um eine Einheit aufsteigen, so soll diese Reihe ein Integral im Punkte a genannt werden; wenn hingegen die Exponenten um eine Einheit abnehmen, so soll die Reihe ein Integral im Punkte ∞ genannt werden, was auch a sein mag.

Die Differentialgleichung 1) besitzt nun drei particuläre Integrale im Punkte Null. Zwei davon sind einändrig und ihre Entwickelung kann mit der 0^{ten} Potenz von x beginnen. Sie sollen mit $Q^{0,0}(x)$, $Q^{0,0'}(x)$ bezeichnet werden, und es darf

$$Q^{0,0}(x)\,Q^{0,0'}(0)-Q^{0,0'}(x)\,Q^{0,0}(0)$$

nicht identisch Null sein, wenn die Integrale voneinander unabhängig sein sollen. Das dritte particuläre Integral beginnt mit der $\alpha=(2-u)^{\text{ten}}$ Potenz von x und soll mit $Q^{0,\alpha}(x)$ bezeichnet werden. Ebenso giebt es je drei particuläre Integrale im Punkte 1 und im Punkte $1:k$. Zwei der ersten sind einändrig und ihre Entwickelung kann mit der 0^{ten} Potenz von $1-x$ beginnen. Sie sollen mit $Q^{1,0}(x)$, $Q^{1,0'}(x)$ bezeichnet werden. Die Entwickelung des dritten beginnt mit der γ^{ten} Potenz, wenn γ durch die Gleichung

$$v=\gamma+\alpha-4-k(\gamma+w-2)$$

bestimmt ist. Es werde mit $Q^{1,\gamma}(x)$ bezeichnet. Die drei Integrale im Punkte $1:k$ werden in analoger Weise mit $Q^{1:k,0}(x)$, $Q^{1:k,0'}(x)$, $Q^{1\cdot k,\delta}(x)$

---

* Man vergl. Göttinger Nachrichten von 1874, S. 249.

bezeichnet, und es wird δ, der niedrigste Exponent der Entwickelung des nicht einändrigen Integrals, nach Potenzen von $(1-kx)$ durch die Gleichung

$$v=-\delta-w+2+k(\delta+\alpha-4)$$

bestimmt. Integrirt man endlich die Differentialgleichung 1) durch Reihen, welche nach absteigenden Potenzen von $x-a$ geordnet sind, so findet man drei particuläre Integrale im Punkte ∞, deren höchste Exponenten bez. β, β', β'' sind. Die Integrale selbst mögen mit $Q^{\infty,\beta}(x)$, $Q^{\infty,\beta'}(x)$, $Q^{\infty,\beta''}(x)$ bezeichnet werden. Die Grössen β, β', β'' ergeben sich aus den Gleichungen

$$w=\beta+\beta'+\beta''+3,\quad w'=\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta+\beta+\beta'+\beta''+1,\quad w''=\beta\beta'\beta''.$$

Zwischen den Grössen α, β, β', β'', γ, δ, welche die Exponenten der Gleichung 1) oder die Exponenten der particulären Integrale in den Punkten 0, ∞, 1, $1:k$ heissen, besteht die Gleichung

$$\alpha+\beta+\beta'+\beta''+\gamma+\delta=3.$$

Durch die Exponenten und die Grösse k sind die Coefficienten in 1) nicht alle bestimmt, sondern die Gleichung hängt noch von einer willkürlichen Grösse τ ab; wir wollen deshalb das allgemeine Integral mit

$$Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & k\\ \gamma, & \beta', & \tau\\ \delta, & \beta'', & x\end{pmatrix}$$

bezeichnen, wenn eine Angabe der Exponenten und der Grösse τ nöthig ist, sonst nur mit $Q(x)$.

Differenziren wir die Gleichung 1) n mal, so resultirt

$$3)\qquad \begin{aligned} x(1-x)(1-kx)\,y'''_n+(u_n+v_nx+w_nkx^2)\,y''_n\\ +(\tau_n+w_nkx)y'_n+w''_nky_n=0,\end{aligned}$$

worin

$$\frac{d^n y}{dx^n}=y_n,\quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=y_{n+1}\ \text{etc.},$$

$$u_n=u+n,\quad v_n=v-2n(1+k),\quad w_n=w+3n,$$

$$\tau_n=\tau+uv-n(n-1)(1+k),\quad w'_n=w'+2nw+3n(n-1),$$

$$w''_n=w''+nw'+n(n-1)w+n(n-1)(n-2)=(\beta+n)(\beta'+n)(\beta''+n)$$

zu setzen ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$y_n=Q_n(x)=Q\begin{pmatrix}\alpha-n, & \beta+n, & k\\ \gamma-n, & \beta'+n, & \tau+vn-n(n-1)(1+k)\\ \delta-n, & \beta''+n, & x\end{pmatrix},$$

worin

$$\begin{aligned}v&=-\delta-\beta-\beta'-\beta''-1+k(\delta+\alpha-4)=\gamma+\alpha-4-k(\gamma+\beta+\beta'+\beta''+1)\\ &=\quad\gamma+\alpha-4\quad+k(\delta+\alpha-4)=\gamma+\alpha-4+k(\delta+\alpha-4)\end{aligned}$$

ist. Lässt man hierin für n jedwede Zahl zu, so kann man eine der Grössen $\alpha-n$, $\gamma-n$, $\delta-n$ der Null gleich machen, für welchen Fall das Integral Q im Allgemeinen logarithmische Bestandtheile erhalten wird, oder man kann eine der Grössen $\beta+n$, $\beta'+n$, $\beta''+n$ gleich Null machen, in welchem Falle die Gleichung 1) die Form 2) in Bezug auf $y'=\eta$ annimmt, weil dann w'' gleich Null wird.* Endlich kann man auch noch die Grösse τ_n der Null gleich machen, wodurch jedoch die Integration ebenso wenig erleichtert wird.

Da der Differentialquotient einer Function Q wieder eine Function Q mit abgeänderten Exponenten und abgeändertem τ ist, so kann man die Gleichung 3) als eine Recursionsformel ansehen, welche zur Definition der Function Q ebenso tauglich und daher für sie beinahe ebenso wichtig ist, als die Differentialgleichung. Oder man kann sie auch als eine Relation zwischen contiguen Functionen ansehen, wenn dieser Begriff in demselben Sinne wie bei der Gauss'schen Reihe gefasst wird. Setzt man für y_n, y'_n, y''_n, y'''_n bez. einen einzelnen Zweig der Functionen $Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x)$, $Q_{n+2}(x)$, $Q_{n+3}(x)$ in 3) ein, so muss man noch auf den constanten Factor achten, welchen man den Zweigen der Function zuertheilen muss. Genügt $Q_n(x)$ der Gleichung 3) nur als einer Differentialgleichung, so könnte jeder Lösung ein willkürlicher Factor beigelegt werden. Aber nicht jede Lösung der Differentialgleichung ist eine Lösung der Recursionsformel, sondern nur eine solche, in der $\frac{dQ_n(x)}{dx}=Q_{n+1}(x)$ ist, d. h. eine Lösung, in welcher durch Verwandlung von n in $n+1$ aus Q_n die Grösse $\frac{dQ_n(x)}{dx}$ hervorgeht. Setzt man für $Q_n(x)$ irgend einen der mehrändrigen Zweige $Q_n^{0,\alpha-n}(x)$, $Q_n^{\infty,\beta+n}(x)$, $Q_n^{\infty,\beta'+n}(x)$, ... $Q_n^{1:k,\delta-n}(x)$, so wird die Gleichung 3) als Recursionsformel erfüllt, wenn man annimmt, dass

$$\lim_{x=0} x^{-\alpha}\, Q^{0,\alpha}(x) = K_{0,\alpha} : \Pi(\alpha), \quad \lim_{x=1} \Pi(\gamma)\,(1-x)^{-\gamma}\, Q^{1,\gamma}(x) = e^{\gamma i\pi} K_{1+\gamma},$$

$$\lim_{x=1:k} \Pi(\delta)\,(1-kx)^{-\delta}\, k^{\delta}\, Q^{1:k,\delta}(x) = e^{\delta i\pi} K_{1:k,\delta},$$

$$\text{4)}\qquad \lim_{x=\infty} x^{\beta}\, Q^{\infty,\beta}(x) = \beta^{\beta i\pi}\, \Pi(\beta-1)\, K_{\infty,\beta},$$

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta'}\, Q^{\infty,\beta'}(x) = \beta^{\beta' i\pi}\, \Pi(\beta'-1)\, K_{\infty,\beta'},$$

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta''}\, Q^{\infty,\beta''}(x) = \beta^{\beta'' i\pi}\, \Pi(\beta''-1)\, K_{\infty,\beta''}$$

sei, und wenn $K_{0,\alpha}, \ldots K_{\infty,\beta''}$ solche Functionen der Exponenten und von τ sind, dass sie ungeändert bleiben, wenn α, γ, δ in $\alpha-n$, $\gamma-n$,

---

* Eine Untersuchung des Integrals der Gleichung 2) ist von Herrn A. Schondorf in einem Aufsatze „Ueber eine Minimalfläche", Göttingen 1868, angestellt. Durch einen Irrthum (S. 49) in der Constantenabzählung gelangt Herr Schondorf zu dem unrichtigen Resultate, dass das Integral durch die Exponenten und k bis auf zwei willkürliche Constante bestimmt sei.

$\delta-n$ und β, β', β'' in $\beta+n$, $\beta'+n$, $\beta''+n$ und τ in τ_n für ein ganzes n übergehen. Diese Annahme soll fernerhin immer gemacht werden und die K sollen sämmtlich gleich Eins gesetzt werden.

Will man aber die in den Punkten 0, 1, $1:k$ einändrigen Integrale $Q_n^{0,0}(x)$, $Q_n^{0,0'}(x)$, $Q_n^{1,0}(x)$, ... in 3) einsetzen, so ist zu beachten, dass jede von diesen Functionen als Lösung der Differentialgleichung zwei willkürliche Constante enthält, nämlich $Q_n(0)$ und $Q'_n(0)$ oder $Q_n(1)$ und $Q'_n(1)$, oder $Q_n(1:k)$ und $Q'_n(1:k)$ (wenn der an Q oben angehängte Strich die einmalige Differentiation nach x andeutet). Damit diese Functionen aber zugleich Lösungen der Recursionsformel seien, müssen die willkürlichen Constanten so bestimmt werden, dass die Gleichungen

5a) $$Q_{n+2}(0)\,u_n+Q_{n+1}(0)\,\tau_n+Q_n(0)\,w''_n k=0,$$

5b) $$Q_{n+2}(1)\,(u_n+v_n+k w_n)+Q_{n+1}(1)\,(\tau_n+w'_n k)+Q_n(1)\,w''_n k=0,$$

5c) $$Q_{n+2}(1:k)\,(u_n k+v_n+w_n)+Q_{n+1}(1:k)\,(\tau_n+w'_n k)+Q_n(1:k)\,w''_n k^2=0$$

befriedigt sind. Die Constanten der Zweige $Q_n^{0,0}(x)$, $Q_n^{0,0'}(x)$ sollen deshalb fernerhin so bestimmt werden, dass $Q_0^{0,0}(0)$ und $Q_0^{0,0'}(0)$ zwei voneinander unabhängige Lösungen der Gleichung 5a) sind. Der Coefficient von x in diesen Zweigen ist dann durch die Bedingung bestimmt, dass er bez. gleich $Q_{n+1}^{0,0}(0)$, $Q_{n+1}^{0,0'}(0)$ sein muss. Ebenso sollen $Q_n^{1,0}(1)$, $Q_n^{1,0'}(1)$ zwei unabhängige Lösungen von 5b), $Q_n^{1:k,0}(1:k)$, $Q_n^{1:k,0'}(1:k)$ zwei unabhängige Lösungen von 5c) sein. Dadurch sind diese Zweige bis auf einen willkürlichen Factor, der ungeändert bleibt, wenn n in $n+1$ übergeht, bestimmt. Setzen wir daher

6a) $$\begin{aligned} Q^{0,0}(x) &= \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)\\ &= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0, & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)\\ &= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x)+\begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x)+\begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0, & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),\end{aligned}$$

6b) $$\begin{aligned} Q^{0,0'}(x) &= \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0', & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)\\ &= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1:k\\ 0', & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)\\ &= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x)+\begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x)+\begin{pmatrix}0, & \infty\\ 0', & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),\end{aligned}$$

6c) $$\begin{aligned} Q^{0,\alpha}(x) &= \begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & 0\end{pmatrix} Q^{1,0}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & 0'\end{pmatrix} Q^{1,0'}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1\\ \alpha, & \gamma\end{pmatrix} Q^{1,\gamma}(x)\\ &= \begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & 0\end{pmatrix} Q^{1:k,0}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & 0'\end{pmatrix} Q^{1:k,0'}(x)+\begin{pmatrix}0, & 1:k\\ \alpha, & \delta\end{pmatrix} Q^{1:k,\delta}(x)\\ &= \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta}(x)+\begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta'\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta'}(x)+\begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta''\end{pmatrix} Q^{\infty,\beta''}(x),\end{aligned}$$

so müssen die Coefficienten $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}0, & \infty\\ \alpha, & \beta''\end{pmatrix}$ nicht blos unabhängig von x sein, sondern auch ungeändert bleiben, wenn α, γ, δ in $\alpha - n$, $\beta - n$, $\delta - n$, wenn β, β', β'' in $\beta + n$, $\beta' + n$, $\beta'' + n$, und wenn τ in τ_n für ein ganzzahliges n übergehen.

Man kann in der Gleichung 1) für die Unabhängige durch einige Substitutionen neue Veränderliche einführen, durch welche die Form dieser Gleichung nicht wesentlich geändert wird. Setzt man nämlich

$$x = x_1 : k, \qquad x_1 = kx, \qquad dx = dx_1 : k,$$

$$x = [1-(1-k)x_2] : k, \quad x_2 = (1-kx):(1-k), \quad dx = \left(1-\frac{1}{k}\right)dx_2,$$

$$x = 1-\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3, \quad x_3 = (1-x):\left(1-\frac{1}{k}\right), \quad dx = -\left(1-\frac{1}{k}\right)dx_3,$$

so erhält man die drei Differentialgleichungen

$$\text{7a)}\quad x_1(1-x_1)\left(1-\frac{1}{k}x_1\right)\frac{d^3y}{dx_1^3}+\left(u+\frac{v}{k}x_1+\frac{w}{k}x_1^2\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}+\left(\frac{\tau}{k}+\frac{w'}{k}x_1\right)\frac{dy}{dx_1} + \frac{w''}{k}y = 0,$$

$$\text{7b)}\quad x_2(1-x_2)[1-(1-k)x_2]\frac{d^3y}{dx_2^3}+\left[\frac{uk+v+w}{1-k}-(u+2w)x_2+w(1-k)x_2^2\right]\frac{d^2y}{dx_2^2} + [-(\tau+w')+w'(1-k)x_2]\frac{dy}{dx_2}+w''(1-k)y = 0,$$

$$\text{7c)}\quad x_3(1-x_3)\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]x_3\frac{d^3y}{dx_3^3}+\left[\frac{u+v+wk}{k-1}-\left(\frac{v}{k}+2w\right)x_3+w\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3^2\right]\frac{d^2y}{dx_3^2} + \left[-\left(\frac{\tau}{k}+w'\right)+w'\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3\right]\frac{dy}{dx_3} + w''\left(1-\frac{1}{k}\right)y = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\text{8)}\quad Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & k\\ \gamma, & \beta', & \tau\\ \delta, & \beta'', & x\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & 1:k\\ \delta, & \beta', & \tau:k\\ \gamma, & \beta'', & xk\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\delta, & \beta, & 1-k\\ \gamma, & \beta', & -(\tau+w)\\ \alpha, & \beta'', & \dfrac{1-kx}{1-k}\end{pmatrix}$$
$$= Q\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & 1-\dfrac{1}{k}\\ \delta, & \beta', & -\left(\dfrac{\tau}{k}+w'\right)\\ \alpha, & \beta'', & \dfrac{k(1-x)}{1-k}\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\delta, & \beta, & 1:(1-k)\\ \alpha, & \beta', & (k-1)(\tau+w')\\ \gamma, & \beta'', & 1-kx\end{pmatrix}$$
$$= Q\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & k:(k-1)\\ \alpha, & \beta', & (\tau+w'k):(1-k)\\ \delta, & \beta'', & 1-x\end{pmatrix}.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind durch Anwendung der ersten auf die zweite und dritte erhalten. Dass die Grössen β, β', β'' in einer Q-Function unter sich vertauscht werden können, ohne dass sie sich ändert, ist evident.

Will man die Gleichung 1) mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten integriren, so bringt man dieselbe durch die Substitution

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\,\frac{dy}{d\,lg\,x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\,\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}-\frac{1}{x^2}\,\frac{dy}{d\,lg\,x},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\,\frac{d^3y}{d\,lg\,x_3}-\frac{3}{x^3}\,\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}+\frac{2}{x^3}\,\frac{dy}{d\,lg\,x}$$

mit Vortheil auf die Form

$$\begin{aligned}&(1-x)(1-kx)\frac{d^3y}{d\,lg\,x^3}+[u-3+(v+3+3k)x+(\beta+\beta'+\beta'')kx^2]\frac{d^2y}{d\,lg\,x^2}\\ \text{9)}\qquad&+[2-u+(\tau-v-2-2k)x+(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta)kx^2]\frac{dy}{d\,lg\,x}\\&+\beta\beta'\beta''kx^2y=0\end{aligned}$$

oder, wenn man die Gleichung 7c) transformirt, diese auf die Form

$$\begin{aligned}&(1-x_3)\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3\right]\frac{d^3y}{d\,lg\,x_3{}^3}+\beta\beta'\beta''\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2y\\&+\left[-\gamma-1+\left(\gamma+\delta-1-\left(1-\frac{1}{k}\right)(\delta+\beta+\beta'+\beta''-2)\right)x_3\right.\\ \text{9a)}\qquad&\left.\qquad+(\beta+\beta'+\beta'')\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2\right]\frac{d^2y}{d\,lg\,x_3{}^2}\\&+\left[\gamma-x_3\left(\frac{\tau}{k}+\beta\beta'+(2-\alpha)(\beta+\beta')+\gamma-\frac{\gamma+\alpha-2}{h}\right)\right.\\&\left.\qquad+(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta)\left(1-\frac{1}{k}\right)x_3{}^2\right]\frac{dy}{d\,lg\,x_3}=0.\end{aligned}$$

Setzt man in 9) die nach auf- oder absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe

$$\Sigma a_n x^n$$

für y ein, so findet man, dass a_n die Recursionsformel

$$\begin{aligned}&a_{n+2}(n+2)^3+(u-3)(n+2)^2+(2-u)(n+2)\\ \text{10)}\quad&-a_{n+1}[(n+1)^3(1+k)-(v+3+3k)(n+1)^2+(v+2+2k-\tau)(n+1)]\\&+a_n k(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')=0\end{aligned}$$

oder, wenn man mit dem Euler'schen Integral $\Pi(n)$ multiplicirt, die Recursionsformel

$$\begin{aligned}&[(a_{n+2}\Pi(n+2)(n+2-\alpha)]+[a_n\Pi(n)]k(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')\\ \text{10a)}\qquad&-[a_{n+1}\Pi(n+1)][(n+1)^2(1+k)-(v+3+3k)(n+1)\\&\qquad\qquad-\tau+v+2+2k]=0\end{aligned}$$

befriedigen muss. Diese Gleichung stimmt genau mit 5a) überein, wenn man dort $u_n\Pi(n)$ für $Q_n(0)$ setzt.

Setzt man ebenso die Reihe

$$\Sigma c_n x_3^n$$

in 9a) ein, so ergiebt sich für c_n die Recursionsformel

$$\begin{aligned}&[c_{n+2}\Pi(n+2)](n+2-\gamma)+[c_n\Pi(n)]\left(1-\frac{1}{k}\right)(n+\beta)(n+\beta')(n+\beta'')\\ &-[c_{n+1}\Pi(n+1)]\Bigg[(n+1)^2\left(1+1-\frac{1}{k}\right)\\ \text{10b)}\quad &\qquad -\left(\gamma+\delta-1+\left(1-\frac{1}{k}\right)(\alpha+\gamma-1)\right)(n+1)\\ &\qquad +\frac{\tau+2-\alpha-\gamma}{k}+(2-\alpha)(\beta+\beta')+\gamma\Bigg]=0.\end{aligned}$$

Soviel über die allgemeine Function.

II.

Wir wenden uns nun zu einem speciellen Falle, in welchem die Recursionsformeln 10) und 10a) vollständig integrirt werden können, nämlich wenn die Constanten in denselben die beiden Bedingungen erfüllen

$$\text{11)}\qquad \alpha+\beta''=2$$

und

$$(\alpha-1)^2(1+k)-(v+3+3k)(\alpha-1)+v-\tau+2+2k=0$$

oder

$$\text{11a)}\qquad \tau=(\alpha-2)[(\gamma+\beta+\beta')k+1-\gamma],$$

in welchem Falle 10a) die Form annimmt

$$\text{12)}\quad \begin{aligned}&a_{n+2}\Pi(n+2)-a_{n+1}\Pi(n+1)[(n+1)(1+k)+(\beta+\beta'+\gamma-1)k-\gamma]\\ &\qquad +a_n\Pi(n)\,k\,(n+\beta)(n+\beta')=0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+2}\Pi(n+2)}{\Pi(n+\beta+1)}(n+\beta+1)-\frac{a_{n+1}\Pi(n+1)}{\Pi(n+\beta)}[(n+\beta+1)(1+k)\\ \text{12a)}\quad &\qquad\qquad +k(\gamma+\beta'-1)-\gamma-\beta]\\ &\qquad +\frac{a_n\Pi(n)}{\Pi(n+\beta-1)}k(n+\beta')=0.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Recursionsformel führt aber die Integration der Differentialgleichung

$$\text{13)}\quad \begin{aligned}&(1-x)(1-kx)\frac{d^2y}{d\lg x^2}-[1+((\beta+\beta'+\gamma-1)k-\gamma)x-(\beta+\beta')kx^2]\frac{dy}{d\lg x}\\ &\qquad +k\beta\beta'x^2y=0,\end{aligned}$$

mithin sind ihre Integrale zugleich Integrale der Gleichung 1), wenn deren Constante durch die Gleichungen 11) und 11a) beschränkt sind. Die allgemeine Lösung der Gleichung 13) ist in Riemann's Bezeichnung

$$\text{14)}\qquad y=P\begin{pmatrix}1, & \infty, & 1:k, & \\ \gamma, & \beta, & \delta, & x\\ 0, & \beta', & 0, & \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\gamma, & \beta, & \delta, & \dfrac{k(1-x)}{k-1}\\ 0, & \beta', & 0, & \end{pmatrix}.$$

Zwei allgemeine Lösungen der Recursionsformel 12) sind*

$$
15)\quad
\begin{aligned}
a_n &= \frac{A\,\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)}\int_0^1 s^{n+\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}ds\\
&+\frac{A'\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)}\,k^n\int_0^1 s^{n+\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'}ds,
\end{aligned}
$$

$$
15\text{a})\quad
\begin{aligned}
a_n &= \frac{B\,\Pi(-n-1)}{\Pi(-n-\beta)}\int_0^1 s^{-n-\beta}(1-s)^{-\delta-\beta'}(1-ks)^{-\gamma-\beta'}ds\\
&+\frac{B'\Pi(-n-1)}{\Pi(-n-\beta)}\,k^n\int_0^1 s^{-n-\beta}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'}ds,
\end{aligned}
$$

worin A, A' Constante oder vielmehr periodische Functionen bedeuten, die ungeändert bleiben, wenn man n um eine ganze Zahl ändert. Die hier vorkommenden bestimmten Integrale sollen der Reihe nach mit $J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $H^{n+\beta'-1}(k)$, $J^{-n-\beta}(k)$, $H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right)$ zur Abkürzung bezeichnet werden. In den Integralen soll für negative reelle k der Factor $(1-ks)^{-\gamma-\beta'}$ oder $(1-ks)^{-\delta-\beta'}$, wenn die Exponenten reell sind, reell genommen werden, ebenso $\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'}$ und $\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}$. Für andere Werthe von k sind die Werthe dieser Factoren durch stetige Fortsetzung, nicht über eine von 0 über 1 nach ∞ gezogene gerade Linie hinweg, in der ganzen k-Ebene bestimmt Was die Brauchbarkeit dieser Integrale betrifft, so ist sie nur dadurch beschränkt, dass $n+\beta'-1$, $-\gamma-\beta'$, $-n-\beta$, $-\delta-\beta'$ nicht ganze negative Zahlen sein dürfen, wenn man die bestimmten Integrale in der Weise definirt, wie ich es in dieser Zeitschrift XIV, S. 52, gethan habe.

Es ist nöthig, die Determinanten

$$
\begin{vmatrix} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'-1}H^{n+\beta'-1}(k)\\ J^{n+\beta'}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'}H^{n+\beta'}(k)\end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix} J^{-n-\beta}(k). & k^{n+\beta}H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right)\\ J^{-n-\beta-1}(k), & k^{n+\beta+1}H^{-n-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\end{vmatrix}
$$

einfacher ausdrücken, was durch zwei verschiedene Methoden geschehen kann. Die erste dieser Determinanten soll mit Δ_n, die zweite mit D_n bezeichnet werden. Es sind $J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $k^{n+\beta'-1}H^{n+\beta'-1}(k)$ Lösungen der Recursionsformel

* Man vergl. Bd. XIV dieser Zeitschrift, S 350 flgg.

$$l_{n+2}(n+\beta-1) - l_{n+1}[n+\beta+1)(1+k) + k(\gamma+\beta'-1) - \gamma - \beta] \\ + l_n k(n+\beta') = 0,$$

woraus folgt*

$$\Delta_n : \Delta_{n+1} = n+\beta+1 : k(n+\beta'), \quad \Delta_n k(n+\beta') - \Delta_{n+1}(n+\beta+1) = 0.$$

Die Lösung dieser Recursionsformel ist

$$\Delta_n = \frac{\varphi(n)\, k^n \Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n+\beta)},$$

worin $\varphi(n)$ eine periodische Function von n ist. Hieraus ergiebt sich, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$\varphi(n+m) = \frac{\Pi(n+m+\beta)\,.\,\Delta_{n+m}}{k^{n+m}\,\Pi(n+m+\beta'-1)} = \varphi(n),$$

$$\frac{\varphi(n)\,\Pi(n+m-\delta)\,\Pi(n+m-\gamma)}{\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(n+m+\beta)\,\Pi(n+m+\beta'-1)} =$$

$$\begin{vmatrix} F\left(\gamma+\beta', n+m+\beta', n+m-\delta+1, \dfrac{1}{k}\right), & k^{\beta'-1} F(\delta+\beta', n+m+\beta', n+m-\gamma+1, k) \\ \dfrac{n+m+\beta'}{n+m-\delta+1} F\left(\gamma+\beta', n+m+\beta'+1, n+m-\delta+2, \dfrac{1}{k}\right), & \dfrac{k^{\beta'}(n+m+\beta')}{n+m-\gamma+1} F(\delta+\beta', n+m+\beta'+1, n+m-\gamma+2, k) \end{vmatrix}.$$

Will man nun zur Auswerthung dieser Determinante die Gauss'schen Reihen benutzen, so muss man für einen Augenblick k auf Werthe beschränken, deren absoluter Betrag 1 ist, also auf eine Linie. Wenn dann noch der reelle Theil von β grösser als der von β' vorausgesetzt wird, so convergiren alle vorkommenden Reihen, was auch m oder n sein mag. Gehen wir nun mit m zur Grenze Unendlich über, so erhalten wir

$$\varphi(n) = \quad \Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta') \begin{vmatrix} \left(1-\dfrac{1}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}, & k^{\beta'-1}(1-k)^{-\delta-\beta'} \\ \left(1-\dfrac{1}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}, & k^{\beta'}(1-k)^{-\delta-\beta'} \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{-\gamma-\beta'}\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,k^{\gamma+\beta+\beta'-1}(1-k)^{\beta-\gamma'},$$

also ist

$$\Delta_n = -\frac{(-1)^{-\gamma-\beta'}\,k^{n+\gamma+2\beta'-1}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}.$$

Um den Werth von $(-1)^{-\gamma-\beta'}$ zu finden, setzen wir in dem ursprünglichen Ausdrucke für Δ_n durch bestimmte Integrale einen sehr kleinen, negativ reellen Werth für k. Dann nehmen die Integrale $H^{n+\beta'-1}(k)$, $H^{n+\beta'}(k)$ für verschwindende k bez. die Grenzwerthe

$$\frac{\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma)}, \quad \frac{\Pi(n+\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma+1)}$$

---

* Man vergl. meine Antrittsschrift: „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet", Halle bei L. Nebert, 1875.

an. Ferner nehmen $k^{-\gamma-\beta'} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right)$, $k^{-\gamma-\beta'} J^{n+\beta'}\left(\frac{1}{k}\right)$ bez. die Grenzwerthe an

$$\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma-1)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta-1)},\quad \frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)},$$

also ist für ein verschwindendes k

$$\frac{(-1)(-1)^{-\gamma-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n+\beta)}$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma+1)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta-1)}, & \dfrac{\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma)} \\ \dfrac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n-\gamma)\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}, & \dfrac{k\,\Pi(n+\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n-\gamma+1)} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta')}{\Pi(n+\beta)}$$

und demnach

$$(-1)^{-\gamma-\beta'}=e^{-(\gamma+\beta')i\pi}.$$

So ist endlich

$$16)\quad \Delta_n=-\frac{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,k^{n+\gamma+\beta'+\beta'-1}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(n+\beta'-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(n+\beta)}.$$

Hieraus geht D_n hervor, wenn man $-n-\beta-\beta'$ statt n, $\frac{1}{k}$ statt k setzt und das Vorzeichen umkehrt, so dass sich ergiebt

$$17)\quad D_n=\frac{e^{-(\delta+\beta')i\pi}\,k^{n-\gamma}\,(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(-n-\beta-1)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')}{\Pi(-n-\beta')}.$$

Ein anderes Mittel zur Auswerthung dieser Determinanten hat man noch, wenn man die Integrale als Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ansieht.

Soll nun in dem Integrale $y=\Sigma a_n x^n$ die Entwickelung aufsteigend mit der α^{ten} Potenz beginnen, so kann a_α, der Coefficient von x^α, willkürlich gewählt werden, weil für $n=\alpha$ der Coefficient von x^α in der die Bedingung 12) liefernden Gleichung von selbst verschwindet. Der Coefficient von $a_{\alpha+1}$ aber muss so bestimmt werden, dass

$$a_{\alpha+1}\,\Pi(\alpha+1)-a_\alpha\,\Pi(\alpha)\,[\alpha-\gamma+(\beta+\beta'+\alpha+\gamma-1)k]$$

verschwindet, was dann stattfindet, wenn man in 15) die Constanten A, A' so bestimmt, dass $a_{\alpha-1}$ verschwindet, also dann, wenn man

$$18)\quad a_n=\frac{e^{(\gamma+\beta')i\pi}\,\Pi(n+\beta-1)\,k^{2-\alpha-\gamma-\beta'-\beta'}(1-k)^{\beta'-\beta}}{\Pi(\alpha+\beta'-2)\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(n)}\begin{vmatrix} J^{n+\beta'-1}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{n+\beta'-1}\,H^{n+\beta'-1}(k) \\ J^{\alpha+\beta'-2}\left(\frac{1}{k}\right), & k^{\alpha+\beta'-2}\,H^{\alpha+\beta'-2}(k) \end{vmatrix}$$

setzt. Dann ist a_α gleich Eins, dividirt durch $\Pi(\alpha)$. Hieraus ergiebt ich nun für $Q^{0,\alpha}(x)$ die Darstellung

19) $$x^{-\alpha}, Q^{0,\alpha}(x) = \frac{\left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-2}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'}ds \int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'} F(1,\alpha+\beta,\alpha+1,xs)\,ds \\ -k\int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-2}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}ds \int\limits_0^1 s^{\alpha+\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'} F(1,\alpha+\beta,\alpha+1,kxs)\,ds \end{array}\right\}}{e^{-(\gamma+\beta')i\pi}\,k^{\gamma+\beta'}(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(\alpha+\beta'-2)\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta'):\Pi(\alpha+\beta-1)}.$$

Einfacher gestalten sich die Integrale $Q^{0,0}(x)$, $Q^{0,0'}(x)$, weil jede der beiden Lösungen der Recursionsformel 12), die unter 15) verzeichnet sind, die Eigenschaft hat, für $n = -1$ zu verschwinden. So hat man

19a) $$Q^{0,0}(x) = \Pi(\beta-1)\int\limits_0^1 s^{\beta'-1}(1-s)^{-\delta-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\gamma-\beta'}(1-xs)^{-\beta}\,ds,$$

19b) $$Q^{0,0'}(x) = \Pi(\beta-1)\,k^{\beta'-1}\int\limits_0^1 s^{\beta'-1}(1-s)^{-\gamma-\beta'}(1-ks)^{-\delta-\beta'}(1-xks)^{-\beta}\,ds.$$

Differenzirt man diese Ausdrücke nach x, so erhält man dasselbe, als wenn man α, γ, δ in $\alpha-1$, $\gamma-1$, $\delta-1$ und β, β', β'' in $\beta+1$, $\beta'+1$, $\beta''+1$ verwandelt; der n^{te} Differentialquotient $Q_n(x)$ aber genügt der Recursionsformel 10a), wenn man $Q_n(x)$ für $a_n\Pi(n)$ setzt, so dass also die Constanten in diesen Zweigen den früheren Bestimmungen gemäss sind.

Integrirt man die Differentialgleichung durch absteigende Reihen, so beginnt die Entwickelung des einen Integrals mit der $-\beta''^{\text{ten}}$ Potenz, und man muss die Coefficienten B, B' in 15a) so einrichten, dass $a_{-\beta''+1}$ verschwindet. Demnach hat man für a_n zu setzen

20) $$a_n = \frac{e^{(\delta+\beta'+\beta'')i\pi}\,k^{1+\beta''+\gamma}(1-k)^{\beta-\beta}\,\Pi(\beta''-\beta)\,\Pi(-n-1)}{\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')\,\Pi(-n-\beta)} \times \begin{vmatrix} J^{-n-\beta}(k), & k^{n+\beta}H^{-n-\beta}\left(\frac{1}{k}\right) \\ J^{\beta''-\beta-1}(k), & k^{\beta-\beta''+1}H^{\beta''-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right) \end{vmatrix}.$$

Hieraus entspringt für $Q^{\infty,\beta''}(x)$ die Darstellung

21) $$Q^{\infty,\beta''}(x) = \frac{\left\{\begin{array}{l} k^{\beta+1}H^{\beta''-\beta-1}\left(\frac{1}{k}\right)\int\limits_0^1 s^{\beta''-\beta}(1-s)^{-\delta-\beta'}(1-ks)^{-\gamma-\beta'}F\left(1,\beta'',\beta''-\beta+1,\frac{s}{x}\right)ds \\ -k^{\beta}J^{\beta''-\beta-1}(k)\int\limits_0^1 s^{\beta''-\beta}(1-s)^{-\gamma-\beta'}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-\delta-\beta'}F\left(1,\beta'',\beta''-\beta+1,\frac{s}{kx}\right)ds \end{array}\right\}}{x^{\beta'}\,e^{-(\delta+\beta'+\beta'')i\pi}\,k^{-\gamma-1}(1-k)^{\beta-\beta'}\,\Pi(-\delta-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta'):\Pi(\beta''-1)}.$$

Die beiden anderen zum Punkte ∞ gehörigen Zweige $Q^{\infty,\beta}(x)$, $Q^{\infty,\beta'}(x)$ sind Gauss'sche Reihen. Nämlich

$$21\text{a})\quad Q^{\infty,\beta}(x)=\Pi(\beta-1)(1-x)^{-\beta}\,F\left(\beta,\,\gamma+\beta,\,\beta-\beta'+1,\,\frac{k-1}{k(1-x)}\right),$$

$$21\text{b})\quad Q^{\infty,\beta'}(x)=\Pi(\beta'-1)(1-x)^{-\beta'}F\left(\beta',\,\gamma+\beta',\,\beta'-\beta+1,\,\frac{k-1}{k(1-x)}\right).$$

Um die Function Q nach Potenzen von $1-x$ zu entwickeln, kann man

$$y=\Sigma c_n\frac{(1-x)^n k^n}{(k-1)^n}=\Sigma c_n x_3{}^n$$

setzen und erhält so für c_n die Recursionsformel 10b), welche infolge der Bedingungen 11) und 11a) die Gestalt annimmt

$$\begin{aligned}&c_{n+2}\,\Pi(n+2)\,(n+2-\gamma)+c_n\,\Pi(n)\left(1-\frac{1}{k}\right)(n+2-\alpha)(n+\beta)\,(n+\beta')\\ 22)\quad &-c_{n+1}\,\Pi(n+1)\left[\left(1+1-\frac{1}{k}\right)(n+1)^2-\left\{\delta+\gamma-1\right.\right.\\ &\left.\left.+(\alpha+\gamma-1)\left(1-\frac{1}{k}\right)\right\}(n+1)+\beta\beta'+\left(1-\frac{1}{k}\right)\gamma(\alpha-1)\right]=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt die particuläre Lösung

$$23)\qquad c_n=\frac{\Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)}.$$

Kennt man aber von einer Recursionsformel zweiter Ordnung

$$24)\qquad \varphi a_{n+2}+\psi a_{n+1}+\chi a_n=0$$

eine Lösung a'_n, so erhält man leicht die zweite durch eine einfache Summation, wenn man $a_n=a'_n\varrho_n$ setzt. Durch Combination der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi a'_{n+2}\varrho_{n+2}+\psi a'_{n+1}\varrho_{n+1}+\chi a'_n\varrho_n&=0,\\ \varphi a'_{n+2}\varrho_{n+1}+\psi a'_{n+1}\varrho_{n+1}+\chi a'_n\varrho_{n+1}&=0\end{aligned}$$

erhält man die neue

$$\varphi a'_{n+2}(\varrho_{n+2}-\varrho_{n+1})-\chi a'_n(\varrho_{n+1}-\varrho_n)=0,$$

die in Bezug auf die Differenz $\varrho_{n+1}-\varrho_n=\Delta\varrho_n$ linear ist. Hat man hieraus $\Delta\varrho_n$ gefunden, so ist dann die Lösung von 24)

$$a_n=a'_n\,\Sigma\,\Delta\varrho_n.$$

Im vorliegenden Falle ist von der Recursionsformel zweiter Ordnung 22) die particuläre Lösung

$$c'_n=\frac{\Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)}$$

bekannt und man hat, wenn das Integral gleich $c'_n \varrho_n$ gesetzt wird, für $\Delta \varrho_n$ die Gleichung

$$(n+\beta+1)(n+\beta'+1)\,\Delta\varrho_{n+1} - \left(1-\frac{1}{k}\right)(n+2-\alpha)(n+1-\gamma)\,\Delta\varrho_n = 0,$$

woraus folgt

$$\Delta\varrho_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^n \frac{\Pi(n-\gamma)\,\Pi(n+1-\alpha)}{\Pi(n+\beta)\,\Pi(n+\beta')}$$

und hieraus

$$25)\quad \varrho_n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^n \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{n-\gamma}(1-s)^{\gamma+\beta-1}\sigma^{n+1-\alpha}(1-\sigma)^{\alpha+\beta'-1}}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma},$$

also

$$26)\quad c_n = c'_n\varrho_n =$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \Pi(n+\beta-1)\,\Pi(n+\beta'-1)}{\Pi(n)\,\Pi(n-\gamma)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{n-\gamma}\sigma^{n+1-\alpha}(1-s)^{\gamma+\beta-1}(1-\sigma)^{\alpha+\beta'-1}}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma}.$$

Somit findet man für die drei Zweige der Function Q im Punkte Eins die Ausdrücke

$$27)\quad Q^{1,0}(x) = \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta'-1)}{e^{\gamma i\pi}\,\Pi(-\gamma)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{-\gamma}\sigma^{1-\alpha}F[\beta,\beta',1-\gamma,(1-x)s\sigma]}{\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)s\sigma\right](1-s)^{\delta+\beta'}(1-\sigma)^{1-\alpha-\beta'}},$$

$$27\,\mathrm{a})\quad Q^{1,0'}(x) = \left(\frac{1}{k}-1\right)^{\gamma} \int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{-\gamma-\beta}\left(1-\frac{k(1-x)}{k-1}s\right)^{-\beta'} ds}{\Pi(-\beta')\,\Pi(-\gamma-\beta')},$$

$$27\,\mathrm{b})\quad Q^{1,\gamma}(x) = (x-1)^{\gamma} \int_0^1 \frac{s^{-\beta'-\delta}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{k(1-x)}{k-1}s\right)^{-\gamma-\beta'} ds}{\Pi(-\beta)\,\Pi(-\delta-\beta')}.$$

Im Punkte $1:k$ hat man die drei Ausdrücke

$$28)\quad Q^{1:k,0}(x) = \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\beta'-1)}{e^{\delta i\pi}\,\Pi(-\delta)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{-\delta}\sigma^{1-\alpha}F[\beta,\beta',1-\delta,(1-kx)s\sigma]}{[1-(1-k)s\sigma](1-s)^{\gamma+\beta'}(1-\sigma)^{1-\alpha-\beta'}},$$

$$28\text{a)}\quad Q^{1:k,0'}(x)=(k-1)^{\delta}\int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{-\delta-\beta}\left(1-\frac{1-kx}{1-k}\,s\right)^{-\beta'}}{\Pi(-\beta')\,\Pi(-\delta-\beta)},$$

$$28\text{b)}\quad Q^{1:k,\delta}(x)=\left(\frac{kx-1}{k}\right)^{\delta}\int_0^1 \frac{s^{-\beta'-\gamma}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{1-x}{1-k}\,s\right)^{-\delta-\beta'}ds}{\Pi(-\beta)\,\Pi(-\gamma-\beta')}.$$

Hiermit ist für jeden Zweig in den Punkten 0, ∞, 1, $1:k$ wenigstens eine Form der Darstellung aufgestellt. Es lassen dieselben, wie man leicht sieht, eine grosse Menge anderer Formen zu, von denen man einige durch blosse Buchstabenvertauschungen, nämlich durch Vertauschung von β und β' erhalten kann. Dann müssen jedoch bei einigen die constanten Factoren neu bestimmt werden, wenn sie den für sie festgestellten Bedingungen gemäss sein sollen.

VII.

Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik.

Von

W. Gosiewski

in Warschau.

In der bisherigen Behandlung von Problemen der Molecularmechanik nimmt man, von der Atomtheorie ausgehend, an, dass das Differenziiren und Integriren über den vom Körper erfüllten Raum zulässig sei, ohne aber im Voraus zu entscheiden, ob ein derartiges Verfahren nicht mit dem Wesen der Theorie in directem Widerspruch stehe.

Zur Beseitigung dieser Unklarheit liesse sich folgende Frage stellen: Welchen Bedingungen muss ein Körper, als System materieller Punkte betrachtet, genügen, damit bei der Bestimmung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen es möglich wäre, über den von ihm erfüllten Raum zu differenziiren und zu integriren oder, was auf dasselbe hinauskommt, damit es möglich wäre, ihn durch eine continuirliche Materie zu ersetzen?

Die Resultate der Lösung dieser Frage, die den Inhalt der vorliegenden Schrift bilden, dürften bei Aufstellung von Hypothesen über die Structur der Materie, sobald nur das Differenziiren und Integriren über den von ihr eingenommenen Raum zugelassen wird, nicht unberücksichtigt bleiben. Hieraus dürfte auch der Titel, den ich meiner Arbeit gegeben, motivirt erscheinen.

Das bekannte d'Alembert'sche Princip, nach welchem man jederzeit von den Gleichgewichtsgleichungen zu denen der Bewegung übergehen kann, erlaubt uns, diese Untersuchung auf den Fall des Gleichgewichts zu beschränken.

§ 1.

Denken wir uns einen continuirlichen und starren Körper mit der Oberfläche ω und einer Dichtigkeit ϱ. Beziehen wir diesen Körper auf ein im Raume unveränderliches rechtwinkliges Coordinatensystem, und es seien x, y, z die Coordinaten eines seiner Punkte M. Es seien X_0, Y_0, Z_0 die auf dieselben Axen bezogenen Componenten der auf die Masseneinheit des Elements $\varrho\, dx\, dy\, dz$ wirkenden Kräfte. Es werde ferner angenommen, dass ϱ und X_0, Y_0, Z_0 continuirliche Functionen von x, y, z sind. Schliesslich mögen noch auf die Oberfläche des Körpers Druckkräfte wirken, deren Componenten für die Einheit des Flächenelements $d\omega$ X, Y, Z seien.

Befinden sich nun diese sämmtlichen Kräfte im Gleichgewicht, so muss in diesem Falle die Summe ihrer virtuellen Momente $=0$ sein. Wenn wir also die Projectionen der virtuellen Verschiebungen im Punkte M durch δx, δy, δz bezeichnen, so liesse sich obige Bedingung in folgender Weise darstellen:

$$1)\quad \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\, \varrho (X_0\, \delta x + Y_0\, \delta y + Z_0\, \delta z) + \int d\omega\, (X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z) = 0,$$

wo sich das erste Integral über das ganze Volumen, das zweite über die ganze Oberfläche des Körpers erstreckt.

Die hier vorkommenden Grössen δx, δy, δz sind nicht willkürlich, sondern müssen den Gleichungen, die aus den Bedingungen der Continuirlichkeit und der Starrheit folgen, genügen. Um diese Gleichungen zu erhalten, bemerken wir, dass der Punkt $M(x, y, z)$ dem Elemente $\varrho\, dx\, dy\, dz$ angehört, und nehmen wir in diesem Elemente noch zwei andere Punkte α und β, deren Coordinaten wir bezüglich durch x', y' z' und x'', y'', z'' bezeichnen wollen. Der gegenseitige Abstand dieser zwei Punkte sei r; es ist dann

$$r = \{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2\}^{1/2}.$$

Setzen wir ferner

$$x'-x'' = ar, \quad y'-y'' = br, \quad z'-z'' = cr,$$

wo die Grössen a, b, c der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

genügen müssen.

Wäre nicht der Abstand r unveränderlich, so würde er wegen der virtuellen Verschiebungen folgende Aenderung erleiden müssen:

$$\delta r = a\,\delta(x'-x'') + b\,\delta(y'-y'') + c\,\delta(z'-z'').$$

Da die Punkte α und β dem Punkte M unendlich nahe sind, so ist wegen der vorausgesetzten Continuität

$$\delta(x'-x'') = r\left(a\frac{d\,\delta x}{dx} + b\frac{d\,\delta x}{dy} + c\frac{d\,\delta x}{dz}\right),$$

$$\delta(y'-y'') = r\left(a\frac{d\,\delta y}{dx} + b\frac{d\,\delta y}{dy} + c\frac{d\,\delta y}{dz}\right),$$

$$\delta(z'-z'') = r\left(a\frac{d\,\delta z}{dx} + b\frac{d\,\delta z}{dy} + c\frac{d\,\delta z}{dz}\right).$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen nimmt der obige Werth von δr folgende Form an:

$$
2)\qquad \delta r = r\left\{a^2\frac{d\,\delta x}{dx}+b^2\frac{d\,\delta y}{dy}+c^2\frac{d\,\delta z}{dz}+bc\left(\frac{d\,\delta y}{dz}+\frac{d\,\delta z}{dy}\right)\right.
$$
$$
\left.+ca\left(\frac{d\,\delta z}{dx}+\frac{d\,\delta x}{dz}\right)+ab\left(\frac{d\,\delta x}{dy}+\frac{d\,\delta y}{dx}\right)\right\}.
$$

Die Grössen $\frac{d\,\delta x}{dx}, \ldots \frac{d\,\delta y}{dz}, \frac{d\,\delta z}{dy}, \ldots$ sind nur von den Coordinaten des Punktes M abhängig und enthalten keine der Grössen r, a, b, c.

Da das Element starr ist, so muss für alle Werthe der Grössen r, a, b, c, welche die Länge und die Richtung des Linearelements in der Nähe des Punktes M bestimmen, die Grösse δr der Null gleich sein. Dies kann aber nur stattfinden, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$
3)\qquad \left\{\begin{array}{ccc}
\frac{d\,\delta x}{dx}=0, & \frac{d\,\delta y}{dy}=0, & \frac{d\,\delta z}{dz}=0,\\[2mm]
\frac{d\,\delta y}{dz}+\frac{d\,\delta z}{dy}=0, & \frac{d\,\delta z}{dx}+\frac{d\,\delta x}{dz}=0, & \frac{d\,\delta x}{dy}+\frac{d\,\delta y}{dx}=0.
\end{array}\right.
$$

Man sieht also zunächst, dass zur Bestimmung der Starrheit eines unendlich kleinen Elements s e c h s Gleichungen 3) erforderlich sind.

Wollten wir also die Zahl n der materiellen Punkte eines unendlich kleinen Systems bestimmen, welches unserem Elemente entspricht, so würden wir $n=4$ finden, denn die Anzahl der Starrheitsbedingungen eines Systems von n Punkten ist $3n-6$, und in unserm Falle ist $3n-6=6$, also $n=4$.

Hieraus folgt offenbar, d a s s, d a m i t e i n a l s S y s t e m m a t e r i e l l e r P u n k t e g e d a c h t e r K ö r p e r d u r c h e i n e c o n t i n u i r l i c h e M a t e r i e e r s e t z t w e r d e n k ö n n e, e i n u n e n d l i c h k l e i n e s E l e m e n t d i e s e r M a t e r i e e i n e m u n e n d l i c h k l e i n e n, a u s v i e r m a t e r i e l l e n P u n k t e n b e s t e h e n d e n S y s t e m i m K ö r p e r e n t s p r e c h e n m u s s.

Ein solches System nenne ich M o l e c u l, jeden seiner vier Punkte A t o m;* ϱ nehme ich als D i c h t i g k e i t und $dx\,dy\,dz$ als V o l u m e n d e s M o l e c u l s an, da diese Grössen der Dichtigkeit und dem Volumen des das Molecul ersetzenden Elements gleich sind.

Die obige Beweisführung ist giltig für Elemente von beliebiger Gestalt; der Einfachheit wegen habe ich das Element als rechtwinklig betrachtet, also sein Volumen gleich $dx\,dy\,dz$ angenommen.

---

* Obige Bezeichnungen habe ich gewählt auf Grund einer gewissen Analogie mit der chemischen Theorie über die Structur der Gase, nach welcher ein Molecul eines einfachen Gases als aus vier Atomen bestehend angenommen wird.

§ 2.

Die Gleichungen 3) sind Starrheitsbedingungen eines continuirlichen Körpers in dem Punkte M; wenn aber dieser Körper nur eine aus den wie oben definirten Moleculen bestehende Materie ersetzt, so darf man diese Bedingungen durch sechs Gleichungen von der Form

$$\delta r = 0$$

darstellen, die die Unveränderlichkeit der sechs gegenseitigen Abstände r der vier, das Molecul in diesem Punkte bildenden Atome bestimmen

Wir multipliciren jede dieser Gleichungen mit einem noch zu bestimmenden Factor $\lambda\, dx\, dy\, dz$; es ergiebt sich durch Addition dieser Gleichungen

$$dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r = 0,$$

wo $\Sigma\lambda\,\delta r$ die Summe der sechs Glieder $\lambda\,\delta r$ darstellt.

Addiren wir zu der linken Seite der Gleichung 1) das über das ganze Volumen ausgedehnte Integral

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r,$$

so erhalten wir eine neue Gleichung

$$4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\, \varrho (X_0\, \delta x + Y_0\, \delta y + Z_0\, \delta z) + \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r \\ &\qquad + \int d\omega\, (X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z) = 0, \end{aligned} \right.$$

die für alle Werthe der Grössen δx, δy, δz stattfindet und die Bedingungen des Gleichgewichts in jedem Punkte eines solchen starren Körpers ausdrückt, welcher durch eine continuirliche Materie ersetzt werden kann.

Führt man in $\Sigma\lambda\,\delta r$ statt δr den Werth 2) ein und bemerkt noch, dass die Grössen $\frac{d\,\delta x}{dx}, \ldots \frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy}, \ldots$ denselben Werth für alle Glieder der Summe Σ besitzen, so findet man ohne Schwierigkeit

$$dx\, dy\, dz\, \Sigma\lambda\, \delta r = dx\, dy\, dz \left\{ \begin{aligned} & N_1 \frac{d\,\delta x}{dx} + T_1 \left(\frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy} \right) \\ + & N_2 \frac{d\,\delta y}{dy} + T_2 \left(\frac{d\,\delta z}{dx} + \frac{d\,\delta x}{dz} \right) \\ + & N_3 \frac{d\,\delta x}{dz} + T_3 \left(\frac{d\,\delta z}{dy} + \frac{d\,\delta y}{dx} \right) \end{aligned} \right\},$$

wo die Grössen N_i und T_i folgende Werthe haben:

$$5)\quad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \Sigma\lambda\, r a^2, & T_1 &= \Sigma\lambda\, r b c, \\ N_2 &= \Sigma\lambda\, r b^2, & T_2 &= \Sigma\lambda\, r c a, \\ N_3 &= \Sigma\lambda\, r c^2, & T_3 &= \Sigma\lambda\, r a b. \end{aligned} \right.$$

Wir integriren die beiden Seiten dieser Gleichung, indem wir das Integral über das ganze Volumen des Körpers erstrecken und auf der rechten Seite die theilweise Integration anwenden. Auf diese Weise gelangen wir zu folgender Gleichung:

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\,\delta r$$

$$= -\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}\right)\delta x \\ + \left(\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz}\right)\delta y \\ + \left(\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz}\right)\delta z \end{array} \right\}$$

$$+ \int d\omega \left\{ \begin{array}{l} (m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2)\,\delta x \\ + (m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1)\,\delta y \\ + (m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3)\,\delta z \end{array} \right\},$$

wo die Grössen m_i die Cosinusse der Winkel bedeuten, welche die äussere Normale zur Oberfläche des Körpers mit den Coordinatenaxen bildet.

Führt man den Werth der ersten Seite dieser Gleichung in die Gleichung 4) ein und bemerkt, dass diese letztere für alle Werthe der Grössen δx, δy, δz bestehen soll, so erhält man aus ihr folgende neue Gleichungen:

$$6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = \varrho X_0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = \varrho Y_0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = \varrho Z_0, \end{array} \right.$$

$$7)\quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2 + X = 0, \\ m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1 + Y = 0, \\ m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3 + Z = 0. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 6) gelten als Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt im Innern des Körpers, die Gleichungen 7) als Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt seiner Oberfläche.

Aehnliche Gleichungen erhält man, wie bekannt, in der Elasticitätstheorie, und zwar auf einem andern Wege. Dort werden auch die geometrischen Eigenschaften der Functionen N_i, T_i untersucht, die wir hier als bekannt übergehen. Wir erwähnen nur, dass die Werthe dieser Grössen im Punkte M gleich sind den Componenten der Druckkräfte, die auf die Flächeneinheit der drei ebenen, in diesem Punkte sich rechtwinklig schneidenden Elemente wirken, dass sie also die Parameter des von Lamé sogenannten Elasticitätsellipsoids sind.

§ 3.

Es ist leicht zu ersehen, dass die Grössen $\lambda\,dx\,dy\,dz$ die Intensität der zwischen je zwei Atomen eines Moleculs wirkenden Kräfte ausdrücken. Diese Kräfte hindern die gegenseitige Annäherung und Entfernung der Atome, was nothwendigerweise unter der Wirkung äusserer Kräfte geschehen müsste, wenn die Atome frei wären. Deshalb werden wir diese Kräfte Starrheitskräfte des Moleculs nennen.

Wenn je zwei Atome des Moleculs sich zu nähern streben, dann wird die Starrheitskraft abstossend, welche wir in diesem Falle als positiv betrachten wollen; im entgegengesetzten Falle wäre dieselbe somit als negativ anzunehmen.

Bezeichnen wir durch m, m', m'', m''' die Massen der das Molecul bildenden Atome, durch $\Sigma m = \varrho\, dx\, dy\, dz$ die Masse des Moleculs selbst, durch φ die der Kraft $\lambda\, dx\, dy\, dz$ entsprechende relative Beschleunigung der zwei Atome m und m', so ist

$$8)\qquad \lambda\, dx\, dy\, dz = \frac{m m' \varphi}{m + m'}.$$

Die Massen der Atome kann man in Theilen der Moleculmasse auf folgende Weise ausdrücken:

$$m = \varepsilon \varrho\, dx\, dy\, dz,\quad m' = \varepsilon' \varrho\, dx\, dy\, dz,\ \ldots,$$

wo ε, ε', ... positive echte Brüche sind, die der Bedingung

$$\Sigma \varepsilon = 1$$

genügen.

Führt man diese Bezeichnungen in die Gleichung 8) ein, so erhält man

$$\lambda = \frac{\varepsilon \varepsilon' \varrho \varphi}{\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Die Druckkräfte N_i, T_i 5) sind lineare Functionen der Grössen λr oder eigentlich ihrer Grenzen, $lim(\lambda r)$, welchen die Grössen sich nähern, wenn das continuirliche Element unbegrenzt abnimmt; und da dieselben Druckkräfte den Gleichungen 6) und 7) genügen, so müssen die genannten Grenzen von Null verschiedene Werthe besitzen.

Nehmen wir also an, dass

$$9)\qquad lim(\lambda r) = \frac{\varepsilon \varepsilon' \varrho}{\varepsilon + \varepsilon'},\quad lim(\varphi r) = \frac{\varepsilon \varepsilon' \varrho \psi}{\varepsilon + \varepsilon'},$$

so finden wir aus 8)

$$10)\qquad \lambda\, dx\, dy\, dz = \frac{m m'}{m + m'} \cdot \frac{\psi}{r},$$

wo $\psi = lim(\varphi r)$ ist.

Der Ausdruck 10) bezieht sich auf das Molecul, welches wir hinfort durch das Symbol

$$(m, r) = (\varepsilon \varrho\, dx\, dy\, dz, r)$$

bezeichnen wollen, und dessen Dichtigkeit nach der Definition ϱ und dessen Volumen $dx\, dy\, dz$ ist.

Ein diesem Molecul ähnliches System kann man durch das Symbol

$$\left(\frac{m}{kl^3}, \frac{r}{l}\right) = \left(\varepsilon \frac{\varrho}{k} \frac{dx}{l} \frac{dy}{l} \frac{dz}{l}, \frac{r}{l}\right)$$

der Starrheit, sondern im Gegentheil bestimmte Werthe annimmt, welche für verschiedene Körper verschiedene sind.

Die Bestimmung des Werthes von ψ für vollkommene Gase, unzusammendrückbare Flüssigkeiten und feste elastische Körper bietet keine Schwierigkeit dar. Wir übergehen jedoch diese Entwickelung in vorliegender Arbeit und beschränken uns auf die Untersuchung eines sehr allgemeinen und wichtigen Falles, aus welchem erhellen wird, dass das Gesetz der atomischen Wirkungen von dem Gesetze der Massenwirkung aus endlicher Entfernung wesentlich verschieden ist.

Das letztgenannte Gesetz kann man auf die Moleculeinheit, wie auf ein endliches System anwenden. Wir setzen daher voraus, wie es allgemein angenommen wird, dass jede zwei Punkte dieses Systems in der Richtung ihrer Verbindungsgeraden aufeinander wirken, und zwar mit einer Kraft, deren Stärke proportional ist dem Producte ihrer Massen und irgend einer Function ihrer Entfernung, d. h. wir nehmen an, dass zwei Punkte mit den Massen ε und ε', deren gegenseitiger Abstand gleich R ist, mit der Kraft $\varepsilon\varepsilon' F(R)$ aufeinander wirken. Wir wollen nun die Grösse der Atomkraft für entsprechende Massen m und m' im Molecul (m, r) bestimmen.

Die Aufgabe löst sich einfach, wenn man in der Formel 12) den Factor $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \frac{\psi}{R}$ durch den jetzt für ihn angenommenen Werth $\varepsilon\varepsilon'(FR)$ ersetzt und noch dabei die Gleichungen 11) berücksichtigt. Als Resultat finden wir den Ausdruck

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} F\left\{\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} r\right\},$$

welcher die allgemeine Form der Atomkräfte des Moleculs (m, r) darstellt in der Voraussetzung, dass die allgemeine Form für die Intensität der inneren Kräfte seiner Einheit (ε, R) in der Formel $\varepsilon\varepsilon' F(R)$ enthalten ist, die wegen der Bedingung $\Sigma\varepsilon = 1$ mit dem Ausdrucke

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R)$$

äquivalent ist.

Der Vergleich der Formeln

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} F\left\{\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} r\right\} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R)$$

zeigt genügend, worin der Unterschied zwischen den Gesetzen der atomischen Wirkungen und der Massenwirkungen in endlicher Entfernung besteht Dieser Unterschied verschwindet nur in einem einzigen Falle, wenn nämlich $F(R) = \frac{k}{R}$ ist, wo k eine Constante bedeutet;*

* Dieser Fall entspricht den permanenten Gasen, wenn k positiv ist.

denn dann nehmen die beiden Ausdrücke folgende entsprechenden Gestalten an:

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\,\frac{k}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon}\,\frac{k}{R}$$

und werden miteinander ganz übereinstimmend.

Fasst man aber die allgemeinen Resultate der vorigen Betrachtungen kurz zusammen, ohne willkürliche Hypothesen über die inneren Kräfte der Moleculeinheit einzuführen, so gelangt man zum folgenden Satze:

Soll es bei der Bestimmung der Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen eines als materielles Punktsystem betrachteten Körpers zulässig sein, denselben durch eine continuirliche Materie zu ersetzen, muss dieser Körper folgenden Bedingungen genügen: 1. der Körper muss ein aus einer unendlichen Anzahl Atome (materieller Punkte) bestehendes System sein und diese Atome müssen so gelagert sein, dass das möglich kleinste Volumen des Körpers, d. h. ein Molecul, nicht weniger und nicht mehr als vier Atome enthalte; 2. nur Atome, welche ein und dasselbe Molecul bilden, können aufeinander anziehend, resp. abstossend wirken, und zwar in den Richtungen ihrer Verbindungsgeraden mit Kräften, deren Intensitäten die Formel

$$(\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{\frac{4}{3}} f$$

darstellt, wo f die Intensitäten der entsprechenden Kräfte in der Moleculeinheit bezeichnet.

Wir haben unsere Frage in der Voraussetzung behandelt, dass die Grundhypothesen der Euklidischen Geometrie auch für das unendlich Kleine gelten, d. h. dass die Ebenheit des Raumes auch in unendlich kleinen Theilen stattfindet. Aus den Untersuchungen Riemann's ist aber bekannt, dass diese Voraussetzung für das unendlich Kleine ungenügend oder zu beschränkt ist; um also unsere Aufgabe in völliger Allgemeinheit lösen zu können, müsste man sie in der Voraussetzung behandeln, dass der Raum im unendlich Kleinen nicht mehr eben ist. Doch bis jetzt ist, wie mir scheint, eine solche Behandlung dieser Frage den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Analysis wenig zugänglich. Die Resultate aber, die wir in der speciellen Voraussetzung erhalten haben, richten schon unser Augenmerk auf jene allgemeinen Resultate und rechtfertigen den Gedanken, dass die Ideen des genannten grossen Forschers ganz besonders im Gebiete der Molecularmechanik ihre Anwendung finden könnten.

Kleinere Mittheilungen.

V. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen.

S. 145 flg. des XX. Jahrgangs dieser Zeitschrift gab ich einige Bemerkungen über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers, wenn die Zahl der Beobachtungen endlich ist. Diese Bemerkungen hat Herr Helmert S. 300 flg. einer strengen Kritik unterzogen, welche erst jetzt nach langer Abwesenheit von mir gelesen wurde.

Ich stimme Herrn Helmert gleich zu, dass ich mich bei der Berechnung des mittlern Werthes von ω^3 geirrt habe. Die richtige Berechnung des mittlern Werthes einer ungeraden Potenz von ω würde, glaube ich, nicht sehr einfach sein Für die vierte Potenz von ω ist diese Berechnung leicht genug, aber sie führt nicht zu einem brauchbaren Ausdrucke, weil dieser mittlere Werth von ω^4 auf ziemlich complicirte Weise von der Anzahl der Beobachtungen abhängig ist. Nur wundert es mich, dass ich für den mittlern Werth von ω^3, bei dessen Ableitung von mir, wie Herr Helmert richtig bemerkt, irrigerweise sowohl die negativen als die positiven Werthe von ω berücksichtigt sind, nicht Null bekommen habe. Wem dies zuzuschreiben sei, ist mir nicht deutlich. Es kann unmöglich davon herrühren, dass vielleicht der Behauptung Helmert's gemäss für gleichgrosse positive und negative Werthe von ω die Wahrscheinlichkeit nicht dieselbe sei. Denn bei der Berechnung von ω^3 führen wir für die Mittelwerthe der verschiedenen σ_m die S_m ein, und dabei setzen wir gerade voraus, die positiven und negativen ω seien gleich wahrscheinlich. Der einzige Grund für die Abweichung von der von mir berechneten $\overline{\omega^3}$ von Null kann in der Art der Berechnung gelegen sein. Aber ist diese Berechnungsweise fehlerhaft, dann büsst der berechnete Werth von $\overline{\omega^2}$ auch viel von dem bis jetzt darein gesetzten Zutrauen ein, denn diese Grösse wird auf dieselbe Weise berechnet wie $\overline{\omega^3}$. Die Sache ist mir noch nicht ganz klar.

Zweitens muss ich auch gestehen, dass die Gauss'sche Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers des aus der Summe der m^{ten} Potenzen der bei den Beobachtungen gemachten Fehler berechneten Werthes des wahrscheinlichen Fehlers des Resultates der Beobachtungen vollständiger und weniger willkürlich ist, als ich meinte. Dass ich dies gemeint habe, ist nicht so sehr befremdend, wenn man erwägt, dass ich hauptsächlich die unvollständigen Beweise bei Sawitsch und Helmert im Auge hatte. Weil nun Gauss den Beweis der von ihm benützten Sätze unterdrückt und die Laplace'schen Betrachtungen, worauf sich die Gauss'sche Ableitung stützt, mir damals nicht bekannt waren, konnte ich leicht der Meinung verfallen, auch bei Gauss sei die Beweisführung unvollständig. Nachdem ich jetzt die Laplace'schen Betrachtungen kennen gelernt habe, denke ich über den Gauss'schen Beweis viel günstiger.

Durch diese beiden Irrthümer ist aber der Zweck meiner Bemerkungen nicht ganz verfehlt. Denn dieser Zweck war erstens der, zu warnen gegen die Unvollständigkeit der Beweise des hier besprochenen Satzes in vielen Lehrbüchern, wie in denen von Sawitsch und Helmert. Denn auch die Weise, wie bei Helmert dieser Satz behandelt wird, kann ich nicht von Unvollständigkeit freisprechen. Wenn Herr Helmert den langen, von Gauss unterdrückten Beweis nicht geben wollte, weil es in den Gang seines Buches nicht passte, warum hat er dann den Satz über die Genauigkeit der verschiedenen Berechnungsweisen von μ nicht lieber ganz unterdrückt? Das wäre weit besser gewesen, als dafür einen unvollständigen Beweis zu geben. — Zweitens war mein Zweck, zu zeigen, dass man zur Feststellung des Satzes, dass der wahrscheinlichste Werth des wahrscheinlichen Fehlers aus den Fehlerquadraten gefunden wird — und nur das Feststellen dieses Satzes, nicht das Finden der numerischen Genauigkeitswerthe der auf verschiedene Weisen berechneten wahrscheinlichen Fehler hat für die Lehrbücher Wichtigkeit — gar nicht die zweite Gauss'sche Beweisführung braucht, weil der Beweis, den ich den ersten Gauss'schen Beweis genannt habe, dann vollkommen genügt und so einfach ist, dass er leicht in den Lehrbüchern Aufnahme finden kann.

Was zuletzt die Grenzen von ω^2 betrifft, so bleibe ich der Meinung, dass Herr Helmert diese nicht richtig angiebt. Eine grosse Anzahl möglicher Werthe von ω^2 fällt ausser den von Herrn Helmert angegebenen Grenzen, und darunter selbst der nach mir wahrscheinlichste Werth. Dass dieser meist wahrscheinliche Werth von ω^2 Null ist, weil der wahrscheinlichste Werth von σ_m mit S_m übereinstimmt — ich betrachte hier natürlich allein wahre Beobachtungsfehler —, ist von Herrn Helmert nicht widerlegt, wenigstens nicht für den von mir betrachteten Fall, wenn die Zahl der Beobachtungen ziemlich gross ist. Für diesen Fall befolgen, wie Laplace gezeigt hat, die ω das Gauss'sche Fehlergesetz, und auch Herr Helmert meint, dass dies dann nahe richtig ist. Auch nur für diesen Fall gelten die Betrachtungen von Laplace und Gauss, und nur auf diesen Fall hätte Herr Helmert in seiner Kritik sich beschränken müssen, soll das von ihm Behauptete wahr bleiben, dass Gauss sich bei seinen Betrachtungen streng von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat leiten lassen.

Mit Verlangen sehe ich dem angekündigten grösseren Aufsatze entgegen, worin Herr Helmert für den Fall einer kleineren Zahl von Beobachtungen das Wahrscheinlichkeitsgesetz der ω ableiten wird. Denn auch die Behandlung dieses Falles hat grosse Wichtigkeit.

Groningen, September 1875. R. A. Mees.

VI. Zur elementaren Behandlung der Cycloiden.

(Hierzu Taf. II, Fig. 8—10.)

Satz 1. Der Flächeninhalt der Cycloide ist $3r^2\pi$, der der verlängerten oder verkürzten Cycloide ist $r\pi(r+2\varrho)$, wenn r der Radius des erzeugenden, ϱ Radius des Wälzungskreises ist.

Denkt man sich die Bewegung des wälzenden Kreises zerlegt in die Rotation um den Mittelpunkt und die horizontale Verschiebung, so gelangt man (Fig. 8) zu folgender Construction der Cycloide: Man mache $DL = \widehat{DA}$, $EK = \widehat{EA}$, $FM = \widehat{FA}$ u. s. w. Dann bilden die Endpunkte der Horizontalen eine Cycloide. — Legt man dieselben Horizontalen in denselben Höhen an die Gerade A_1C_1 an, so entsteht eine Curve $A_1L_1K_1M_1B_1$, die von oben gesehen ebenso erscheint, wie von unten. Es ist also leicht zu zeigen, dass die Segmente $A_1L_1K_1$ und $B_1M_1K_1$ congruent, dass also die Fläche $A_1L_1K_1M_1B_1C_1$ und das Dreieck $A_1B_1C_1$ inhaltsgleich sind, d. h. $= r^2\pi$. Nach dem Cavalerischen Princip sind aber auch die Flächen $ALKMBCE$ und $A_1L_1K_1M_1B_1C_1E_1$ inhaltsgleich. Nun ist Rechteck + Halbkreis $= 2r^2\pi + \frac{r^2\pi}{2}$; die genannte Fläche abgezogen, giebt für die halbe Cycloidenfläche $\frac{3r^2\pi}{2}$, für die ganze $3r^2\pi$.

Trägt man bei der Construction an den Bogen $\frac{r\pi}{n}$ nicht $\frac{r\pi}{n}$, sondern $\frac{\varrho\pi}{n}$ als Horizontale an, so entsteht eine verlängerte oder verkürzte Cycloide, deren Wälzungskreis ϱ, deren erzeugender Kreis r zum Radius hat. Die Ermittelung des Flächeninhalts ist ähnlich, wie vorher. Rechteck + Halbkreis $= 2r\varrho\pi + \frac{r^2\pi}{2}$; die entsprechende Fläche (jetzt

$r\varrho\pi$) abgezogen, giebt $r\varrho\pi+\frac{r^2\pi}{2}$ für die halbe, $r\pi(r+2\varrho)$ für die ganze Cycloide. Analog ist die Inhaltsbestimmung für die Epi- und Hypocycloide.

Satz 2. **Die Normale der Cycloide geht stets durch den augenblicklichen Berührungspunkt des Kreises.** (Fig. 9.)

Beweis. Ist B der die Cycloide erzeugende Punkt und rollt der Kreis um die kleine Strecke AE vorwärts, so bewegt sich B erstens um die gleichgrosse Strecke BG, zweitens um den gleichgrossen Bogen BF, d. h. in der Richtung BH, wo bei zunehmender Kleinheit BH die Diagonale eines Rhombus ist. BH wird Tangente der Cycloide, und diese halbirt also den Winkel FBG oder LBD. Derselbe wird aber auch durch CB halbirt, denn $\angle\alpha=\alpha_2=\alpha_1$. Folglich: die Tangente der Cycloide geht durch C, folglich die Normale durch den Berührungspunkt A.

Zieht man HE bis zum Durchschnitt mit BA, so erhält man den Durchschnitt μ zweier benachbarter Normalen, und eine Grenzbetrachtung zeigt, dass $B\mu=2.BA$ ist. Einfacher ergiebt sich dies aus folgender Ueberlegung.

Ueber $AB=r\pi$ (Fig. 10) errichte man Rechtecke von der Höhe $2r$ nach oben und unten. Rollt oben der Kreis von A nach B, so entsteht die Cycloide $\widehat{AC}$; rollt er unten von D nach K, so entsteht die congruente Curve $\widehat{DA}$. F sei Berührungspunkt der Kreise. Macht man Bogen $FH=AF$, so ist HF Normale und gleichzeitig Bogen $\widehat{HE}=FB$. HF verlängert schneidet aber unten Bogen $\widehat{GJ}=\widehat{HE}$ ab, es ist also auch $DG=\widehat{GJ}$. Folglich ist J ein Punkt der Cycloide DA, GJ Normale und HJ Tangente derselben. Dies gilt von jeder Normale der oberen Curve. Hieraus folgt:

Satz 3. **Die Evolvente und Evolute der halben Cycloide sind der letzteren congruent.** Inwiefern J sich als Krümmungsmittelpunkt betrachten lässt, ist nun leicht durch elementare Entwickelungen nachzuweisen. Satz 3 lässt sich auch mit Hilfe der Gegencycloide beweisen.

NB. Complicirtere Versuche, Satz 2 elementar zu entwickeln, finden sich bei Zehme (Die Cycloiden, Iserlohn und Elberfeld 1854) und Weissenborn (Die cyclischen Curven, Eisenach 1856).

Rollt der Kreis nicht auf der Geraden, sondern auf einem andern Kreise, sei es aussen oder innen, so lässt sich eine kleine Wälzungsstrecke als Gerade betrachten. Satz 2 gilt also auch von der Epi- und Hypocycloide. Dass die Evoluten und Evolventen der letzteren ihnen selbst ähnlich sind, ergiebt sich ähnlich, wie bei Satz 3, durch eine elementare Betrachtung. (Vergl. Herbst-Programm 1875 der Gewerbeschule zu Hagen.)

Dr. G. Holzmüller.
Director der Gewerbeschule zu Hagen.

VII. Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten ebener Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.

Im 63. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals hat Clebsch die in der Ueberschrift bezeichnete Anzahl, die in den Plücker'schen Formeln *a posteriori* bekannt war, durch ein eigenthümliches directes Verfahren gefunden. Dasselbe findet sich dargelegt auf S. 53 und 54 der citirten Abhandlung und lässt theoretisch gewiss Nichts zu wünschen übrig. Wer aber einmal versucht hat, nach dem von Clebsch vorgeschriebenen Verfahren die Rechnung durchzuführen, d. h. die Endgleichung, welche die Doppeltangenten liefert, wirklich aufzustellen, wird der grossen Weitläufigkeit der durchzumachenden Operationen wegen jedenfalls den Wunsch nach einem einfacheren Verfahren berechtigt finden. In dem nach Clebsch zu bildenden Eliminationsresultate erscheinen nämlich Factoren von nicht geringerem als dem $5(n-2)^2-4(n-2)(n-3) = (n-2)(n+2)^{\text{ten}}$ Grade, die der Frage fremd sind. Es ist mir gelungen, die fragliche Endgleichung sofort von allen fremden Factoren frei darzustellen, und die dabei befolgte Methode bildet den Gegenstand der folgenden kleinen Abhandlung.

Ich werde mich in der folgenden Darlegung der Bezeichnungen $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\vartheta(\lambda)$ für ganze Functionen n^{ten} Grades des Parameters λ bedienen. Möge die Curve gegeben sein durch die ihre Cartesischen Coordinaten x, y bestimmenden Relationen

$$1)\qquad x=\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},\quad y=\frac{\vartheta(\lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

Dann schreibt sich die Gleichung der Tangente, welche die Curve in dem Punkte, welcher dem Parameter λ entspricht, berührt, als Determinante

$$2)\qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \varphi(\lambda), & \vartheta(\lambda), & \psi(\lambda) \\ \varphi'(\lambda), & \vartheta'(\lambda), & \psi'(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ich verzichte darauf, dieselbe durch Einführung von $\frac{\lambda}{\mu}$ an Stelle von λ homogen zu machen, indem die dadurch erreichte grössere Symmetrie nicht bedeutend genug erscheint, auf andere Vortheile, welche die Beibehaltung eines Parameters bietet, zu verzichten.

Die im Punkte λ — wenn wir uns kurz so ausdrücken dürfen — berührende Tangente 2) wird nun die Curve in weiteren $n-2$ Punkten ν treffen, welche durch die Gleichung gefunden werden:

$$3)\qquad \begin{vmatrix} \varphi(\nu), & \vartheta(\nu), & \psi(\nu) \\ \varphi(\lambda), & \vartheta(\lambda), & \psi(\lambda) \\ \varphi'(\lambda), & \vartheta'(\lambda), & \psi'(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe ist scheinbar vom Grade n in Bezug auf ν; allein es lässt sich der Factor $(\nu-\lambda)^2$ abtrennen und die alsdann resultirende Gleichung ist weiter zu untersuchen. Soll dieselbe die Tangente im Punkte λ als Doppeltangente charakterisiren, so muss sie zwei gleiche Wurzeln besitzen, es muss also ihre Discriminante verschwinden.

Zunächst haben wir also den Factor $(\nu-\lambda)^2$ abzuscheiden. Es ist, wie man leicht bestätigt:

$$\frac{\varphi(\nu)-\varphi(\lambda)-(\nu-\lambda)\varphi'(\lambda)}{(\nu-\lambda)^2} = a_n\,.\,\nu^{n-2}+(a_{n-1}+2a_n\lambda)\nu^{n-3}+\dots$$
$$+a_2+2a_3\lambda+3a_4\lambda^2+\dots+(n-1)a_n\lambda^{n-2},$$

wenn

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\dots+a_n\lambda^n.$$

Wir setzen ferner

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= a_0,\\ \varphi_1 &= a_0+a_1\lambda,\\ \varphi_2 &= a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2,\\ \varphi_m &= a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\dots+a_m\lambda^m.\end{aligned}$$

Dann kann man nach dem Vorigen schreiben

$$4)\quad \begin{aligned}\frac{\varphi(\nu)-\varphi(\lambda)-(\nu-\lambda)\varphi'(\lambda)}{(\nu-\lambda)^2} &= \nu^{n-2}.\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)\\ &+\nu^{n-3}.\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_{n-2}}{\lambda^{n-2}}\right)+\dots+\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Der Kürze wegen sind die Argumente λ in $\varphi(\lambda)$ weggelassen.

Subtrahiren wir also in 3) die zweite und die mit $(\nu-\lambda)$ multiplicirte dritte Horizontalreihe von der ersten, so wird die erste durch $(\nu-\lambda)^2$ theilbar und der Quotient sind Glieder, die aus der rechten Seite von 4) durch Ersetzung des Charakters φ durch φ, ϑ, ψ hervorgehen. Ordnen wir jetzt nach Potenzen von ν an, so zerfällt 3) in eine Summe von Determinanten, deren erste Verticalzeile die Glieder enthält:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m}\right),\quad \varphi,\quad \varphi',\quad m=(1,2,\dots n-1),$$

während die zwei folgenden analog gebildete Ausdrücke für ϑ und ψ sind. Diese Zeile verwandelt sich durch Subtraction des mit λ^m multiplicirten Gliedes von dem letzten in

$$\frac{\varphi'-\varphi'_m}{\lambda^m}-m\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^{m+1}},\quad \varphi,\quad \varphi'_m+m\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda}$$

und durch Subtraction des mit $\frac{\lambda}{m}$ multiplicirten dritten Gliedes vom zweiten

$$\frac{\varphi'-\varphi'_m}{\lambda^m}-m\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m},\quad \varphi_m-\frac{\lambda}{m}\varphi'_m,\quad \varphi'_m+m\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda}.$$

Jetzt multipliciren wir das erste Glied mit $\frac{m}{n-m}\lambda^m$ und subtrahiren es vom dritten, dann wird das dritte Glied

$$\varphi'_m + \frac{m}{n-m}\lambda^{m-1}\left\{(n-m)\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m} - \lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\varphi-\varphi_m}{\lambda^m}\right)\right\}.$$

Demnach haben die drei Glieder die Dimensionen

$$n-m-1,\quad m-1,\quad (n-m-1)+(m-1).$$

Die Summe dieser Zahlen ist $2n-4$ und man erkennt, dass jede der betrachteten Partialdeterminanten eine ganze Function $2n-4^{\text{ten}}$ Grades in λ ist.

Demnach haben wir das Resultat gefunden: Man ist im Stande, die Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades, welche wir suchen, in einer Weise darzustellen, dass ihre Coefficienten ganze Functionen $2n-4^{\text{ter}}$ Ordnung in λ sind. Daraus folgt unmittelbar das gesuchte Endresultat. Denn die Discriminante einer Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades ist eine homogene Function $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ihrer Coefficienten, steigt also in Bezug auf λ zum Grade $(2n-4).2.(n-3)=4(n-2)(n-3)$. Mithin ist die Gleichung, welche die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten liefert, vom Grade $4(n-2)(n-3)$ und die Anzahl der Doppeltangenten selbst $2(n-2)(n-3)$.

Der Fall, wo die Curve Rückkehrpunkte besitzt, ist im Vorhergehenden nicht berücksichtigt. Derselbe bietet indess keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Betrachtet man die allgemeine, hierher gehörige Curve vierter Ordnung und bezeichnet

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4,\\ \vartheta(\lambda) &= b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^4,\\ \psi(\lambda) &= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^4,\end{aligned}$$

ferner die dreigliedrigen zehn Determinanten, welche man aus den 15 Grössen a, b, c bilden kann, in der Weise, dass z. B.

$$A_{01} = \Sigma \pm a_2 b_3 c_4,\quad A_{02} = \Sigma \pm a_1 b_3 c_4$$

gesetzt wird, so lautet die Gleichung achten Grades, welche die Parameter der Doppeltangenten liefert:

$$\begin{aligned}&4\left[\lambda^4 A_{01} + 2\lambda^3 A_{02} + \lambda^2(A_{03} + 3A_{12}) + 2\lambda A_{13} + A_{23}\right]\\ &\quad\left[\lambda^4 A_{12} + 2\lambda^3 A_{13} + \lambda^2(A_{14} + 3A_{23}) + 2\lambda A_{24} + A_{34}\right]\\ &-\left[\lambda^4 A_{02} + 2\lambda^3(A_{12} + A_{03}) + \lambda^2(A_{04} + 4A_{13}) + 2\lambda(A_{14} + A_{23}) + A_{24}\right]^2 = 0.\end{aligned}$$

Für die Lemniscate hat man

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \lambda^4 - 1,\\ \vartheta(\lambda) &= 2\lambda(\lambda^2 - 1),\\ \psi(\lambda) &= \lambda^4 + 6\lambda^2 + 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichung, welche ν liefert:

$$\nu^2(3\lambda^4 + 6\lambda^2 - 1) + 8\lambda\nu(\lambda^2 - 1) + \lambda^4 - 6\lambda^2 - 3 = 0,$$

und die Discriminante, welche für die Doppeltangenten verschwindet:

$$(3\lambda^4+6\lambda^2-1)(\lambda^4-6\lambda^2-3)-16\lambda^2(\lambda^2-1)^2=0,$$

oder entwickelt

$$3\lambda^8-28\lambda^6-14\lambda^4-28\lambda^2+3=0.$$

Die Lemniscate besitzt demnach vier Doppeltangenten, die wir mit römischen Ziffern bezeichnen wollen. Die nebenstehenden Werthe werden von λ in den Berührungspunkten angenommen.

I)	$\sqrt{2}+\sqrt{3},$	$\sqrt{2}-\sqrt{3};$
II)	$-\sqrt{2}-\sqrt{3},$	$-\sqrt{2}-\sqrt{3};$
III)	$\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i),$	$-\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i);$
IV)	$\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i),$	$-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i).$

Die zwei reellen Doppeltangenten gehen bekanntlich der X-Axe parallel. Die vier Berührungspunkte haben die vier Werthe, welche sich aus

$$y=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad x=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

durch verschiedene Zeichencombination ergeben. Die imaginären Doppeltangenten gehen der Y-Axe parallel.

Münster. Dr. K. Schwering.

VIII. Bemerkung zu der Curve $\frac{x^4}{a^4}=\frac{y^4}{b^4}=1$.

Dass algebraische Curven angegeben werden können, deren Sectoren mit Hilfe der cyclischen und elliptischen Functionen in analoger Weise verglichen werden, wie es nach der berühmten Entdeckung von Gauss rücksichtlich der Bögen des Kreises und der Lemniscate geschehen kann, ist eine so naheliegende Sache, dass unzweifelhaft die desfallsigen Untersuchungen schon öfter angestellt und derartige Curven angegeben worden sind. Vielleicht ist die Bemerkung von Interesse, dass die Curve

$$x^4+y^4=r^4$$

und ebenso natürlich

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=1,$$

die dem Kreise und der Ellipse verwandt zu sein scheinen, in diese Kathegorie gehören. Denn wendet man Polarcoordinaten r und φ an, so überzeugt man sich durch die Annahme $z=\frac{a}{b}\,tg\,\varphi$ alsbald, dass der Sector u durch das elliptische Integral erster Gattung gegeben wird:

$$u=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^z\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}},$$

dessen Perioden ein rationales Verhältniss besitzen. Die Quadrate der Coordinaten x, y drücken sich sehr einfach durch ϑ-Quotienten von $\frac{2u}{ab}$ aus.

Münster. Dr. K. Schwering.

IX. Zur Construction einer unimodularen Determinante.

Hermite hat in einer Abhandlung „*Sur une question relative à la théorie des nombres*" (Liouville's Journal Bd. XIV, S. 21) folgendes Problem behandelt:

Es seien $a_{k,0}$ $(h=0, 1, \ldots n)$ $n+1$ ganze, positive oder negative Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler die Einheit ist; es sollen die $n(n+1)$ ganzen Zahlen $a_{i,k}$ so bestimmt werden $(i=0, 1, \ldots n;$ $k=1, 2, \ldots n)$, dass

$$\Sigma \pm a_{0,0} a_{1,1} \ldots a_{n,n} = \pm 1$$

werde, d. h. man soll eine unimodulare Determinante von gegebener erster Colonne construiren.

Hermite giebt dazu folgendes Verfahren an.

Ist π_k der grösste gemeinsame Theiler zwischen $a_{k,0}$ und π_{k-1} $(k=1, 2, \ldots n$, wobei π_0 gleich $a_{0,0}$ genommen wird, und $\pi_n=1$ werden muss), so mögen zunächst die Grössen η_k und η'_k ganzzahlig aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_0 a_{1,0} - \eta_1 a_{0,0} &= \pi_1, \\ \eta'_k a_{k,0} - \eta_k \pi_{k-1} &= \pi_k, \quad k=2, 3, \ldots n \end{aligned}$$

bestimmt werden. Wählt man nun die ganzzahligen Grössen $\nu_{i,k}$ $(i=1, 2, \ldots n;$ $k=1, 2, \ldots n)$ derart, dass sie der einzigen Bedingung

$$\Sigma \pm \nu_{1,1} \nu_{2,2} \ldots \nu_{n,n} = \pm 1$$

genügen, nimmt man ferner die Grössen $M_{n,i}$ $(i=1, 2, \ldots n)$ willkürlich, aber ganzzahlig, und bestimmt die Grössen $M_{k,i}$ successive aus den Gleichungen

$$M_{k-1,i} = \eta'_k \nu_{k,i} + M_{k,i} \frac{\pi_{k-1}}{\pi_k}, \quad k=n, n-1, \ldots 3, 2;$$

dann werden durch

$$\left.\begin{aligned} a_{0,i} &= \eta_0 \nu_{1,i} + M_{1,i} \frac{a_{0,0}}{\pi_1} \\ a_{k,i} &= \eta_k \nu_{k,i} + M_{k,i} \frac{a_{k,0}}{\pi_k} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i&=1, 2, \ldots n, \\ k&=1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

die Elemente der verlangten unimodularen Determinante geliefert.

Es giebt nun, wie ich hier darlegen will, zur Lösung des Problems eine wesentlich andere Methode, die mir vor der eben entwickelten Vorzüge zu haben scheint. Ich muss zu diesem Zwecke einige Resultate vorausschicken, welche ich in einer Untersuchung über die Formen, in denen die Auflösungen einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades enthalten sind, früher gewann (d. Zeitschr. Bd. XIX, S. 53); dort ist allerdings nur auf ganze positive Werthe für die Unbekannten Bezug genommen, jedoch werden die betreffenden Resultate durch Zulassung negativer Werthe nicht weiter gestört. Die Sätze sind folgende:

Löst man die unbestimmte Gleichung

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = M$$

nach der Euler'schen Methode auf, so werden alle Unbekannten schliesslich dargestellt durch

$$2)\qquad x_k = M_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{k,i}\, t_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wo die Grössen t_i willkürliche ganze Zahlen sind; das System 2) wurde eine Form für die Gleichung 1) genannt, und es ward nachgewiesen, dass das Euler'sche Verfahren stets eine allgemeine, d. h. alle möglichen Lösungen umfassende Form liefert. Eine solche allgemeine Form hat die Eigenschaft, dass, wenn die Determinante

$$3)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = D$$

mit willkürlicher erster Colonne gebildet wird, und wenn man den Coefficienten von a_p in D durch α_p bezeichnet, immer

$$4)\qquad \begin{matrix} \alpha_p = + A_p \\ \text{oder}\quad \alpha_p = - A_p, \end{matrix} \quad p = 1, 2, \ldots n$$

ist. Der zweite Fall kann ausgeschlossen werden, da man eventuell durch Vertauschung von t_i mit t_k auf den ersten zurückkommt.

Hiermit ist nun folgender Weg zur Lösung des oben bezeichneten Problems gegeben.

Es seien die gegebenen Elemente der ersten Colonne durch A_k $(k = 1, 2, \ldots n)$, die gesuchten der übrigen Colonnen durch $d_{i,k}$ $(i = 1, 2, \ldots n;\ k = 2, 3 \ldots n-1)$ bezeichnet, so dass zu bestimmen ist

$$5)\qquad E = \begin{vmatrix} A_1 & d_{1,1} & \ldots & d_{1,n-1} \\ A_2 & d_{2,1} & \ldots & d_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & d_{n,1} & \ldots & d_{n,n-1} \end{vmatrix} = +1.$$

Löst man dann nach dem Euler'schen Verfahren die Gleichung

$$6)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k x_k = +1$$

und heisst die gewonnene Form

$$7)\qquad x_k = \mu_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} a_{k,i} t_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wobei also stets

$$8)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k \mu_k = +1,$$

und construirt man endlich die Determinante

$$9)\qquad D' = \begin{vmatrix} \mu_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \mu_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

und deren Reciprocaldeterminante E', so ist E' die gesuchte Determinante E. Der Coefficient von μ_k in D' ist nämlich nach 4) nichts Anderes als A_k; ferner wird, wegen 8), $D' = +1$, also auch $E' = +1$. Wird der Coefficient von $a_{i,k}$ in D' durch $\alpha_{i,k}$ bezeichnet, so hat man

$$10)\qquad d_{i,k} = \alpha_{i,k}.$$

Eine Ersetzung der Grössen μ_k durch eine andere Lösung der Gleichung 6) bringt eine neue Determinante E'' zum Vorschein, die indessen aus der früheren E' durch Subtraction einzelner Colonnen von anderen ebenfalls gefunden wird, so dass E' und E'' nicht als wesentlich verschieden anzusehen sind. Eine neue unimodulare Determinante, welche nicht direct aus E' ablesbar ist, erhält man erst, wenn man die Grössen t_i in 7) durch eine unimodulare Substitution transformirt, d. h. wenn man setzt

$$11)\qquad t_k = \sum_{h=1}^{h=n-1} b_{k,h} s_h, \quad k = 1, 2, \ldots (n-1),$$

mit der einen Bedingung, dass

$$12)\qquad \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n-1,n-1} = +1,$$

und der andern, dass, wenn die Form 7) dadurch übergeht in

$$13)\qquad x_k = \mu_k + \sum_{i=1}^{i=n-1} c_{k,i} s_i, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

$$14)\qquad c_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n-1} a_{k,h} b_{h,i}, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots n, \\ i = 1, 2, \ldots (n-1), \end{array}$$

nicht etwa 7) und 13) identisch werden.

E''' wird dann sofort als Reciprocale von

$$15)\qquad D''' = \begin{vmatrix} \mu_1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n-1} \\ \mu_2 & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

gewonnen. Wesentlich verschiedene Determinanten E existiren also unendlich viele, falls $n > 2$.

Dorpat. Prof. K. Weihrauch.

X. Ueber die einem Dreieck eingeschriebene und die umschriebene Ellipse.

Dem Euler'schen Problem, um ein Dreieck die kleinste Ellipse zu beschreiben, steht das Problem zur Seite, in ein Dreieck die grösste Ellipse einzuschreiben. Beide Probleme sind in den *Annales de Gergonne*, *tôme IV*, von Herrn Berard gelöst und Liouville hat im 7. Bande der ersten Serie seines Journals eine kurze, rein geometrische Lösung des Euler'schen Problems gegeben. Man kann beide Probleme gleichzeitig lösen nach der Methode, welche Gauss (Bd. IV, S. 388) angewendet hat, um die grösste Ellipse in ein Viereck einzuschreiben, wobei nur seine Ausdrücke geometrisch interpretirt zu werden brauchen. Vom Gebrauch der Infinitesimalrechnung kann dabei abgesehen werden, wenn man die Sätze als bekannt voraussetzt, dass bei allen Dreiecken mit vorgegebenem Umfang das gleichseitige das grösste ist, und dass hieran Nichts geändert wird, wenn der Inhalt noch durch das Product der drei Seiten dividirt wird, welche Sätze sich elementar beweisen lassen. Da es vielleicht Manchem nicht unwillkommen ist, den Ausdruck des Flächeninhalts einer Ellipse durch die drei Dreiecke, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse und drei Punkte oder drei Tangenten derselben bestimmt sind, zur Hand zu haben (auf welchen Ausdrücken die Lösung beruht), so mag die Lösung des obengenannten Problems hier folgen.

Nennen wir das Euler'sche das zweite und das andere das erste Problem, so verstehen wir unter p, p', p'' die Entfernungen des Mittelpunktes der eingeschriebenen Ellipse von den Dreiecksseiten im ersten Problem, die reciproken Werthe der Entfernungen des Mittelpunktes der umschriebenen Ellipse von den Ecken des Dreiecks im zweiten Problem. Im ersten Problem sind a, b die Halbaxen der Ellipse, im zweiten die reciproken Werthe der Halbaxen. In beiden Problemen sind $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Winkel, welche die Linien, die zu p, p', p'' gehören, bez. mit der zu a gehörenden Axe machen, und in beiden Problemen ist

$$\varphi = \alpha'' - \alpha', \quad \varphi' = \alpha - \alpha'' + 2\pi, \quad \varphi'' = \alpha' - \alpha,$$

d. h. $\varphi, \varphi', \varphi''$ sind die zwischen p', p''; p'', p; p, p' bez. gelegenen Winkel.

Nun gelten für beide Probleme folgende Formeln und Rechnungen:

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha, \quad p'^2 = a^2 \cos^2\alpha' + b^2 \sin^2\alpha', \quad p''^2 = a^2 \cos^2\alpha'' + b^2 \sin^2\alpha''$$

oder, wenn $a^2 + b^2 = \sigma$, $a^2 - b^2 = \delta$ zur Abkürzung gesetzt wird:

$$1)\ \sigma+\delta\cos 2\alpha=2p^2,\quad \sigma+\delta\cos 2\alpha'=2p'^2,\quad \sigma+\delta\cos 2\alpha''=2p''^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit

$$\sin 2(\alpha''-\alpha')=\sin 2\varphi,\quad \sin 2(\alpha-\alpha'')=\sin 2\varphi',\quad \sin 2(\alpha'-\alpha)=\sin 2\varphi''$$

und addirt, so folgt

$$2)\ p^2\sin\varphi\cos\varphi+p'^2\sin\varphi'\cos\varphi'+p''^2\sin\varphi''\cos\varphi''=-\sigma\sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''.$$

Durch Subtraction je zweier der unter 1) verzeichneten Gleichungen erhält man weiter $\delta(\cos 2\alpha-\cos 2\alpha')=2(p^2-p'^2)$ etc. oder

$$3)\quad \begin{gathered}\delta\sin\varphi\sin(\alpha'+\alpha'')=p''^2-p'^2,\quad \delta\sin\varphi'\sin(\alpha''+\alpha)=p^2-p''^2,\\ \delta\sin\varphi''\sin(\alpha+\alpha')=p'^2-p^2.\end{gathered}$$

Hieraus folgt durch Erheben auf das Quadrat

$$3\text{a})\quad \begin{gathered}\delta-\delta\cos 2(\alpha'+\alpha'')=\frac{2(p''-p'^2)^2}{\sin^2\varphi},\quad \delta-\delta\cos 2(\alpha''+\alpha)=\frac{2(p^2-p''^2)}{\sin^2\varphi'},\\ \delta-\delta\cos 2(\alpha+\alpha')=\frac{2(p'^2-p^2)^2}{\sin^2\varphi''}.\end{gathered}$$

Multiplicirt man die unter 3a) verzeichneten Gleichungen bez. mit

$$\begin{gathered}-\sin 2\varphi=\sin 2(\alpha+\alpha'-\alpha''-\alpha),\quad -\sin 2\varphi'=\sin 2(\alpha'+\alpha''-\alpha-\alpha'),\\ -\sin 2\varphi''=\sin 2(\alpha''+\alpha-\alpha'-\alpha'')\end{gathered}$$

und addirt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\delta^2(\sin 2\varphi+\sin 2\varphi'+\sin 2\varphi'')&=-4\delta^2\sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''\\ =4(p''^2-p'^2)^2\cot g\,\varphi&+4(p^2-p''^2)^2\cot g\,\varphi'+4(p'^2-p^2)^2\cot g\,\varphi''\end{aligned}$$

oder, wenn man nach den Potenzen der p ordnet:

$$4)\quad \begin{aligned}&\delta^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''\\ &=p^4\sin^2\varphi+p'^2\sin^2\varphi'+p''^2\sin^2\varphi''+2p'^2p''^2\cos\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''\\ &+2p''^2p^2\cos\varphi'\sin\varphi''\sin\varphi+2p^2p'^2\cos\varphi''\sin\varphi\sin\varphi'.\end{aligned}$$

Zieht man von dieser Gleichung die unter 2) verzeichnete Gleichung, nachdem sie auf's Quadrat erhoben ist, ab, so erhält man endlich

$$5)\quad \begin{aligned}&(\sigma^2-\delta^2)\sin^2\varphi\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''=4a^2b^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''\\ &=-p^4\sin^4\varphi-p'^4\sin^4\varphi'-p''^4\sin^4\varphi''+2p'^2p''^2\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''\\ &+2p''^2p^2\sin^2\varphi''\sin^2\varphi+2p^2p'^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi'.\end{aligned}$$

Im ersten Problem seien nun die Dreiecksseiten, auf denen p, p', p'' Lothe sind, bez. t, t', t'', so ist $t:t':t''=\sin\varphi:\sin\varphi':\sin\varphi''$. Ferner sei $\varDelta=\frac{1}{2}pt$, $\varDelta'=\frac{1}{2}p't'$, $\varDelta''=\frac{1}{2}p''t''$, $D=\varDelta+\varDelta'+\varDelta''=\frac{1}{2}tt'\sin\varphi''=\frac{1}{2}tt''\sin\varphi'$, so ergiebt sich aus 5)

$$\begin{aligned}4a^2b^2t^2t't''\sin\varphi'\sin\varphi''&=16a^2b^2.D^2\\ =-16\varDelta^4-16\varDelta'^4-16\varDelta''^4&+32\varDelta^2\varDelta'^2+32\varDelta'^2\varDelta''^2+32\varDelta''^2\varDelta^2\\ =16D(\varDelta+\varDelta'-\varDelta')&(\varDelta-\varDelta'+\varDelta'')(-\varDelta+\varDelta'+\varDelta'')\end{aligned}$$

oder

$$6)\ ab\pi=\frac{\pi.\sqrt{(\varDelta+\varDelta'+\varDelta'')(\varDelta+\varDelta'-\varDelta'')(\varDelta-\varDelta'+\varDelta'')(-\varDelta+\varDelta'+\varDelta'')}}{D}.$$

Im zweiten Problem setzen wir $\sin\varphi = \frac{1}{2} p' p'' \Delta$, $\sin\varphi' = \frac{1}{2} p'' p \Delta'$, $\sin\varphi'' = \frac{1}{2} p p' \Delta''$, so folgt aus 5)

$$a^2 b^2 \Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 = -\Delta^4 - \Delta'^4 - \Delta''^4 + 2\Delta^2\Delta'^2 + 2\Delta'^2\Delta''^2 + 2\Delta''^2\Delta^2$$

oder

$$6\text{a)}\quad \frac{ab}{\pi} = \frac{\sqrt{(\Delta+\Delta'+\Delta'')(\Delta+\Delta'-\Delta'')(\Delta-\Delta'+\Delta'')(-\Delta+\Delta'+\Delta'')}}{\pi\Delta\Delta'\Delta''}.$$

Die unter 6) und 6a) stehenden Ausdrücke liefern den Flächeninhalt oder den reciproken Werth des Flächeninhalts bez. einer einem Dreieck mit dem Inhalt $\Delta + \Delta' + \Delta'' = D$ bez. eingeschriebenen und umschriebenen Ellipse durch die Dreiecke, welche durch den Mittelpunkt und die Seiten, bez. die Ecken des vorgegebenen Dreiecks bestimmt sind. Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ist genau so gebaut wie die Formel, welche den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten bestimmt, und man erkennt hieraus die Beziehung zu den am Eingange berührten Dreiecksproblemen. Dieser Flächeninhalt wird demnach ein Maximum, bez. Minimum, wenn $\Delta = \Delta' = \Delta'' = \frac{1}{3} D$, also der Mittelpunkt der Ellipse der Schwerpunkt des vorgegebenen Dreiecks ist.

Freiburg i. B. Prof. J. Thomae.

XI. Ueber Fusspunktscurven.

Die gewöhnliche Methode, zu einer gegebenen Curve die Fusspunktscurve von einem gegebenen Punkte (a, b) aus, d. h. den geometrischen Ort der Fusspunkte der von einem gegebenen Punkte auf die Tangenten einer gegebenen Curve gefällten Lothe zu bestimmen, ist die folgende.

Ist (ξ, η) ein beliebiger Punkt der gegebenen Curve $f(x, y) = 0$, so erhält man die Fusspunktscurve durch Elimination von ξ und η aus den drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &(x-\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi} + (y-\eta)\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \\ &(x-a)\frac{\partial f}{\partial \eta} - (y-b)\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \\ &\qquad\qquad f(\xi, \eta) = 0, \end{aligned}\right.$$

wo die erste Gleichung eine beliebige Tangente der gegebenen Curve, die zweite das vom Punkte (a, b) auf sie gefällte Loth darstellt.

Legt man aber die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten zu Grunde, so erhält man ganz allgemein die Gleichung der Fusspunktscurve, in Punktcoordinaten ausgedrückt, durch eine einfache Substitution, welche zugleich zeigt, von welchem Grade die Fusspunktscurve werden muss.

Ist nämlich

$$1) \qquad \varphi(u, v) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten und sind (u, v) die Coordinaten einer beliebigen Tangente der Curve, (x, y) die Coordinaten des Fusspunktes des vom Punkte (a, b) auf diese Tangente gefällten Lothes, so hat man

$$2) \qquad ux + vy + 1 = 0,$$

$$3) \qquad u(y-b) - v(x-a) = 0,$$

und durch Elimination von u und v aus diesen drei Gleichungen erhält man die Gleichung der Fusspunktscurve in Punktcoordinaten.

Nun geben die Gleichungen 2) und 3)

$$4) \qquad u = -\frac{x-a}{x(x-a) + y(y-b)},$$

$$5) \qquad v = -\frac{y-b}{x(x-a) + y(y-b)},$$

und die Substitution dieser Werthe in Gleichung 1) giebt allgemein die Fusspunktscurve einer gegebenen Curve.

Da der gemeinschaftliche Nenner in 4) und 5) vom zweiten Grade in x und y ist, so giebt diese Substitution nach Durchmultiplication mit dem Nenner im Allgemeinen eine Curve vom $2k^{\text{ten}}$ Grade, wenn k der Grad der Curve $\varphi(u, v) = 0$ in Liniencoordinaten, d. h. die Classe der gegebenen Curve ist. Wir haben also den Satz:

Der Grad der Fusspunktscurve einer gegebenen Curve ist im Allgemeinen gleich der doppelten Classenzahl derselben.

Der Grad der Fusspunktscurve reducirt sich, wenn die ursprüngliche Curve parabolische Zweige hat.

Enthält nämlich die Gleichung der Curve $\varphi(u, v) = 0$ kein Absolutglied, d. h. berührt die Curve die unendlich ferne Gerade, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-1)^{\text{ten}}$.

Enthält die Gleichung der Curve $\varphi(u, v) = 0$ weder ein Absolutglied, noch die Glieder ersten Grades, d. h. ist die unendlich ferne Gerade eine Wendetangente der Curve, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-2)^{\text{ten}}$.

Allgemein ist r der Grad der niedersten Glieder in $\varphi(u, v) = 0$, d. h. findet zwischen der unendlich fernen Geraden und der Curve Berührung r^{ter} Ordnung statt, so reducirt sich der Grad der Fusspunktscurve auf den $(2k-r)^{\text{ten}}$.

Auch einige weitere allgemeine Eigenschaften der Fusspunktscurve lassen sich unmittelbar aus der Art und Weise, wie wir ihre Gleichung gefunden, gewinnen.

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit den Punkt (a, b) in den Ursprung des Coordinatensystems verlegen, wenn wir uns nur unter $\varphi(u, v) = 0$ eine beliebige Curve k^{ter} Classe in beliebiger Lage zum Coordinatensystem denken; wir erhalten dann die Fusspunktscurve durch Substitution von

$$u = -\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

in $\varphi(u, v) = 0$.

Ist nun

$$\varphi(u, v) \equiv (Au^k + Bu^{k-1}v + \ldots + Fv^k) + [\text{Glieder } (k-1)^{\text{ter}} \text{ Dimension in } u \text{ und } v] + \ldots + (Mu^2 + Nuv + Pv^2) + (Qu + Rv) + S = 0,$$

so ist die Fusspunktscurve

$$(-1)^k (Ax^k + Bx^{k-1}y + \ldots + Fy^k) + (-1)^{k-1} [\text{Glieder } (k-1)^{\text{ter}} \text{ Dimension in } x \text{ und } y] \cdot (x^2+y^2) + \ldots + (Mx^2 + Nxy + Py^2)(x^2+y^2)^{k-2} - (Qx + Ry)(x^2+y^2)^{k-1} + S(x^2+y^2)^k = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar folgende zwei Sätze:

1. Der Ursprung ist ein k facher Punkt der Fusspunktscurve, da die niedersten Glieder in der Gleichung derselben von der k^{ten} Dimension sind.
2. Ist S von Null verschieden, d. h. die Fusspunktscurve vom $2k^{\text{ten}}$ Grade, so hat dieselbe keine reellen Asymptoten, ist also ganz im Endlichen enthalten; oder auch: da die Asymptotenrichtungen gegeben sind durch
$$(x^2+y^2)^k = 0,$$
geht die Curve k mal durch die imaginären Kreispunkte.

Ist $S = 0$, d. h. die Fusspunktscurve vom $(2k-1)^{\text{ten}}$ Grade, so hat dieselbe eine reelle Asymptote, deren Richtung bestimmt ist durch

$$Qx + Ry = 0,$$

und geht ausserdem $(k-1)$-mal durch die imaginären Kreispunkte.

Ist $S = 0$, $Q = 0$ und $R = 0$, d. h. die Fusspunktscurve vom $(2k-2)^{\text{ten}}$ Grade, so geht dieselbe $(k-2)$-mal durch die imaginären Kreispunkte und hat ausserdem zwei Asymptoten, deren Richtungen bestimmt sind durch

$$Mx^2 + Nxy + Py^2 = 0$$

u. s. f.

Stuttgart, October 1875.

C. Reuschle,
Professor am Polytechnikum.

XII. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale.

Herr Zmurko, ein galizischer Mathematiker, hat in der in Graz am 20. September 1875 stattgehabten Sitzung der Section für Mathematik und Astronomie der 48. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte einen Vortrag „Ueber die Unzulänglichkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale und ihre Vervollständigung" gehalten, welcher in Nr. 6 des Tageblattes der obgenannten Versammlung seinem wesentlichen Inhalte nach abgedruckt worden ist.

Die Pointé dieses Vortrags ist eine gewisse Umgestaltung der zweiten Variation eines zur Untersuchung vorgelegten $r$fachen Integrals

$$S=\int_{x'_1}^{x''_1}\int_{x'_2}^{x''_2}\cdots\int_{x'_r}^{x''_r} V\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r,$$

in welchem V eine Function der zu bestimmenden Functionen $U_1, U_2, \ldots U_\mu$ von $x_1, x_2, \ldots x_r$ und der bezüglich bis zu den Rangzahlen $n_1, n_2, \ldots n_\mu$ ansteigenden partiellen Differentialquotienten dieser Functionen ist; überdies werden zwischen den genannten Grössen ν Bedingungsgleichungen

$$v_1=0,\ v_2=0,\ldots v_\nu=0$$

als vorgeschrieben angenommen.

Wird, unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ unbestimmte Multiplicatoren verstanden,

$$V+\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_\nu V_\nu=W,$$

$$\int_{x'_1}^{x''_1}\cdots\int_{x'_r}^{x''_r} W\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r=\mathfrak{S}$$

gesetzt und werden die Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, um die erste Variation $\delta\mathfrak{S}$ zum Verschwinden zu bringen, bereits verwirklicht gedacht, so besteht die erwähnte Umgestaltung der zweiten Variation von $\mathfrak{S}$ darin, dass einerseits der Verfasser allgemein

$$\delta U_m=\frac{\varrho^{\,\varepsilon}}{(n_m)!}\left(\frac{\sin 2n\pi w}{2n\pi}\right)^{n_m}\psi_m$$

setzt, wo ϱ eine unendlich kleine, von $x_1, x_2, \ldots x_r$ unabhängige Grösse, n eine sehr grosse positive ganze Zahl und w den Ausdruck

$$w=\frac{x_1-x'_1}{x''_1-x'_1}+\frac{x_2-x'_2}{x''_2-x'_2}+\ldots+\frac{x_r-x'_r}{x''_r-x'_r}$$

bezeichnen, und sich andererseits auf folgenden merkwürdigen Hilfssatz stützt:

Die Function $\sin 2n\pi w$ als Factor eines unter dem $r$fachen Integrationszeichen stehenden Ausdruckes ist der Null gleich zu achten; dagegen kann unter denselben Umständen ein Factor $\cos 2n\pi w$ durch die Einheit ersetzt werden.

Durch Differentiation des für δU_m angenommenen Ausdruckes 1) findet der Verfasser

$$\delta \frac{\partial^{\alpha+\beta\dots} U_m}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \dots}$$

$$= \varrho\, \varepsilon\, \psi_m \left(\frac{\sin 2n\pi w}{2n\pi}\right)^{n_m-\alpha-\beta\dots} \frac{(\cos 2n\pi w)^{\alpha+\beta\dots}}{(n_m-\alpha-\beta\dots)!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} w}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\alpha \dots} + \varrho\sigma,$$

wo $\varrho\sigma$ den Inbegriff der mit einer höheren als der $(n_m-\alpha-\beta\dots)^{\text{ten}}$ Potenz von $\sin 2n\pi w$ behafteten Glieder bezeichnen soll, entnimmt dieser Formel die Ausdrücke für die Variationen der verschiedenen Differentialquotienten von U_1, U_2, ... U_m, setzt dieselben in $\delta^2\mathfrak{S}$ ein, ersetzt hierauf kraft des obigen Hilfssatzes $\sin 2n\pi w$ in allen Gliedern, wo dieser Factor mit einem positiven Exponenten vorkommt, durch Null, $\cos 2n\pi w$ dagegen durch 1 und behält nach dieser Operation unter dem Integralzeichen eine einfache quadratische Form ψ_1, ψ_2, ... ψ_μ mit von x_1, x_2, ... x_n abhängigen Coefficienten übrig, welche unter Zuziehung der ν Bedingungsgleichungen und der angenommenen Beziehung

$$1-\psi_1^2-\psi_2^2-\dots-\psi_\mu^2=0$$

auf ihr Zeichen geprüft die entscheidenden Kriterien liefert.

Man stutzt unwillkürlich über die grosse Allgemeinheit des oben angeführten Hilfssatzes und es ist in der That sehr leicht zu sehen, dass nicht nur der vom Verfasser gegebene Beweis illusorisch, sondern auch der Satz selbst nicht richtig ist.

Der Beweis wird so geführt, dass das Integral

$$\int_{x'_1}^{x''_1}\dots\int_{x'_r}^{x''_r} F(x_r, x_{r-1}, \dots x_1)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_r$$

in folgender Weise in einen Summenausdruck umgewandelt wird. Zunächst wird das Integrationsintervall $x'_r \dots x''_r$ in n gleiche Theile zerlegt und näherungsweise

$$\int_{x'_r}^{x''_r} F\, dx_r = \frac{x''_r - x'_r}{n} \sum_0^{n-1}{}_h\, F\left(x'_r + \frac{h}{n}(x''_r - x'_r), \dots x_1\right)$$

gesetzt. Hierauf wird wieder das Intervall $x''_{r-1} - x'_{r-1}$ in n gleiche Elemente getheilt und die Integration in Bezug auf x_{r-1} näherungsweise durch eine Summe ersetzt und so fort für alle Veränderlichen bis zu x_1 Wenn nun F von der Form

$$(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q\, \theta(x_1, x_2, \dots x_r)$$

und p, q ganze nicht negative Zahlen sind, so ist in jedem Gliede des erhaltenen Summenausdruckes $2n\pi w$ ein Vielfaches von 2π und daher

$$\sin 2n\pi w = 0, \quad \cos 2n\pi w = 1.$$

Hieraus schliesst nun der Verfasser ohne Weiteres seinen Hilfssatz.

Dieser Beweis wäre im Allgemeinen stichhaltig, wenn das zu integrirende Element von n unabhängig wäre. Da aber ein Element von der Form

$$(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q \theta(x_1, \ldots x_r)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_r$$

von der Zahl n abhängt, so ist der von dem Verfasser in der dargelegten Weise hergeleitete Summenausdruck durchaus kein Näherungswerth für das Integral und man müsste, um einen solchen zu erhalten, die bezüglichen Intervalle in eine Anzahl von Theilen zerlegen, welche gegen n beträchtlich gross sein müsste; bei der vom Verfasser gewählten Eintheilung kommt der Factor $(\sin 2n\pi w)^p (\cos 2n\pi w)^q$ gar nicht zur Entfaltung seiner Veränderlichkeit.

Dass der Satz selbst nicht richtig ist, beweisen nachfolgende, nach Belieben leicht zu vermehrende Beispiele, in welchen ich mich der Einfachheit wegen auf den Fall eines Doppelintegrals mit constanten Grenzen beschränkt und

$$x'_1 = a, \quad x''_1 = b, \quad x_1 = x,$$
$$x'_2 = g, \quad x''_2 = h, \quad x_2 = y$$

(wo also a, b, g, h constante Zahlen bezeichnen) gesetzt habe; man findet, wie gross auch n angenommen werde:

$$\int_a^b\!\!\int_g^h \sin^2 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = \tfrac{1}{2}(b-a)(g-h),$$

$$\int_a^b\!\!\int_g^h \cos^2 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = \tfrac{1}{2}(b-a)(g-h),$$

$$\int_a^b\!\!\int_g^h \cos 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = 0,$$

$$\int_a^b\!\!\int_g^h xy \cos 2n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-g}{h-g}\right) dx\, dy = -\frac{(b-a)^2 (h-g)^2}{4n^2\pi^2}$$

. . . .

Da hiernach die von dem Verfasser mittels des von ihm mit dem Namen Osculationsfactor belegten Factors in $2n\pi w$ bewirkte Umformung der zweiten Variation auf der Anwendung eines falschen Satzes beruht, so können weder diese Umformung, noch auch die daraus abgeleiteten Endkriterien als stichhaltig aufrechterhalten werden.

Krakau, 20. November 1875. Mertens.

VIII.

Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Bx_3^2$.

Von

Dr. JOHANNES EDUARD BÖTTCHER,

Oberlehrer a. d. Realschule I. Ordn. in Leipzig.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1 – 4.)

In der Vorlesung Winter 1869/70 des Herrn Geheimrath Professor Richelot über Dynamik wies an einer Stelle dieser mein auf's Tiefste verehrter Lehrer, der mittlerweile, nämlich am 1. April d. J., aus dem Leben geschieden ist, auf ein anziehendes analytisch-mechanisches Problem hin, das „ebenso verdiente durchgeführt zu werden — mit Hilfe der elliptischen Functionen — als das des sphärischen Pendels". Es ist das in 3. genannte.* Zwar nicht dieses Problem in seiner Allgemeinheit, von welchem einen speciellen Fall C. G. J. Jacobi selbst behandelt hat (vgl. unter 4), sondern ein anderer besonderer Fall des in 3. genannten Problems bildet den Gegenstand vorliegender Arbeit.

Aus welchem Grunde ich deren ursprünglichen Titel: Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer rotirenden homogenen Kugel, die ihn anzieht, abgeändert habe, findet in 5. sich angedeutet.

I. Die Aufgabe. Ihre Zurückführung auf Quadraturen.

1. Eine Gattung integrabler Probleme.

Verhältnissmässig gering ist die Anzahl derjenigen analytisch-mechanischen Probleme, die bisher auf Quadraturen sich haben zurückbringen lassen. Und unter ihnen wieder konnte die Mehrzahl nicht eher zum letzten Ziele hindurch geführt werden, nämlich zur Darstellung der Coordinaten durch die Zeit, als für die Integrale der nächsthöheren Stufe nach den logarithmischen und cyclometrischen das entscheidende Hilfsmittel dargeboten war in C. G. J. Jacobi's Θ-Functionen.

* Er brachte dasselbe auf Quadraturen und zeigte die eine Eigenschaft, die Vermeidung des Pols.

Auf eine umfassende Gattung integrabler Probleme ist von dem Ebengenannten hingewiesen worden.

Damit nämlich aus dem Gleichungs-Systeme für die Bewegung auf einer Oberfläche:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= X_3 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_3} \end{aligned}\right\}$$

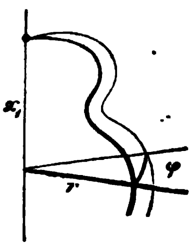
sich für den Ausdruck

$$dT = \Sigma X\, dx + \lambda\, dL$$

ein exactes Differential ergebe, ist auch ohne Annahme einer Kräftefunction die Bedingung nothwendig und hinreichend, dass

$$\begin{aligned} &\frac{dL}{dx_1}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) \\ +&\frac{dL}{dx_2}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) \\ +&\frac{dL}{dx_3}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = 0 \end{aligned}$$

sei. Diese Bedingung aber ist u. A. jederzeit dann identisch erfüllt, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, und die Kräfte nur in der Meridianebene wirken:



$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ x_2 &= r \cos\varphi, \\ x_3 &= r \sin\varphi; \\ L &= L\left(x_1, r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \\ X_1 &= X_1(x_1, r), \\ X_2 &= R \cdot \frac{x_2}{r}, \\ X_3 &= R \cdot \frac{x_3}{r}; \quad R = R(x_1, r). \end{aligned}$$

Beim Einsetzen dieser Werthe ergiebt sich das identische Verschwinden des obigen Ausdruckes. Man bekommt nun mit Hilfe der Lagrange-schen Transformation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x'_1 &= \phantom{r\varphi'\varphi' + {}} X_1 + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_1}, \\ \frac{d}{dt} r' &= r\varphi'\varphi' + R + \lambda \frac{\partial L}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} r^2 \varphi' &= 0; \end{aligned}$$

und indem man das sich bietende Flächenintegral

$$r^2\varphi' = C_1^2$$

sofort weiter benutzt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \qquad X_1 + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_1}\\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{C_1^4}{r^3} + R + \lambda\frac{\partial L}{\partial r}\end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen aber lassen den Satz erkennen:

Jedes Problem, mit oder ohne Kräftefunction, bei welchem

die Fläche eine Rotationsfläche ist, und

die Kräfte nur in der Meridianebene wirken,

ist integrabel.

Denn nach Einführung einer einzigen neuen Variabeln ξ, welche die Bedingungsgleichung identisch erfüllt:

$$x_1 = F_1(\xi), \quad r = F_2(\xi), \quad L(\xi) \equiv 0$$

erhält man

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}d(x'_1x'_1 + r'r') &= \left(X_1 \qquad + \lambda\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)dx_1\\ &\quad + \left(\frac{C_1^4}{r^3} + R + \lambda\frac{\partial L}{\partial r}\right)dr\\ &= \Xi\, d\xi,\\ \tfrac{1}{2}\frac{dx_1^2 + dr^2}{dt^2} &= \int \Xi\, d\xi.\end{aligned}$$

Und hierdurch ist die Aufgabe zurückgeführt auf eine

Quadratur für t und eine

Quadratur für φ. Es wird

$$t = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\dfrac{2\int\Xi\,d\xi}{(F_1'\xi)^2 + (F_2'\xi)^2}}};$$

$$d\varphi = \frac{C_1^2\,dt}{r^2};$$

$$\varphi = \int \frac{C_1^2}{(F_2\xi)^2}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\text{uts}}}$$

2. Erweiterung.

Prof. Richelot fügt hinzu: Das Problem bleibe auch dann lösbar, wenn die gegebene Rotationsfläche nicht festliegt, sondern eine constante Rotationsgeschwindigkeit um die Rotationsaxe besitzt. Man habe dann* nur überall ein von der Centrifugalkraft herrührendes Glied anzufügen, nämlich

* Nach Vorgange Jacobi's bei Gelegenheit der Anziehung nach festen Centren (Vorl. üb. Dynamik S. 223 flgg.).

$$\text{an Stelle von } R \ldots R + \frac{v^2}{r} \text{ oder } R + r\omega^2$$

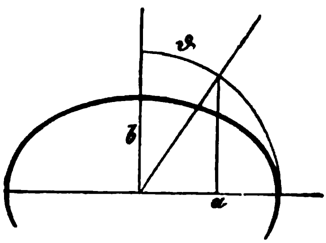
zu setzen, wo unter v die Linien-, unter ω die Winkelgeschwindigkeit verstanden ist, ohne dass an der Analysis etwas geändert werde.

3. Ein Einzelproblem dieser Gattung.

Als Beispiel führte Prof. Richelot folgendes Problem vor: Ein Punkt bewege sich auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides, ähnlich unserer Erde,

dasselbe rotire gleichförmig um die Axe,

und die wirkende Kraft sei eine Newton'sche Attraction des Ellipsoides selbst, also es sei



die Fläche: $\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2} - 1 = 0$;

die Kräfte: $X_1 = -mx_1$,

$R = -nx$; diese vermehrt um $r\omega_1^2$: $R + r\omega^2 = r(-n + \omega^2)$;

so dass eine Kräftefunction, die zur Lösbarkeit nicht erfordert würde, hier in der That vorhanden ist:

$$U = \frac{-mx_1^2}{2} + \frac{-n+\omega^2}{2} r^2;$$

und zur identischen Erfüllung der Bedingungsgleichung sei

$$x_1 = b \cos \vartheta$$
$$r = a \sin \vartheta.$$

Die Aufgabe führt zu dem Ergebnisse, dass, wenn

$$\sin^2\vartheta \ldots \xi$$

und eine zweite Integrationsconstante (die der lebendigen Kraft) C_2^2 genannt wird,

$$t = \int \frac{d\xi\,(\overline{b^2 - a^2}\,\xi + a^2)}{2\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{\left(\xi - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right)(1-\xi)\left(-\frac{C_1^4}{a^2} + (-mb^2+C_2^2)\xi + (\overline{-n+\omega^2}\,a^2 + mb^2)\xi^2\right)}}$$

Hierin sind die Fälle

$$b \lessgtr a,$$

des abgeplatteten, des gestreckten Ellipsoides, zu unterscheiden.

Eine der wichtigsten allgemein giltigen Bemerkungen über dieses Integral ist die folgende. Da das Problem ein mechanisches ist, so darf t, die Zeit, niemals imaginär werden; demnach der Radicand der Wurzel im Nenner nie negativ. Nun aber würde für

$$\xi = 0$$

dieser Radicand $= -\frac{C_1^4}{a^2}$, also, von $C_1^2 = 0$ abgesehen, negativ werden. Dies liefert ohne Weiteres den weittragenden Satz:

Das Mobil kann im Allgemeinen den Pol nicht erreichen.

4. Besondere Probleme, in dem genannten enthalten.

Man kann, um das erhaltene Integral, das elliptisch ist, zu vereinfachen, verschiedene beschränkende Annahmen machen. Nachstehende Tafel giebt Uebersicht darüber, welcher Stufe die dann sich bietenden Integrale angehören. Man bekommt bei der Bewegung

		auf Rotations-Ellipsoid	auf einer Kugel ($a=b$)
mit Meridiankräften X und R	mit $r\omega^2$	elliptische	elliptische
„ „	ohne „	elliptische	cyclometrische
ohne Meridiankräfte ($m=n=0$)	mit $r\omega^2$	elliptische	elliptische
„ „	ohne „	elliptische	cyclometrische

Integrale. Insbesondere liefert der Fall

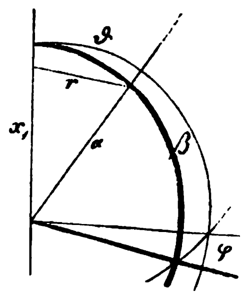
$m=n=0$ (keine Attraction) und

$\omega=0$ (keine Rotation)

immer noch ein elliptisches Integral. Und zwar müssten u. A. die Formeln für die geodätische Linie sich ergeben, wie sie durch C. G. J. Jacobi hergeleitet und durch Prof. Luther mitgetheilt sind Crelle'sches Journal Bd LIII, S. 335 und S. 342.

5. Die zu behandelnde Aufgabe.

Ich stelle mir die Aufgabe: die Bewegung eines Punktes zu bestimmen auf der Oberfläche einer homogenen Kugel unter Einfluss einer Attraction der Kugel selbst und einer gleichförmigen Rotation, oder — ohne physikalische Deutung — die Bewegung dann zu bestimmen, wenn



$$\left.\begin{aligned}
&\text{die Fläche } L = 0 = x^2 + r^2 - a^2, \\
&\text{die Kräfte } X = -A\frac{x}{a}, \\
&R = -A\frac{r}{a} + r\omega^2 \\
&\text{die Kräftefunction also} \\
&U = \frac{-A}{2a}x^2 + \frac{-A + a\omega^2}{2a}r^2
\end{aligned}\right\}$$

ist.

Hierin bedeutet a den Kugelradius; und wenn ferner als Aequator die Hauptkreisebene bezeichnet wird, zu welcher die Kraftcomponente $r\omega^2$ parallel gerichtet ist, so ist x der Abstand des Mobils von der Aequatorebene, r derjenige von der Axe oder der Parallelkreisradius.

Weiter giebt $-A$ diejenige Beschleunigung an, welche die Newton'sche Attraction für sich allein auf der Kugeloberfläche dem Mobil ertheilen würde.

Der physikalischen Deutung der obigen Gleichungen steht im Wege, dass bei Annahme einer Reibung zwischen dem Massenpunkte und der Kugeloberfläche zu der Componente der Centrifugalkraft noch eine weitere Tangentialkraft hinzutreten würde; andererseits, wenn keine Reibung stattfindet, die rotirende Kugel überhaupt nur eine radial gerichtete Kraft auf das Mobil ausüben könnte und demnach unter demselben weggleiten würde. Daher bedeuten die obigen Gleichungen nichts Anderes, als diejenigen für die Bewegung eines Massenpunktes, der gezwungen ist, auf einer Kugeloberfläche zu bleiben und unter dem Einflusse einer Kräftefunction von der Form

$$A x_1^2 + B(x_2^2 + x_3^2)$$

steht.

Die Bewegungsgleichungen werden nach dem Vorigen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \qquad -A\frac{x}{a} + \lambda\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{C_1^4}{r^3} - A\frac{r}{a} + \lambda\frac{x}{a},$$

worin unter C_1^2 die von der ersten Integration herrührende Flächenconstante verstanden ist, und geben nach Einführung von

$$x = a\cos\vartheta$$

$$r = a\sin\vartheta$$

und Integration

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^4}{a^4\sin^2\vartheta} - \frac{A}{a} + \omega^2\sin^2\vartheta + \frac{C_2^2}{a^2},$$

folglich, wenn wie vorher

$$\sin^2\vartheta = \xi$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\omega^2(1-\xi)\left(-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2\right),$$

$$t = \frac{1}{2\omega}\int\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2}};$$

und da ferner

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C_1^2,$$

so wird

$$\varphi = \int\frac{C_1^2}{r^2}dt.$$

II. Allgemein giltige Bemerkungen. Zwei besondere Fälle.

Der allgemeinen Weiterbehandlung dieses Integrals mögen Bemerkungen, die schon vor der Reduction auf die Normalform sich darbieten, sowie um späterer Vergleichung willen die Durchführung zweier Grenzfälle vorangehen.

6. Erreichen des Pols. Gang auf Meridian; auf Parallelkreis.

Vor Allem ist auch für hier zu wiederholen, dass in

$$t = \frac{1}{2\omega}\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{-\frac{C_1^4}{a^4\omega^2} - \frac{Aa - C_2^2}{a^2\omega^2}\xi + \xi^2}}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\omega \cdot \sqrt{1-\xi}\sqrt{\qquad \text{"}}$$

der Radicand nie negativ werden darf, ξ also im Allgemeinen nicht $= 0$, so dass das Mobil

im Allgemeinen nicht in den Pol gelangt.

(Vergl. S. 148.)

Da der Radicand zwar nicht < 0, wohl aber $= 0$ werden darf, so ist der einzige Fall, in welchem ein Verschwinden von ξ in der That möglich ist, der, dass gleichzeitig auch

$$C_1^2, \text{ d. i. } r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\equiv r_0^2 \varphi'_0 = 0.$$

Dies kann auf zweierlei Weise geschehen.

Erstens, wenn $\varphi'_0 = 0$. Das bedeutet: Das Mobil kann den Pol in dem Falle erreichen, dass seine Geschwindigkeit zu Anfang (zu irgend einer Zeit) ganz in die Meridianebene fiel.

Zweitens, wenn $r_0 = 0$, wenn das Mobil schon anfangs im Pole sich befand. Dieser Fall ist im vorigen enthalten; denn von dem Pole als Anfangsorte aus fällt eine jede Anfangsgeschwindigkeit in einen Meridian hinein.

Eine Bewegung ausschliesslich auf einem Meridiane, so dass

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv 0$$

bleibt, tritt immer dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi'_0 = 0:$$

Wenn das Mobil zu irgend einer Zeit ein Stück längs eines Meridians gegangen ist, so verlässt es denselben nie wieder.

Es ist ferner zu fragen, unter welchen Umständen identisch

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \xi = Const.$$

sein, das Mobil also auf einem Parallelkreise umlaufen kann. Dies findet nun statt,

erstens, wenn $\xi = Const. = 1;$

dazu ist erforderlich, dass

$$\xi_0 = 1 \text{ und}$$
$$\xi'_0 = 0,$$

oder dass das Mobil anfangs auf dem Aequator war und nur eine Geschwindigkeit in dessen Ebene besass. Also auch für den Aequator gilt der Satz:

Wenn das Mobil zu irgend einer Zeit ein Stück entlang desselben gegangen ist, so bleibt es in ihm,

wie schon die symmetrische Lage der Halbkugeln an die Hand giebt. Es ist dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = Const. = \varphi'_0,$$

d. h. der Aequator wird gleichförmig durchlaufen (nicht so der Meridian [vergl. 7]).

Zweitens, wenn

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = Const. = 0 \\ C_1^2 \quad\quad = 0 \end{array}\right\},$$

und gleichzeitig

also wenn

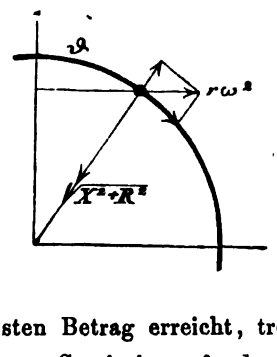
$\xi_0 = 0$, oder das Mobil anfangs im Pole sich befand,

und $\xi'_0 = 0$, wenn es keine meridionale,

d. h. überhaupt keine Geschwindigkeit hatte. Es bleibt dann im Pole ruhend.

Dass dagegen die beiden Werthe von ξ, für welche ausserdem noch der Radicand verschwindet, auf keine Parallelkreisbewegung führen, wird später sich zeigen.

Ebensowenig kann an anderem Orte als im Pole oder auf dem Aequator das Mobil ruhen. Denn während die blosse Attractionskraft $\sqrt{X^2 + R^2}$ hier immer normal zur Fläche gerichtet ist, liefert die Beschleunigung $r\omega^2$ zwei Componenten, eine normale oder radiale, welche als Minderung des Druckes sich äussert, und eine längs des Meridians. Diese letztere



$$r\omega^2 \cos\vartheta,$$

welche für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oder $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ ihren höchsten Betrag erreicht, treibt das Mobil dem Aequator zu.

Somit ist gefunden worden:

1. Das Mobil kann im Pole ruhen;
2. „ „ „ auf einem Meridiane gehen;
3. „ „ „ sonst niemals in den Pol kommen;
4. „ „ „ auf dem Aequator gehen (mit constanter Geschwindigkeit), insbesondere ruhen;
5. „ „ „ nicht auf einem andern Parallelkreise gehen;

6. Das Mobil kann nicht an einem Orte ausser Pol oder Aequator ruhen.*

7. Andere Form der Gleichung. Erster specieller Fall: Bewegung auf Meridian.

Die beiden in die Gleichung für t eingegangenen Constanten, nämlich

die Flächenconstante C_1^2 und
die der lebendigen Kraft C_2^2

lassen sich durch andere, mit mechanischer Bedeutung, ersetzen. Es wird

$$C_1^2 = r_0^2 \varphi'_0 = a^2 \sin^2 \vartheta_0 \varphi'_0$$

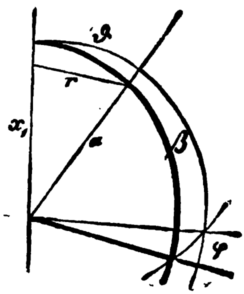
$$\begin{aligned} C_2^2 &= a^2 \vartheta'_0 \vartheta'_0 + \frac{C_1^4}{a^2 \sin^2 \vartheta_0} + A a - \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0 \\ &= a^2 \vartheta'_0 \vartheta'_0 + a^2 \sin^2 \vartheta_0 \varphi'_0 \varphi'_0 + A a - \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta_0. \end{aligned}$$

Ihre Einsetzung liefert

$$\sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2 \left(-\frac{\varphi'_0 \varphi'_0 \sin^4 \vartheta_0}{\omega^2} + \frac{\vartheta'_0 \vartheta'_0 + (\varphi'_0 \varphi'_0 - \omega^2) \sin^2 \vartheta_0}{\omega^2} \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta\right).$$

Hieraus ist die Constante A der Attraction ganz herausgegangen, wie nöthig. Denn die Resultante der anziehenden Kräfte X und R allein wird normal zur Oberfläche.

Gleicherweise ist die Gleichung von der Länge des Kugelradius unabhängig geworden.



Führe ich nun ferner

$$\begin{array}{ll|c} \sin\vartheta & & \cos\beta \\ \sin^2\vartheta & \text{oder } \cos^2\beta & \xi \end{array}$$

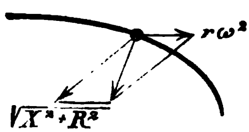
ein, so wird

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 (1-\xi)(P + Q\xi + \xi^2),$$

worin

---

* Für ein Rotationsellipsoid behalten Nr. 1 bis 4, Nr. 5 und 6 dagegen verlieren die Giltigkeit. Insbesondere ist beim Rotationsellipsoid die Resultante von X und R im Allgemeinen nicht normal zur Fläche gerichtet. Nimmt man vielmehr den Anfangsort beliebig, die Anfangsgeschwindigkeit $=0$ und sieht (was wenigstens so lange statthaft ist, als das Mobil in relativer Ruhe bleibt) $r\omega^2$ als eine Centrifugalkraft an, herrührend von einer Rotation um die Axe: so kann es hier geschehen, dass die Resultante der Attraction und der Centrifugalkraft normal zur Fläche wird, die tangentiale Componente in der Meridianebene also null, so dass das Mobil keinen Antrieb nach dem Aequator hin erfährt.



Dies wird vor Allem dann der Fall sein, wenn die jetzt vorhandene constante Rotationsgeschwindigkeit dieselbe ist, wie die, unter deren Einflusse etwa das Ellipsoid früher (in flüssigem Zustande) seine Gestalt angenommen hat.

$$\begin{array}{c|l} P & -\dfrac{\varphi'_0\varphi'_0 \cos^4\beta_0}{\varphi^2} \\ Q & \dfrac{\beta'_0\beta'_0 + (\varphi'_0\varphi'_0 - \omega^2)\cos\beta_0}{\omega^2}. - \end{array}$$

Der erste zu behandelnde Specialfall sei die als möglich erkannte Bewegung auf einem Meridiane; dann, wenn

$$\varphi'_0 = 0.$$

In diesem Falle wird

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0\beta'_0 - \omega^2(\sin^2\beta - \sin^2\beta_0),$$

und es ist zunächst zu entscheiden, ob das Mobil auf dem Meridiane hin- und herpendelt, oder rundumläuft. Dazu ist zu fragen, ob immer ein reeller Winkel

$$\beta_1 = Max\,\beta$$

sich angeben lasse. Nun kann der aus der Forderung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = 0$$

sich ergebende Werth

$$\sin^2\beta_1 = \frac{\beta'_0\beta'_0}{\omega^2} + \sin^2\beta_0$$

nie negativ, wohl aber ein unechter Bruch werden. Soll indess β_1 reell sein, so muss er

$$\leqq 1$$

bleiben, mithin

$$\frac{\beta'_0}{\cos\beta_0} \leqq \omega.$$

Behufs bequemerer Aussprache in Worten multiplicire ich beiderseits mit r_0, so findet sich

$$\beta'_0 \frac{r_0}{\cos\beta_0}$$

$$\text{oder } a\beta'_0 \leqq r_0\omega,$$

und nimmt man für den Augenblick als Anfangsort den Punkt des Ueberganges über den Aequator, den einzigen, der auf alle Fälle erreicht wird, so geht die Ungleichung über in

$$a\,.\,\beta'_0 \leqq a\,\omega$$
$$\beta'_0 \leqq \omega.$$

D. h.: das Mobil

oscillirt quer über den Aequator läuft rundum	je nachdem die Winkelgeschwindigkeit beim Ueberschreiten des Aequators	$<$ $>$	ω.

8. Erster Specialfall. Fortsetzung.

Im Falle der Oscillation auf dem Meridiane nehme ich in der Gleichung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0\beta'_0 - \omega^2(\sin^2\beta - \sin^2\beta_0)$$

$$= (\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0)\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0}\sin^2\beta\right)$$

die Substitution

$$\frac{\omega^2}{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin\beta_0} = \frac{1}{k^2}(> 1)$$

vor und bekomme

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = k\omega^2\left(1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\beta\right),$$

$$t = \int_0^\beta \frac{1}{k\omega}\frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\beta}},$$

wenn ich die Werthe

t	β
0	$\beta_0 = 0$

zusammengehören lasse. Substituirt man nun

für $\sin^2\beta \ldots k^2\sin^2\gamma$,

so wird

$$dt^2 = \frac{1}{k^2\omega^2}\cdot\frac{k^2\,d\gamma^2}{1 - k^2\sin^2\gamma},$$

und da β und γ gleichzeitig verschwinden,

$$t = \frac{1}{\omega}\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma}},$$

$$\gamma = am\,\omega t,$$

$$\sin^2\beta = k^2\sin^2 am\,\omega t.$$

Da aber weiter

$$\beta_0 = 0,$$

$$k^2 \text{ od. } \frac{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0}{\omega^2} = \frac{\beta'_0\beta'_0}{\omega^2} = \sin^2\beta_1, \text{ so wird}$$

$$\sin^2\beta = \sin^2\beta_1 \,.\, \sin^2 am\,\omega t \quad mod\ (k = \sin\beta_1).$$

Der Verlauf ist nun folgender. Bezeichnet man durch

$$\frac{T}{2}$$

eine halbe Schwingungsdauer, d. i. die Zeit der Bewegung vom Aequator bis zum Punkte weitesten Ausschlags, so gehören folgende Werthe zusammen:

t	0	$\frac{1}{2}T$	T	$\frac{3}{2}T$	$2T$	$\ldots$
β	0	$+\beta_1$	0	$-\beta_1$	0	$\ldots$
am	0	$am K$	$am 2K$	$am 3K$	$am 4K$	$\ldots,$

und es wird

$$K = \omega\frac{T}{2}, \quad T = \frac{2K}{\omega}.$$

Nehme ich z. B. $\beta'_0 = \omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also auch $k = \sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, daher $K = 1{,}854$, und stelle mir etwa unter ω eine Geschwindigkeit vor, mit welcher in n Secunden der Weg 2π durchlaufen würde, so ist $\omega = \frac{2\pi}{n}$, und

$$T = n\,\frac{2K}{2\pi} = 0{,}590\, n;$$

nach soviel Secunden ist eine Schwingung von Wendekreis zu Wendekreis vollendet, und nach

$$2T \qquad = 1{,}180\, n$$

Secunden ist das Mobil zum ersten Ausschlagspunkte zurückgekehrt.

9. Erster Specialfall. Fortsetzung.

Wenn dagegen, weil das Verhältniss

$$\frac{\beta'_0}{\omega} > 1$$

ist, ein Umlauf auf dem Meridiane stattfindet, so erlaubt die Gleichung

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \beta'_0\beta'_0 - \omega^2(\sin^2\beta - \sin^2\beta_0)$$

$$= (\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0)\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0}\sin^2\beta\right)$$

jetzt ohne Weiteres die Setzung

$$\frac{\omega^2}{\beta'_0\beta'_0 + \omega^2\sin^2\beta_0} = \lambda^2\ (< 1),$$

oder wenn auch hier

$$\begin{array}{c|l} 0 & \beta \\ \hline t & \beta_0 = 0 \end{array}$$

angenommen wird,

$$\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0} < 1.$$

Dann wird

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2}(1 - \lambda^2\sin^2\beta),$$

$$t = \frac{\lambda}{\omega}\int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\beta}}$$

$$\beta = am\,\frac{\omega}{\lambda}\,t$$

$$= am\,\beta'_0 t \quad mod\left(\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0}\right).$$

Verlauf. Der gefundene Werth der geographischen Breite theilt die Eigenschaften der Amplitude. Insbesondere wächst er beständig, indem der Differentialquotient $\Delta(\beta, \lambda)$ stets positiv bleibt. Heisst

2 *T*

die Dauer von einem völligen Umlaufe, so wird für

$$\begin{array}{c|l} t & 0 \ldots 2\,T \ldots \\ \hline \beta & 0 \ldots am\,\beta'_0\,(0+2\,T) \ldots \\ & \quad = am\,(0+4\,\Lambda), \end{array}$$

also

$$4\,\Lambda = \beta'_0 \,.\, 2\,T$$

$$2\,T = \frac{4\,\Lambda}{\beta'_0} = \frac{4\,\Lambda\,.\,\lambda}{\omega}$$

oder bei derselben Annahme über ω wie vorhin

$$= \frac{4\,\Lambda\,.\,\lambda}{2\,\pi}\,n.$$

Sei z. B. $\beta'_0 = \omega\sqrt{2}$, so erfolgt jetzt das Wiedereintreffen in demselben Punkte schon nach

$$2\,T = \frac{4\,.\,1{,}854\,.\,0{,}707}{2\,\pi}\,n$$

$$= 0{,}834\;n$$

Secunden.

Für

$$\beta_1,\ \text{d. i. } Max\,\beta = \frac{\pi}{2}$$

wird

$$\beta'_0 = \omega.$$

Es fallen dann die beiden gefundenen Formeln zusammen und geben

$$sin\,\beta = sin\,am\,\omega\,t \text{ oder } sin\,am\,\beta'_0 t \;\; mod\left(\frac{\omega}{\beta'_0} = 1\right),$$

woraus

$$\beta = am\,(\omega t,\ 1)$$

$$= arcsin\,\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega}}$$

folgt. In diesem Falle befindet sich das Mobil im Pole (den es nach unendlich langer Zeit erreicht) im Zustande labilen Gleichgewichtes: bei einem um verschwindend Weniges kleineren β'_0 würde es am Pole umkehren und oscilliren; bei einem noch so wenig grösseren β'_0 dagegen rundumlaufen.

Die beigegebene Curventafel zeigt für beide Fälle und den Grenzfall die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Winkel, sowie die des Winkels von der Zeit.

10. Zweiter Specialfall: $\omega = 0$.

Wenn $\omega = 0$ ist, also einzig eine Anziehung mit normaler Richtung wirkt, so wird die Differentialgleichung für β

$$dt = \frac{1}{\varphi'_0\,cos\,\beta_1} \cdot \frac{cos\,\beta\,d\,\beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\beta_1}},$$

wo

$$Max\,\beta \mid \beta_1$$

gesetzt, und

$$\begin{array}{c|l} t & 0 \\ \hline \beta & \beta_0 = \beta_1 \end{array}$$

angenommen ist. Dann wird

$$t = \int_{\beta_1}^{\beta} = \frac{1}{\varphi'_0 \cos^2 \beta_1}\left(\arcsin \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \cos(\varphi'_0 \cos\beta_1 t).$$

Ferner

$$d\varphi = \varphi'_0 \cos^2\beta_1 \frac{dt}{\cos^2\beta}$$

$$= - \frac{d \,.\, \cos\beta_1 \operatorname{ctg}(\varphi'_0 \cos\beta_1 t)}{1 + \cos^2\beta_1 \operatorname{ctg}^2(\varphi'_0 \cos\beta_1 t)}$$

und, wenn auch

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \\ \hline \varphi & \varphi_0 = 0 \end{array}$$

genommen wird,

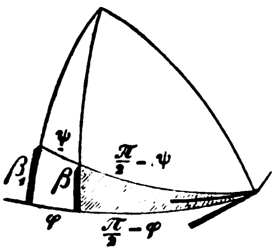
$$\varphi = \int_0^t = \operatorname{arc\,ctg}(\cos\beta_1 \operatorname{ctg} \varphi'_0 \cos\beta_1 t)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \cos\beta_1 \operatorname{ctg}(\varphi'_0 \cos\beta_1 t).$$

Die gefundenen beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \sin\beta = \sin\beta_1 \cos(\varphi'_0 \cos\beta_1 t) \\ \operatorname{ctg}\varphi = \cos\beta_1 \operatorname{ctg}(\varphi'_0 \cos\beta_1 t) \end{array}\right\}$$

sind aber Relationen für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem



die eine Kathete $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

die Hypotenuse $\frac{\pi}{2} - \varphi'_0 \cos\beta_1 t$,

der Zwischenwinkel β_1

beträgt. Dies giebt Bestätigung dafür, dass wie nöthig, unter der gemachten Annahme das Mobil sich auf einem **Hauptkreise**, einer kürzesten sphärischen Linie, bewegt. Und wird dessen Bogen ψ genannt, so bestätigt sich weiter, dass

$$\psi = \varphi'_0 \cos\beta_1 t$$
$$= \psi'_0 t$$
$$\psi' = \psi'_0 = Const.,$$

die Bewegung auf dem Hauptkreise somit eine **gleichförmige** ist Fernerhin ist mit $\psi = \frac{\pi}{2}$ gleichzeitig $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und wird, wie früher, die Periode einer unveränderten Wiederkehr der Bewegung, die für $\psi = 2\pi$ eintritt, durch $2\,T$ bezeichnet, so wird

$$\text{für } t = \frac{T}{2} \qquad \varphi = \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

III. Allgemeine Wurzel-Discussion. Reduction auf die Normalform.

11. Wurzel-Discussion.

Indem ich zu dem allgemeinen Probleme mich wende, gilt es vor Allem, die Wurzelwerthe aufzusuchen, für welche in

$$t = +\frac{1}{2\omega}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{P+Q\xi+\xi^2}}$$

der Radicand im Nenner verschwindet. Hierin war

$$\begin{array}{c|l} \xi & \cos^2\beta \\ P & -\dfrac{\varphi'_0\varphi'_0\cos^4\beta_0}{\omega^2} \\ Q & \dfrac{\beta'_0\beta'_0+(\varphi'_0\varphi'_0-\omega^2)\cos^2\beta_0}{\omega^2} \\ \xi_0 & \text{noch willkürlich gelassen.} \end{array}$$

Jeder Wurzel von

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\,\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)=0$$

entspricht ein $M^{in}_{ax}\,\xi$ (doch nicht nothwendig $M^{in}_{ax}\,\beta$). Da nach erreichtem $Max\,\xi$ $d\xi$ vom Positiven ins Negative übergeht, so muss bei einem jeden Wurzelwerthe die Quadratwurzel ihr Zeichen wechseln, damit $dt = \dfrac{d\xi}{\sqrt{}}$ jederzeit eine positive Grösse bleibe, denn die Zeit gilt als beständig wachsend.

Da ferner

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{C_1^2}{r^2}=\frac{a^2\cos^2\beta_0\varphi'_0}{a^2\cos^2\beta}$$

ist, so findet jedesmal zugleich

$$\text{mit } M^{in}_{ax}\,\xi \text{ ein } M^{ax}_{in}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

statt. —

Als reelle Wurzel der Gleichung $\left(\dfrac{d\xi}{dt}\right)^2=0$ bietet sich zunächst

$$\xi_3 = 1 \quad (\beta = 0, \text{ das Mobil auf dem Aequator}).$$

Ob nun die beiden anderen, aus

$$P+Q\xi+\xi^2=0$$

ich ergebenden Wurzeln

$$\left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\} = \frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4P}}{2}$$

leichfalls reell sind, hängt davon ab, ob

$$Q^2-4P \quad > 0$$

t. Dies ist aber stets der Fall. Denn es ist sowohl Q^2 positiv, $-4P$ positiv. Somit hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln; und es ist nur noch die Frage, ob beide letztgefundenen Wurzeln einen mechanischen Sinn haben, nämlich ob

$$0 < \xi_{\frac{1}{2}} = \cos^2\beta_{\frac{1}{2}} < 1.$$

12. Wurzel-Discussion. Fortsetzung.

Die Frage, zwischen welchen Grenzen ξ sich bewegen darf, wenn

$$\eta = 4\,\omega^2\,(1-\xi)\,(P + Q\xi + \xi^2) = pos.$$

bleiben soll oder, was damit übereinkommt, die Frage nach der Lage der Wurzeln wird dadurch beantwortet, dass man das Vorzeichen von η für einzelne Werthe von ξ bestimmt. Es wird

für ξ	η
$=0$	$4\,\omega^2 P$ d. i. $-4\varphi'_0\varphi'_0\cos^4\beta_0 \ldots neg.$; Ausnahme: $=0$: 1. wenn $\varphi'_0 = 0$ — Umlauf auf Meridian; 2. wenn $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — Anfangsort im Pole; (Fall Nr. 2 enthalten im vorigen.) Siehe früher.
$=\xi_3 = 1$	0
$=\cos^2\beta_0$	$4\omega^2(1-\cos^2\beta_0)\left(-\frac{\varphi'_0\varphi'_0\cos^4\beta_0}{\omega^2}+\frac{\beta'_0\beta'_0+(\varphi'_0\varphi'_0-\omega^2)\cos^2\beta_0}{\omega^2}\cos^2\beta_0+\cos^4\beta_0\right)$ d. i. $4\sin^2\beta_0 . \beta'_0\beta'_0 . \cos^2\beta_0 \ldots$ *pos.* in allen Fällen.

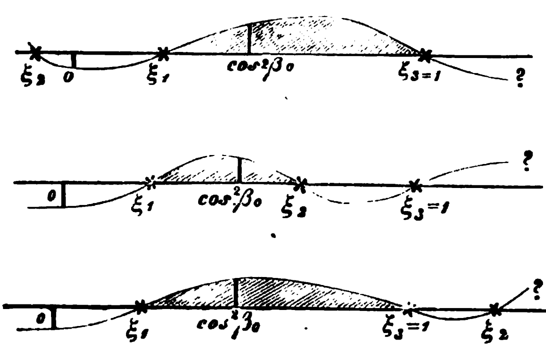
Hieraus folgt: Es giebt jederzeit eine Wurzel

$$\text{zwischen } \beta = \beta \text{ und } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach: Für jeden Anfangsort ausser dem Pole und jede andere Anfangsgeschwindigkeit als rein im Meridiane gilt, dass das Mobil nicht in den Pol kommen kann (vgl. 6.), sondern nach dem Pole zu eine grösste Ausweichung hat.

Es kann also z. B. auch nicht etwa ein spiraliger Aufstieg nach dem Pole in unendlich langer Zeit erfolgen.

Noch aber ist nicht vollständig entschieden, in welcher Reihe die drei reellen Wurzeln aufeinanderfolgen. Es sind drei Fälle denkbar:



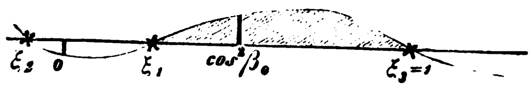
Indessen die Untersuchung, ob auch die dritte Wurzel ξ_2 zwischen 0 und 1 liegen könne, wird dadurch entbehrlich, dass das Wurzelproduct $\xi_1\,\xi_2$ dem Gliede ohne ξ in der Gleichung, nämlich P gleich sein muss. Denn da dieses negativ und die erste Wurzel positiv ist, so muss

$$\xi_2 \text{ negativ}$$

sein. — Damit stimmt überein, dass die η-Curve bei ihrer Ankunft in $\xi=1$ sinkend ist, indem

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=1}, \text{ d. i. } 4\omega^2(Q-P+2(1-Q)\xi-3\xi^2)_{\xi=1}$$
$$=-4\omega^2(P+Q+1)$$
$$=-4\quad(-\varphi_0'^2 cos^4\beta_0+\beta_0'^2+\varphi_0'^2 cos^2\beta_0-\omega^2 cos^2\beta_0+\omega^2)$$
$$=-4\quad(\omega^2 sin^2\beta_0\quad+\beta_0'^2+\varphi_0'^2 cos^2\beta\,.\,sin^2\beta_0),$$

also negativ ist. Demnach folgen die drei Wurzeln so:



Und daher ist das Mobil gezwungen, auf einer Zone zu bleiben, deren Mittellinie der Aequator ist.

13. Reduction auf die Normalform.

Das zu reducirende Integral ist nunmehr

$$t=\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{4\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)}}=\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{4\omega^2(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)(1-\xi)}},$$

wobei

$$\xi_2<\xi_1<\xi<\xi_3$$

und

$$4\omega^2 \text{ positiv.}$$

Ich benutze eine Substitution zweiten Grades, und zwar werde der positive echte Bruch $\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}=k^2$ gesetzt, und der gleichfalls positive echte

$$\frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}\cdot\frac{\xi-\xi_1}{\xi-\xi_2}=sin^2\sigma,$$

so dass

$$\xi=\frac{\xi_1(1-\xi_2)-\xi_2(1-\xi_1)\,sin^2\sigma}{(1-\xi_2)-\ (1-\xi_1)\,sin^2\sigma}$$

$$cos^2\sigma=\frac{\xi_1-\xi_2}{1-\xi_1}\cdot\frac{1-\xi}{\xi-\xi_2}.$$

Damit wird

$$t=\int_{\xi_0}^{\xi}uts=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{\omega^2(1-\xi_2)}\sqrt{1-k^2 sin^2\sigma}},$$

wobei die Werthe

ξ	ξ_1	1
0	0	$\frac{\pi}{2}$

zusammengehören. — Bei dieser Reduction war

$$\xi_{\frac{1}{2}} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4P}}{2}$$

oder nach Einsetzung der Werthe von P und Q

$$\xi_1 = \frac{-\beta'^2_0 - (\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 \pm \sqrt{\beta'^4_0 + 2\beta'^2_0(\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 + (\varphi'^2_0 + \omega^2)\cos^4\beta_0}}{2\omega^2}$$

$$\xi_2 = \frac{P}{\xi_1} = \frac{-\beta'^2_0 - (\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 \mp \sqrt{\beta'^4_0 + 2\beta'^2_0(\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 + (\varphi'^2_0 + \omega^2)\cos^4\beta_0}}{2\omega^2}$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist so zu wählen, dass der Werth ξ_1 positiv wird. Er muss dann von selbst zwischen 0 und 1 zu liegen kommen, während ξ_2 dann unter 0 fällt. (Dies wird sich demnächst bestätigen.)

IV. Die geographische Breite β.

14. Wahl der unteren Grenze. Ausdruck für $\cos\beta$.

Nach dem Vorigen wird

$$\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta\sigma},$$

und nun werde die bisher willkürlich gelassene untere Grenze β_0 so bestimmt, dass die untere Grenze $\sigma_0 = 0$ werde:

$$\sin^2\sigma_0 = 0 = \frac{1-\xi_2}{1-\xi_1} \cdot \frac{\xi_0 - \xi_1}{\xi_0 - \xi_2},$$

daraus folgt

$$\xi_0 = \xi_1, \quad \cos^2\beta_0 = \cos^2\beta_1;$$

d. h. der **Beginn der Bewegung** möge fortan in den **Punkt höchster geographischer Breite** verlegt sein. Dann wird

$$\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t = \int\limits_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}, \quad \sigma = am\,(\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t),$$

$$\xi = \cos^2\beta = \frac{\xi_1(1-\xi_2) - \xi_0(1-\xi_1)\sin^2 am\,(\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t)}{(1-\xi_2) - (1-\xi_2)\sin^2 am\,(\omega\sqrt{1-\xi_2}\, t)}.$$

Für $t=0$ ergiebt sich wieder $\xi_0 = \xi_1$, wie nöthig.

Unter der gemachten Annahme nun

$$\sigma_0 = 0,$$

also

$$\xi_0 = \xi_1 = Min\,\xi, \quad \beta_0 = \beta_1 = Max\,\beta,$$
$$\beta'_0 = 0$$

wird

$$\left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{-\beta'^2_0 - (\varphi'^2_0 - \omega^2)\cos^2\beta_0 \pm \sqrt{\qquad \cdots}}{2\omega^2}$$

$$= \frac{-(\varphi_0'^2 - \omega^2)\cos^2\beta_1 \pm (\varphi_0'^2 + \omega^2)\cos^2\beta_1}{2\omega^2},$$

$$\xi_1 = \quad \cos^2\beta_1, \text{ .... also } + \text{ und zwischen } 0 \text{ und } 1,$$

$$\xi_2 = -\left(\frac{\varphi_0'}{\omega}\right)^2 \cos^2\beta_1, \text{... also } -,$$

$$P = +\xi_1\xi_2 \qquad = -\left(\frac{\varphi_0'}{\omega}\right)^2 \cos^4\beta_1,$$

$$Q = -(\xi_1 + \xi_2) \qquad = +\frac{\varphi_0'^2 - \omega^2}{\omega^2}\cos^2\beta_1$$

in Uebereinstimmung mit Früherem. Und führe ich ferner einen Hilfswinkel (ohne geometrische Bedeutung) ein, schreibe nämlich für den Ausdruck

$$\frac{\varphi_0'^2 \cos^2\beta_1}{\omega^2},$$

welcher von 0 bis ∞ sich ändern kann, $tg^2\mu$, wo dann

$$\sin^2\mu = \frac{\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1},$$

$$\cos^2\mu = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1}$$

wird, so bekomme ich folgende Constantenumformung:

$$\xi_0 = \xi_1 \qquad = \cos^2\beta_1 \qquad = \cos^2\beta_1$$

$$\xi_2' \qquad = -\frac{\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}{\omega^2} \qquad = -tg^2\mu$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} \qquad = -\frac{\omega^2}{\varphi_0'^2} \qquad = -\frac{\cos^2\beta_1}{tg^2\mu}$$

$$\omega\sqrt{1-\xi_2} \quad = \sqrt{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1} = \frac{\omega}{\cos\mu}$$

$$k^2 = \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} = \frac{\omega^2\sin^2\beta_1}{\omega^2 + \varphi_0'^2\cos^2\beta_1} \quad = \sin^2\beta_1\cos^2\beta_2.$$

Dadurch wird

$$\xi = \cos^2\beta = \quad \xi_1 \quad . \frac{1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\sin^2 am\,\omega\sqrt{1-\xi_2}\,t}{1 + \quad \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\sin^2 am\,\omega\sqrt{1-\xi_2}\,t}$$

$$= \cos^2\beta_1 . \frac{1 - tg^2\beta_1\sin^2\mu\sin^2 am\left(\frac{\omega}{\cos\mu}t\right)}{1 + \sin^2\beta_1\cos^2\mu\sin^2 am\left(\frac{\omega}{\cos\mu}t\right)},$$

$$mod\,(k = \sin\beta_1\cos\mu).$$

15. Discussion. Wiederherleitung der beiden Grenzfälle.

Der Bruch, mit welchem multiplicirt der Anfangswerth $\cos^2\beta_1$ hier erscheint, kann, wie es erforderlich ist, n i e e c h t werden. Er wird

$= 1 = Min$ für $t = 0$, und dann ist $\beta = \beta_1$. Nach einer Zeit ferner, die $\frac{T}{2}$ heissen mag, ist der Amplitudensinus so gross geworden, als möglich:

$$sin^2 am\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\,\frac{T}{2}\right) = Max = 1;$$

und zugleich damit hat die rechte Seite ihren höchsten Werth

$$\frac{cos^2\beta_1\,(1 + tg^2\beta_1\,sin^2\mu)}{1 - sin^2\beta_1\,cos^2\mu}$$

erreicht. Dieser aber findet sich

$$= 1,$$

d. h.: das Mobil überschreitet den Aequator, $\frac{T}{2}$ ist eine halbe sogenannte Schwingungsdauer. Und da

$$am\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\,\frac{T}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

so wird

$$\frac{T}{2} \qquad = \frac{K\,cos\,\mu}{\omega} \quad (mod\,k \text{ d. i. } sin\,\beta_1\,cos\,\mu).$$

Ein zweites Minimum von $sin\,am$ und von $cos^2\beta$ und damit zugleich Maximum des Absolutwerthes von β wird erreicht für

$$am\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\,t\right) = \pi, \quad t = \frac{2K}{\omega} = T,$$

d. i. nach einer ganzen Schwingungsdauer. Ebenso ist nach einer weitern halben das Mobil zum Aequator zurückgekehrt u. s. f., so dass folgender Verlauf sich herausstellt:

t	$0 \;\ldots\; \frac{T}{2} \;\ldots\; T \;\ldots\; \frac{3}{2}T \;\ldots\; 2T \;\ldots$
u, d. i. $\frac{\omega}{cos\,\mu}\,t$	$0 \;\ldots\; K \;\ldots\; 2K \;\ldots\; 3K \;\ldots\; 4K \;\ldots$
$sin^2 am\,u$	$0 \;\ldots\; 1 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 1 \;\ldots\; 0 \;\ldots$
$cos^2\beta$	$cos^2\beta_1 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; cos^2\beta_1 \;\ldots\; 1 \;\ldots\; cos^2\beta_1 \;\ldots$
β	$+\beta_1 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; -\beta_1 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; +\beta_1 \;\ldots.$

Weiter ist ersichtlich, dass wegen

$$sin^2 am\,(K + \alpha) = sin^2 am\,(K - \alpha)$$

nach jeder halben Schwingungsdauer die Werthe von β in umgekehrter Folge sich wiederholen; und wegen

$$sin^2 am\,(2K + \alpha) = sin^2 am\,\alpha$$

nach einer ganzen in derselben Aufeinanderfolge wie zuvor (auf der andern Halbkugel); endlich, dass nach jedesmaliger doppelter Schwingungsdauer der gesammte Verlauf der Bewegung sich erneuert.

Der Gleichung für $\cos^2\beta$ lässt sich auch die Form geben

$$\sin^2\beta = \frac{1 - \sin^2\beta_1 \cos^2\mu \sin^2 am\, u - \cos^2\beta_1 - \sin^2\beta_1 \sin^2\mu \sin^2 am\, u}{1 - \sin^2\beta_1 \cos^2\mu \sin^2 am\, u},$$

dies aber

$$= \sin^2\beta_1 \cdot \frac{\cos^2 am\, u}{\Delta^2 am\, u},$$

$$\sin\beta = \pm \sin\beta_1 \cdot \frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u}$$

oder $\sin\beta_1 \cdot \sin co\, am\, u.$

Somit haben sich in den drei Hauptfällen folgende Gleichungen für die geographische Breite gefunden:

$0 = \frac{\varphi'_0}{\omega}$ ... (Hin- und Hergang auf Meridiane) ... $\sin\beta = \sin\beta_1 . \sin am\, \omega t$ $\quad mod(k = \sin\beta_1)$,

$0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty$ . . . . $\sin\beta = \sin\beta_1 . \sin coam \frac{\omega t}{\cos\mu}$ $\quad mod(k = \sin\beta_1 \cos\mu)$

$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty$ ... (Gang auf Hauptkreise) ... $\sin\beta = \sin\beta_1 . \cos(\varphi'_0 \cos\beta_1 t)$.

Es muss sich zeigen, dass von diesen Gleichungen die mittlere, welche ohne Beschränkung gewonnen ist, die Grenzfälle in sich mitbegreift. In der That wird

	für $\varphi'_0 = 0$:	für $\omega = 0$:
$\frac{\omega}{\cos\mu}$	ω	$\varphi'_0 \cos\beta_1$
k^2	$\sin^2\beta_1$	$0,\ K = \frac{\pi}{2},\ am\, u = u = \varphi'_0 \cos\beta_1$
$\frac{T}{2}$	$\frac{K}{\omega}$ (wie S. 13),	$\frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi'_0 \cos\beta_1}$ (wie S. 16).

Also für $\varphi'_0 = 0$

$$\sin\beta = \mp \sin\beta_1 \sin coam\, \omega t \text{ oder } \mp \sin\beta_1 \sin am(\omega t - K)$$

$$= \pm \sin\beta_1 \sin am\, \omega\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Dies aber erweist sich als mit dem früher Gefundenen übereinstimmend, wenn man beachtet, dass der Bewegungsbeginn hier in den Zeitpunkt grössten Ausschlages gelegt ist, dort aber in den Uebertritt über den Aequator. —

Andererseits wird für $\omega = 0$

$$\sin\beta = \pm \sin\beta_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'_0 \cos\beta_1\right)$$

in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

16. Reihenentwickelung. Ein Beispiel.

Der letztgefundene allgemeine Ausdruck für die Breite

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \,.\, \sin coam\left(\frac{\omega}{\cos\mu}\, t\right)\ mod\,(k = \sin\beta_1 \cos\mu)$$

ist zur Entwickelung geeignet. Er findet sich, wenn ich die Formeln Jacobi, *Fundamenta* S. 173, 1) und S. 180, 1) und 2) benutze

$$= \sin\beta_1 \,.\, \sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{H(u+K)}{\Theta(u+K)}$$

$$= \sin\beta_1 \,.\, \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + \ldots}{1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + \ldots},$$

wo, wie üblich,

$$x = \frac{\pi u}{2K}, \text{ also hier } = \frac{\frac{\pi}{2}}{K}\,\frac{\omega}{\cos\mu}\, t = \frac{\pi}{2}\,\frac{t}{\frac{T}{2}},$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Nehme ich, um ein Beispiel zu haben, für $\beta \ldots \frac{\pi}{6}$, und $\frac{\omega}{\varphi}$. $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, so wird

$$\cos^2\mu = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = \frac{2}{5},$$

$$k^2 = \frac{1}{10},\quad k = 0{,}316,\quad \sqrt{\frac{1}{k}} = 1{,}778;$$

ferner findet sich dann

$$q = 0{,}007,\quad q^4 = 0{,}000\ldots,$$
$$q^{1/4} = 0{,}289,\quad q^{9/4} = 0{,}000\ldots$$

und demnach

$$\sin\beta = \sin\beta_1 \,.\, 1{,}778 \,.\, \frac{2\,.\,0{,}289\cos\frac{\pi t}{T}}{1 + 2\,.\,0{,}007\cos 2\frac{\pi t}{T}}.$$

V. Die geographische Länge φ.

17. Reduction auf die Normalform dritter Gattung.

Es hatte als erstes Integral sich ergeben

$$r^2\varphi' = C_1^2,$$

also ist

$$d\varphi = \frac{C_1^2}{r^2}\, dt$$

$$= \frac{a^2 \sin^2\vartheta_0}{a^2 \sin^2\vartheta}\,\varphi'_0\, dt = \frac{\cos^2\beta_0}{\cos^2\beta}\,\varphi'_0\, dt = \frac{\xi_1}{\xi}\,\varphi'_0\, dt,$$

da $\xi_0 = \xi_1$ genommen war. Folglich wird

$$d\varphi = \xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{d\xi}{\xi \sqrt{4\,\omega^2(1-\xi)(P+Q\xi+\xi^2)}},$$

und diese Gleichung führt auf die dritte Gattung elliptischer Integrale.

Bei der Zurückführung des rechtsstehenden Differentials auf die Form

$$\xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

fällt n so aus, dass gleichzeitig mit $\xi = 0$ auch $1 + n\sin^2\sigma = 0$ wird. Daher ist zu setzen

$$n = -\left(\frac{1}{\sin^2\sigma}\right)_{\xi=0}$$

$$= -\left(\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\,\frac{\xi-\xi_2}{\xi-\xi_1}\right)_{\xi=0} = +\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}\cdot\frac{-\xi_2}{\xi_1} = +\,tg\,\beta_1 \sin^2\mu,$$

und es gehört in der Jacobi, *Fundam.* S. 170 oder Werke II, S. 192 aufgestellten Tafel

	0		$-k^2$		-1		$+\infty$		0
1.		n							
2.				n					
3.						n			
4.								n	

der gegenwärtige Fall unter Nr. 4 (gehört nach Legendre'scher Bezeichnung in das Gebiet der *Intégrales à paramètre circulaire*). In der That wird

$$\frac{1}{\xi} = \frac{(1-\xi_2) - (1-\xi_1)\sin^2\sigma + \frac{\xi_1}{\xi_2}(1-\xi_2) - \frac{\xi_1}{\xi_2}(1-\xi_2)}{\xi_1(1-\xi_2) - \xi_2(1-\xi_1)\sin^2\sigma}$$

$$= \frac{1}{\xi_2} - \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1\xi_2}\cdot\frac{1}{1+\frac{-\xi_2(1-\xi_1)}{\xi_1(1-\xi_2)}\sin^2\sigma}.$$

Hiernach wird

$$d\varphi = \xi_1 \cdot \varphi'_0 \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1\xi_2}\cdot\frac{1}{1+n\sin^2\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

oder auch

$$= +\frac{\cos\beta_1 \,.\, \cos^2\mu}{\sin\mu}\left(-1 + \frac{\cos^2\beta_1 + tg^2\mu}{\cos^2\beta_1}\,\frac{1}{1+n\sin^2\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}.$$

Nun ist in einem Falle wie der jetzige

n, welches hier den Werth $+\dfrac{-\xi_2}{\xi_1}\,\dfrac{1-\xi_1}{1-\xi_2}$, d. i. $+k^2\dfrac{-\xi_2}{\xi_1}$

oder auch $+\,tg^2\beta_1\sin^2\mu$, d. i. $+k^2\dfrac{tg^2\mu}{\cos^2\beta_1}$ hat,

$=$ $-\,k^2\sin^2 am\, ia$

zu setzen, so dass

$$-\sin^2 am\, i a = \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{-\xi_2}{\xi_1} \\ =+\dfrac{\varphi_0'^2}{\omega^2} \\ =+\dfrac{tg^2\mu}{\cos^2\beta_1} \end{array} \right\} = + tg^2 am(a k'),$$

also

$$\Delta^2 am\, ia = 1 + tg^2\beta_1 \sin^2\mu \qquad \Delta^2 am(a k') = \frac{\cos^2\beta_1 + \sin^2\beta_1 \sin^2\mu}{\cos^2\beta_1 + tg^2\mu}$$

$$= \frac{(\cos^2\beta_1 + tg^2\mu)\cos^2\mu}{\cos^2\beta_1} \qquad = \cos^2\mu$$

und

$$\frac{\sin am\, i a}{\cos am\, i a\; \Delta am\, i a} = i\frac{\sin am(a k')\; \cos am(a k')}{\Delta am(a k')}$$

$$= i\frac{\cos\beta_1\, tg\mu}{\cos\mu\sqrt{\cos^2\beta_1 + tg^2\mu}}$$

wird. — Indem man nun nach erfolgter Integration von 0 bis σ

für $\displaystyle\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$	u
und für $\displaystyle\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$	$u + \dfrac{tg\, am\, i a}{\Delta\, am\, i a}\,\Pi(u, ia, k)$

einsetzt, wo Π die alte Jacobi'sche Form (*Fundam.* S. 144) des Integrals dritter Gattung bezeichnet, erhält man

$$\varphi = +\frac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\cdot u - i\frac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\;\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_2}\;\frac{\sin am(a k')\cos am(a k')}{\Delta am(a k')}\;\Pi(u, ia, k)$$

oder auch

$$= +\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1}\cdot u - i\frac{\cos^2\mu(\cos^2\beta_1 + tg^2\mu)}{\sin\mu\cos\beta_1}\cdot\frac{\sin am(a k')\cos am(a k')}{\Delta am(a k')}\;\Pi(u, ia, k).$$

Hierin kann aber das erste Glied

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\cdot u \\ \text{oder} & \dfrac{\sin\mu}{\cos\beta_1}\cdot u \end{array}\right\} \text{auch } \varphi'_0 t$$

geschrieben werden; und ferner erweist sich, dass der im zweiten vorkommende Coefficient

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{\varphi'_0}{\omega\sqrt{1-\xi_2}}\cdot\dfrac{\xi_1-\xi_2}{\xi_2}\cdot\dfrac{\sin am(a k')\cos am(a k')}{\Delta am(a k')}\cdot \\ \text{oder } = -\dfrac{\varphi'_0}{\sqrt{\omega^2+\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}}\cdot\dfrac{\omega^2+\varphi_0'^2}{\varphi_0'^2}\cdot\dfrac{\varphi'_0}{(\omega^2+\varphi_0'^2)}\;\dfrac{\cdot\,\omega\sqrt{\omega^2+\varphi_0'^2\cos^2\beta_1}}{\omega} \\ \text{oder } = -\dfrac{\sin\mu}{\cos\beta_1}\cdot\dfrac{\cos^2\beta_1+tg^2\mu}{tg^2\mu}\cdot\dfrac{tg\mu\,.\,\cos\beta_1}{(\cos^2\beta_1+tg^2\mu)\cos\mu} \end{array}\right\} = -1$$

wird. Dadurch nimmt die Gleichung für die geographische Länge folgende Gestalt an:

$$\varphi = \varphi'_0 t + i\Pi(u, ia, k).$$

18. Theilung des Ausdrucks für φ.

Das Glied $i\Pi$ muss aus mechanischen Gründen reell sein, und ist es auch, da das Differential

$$\frac{n\sin^2\sigma}{1+n\sin^2\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{tg^2\beta_1\sin^2\mu\sin^2\sigma}{1+tg^2\beta_1\sin^2\mu\sin^2\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

reell ist. Es gilt, dies auch in der Form des Ausdrucks erkennbar zu machen. Indess schon ehe das geschehen ist, lässt die nächstfolgende Umformung Schlüsse auf die Art der Bewegung zu.

Mit Hilfe der Formeln *Fundam.* S. 146, 3) oder Werke II, 186, 1) bekomme ich weiter

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi'_0 t + i\Pi(u, ia, k), \\ &= \frac{\sin\mu}{\cos\beta_1}u + i\Pi(u, ia, k) \\ &= \frac{\sin\mu}{\cos\beta_1}u + iu\frac{\Theta'(ia)}{\Theta(ia)} + \frac{i}{2}lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)},\end{aligned}$$

worin $\Theta'(ia) = \left[\frac{d\Theta(u)}{du}\right]_{u=ia}$ gesetzt ist. Dies nun ist nach der Formel *Fundam.* S. 162, 4) ferner

$$= u\left(\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1} - tg\,am(ak')\,\Delta am(ak') + \frac{\pi a}{2KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + \frac{i}{2}lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}.$$

Da aber

$$\frac{\sin\mu}{\cos\beta_1} - tg\,am(ak')\,\Delta am(ak') = 0$$

sich findet, so wird

$$\begin{aligned}\varphi &= u\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + \frac{i}{2}lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} \\ &= t\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + \frac{i}{2}lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}.\end{aligned}$$

Somit zeigt sich auch hier diejenige Spaltung in zweierlei Bewegungen, die überall da auftritt, wo das mechanische Problem auf elliptische Integrale dritter Gattung zurückkommt (Jacobi, *Sur la rotation d'un corps*, Werke II, S. 185 und S. 195 ob.). Das Wachsthum der geographischen Länge φ kann zerlegt werden in eines proportional mit der Zeit und ein periodisches, demnach die Bewegung in eine fortschreitende und eine oscillirende. Oder

denkt man sich eine Meridianebene rotirend mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit um die Axe der Kugel, so wird die geographische Länge des Mobils dieser Ebene bald voraus eilen, bald hinter ihr zurückbleiben, in periodischem Verlaufe.

Ich führe hier wiederum den bei Bestimmung der Breite β aufgetretenen Zeitabschnitt

$$t=\frac{T}{2}$$

ein, für welchen allgemein

$$u=\frac{\omega}{\cos\mu}\frac{T}{2}=K \quad mod\,(k=\sin\beta_1\cos\mu).$$

Für diesen wird, da

$$\Theta\,(K-ia)=\Theta\,(K+ia)$$

ist, der Logarithmus null, das periodische Glied verschwindet (oder: das Mobil tritt in die rotirende Ebene hinein) und das übrigbleibende der Zeit proportionale Glied wird

$$\varphi=\frac{\Phi}{2}=\frac{T}{2}\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi a}{2KK'}+\frac{\Theta'(ak')}{\Theta\,(ak')}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{a}{K'}+K\frac{\Theta'(ak')}{\Theta\,(ak')}.$$

Dies ist der Werth des Längenzuwachses in einer halben Schwingungsdauer, welchen ich die halbe Längen-Periode nennen will. Mit Benutzung desselben lässt sich die allgemeine Formel für φ auch schreiben:

$$\varphi=\frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}}+\frac{i}{2}\lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}.$$

19. Die halbe Längen-Periode.

Weiteren Aufschluss über die Art der sphärischen Curve, die das Mobil beschreibt, giebt die Untersuchung der Werthe, deren

$$\frac{\Phi}{2}\text{, d. i. }\frac{\pi}{2}\frac{a}{K'}+K\frac{\Theta'(ak')}{\Theta\,(ak')}\,,$$

fähig ist. In dem ersten Grenzfalle $\varphi'_0=0$ wird

$$tg^2 am\,(ak'),\ \text{d. i. } \frac{\varphi'_0}{\omega}=0,\quad am\,(ak')=0,\quad a=0$$

$$k=\sin\beta_1,$$

und es ergiebt für die Längen-Periode sich dann der Werth 0. Dies zeigt der ursprüngliche Ausdruck

$$\frac{\Phi}{2}=\varphi'_0\frac{T}{2}+iu\frac{\Theta'(ia)}{\Theta\,(ia)}$$

$$=\varphi'_0\frac{T}{2}+u\frac{d\lg\Theta\,(ia)}{da},$$

welcher nach der Formel Jacobi, W. II, S. 191 u.

$$=\varphi'_0\frac{T}{2}-\frac{\pi u}{K}\left(\frac{q^{1-b}}{1-q^{1-b}}-\frac{q^{1+b}}{1-q^{1+b}}+\frac{q^{3-b}}{1-q^{3-b}}-\dots\right)$$

ist, worin

$$b=\frac{a}{K'}=0\,.-$$

Oder es folgt auch daraus, dass nach früherer Jacobi'scher Bezeichnung (Fund. S. 145)

$$\frac{d \log \Theta(v)}{dv} = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = Z(v),$$

und nach der Definition von Z mittels der ersten und zweiten Gattung S. 133, 1) oder 2)

$$K Z(0) \quad = [F' E(\varphi) - E' F(\varphi)] = 0.$$

Dass demnach in dem vorliegenden Falle

$$\frac{\Phi}{2} = 0$$

wird, enthält nur die Bestätigung dafür, dass bei einer Anfangsgeschwindigkeit rein in der Meridianebene ein Längenfortschritt nicht stattfindet, sondern das Mobil auf einem Meridiane bleibt. —

Im andern Grenzfalle $\omega = 0$ wird

$$k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2}$$

$$tg^2 am(ak') = \varphi, \quad am(ak') = \frac{\pi}{2}, \quad a = K' \operatorname{mod} k'$$

$$Z(ak') = Z(K'k') = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} = \frac{\pi}{2},$$

folglich

$$\frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K Z(ak')$$

$$= \frac{\pi}{2},$$

wie auf S. 158.

Hervorzuheben ist nun für den allgemeinen Fall der Satz, dass die halbe Längen-Periode nie einen Quadranten überschreiten kann.

Denn zwischen den beiden Grenzen

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = 0 \ \ldots \ \frac{\Phi}{2} = 0$$

$$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty \ \ldots \ \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

kann keiner der in $\frac{\Phi}{2}$ vorkommenden Werthe null oder unendlich werden, weder a und K, K', noch $Z(ak')$. Das Wachsthum von $\frac{\Phi}{2}$ findet vielmehr von einer Grenze zur andern in stetiger Weise statt. Somit ist

$$v.\ abs. \frac{\Phi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{2} \frac{a}{K'} + K Z(ak') \leqq 0.$$

Diesen Fortschritt der Länge stellt der auf Tafel III, Fig. 3 befindliche Grund- und Aufriss dar.

20. Beseitigung des scheinbar Imaginären. Werth des Oscillations-Winkels.

Indem man für das Folgende den von Jacobi angegebenen Weg einschlägt, erreicht man einen dreifachen Vortheil, nämlich aus dem Ausdrucke

$$\varphi = t\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'}+\frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right)+\frac{i}{2}\,lg\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$
$$= \frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}} \qquad\qquad + \frac{i}{2}\,lg\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$

erstens das noch in ihm enthaltene scheinbar Imaginäre fortzuschaffen; sodann nur algebraische Functionen von Θ-Reihen zu bekommen und endlich nicht für den Winkel selbst, sondern für den häufiger gebrauchten Sinus und Cosinus desselben Ausdrücke zu erhalten.

Vor Allem ist statt der ganzen Länge φ der Oscillations-Winkel φ' einzuführen, d. i. derjenige Winkel, in welchem die Länge φ in jedem Augenblicke in positivem oder negativem Sinne abweicht von der mittleren (der Zeit proportionalen) $\frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}}$, so dass

$$\varphi' = \varphi - \frac{\Phi}{2}\frac{t}{\frac{T}{2}}.$$

Dieser Oscillationswinkel nun

$$= \frac{i}{2}\,lg\,\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} = \frac{1}{2i}\,lg\,\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}.$$

Jetzt sind beide Seiten der Gleichung, imaginär genommen, als Exponenten von e einzusetzen; man erhält

$$e^{i\varphi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}} = \frac{\Theta(u+ia)}{\sqrt{P}}, \quad \text{wo } P = \Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia),$$

und daraus

$$\cos\varphi' = \frac{e^{i\varphi'}+e^{-i\varphi'}}{2} = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{P}},$$

$$\sin\varphi' = \frac{e^{i\varphi'}-e^{-i\varphi'}}{2i} = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{P}},$$

und wenn man, um das Irrationale zu entfernen, dividirt, so findet sich

$$tg\,\varphi' = \frac{\frac{1}{2}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{\frac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}.$$

Dieser Reihenquotient aber ist nahezu einem geschlossenen Ausdrucke gleich zu achten, wenn man bedenkt, dass die in den Reihen

$$\tfrac{1}{2}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)] = \qquad q^{2b}(1-q^{2b})\sin 2x - q^{4-2b}(1-q^{2b})\sin 4x \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)] = 1 - q^{2b}(1+q^{2b})\cos 2x + q^{4-2b}(1+q^{2b})\cos 4x \ldots$$
$$\left(b = \frac{a}{K'}\right)$$

auftretende Grösse q in der Mehrzahl der Fälle ausserordentlich klein ist.

Zu demselben Ergebniss wie das ebengenannte kann man hier auch auf dem nicht wesentlich verschiedenen Wege gelangen, dass man in

$$\varphi' = \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$

unter dem lg das Imaginäre vom Reellen in Zähler und Nenner scheidet, nämlich

$$\Theta(u-ia) = M - iN \text{ und folglich}$$
$$\Theta(u+ia) = M + iN$$

setzt. Dann wird

$$\varphi' = \frac{i}{2} \lg \frac{M-iN}{M+iN}$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{N}{M},$$

wobei unter $arctg$ der kleinste positive Bogen verstanden ist. Hierin aber bekommen N und M die Werthe

$$N = \frac{1}{i}\left(+2q \sin\frac{\pi u}{K} \sin i\frac{\pi a}{K} - 2q^4 \sin\frac{2\pi u}{K} \sin i\frac{2\pi a}{K} \pm \ldots\right)$$
$$M = 1 \quad -2q \cos\frac{\pi u}{K} \cos i\frac{\pi a}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} \cos i\frac{2\pi a}{K} \pm \ldots,$$

welche mit Hilfe von

$$\frac{1}{i}\sin i\alpha = \frac{e^{+\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$
$$\cos i\alpha = \frac{e^{+\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

und

$$\frac{\pi u}{2K} = x, \quad e^{\frac{\pi a}{K}} = q^b$$

genau in die oben angezogenen Reihen übergehen.

Auf den gefundenen Werth von φ' leidet ferner der von Jacobi, W. II, 188, 189 geführte Beweis Anwendung; diesem zufolge kann

auch der Oscillations-Winkel φ' nie $\frac{\pi}{2}$ übersteigen $\Big($so wenig wie bei dem vorliegenden Probleme die halbe Längen-Periode $\frac{\Phi}{2}\Big)$. Denn in der Reihe, auf welche der Werth von φ' sich auch bringen lässt:

$$\varphi' = \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{q^{1-b} \sin 2x}{1 - q^{1-b} \cos 2x} + \operatorname{arctg} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1 - q^{3-b} \cos 2x} + \ldots$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{q^{1+b} \sin 2x}{1 - q^{1+b} \cos 2x} - \operatorname{arctg} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1 - q^{3+b} \cos 2x} - \ldots$$

erreicht jeder einzelne $arctg$ sein Maximum für

$$\cos 2x = q^u,$$

wo n irgend einen der vorkommenden Exponenten bedeutet, und dieses Maximum selbst ist

$$arcsin\, q^u < \frac{\pi}{2},$$

woraus

$$\frac{i}{2}\, lg\, \frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)} < arcsin\, q^{1-b} < \frac{\pi}{2}$$

hergeleitet wird.

VI. Die Geschwindigkeit.

21. Geschwindigkeit in der Meridianebene, und längs der Bahncurve.

Durch Differentiation von

$$sin\,\beta = sin\,\beta_1\, sin\, coam\left(\frac{\omega}{cos\,\mu}\, t\right)$$

und Einsetzung des Werthes für $cos\,\beta$ ergiebt sich

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{k'^2\omega\, tg\,\beta_1}{cos\,\mu} \cdot \frac{sin\, am\, u}{\Delta am\, u\sqrt{1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u}} \quad (k = sin\,\beta_1\, cos\,\mu)$$

$$= -\frac{k'^2\omega\, tg\,\beta_1}{cos\,\mu} \cdot \frac{cos\, coam\, u}{\sqrt{1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u}}.$$

Dieser Werth wird für die Werthe des Argumentes

$$0 \;\ldots \frac{\omega}{cos\,\mu}.T \quad \frac{\omega}{cos\,\mu}.2T \ldots$$

oder für

$$\beta = \beta_1 \ldots -\beta_1 \;\ldots +\beta_1 \quad \ldots$$

zu Null, und β geht an jeder dieser Stellen vom Sinken ins Steigen und umgekehrt über.

Da nun ferner, wenn s die Länge des zurückgelegten Weges auf der Bahncurve bedeutet,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{a^2(d\beta^2+cos^2\beta\, d\varphi^2)}{dt^2},$$

und nach S. 166

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{cos^2\beta_0}{cos^2\beta}\,\varphi'_0, \text{ also}$$

$$cos^2\beta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{cos^4\beta_1}{cos^2\beta}\cdot\varphi'^2_0,$$

so wird

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{k'^4\omega^2 tg^2\beta_1}{cos^2\mu}\cdot\frac{sin^2 am\, u}{\Delta^2 am\, u\,(1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u)}$$

$$+\varphi'^2_0\, cos^4\beta_1\cdot\frac{\Delta^2 am\, u}{cos^2\beta_1\,(1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u)}$$

$$= \frac{\omega^2}{cos^2\mu}\cdot\frac{k'^4 tg^2\beta_1\, sin^2 am\, u + sin^2\mu\,\Delta^4 am\, u}{\Delta^2 am\, u\,(1+tg^2\beta_1\, sin^2\mu\, sin^2 am\, u)}$$

Dieser Bruch kann, so lange ω nicht verschwindet, wie auch die Anfangsgeschwindigkeit sei,

$$\text{nie} = 0$$

werden, das Mobil also nicht ruhen. Es sei selbst

$$\varphi'_0 = 0,$$

oder, da überdies die Annahme $\beta'_0 = 0$ durchweg gemacht worden ist, das Mobil sei anfänglich in Ruhe. Auch in diesem Falle, wo $k'^2 = \cos^2\beta_1$, $\mu = 0$ ist, und die rechte Seite in

$$\omega^2 \frac{\sin^2\beta_1 \cos^2\beta_1 \sin^2 am\,\omega t}{\varDelta^2 am\,\omega t}$$

übergeht, ist ein Verschwinden derselben nur in zwei Fällen möglich: 1. wenn $\beta_1 = 0$, 2. wenn $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$; das bedeutet: auch aus der Formel zeigt sich (vergl. S. 11.), dass ein Ruhen des Mobils ausserhalb des Poles und des Aequators unmöglich ist.

Für

$$\omega = 0$$

wird in der allgemeinen Formel für $\frac{1}{a^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

$$k^2 = 0, \quad \frac{\omega^2}{\cos^2\mu} = 0$$

und

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varphi'^2_0 \cos^2\beta_1 \frac{tg^2\beta_1 \sin^2 u + 1}{1 + tg^2\beta_1 \sin^2 u} = Const. = \varphi'^2_0 \cos^2\beta_1.$$

VII. Abhängigkeit der Coordinaten von einander.

22. φ ausgedrückt durch β. Rückkehr zu einem durchlaufenen Punkte.

Will man das gefundene analytisch-mechanische Resultat sich durch eine Functionscurve geometrisch verdeutlichen, so ist die Abhängigkeit der sphärischen Coordinaten von einander darzulegen, nämlich nach Elimination der Zeit. Dies kann geschehen, indem in der Formel für φ.

$$\varphi = t\frac{\omega}{\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right) + arctg\frac{N}{M}$$

ıch S. 162 das elliptische Integral erster Gattung

$$u = t\frac{\omega}{\cos\mu} = F(\sigma)$$

ıbstituirt wird (dessen numerische Werthe in Tafeln gebracht sind — ›gendre, *Traité des ff. ell.* Bd. II, Taf. IX). Denn dadurch findet sich

$$\varphi = F(\sigma)\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{a}{KK'} + \frac{\Theta'(ak')}{\Theta(ak')}\right)$$

$$+ \, arctg \frac{q^{1-b}(1-q^{2b})\sin\left(\pi\,\frac{F(\sigma)}{K}\right) - \ldots}{1 - q^{1-b}(1+q^{2b})\cos\left(\pi\,\frac{F(\sigma)}{K}\right) + \ldots},$$

worin

$$\sin^2\sigma = \frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}\cdot\frac{\xi-\xi_1}{\xi-\xi_2}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\beta_1\cos^2\mu} + \frac{\cos^2\beta - \cos^2\beta_1}{\cos^2\beta + tg^2\mu}.$$

Dann hängt die Länge φ nur noch von der Breite β und den Constanten k, q, a, β_1, μ ab, die sich auf die zwei

$$\beta_1 \text{ und } \mu$$

oder ebenso auf die zwei Constanten

$$\beta_1 \text{ und } \frac{\varphi'_0}{\omega}$$

zurückbringen lassen. —

Die Curve mit den Ordinaten β, wenn die Längen φ die Abscissen sind, theilt in Bezug auf die Periodicität die wesentlichen Eigenschaften der wirklichen Bahncurve.

Diese Bahn des Mobils, eine Curve doppelter Krümmung, wird eine wellenartige Linie, durch den Aequator in congruente Stücke zertheilt, ferner symmetrisch zu aufeinanderfolgenden Meridianen, welche je um eine halbe Längenperiode $\frac{\Phi}{2}$, die einen Quadranten nicht überschreitet, von einander entfernt sind. —

Wenn die Halbperiode $\frac{\Phi}{2}$ zu π ein rationales Verhältniss hat, so wird, nachdem das Mobil eine bestimmte endliche Anzahl Male die Kugel umwandert hat, es genau wieder die früheren Punkte durchlaufen. Wenn aber nicht, so trifft das Mobil in demselben Punkte, in dem es einmal gewesen, erst nach unendlich langer Zeit wieder ein.

Zur Uebersicht der Längenperioden im Vergleich zur Breite dient die angehängte Mercator-Projection der Bahnen (Fig. 4). In ihr ist

bei Curve Nr. 1	$\sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,	$0 = \frac{\varphi'_0}{\omega}$,
„ „ „ 2 und 3	$\sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,	$0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty$,
„ „ „ 4	$\sin\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,	$\frac{\varphi'_0}{\omega} = \infty$,
„ „ „ 5	$\sin\beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,	$0 < \frac{\varphi'_0}{\omega} < \infty$.

Zu Fig. 1.

Gang auf Meridian.

Curve der Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Winkel (der geogr. Breite).

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta'_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega\,\omega}{\beta'_0 \beta'_0} \sin^2\beta}, \qquad \beta'_0 = Const = 1.$$

$\omega > \beta'_0$, Oscillation. Z. B. $\omega = \beta'_0 . \sqrt{2}$

$\omega = \beta'_0$.

$\omega < \beta'_0$, Umlauf. Z. B. $\omega = \beta'_0 . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Zu Fig. 2.

Gang auf Meridian.

Curve der Abhängigkeit der geograph. Breite von der Zeit.

$\beta'_0 = Const = 1.$

$\frac{\omega}{\beta'_0} = 0$, Umlauf. $\beta = \beta'_0 t$. $\qquad \frac{T}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta'_0} = 1{,}571.$

$\omega < \beta'_0$, Umlauf. $\beta = am\, \beta'_0 t$

$$mod \left(\lambda = \frac{\omega}{\beta'_0}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2 \varDelta} \beta'_0 t + \dots$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{T}{2}} . t + \dots$$

z. B. $\omega = \beta'_0 \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $\frac{T}{2} = \frac{\varDelta}{\beta'_0} = 1{,}854.$

$\omega = \beta'_0$ . . . . $\frac{T}{2} = \infty$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$.

$\omega > \beta'_0$, Oscillation. $\sin^2\beta = \sin^2\beta_1 \sin^2 am\, \omega t$

$$mod \left(k = \sin\beta_1 = \frac{\beta'_0}{\omega}\right),$$

z. B. $\omega = \beta'_0 \sqrt{2}$,

$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $\frac{T}{2} = \frac{K}{\omega} = 1{,}311,$

$\beta_1 = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{\omega}{\beta'_0} = \infty$, Oscillation. $\beta = 0$ (Stillstand).

IX.

Ueber aufsteigende Kettenbrüche.

Von

Dr. S. Günther,

Privatdocent am Polytechnikum in München.

§ 1. Während die sogenannten absteigenden Kettenbrüche schon seit geraumer Zeit eifrig untersucht worden sind, hat man ihrem Analogon, den aufsteigenden Kettenbrüchen, verhältnissmässig nur sehr wenig Theilnahme geschenkt, obschon dieselben eines höheren Alters sich erfreuen, als erstere[1]. Auch nachdem in neuerer Zeit diese Gebilde wieder etwas mehr in den Vordergrund getreten waren, scheint man ihnen vom theoretischen Standpunkte aus ein geringeres Interesse zugewandt zu haben, als den gewöhnlichen Kettenbrüchen, und nach Herleitung einiger weniger einfacher Grundeigenschaften ging man sofort dazu über, ihre praktische Verwendbarkeit ins Auge zu fassen.

Es hatte zwar schon Lagrange[2] die Theorie dieser Formen wesentlich dadurch gefördert, dass er den einfachen Zusammenhang zwischen auf- und absteigenden Kettenbrüchen aufdeckte; indess scheint diese Arbeit des grossen Mathematikers nicht so bekannt geworden zu sein, wie sie es verdiente, wie denn auch die verdienstliche Schrift von Kunze[3] dieses interessante Factum nicht enthält. Später hat wohl zuerst Schlömilch[4] auf die erwähnte Relation hingewiesen. Eine kürzlich erschienene Abhandlung[5] stellt sich allerdings die Aufgabe, die aufsteigenden Kettenbrüche mit anderen selbstständigen analytischen Formen in Beziehung zu setzen, stets jedoch mit Rücksicht auf die Auflösung numerischer Gleichungen u. dergl.

Die vorliegende Arbeit im Gegentheil verfolgt den Zweck, die Theorie an sich zu erörtern und, wenn möglich, in einigen Punkten zu erweitern. Vor Allem soll dabei die Darstellung der aufsteigenden Kettenbrüche durch Determinanten in umfassender Weise zur Geltung kommen.

1) *Günther, Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino ad Euler, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo VII, S. 219.*

2) *Lagrange, Essai de l'analyse numérique, sur la transformation des fonctions, Journal de l'école polytechnique, Cahier V.* S. 93 flgg.
3) Kunze, Die aufsteigenden Kettenbrüche, Weimar 1857.
4) Schlömilch, Recension hierzu, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 3. Bd., Literaturzeitg. S. 63.
5) *Lembkes, Theoria fractionum continuarum ascendentium, Monasterii 1870.*

§ 2. Die independente Darstellung der Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\frac{b_1 + \frac{b_2 + \cdots + \frac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

ist bereits an anderer Stelle gegeben worden[6]; da jedoch daselbst der Inductionsschluss angewandt wurde, so wird es sich hier empfehlen, diese Transformation auf einem mehr organischen Wege durchzuführen.

Bezeichnen wir mit

$$\frac{p_n}{q_n}$$

den n^{ten} Näherungswerth des genannten Kettenbruches, so können wir das recurrirende Bildungsgesetz dieser Werthe durch die Gleichung

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n}{a_n q_{n-1}}$$

ausdrücken. Der Nenner q_n ist also sofort bekannt, gleich

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n;$$

dagegen besteht für den Zähler ganz ebenso ein System binomischer recurrirender Gleichungen, wie für die absteigenden Kettenbrüche bekanntlich ein trinomisches existirt. Man hat so

$$\begin{aligned}
p_n - a_n p_{n-1} &= b_n, \\
p_{n-1} - a_{n-1} p_{n-2} &= b_{n-1}, \\
\cdots\cdots & \\
p_3 - a_3 p_2 &= b_3, \\
p_2 - a_2 p_1 &= b_2, \\
p_1 &= b_1.
\end{aligned}$$

Hieraus findet sich

$$p_n = \frac{\begin{vmatrix} b_n & -a_n & 0 & \ldots 0 & 0 \\ b_{n-1} & 1 & -a_{n-1} & \ldots 0 & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_2 & 0 & 0 & \ldots 1 & -a_2 \\ b_1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a_n & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Die Determinante des Nenners reducirt sich auf ihr Diagonalglied 1; um die des Zählers auf die obenerwähnte Form zu bringen, machen wir die erste Colonne zur letzten; hierdurch tritt vor die Determinante der Factor

$$(-1)^{n-1}.$$

Multiplicirt man dann die $(n-1)$ Colonnen, welche kein b enthalten, durch (-1), so erhält die Determinante den Factor

$$(-1)^{n-1-n+1} = (-1)^0 = +1,$$

und man bekommt

$$p_n = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \\ -1 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & -1 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-2} & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -1 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

6) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1872, S. 42.

§ 3. Die Lagrange'sche Transformation ist in der letztgenannten Schrift ebenfalls behandelt worden; während jedoch der eine Beweis sich auf den Schluss von n auf $(n+1)$ stützt und also keinen Einblick in das Wesen der Sache gewährt, wurde der andere nur angedeutet. Es soll nun gezeigt werden, wie einfach sich diese Beziehung durch Anwendung des Determinantencalculs gestaltet.

Multiplicirt man in der für p_n zuletzt erhaltenen Determinante jede r^{te} Zeile $(r \overline{\overline{<}}\, n > 2)$ mit b_{r-1} und zieht von ihr alsdann die mit b_r multiplicirte $(r-1)^{\text{te}}$ Zeile ab, so ändert man die Determinante hierdurch nur insoweit, dass vor dieselbe der Factor

$$\varrho = (b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1})^{-1}$$

tritt. Es wird demnach

$$p_n = \varrho \cdot \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_1 + b_2 & -b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} b_{n-3} + b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} b_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} b_n & a_n b_{n-1} + b_n \end{vmatrix}.$$

Transformirt man in analoger Weise den Nenner

$$q_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

so folgt

$$q_n = \varrho . \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 b_2 & a_2 b_1 + b_2 & -b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 b_3 & a_3 b_2 + b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} b_{n-3} + b_{n-2} & -b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} b_{n-1} & a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} b_n & a_n b_{n-1} + b_n \end{vmatrix}.$$

Der Factor ϱ hebt sich bei der Division fort und man erkennt q_n und p_n als zusammengehörige Kettenbruchdeterminanten. Die letztere Eigenschaft liegt unmittelbar am Tage und es ist auch

$$p_n = b_1 \frac{\partial q_n}{\partial a_1}.$$

Es geht hieraus nach einem allgemeineren Lehrsatze[7] hervor, dass der Quotient beider Determinanten sofort als Kettenbruch geschrieben werden kann, und man erhält

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1}{a_1 - \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1 + b_2 - \frac{a_2 b_1 b_3}{a_3 b_2 + b_3 - \frac{a_3 b_2 b_4}{a_4 b_3 + b_4 - \dots - \frac{a_{n-2} b_{n-3} b_{n-1}}{a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} - \frac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1} + b_n}}}}}}$$

in der geforderten Weise.

7) Günther, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, Archiv d. Math. u. Phys. 55. Theil, S. 397.

§ 4. Eine einfache Anwendung können wir von dem Bisherigen machen, um die bekannte Formel abzuleiten, vermittelst deren Euler[8] eine Reihe in einen Kettenbruch zu verwandeln gelehrt hat. Hat man die alternirende Reihe

$$S = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + - \dots + (-1)^n b_n,$$

so ist dieselbe gleich der Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 1 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_{n-2} & 0 & 0 & . & . & 1 & 1 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & & . & 0 & 1 & 1 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wie sich sofort zeigt, wenn man von jeder Zeile die unter ihr stehende abzieht, von der untersten angefangen; denn alsdann reducirt sich die Determinante auf ihr Diagonalglied

$$[b_0 - b_1 + - \dots + (-1)^n b_n] . 1^n.$$

Um die Normalform zu erhalten, muss noch jede Colonne, die kein b enthält, mit (-1) multiplicirt werden; alsdann erkennt man, dass die obige Reihe dem aufsteigenden Kettenbruche

$$(-1)^{-n}.\frac{b_0}{1}+\frac{b_1}{-1}+\ldots+\frac{b_n}{-1}$$

gleich ist. Wird auf diesen Kettenbruch die in § 3 gefundene Transformationsformel angewandt, so ergiebt sich

$$S=\frac{(-1)^{-n}b_0}{1}+\frac{b_1}{b_1-b_0}+\frac{b_0b_2}{b_2-b_1}+\ldots+\frac{b_{n-3}b_{n-1}}{b_{n-1}-b_{n-2}}+\frac{b_{n-2}b_n}{b_n-b_{n-1}}.$$

Auch einige ähnliche Formeln von etwas allgemeinerer Natur, wie sie z. B. Nachreiner[9] ebenfalls durch eine Determinantenbetrachtung erhalten hat, haben ihre eigentliche Quelle in dem Theorem von Lagrange.

Eine ganz ähnliche Umformung hat auch G. Bauer[10] angewandt, um den Kettenbruch

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{1}{b_1}+\frac{1+b_1}{b_2}+\ldots+\frac{1+b_{n-1}}{b_n}$$

als Quotienten zweier Aggregate darzustellen. Schreibt man nämlich denselben in gewohnter Weise als Quotienten zweier Kettenbruchdeterminanten vom bezüglich $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Grade und addirt zu jeder Horizontalreihe alle darauf folgenden, so wird

$$Q_n=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_n+1 \\ -(b_1+1) & -1 & 0 \ldots & 0 & b_n+1 \\ 0 & -(b_2+1) & -1 \ldots & 0 & b_n+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & b_n+1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -(b_{n-1}+1) & b_n \end{vmatrix}$$

und entsprechend P_n. Um auf die Normalform zu bringen, mache man die letzte Verticalreihe zur ersten; dividirt man dann noch mit

$$[-(b_1+1)][-(b_2+1)]\ldots[-(b_{n-1}+1)],$$

so wird, da sich die Vorzeichen gegenseitig ausgleichen,

$$Q_n=(b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_{n-1}+1)\frac{b_n+1}{1}-\frac{b_n+1}{b_1+1}-\ldots-\frac{b_n}{b_{n-1}+1}.$$

Führt man diesen Kettenbruch in das gleichgeltende Aggregat über, so wird

$$Q_n=(b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_{n-1}+1)(b_n+1)\left(1-\frac{1}{b_1+1}+\frac{1}{(b_1+1)(b_2+1)}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_n+1)}\right),$$

und ein ähnlicher Werth existirt für P_n.

8) Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michelsen, 1. Bd., Berlin 1788, S. 395.
9) Nachreiner, Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1872, S. 16.
10) Bauer, Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis, München 1872, S. 10.

§ 5. In die Kategorie der hier discutirten Objecte gehört auch die Anwendung, welche ein von Lucas[11] aufgestellter Satz zu machen verstattet: Sind

$$a_1, a_2 \ldots a_m \ldots a_n$$

willkürliche Grössen mit der Summe S, und wird

$$A_m = S - a_m$$

gesetzt, so hat die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} -A_1+x & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_n \\ a_1 & -A_2+x & \ldots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \ldots & -A_{m-1}+x & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & -A_m+x & a_{m+1} & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m & -A_{m+1}+x & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \ldots & -A_n+x \end{vmatrix}$$

den Werth

$$x(x-S)^{n-1}.$$

Um dies zu erkennen, braucht man nur nach einem bekannten Satze[12] die Determinante in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln, denn dann findet man

$$\Delta = x^n - \binom{n-1}{1}(a_1 + \ldots + a_n)\,x^{n-1} + \binom{n-1}{2}(a_1 + \ldots + a_n)^2\,x^{n-2}$$
$$- + \ldots + \binom{n-1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_n)^{n-1}\,x,$$

indem das von x freie Glied

$$\begin{vmatrix} -A_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & -A_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \ldots & -A_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & -A_n \end{vmatrix}$$

ersichtlich identisch verschwindet; es ist also in der That

$$\Delta = x\,[x-(a_1 + \ldots + a_n)]^{n-1}.$$

Zwei andere Beweise können an anderer Stelle[13] nachgesehen werden*.

---

* In der genannten Arbeit ist das Versehen begangen worden, dass

$$\binom{n}{q} \text{ statt } \binom{n-1}{q}$$

durchgehends geschrieben wurde, was hiermit berichtigt werden möge.

Die Determinante $\varDelta$ möge nun aber auch in der Weise transformirt werden, dass von jeder Zeile, die letzte natürlich ausgenommen, die zunächst unter ihr stehende abgezogen wird. Dann ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x-(A_1+a_1) & A_2+a_2-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-(A_2+a_2) & A_3+a_3-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-(A_3+a_3) & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-(A_{n-1}+a_{n-1}) & A_n+a_n-x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x-a_n \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber der Definition gemäss

$$A_r + a_r = S;$$

dividirt man also mit $(x-S)$ die ersten $(n-1)$ Horizontalreihen, so erhält man

$$\varDelta = (x-S)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x-A_n \end{vmatrix}.$$

Machen wir jetzt alle Colonnen zu Zeilen und substituiren für $\varDelta$ den oben gefundenen Werth, so wird

$$x = \begin{vmatrix} x-A_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x-A_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{1} + \dots + \frac{a_1}{1}.$$

Durch Verwandlung in einen absteigenden Kettenbruch wird

$$x = \frac{x-A_n}{1} - \cfrac{a_{n-1}}{x-A_n+a_{n-1} - \cfrac{a_{n-2}(x-A_n)}{a_{n-1}+a_{n-2} - \dots - \cfrac{a_3 a_1}{a_2+a_1}}},$$

und man hat hierdurch ein einfaches Mittel an die Hand gegeben, jede willkürliche Zahl in einen Kettenbruch von beliebig vielen Gliedern zu verwandeln.

11) **Lucas**, *Sur une formule d'analyse, Compt. rend. de l'acad. franç. 1870*, S. 1167.

12) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870, S. 30.

13) Günther, Ueber einige Determinantensätze, Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen, 5. Heft, S. 88 flgg.

§ 6. Verschiedene Autoren, darunter besonders auch Heis[14], haben gezeigt, dass die aufsteigenden Kettenbrüche mit Nutzen zur Auflösung höherer Gleichungen gebraucht werden können. Ein interessanter Zusammenhang zwischen beiden wird durch folgenden, anscheinend noch nicht erwähnten Lehrsatz festgestellt:

Hat der aufsteigende Kettenbruch

$$\cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cdots + \cfrac{b_{n+1}}{m}}{m}}{m}$$

den Werth Null, so ist m ein Wurzelwerth der Gleichung

$$F \equiv b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \ldots + b_n x + b_{n+1} = 0.$$

Dass dies sich wirklich so verhält, lässt sich leicht durch Induction erweisen; elementar dagegen kommen wir durch folgende Ueberlegung zum Ziele.

Wenn m eine Wurzel der obigen Gleichung ist, so muss, wenn man in F für x dieses m substituirt, dies Polynom sich annulliren, mit anderen Worten: Eliminirt man aus den beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad -x + m = 0$$

die Grösse x, so muss das Eliminationsresultat identisch verschwinden. Nach Sylvester's dialytischer Methode müsste also die Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ b_2 & m & -1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & 0 & 0 & \ldots 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

existiren. Gelingt es nun, diese Identität auf anderem Wege nachzuweisen, so ist der Beweis für unsern Lehrsatz als erbracht anzusehen. Wenn aber der genannte aufsteigende Kettenbruch verschwinden soll, so kann dies, da m natürlich als endlich angenommen ist, nur dadurch geschehen, dass der Zähler

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ b_2 & m & -1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & 0 & 0 & \ldots 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

gleich Null wird.

14) Matthiessen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Heis, Köln und Wien 1873, S. 181 flgg.

§ 7. Als Corollar des eben besprochenen Satzes ergiebt sich uns, dass, wenn auch

$$b_1 = b_2 = \ldots = m_1$$

ist, der Kettenbruch

$$\cfrac{m_1 + \cdots + \cfrac{m_1}{m_{(n)}}}{m}$$

den Werth

$$\frac{m_1}{m^n}(m^{n-1}+m^{n-2}+\ldots+m^2+m+1)$$

hat. Summirt man die geometrische Reihe, so folgt Nachstehendes:

Der aufsteigende Kettenbruch von eingliedriger Periode $\left(\frac{b}{a}\right)$ ist gleich

$$M=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^n-1}{a-1}.$$

Diese Relation kann nun aber auch benützt werden, um den Werth eines absteigenden Kettenbruches von eingliedriger Periode kennen zu lernen. Denn man findet nach § 3

$$M=\cfrac{b}{a-\cfrac{ab}{ab+b-\cfrac{ab^2}{ab+b-\ldots-\cfrac{ab^2}{ab+b}}}},$$

und zwar besteht der periodische Theil dieses Kettenbruches aus $(n-2)$ Theilbrüchen. Um die Grösse V dieses periodischen Theiles zu finden, setzen wir

$$ab^2=x,\quad ab+b=y,$$

also

$$a=\frac{x}{\frac{y^2}{2}-x+y\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}},\quad b=\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}$$

und

$$M=\cfrac{\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}}{\cfrac{x}{\frac{y^2}{2}-x+y\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}}-\cfrac{\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}}{y-V}}.$$

Indem man für M seinen Werth einsetzt, findet man nach einigen Transformationen

$$V=x\,\frac{\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-3}-\left(\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-3}}{\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-2}-\left(\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x}\right)^{n-2}}$$

in bekannter Weise.

§ 8. Aus dem in § 6 bewiesenen Satze leiten sich einfach mehrere Theoreme her, welche Siacci[15] ohne Beweis aufgestellt hat. Es sollen nämlich für die Gleichung

$$F\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

die beiden Identitäten

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_0}+x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{a_0} & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_3}{a_0} & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n-1}}{a_0} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ \frac{a_n}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = \frac{F}{a_0}$$

und

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{a_{n-1}}{a_n}x & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-2}}{a_n}x & 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-3}}{a_n}x & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_1}{a_n}x & 0 & 0 & \dots & 1 & -x \\ \frac{a_0}{a_n}x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{F}{a_n}$$

bestehen. Die erste Relation erhellt sofort, wenn man die Determinante dadurch, dass man die Summe

$$\frac{a_1}{a_0}+x$$

in ihre beiden Summanden zerlegt, ebenfalls als Summe zweier Theile darstellt; denn der erste Summand hat nach dem Obigen den Werth

$$\frac{1}{a_0}(a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n),$$

der zweite dagegen ist gleich

$$x^n.$$

Um die zweite Beziehung nachzuweisen, dividire man zunächst jede Zeile durch x und zerlege alsdann in der nämlichen Weise, so erhält man ebenfalls als ersten Summanden den aufsteigenden Kettenbruch

$$\frac{1}{a_n} \cdot \cfrac{a_{n-1}}{\frac{1}{x}} + \cfrac{a_{n-2}}{\frac{1}{x}} + \dots + \cfrac{a_1}{\frac{1}{x}} + \cfrac{a_0}{\frac{1}{x}}$$

und dieser ist gleich

$$\frac{1}{a_n}\frac{a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\ldots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

oder, indem man mit x^n multiplicirt,

$$\frac{1}{a_n}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x).$$

Der zweite Summand wird sein

$$\frac{1}{a_n}x^n\left(\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{a_n},$$

so dass die Summe wirklich den Werth

$$\frac{F}{a_n}$$

erhält.

Siacci[16] hat für seine beiden Sätze in der Folge selbst einen eleganten Beweis geliefert; jedoch scheint der hier betretene Weg der natürlichere zu sein.

Unmittelbar folgen aus den obigen Sätzen zwei weitere, welche ihr Begründer (a. a. O.) in dieser Weise formulirt: „*Se si dicono* P_{rs} *e* Q_{rs} *i complementi algebrici di due elementi omologhi di* P *e* Q *si ha*

$$a_0P_{rr}x+a_nQ_{rr}=F,\quad a_0P_{rs}x+a_nQ_{rs}=0."$$

15) *Siacci, Intorno ad una serie e ad una funzione dei coefficienti binomiali,* Battaglini's *Giornale di Matematiche, Vol. XI.*

16) *Siacci, Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti, Torino 1872,* S. 10.

Ist mit Vorstehendem der Nachweis gelungen, dass auch in der elementaren Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen noch mancher theoretisch interessante Gesichtspunkt zu finden sei, so hat diese Arbeit ihren Zweck erreicht.

§ 9. Bekanntlich existirt eine grosse Anzahl von Methoden zur Verwandlung unendlicher Reihen in ebensolche Kettenbrüche, und zwar lassen sich dieselben der Hauptsache nach auf die classischen Arbeiten von Euler und Lagrange zurückführen. Aber all' diese Methoden, deren übersichtlichste Zusammenstellung man in dem grossen Handbuche von Eytelwein[17] findet, leiden an dem grossen Uebelstande, dass die Convergenz des resultirenden Kettenbruches erst nachträglich durch eine oft sehr schwierige Discussion festzustellen ist Nur eine gewisse Classe dieser Methoden macht hiervon eine Ausnahme; wir meinen diejenigen, welche nicht nur zwischen Reihe und Kettenbruch an sich, sondern auch zwischen den einzelnen Theilen derselben vollkommene Gleichheit herstellen[18]. Die betreffende Entwickelung wird meistens nur für specielle Fälle gegeben, lässt sich aber in der That sehr leicht für den allgemeiden Fall einer willkürlichen Potenzreihe durchführen, sobald man dieselbe als aufsteigenden Kettenbruch behandelt. Diese Ausdehnung soll nun hier geleistet werden; vorher aber wollen wir noch eine Definition einführen, welche, ursprünglich von Seidel[19] herrührend, bei unserem Problem besonders gute Dienste zu leisten scheint. Dabei möge vorausgesetzt werden, dass man es lediglich mit convergenten Reihen zu thun habe, indem ein Operiren mit divergirenden keinen eigentlichen Sinn hat. Wir sagen nun:

Ist eine gewisse endliche Grösse durch Ausdrücke gegeben, welche ein unendlich fortgesetztes Wiederholen einer gewissen Operation erfordern (Reihe, Factorenfolge, Kettenbruch, Potenz), und stehen diese Ausdrücke in einer solchen gegenseitigen Relation, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre p^{ten} Näherungswerthe einander bezüglich gleich sind, so nennen wir solche Ausdrücke äquivalent.

Alsdann stellen wir uns folgende Aufgabe:

Es soll die (convergente) allgemeine Potenzreihe

$$\frac{x^p}{a_1} + \frac{x^{p+h}}{a_2} + \frac{x^{p+2h}}{a_3} + \dots \equiv S$$

in einen äquivalenten Kettenbruch umgesetzt werden.

Verstehen wir hier unter p eine ganze, unter h dagegen eine ganz willkürliche reelle Zahl, so ist das vorstehend formulirte Problem wohl das allgemeinst denkbare, insofern darin alle gesetzmässig fortschreitenden Reihen begriffen sind.

Wir haben zunächst offenbar

$$S = \cfrac{x^p + \cfrac{x^{p+h} + \cfrac{x^{p+2h} + \dots,}{\frac{a_3}{a_2}}}{\frac{a_2}{a_1}}}{a_1}$$

und zwischen diesem Kettenbruch und der obigen Reihe besteht, wie eine einfache Rechnung zeigt, wiederum die Beziehung der Aequivalenz. Den aufsteigenden Kettenbruch transformiren wir jetzt in bekannter Weise in einen absteigenden und bekommen

$$S_1 = \frac{x^p}{a_1} - \cfrac{a_1 x^{p+h}}{\frac{a_2}{a_1} x^p + x^{p+h} - \cfrac{\frac{a_2}{a_1} x^p x^{p+2h}}{\frac{a_3}{a_2} x^{p+h} + x^{p+2h} - \cfrac{\frac{a_3}{a_2} x^{p+h} x^{p+3h}}{\frac{a_4}{a_3} x^{p+2h} + x^{p+3h} - \dots}}}$$

Den jetzt erhaltenen Kettenbruch gestalten wir weiter dadurch um, dass wir den Satz, wonach man stets zwei Theilzähler und den zwischenliegenden Theilnenner mit einer willkürlichen Zahl ($\gtrless 0$) multipliciren darf, sowohl auf die Potenzen von x, als auch auf die Constanten anwenden. So ergiebt sich schliesslich

$$S_2 = x^p.\frac{1}{a_1 - \cfrac{a_1^2 x^h}{a_2 + a_1 x^h - \cfrac{a_2^2 x^h}{a_3 + a_2 x^h - \cfrac{a_3^2 x^h}{a_4 + a_3 x^h - \dots}}}}$$

Was nun den zuerst gewonnenen Kettenbruch anlangt, so ergiebt sich aus der oben durchgeführten Determinantenbetrachtung unmittelbar, dass S_1 dem aufsteigenden Kettenbruch äquivalent sein muss, und diese Beziehung ward natürlich durch die weiterhin an S_1 vorgenommene Veränderung nicht gestört. Nun sind aber offenbar zwei analytische Gebilde äquivalent, wenn sie einem dritten äquivalent sind, und es erhellt also die Wahrheit:

Der absteigende Kettenbruch S_2 ist der Reihe S nicht allein gleich, sondern auch äquivalent.

Nunmehr ist jede ähnliche Transformation einfach zu bewerkstelligen. Wollten wir die Function $\sin x$ als unendlichen Kettenbruch darstellen, so würde die gewöhnliche Regel, bei der $h=1$ vorausgesetzt wird, versagen, d. h. sie würde auf eine unbrauchbare Form führen, indem jede Constante mit geradem Index $=\infty$ gesetzt werden müsste. Für uns ist dagegen, weil $\sin x$ der Reihe

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

gleichwerthig ist,

$$p=1, \quad h=2, \quad a_n=(2n-1)!,$$

und wir finden demnach

$$\sin x = \frac{x}{1! - \cfrac{(1!)^2 x^2}{3! + 1!\,x^2 - \cfrac{(3!)^2 x^2}{5! + 3!\,x^2 - \cfrac{(7!)^2 x^2}{7! + 5!\,x^2 - \dots}}}}$$

Da aber

$$(2n-1)! : (2n-3)! = (2n-1)(2n-2)$$

ist, so können wir durch Anwendung des schon oben gebrauchten Satzes auch diese Form herstellen:

$$\sin x = \frac{x}{1 - \cfrac{1.1\,x^2}{2.3 + x^2 - \cfrac{2.3\,x^2}{4.5 + x^2 - \cfrac{4.5\,x^2}{6.7 + x^2 - \dots}}}}$$

Auch hier ist das Fortschreitungsgesetz augenfällig.

Fassen wir als ein anderes Beispiel die gewöhnliche hypergeometrische Reihe von Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} + \dots$$

auf. In diesem Falle wird, wenn wir das Glied 1 nicht mit zur Reihe rechnen,

$$p = 1 = h, \quad a_m = 1 : \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}{m!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)},$$

und sonach

$$-1+F(\alpha,\beta,\gamma)=\cfrac{x}{\cfrac{1!\,\gamma}{\alpha\beta}-\cfrac{\left(\frac{1!\,\gamma}{\alpha\beta}\right)^2 x}{\cfrac{2!\,\gamma(\gamma+1)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}+\cfrac{1!\,\gamma}{\alpha\beta}x-}}$$

$$-\cfrac{\left(\frac{2!\,\gamma(\gamma+1)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}\right)^2 x}{\cfrac{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\cfrac{2!\,\gamma(\gamma+1)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}x-\ldots}$$

Aus dieser Form lassen sich die anderen bekannten leicht herleiten und überdies geniesst man des grossen Vortheils, die Convergenz *a priori* behaupten zu können, sobald natürlich die Reihe F selbst convergent, d. h. wenn $x \lhd 1$ oder aber für

$$x=1, \quad \alpha+\beta>\gamma$$

war.

Erwähnt möge anhangsweise noch werden, dass der von uns hier mehrfach verwandte Begriff der Aequivalenz Erweiterung zulässt. Würde man die hier charakterisirte Aequivalenz die einfache nennen, so würde ihr eine mn-fache entsprechen, die so zu definiren wäre:

Zwei unendliche Ausdrücke (dies Wort im Sinne Euler's genommen) haben eine $m-n$-fache Aequivalenz, wenn der m^{te} Näherungswerth des einen dem n^{ten} des andern gleich ist. Für $m=n$ ist die Aequivalenz eine einfache.

So hat die von Pacioli erfundene und von Bertrand[20] wieder reproducirte Näherungsreihe zur Bestimmung des Wurzelwerthes

$$\sqrt{a^2+p}$$

zu der bekannten Kettenbruchentwickelung

$$a+\cfrac{p}{2a+\cfrac{p}{2a+\ldots}}$$

eine $n-2^{n-1}$-fache Aequivalenz, wie wir dies bei einer andern Gelegenheit[21] nachgewiesen haben.

17) Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, 1. Band, Berlin 1824, S. 361 flgg.

18) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1868, S. 315.

19) Seidel, Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetz eines Kettenbruches und der Art des Fortganges seiner Näherungswerthe, München 1875, S. 7.

20) *Bertrand, Traité d'arithmétique, Paris 1867,* S. 245 flgg.

21) *Günther-Sparagna, Paragone di due metodi per la determinazione approssimata di grandezze irrazionali, Boncompagni Bullettino, Tomo VII,* S. 596.

X.

Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen.

Von

Prof. HELMERT

am Polytechnikum in Aachen.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1—18.)

§ 1. Allgemeine Formeln.

Wir bezeichnen die absoluten Werthe der Beobachtungsfehler für n Beobachtungen mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ und die Summe ihrer m^{ten} Potenzen $[\varepsilon^m]$ mit $n\sigma_m$. Der durchschnittliche Werth von $n\sigma_m$, wenn man jedem ε alle möglichen Werthe nach seiner Wahrscheinlichkeit beilegt, ist gleich nS_m, wobei

$$S_m = \int_0^a \varepsilon^m \psi(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{1}$$

Hierin ist a der überhaupt erreichbare Maximalfehler und $\psi(\varepsilon) = \varphi(+\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)$, falls $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Beobachtungsfehler ε mit Rücksicht auf sein Vorzeichen zwischen $\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$ liege.

Wir wenden uns nun zur Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der m^{ten} Potenzen von n Beobachtungsfehlern liegen werde zwischen den Grenzen

$$n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right) \text{ und } n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right),$$

worin der Einfachheit halber δ_m geradezu das Differential von σ_m bedeuten möge. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $\varphi(\sigma_m)\,\delta_m$. Um sie kennen zu lernen, hat man zwei Wege. Entweder nimmt man successive $n = 1, 2, \ldots$ oder man nimmt n beliebig und sucht mittelst eines Discontinuitätsfactors die vorkommenden Integrationen zu bewältigen. Allgemein ist das Problem nur unter beschränkenden Voraussetzungen lösbar; bekanntlich hat Gauss ohne Beweis Endformeln gegeben, welche ein sehr grosses n voraussetzen, aber für ein ganz beliebiges Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ gelten sollen. Schon Poisson hat bei einer ähnlichen Untersuchung (mit $m = 1$) gezeigt, dass jedenfalls eine Beschränkung auf denkbare Fehlergesetze nöthig ist und $\varphi(\varepsilon)$ nicht jede denkbare Function von ε sein darf.

Ist $n = 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ε_1^m zwischen $\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}$ liege, gleich

$$\varphi(\sigma_m)_1\,\delta_m = \int\limits_{\sqrt[m]{\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}}}^{\sqrt[m]{\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}}} \psi(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

wobei dem Zeichen $\varphi(\sigma_m)$ der Index 1 wegen $n = 1$ angehängt worden ist. Weil nun δ_m nur ein Differential sein soll, wird

$$\varphi(\sigma_m)_1\,\delta_m = \left(\sqrt[m]{\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}} - \sqrt[m]{\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}}\right)\psi(\sqrt[m]{\sigma_m}).$$

Indem nun σ_m genau genommen niemals gleich Null gesetzt werden darf, sondern immer um wenigstens $\frac{\delta_m}{2}$ davon entfernt bleiben muss (da ja eine negative Grenze für ε_1^m ausgeschlossen ist), so ist auch (wie nach leichter Reduction gefunden wird)

$$2) \qquad \varphi(\sigma_m)_1\,\delta_m = \frac{\psi(\sqrt[m]{\sigma_m})}{m\,\sigma_m^{1-\frac{1}{m}}}\,\delta_m.$$

Ist $n = 2$, so lautet die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass $\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m$ zwischen $2\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege. Nun ist nach 2) die Wahrscheinlichkeit, dass ε^m zwischen $x \mp \frac{dx}{2}$ liege, gleich

$$\frac{\psi(\sqrt[m]{x})}{m\,x^{1-\frac{1}{m}}}\,dx$$

und daher, wenn wir die x nach den Indices ihrer ε unterscheiden, die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\varphi(\sigma_m)_2\,\delta_m = \frac{1}{m^2}\int\limits_p^q dx_2 \int\limits_{2\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right) - x_2}^{2\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - x_2} \frac{\psi(\sqrt[m]{x_2})}{x_2^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{\psi(\sqrt[m]{x_1})}{x_1^{1-\frac{1}{m}}}\,dx_1$$

oder mit Berücksichtigung des Betrages von δ_m und Weglassen des Index 2 unter dem Integral

$$3)\qquad \varphi(\sigma_m)_2\,\delta_m = \frac{2\,\delta_m}{m^2}\int\limits_p^q \frac{\psi(\sqrt[m]{x})}{x^{1-\frac{1}{m}}}\,\frac{\psi(\sqrt[m]{2\,\sigma_m - x})}{(2\,\sigma_m - x)^{1-\frac{1}{m}}}\,dx,$$

worin

$$p = \text{Null},\qquad q = 2\,\sigma_m \text{ für } 2\,\sigma_m < a^m,$$
$$p = (2\,\sigma_m - a^m),\quad q = a^m \quad ,,\quad 2\,\sigma_m > a^m.$$

Man kann in angegebener Weise die Frage successive für $n = 3, 4 \ldots$ weiter behandeln, falls nur die jedesmal vorausgehende Integration möglich ist.

Ist n unbestimmt, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der m^{ten} Potenzen der ε zwischen $n\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege, gleich

$$4)\qquad \varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m = \int\limits_0^a d\varepsilon_1 \int\limits_0^a d\varepsilon_2 \ldots \int\limits_0^a d\varepsilon_n\,\psi(\varepsilon_1)\,\psi(\varepsilon_2)\,\ldots\,\psi(\varepsilon_n)\,F,$$

worin F folgenden Discontinuitätsfactor bezeichnet:

$$5)\qquad F = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\,[\varepsilon^m]\,z\,.\,dz \int\limits_{n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}^{n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)} \cos z\,\Theta\,.\,d\,\Theta,$$

welcher für alle $[\varepsilon^m]$ zwischen den Grenzen $n\left(\sigma_m \mp \frac{\delta_m}{2}\right)$ gleich 1, dagegen für $[\varepsilon^m]$ ausserhalb derselben gleich Null ist und angewandt werden darf bei jedem Werthe $\sigma_m \geqq \frac{\delta_m}{2}$. Es ist also, wie früher, unzulässig, σ_m genau gleich Null zu setzen. Führt man in dem Factor F die Integration nach Θ aus, so wird

$$5^*)\qquad F = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin z\,n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin z\,n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z}\cos\,[\varepsilon^m]\,z\,.\,dz.$$

Bezeichnen wir ferner mit ω_m die Differenz $S_m - \sigma_m$, so ist offenbar in $\varphi(\sigma_m)$ auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen ω_m gefunden. Betrachtet man aber verschiedene m, dann bemerkt man, dass die ω_m gar nicht vergleichbar sind; wir müssen daher auf gleichartige Abweichungen reduciren. Wie diese zu nehmen sind, sieht man sogleich ein, indem man sich erinnert, dass zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ anstatt der unbekannten $\sqrt[m]{S_m}$ dient und dass man ihn durch Multiplication dieser Wurzelgrösse mit einer vom Fehlergesetz abhängenden Zahl erhält. Setzt man daher

$$\sqrt[m]{\sigma_m} = \sqrt[m]{S_m}\,(1 + v_m),$$

so bedeutet v_m nicht nur die negative Verbesserung von $\sqrt[m]{\sigma_m}$ in Bruchtheilen von $\sqrt[m]{S_m}$, sondern auch die Verbesserung des berechneten wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers in Bruchtheilen von dessen strengem Werthe. Mithin sind die v_m für veränderliches m vergleichbare Grössen. Kennt man nun $\varphi(\sigma_m)\,\delta_m$, so findet man daraus die Wahrscheinlichkeit $\varphi(v_m)\,dv_m$, es falle v_m zwischen die Grenzen $v_m \mp \frac{dv_m}{2}$, durch Substitution der Grössen v_m und dv_m mittelst der Relationen

$$6)\qquad \sigma_m = S_m (1 + v_m)^m, \quad \delta_m = m S_m (1 + v_m)^{m-1}\,dv_m,$$

was sich in aller Strenge [wie Formel 2)] begründen lässt.

§ 2. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit.

$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{a}$ für $\varepsilon \leqq a$, ausserhalb gleich Null.

I. $n = 1$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 2) folgende Functionen:

$$7)\qquad \begin{aligned} \varphi(\sigma_1)_1\,\delta_1 &= \frac{1}{a}\,\delta_1, \\ \varphi(\sigma_2)_1\,\delta_2 &= \frac{1}{2a}\,\sigma_2^{-\frac{1}{2}}\,\delta_2, \\ \varphi(\sigma_3)_1\,\delta_3 &= \frac{1}{3a}\,\sigma_3^{-\frac{2}{3}}\,\delta_3. \end{aligned}$$

Um eine Prüfung dieser Formeln zu erhalten, integrirte ich die erste von Null bis a, die zweite bis a^2, die dritte bis a^3 und fand, wie es sein muss, eins. In der That ist es gewiss, dass σ_m einen der Werthe zwischen 0 und a^m annehmen werde.

Durch Einführung der Relationen 6) und weil jetzt

$$S_m = \frac{a^m}{m+1}$$

ist, findet man weiter aus den Functionen $\varphi(\sigma)_1 \delta$:

$$8)\quad \begin{aligned} \varphi(v_1)_1\, dv_1 &= \tfrac{1}{2}\, dv_1, & -1 < v_1 < +1, \\ \varphi(v_2)_1\, dv_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\, dv_2, & -1 < v_2 < \sqrt{3}-1, \\ \varphi(v_3)_1\, dv_3 &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\, dv_3, & -1 < v_3 < \sqrt[3]{4}-1. \end{aligned}$$

Die Figuren 1, 2 und 3 geben eine graphische Darstellung der Functionen $\varphi(v)_1$ als Ordinaten für die Abscissen v. Im vorliegenden Falle sind die $\varphi(v)_1$ gerade Linien parallel zur Abscissenaxe und es ist die Fläche, welche die Ordinate φ überstreicht, wenn sich v über alle möglichen Werthe erstreckt, schraffirt. Demnächst enthalten die Figuren noch die Darstellung von $\psi(v)_1 = \varphi(+v)_1 + \varphi(-v)_1$ als Ordinate für den *val. abs.* v als Abscisse. Man wird bemerken, dass sich trotz der Einfachheit des Falles doch in den Figuren 2 und 3 die Darstellung von $\psi(v)_1$ immerhin schon etwas complicirt.

Fig. 4 endlich zeigt das gegenseitige Verhalten der Functionen $\psi(v_1)$, $\psi(v_2)$, $\psi(v_3)$.

II. $n = 2$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 3)

$$\varphi(\sigma_1)_2\, \delta_1 = \frac{2\delta_1}{a^2} \int_p^q dx,$$

$$\varphi(\sigma_2)_2\, \delta_2 = \frac{2\delta_2}{4a^2} \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{x(2\sigma_2 - x)}},$$

$$\varphi(\sigma_3)_2\, \delta_3 = \frac{2\delta_3}{9a^2} \int_p^q \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2\sigma_3 - x)^2}}.$$

Nach einiger Reduction folgt hieraus

$$9)\quad \varphi(\sigma_1)_2\, \delta_1 = \begin{cases} \dfrac{4\sigma_1}{a^2}\, \delta_1 & \text{für } 2\sigma_1 < a, \\[2ex] \dfrac{4(a-\sigma_1)}{a^2}\, \delta_1 & \text{,, } 2\sigma_1 > a; \end{cases}$$

$$10)\quad \varphi(\sigma_2)_2\, \delta_2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2a^2}\, \delta_2 & \text{für } 2\sigma_2 < a^2, \\[2ex] \dfrac{1}{a^2} \arcsin\left(\dfrac{a^2}{\sigma_2} - 1\right) \delta_2 & \text{,, } 2\sigma_2 > a^2; \end{cases}$$

$$11)\qquad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \begin{cases} \dfrac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\displaystyle\int_0^1 (1-t^3)^{-\frac{2}{3}}\,dt & \text{für } 2\,\sigma_3 < a^3, \\[2ex] \dfrac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\displaystyle\int_{\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}}^{\sqrt[3]{\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}} (1-t^3)^{-\frac{2}{3}}\,dt & \text{„ } 2\,\sigma_3 > a^3. \end{cases}$$

Die Prüfung der Formeln 8) und 9) durch Integration nach σ über alle möglichen Werthe desselben ist leicht zu erledigen und bestätigt ihre Richtigkeit. Insbesondere ist

$$\int_0^{a^2} \varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2 = \frac{\pi}{2\,a^2}\int_0^{\frac{a^2}{2}} \delta_2 + \frac{1}{a^2}\int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} \arcsin\left(\frac{a^2}{\sigma_2} - 1\right)\delta_2,$$

und wenn man im zweiten Integral rechter Hand *arcsin* als ersten Factor nimmt und theilweise integrirt, so hat man weiter

$$\int_0^{a^2} \varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2 = \int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} \frac{\delta_2}{\sqrt{2\,a^2\sigma_2 - a^4}} = 1.$$

Was nun den ersten Theil der Formel 11) anlangt, so giebt die directe Reihenentwickelung daselbst zu schwache Convergenz. Wir setzen daher $t = 1 - z$ und integriren anstatt nach z nach der Variabeln $y = (1-t^3)^{-\frac{2}{3}}$; dann wird leicht mittelst einer geometrischen Betrachtung

$$11^*)\quad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\left(1 + \int_1^{\infty}\left(1 - \sqrt[3]{1-y^{-3/2}}\right)dy\right) = \frac{1{,}17\,\ldots}{a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\,\delta_3,$$
$$2\,\sigma_3 < a^3.$$

Für den zweiten Theil der Formel 11) genügt (da hier wesentlich nur die spätere Curvenconstruction ins Auge gefasst ist) die directe Reihenentwickelung

$$11^{**})\quad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{2\,\delta_3}{3\,a^2\sqrt[3]{2\,\sigma_3}}\left\{\begin{aligned} &\sqrt[3]{\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{a^3}{2\,\sigma_3}\right) + \tfrac{5}{63}(\div)^2 + \tfrac{4}{81}(\div)^3 + \tfrac{110}{3159}(\div)^4\ldots\right] \\ -&\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{2\,\sigma_3}}\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(1-\frac{a^3}{2\,\sigma_3}\right) + \tfrac{5}{63}(\div)^2 + \tfrac{4}{81}(\div)^3 + \tfrac{110}{3159}(\div)^4\ldots\right]\end{aligned}\right\},$$
$$2\,\sigma_3 > a^3.$$

Integrirt man zur Probe $\varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3$ in 11*) von σ_3 gleich 0 bis $\frac{a^3}{2}$, so folgt ohne besondere Mühe 0,88...; die weitere Integration bis a^3 nach 11**) gab mir mittelst mechanischer Quadratur etwas mühsamer 0,12..., zusammen also 1.

Die Substitution der Relationen 6) führt nun zu folgenden Formeln:

$$12)\quad \varphi(v_1)_2\,dv_1 = \begin{cases} (1+v_1)\,dv_1, & -1 < v_1 \leqq 0; \\ (1-v_1)\,dv_1, & 0 \leqq v_1 < +1; \end{cases}$$

$$13)\quad \varphi(v_2)_2\,dv_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{3}(1+v_2)\,dv_2, & -1 < v_2 \leqq \sqrt{\tfrac{3}{2}}-1; \\ \frac{2(1+v_2)}{3} \arcsin\left(\frac{3}{(1+v_2)^2}-1\right) dv_2, & \sqrt{\tfrac{3}{2}}-1 \leqq v_2 < \sqrt{3}-1; \end{cases}$$

$$14)\quad \varphi(v_3)_2\,dv_3 = \begin{cases} 1{,}10\ldots(1+v_3)\,dv_3, & -1 < v_3 \leqq \sqrt[3]{2}-1; \\ \frac{1+v_3}{\sqrt[3]{4}}\left(\begin{array}{l} \alpha\left(1+\frac{\alpha^3}{6}+\frac{5\alpha^6}{63}+\frac{4\alpha^9}{81}+\frac{110\alpha^{12}}{3159}\ldots\right) \\ -\beta\left(1+\frac{\beta^3}{6}+\frac{5\beta^6}{63}+\frac{4\beta^9}{81}+\frac{110\beta^{12}}{3159}\ldots\right)\end{array}\right) dv_3, & \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{2}-1 \leqq v_3 \leqq \sqrt[3]{4}-1; \qquad \alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{1+v_3}, \qquad \beta = \sqrt[3]{1-\frac{2}{(1+v_3)^3}}.$$

Die Figuren 5, 6 und 7 zeigen die Curven $\varphi(v)_2$, sowie die entsprechenden Curven $\psi(v_2)$, welche letztere in Fig. 8 zur Vergleichung unter sich besonders zusammengestellt sind.

III. Rückblick.

Die Betrachtung der Curven φ mit schräffirter Fläche in den Figuren 1—3 und 5—7 lässt sogleich erkennen, dass die Functionen $\varphi(v)_1$ und $\varphi(v)_2$ vom Gauss'schen Fehlergesetz zwar stark abweichen, aber sich demselben doch mit wachsender Anzahl n der Beobachtungen zu nähern scheinen. Man bemerkt ferner mittelst der Figuren 4 und 8 alsbald, dass mit wachsendem Exponenten m die Wahrscheinlichkeit wächst, es falle $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit $\sqrt[m]{S_m}$ zusammen. Um dies deutlicher zu erkennen, integrirte ich $\varphi(v)\,dv$ zwischen solchen Grenzen $-v_m$ und $+v_m'$, dass sich gerade $\frac{1}{2}$ ergab. Alsdann ist auch die Wahrscheinlichkeit, die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ werde zwischen die Grenzen $\sqrt[m]{S_m}(1 \mp v_m)$ fallen, gerade $\frac{1}{2}$, also sind die v_m die wahrscheinlichen Fehler von $\sqrt[m]{\sigma_m}$ in Bezug auf $\sqrt[m]{S_m}$ (und in Bruchtheilen dieses Werthes angegeben). Es fand sich v_m gleich

I)

	$n=1.$	$n=2.$
$m=1$	0,50	0,29
2	0,43	0,24
3	0,40	0,23

Nach diesen Ergebnissen bekommt man (innerhalb der hier betrachteten Fälle) die grösste Wahrscheinlichkeit, dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfalle, durch Anwendung eines möglichst hohen Exponenten m.

§ 3. Gauss'sches Fehlergesetz.

$$\psi(\varepsilon) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

I. $n = 1$.

Für die drei Fälle $m = 1$, 2 und 3 giebt Formel 2) nachstehende Functionen:

$$15)\quad \begin{aligned} \varphi(\sigma_1)_1\,\delta_1 &= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma_1^2}\,\delta_1, \\ \varphi(\sigma_2)_1\,\delta_2 &= \frac{2h}{2\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma_2}\,\sigma_2^{-1/2}\,\delta_2, \\ \varphi(\sigma_3)_1\,\delta_3 &= \frac{2h}{3\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma_3^{2/3}}\,\sigma_3^{-2/3}\,\delta_3. \end{aligned}$$

Zur Prüfung integrirte ich diese Formeln nach σ von Null bis ∞ und erhielt für jedes der Integrale eins, wie es sein soll. Man hat weiter

$$S_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

$$S_2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{2h^2},$$

$$S_3 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}.$$

Führt man diese Werthe in die Relationen 6) ein und substituirt sodann letztere in die 15), so ergiebt sich

$$16)\quad \begin{aligned} \varphi(v_1)_1\,dv_1 &= \frac{2}{\pi}\, e^{-\frac{(1+v_1)^2}{\pi}} dv_1, \quad -1 < v_1; \\ \varphi(v_2)_1\,dv_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{(1+v_2)^2}{2}} dv_2, \quad -1 < v_2; \\ \varphi(v_3)_1\,dv_3 &= \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\pi}\, e^{-\frac{(1+v_3)^2}{\sqrt[3]{\pi}}} dv_3, \quad -1 < v_3. \end{aligned}$$

Die Figuren 9, 10 und 11 zeigen die Curven $\varphi(v)_1$, sowie die entsprechenden Curven $\psi(v)_1$, welche letzteren in Fig. 12 zu bequemern Vergleichung untereinander nochmals zusammengestellt sind.

II. $n=2$.

Für die drei Fälle $m=1$, 2 und 3 giebt die Formel 3)

$$\varphi(\sigma_1)_2\,\delta_1=\frac{8h^2\delta_1}{\pi}\int_0^{2\sigma_1}e^{-h^2[x^2+(2\sigma_1-x)^2]}\,dx,$$

$$\varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2=\frac{8h^2\delta_2}{4\pi}\int_0^{2\sigma_2}\frac{e^{-2h^2\sigma_2}}{\sqrt{x(2\sigma_2-x)}}\,dx,$$

$$\varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3=\frac{8h^2\delta_3}{9\pi}\int_0^{2\sigma_3}\frac{e^{-h^2[x^{2/3}+(2\sigma_3-x)^{2/3}]}}{x^{2/3}\,.\,(2\sigma_3-x)^{2/3}}\,dx.$$

Nach einiger Reduction folgt hieraus

$$17)\qquad \varphi(\sigma_1)_2\,\delta_1=\frac{8\sqrt{2}h}{\pi}e^{-2h^2\sigma_1^2}\,\delta_1\int_0^{h\sigma_1\sqrt{2}}e^{-t^2}\,dt,$$

$$18)\qquad \varphi(\sigma_2)_2\,\delta_2=2h^2e^{-2h^2\sigma_2}\,\delta_2,$$

$$19)\qquad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3=\frac{8h^3\delta_3}{3\pi(h\sqrt[3]{2\sigma_3})}\int_0^1\frac{e^{-[z^2+(1-z^3)^{2/3}](h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}}{(1-z^3)^{2/3}}\,dz,$$

Um die zur Prüfung der Formel 17) nöthige Integration nach σ_1 durchzuführen, kann man zunächst $z=t:h\sqrt{2}$ setzen und sodann Polarcoordinaten mittels der Beziehungen $r\sin\Theta=z$, $r\cos\Theta=\sigma_1$ einführen und erhält alsdann

$$\int_0^\infty\varphi(\sigma_1)_2\,\delta_1=\frac{16h^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\Theta\int_0^\infty e^{-2h^2r^2}r\,dr=1.$$

Dass Formel 18) die Prüfung durch Integration besteht, überblickt man sofort.

Was nun die Formel 19) anlangt, so begnügte ich mich, dafür einen zur Construction einer Zeichnung ausreichenden Näherungsausdruck herzustellen. Der Exponent $[z^2+(1-z^3)^{2/3}]$ ändert aber zwischen den Grenzen $z=0$ und 1 seinen Werth sehr wenig, man hat nämlich für

z =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Exponent =	1,00	1,01	1,04	1,07	1,12	1,17	1,21	1,24	1,26	1,23	1,00

und ist daher mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Nenners $(1-z^3)^{2/3}$ eine Zerspaltung des Integrals in drei Integrale möglich, wobei für jedes derselben jener Exponent einen constanten Mittelwerth erhält:

$$\int_0^1 = e^{-1{,}09(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}\int_0^{0{,}6}\frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}} + e^{-1{,}24(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}\int_{0{,}6}^{0{,}9}\frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}}$$

$$+ e^{-1{,}07(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2}\int_{0{,}9}^{1}\frac{dz}{(1-z^3)^{2/3}}.$$

Die Zahlen 1,10, 1,25, 1,14 sind überdies so gewählt, dass für $\sigma_3 = S_3$ die Formel genau stimmt. Die jetzt noch zu bewirkenden Integrationen lassen sich in den beiden ersten Fällen durch directe Reihenentwickelung, im letzten Falle nach vorheriger Substitution von $z = 1 - \zeta$, in hinreichender Schärfe rasch erledigen und man erhält

$$19^*)\quad \varphi(\sigma_3)_2\,\delta_3 = \frac{h^3\,\delta_3}{h\sqrt[3]{2\sigma_3}}\left\{0{,}530\,e^{-1{,}09(h\sqrt[3]{2\sigma_3})^2} + 0{,}391\,e^{-1{,}24(\div)^2} + 0{,}576\,e^{-1{,}07(\div)^2}\right\}.$$

Die Integration nach σ_3 von 0 bis ∞ giebt 1,004 statt 1, mithin für den vorliegenden Zweck ausreichend übereinstimmend.

Die Einführung der Relationen 6) führt (unter Beachtung der angegebenen Werthe der S_1, S_2, S_3) von den Formeln 17), 18) und 19*) zu folgenden:

$$20)\quad \begin{aligned}
\varphi(v_1)_2\,dv_1 &= \frac{8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{2(1+v_1)^2}{\pi}}\,dv_1\int_0^{(1+v_1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}} e^{-t^2}\,dt, && -1 < v_1;\\
\varphi(v_2)_2\,dv_2 &= 2(1+v_2)\,e^{-(1+v_2)^2}\,dv_2, && -1 < v_2;\\
\varphi(v_3)_2\,dv_3 &= (1+v_3)\big(0{,}86\,e^{-1{,}18(1+v_3)^2} + 0{,}64\,e^{-1{,}34(1+v_3)^2}\\
&\qquad + 0{,}94\,e^{-1{,}15(1+v_3)^2}\big)\,dv_3, && -1 < v_3.
\end{aligned}$$

Die Figuren 13, 14 und 15 zeigen die Curven $\varphi(v_2)$ und überdies die entsprechenden $\psi(v_2)$, für welch letztere Fig. 16 noch eine besondere Zusammenstellung bietet.

III. Rückblick.

Die Betrachtung der Figuren 9—11 und 13—15 zeigt, dass die Function $\varphi(v)$ sich mit wachsendem n ziemlich rasch der Form des Gauss'schen Fehlergesetzes annähert. Wir werden dies wenigstens für $m = 2$ im folgenden Paragraphen weiter untersuchen, da für diesen Fall die mathematische Behandlung am bequemsten ausfällt. Die Figuren 12 und 16 zeigen ferner, dass nicht, wie bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsendem m, die Wahrscheinlichkeit, es falle $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammen, wächst. Vielmehr bietet offenbar $m = 2$ die meiste Wahrscheinlichkeit. Um dies deutlicher zu erkennen, berechnete ich folgendes Täfelchen der wahrscheinlichen Fehler ν_m [mit der Bedeutung: die Wahrscheinlichkeit für die $\sqrt[m]{\sigma_m}$, zwischen die Grenzen $\sqrt[m]{S_m}(1 \mp \nu_m)$ zu fallen, ist $\frac{1}{2}$]:

II)

	$n=1.$	$n=2.$
$m=1$	0,545	0,372
2	0,515	0,355
3	0,521	0,361

§ 4. Gauss'sches Fehlergesetz (Fortsetzung).

$m=2$, n beliebig.

Es sei zunächst $n=3$ und also die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$ zwischen die Grenzen $3\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle. Nach der zweiten Formel 15) und nach Formel 18) ist aber, wenn ε_1^2 mit x und $\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$ mit y bezeichnet wird:

$$\varphi(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x} x^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$\varphi(y)\,dy = h^2 e^{-h^2 y}\,dy;$$

mithin wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\varphi(\sigma_2)_3\,\delta_2 = \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{3\sigma_2} dx \int_{3\left(\sigma_2-\frac{\delta_2}{2}\right)-x}^{3\left(\sigma_2+\frac{\delta_2}{2}\right)-x} e^{-h^2(x+y)} x^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Berücksichtigt man, dass $(x+y)=3\sigma_2$ ist und δ_2 ein Differential sein soll, so wird

21) $$\varphi(\sigma_2)_3\,\delta_2 = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} (3\sigma_2)^{\frac{1}{2}} e^{-h^2(3\sigma_2)}(3\delta_2).$$

Die Substitution der Relationen 6) ergiebt hieraus

22) $$\varphi(v_2)_3\,dv_2 = 3\sqrt{\frac{6}{\pi}}(1+v_2)^2 e^{-\frac{3}{2}(1+v_2)^2}\,dv_2,$$

zu welcher Function die Fig. 17 eine graphische Darstellung liefert. Zur Prüfung der Formel 17) beachte man noch, dass

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma_2)_3\,\delta_2 = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{h^3} = 1.$$

Ist nun ferner $n = 4$ und demnach die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2$ zwischen die Grenzen $4\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$, so giebt die zweimalige Anwendung der Formel 18) auf die Theile $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = x$ und $\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = y$ leicht

23) $$\varphi(\sigma_2)_4\,\delta_2 = h^4 (4\sigma_2)\, e^{-h^2(4\sigma_2)} (4\,\delta_2)$$

mit der Prüfung

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma_2)_4\,\delta_2 = h^4 . \frac{\Gamma(2)}{h^4} = 1.$$

Die Anwendung der Relationen 6) auf 23) führt zu

24) $$\varphi(v_2)_4\,dv_2 = 8(1+v_2)^3 e^{-2(1+v_2)^2} dv_2,$$

und hierzu giebt Fig. 18 eine graphische Darstellung.

Die vorigen Entwickelungen legen den Schluss nahe, es sei allgemein für beliebiges n die Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon^2]$ zwischen die Grenzen $n\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle, gleich

25) $$\varphi(\sigma_2)_n\,\delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (n\,\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2 n \sigma_2}\, n\,\delta_2,$$

wozu ferner die Formel gehört

26) $$\varphi(v_2)_n\,dv_2 = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} (1+v_2)^{n-1} e^{-\frac{n}{2}(1+v_2)^2} dv_2, \quad -1 < v_2.$$

Zunächst bestätigt die Integration nach σ_2 die Formel 25); um ihre Richtigkeit nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass sie auch für $(n+2)$ besteht, da sie bereits für $n = 1$ und 2 gilt. Wir setzen $[\varepsilon^2]_1^n = x$ und $\varepsilon^2_{n+1} + \varepsilon^2_{n+2} = y$. Dann geben die Formeln 18) und 25) für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der $(n+2)$ Fehlerquadrate zwischen $(n+2)\left(\sigma_2 \mp \frac{\delta_2}{2}\right)$ falle, den Ausdruck

$$\varphi(\sigma_2)_{n+2}\,\delta_2 = \frac{h^{n+2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{(n+2)\sigma_2} dx \int_{(n+2)\left(\sigma_2 - \frac{\delta_2}{2}\right)-x}^{(n+2)\left(\sigma_2 + \frac{\delta_2}{2}\right)-x} e^{-h^2(x+y)}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, dy,$$

woraus man, wie bei früheren entsprechenden Fällen, leicht folgert, dass

$$\varphi(\sigma_2)_{n+2}\,\delta_2 = \frac{h^{n+2}}{\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\overline{n+2}\,.\,\sigma_2)^{\frac{n}{2}} e^{-h^2(n+2)\sigma_2} (n+2)\,\delta_2.$$

Setzt man aber in 25) für n den Werth $n+2$, so erhält man die soeben abgeleitete Formel, indem $\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$. Mithin gilt Formel 25) allgemein.

Ist n nur einigermassen gross, so hat man nach der Formel*

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots}$$

zur Vereinfachung der Formel 26) für deren ersten, von v_2 unabhängigen Theil sehr nahe

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{\frac{n}{2}},$$

welcher Ausdruck für $n=16$ etwa 1 Procent, für $n=160$ etwa 1 Promille u. s. f. fehlerhaft ist. Aus 26) wird damit

$$\text{27)}\qquad \varphi(v_2)_n\,dv_2=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,(1+v_2)^{n-1}\,e^{-nv_2\left(1+\frac{v_2}{2}\right)}\,dv_2,$$

und wenn man hierin endlich von der Entwickelung

$$1+v_2=e^{v_2-\frac{1}{2}v_2^2+\frac{1}{3}v_2^3\cdots}$$

Gebrauch macht, welche für $v_2^2<1$ giltig ist, so ergiebt sich

$$\text{28)}\qquad \varphi(v_2)_n\,dv_2=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-v_2-(n-\frac{1}{2})v_2^2+\frac{n-1}{3}v_2^3\cdots}\,dv_2.$$

Dieser Näherungsausdruck zeigt deutlich, unter welchen Bedingungen man berechtigt ist,

$$\text{29)}\qquad \varphi(v_2)_n\,\delta_2=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-nv_2^2}\,dv_2$$

zu setzen. Der Exponent von e heisst nämlich genauer

$$-nv_2^2\left(1+\frac{1}{nv_2}-\frac{1}{2n}-\frac{v_2}{3}\cdots\right)$$

und zur Anwendbarkeit der Formel 29) gehört mithin, dass [während für $v_2=0$ die Ausdrücke 27) und 29) jedenfalls übereinstimmen] auch für Werthe v_2 von der Ordnung $1:\sqrt{n}$ die Parenthese des Exponenten gleich eins gesetzt werden darf; für grössere v_2 gilt die Formel 29) alsdann auch noch, weil dafür übereinstimmend mit der strengeren Formel 27) der geringere Betrag der Exponentialgrösse die Wahrscheinlichkeit $\varphi(v_2)_n$ überhaupt nahezu auf Null reducirt.

Durch einmalige Differentiation nach v_2 findet man leicht, dass nach der strengen Formel 26) der Maximalwerth von $\varphi(v_2)_n$ zu

---

* Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, 1866. S. 260.

$$v_2 = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n}},$$

d. i. nahe $-\frac{1}{2n}$ gehört, während die Näherungsformel 29) $v_2 = 0$ fordert. Beide Maximalwerthe stehen im Verhältniss $1 : \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

Durch zweimalige Differentiation nach v_2 findet man ferner aus 26) als Abscissen der Wendepunkte der Curve $\varphi(v_2)_n$:

$$v_2 = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2n} \pm \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{7}{4n^2}}}, \quad \text{d. i. nahe} \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{2n} \ldots;$$

dagegen liegen die Wendepunkte nach 29) bei $\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Wie die strenge Formel zeigt, sind schon für $n = 2$ beide Wendepunkte reell (Fig. 14).

Um ein Beispiel in Zahlen zu haben, setzen wir $n = 100$ und erhalten dafür nach Formel 27), resp. 29) folgende Werthe von $\varphi(v_2)_{100}$:

	(27).	(29).
$v =$ 0	5,64*	5,64
+ 0,1	1,94	2,08
− 0,1	2,21	
+ 0,2	0,11	0,10
− 0,2	0,09	
+ 0,3	0,0012	0,0007
− 0,3	0,0003	

§ 5. Beliebiges Fehlergesetz; Anzahl n der Beobachtungen sehr gross.

Wir behandeln diesen Fall nach dem Vorgange von Poisson** und Glaisher*** bei einer ähnlichen Untersuchung mit $m = 1$. Die Formeln 4) und 5*) ergeben unter Beachtung der Relation $e^{i\gamma z} = \cos\gamma z + i \sin\gamma z$, dass die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\sigma_m)_n \, \delta_m$ gleich ist dem reellen Theile von

---

* Der Maximalwerth für $v_2 = -\frac{1}{200}$ ist 5,67.

** Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von Schnuse, 1841, S. 227 und 475.

*** *Philosophical Magazine, Vol. XLIII, 1872,* S. 194.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^a\psi(\varepsilon)\,e^{iz\varepsilon^m}\,d\varepsilon\right)^n\frac{\sin zn\left(\sigma_m+\frac{\delta_m}{2}\right)-\sin zn\left(\sigma_m-\frac{\delta_m}{2}\right)}{z}\,dz.$$

Setzt man hierin

$$\int_0^a\psi(\varepsilon)\cos z\,\varepsilon^m\,d\varepsilon=R\cos r$$

und

$$\int_0^a\psi(\varepsilon)\sin z\,\varepsilon^m\,d\varepsilon=R\sin r,$$

so geht die grosse Parenthese in Re^{ir} über, und erhebt man dies zur n^{ten} Potenz und trennt alsdann die reellen und imaginären Theile, so wird

$$30)\quad \varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R^n\cos rn\,\frac{\sin zn\left(\sigma_m+\frac{\delta_m}{2}\right)-\sin zn\left(\sigma_m-\frac{\delta_m}{2}\right)}{z}\,dz.$$

Für R^2 ergiebt sich durch Quadriren und Addiren der Werthe von $R\cos r$ und $R\sin r$, sowie nach weiterer Reduction in bekannter Weise

$$31)\qquad R^2=\int_0^a\int_0^a\psi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon')\cos z(\varepsilon^m-\varepsilon'^m)\,d\varepsilon\,d\varepsilon'.$$

Löst man nun in den Ausdrücken für $R\cos r$, $R\sin r$ und R^2 den $\cos$, resp. $\sin$ in eine Potenzreihe auf, so ergiebt sich weiter [mit Benutzung der Formel 1)]

$$32)\qquad \begin{aligned} R\cos r&=1-\frac{z^2}{2}S_{2m}+\frac{z^4}{24}S_{4m}-\ldots,\\ R\sin r&=zS_m-\frac{z^3}{6}S_{3m}+\ldots,\\ R^2&=1-Az^2+Bz^4-Cz^6+\ldots,\end{aligned}$$

worin die Coefficienten A, B, $C\ldots$ als Quadratsummen folgende positive Werthe haben:

$$\begin{aligned} A&=S_{2m}-S^2_m,\\ B&=\tfrac{1}{12}(S_{4m}-4S_{3m}S_m+3S^2_{2m}),\\ C&=\tfrac{1}{360}(S_{6m}-6S_{5m}S_m+15S_{4m}S_{2m}-10S^2_{3m}).\end{aligned}$$

Indem nun für wirkliche Fehlergesetze $\psi(\varepsilon)$ immer der Gleichung

$$\lim_{p=\infty}\left(\frac{S_{pm}}{(p-1)\,p\,S_{(p-2)m}}\right)=0$$

Genüge geleistet werden wird, so gelten die Reihen 32) für jedes endliche z.*

Der Ausdruck 31) zeigt nun, dass R^2 im Allgemeinen ein echter Bruch und nur für $z=0$ der Einheit gleich ist. Je grösser mithin n angenommen wird, um so kleiner wird R^n im Allgemeinen sein und es werden nur diejenigen R^n in Betracht kommen, welche zu $z=0$ und sehr nahe Null gehören. Es kommt hierbei Nichts darauf an, ob R^2 mit wachsendem z nicht durchaus abnimmt, sondern theilweise vielleicht wieder zunimmt, da das Integral in 30), wenn man die untere Grenze Null durch einen kleinen z-Werth ersetzt, jedenfalls nach bekannten Formeln mit wachsendem n sich dem Grenzwerthe Null nähert. Für die Geschwindigkeit dieser Annäherung ist von Bedeutung, dass R^2 für $z>0$ nicht wieder einmal sehr nahe gleich Eins wird, was man wohl ohne weitere Untersuchung aus 31) herauslesen darf; ferner, dass R^2 für $z=\infty$ gleich Null wird. Dies erkennt man am bequemsten an $R\,sin\,r$ und $R\,cos\,r$ einzeln. Setzt man in dem Integralausdrucke für $R\,sin\,r$ an Stelle von ε^m die neue Variable t, so ergiebt sich

$$R\,sin\,r = \frac{1}{m}\int_0^{a^m} t^{\frac{1}{m}}\,\psi\left(t^{\frac{1}{m}}\right)\frac{sin\,z\,t}{t}\,dt,$$

und da $\varepsilon\psi(\varepsilon)$ ohne Zweifel immer endlich bleibt, für $\varepsilon=0$ aber Null ist, so ist $\underset{z=\infty}{Lim}\, R\,sin\,r = 0$.

In dem Integralausdrucke für $R\,cos\,r$ setzen wir an Stelle von $z\varepsilon^m$ die neue Variable t_1 und erhalten

$$R\,cos\,r = \frac{1}{m\,z^{\frac{1}{m}}}\int_0^{z a^m} \frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t_1}{z}}\right)}{t_1^{\,1-\frac{1}{m}}}\,cos\,t_1\,dt_1.$$

Bedeuten aber p eine ganze Zahl, ϱ einen echten Bruch, derart, dass $z a^m = (p+\varrho)\frac{\pi}{2}$, so zerfällt das letzte Integral in $(p+1)$ Integrale mit den Grenzen $0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2},\ \ldots,\ p\frac{\pi}{2},\ (p+\varrho)\frac{\pi}{2}$, und substituirt man in

* In dem bekannten Poisson'schen Ausnahmefalle, für welchen

$$\psi(\varepsilon) = \frac{2}{\pi(1+\varepsilon^2)}$$

ist, werden die S unendlich und geschieht auch jener Bedingung nicht Genüge. Aber dieser Ausnahmefall entspricht, da eben S unendlich ist, gar keinem thatsächlichen Fehlergesetze.

diesen die resp. neuen Variablen $t_1 = t,\ t+\frac{\pi}{2},\ t+2.\frac{\pi}{2},\ \ldots,$ so ergiebt sich

$$R\cos r = \frac{1}{m\,z^{\frac{1}{m}}}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t}{z}}\right)}{t^{1-\frac{1}{m}}}-\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\pi}{z}}\right)}{(t+\pi)^{1-\frac{1}{m}}}+\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+2\pi}{z}}\right)}{(t+2\pi)^{1-\frac{1}{m}}}-\ldots\right)\cos t\,dt \\ \displaystyle -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\frac{\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}}-\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+\frac{3\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}}+\ldots\right)\sin t\,dt \\ \displaystyle \qquad\qquad + \int_0^{\varrho\frac{\pi}{2}}\frac{\psi\left(\sqrt[m]{\frac{t+p\frac{\pi}{2}}{z}}\right)}{\left(t+p\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}}}\cos\left(t+p\frac{\pi}{2}\right)dt \end{array}\right\}.$$

Wird z unendlich gross, so wird auch p unendlich gross, aber die beiden ersten Reihen von Integralen behalten endliche Werthe, da sie convergiren, sobald $\psi(\varepsilon)$ nur die Eigenschaft hat, von einem gewissen $\varepsilon \lhd a$ nicht mehr zuzunehmen (falls es überhaupt mit wachsendem ε zum Theil zunimmt). Bei Fehlergesetzen wird dies immer zutreffen. Der Werth des dritten Integrals convergirt ebenso, wie die letzten Glieder der erwähnten beiden Reihen mit wachsendem p gegen Null. Da nun der sonach endliche Werth der geschlungenen Parenthese durch $z^{\frac{1}{m}}$ dividirt wird, so ist $\underset{z=\infty}{Lim}\, R\cos r = 0$.

Für die nunmehr allein zu berücksichtigenden kleinen z-Werthe ist in gleichgrosser Annäherung

$$R^2 = e^{-Az^2}, \quad r = z\,S_m.$$

Die genaueren Werthe würden sein, wenn man zugleich auf R^n und rn übergeht:

$$R^n = e^{-\frac{1}{2}Az^2n - \frac{1}{4}(A^2-2B)z^4n - \frac{1}{6}(A^3-3AB+3C)z^6n\ldots},$$

$$rn = zn\,S_m - \frac{z^3n}{6}(S_{3m} - 3S_{2m}S_m + 2S^3_m)\ldots.$$

Denkt man sich z von Null bis zu einem Werthe z_0 wachsend, für welchen $e^{-\frac{1}{2}Az_0^2n}$ bereits sehr klein, also $\frac{1}{2}Az_0^2n$ eine grössere Zahl ist (etwa 6), so muss für diesen Werth z_0 jedes der Glieder mit z_0^3n, $z_0^4n, \ldots$

in R^n und rn noch hinreichend klein sein, um vernachlässigt werden zu können. Ohne Zweifel hängt dies sehr von der Beschaffenheit des Fehlergesetzes ab. Man hat beispielsweise bei dem Gauss'schen Gesetz für $m=1$

$$R^n = e^{-u_1 + \frac{0{,}144}{n} u_1^2 + \frac{3{,}8}{n^2} u_1^3 \ldots}, \quad u_1 = 0{,}285 \frac{z^2 n}{h^2 \pi},$$

$$rn = \frac{zn}{h\sqrt{\pi}} - 0{,}47 \frac{u_1^{3/2}}{\sqrt{n}} \ldots;$$

ferner ist bei demselben Fehlergesetz für $m=2$

$$R^n = e^{-u_2 + \frac{2}{n} u_2^2 - \frac{16}{3n^2} u_2^3 \ldots}, \qquad u_2 = \frac{z^2 n}{4h^4},$$

$$rn = \frac{zn}{2h^2} - \frac{4}{3} \frac{u_2^{3/2}}{\sqrt{n}} \ldots.$$

Bei gleichem Grade der Annäherung muss hiernach im zweiten Falle n etwas grösser als im ersten angenommen werden. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit constant, so hat man für $m=1$

$$R^n = e^{-u_1 - \frac{0{,}2}{n} u_1^2 - \frac{0{,}076}{n^2} u_1^3 \ldots}, \quad u_1 = \frac{a^2 z^2 n}{24},$$

$$rn = \frac{azn}{2} - 0 \frac{u_1^{3/2}}{\sqrt{n}} \ldots.$$

Dagegen ist für $m=2$

$$R^n = e^{-u_2 - \frac{0{,}14}{n} u_2^2 - \frac{0{,}004}{n^2} u_2^3 \ldots}, \quad u_2 = \frac{2a^4 z^2 n}{45},$$

$$rn = \frac{a^2 zn}{3} - \frac{2{,}9}{\sqrt{n}} \cdot u_2^{3/2} \ldots.$$

Für sich allein geben diese Entwickelungen wenig Aufschluss über den Grad der Annäherung. Es ist aber früher gezeigt worden, dass $n=100$ für $m=2$ beim Gauss'schen Gesetz schon eine starke Annäherung der Function $\varphi(v_2)$ an das Gauss'sche Fehlergesetz zeigt (was, wie sich finden wird, mit der Zulässigkeit der oben erwähnten Abkürzung von R^n und rn auf je ein Glied zusammenfällt); da nun in den vier speciellen Fällen die Reihen für R^n und rn sich wenigstens nicht sehr erheblich von einander unterscheiden, so kann man wohl erwarten, dass für diese Fälle $n=100$ eine beiläufig gleichstarke Annäherung bietet.

Der Ausdruck 30) geht unter Einführung der vereinfachten Ausdrücke von R^n und rn über in

$$33)\quad \varphi(\sigma_m)_n \delta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} A z^2 n} \cos znS_m \frac{\sin zn\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right) - \sin zn\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)}{z} dz,$$

worin die obere Grenze unbedenklich von z_0 bis ∞ ausgedehnt werden konnte, da der dadurch entstehende Fehler wohl noch geringer ist, als der durch Vernachlässigung des strengen Integralwerthes von z_0 bis ∞. Zerlegt man nun in 33) die Producte $\cos . \sin$ in die Differenz zweier $\sin$ und wendet die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z^2}\frac{\sin\beta z}{z}\,dz = \sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-t^2}\,dt$$

an, so erhält man nach einfacher Reduction

$$\varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{\frac{n\left(S_m+\sigma_m-\frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}}^{\frac{n\left(S_m+\sigma_m+\frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}} e^{-t^2}\,dt + \int_{\frac{n\left(S_m-\sigma_m-\frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}}^{\frac{n\left(S_m-\sigma_m+\frac{\delta_m}{2}\right)}{\sqrt{2An}}} e^{-t^2}\,dt\right\},$$

demnach mit Berücksichtigung des Betrages von δ_m

$$\varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m = \delta_m\sqrt{\frac{n}{2A\pi}}\left\{e^{-\frac{(S_m+\sigma_m)^2 n}{2A}} + e^{-\frac{(S_m-\sigma_m)^2 n}{2A}}\right\}.$$

Die erste der beiden Exponentialgrössen kann vernachlässigt werden, da sie für jeden Werth von σ_m sehr klein ist. Damit hat man schliesslich unter gleichzeitiger Restitution des Ausdruckes für A

$$\text{34)}\qquad \varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m = \sqrt{\frac{n}{2\pi(S_{2m}-S^2_m)}}\; e^{-\frac{n(S_m-\sigma_m)^2}{2(S_{2m}-S^2_m)}}\,\delta_m.$$

Die Differenzen $(S_m - \sigma_m)$ befolgen hiernach das Gauss'sche Fehlergesetz, wobei die Präcision gleich $\sqrt{\frac{n}{2(S_{2m}-S^2_m)}}$ ist. Es ist ferner also die Wahrscheinlichkeit, dass σ_m zwischen die Grenzen

$$\left(S_m \mp 0{,}6745\sqrt{\frac{S_{2m}-S^2_m}{n}}\right)$$

fallen werde, gerade $\frac{1}{2}$.

Bildet man zur Probe das Integral von $\varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m$ für σ_m von Null bis ∞, wobei $(S_m-\sigma_m)$ von S_m bis $-\infty$ geht, so erhält man zwar nicht genau, aber doch sehr nahe eins, indem der daran fehlende Betrag des Integrals von S_m bis $+\infty$ nur sehr wenig beträgt.

Wenn wir nun in 34) noch die Relationen 6) substituiren, so ist zu bedenken, dass nur sehr kleine $(S_m-\sigma_m)$, also auch nur sehr kleine v_m eine merkliche Wahrscheinlichkeit haben. Man darf daher abgekürzt setzen

$$\sigma_m = S_m\,(1 + m\,v_m)\,,\quad \delta_m = m\,S_m\,d\,v_m$$

und erhält damit aus 34)

$$35)\qquad \varphi(v_m)_n\,d\,v_m = \sqrt{\frac{n\,m^2\,S^2_m}{2\,\pi\,(S_{2\,m} - S^2_m)}}\;e^{-\frac{n\,m^2\,S^2 m}{2(S_2\,m - S^2 m)}\,v^2 m}\,d\,v_m\,;$$

es befolgen hiernach auch die v_m um so genauer das Gauss'sche Gesetz, je grösser n ist. Die Präcision ergiebt sich für dieselben gleich $\sqrt{\frac{n\,m^2\,S^2_m}{2\,(S_{2\,m} - S^2_m)}}$ und die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, dass $\sqrt[m]{\sigma_m}$ zwischen die Grenzen falle

$$36)\qquad \sqrt[m]{S_m}\left(1 \mp 0{,}6745\sqrt{\frac{S_{2\,m} - S^2_m}{n\,m^2\,S^2_m}}\right).$$

Den in der Parenthese stehenden Ausdruck mit dem Vorzeichen $\mp$ werden wir, wie früher, kurz v_m nennen.

§ 6. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit; n sehr gross.

Hier ist $S_m = \frac{a^m}{m+1}$, womit 36) giebt

$$37)\qquad \sqrt[m]{S_m}\left(1 \mp \frac{0{,}6745}{\sqrt{n\,(2\,m+1)}}\right).$$

Zum Vergleiche mit dem Täfelchen I) für $n = 1, 2$ und $m = 1, 2, 3$ führen wir diese Werthe in 37) ein und erhalten damit, correspondirend mit I), folgendes Täfelchen der v_m:

I*)

	$n = 1.$	$n = 2.$
$m = 1$	0,39	0,28
2	0,30	0,21
3	0,25	0,18

woraus hervorgeht, dass für kleinere Exponenten m schon wenige Beobachtungen n ausreichen, um Formel 37) anwenden zu dürfen. Die Annäherung ist offenbar hinsichtlich dieser Formel allein eine viel grössere, als hinsichtlich der Function $\varphi(\sigma_m)$, resp. $\varphi(v_m)$ an das Gauss'sche Gesetz.

Die Formel 37) bestätigt nun für viele Beobachtungen, was früher schon für wenige gefunden wurde: Es ist die Wahrscheinlichkeit dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfallen werde, um so grösser, je grösser der Exponent m angenommen wird.

Wenn nun der wahrscheinliche Beobachtungsfehler unbekannt ist und man will ihn (oder einfacher den Maximalfehler a) aus einem gegebenen σ_m berechnen nach der Formel

38) $$a = \sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m},$$

welche Formel annimmt, dass σ_m gerade S_m sei, so ist es vortheilhaft, m thunlichst gross anzunehmen. Wie sich aber hierzu die günstigsten Hypothesen über a bei gegebenen ε verhalten, soll weiterhin untersucht werden.

§ 7. Gauss'sches Fehlergesetz; n sehr gross.

Hier ist $S_m = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m \sqrt{\pi}}$ und daher

39) $$S_1 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}; \qquad S_m = \frac{1.2.3\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}{h^m\sqrt{\pi}}, \quad m \text{ ungerade};$$
$$S_{2p} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p\,h^{2p}}, \quad m = 2p.$$

Setzt man zur Abkürzung

39*) $$S_m = \frac{\alpha}{h^m}, \quad S_{2m} = \frac{\beta}{h^{2m}},$$

so ergiebt sich nun anstatt 36)

40) $$\sqrt[m]{S_m}\left(1 \mp 0{,}6745\sqrt{\frac{\beta-\alpha^2}{n\,m^2\,\alpha^2}}\right).$$

Um zu sehen, welche Annäherung dieser Ausdruck für kleine n bietet, setzen wir darin $m = 1$ bis 3 für $n = 1$ und 2 und erhalten damit folgendes, dem Täfelchen II correspondirende Täfelchen der wahrscheinlichen Grenzen ν_m:

II*)

.	$n = 1.$	$n = 2.$
$m = 1$	0,510	0,360
2	0,477	0,337
3	0,497	0,352

Hiernach ist die Annäherung der Formel 40) schon für kleinere n jedenfalls eine bedeutende wie sich ebenfalls bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit fand. Gegen diesen Fall zeigt sich aber der Unterschied, dass die zweiten Fehlerpotenzen die engsten Grenzen $\mp \nu_m$ geben: Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die $\sqrt[m]{\sigma_m}$ mit der $\sqrt[m]{S_m}$ zusammenfallen werde, am grössten für den Exponenten $m = 2$. Gauss gab zu diesem Satze, der hier für kleines und grosses n bewiesen ist, die Formel 40) unter Voraussetzung eines grossen n und wandte dieselbe auf $m = 1$ bis 6 an. Es bleibt bei Betrachtung der betreffenden

ν_m kein Zweifel, dass mit weiter wachsendem m auch ν_m weiter zunehmen werde; immerhin könnte schliesslich einmal eine Aenderung dieser Verhältnisse eintreten. Doch ist dies nicht der Fall, wie sich leicht zeigen lässt. Setzt man nämlich, da es sich nur um grössere m handeln kann, in dem Ausdrucke für S_m näherungsweise, aber doch sehr nahe richtig $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}e^{-\frac{m+1}{2}}$ (vergl. § 4), so geht 40) über in

$$41)\qquad \sqrt[m]{S_m}\left(1\mp 0{,}6745\sqrt{\frac{1}{nm^2}\left[\sqrt{\frac{e}{2}}\left(\frac{2m+1}{m+1}\right)^m-1\right]}\right)$$

und man sieht sofort, dass der Radicand der Quadratwurzel mit wachsendem m immer rascher wächst.

Nach dem Vorhergehenden ist es bei unbekannter Präcision h am vortheilhaftesten, sich des Durchschnitts σ_2 der zweiten Potenzen gegebener Fehler zu bedienen, um h zu berechnen. Man wird, indem man annimmt, es sei σ_2 gerade S_2, setzen

$$42)\qquad h=\frac{1}{\sqrt{2\sigma_2}}.$$

§ 8. Constante Fehlerwahrscheinlichkeit; verschiedene Hypothesen.

In den bisherigen Betrachtungen wurde, soweit es sich um die Ermittelung des Maximalfehlers a handelte, angenommen, dass ein gegebenes σ_m für S_m genommen werde. Diese Hypothese, dass σ_m gerade S_m sei, ist in der That die praktisch bequemste und allein durchführbare. Aber die beste ist es nicht immer. Darauf wird man schon dadurch aufmerksam, dass bei bekanntem a die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens für $\sigma_m=S_m$ nur ein Maximum bei sehr grossen n ist, nicht aber bei kleinen n.

Um zur besten Hypothese, aus einem bestimmten σ_m a zu berechnen, zu gelangen, differenziren wir 34) nach a und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Je grösser n ist, um so genauer wird für die beste Hypothese $a=\sqrt[m]{(m+1)\sigma_m}$, mit der frühern Rechnung nach 38) übereinstimmend.

Für kleine m fehlt aber diese Uebereinstimmung. Die Formeln 7) lehren, dass bei $n=1$ am besten $a=\sqrt[m]{\sigma_m}$, d. i. gleich dem einen gegebenen ε zu setzen ist [und hier würde die Formel 38) $a=\varepsilon\sqrt[m]{(m+1)}$ setzen]. Die Formeln 9) bis 11) zeigen ferner, dass bei $n=2$ und $m=1$ bis 3 am besten $a=\sqrt[m]{2\sigma_m}$, d. i $\sqrt[m]{\varepsilon_1{}^m+\varepsilon_2{}^m}$ zu nehmen ist (Formel 38) würde geben $a = \sqrt[m]{(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m)\frac{m+1}{2}}$. Wie nun die Berechnung von a aus σ_m für $n > 2$ nach der besten Hypothese sich gestaltet, lässt sich ohne mühsame Untersuchung nicht angeben. Daher muss man eben im Allgemeinen zur praktisch bequemen Hypothese zurückkehren und nach 38) rechnen.

Immerhin hat diese Formel 38) aber den Mangel, dass sie a kleiner ergeben kann, als den grössten der gegebenen Fehler ε. Nennen wir diesen ε_M, so muss nothwendig $a \geqq \varepsilon_M$ gewählt werden. Es zeigt sich nun wieder, dass auch in dieser Beziehung mit wachsendem m die Hypothese 38) günstiger wird. Denn offenbar ist $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \sqrt[m]{(m+1)\sigma_m} = \varepsilon_M$, indem man zunächst schreiben kann

$$\sqrt[m]{(m+1)\sigma_m} = \varepsilon_M \sqrt[m]{\frac{m+1}{n}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_M}\right)^m + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_M}\right)^m + \ldots\right]}$$

und nun erkennt, dass der Factor von ε_M gegen eins convergirt.

Die Annahme $a = \varepsilon_M$ ist hiernach unter den besten Hypothesen zur Berechnung von a aus irgend einem σ_m die vortheilhafteste. Sie ist aber überhaupt die absolut günstigste Hypothese. Denn sie allein giebt für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der wirklich begangenen Fehler $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, d. h. also für $\frac{1}{a^n}$ ein Maximum.

§ 9. Gauss'sches Fehlergesetz; verschiedene Hypothesen.

Die bisherigen Untersuchungen drehten sich auch bei dem Gauss-schen Fehlergesetz, soweit die Berechnung der Präcision h in Frage kam, um die Annahme, dass σ_m mit S_m zusammenfalle. In der That ist diese Hypothese die praktisch bequemste für die Ermittelung von h aus σ_m; aber sie ist ebenfalls nicht immer die beste Hypothese, was schon der Umstand vermuthen lässt, dass nur für grosses n der wahrscheinlichste Werth von σ_m mit S_m zusammenfällt, während er für kleine n nach unseren früheren Entwickelungen von S_m verschieden ist.

Um zur besten Hypothese, aus einem gegebenen σ_m die Präcision h zu berechnen, zu gelangen, hat man, wie früher durch Differentiation von 34) nach h^m, in welche Formel zunächst für S_m und S_{2m} die Werthe nach 39*) einzuführen sind, die Bedingung

$$1 = \frac{n\alpha\sigma_m}{\beta - \alpha^2} h^m \left(\frac{\sigma_m}{\alpha} h^m - 1\right)$$

und hieraus folgt für h^m mit mehr oder weniger Annäherung an die Strenge

$$43) \qquad h^m = \frac{\alpha}{\sigma_m}\left(1 + \frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2 n}\right) \text{ und } h^m = \frac{\alpha}{\sigma_m}.$$

Hiernach wird man in der That am besten thun, sobald n gross ist, ein gegebenes σ_m für S_m zu nehmen und h nach der Formel

$$44)\qquad h=\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}$$

zu berechnen. Ist aber n klein, so wird (ausgenommen für den Exponenten $m=2$) die beste Hypothese eine andere:

Die Formeln 15) lassen erkennen, dass bei $n=1$ statt 44) besser angenommen werden musste

$$45)\qquad h=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt[m]{\sigma^2_m}}},\ \text{d. i.}\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}.$$

Complicirter werden die Rechnungen zur Ableitung der Ausdrücke für $m\geqq 2$ und man sieht sich genöthigt, von der besten Hypothese abzugehen und durchaus Formel 44) anzuwenden. Diese praktisch bequeme Hypothese scheint sich überdies der besten Hypothese rasch zu nähern. Man hat z. B. für den interessantesten Fall $m=1$

bei $n=1$ nach 44) $h=\dfrac{0{,}564}{\varepsilon}$, dagegen besser nach 45) $h=\dfrac{0{,}707}{\varepsilon}$;

„ $n=2$ „ „ $h=\dfrac{2.0{,}564}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, „ „ „ 17) $h=\dfrac{2.0{,}628}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

Wenn nun h nach Formel 44) berechnet werden soll und man hat die Wahl des Exponenten m frei, so ist's nach § 7 am vortheilhaftesten, mit den zweiten Potenzen zu rechnen. Hieraus folgt natürlich noch gar nicht, dass diese Rechnung die absolut günstigste Hypothese über h ergiebt; denn sobald die n Beobachtungsfehler ε einzeln bekannt sind, könnte ja auch eine andere Function der ε, als gerade ein σ_m, zur genannten Hypothese führen. Nun, bekanntlich ist von Gauss gezeigt worden, dass der Durchschnitt der zweiten Potenzen zur absolut günstigsten Hypothese führt, weil dafür die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der gegebenen ε ein Maximum wird.

§ 10. Gauss'sches Fehlergesetz; wahrscheinlicher Fehler der Hypothesen.

Die Untersuchungen des § 7 lassen nur im Allgemeinen den relativen Werth der Berechnung von h aus verschiedenen σ_m nach Formel 44) erkennen. Es ist erwünscht, den wahrscheinlichen Fehler dieser Hypothesen zu erfahren. Nach 34) ist aber mit Rücksicht auf 39*) die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über h proportional

$$h^m e^{-\frac{n(\alpha-h^m\sigma_m)^2}{2(\beta-\alpha^2)}}.$$

Bezeichnen wir nun den nach 43) berechneten h-Werth mit H und setzen im Allgemeinen $h=H+\lambda$, so giebt der vorige Ausdruck mit Weglassung der von λ unabhängigen Theile

$$46)\qquad \left(1+\frac{\lambda}{H}\right)^m e^{-\frac{n\alpha^2}{2(\beta-\alpha^2)}\left(\frac{\sigma_m}{\alpha}(H+\lambda)^m-1\right)^2}.$$

Da nun hier ein grosses n Voraussetzung ist, so haben nur sehr kleine λ eine in Betracht kommende Wahrscheinlichkeit; man hat daher in zureichender Näherung

$$\left(1+\frac{\lambda}{H}\right)^m = e^{\frac{m\lambda}{H}-\frac{m\lambda^2}{2H^2}},$$

ferner unter Substitution des ersten der Ausdrücke 43)

$$\frac{\sigma_m}{\alpha}(H+\lambda)^m = 1+\frac{m\lambda}{H}+\frac{m(m-1)\lambda^2}{2H^2}+\frac{\beta-\alpha^2}{\alpha^2 n}$$

und daraus in gleicher Annäherung

$$\left(\frac{\sigma_m}{\alpha}(H+\lambda)^m-1\right)^2 = \frac{m^2\lambda^2}{H^2}+2\frac{\beta-\alpha^2}{\alpha^2 n}\left(\frac{m\lambda}{H}+\frac{m(m-1)\lambda^2}{2H^2}\right).$$

Damit geht 46) über in

$$e^{-\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}\lambda^2-\frac{m^2\lambda^2}{2H^2}};$$

hierin darf man aber den zweiten Theil des Exponenten noch gegen den ersten vernachlässigen. Jetzt findet man ohne Weiteres als Wahrscheinlichkeit, dass der richtige Werth von h zwischen $(H+\lambda)$ und $(H+\lambda+d\lambda)$ fällt, den Werth

$$47)\qquad \begin{gathered}\frac{K}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}\lambda^2}d\lambda,\\ K=\sqrt{\pi}:\int_{-H}^{\infty}e^{-\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}\lambda^2}d\lambda=\sqrt{\frac{nm^2\alpha^2}{2H^2(\beta-\alpha^2)}}.\end{gathered}$$

Der letzte Ausdruck für K ist unter der hier sehr unerheblichen Vernachlässigung berechnet, dass die untere Integralgrenze $-H$ auf $-\infty$ ausgedehnt wurde. Ein Blick auf 47) zeigt K in der Bedeutung als Präcision, welche zu den Abweichungen λ gehört, und somit ist die Wahrscheinlichkeit gerade $\frac{1}{2}$, dass der richtige Werth von h zwischen die Grenzen falle

$$48)\qquad \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}\left(1\mp 0{,}6745\sqrt{\frac{\beta-\alpha^2}{nm^2\alpha^2}}\right).$$

Soweit es die Parenthese angeht, stimmt 48) mit 40) überein. Bezüglich der Bedeutung von 48) darf nicht unbetont bleiben, dass sie ein gegebenes σ_m voraussetzt, aus welchem die Präcision berechnet wird, und dass dabei die Werthe der Beobachtungsfehler ε im Einzelnen unbeachtet bleiben, wie es ja eigentlich der Fall ist. Würde man mittelst der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der n Beobachtungsfehler einen dem 48) entsprechenden Ausdruck ermitteln, so würde dieser eine andere Gestalt annehmen; er würde aber (wie mir scheint) keinen praktischen Werth haben. Uebrigens gehen für σ_2 beide Ausdrücke ineinander über. 48) giebt alsdann

$$\sqrt{\frac{1}{2\sigma_2}}\left(1 \mp \frac{0{,}4769}{\sqrt{n}}\right)$$

übereinstimmend mit den von Gauss über die absolut günstige Hypothese gegebenen wahrscheinlichen Grenzen.

Um noch zu sehen, wie sich 48) für kleine n verhält, betrachten wir den Fall $n = 1$ im Anschluss an die Formeln 15). Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese h bei gegebenem σ_m ist hier proportional

$$h e^{-h^2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}}$$

und daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Präcision zwischen h und $h + dh$ liegt, gleich

$$K h e^{-h^2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}} dh,$$

$$K = 1 : \int_0^\infty h e^{-h^2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}} dh = 2 \sigma_m^{\frac{2}{m}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist ferner gerade $\frac{1}{2}$, dass der richtige Werth von h zwischen die Grenzen

49) $$\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}}\,(1 \mp \nu'_m)$$

falle, wobei, wie leicht zu finden ist, ν'_m der Bedingung Genüge zu leisten hat:

50) $$e^{-\alpha^{\frac{2}{m}}(1-\nu'_m)^2} - e^{-\alpha^{\frac{2}{m}}(1+\nu'_m)^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Hieraus hat man folgende Werthe, denen wir die entsprechenden nach 48) an die Seite stellen:

III)

$n = 1$.	Werth ν'_m		Werth $\nu'_m \sqrt[m]{\alpha}\sqrt{2}$	
m.	nach 50). 1.	nach 48). 2.	nach 50). 3.	nach 48). 4.
1	0,589	0,510	0,470	0,407
2	0,440	0,477	0,440	0,477
3	0,382	0,497	0,446	0,580

Die Colonnen 3 und 4 enthalten die Werthe ν'_m, multiplicirt mit einer Grösse, welche dem Werthe von h, wie er aus 48) folgt, proportional ist, wobei zu beachten, dass im vorliegenden Falle die $\sqrt[m]{\sigma_m} = \varepsilon$ wird und daher die h-Werthe nur noch von den α abhängen. Während sonach für $n=1$ die mittelst verschiedener Exponenten m berechneten h-Werthe in einem von ε unabhängigen Verhältnisse stehen, ist für $n>1$ dies nicht mehr der Fall und auch das Verhältniss allgemein nicht mehr angebbar. Im Allgemeinen wird man daher die Güte der Bestimmung von h nach den ν'_m beurtheilen, dagegen im besondern Falle $n=1$ noch auf das angegebene Verhältniss der h-Werthe Rücksicht nehmen (wie in Col. 3 geschehen). Vergleichbar sind nach meiner Ansicht überdies die entsprechenden Werthe der Colonnen 3 und 2 (nicht 4, welche nur der Vollständigkeit halber beigefügt ist); man darf darnach wohl eine rasche Annäherung von 48) an die Strenge mit wachsendem n erwarten.

Bemerkung.

Herr Mees hat S. 126 flg. des XXI. Bandes dieser Zeitschrift auf meine Aeusserung S. 300, XX über seinen frühern Aufsatz geantwortet. Dieser Antwort gegenüber genügt es, wiederum auf meine ebenerwähnte Aeusserung hinzuweisen und Herrn Mees daran zu erinnern, dass ich selbst in meinem Buche auf eine gewisse Unvollständigkeit eines Beweises aufmerksam mache, mir also die Priorität einer „Warnung" verbleibt. Zu den Mängeln meines Buches rechne ich selbstverständlich die betreffende Stelle nicht — indem ich nämlich aus praktischen Gründen der jüngern Gauss'schen Darstellung der Ausgleichungsrechnung im Wesentlichen folgte, musste ich nothwendig auch deren Lücken in Kauf nehmen, die selbst durch lange Untersuchungen nicht vollständig ausfüllbar sind, aber doch Erwähnung verdienen, und zwar auch in einem Lehrbuche. Gestattet eine nur auf das Gauss'sche Fehlergesetz gebaute Ausgleichungstheorie gerade in dem streitigen Punkte auch eine weit befriedigendere Lösung, so verbleiben doch auch einer solchen Theorie noch Lücken genug, um im Hinblick auf den weit complicirteren mathematischen Apparat und die engeren Grenzen der Giltigkeit derselben nicht der andern Darstellungsweise den Vorzug geben zu können.

Helmert.

Kleinere Mittheilungen.

XIII. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen.

§ 1.

Denkt man sich mit der Bahn B (einer Fläche F oder Curve C) des materiellen Punktes P, dessen Masse stets als Einheit genommen werden soll, ein rechtwinkliges System ($\mathfrak{S}$) oder ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) fest verbunden, so wird jeder Bewegung von B eine Bewegung von ($\mathfrak{S}$) entsprechen und umgekehrt. Die unendliche Mannichfaltigkeit der möglichen Bewegungen von B wird der unendlichen Mannichfaltigkeit der Bewegungen von ($\mathfrak{S}$) äquivalent sein. Es wird mithin die Bewegung von B eine völlig willkürliche genannt werden dürfen, sobald man ($\mathfrak{S}$) völlig freie Beweglichkeit gegeben hat.

Dies aber wird erreicht, wenn man einestheils dem Anfangspunkte O' des Systems ($\mathfrak{S}$) jede mögliche Bewegung gestattet, anderntheils jede mögliche Rotation von ($\mathfrak{S}$) um O' zulässt. — Hat nun O', bezogen auf ein festes rechtwinkliges System (S) oder (x, y, z), die Coordinaten x_1, y_1, z_1, denkt man sich ferner durch O' zu irgend einer Zeit t ein dem (S) paralleles System (Σ) oder (ξ, η, ζ) gelegt, so wird jede mögliche Bewegung von ($\mathfrak{S}$), also auch von B berücksichtigt sein, wenn man einestheils die Grössen x_1, y_1, z_1 beliebige Functionen der Zeit sein lässt, anderntheils das System ($\mathfrak{S}$) auf das System (Σ) durch die bekannten Transformationsformeln, als welche hier die Euler'schen benutzt werden sollen, so bezieht, dass man die darin vorkommenden Winkel ψ, ϑ, φ willkürliche Functionen der Zeit sein lässt. — Hier bedeutet ψ den Winkel, welchen der Grundschnitt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene in der $\xi\eta$-Ebene mit der ξ-Axe bildet, ϑ den Neigungswinkel der Ebene $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ zur Ebene $\xi\eta$, φ den Winkel, welchen die Axe der $\mathfrak{x}$ mit jenem Grundschnitte einschliesst. Man kann jene Formeln auch für $\vartheta = 0$ beibehalten; sie stimmen dann mit den Formeln der ebenen Geometrie überein, wenn man nur noch ...n ψ das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, was nach der Ableitungsart (Leroy, Analyt. Geometrie des Raumes, übers. v. Kauffmann, § 89 Anm.) selbstverständlich ist.

Man bewahrt also die volle Allgemeinheit, wenn man die Coordinaten x, y, z von P durch folgende Gleichungen definirt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) + a_1\mathfrak{x} + b_1\mathfrak{y} + c_1\mathfrak{z}, \\ y &= \psi(t) + a_2\mathfrak{x} + b_2\mathfrak{y} + c_2\mathfrak{z}, \\ z &= \chi(t) + a_3\mathfrak{x} + b_3\mathfrak{y} + c_3\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

wo die a, b, c die Coefficienten der Euler'schen Formeln sind und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ noch den Gleichungen der Bahn B, bezogen auf $(\mathfrak{S})$, zu genügen haben.

§ 2.

Von den mechanischen Principien hat nur das d'Alembert'sche Geltung. Es ist vortheilhaft, die zweite der von Lagrange gegebenen Formen dieses Princips anzuwenden. Zu diesem Behufe sind für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ independente Coordinaten q einzuführen, an Anzahl 2, wenn B eine Fläche, 1, wenn B eine Curve ist. Dann wird die Lage von P bestimmt durch Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x &= A_1(t, q_1, q_2), \\ y &= A_2(t, q_1, q_2), \\ z &= A_3(t, q_1, q_2). \end{aligned}$$

Bildet man nun den Ausdruck für die lebendige Kraft, führt die in der Lagrange'schen Formel vorgeschriebenen Differentiationen aus, setzt, wie üblich, $\frac{\partial U}{\partial q} = Q$, so entsteht nach einigen Vereinfachungen die folgende erste Bewegungsgleichung, der die andere ganz analog ist:

$$q''_1\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + q''_2\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{\partial A}{\partial q_2} + q'_1\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{d\frac{\partial A}{\partial q_1}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{d\frac{\partial A}{\partial t}}{dt} + q'_2\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{d\frac{\partial A}{\partial q_2}}{dt} - Q_1 \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0.$$

Hier ist, wie auch im Folgenden stets, durch die Accente die Differentiation nach der Zeit, durch das Zeichen $\mathrel{=\!\!|\!\!=}$ aber, statt des Gleichheitszeichens, das nur durch ein A ohne Index angedeutete Vorkommen dreigliedriger Summen links bezeichnet.

Für die Integration der Bewegungsgleichungen ist es von Wichtigkeit, die Fälle kennen zu lernen, in welchen diese Gleichungen linear sind und in welchen sie t nicht explicite enthalten.

§ 3.

Damit q'^2_1, q'^2_2, q'_1, q'_2 in den Bewegungsgleichungen nicht vorkommen, müssen folgende sechs Gleichungen erfüllt sein:

1) $\Sigma\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{\partial^2 A}{\partial q_1^2} = 0$, 2) $\Sigma\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{\partial^2 A}{\partial q_2^2} = 0$, 3) $\Sigma\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{\partial^2 A}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$,

$$1^*)\ \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_2}\frac{\partial^2 A}{\partial q_2^2}=0, \qquad 2^*)\ \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_2}\frac{\partial^2 A}{\partial q_1^2}=0, \qquad 3^*)\ \Sigma \frac{\partial A}{\partial q_2}\frac{\partial^2 A}{\partial q_1 \partial q_2}=0,$$

wo die Summation über die A zu erstrecken ist. — Mit Berücksichtigung der zwischen den a, b, c des § 1 bestehenden Beziehungen lassen sich diese Bedingungen durch die folgenden ersetzen:

$$1)\ \Sigma\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\right)^2 \text{ darf kein } q_1, \qquad 1^*)\ \Sigma\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\right)^2 \text{ kein } q_2 \text{ enthalten},$$

$$2)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_2^2}=0, \qquad 2^*)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_1^2}=0,$$

$$3)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_1 \partial q_2}=0, \qquad 3^*)\ \Sigma\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial q_1 \partial q_2}=0.$$

Hier repräsentirt $\mathfrak{x}$ die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

Von algebraischen Functionen kann diesen Bedingungen nur genügt werden durch die Form

$$\mathfrak{x}=\lambda q_1+\mu q_2+\nu,$$

wo λ, μ, ν beliebige Constante sind. Hierdurch wird, wie nach Elimination der, resp. des q ersichtlich ist, die Bahn als eine Ebene oder eine Gerade qualificirt.

Sonst wird den Bedingungen nur noch genügt, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die folgende Form haben:

$$\mathfrak{x}=k\cos(\lambda q_1+\mu q_2+\nu)+k_1,$$
$$\mathfrak{y}=k\sin(\lambda q_1+\mu q_2+\nu)+k_2,$$
$$\mathfrak{z}=\alpha q_1+\beta q_2+\gamma,$$

oder sich durch Transformation auf diese Form bringen lassen. Die k, λ, μ, ν, α, β, γ sind wieder Constante. Hierdurch aber wird die Bahn von P entweder als die Fläche eines Kreiscylinders oder als eine auf einer solchen verzeichnete Curve definirt.

Man hat mithin folgendes Resultat:

Die Bewegungsgleichungen sind linear, wenn die Bahn des Punktes P eine Gerade oder eine Ebene, oder die Fläche eines Kreiscylinders oder eine auf einer solchen Fläche verzeichnete Curve ist.

Es hängt also nur von den geometrischen Eigenschaften der Bahn ab, ob die Gleichungen zu den linearen gehören oder nicht.

§ 4.

Es ist ferner für die Integration der Bewegungsgleichungen von Wichtigkeit, die Fälle auszusondern, wo die Zeit nicht explicite in dieen Gleichungen erscheint. Damit nun zunächst t nicht in den Ω stehe, erden die Kraftcomponenten X, Y, Z sowohl von t, als den q frei sein üssen. Dann wird

$$\mathfrak{Q} = X\frac{\partial A_1}{\partial q} + Y\frac{\partial A_2}{\partial q} + Z\frac{\partial A_3}{\partial q},$$

wo t nur noch in den Derivirten $\frac{\partial A}{\partial q}$ stehen könnte.

Dies aber findet zunächst dann nicht statt, wenn jedes A in zwei additive Theile α und a derart zerfällt, dass α nur t, a nur die q enthält. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann t nur noch vorkommen in

$$\Sigma\frac{\partial A}{\partial q}\frac{d\frac{\partial A}{\partial t}}{dt},$$

was nach unserer Annahme übergeht in

$$\Sigma\frac{\partial a}{\partial q}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Dieses Glied aber ist dann von t frei, wenn die α algebraische Functionen von t, aber von keinem höheren als dem zweiten Grade sind. Nun sind die α mit den Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ des § 1 zu identificiren und man erhält folgendes Resultat:

Die Zeit kommt dann nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn der Punkt P von constanten Kräften beeinflusst wird und die Bahn B eine ausschliesslich translatorische Bewegung hat, die mit constanter Beschleunigung – welche auch Null sein kann — erfolgt.

Gleichzeitig sieht man, dass, wenn die Beschleunigung, mit der B fortschreitet, Null, also die Geschwindigkeit constant ist, diese letztere Constante gar nicht in die Bewegungsgleichungen eintritt, also auf die relative Bewegung von P ohne Einfluss ist.

Bei einer nicht ausschliesslich translatorischen Bewegung von B enthalten zwar ebenfalls die α kein q, aber die a sowohl die q, als auch t. — Schliesst man nun den Fall aus, dass X, Y, Z gleichzeitig Null sind, so wird die Bedingung dafür, dass die $\mathfrak{Q}$' t nicht explicite enthalten, entweder die sein, dass die eine der Kraftcomponenten, z. B. X, verschwindet, während $\frac{\partial A_2}{\partial q}$ und $\frac{\partial A_3}{\partial q}$ kein t enthalten, oder die, dass zwei Kraftcomponenten, z. B. X und Y, Null werden, während $\frac{\partial A_3}{\partial q}$ von t frei ist.

Da aber im ersteren Falle t sofort in $\left(\frac{\partial A_1}{\partial q}\right)^2$ auftritt, so ist nur der zweite in Betracht zu ziehen. In diesem letzteren sind, da

$$A_3 = \chi(t) + \zeta$$

und ζ von t frei ist, alle um O möglichen Rotationen der Bahn B oder des Systems ($\mathfrak{S}$) auf solche um die ζ-Axe eingeschränkt. Lässt man nun die $\mathfrak{z}$-Axe mit dieser und folglich die Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ mit der Ebene der $\xi\eta$ zusammenfallen, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$x = A_1 = \varphi(t) + \mathfrak{x}\cos\psi - \mathfrak{y}\sin\psi,$$
$$y = A_2 = \psi(t) + \mathfrak{x}\sin\psi + \mathfrak{y}\cos\psi,$$
$$z = A_3 = \chi(t) + \mathfrak{z}.$$

Weiter ergiebt sich, dass nunmehr

$$\Sigma\frac{\partial A}{\partial q_1}\frac{\partial A}{\partial q_2} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_1}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_2} + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial q_1}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial q_2} + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial q_1}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial q_2}$$

t nicht explicite enthält, während

$$\Sigma\frac{\partial A}{\partial q}\frac{d\frac{\partial A}{\partial t}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q}[\varphi''(t)\cos\psi + \psi''(t)\sin\psi] + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial q}[\psi''(t)\cos\psi - \varphi''(t)\sin\psi]$$
$$+ \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial q}\chi''(t) - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q}[\mathfrak{x}\psi'^2 + \mathfrak{y}'\psi' + \mathfrak{y}\psi''] + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial q}[\mathfrak{x}'\psi' + \mathfrak{x}\psi'' - \mathfrak{y}\psi'^2]$$

wird.

Damit hier t nicht erscheine, ist zunächst nothwendig, dass ψ' eine Constante ω, ferner, dass $\chi(t)$ eine algebraische Function von t und von keinem höheren als dem zweiten Grade sei. Endlich aber müssen die Ausdrücke

$$\varphi''(t)\cos\psi + \psi''(t)\sin\psi \quad \text{und} \quad \psi''(t)\cos\psi - \varphi''(t)\sin\psi$$

von t frei sein. Diese Ausdrücke gehen durch $\varphi(t) = k\cos\lambda$ und $\psi(t) = k\sin\lambda$ über in

$$\cos(\lambda-\psi)[k'' - k\lambda'^2] - \sin(\lambda-\psi)[k\lambda'' + 2k'\lambda']$$

und

$$\cos(\lambda-\psi)[k\lambda'' + 2k'\lambda'] + \sin(\lambda-\psi)[k'' - k\lambda'^2].$$

Enthält hier $(\lambda-\psi)$ die Zeit explicite, so muss für unsern Fall

$$k\lambda'' + 2k'\lambda' = 0 \quad \text{und} \quad k'' - k\lambda'^2 = 0$$

sein. Dadurch wird eine gewisse Curve $(\varkappa)$ definirt, welche die Bahn von O', resp. die Projection dieser Bahn in die Ebene der xy darstellt.

Unterscheidet sich hingegen λ von ψ nur um eine Constante — die man dann auch gleich Null supponiren darf —, so hat man nur noch dem k einen constanten Werth beizulegen, um zu bewirken, dass in den obigen Ausdrücken t nicht steht.

Es zeigt sich nun auch leicht, dass unter diesen Voraussetzungen t nch in den übrigen Gliedern der Bewegungsgleichungen nicht explicite rkommt. Wir haben also folgendes Resultat:

Von den nicht ausschliesslich translatorischen Bewegungen der Bahn B ist, mit der Ausnahme $(\varkappa)$, die Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe, längs welcher allein Kräfte wirken dürfen, eine Rotation, nit welcher ein constant beschleunigtes Fortschreiten in ler Richtung jener Axe verbunden sein kann, die einzige, unter deren Voraussetzung t nicht explicite in den Bewegungsgleichungen erscheint.

Somit ist die Art der Probleme, bei welchen die Hauptschwierigkeit bei der Integration der Bewegungsgleichungen, das explicite Vorkommen der Zeit in denselben, nicht vorhanden ist, völlig bestimmt. Es kommt hierbei also nur auf die mechanischen Eigenschaften des Systems an.

Minden i. Westf. R. Mischer, Gymnasiallehrer.

XIV. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe

bemerkt Herr P. du Bois-Reymond mit Recht, dass in dem Riemann-Dirichlet'schen Beweise, den ich in meine Schrift „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale“, Halle, bei L. Nebert, aufgenommen habe, der Nachweis fehlt, dass man nicht blos dann, wenn man die Zerlegung des Intervalles dadurch immer weiter treibt, dass man die Theile einer vorhandenen Theilung wieder theilt, und so fort, sondern auch dann, wenn man die Theile in beliebiger Weise kleiner werden lässt, z. B. indem man das Intervall in gleiche Theile theilt und für die Theilungszahl grössere und grössere Primzahlen nimmt, in welchem Falle kein Theilpunkt einer späteren Theilung mit der früheren zusammenfällt — einen und denselben Grenzwerth der Summe erhalte. Es ist hierzu nöthig, das Resultat für eine beliebige Theilung mit dem für eine specielle, z. B. für die durch fortgesetztes Halbiren entstandene zu vergleichen. Da für das einfache Integral ein von diesem Mangel freier Beweis durch Herrn du Bois-Reymond bereits vorhanden ist, derselbe Vorwurf aber auch den Existenzbeweis des Doppelintegrals trifft, so will ich hier den letzteren ergänzen. Dabei bediene ich mich zur Darstellung von Zahlengebieten zweier Veränderlichen der bekannten graphischen Terminologie, bei welcher x, y rechtwinklige Coordinaten einer Ebene sind.

Die Definition des Doppelintegrals habe ich in meiner Schrift so ausgesprochen:

Zerlegt man ein Gebiet T der xy-Ebene (welches der Einfachheit wegen zusammenhängend und einfach-zusammenhängend angenommen werden mag) in n Theile $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$, Flächenelemente genannt, welche der Bedingung unterworfen sind, in allen ihren Ausdehnungen und also auch ihrem Flächeninhalte nach kleiner als eine bestimmte vorgegebene Grösse ω zu sein, und ist die obere Grenze einer in T gegebenen Function $f(x, y)$ G_μ in τ_μ, die untere g_μ, und ist ξ_μ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl, so versteht man unter dem über das Gebiet T ausgedehnten Integral

$$\int f(x, y)\, dT$$

den Grenzwerth, den man erhält, wenn in dem Ausdrucke

$$\sum_{1(\mu)}^{n} \tau_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)],$$

in dem die τ alle kleiner als ω sind, ω der Grenze Null zustrebt.

Dieser Grenzwerth hat aber dann einen Sinn, wenn die kritische Summe

$$\sum_{1(\mu)}^{n} \tau_\mu (G_\mu - g_\mu)$$

mit abnehmenden ω der Grenze Null zustrebt.

Zuerst zeigen wir dies für den Fall, in welchem das Kleinerwerden dadurch bewirkt wird, dass eine vorhandene Theilung $\tau_1^1, \tau_2^1, \ldots \tau^1_{n^1}$, in welcher die Theile kleiner als ω_1 sind, dadurch abgeändert wird, dass die τ^1 auf dieselbe Weise in Elemente zerlegt werden, welche kleiner als ω_2 sind. Die neuen Theile $\tau_1^2, \tau_2^2, \ldots \tau^2_{n^2}$ sind dann so beschaffen, dass die Begrenzungen der $\tau_1^1, \tau_2^1, \ldots$ sämmtlich einen Theil der Begrenzungen von $\tau_1^2, \tau_2^2, \ldots$ bilden, aber nicht umgekehrt. So fährt man fort. Ist nun, wenn μ den Summationsbuchstaben bedeutet,

$$\Sigma \tau^1{}_\mu G^1{}_\mu = A_1, \quad \Sigma \tau^2{}_\mu G^2{}_\mu = A_2, \ldots \Sigma \tau^\nu{}_\mu G^\nu{}_\mu = A_\nu, \ldots,$$
$$\Sigma \tau^1{}_\mu g^1{}_\mu = B_1, \quad \Sigma \tau^2{}_\mu g^2{}_\mu = B_2, \ldots \Sigma \tau^\nu{}_\mu g^\nu{}_\mu = B_\nu, \ldots,$$

so beweist man in derselben Weise, wie es beim einfachen Integral geschieht, dass $A_1, A_2, \ldots$ eine abnehmende (wenigstens nicht zunehmende), $B_1, B_2, \ldots$ eine zunehmende (wenigstens nicht abnehmende) Zahlenreihe bilden, und dass $A_\nu \geq B_\nu$ ist, woraus einmal folgt, dass beide Grössen einer bestimmten endlichen Grenze A, bez. B zustreben, und dann noch, weil $A_\nu - B_\nu$ der kritischen, der Voraussetzung nach mit wachsendem ν verschwindenden Summe gleich ist, dass $A = B$ sein muss. Da $A_{\nu+1} \leq A_\nu$, $B_{\nu+1} \geq B_\nu$ sein muss, so kann man ν so gross annehmen oder, mit anderen Worten, die Theilung so weit treiben, dass, wie nun auch die τ^ν in $\tau^{\nu+1}$ getheilt werden, oder wie auch die Theilung weiter getrieben wird, A_ν, B_ν von A beliebig wenig verschieden sind.

Da aber

$$\sum_\mu \{\tau^\nu{}_\mu g^\nu{}_\mu + \xi^\nu{}_\mu (G^\nu{}_\mu - g^\nu{}_\mu)\} = B_\nu + \xi (A_\nu - B_\nu)$$

zwischen A_ν und B_ν liegt, so nähert sich dieser Ausdruck ebenfalls A, oder der Grenzwerth ist von der Wahl der $\xi^\nu{}_\mu$ unabhängig.

Nun ist zunächst zu erweisen, dass derselbe Grenzwerth erhalten wird, wenn man eine andere Theilung von T, zuerst in $t^1{}_1, t_2^1, t_3^1, \ldots$, dann in $t_1^2, t_2^2, t_3^2, \ldots$ unter derselben Bedingung als vorhin vornimmt, ob dann

$$\Sigma t_\mu [g_\mu + \xi_\mu (G_\mu - g_\mu)] \text{ oder, was hinreicht, } \Sigma t_\mu G_\mu$$

demselben Grenzwerth A zustrebt. Angenommen dieser Grenzwerth sei A', und
$$\Sigma\tau^\nu\ G^\nu{}_\mu = A_\nu,\quad \Sigma t^\lambda{}_\mu G^\lambda{}_\mu = A'_\lambda,$$
so kann man ν, λ so gross annehmen, dass $A_\nu = A + \xi\sigma$, $A'_\lambda = A' + \xi'\sigma$ ist, wenn σ beliebig klein vorgegeben wird, und $\xi\ \xi'$ zwischen Null und Eins liegen.

Legt man nun die zu τ^ν und t^λ gehörigen Theilungsnetze gleichzeitig auf T und bezeichnet (irgendwie gezählt) die hierdurch entstehenden, vollständig durch Theile des Netzes τ^ν und des Netzes t^λ begrenzten Elemente mit $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \ldots$, so ist
$$\Sigma \mathfrak{t}_\mu G_\mu = S$$
sowohl kleiner oder gleich $A + \xi\sigma$, als auch kleiner oder gleich $A' + \xi'\sigma$, und sowohl grösser als A, als auch grösser als A', weil die $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots$ als eine weitere Theilung der τ^ν ebenso wie der t^λ angesehen werden können. Also ist
$$A + \xi\sigma \geqq S \geqq A,\quad A' + \xi'\sigma \geqq S \geqq A'.$$
Da also sich A und A' von S um weniger als σ unterscheiden können, so können sich A und A' nur um weniger als 2σ unterscheiden; sie müssen also, da σ beliebig klein angenommen werden kann, gleich sein.

Nun muss noch gezeigt werden, dass auch bei beliebiger Abnahme der τ derselbe Grenzwerth erreicht wird.

Es sei
$$\Sigma t^\nu{}_\mu G^\nu{}_\mu = A_\nu = A + \xi\sigma$$
und die Theilung so weit getrieben oder ν so gross genommen, dass, wenn σ eine beliebig kleine vorgegebene Grösse bedeutet, ξ zwischen 0 und 1 liegt. Hierauf werde die beliebige Theilung τ zugleich mit t auf T gelegt. Dann kann man die Theilung τ so weit treiben, dass der Flächeninhalt der Summe aller derjenigen τ, durch welche irgend ein Theil der Begrenzung der t hindurchgeht oder sie auch nur berührt, kleiner als $\sigma : M$ wird, wenn M die obere Grenze des absoluten Betrages der Werthe von $f(x, y)$ in T ist; denn man kann offenbar diesen Flächeninhalt beliebig klein machen. Der Beitrag, den die Elemente τ, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, zur Gesammtsumme
$$\Sigma\tau_\mu G_\mu$$
liefern, ist dann, absolut genommen, kleiner als σ.

Legt man beide Theilungen übereinander, so erhält man eine Theilung $\mathfrak{t}$ und es ist
$$\Sigma \mathfrak{t}_\mu G_\mu = A_\nu - \xi'\sigma = A + (\xi - \xi')\sigma,\quad (0 \leqq \xi' \leqq \xi \leqq 1),$$
weil die Theilung $\mathfrak{t}$ als eine weitere Theilung der t angesehen werden kann. Der Beitrag aller Flächentheile $\mathfrak{t}$, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, ist, absolut genommen, jedenfalls kleiner als σ. Folglich ist der Beitrag der Theile τ, die keine Begrenzung von t enthalten, mindestens gleich $A + (\xi - \xi')\sigma - \sigma$, höchstens gleich $A + (\xi - \xi')\sigma + \sigma$, und

nimmt man die Theile τ hinzu, welche Begrenzungsstücke von t enthalten, deren Beitrag zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ liegt, so ist die Gesammtsumme mindestens gleich $A-3\sigma$, höchstens gleich $A+2\sigma$ und, da σ beliebig klein angenommen werden kann, die Grenze derselben gleich A, w. z. b. w.

Auf die von Herrn du Bois-Reymond in dieser Zeitschrift über meine „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" veröffentlichte Kritik will ich nicht eingehen, obgleich ich in vielen Punkten nicht damit übereinstimmen kann. Das dort gegebene Beispiel eines (wie es dort genannt wird) bedingt convergenten Integrals, dessen Element sein Zeichen nicht unendlich oft wechsele, ist verdruckt.

Freiburg i. B., October 1875. J. Thomae.

XV. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei.

Die Herstellung solcher Kärtchen, wie sie Herr Prof. Cantor auf S. 134 der hist.-literar. Abtheilung des vorigen Jahrganges beschreibt, wurde bereits im Jahre 1859 den Secundanern des hiesigen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums bei Gelegenheit der geometrischen Reihen gezeigt. Herr Prof. Schellbach ging nämlich von der Identität aus

$$\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdot\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}=\frac{1-x^{32}}{1-x},$$

woraus sich ergiebt

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{31},$$

und zeigte so, dass sich die Zahlen von 1 bis 31 sämmtlich durch die Potenzen 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 und 2^4 darstellen lassen, da ja auf der linken Seite nur diese Potenzen von 2 als Exponenten des x auftreten, rechts aber als solche alle ganzen Zahlen bis 31. Er fügte hinzu, dass ein Kaufmann mit 5 Gewichtsstücken alle Gewichte von 1 bis 31 wiegen könne.

Ebenso ergiebt sich die Darstellung aller Zahlen von 1 bis 63 durch $2^0, 2^1, \ldots 2^5$, die aller Zahlen von 1 bis 127 durch $2^0, 2^1, \ldots 2^6$, d. h. mit Hilfe von 7 Kärtchen lassen sich alle ganzen Zahlen von 1 bis 127 errathen u. s. f. Allgemein giebt die Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(1+x^{2^\nu})=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=2^{n+1}-1} x^\varrho$$

sofort das Bildungsgesetz solcher Kärtchen. Es kommt z. B. 2^r in allen Zahlen von den Formen $2^{r+1}.n+2^r$, $2^{r+1}.n+2^r+1$ bis $2^{r+1}.n+2^{r+1}-1$ vor.

Eine zweite Sorte von Kärtchen ist die umstehende; sie ist, wie man leicht sieht, analog aus den Potenzen von 3 gebildet. Hier muss man aber den Betreffenden, dem die Kärtchen hingehalten werden, fragen, ob die gedachte Zahl schwach oder stark gedruckt ist. Im ersteren Falle nimmt man die der Karte entsprechende Potenz von 3 mit positivem, im andern Falle mit negativem Vorzeichen. Z. B. $49=+3^4-3^3-3^2$

$+3^1+3^0$. Der Beweis, dass sich alle Zahlen 1, 2 bis $\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$ durch die positiv oder negativ genommenen Potenzen 3^0, 3^1 bis 3^n darstellen lassen, ergiebt sich aus der Identität

$$\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{27}}{1-x^9}\cdots\frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x^{3^n}}=\frac{1-x^{3^{n+1}}}{1-x}.$$

Aus dieser folgt nämlich

$$(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9+x^{18})\ldots(1+x^{3^n}+x^{2\cdot 3^n})=1+x+x^2+\ldots+x^{3^n},$$

und wenn man beiderseits durch $x^{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}$ dividirt,

$$\begin{aligned}&(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)\ldots(x^{-3^n}+1+x^{3^n})\\&=x^{-\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}+\ldots+x^{-2}+x^{-1}+1+x^1+x^2+\ldots+x^{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}.\end{aligned}$$

Also haben wir für unsere Karten ($n=4$)

$$\begin{aligned}&(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27})(x^{-81}+1+x^{81})\\&=x^{-121}+x^{-120}+\ldots+x^{-2}+x^{-1}+1+x^1+x^2+\ldots+x^{120}+x^{121},\end{aligned}$$

d. h. die Darstellung aller Zahlen von 1 bis 121 durch die positiv oder negativ genommenen Potenzen 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4.

I.				II.				III.				IV.				V.			
1	32	62	92	2	32	61	93	5	35	64	93	14	35	55	102	41	62	82	102
2	34	64	94	3	33	65	94	6	36	65	94	15	36	56	103	42	63	83	103
4	35	65	95	4	34	66	95	7	37	66	95	16	37	57	104	43	64	84	104
5	37	67	97	5	38	67	96	8	38	67	96	17	38	58	105	44	65	85	105
7	38	68	98	6	39	68	97	9	39	68	97	18	39	59	106	45	66	86	106
8	40	70	100	7	40	69	101	10	40	69	98	19	40	60	107	46	67	87	107
10	41	71	101	11	41	70	102	11	41	70	99	20	41	61	108	47	68	88	108
11	43	73	103	12	42	74	103	12	42	71	100	21	42	62	109	48	69	89	109
13	44	74	104	13	43	75	104	13	43	72	101	22	43	63	110	49	70	90	110
14	46	76	106	14	47	76	105	14	44	73	102	23	44	64	111	50	71	91	111
16	47	77	107	15	48	77	106	15	45	74	103	24	45	65	112	51	72	92	112
17	49	79	109	16	49	78	110	16	46	75	113	25	46	66	113	52	73	93	113
19	50	80	110	20	50	79	111	17	47	76	114	26	47	67	114	53	74	94	114
20	52	82	112	21	51	83	112	18	48	86	115	27	48	95	115	54	75	95	115
22	53	83	113	22	52	84	113	19	49	87	116	28	49	96	116	55	76	96	116
23	55	85	115	23	56	85	114	20	59	88	117	29	50	97	117	56	77	97	117
25	56	86	116	24	57	86	115	21	60	89	118	30	51	98	118	57	78	98	118
26	58	88	118	25	58	87	119	22	61	90	119	31	52	99	119	58	79	99	119
28	59	89	119	29	59	88	120	32	62	91	120	32	53	100	120	59	80	100	120
29	61	91	121	30	60	92	121	33	63	92	121	33	54	101	121	60	81	101	121
31				31				34				34				61			

Aus der allgemeinen Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(x^{-3^\nu}+1+x^{3^\nu})=\sum_{\varrho=-\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}^{\varrho=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}x^\varrho$$

ergiebt sich, dass z. B. $+3^r$ auftritt in allen Zahlen von den Formen $3^{r+1}.n+\frac{1}{2}(3^r+1)$, $3^{r+1}.n+\frac{1}{2}(3^r+1)+1$ bis $3^{r+1}.n+\frac{1}{2}(3^{r+1}-1)$, und -3^r in denen von den Formen $3^{r+1}.n-\frac{1}{2}(3^{r+1}-1)$, $3^{r+1}.n-\frac{1}{2}(3^{r+1}-1)+1$ bis $3^{r+1}.n-\frac{1}{2}(3^r+1)$.

Berlin. Dr. Felix Müller.

XI.

Ueber Curven auf Rotationsflächen.

Von

Dr. Biehringer,

Professor an der königl. Industrieschule zu Nürnberg.

(Fortsetzung.)

Nr. 14. Mit Hilfe der am Schlusse von Nr. 2 gegebenen Bemerkungen lassen sich sehr schnell die Gleichungen von Curven auf Rotationsflächen auffinden, die in anderer Weise, wie dort, bestimmt sind. Es sollen einige solche Fälle betrachtet und zunächst festgesetzt werden, dass neben $\partial z_t = F$ noch $\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2 = S^2$ gegeben ist. F und S können beliebige Functionen von t vorstellen, dabei soll aber F keinen Coordinatenwerth, S höchstens z enthalten. Die übrigen Stücke werden wie in Nr. 1 angenommen. Denkt man sich das in Nr. 1 näher bezeichnete Elementendreieck, so ist hier durch $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2}\, dt = S\, dt$ die Hypotenuse und durch $\sqrt{1 + \partial f_z^2} . \partial z_t . d = \sqrt{1 + \partial f_z^2} . F . dt$ die eine Kathete gegeben; demnach wird die andere Kathete $= \sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}\, dt$. Wird sodann durch φ der Stellungswinkel der Projection des Radius vectors in der xy-Ebene gegen die x-Axe vorgestellt und das Vorzeichen des letztern Ausdruckes der Drehrichtung des φ entsprechend genommen, so ist

$$d\varphi = \frac{\sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}}{f} . dt,$$

folglich

$$1) \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{S^2 - (1 + \partial f_z^2) F^2}}{f}\, dt.$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen

$$2) \qquad \varrho = f_z$$

und

$$3) \qquad z = \int F\, dt.$$

Für Axencoordinaten ist wieder $x = f . \cos\varphi$ und $y = f . \sin\varphi$.

Sämmtliche Betrachtungen, welche über die Curve der Nr. 1 angestellt wurden, lassen sich auch hier in Anwendung bringen, sobald statt des frühern P der Ausdruck $\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)F^2}$ genommen wird.

Ist statt des Elements des z das Element $M\,dt$ des Meridians gegeben, so tritt an die Stelle der Gleichung 3) die andere

$$\int\sqrt{1+\partial f_z^2}\,dz=\int M\,dt.$$

Lässt man bei der ursprünglichen Curve die Wurzel der Gleichung 1) einmal durchweg positiv, das andere Mal durchweg negativ sein, so erhält man zwei Curven, welche in denselben gegenseitigen Beziehungen stehen, wie die Curven I und II der Nr. 5. An einer Stelle, wo $S^2=(1+\partial f_z^2)F^2$ ist, wo also die Curve den Meridian berührt, kann man ohne Beeinträchtigung der Stetigkeit das Vorzeichen der Wurzel wechseln lassen und dann durch gleichzeitigen umgekehrten Wechsel abermals zwei Curven erhalten, die in denselben Beziehungen, wie I und II in Nr. 5 stehen. In den Fällen, in welchen die Wurzel an der bezeichneten Stelle das Vorzeichen behält, entsteht dort ein Maximum oder Minimum des φ-Werthes; in den anderen Fällen findet dies nicht statt, jedoch erhält die Curve in Bezug auf den Meridian einen Wendepunkt. — Sind durchweg die Constanten der Integrale entsprechend bestimmt, so wird jede der Curven durch den Punkt, bei welchem die Wurzel gleich Null wird, in zwei Theile getheilt, von denen jeder den Meridian zu diesem Punkte berührt und von denen diejenigen Theile, welche zu den Curven mit unveränderlichen Vorzeichen der Wurzel gehören, zugleich auch Theile der andern Curve sind. — Sobald die Wurzel öfter Null wird, kann man den Wechsel des Vorzeichens derselben auf verschiedene Arten eintreten lassen und dadurch gleichviel verschiedene Curven bekommen, die sich wieder paarweise wie I und II verhalten und bei analoger Bestimmung der Constanten ebenso, wie oben, aus den Theilen der Curven zusammengesetzt werden können, bei welchen die Wurzel ihr Vorzeichen behält.

In den obigen Gleichungen ist auch die Lösung der Aufgabe enthalten, die Curve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der sich auf der Rotationsfläche mit einer gegebenen Geschwindigkeit S und zugleich parallel der z-Axe mit einer Geschwindigkeit F fortbewegt. Ueberhaupt findet hier auch Nr. 11 mit den bereits bezeichneten Modificationen Anwendung. Bei gegebenem M tritt an die Stelle der Geschwindigkeit längs der z-Axe die längs des Meridians.

Nr. 15. Um eine weitere Anwendung der Bemerkungen der Nr. 2 zu zeigen, sollen die Gleichungen einer Curve der Rotationsfläche aufgesucht werden, bei welcher jedes, irgend einem t- oder z-Werth folgende Element die zu diesem t-Werth gehörige Diagonale eines Parallelogramms bildet, dessen eine Seite das entsprechende Element einer gegebenen Curve auf der Rotationsfläche, und dessen andere Seite ein bestimmtes Element des Parallelkreises zu z ist. Man könnte das Element der Curve auch als die dritte Seite eines Dreiecks aus den zwei zusammenstossenden Seiten des bezeichneten Parallelogramms hinstellen. Das Element des Parallelkreises sei, wie in Nr. 1, durch $P\,dt$ gegeben und der positiven oder negativen Drehrichtung des φ entsprechend zu nehmen, je nachdem $P\,dt$ positiv oder negativ ist; die gegebene Linie sei die der vorigen Nummer und die Rotationsfläche bestimmt durch $x^2+y^2=f_z^2$.

Unter den Voraussetzungen, welche eben in Bezug auf das Vorzeichen des Elements des Parallelkreises, und welche in der vorigen Nummer in Bezug auf das Vorzeichen der Projection des Elements der gegebenen Curve auf den Parallelkreis angegeben wurden, kann bemerkt werden, dass die Projection des Elements unserer gesuchten Curve auf den fraglichen Kreis gleich der Summe der entsprechenden Projectionen von den anderen Elementen ist und dass durch das Vorzeichen dieser Summe zugleich die Drehrichtung des Elements in Bezug auf die xy-Ebene bestimmt wird. Da ausserdem f den Radius des erwähnten Parallelkreises vorstellt, so ist mit Berücksichtigung von Nr. 14 nacheinander

$$d\varphi=\frac{P\,dt+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)\,F^2}\,.\,dt}{f}$$

oder

1) $$\varphi=\int\frac{P+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)\,F^2}}{f}\,dt.$$

Hierzu treten noch

2) $$\varrho=f_z$$

und

3) $$z=\int F\,dt.$$

Im Allgemeinen lässt sich wieder bemerken, dass sämmtliche Betrachtungen über die Curve der Nr. 1 hier ebenfalls Giltigkeit haben, sobald $P+\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)\,F^2}$ statt des dortigen P genommen wird.

Zu den verschiedenen Entstehungsarten, welche auch hier nach Nr. 11 in Anwendung kommen können, lassen sich mehrere neue hinzufügen. Es soll in dieser Beziehung nur angegeben werden, dass die gefundene Curve durch einen Punkt beschrieben werden kann, der sich auf der gegebenen, mit einer Winkelgeschwindigkeit $=\frac{P}{f}$ um die z-Axe gedrehten Curve, den Gleichungen derselben entsprechend fortbewegt. Die nämliche Curve wird auch erhalten, wenn die gegebene Curve feststeht und dafür die Rotationsfläche mit einer Winkelgeschwindigkeit $=-\frac{P}{f}$ um die z-Axe rotirt.

Lässt man ebenso, wie in Nr. 14, die Wurzel an passender Stelle das Vorzeichen wechseln, so kann man zu denselben F-, P- und S-Werthen verschiedene Curven erhalten. In Bezug auf die Paare dieser Linien, bei welchen die Wurzel an denselben Stellen das Vorzeichen wechselt, soll nur angegeben werden, dass die Curve der Nr. 1 bei diesen Linien die nämliche Rolle spielt, wie der Meridian bei den entsprechenden Linien der Nr. 14, und dass daher auch jedes Paar dieser Linien symmetrisch gegen die Curve der Nr. 1 liegt. Es ist leicht, die Bedingungen anzugeben, für welche diese Linien in die der Nr. 1 oder 14 übergehen.

Bei gegebenem Fortschreiten des Punktes längs des Meridians tritt wieder $\int\sqrt{1+\partial f_z^2}\,dz=\int M\,dt$ an die Stelle der Gleichung 3).

In den Gleichungen der Curve bestimmt $\int\frac{\sqrt{S^2-(1+\partial f_z^2)F^2}}{f}\,dt$ den φ-Werth der gegebenen Curve. Ist nun durch $x=x'_t$, $y=y'_t$, $z=z'_t$ eine beliebige Curve auf der Rotationsfläche gegeben, wo x'_t, y'_t, z'_t beliebige Function von t vorstellen, welche aber der Gleichung $x^2+y^2=f_z^2$ Genüge leisten, und soll mit dieser Curve die Linie dieses Paragraphen bestimmt werden, so darf man nur berücksichtigen, dass $\operatorname{arctang}\frac{y'}{x'}$ ebenfalls den φ-Werth der gegebenen Curve vorstellt und dass der z-Werth durch die Drehung um die Axe keine Aenderung erleidet. Man erhält deshalb in diesem Falle die Gleichungen

$$\varphi=\int\frac{P}{f}\,dt+\operatorname{arctang}\frac{y'}{x'},\quad \varrho=f_z,\quad z=z'_t.$$

Wäre der φ-Werth der gegebenen Curve $=\varphi'_t$ bekannt, so wäre

$$\varphi=\int\frac{P}{f}\,dt+\varphi'_t.$$

Durch die aufgestellten Gleichungen ist es nicht nur möglich, jede Curve zu bestimmen, die auf die gegebene Art erzeugt gedacht wird, sondern es kann auch, weil diese Gleichungen jede Curve auf der Rotationsfläche bestimmen können, rückwärts geschlossen werden, wie die angegebenen Bewegungen beschaffen sein müssen, damit die daraus hervorgehende Linie eine verlangte wird. Nimmt man, wie in Nr. 8, $f'_{x,y,z}=0$ als zweite Bestimmungsgleichung der verlangten Curve, so müssen z. B. die aus $x=f\cos\varphi$, $y=f\sin\varphi$, $z=z'_t$ erhaltenen Werthe auch dieser Gleichung Genüge leisten. Man erhält dadurch für $\int\frac{P}{f}\,dt$, x'_t, y'_t, z'_t neben $x^2+y^2=f^2$ noch eine zweite Bedingungsgleichung, so dass zur vollständigen Bestimmung der Grössen noch irgend zwei Voraussetzungen gemacht werden können. Einfacher gestalten sich wieder die Bedingungen, wenn die gegebene Curve durch die windschiefe Fläche $\varphi = \varphi_s$ mit bestimmt wird.

In praktischen Fällen ist zwar bei der letztbestimmten Art der Erzeugung einer verlangten Linie die Führung des beschreibenden Punktes eine complicirtere, als die in Nr. 11 längs der z-Axe, jedoch ist nicht zu vergessen, dass durch geeignete Annahme der willkürlichen Voraussetzungen die Bewegung des Punktes auf der Leitcurve eine einfache, z. B. eine gleichförmige werden kann. Allerdings setzt dieses Verfahren durch die Hereinziehung der Leitcurve selbst die Zeichnung einer Curve auf der Rotationsfläche voraus, aber in speciellen Fällen kann letzteres möglicherweise keine Schwierigkeiten bereiten.

Nr. 16. Wenn man sich den zeichnenden Punkt der Nr. 11 mit einer Geraden fest verbunden denkt, welche, die z-Axe senkrecht schneidend, in der Ebene des Meridians fortbewegt wird, der zu dem Anfangswerth von φ gehört, so schneidet diese Gerade die sich vorschriftsgemäss drehende Rotationsfläche nach der dort bestimmten Curve. Diese Fortbewegung der Geraden kann nun auch dadurch eingeleitet werden, dass man sie an einer Curve, welche nur in der genannten Meridianebene liegt, so fortgleiten lässt, dass sich der Schnittpunkt mit der z-Axe dem $z = \int F\,dt$ entsprechend fortbewegt. Man kann als Leitcurve der Geraden jede Linie dieser Ebene nehmen, die sich über den Intervall $z = \int F\,dt$ erstreckt, und kann eben deswegen wieder an diese Linien gewisse Forderungen stellen, die sich z. B. auf die Fortführung der Geraden an der Curve beziehen. So kann verlangt werden, die Gerade soll an der Curve gleichförmig fortgleiten und man erhält dann zur Bestimmung der Curve in der xz-Ebene die Bedingungen $z = \int F\,dt$ und $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial z_t^2} = A$, wo A constant ist. Dieselben Bedingungen blieben, wenn A auch irgend eine Function von t, x oder z wird, wenn also die Geschwindigkeit auf der Curve sich ändert.

Zu analogen Folgerungen wird man geführt, wenn in Nr. 15 statt des an der gegebenen Curve fortgleitenden Punktes wieder die Gerade genommen wird, welche durch den Punkt geht und die z-Axe senkrecht schneidet. Letztere bleibt jedoch in diesem Falle nicht in einer Meridianebene, sondern sie beschreibt eine windschiefe Fläche. Bei gleichförmigem Fortschreiten der Geraden an einer Curve der windschiefen Fläche erhält man für diese Linie neben der Gleichung der Fläche noch die Bedingungen $\partial z_t = F$ und $\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2} = A$, wo A eine Constante vorstellt. Die Gleichung der windschiefen Fläche ist für eine gegebene Curve leicht zu bestimmen.

Man sieht endlich noch ein, dass die Gleichungen der Nr. 15 auch dann noch richtig sind, wenn die dortigen x'_t, y'_t, z'_t sich auf eine Curve beziehen, die nicht in der Rotationsfläche liegt, und wenn die Curve zu bestimmen ist, nach welcher die bezeichnete, die z-Axe senkrecht schneidende Gerade die sich drehende Rotationsfläche trifft.

Nr. 17. Es sollen nun einige Beispiele über diese Curven durchgeführt werden. Der zeichnende Punkt bewege sich auf der Rotationsfläche in der Richtung der jeweiligen Parallelkreise mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit $= + \omega$ oder, was dasselbe ist, die Rotationsfläche drehe sich mit dem System um die z-Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $= - \omega$; die durch den zeichnenden Punkt gehende, die z-Axe stets senkrecht schneidende Gerade werde durch einen andern Punkt geführt, der sich gleichförmig auf der Peripherie eines Kreises bewegt, dessen Mittelpunkt im Ursprunge liegt; es soll nun bestimmt werden, welche Curve auf der Rotationsfläche hierdurch entsteht.

Um den Kreis und die Bewegung des Punktes auf demselben zu bestimmen, sei r der Radius, ν' der Winkel der X-Axe mit dem Radius vector der Stelle, an welcher der bewegte Punkt durch die xy-Ebene und auf die Seite tritt, wo die $+z$-Axe liegt, ψ die Winkelgeschwindigkeit des Punktes im Kreise, θ endlich der Winkel der Kreisebene mit der xy-Ebene ψ soll bei $t = t'$ gleich Null sein, dort mit der aufsteigenden Knotenlinie zusammenfallen und in der Richtung der Kreisbewegung gezählt werden. θ sei genau genommen der Winkel, der an der aufsteigenden Knotenlinie von dem Theile der Kreisebene nach der $+z$-Axe hin und von dem Theile der xy-Ebene gebildet wird, welcher sich im Sinne der positiven Drehrichtung erstreckt.

Bei unseren gegebenen Stücken ist es möglich, das φ'_t und z'_t der Nr. 15 sehr rasch und damit auch die Gleichung der Curve zu erhalten. Zunächst ist der Winkel des Radius des Kreispunktes mit der aufsteigenden Knotenlinie zur Zeit $t = \psi(t-t')$; die Projection dieses Winkels auf die xy-Ebene wird bestimmt durch $\tang \nu = \tang[\psi(t-t')] . \cos\theta$, folglich wird $\nu = \operatorname{arctang}[\tang(\psi(t-t')) . \cos\theta]$ und es ist deshalb $\varphi'_t = \nu + \nu'$. — $\operatorname{arctang}$ ist bei $t = t'$ als Null anzunehmen. Berücksichtigen wir noch weiter, dass $\int \frac{p}{f} dt = \int_{t'}^{t} \omega \, dt = \omega(t-t')$ und $z'_t = r \sin[\psi(t-t')] . \sin\theta$ ist, so erhalten wir als Gleichungen der Curve

$$\varrho = f_z, \quad \varphi = \omega(t-t') + \nu' + \operatorname{arctang}[\tang(\psi(t-t')) . \cos\theta],$$
$$z = r \sin[\psi(t-t')] . \sin\theta.$$

Würden wir die Zeit dann zu zählen anfangen, wenn sich der Punkt im aufsteigenden Knoten befindet, ferner durch diesen Punkt die $+X$-Axe legen, so würden die obigen Gleichungen übergehen in

$$\varrho = f_z, \quad \varphi = \omega t + \operatorname{arctang}[\operatorname{tang}\psi t.\cos\theta], \quad z = r \sin\psi t.\sin\theta.$$

Für $\theta = 90^0$ erhalten wir die entsprechenden Resultate der Nr. 12; für $\theta = 0$ erhält man die Bewegung auf dem Parallelkreise der xy-Ebene und es wird $\varphi = (\omega + \psi)t$.

Bei ungleichförmiger Bewegung auf dem Parallelkreise und ungleichförmiger Drehung der Rotationsfläche treten an die Stelle von $\psi(t-t')$ und $\omega(t-t')$ bezüglich $\int\limits_{t'}^{t}\psi\,dt$ und $\int\limits_{t'}^{t}\omega\,dt$.

Ist statt der Winkelgeschwindigkeit ψ die Geschwindigkeit v des Punktes auf dem Kreise gegeben, so ist $\psi = \frac{vt}{r}$ oder $\int\psi\,dt = \frac{t}{r}\int v\,dt$ zu setzen.

Die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde.

Nr. 18. Auch in dem letzten Beispiele kann man analog der Nr. 13 die Geschwindigkeit auf dem Parallelkreise aus zwei Theilen zusammengesetzt denken, den einen Theil constant annehmen und der Umdrehungsgeschwindigkeit des Anfangspunktes entsprechen, den andern Theil veränderlich sein und durch die Rotation der Fläche hervorbringen lassen. Das daselbst behandelte Beispiel liefert unter gleichen Voraussetzungen in Bezug auf p und ω in dem jetzigen Falle die Gleichungen

$$\varrho = f_z, \quad z = r \sin\frac{vt}{r}.\sin\theta,$$

$$\varphi = p\int\frac{1}{f}\,dt - \omega t + \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\frac{vt}{r}.\cos\theta\right] = \frac{2\pi}{\tau}\left(f'\int\frac{1}{f}\,dt - t\right) + \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\frac{vt}{r}\cos\theta\right].$$

Würde in dem letzten Falle die Rotationsfläche eine Kugel sein, die ihren Mittelpunkt im Ursprunge hat, und der Kreis, der die zur z-Axe senkrechte Gerade leitet, den Radius der Kugel erhalten, endlich $\tau = 24.60.60$ werden, so gingen die Gleichungen der Curve über in

$$\varrho = \sqrt{r^2 - z^2}, \quad z = r \sin\frac{vt}{r}\sin\theta,$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\int\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{vt}{r}\sin^2\theta}} - t\right) + \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\frac{vt}{r}.\cos\theta\right].$$

Diese Gleichungen würden, wenn wir die Erde als Kugel betrachten die Bahn bestimmen, welche ein Körper beschreibt, der den Aequator unter dem Winkel θ mit einer Geschwindigkeit v schneidet. Der Körper soll dabei die Umdrehungsgeschwindigkeit des Aequators und, abgesehen von der Rotation der Erde, auch die Geschwindigkeit v auf den durch θ bestimmten grössten Kreis festhalten. Durch die Geschwindigkeit v und ihren Winkel θ mit dem Aequator wäre die Aufgabe noch keine bestimmte; sie wird es erst dadurch, dass man die ganze Bahn vorschreibt, welche der Körper ohne Umdrehung der Erde beschreiben würde. Auf Grund des Beharrungsvermögens und der Wirkung der Schwere kann man diese Bahn als eben und durch den Mittelpunkt gehend betrachten. Dass hier von etwa vorhandenen Bewegungswiderständen Umgang genommen wurde, ist selbstverständlich. Für $\theta = 90^0$ erhalten wir den in Nr. 13 behandelten Fall. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{vt}{r} . \sin^2\theta}} dt$ ist ein elliptisches Integral der ersten Gattung.

Ist die Geschwindigkeit v keine sehr beträchtliche, so ist v im Vergleich zu r klein und man kann bis zu nicht allzugrossen t-Werthen setzen

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{vt}{r} . \sin^2\theta}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2t^2}{r^2} . \sin^2\theta}} dt = \frac{r}{v \sin\theta} \arcsin\left(\frac{vt}{r} . \sin\theta\right),$$

wodurch wird

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left[\frac{r}{v\sin\theta} . \arcsin\left(\frac{vt}{r}\sin\theta\right) - t\right] + \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\frac{vt}{r} . \cos\theta\right].$$

Eine andere Näherungsformel wird mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Analysis erhalten, wenn man auf $\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{vt}{r} . \sin^2\theta}}$ den Binomialsatz anwendet, statt $\sin\frac{vt}{r}$ die nach $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe setzt, nach $\frac{vt}{r}$ ordnet, quadrirt und integrirt. Man erhält dann bis zur fünften Potenz von t das Resultat

$$\varphi = \frac{2\pi . t . \sin^2\theta}{24.60.60}\left[\frac{1}{6} . \frac{v^2t^2}{r^2} + \frac{1}{120} . \frac{v^4t^4}{r^4}(9\sin^2\theta - 4)\right] + \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\frac{vt}{r} . \cos\theta\right].$$

Der erste Theil von φ bestimmt hier die Ablenkung von der ursprünglichen Richtung, welche durch die Umdrehung der Erde veranlasst wird. Die positive Drehrichtung des φ oder die des p geht am Aequator von Westen nach Osten und hierfür ist der genannte Theil immer positiv; ist daher θ spitz, oder geht die Geschwindigkeit v auch nach der Seite hin, so wird φ durch die Umdrehung der Erde vermehrt; im andern Falle wird sein absoluter Werth vermindert. — Die Abweichung auf dem Parallelkreise würde sich in Längenmass ergeben, wenn man den fraglichen Theil von φ mit dem Radius des Parallelkreises der Stelle multiplicirt. Letzterer wird dadurch erhalten, dass man für das angenommene t, oder für $vt = s$, wo s den zurückgelegten Weg vermöge der Geschwindigkeit v bezeichnet, das z berechnet und in $f = \sqrt{r^2 - z^2}$ einsetzt.

Obwohl die obige Integration nicht in endlicher Form ausgeführt wurde, so lassen sich doch in Bezug auf die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde einige allgemein giltige Schlüsse ziehen. Zunächst ist aus der Form der integrirten Reihe ersichtlich, dass der Werth der Ablenkung nicht blos von $vt = s$ oder von dem vermöge der Geschwindigkeit v zurückgelegten Wege abhängig ist, sondern besonders noch von t, also von der Zeit, die der Körper zur Zurücklegung des Weges braucht. Setzt man zu dem Ende $vt = s$ in die Reihe, so wird die Ablenkung

$$\frac{2\pi t \sin^2\theta}{24.60.60}\left[\tfrac{1}{6}\cdot\frac{s^2}{r^2} + \tfrac{1}{120}\cdot\frac{s^4}{r^4}(q \sin^2\theta - 4)\right].$$

Der Ausdruck in der Klammer bleibt für das nämliche s und θ stets derselbe, folglich ist unter dieser Voraussetzung die Ablenkung proportional dem t. Hat man deshalb für gewisse s, θ und t die Ablenkung berechnet, so kann sie für dieselben s und θ, aber für ein anderes t unmittelbar gefunden werden.

Zu ähnlichen Resultaten wird man geführt, wenn man die Integration nach t in unserem obigen Integral mit Hilfe von $z = r \sin\frac{vt}{r} . \sin\theta$ in eine solche nach z verwandelt; man erhält dann für unsere Ablenkung den Ausdruck

$$\frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{1}{v \sin\theta}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{r^2\sin^2\theta}\right)}}\,dz - \frac{r}{v}\arcsin\frac{z}{r \sin v}\right).$$

Von diesem Integral existirt natürlich wieder keine geschlossene Form. Denken wir uns dasselbe mittels Reihen bestimmt, so erhalten wir eine solche, die nach z fortschreitet, und es kann der ganze Ausdruck gegeben werden durch

$$\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot\frac{1}{v}\cdot T,$$

wo T eine Function von z, r und θ vorstellt.

Dieses T bleibt für dasselbe r, θ und z, also bis zu demselben Parallelkreis immer das nämliche; es wird daher die Ablenkung umgekehrt proportional dem v, also um so grösser, je langsamer sich der Körper unter sonst gleichen Umständen bis zu dem Parallelkreise zu z bewegt, und umgekehrt. Mit Berücksichtigung dessen, dass $vt = s$, ist das jetzige Resultat eine Bestätigung des obigen.

Sollte bestimmt werden, unter welchem Winkel θ der Körper bei gegebener Geschwindigkeit v abgehen müsste, um trotz des Einflusses der Umdrehung der Erde an eine bestimmte Stelle zu gelangen, so wären in den beiden Gleichungen für z und φ die letzten beiden Grössen und r gegeben und θ gesucht. Man hätte deshalb aus den beiden Gleichungen des t zu eliminiren und dann nach θ aufzulösen. Es ist klar, dass sich diese Aufgabe wieder nur annähernd lösen lässt und für *arctang* auch die entsprechende Reihe zu setzen ist

Nr. 19. Man kann die letzte Aufgabe verallgemeinern und die Curve zu bestimmen suchen, welche ein Körper beschreibt, der auf der Kugel unter irgend einem Winkel α gegen den Parallelkreis des Ausgangspunktes — also unter dem Winkel $90 - \alpha$ gegen den Meridian — mit der unveränderlichen Geschwindigkeit v bewegt wird und trotz der Umdrehung der Kugel auf dem grössten Kreise zu bleiben sucht, der durch die anfängliche Richtung des v geht.

Um hier theils die Bewegung, theils die Lage des Coordinatensystems genauer zu bestimmen, desgleichen eine möglichste Uebereinstimmung mit den vorausgegangenen Betrachtungen und eine leichte Verwendbarkeit der Resultate für den Ort des Ausgangspunktes zu erzielen, werde festgesetzt, dass die xz Ebene durch den Ausgangspunkt gehe, die $+z$-Axe mit v nach derselben Seite hin liege oder, was dasselbe ist, die Projection von v auf die z-Axe die Richtung der $+z$-Axe habe und dass Winkel α spitz oder stumpf zu nehmen sei, je nachdem die Projection von v auf die xy-Ebene die positive oder negative Drehrichtung hat. Für die Ausgangsstelle ist $y = 0$; ihre geographische Breite sei β, folglich wird $z' = r \sin\beta$ und $f' = r \cos\beta$. Ausserdem werde daselbst noch $t = 0$ angenommen. Liegt der Ausgangspunkt auf der Seite der negativen z-Axe, so ist β negativ zu nehmen.

Ganz entsprechend dem Anfange der Nr. 18 erhalten wir bei analoger Bezeichnung $\nu = arctang\left(tang\,\frac{vt}{r}.\cos\theta\right)$, wo θ den Winkel unserer Kreisebene mit der xy-Ebene vorstellt. Alsdann wird in gleicher Weise $z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right).\sin\theta$. Das μ ist hier der Winkel, den der Radius des Ausgangspunktes mit der aufsteigenden Knotenlinie der Bahn in der xy-Ebene bildet, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem es auf der Seite der $+$ oder der $-z$-Axe liegt. θ und μ sind vorerst noch unbekannt und müssen den gegebenen Stücken gemäss bestimmt werden. θ wird durch folgende Betrachtung erhalten. Denkt man sich durch den Anfangspunkt ein Loth L zur Ebene der Bahn gelegt, also L senkrecht zu dem v und r des Ausgangspunktes, so liegt dieses L in der Tangentialebene dieses Punktes, weil ja diese auch zu r senkrecht ist. In diese Tangentialebene fallen ausserdem noch v, dm' und dp', d. h. die Geschwindigkeit, das Element des Meridians und das des Parallelkreises der bewussten Stelle. Nun ist aber zugleich $dm' \perp dp'$ und $L \perp v$, folglich ist LL, $dm' = L\,dp'$, $v = \alpha$. Nimmt man hierzu noch eine Parallele Z' durch den Ausgangspunkt zur z-Axe, so ist Winkel $Z', L = \theta =$ dem gesuchten Winkel unserer Bahnebene mit der xy-Ebene; endlich ist Winkel $dm', Z' =$ dem Winkel von dem r des Ausgangspunktes mit der xy-Ebene $=$ der geographischen Breite des Punktes oder gleich β. Die Linien L, dm' und Z' bilden demnach ein Dreikant mit den Seiten α, θ und β. Dieses Dreikant hat dazu noch an dm' oder dem θ gegenüber einen rechten Winkel, weil die dm', Z'-Ebene mit der xz-Ebene und die dm', L-Ebene mit der Tangentialebene zusammenfällt und die Tangentialebene auf der xz-Ebene senkrecht steht. Es findet sich daher $\cos\theta = \cos\beta \,.\, \cos\alpha = \cos\alpha \,.\, \frac{\sqrt{r^2 - z'^2}}{r} = \cos\alpha \,.\, \frac{f'}{r}$. — Um das μ zu erhalten, denken wir uns durch z' eine Ebene senkrecht zur Knotenlinie gelegt und das Stück des Schnittes dieser Ebene mit der Bahnebene zwischen dem Ausgangspunkte und der Knotenlinie mit n bezeichnet, dann ist $\sin\mu = \frac{n}{r}$ und $n = \frac{z'}{\sin\theta}$, also $\sin\mu = \frac{z'}{r\sin\theta} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}$ und

$$\mu = \arcsin\frac{z'}{r\sin\theta} = \arcsin\frac{z}{r\sqrt{1-\cos^2\beta\,.\,\cos^2\alpha}} = \arcsin\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\beta\,.\,\cos^2\alpha}}$$
$$= \operatorname{arctang}\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha}.$$

Hat demnach, wie in Nr. 18, die Kugel noch eine constante Winkelgeschwindigkeit $= -\omega$, oder hat bei feststehender Kugel der auf unserer Bahn fortschreitende Punkt noch eine Geschwindigkeit $+ f\omega$ in der Richtung der Parallelkreise, so werden die Gleichungen der beschriebenen Curve

1) $$\varrho = f_z,$$

2) $$z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta,$$

3) $$\varphi = \omega t + \operatorname{arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{vt}{r} . \cos\theta\right).$$

Den zwei letzten Gleichungen kann man noch nachfolgende Formen geben:

$$z = r\sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta = \sin\left(\frac{vt}{r} + \arcsin\frac{z'}{\sqrt{r'^2 - f'^2\cos^2\alpha}}\right) . \sqrt{r^2 - f'^2\cos^2\alpha}$$

2) $$= f' . \sin\frac{vt}{r} . \sin\delta + z' . \cos\frac{vt}{r}$$
$$= r\sin\left(\frac{vt}{r} + \arcsin\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha . \cos^2\beta}}\right)\sqrt{1-\cos^2\alpha . \cos^2\beta}$$
$$= r\left(\sin\frac{vt}{r} . \cos\alpha . \cos\beta + \cos\frac{vt}{r} . \sin\beta\right),$$

$$3)\quad \varphi = \omega t + \operatorname{arctang}\left[\frac{f'}{r}.\cos\alpha.\operatorname{tang}\frac{vt}{r}\right] = \omega t + \operatorname{arctang}\left[\cos\alpha.\cos\beta.\operatorname{tang}\frac{vt}{r}\right].$$

Die ersteren Formeln sind dann am Platze, wenn das z', und die letzteren, wenn das β, die geographische Breite des Ausgangspunktes, bekannt ist.

Es hat nun auch keine Schwierigkeiten, das φ_z oder die Gleichung der windschiefen Fläche zu finden, deren Schnitt mit der Rotationsfläche die verlangte Curve ist. Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich nämlich

$$t = \frac{r}{v}\left(\arcsin\frac{z}{r\sin\theta} - \arcsin\frac{z'}{r\sin\theta}\right)$$
$$= \frac{r}{v}\operatorname{arctang}\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}},$$

und dies in die Gleichung von φ eingesetzt, giebt

$$\varphi = \frac{r\omega}{v}\operatorname{arctang}\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}}$$
$$+ \operatorname{arctang}\left[\cos\theta\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}}\right].$$

Man könnte hieraus noch θ und z' mit Hilfe der Beziehungen $\cos\theta = \cos\alpha.\cos\beta$ und $z' = r\sin\beta$ fortschaffen und durch β und α ersetzen. Am einfachsten gestaltet sich der Ausdruck durch die Einführung des μ; hier wird $z' = r\sin\theta.\sin\mu$, $\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} = r\sin\theta.\cos\mu$, daher

$$\frac{z\sqrt{r^2\sin^2\theta - z'^2} - z'\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{zz' + \sqrt{(r^2\sin^2\theta - z^2)(r^2\sin^2\theta - z'^2)}} = \frac{z - \operatorname{tang}\mu\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}{z\operatorname{tang}\mu + \sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}}.$$

Hier kann auch unmittelbar $t = \frac{r}{v}\left(\operatorname{arctang}\frac{z}{\sqrt{r^2\sin^2\theta - z^2}} - \mu\right)$ gesetzt werden. Für $z' = 0$ oder $\mu = 0$ erhalten wir die Gleichung der windschiefen Fläche für die Curve der Nr. 17. Die dortigen Schlussbemerkungen können auch hierher übertragen werden.

Nr. 20. Passen wir die gegenwärtigen Verhältnisse, ähnlich wie es in Nr. 13 und 18 geschehen ist, den Vorgängen auf unserer Erdoberfläche an, wo ein Körper die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$p = f'\omega = \frac{2f'\pi}{24.60.60}$$

seines Ausgangspunktes hat und auf jedem Parallelkreise beizubehalten sucht, er also auf dem Parallelkreise schon aus diesem Grunde um $p - f\omega$ fortschreitet, so erhalten wir die Lösung der Aufgabe: Welche Bahn beschreibt ein Körper unter dem Einflusse der Umdrehung der Erde, der auf derselben mit einer Geschwindigkeit v unter irgend einem Winkel α mit dem von Westen nach Osten gerichteten Parallelkreise der Anfangsstelle bewegt wird?

Auch hier soll, wie in den entsprechenden Fällen der früheren Nummern, die Aufgabe dadurch zu einer bestimmten gemacht werden, dass wir aus den dort geltend gemachten Gründen annehmen, der Körper beschreibe ohne Rücksichtnahme auf die Rotation den durch v bestimmten grössten Kreis und die parallele Verschiebung sei auf die Rotationsgeschwindigkeit, welche der Körper von seinem Ausgangspunkte mitbringt, ohne weiteren Einfluss. Von den Widerständen wird wieder Umgang genommen. Die positive Drehrichtung von OX nach OY gehe von Westen nach Osten; alle übrigen Bestimmungen sollen der Nr. 18 entsprechen. Die Gleichung für z bleibt vollständig unverändert, weil die Rotationsgeschwindigkeit darauf ohne Einfluss ist; desgleichen die Gleichung der Rotationsfläche. Es ist daher, wie in Nr. 19:

$$1) \qquad \varrho = f_z,$$

$$2) \qquad z = r \sin\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) . \sin\theta,$$

und dabei wieder

$$\mu = \arcsin \frac{z'}{r \sin\theta} = \arcsin \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha}, \qquad \cos\theta = \frac{f'}{r} \cos\alpha = \cos\beta . \cos\alpha.$$

Nur für φ erhält man, weil

$$\omega = \frac{p - f\omega}{f} = \frac{f' . 2\pi}{f . 24.60.60} - \frac{2\pi}{24.60.60} = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{f'}{f} - 1\right) \text{ ist:}$$

$$3) \qquad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(f' \int_0^t \frac{dt}{f} - t\right) + \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\frac{vt}{r} . \cos\theta\right].$$

In der letzten Gleichung ist wegen der Kugelgestalt der Erde

$$f' \int_0^t \frac{1}{f}\, dt = f' \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}}\, dt = \frac{f'}{r} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{vt}{r} + \mu\right) \sin^2\theta}}\, dt$$

$$= \frac{f'}{rv \sin\theta} \int_{z'}^{z} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} . \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2 \sin^2\theta}}}\, dz.$$

Dieses letzte Integral wird für dieselben z-Werthe unter sonst gleichen Umständen das nämliche, und deshalb der erste Theil von φ oder die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde zwischen denselben Parallelkreisen umgekehrt proportional dem v, also wieder um so grösser, je langsamer sich der Körper bewegt, und umgekehrt.

Durch Einsetzen der obigen t-Werthe

$$t = \frac{r}{v}\left(\arcsin \frac{z}{r \sin\theta} - \arcsin \frac{z'}{r \sin\theta}\right) \text{ etc.}$$

in die Gleichung für φ erhält man unmittelbar und in ähnlicher Form, wie in Nr. 19, die Gleichung der windschiefen Fläche φ_z.

Das Integral $\frac{f'}{r}\int^{\bullet}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{vt}{r}+\mu\right).\sin^2\theta}}\,dt$ ist im Allgemeinen ein elliptisches und in geschlossener Form nicht angebbar. Es sollen deshalb in einer der in Nr. 18 entsprechenden Weise verschiedene Näherungswerthe für den Fall bestimmt werden, dass $\frac{vt}{r}$ klein ist. Zu dem Ende entwickeln wir $\sin\left(\frac{vt}{r}+\mu\right)$, berücksichtigen, dass $\sin\mu=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}$, $\cos\mu=\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\sin\theta}$ und $f'=r\cos\beta$ und erhalten auf diese Art statt des letzten Integralausdruckes

$$\int^{\bullet}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{vt}{r}\,(tang^2\beta-\sin^2\alpha)-\sin\frac{2vt}{r}.\sin\alpha.tang\,\beta}}.$$

Setzen wir statt $\sin\frac{vt}{r}$ und $\sin\frac{2vt}{r}$ die Sinusreihe, so erhalten wir vermittelst des Binomialsatzes und wenn $tang^2\beta-\sin^2\alpha=A$ und $\sin\alpha.tang\,\beta=B$ gesetzt wird, für das letzte Integral

$$t+\tfrac{1}{2}Bt.\frac{vt}{r}+\tfrac{1}{6}t(-A+3B^2).\frac{v^2t^2}{r^2}+\tfrac{1}{24}t.B(-4-9A+15B^2).\frac{v^3t^3}{r^3}$$
$$+\tfrac{1}{120}t(4A+9A^2-48B^2-90AB^2+105B^4).\frac{v^4t^4}{r^4}\ldots\ldots$$

Unter der Voraussetzung, dass nur bis zur fünften Potenz von t gegangen werden soll, erhält man demnach

$$\varphi=\frac{2\pi t}{24.60.60}\Big[\tfrac{1}{2}B.\frac{vt}{r}+\tfrac{1}{6}(-A+3B^2).\frac{v^2t^2}{r^2}+\tfrac{1}{24}B(-4-9A+15B^2).\frac{v^3t^3}{r^3}$$
$$3)\qquad +\tfrac{1}{120}(4A+9A^2-48B^2-90AB^2+105B^4).\frac{v^4t^4}{r^4}\Big]$$
$$+\,arctang\left[tang\frac{vt}{r}.\cos\alpha.\cos\beta\right].$$

Zu bemerken ist hierbei, dass β nicht zu nahe an 90^0 oder der Ausgangspunkt nicht zu nahe an den Polen liegen darf, und dass $\frac{vt}{r}$ oder das Verhältniss des Weges auf dem vorgeschriebenen grössten Kreise zum Radius der Erde nicht zu gross sein darf.

Für $\beta=0$ wird $\alpha=\theta$, $A=-\sin^2\alpha=-\sin^2\theta$, $B=0$ und geht die Formel in die über, welche für die entsprechende Bewegung in Nr. 18 erhalten wurde.

In Uebereinstimmung mit dem Obigen ergiebt sich zunächst aus der letzten Gleichung für φ, dass die Aenderung des φ-Werthes durch die

Erdrotation für dieselben Werthe von $vt = s$ proportional dem t ist, und dass sie wieder bei gleichen s-Werthen wegen $t = \frac{s}{v}$ auch umgekehrt proportional dem v, also um so grösser wird, je langsamer sich der Körper bewegt. Das Vorzeichen des ersten Gliedes von φ oder der bewussten Ablenkung wird, da v und t absolut zu nehmen sind, durch das Vorzeichen von B bedingt. Nun liegt nach unseren Bestimmungen α immer zwischen 0 und 180^0 und ist deshalb $\sin\alpha$ stets positiv, daher wird $B = \sin\alpha \,.\, \mathrm{tang}\,\beta$ mit β positiv und negativ. Befindet sich der Ausgangspunkt auf der nördlichen Hemisphäre und ist v nach Norden gerichtet, so haben wir nach unseren Bestimmungen z' und β' positiv zu nehmen; es wird dann B positiv und die Ablenkung macht sich im Sinne der positiven Drehrichtung oder von Westen nach Osten geltend. Das $\mathrm{arctang}\left[\mathrm{tang}\,\frac{vt}{r} \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta\right]$ wird deshalb durch die Axendrehung der Erde vermehrt, wenn α spitz oder $\cos\alpha$ positiv ist, oder wenn die Bewegung in nordöstlicher Richtung eingeleitet wird; es wird sein absoluter Werth vermindert, wenn α stumpf, also $\cos\alpha$ negativ ist, oder wenn die ursprüngliche Bewegung in nordwestlicher Richtung vor sich geht. Ist v bei unserem Ausgangspunkte nach Süden gerichtet, so ist z' und β' negativ zu nehmen und wird dadurch B und unsere Ablenkung negativ oder sie wirkt im Sinne der negativen Drehrichtung, von Osten nach Westen. Wird hierzu α spitz oder geht die Bewegung v nach Südost, so wird $\mathrm{arctang}\left[\mathrm{tang}\,\frac{vt}{r} \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta\right]$ positiv und dasselbe durch den negativen Werth der Ablenkung vermindert, oder der Körper geht weniger nach Osten hin, als ohne Umdrehung der Erde. Im Falle α hier stumpf ist und daher die Bewegung in südwestlicher Richtung eingeleitet wird, ist unsere $\mathrm{arctang}$ negativ und ihr absoluter Werth wird durch die Ablenkung vergrössert oder die Bewegung wird westlicher. Am einfachsten lässt sich der Einfluss der Ablenkung übersehen, wenn man sich einen Beobachter am Ausgangspunkte denkt, der seine vordere Seite der Richtung des v zuwendet; die Ablenkung findet dann nach der rechten Seite des Beobachters statt. Es hält nicht schwer, diese Bemerkungen auf den Fall zu übertragen, wo der Ausgangspunkt auf der südlichen Hemisphäre liegt; hier macht sich in Bezug auf unsern Beobachter die ablenkende Wirkung der Umdrehung nach links geltend. Sonst ist noch zu bemerken, dass, weil in der Reihe nur $\sin\alpha$ vorkommt, die Ablenkung für α und $180 - \alpha$ dieselbe bleibt.

Andere, doch weniger verlässige Näherungswerthe für die Ablenkung würde man erhalten, wenn man

$$\sqrt{1 + \sin^2\frac{vt}{r}\,(\mathrm{tang}^2\beta - \sin^2\alpha) - \sin\frac{2vt}{r} \,.\, \sin\alpha \,.\, \mathrm{tang}\,\beta}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2vt}{r} \,.\, \sin\alpha \,.\, \mathrm{tang}\,\beta + \frac{v^2t^2}{r^2}\,(\mathrm{tang}^2\beta - \sin^2\alpha)}$$

setzte und das Integral des reciproken Werthes dieser Wurzel in geschlossener Form aufsuchte; doch würde sich hier kein richtiger Massstab für den Grad der Annäherung ergeben.

Aus der Form des Integrals in

$$\int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{vt}{r}+\mu\right)\sin^2\theta}}\,dt - t$$

$$= \int_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\left(\sin\frac{vt}{r}\,.\sin\alpha\,.\cos\beta \pm \cos\frac{vt}{r}\sin\beta\right)^2}}\,dt - t,$$

wo im Nenner + zu nehmen ist, wenn β positiv sein soll, und — im andern Falle, ist, wenn man sich das Integral in die Differentialsumme zerlegt denkt, sofort ersichtlich, dass für dieselbe geographische Breite mit nicht zu grossem vt bei $\alpha = 0$ oder π diese Summe ein Minimum und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum ist. Es ist daher auch im ersten Falle oder wenn die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises erfolgt, die Abweichung am kleinsten, und im zweiten Falle, wo die anfängliche Bewegung in der Richtung des Meridians stattfindet, am grössten. Auch das ist noch unmittelbar ersichtlich, dass für den Fall des negativen β, oder der Bewegung nach Süden in unseren Gegenden, das Maximum zwischen denselben Parallelkreisen und damit die Abweichung nicht so beträchtlich ist, als für das positive β oder für die Bewegung nach Norden. Aehnliches gilt auch für die Abweichungen bei südlicher und nördlicher Bewegung für die anderen Werthe des α. Gleiche Resultate für nicht zu grosse Strecken ergiebt die Annäherungsgleichung für φ. Letztere lässt ausserdem noch ersehen, dass unter sonst gleichen Umständen die Ablenkung um so grösser wird, je grösser β ist, d. h. je näher der Ausgangspunkt dem Pole liegt.

Die oben aus den Formeln bestimmten Ablenkungsrichtungen stimmen mit dem Drehungsgesetz der Winde überein. Auch die übrigen Resultate können mit dem Verhalten der Winde in Zusammenhang gebracht werden. Ein schwächerer Wind würde nach denselben auf gleicher Strecke eine grössere Ablenkung erfahren, als ein stärkerer. Entsteht irgendwo eine Luftverdünnung, strömt die Luft von dem Nachbarorte zu, der den höchsten Barometerstand hat, und rückt sie wegen dieses Abflusses mehr und mehr von entfernteren Stellen nach, so muss sich im Allgemeinen am ursprünglichen Orte die Richtung des Windes im Sinne des Drehungsgesetzes ändern, weil die später ankommenden Luftschichten einen grössern Weg zurückzulegen haben und dadurch eine stärkere

Ablenkung erfahren. Rückt der Ersatz von Osten oder Westen her, so wird die Aenderung der Richtung am langsamsten, kommt er von Norden oder Süden, am schnellsten erfolgen. West- und Ostwind werden also am längsten, Nord- und Südwind am kürzesten ihre Richtung beibehalten. Endlich findet noch der Umschlag der Richtung auf der nördlichen Erdhälfte schneller bei der Bewegung nach Norden statt, als bei der Bewegung nach Süden, in höheren Breiten eher als in niederen.

Nr. 21. Betrachten wir zuerst den Fall weiter, in dem $\alpha = 0$ oder 180^0 ist, also die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises stattfindet. Unser Integral geht hier über in

$$\int\limits_0^t \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\frac{vt}{r}\sin^2\beta}}\,dt = \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{vt}{r}\,tang^2\beta}}\,dt$$

und kann wieder nicht in geschlossener Form bestimmt werden. In der Reihe der Nr. 20 wird für diesen Fall $A = tang^2\beta$, $B = 0$, so dass man erhält

$$3)\qquad \begin{aligned}\varphi &= \frac{2\pi t}{24.60.60}\,.\,tang^2\beta\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\left[-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{120}\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}(4+9\,tang^2\beta)\ldots\right]\\ &\quad + arctang\left[tang\,\frac{vt}{r}\,.\cos\beta\right].\end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit der Nr. 18 und der dortigen Reihe für $\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{vt}{r}\,.\sin^2\theta}}$ ergiebt sich, dass beide Resultate in einander übergehen müssen, wenn $tang^2\beta = -\sin^2\theta$ gesetzt wird. Die Resultate müssen in der That aus dem Grunde eine gewisse Uebereinstimmung zeigen, weil unser jetziger specieller Fall auch der der Nr. 18 ist und nur die Ausgangspunkte und die Lagen der Coordinatensysteme in beiden Fällen verschieden sind. Es überrascht auf den ersten Anblick, dass in unserem jetzigen Falle überhaupt eine Ablenkung vorhanden ist, doch liegt der Grund für letztere darin, dass der Punkt sich ohne Einfluss der Erdrotation nicht auf dem Parallelkreise, sondern auf dem grössten Kreise der Erde bewegen würde, welcher durch die anfängliche Geschwindigkeit geht.

Die Ablenkung ist unter unseren Voraussetzungen, wo das erste Glied der Reihe über das Vorzeichen entscheidet, negativ oder wirkt im Sinne von Osten nach Westen; sie wirkt also ebenso, wie wenn der Körper bei uns nach Süden bewegt würde. Dies ist insofern erklärlich, als der Körper im nächsten Moment nach dem Beginne der Bewegung den Parallelkreis verlässt und sich auf seinem grössten Kreise nach Süden wendet. Abgesehen von $\frac{vt}{r}$ sind die nachfolgenden Glieder der Reihe von um so grösserem Einfluss, je grösser β, die geographische Breite des Ausgangspunktes ist. Im Uebrigen kann selbst bis $\beta = 70^0$ und $vt = 100000^m$ nahezu

$$\varphi = \frac{-2\pi t}{24\ 60.60} \cdot \tfrac{1}{6}\, tang^2\beta \, . \, \frac{v^2 t^2}{r^2} + arctang\left[tang\,\frac{vt}{r}\, . \cos\beta\right]$$

gesetzt werden, und kann man mit einem entsprechenden Grade der Annäherung noch setzen

$$arctang\left[tang\,\frac{vt}{r}\, . \cos\beta\right] = \frac{vt}{r}\, . \cos\beta\left(1 + \tfrac{1}{3} \, . \, \frac{v^2 t^2}{r^2}\right) \sin^2\beta.$$

Nr. 22. In dem Falle, wo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also die anfängliche Bewegung in der Richtung des Meridians stattfindet, wird unser Integral

$$= \int \frac{\cos\beta}{\cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)}\, dt,$$

daher in geschlossener Form bestimmbar. Man erhält hier

$$3) \qquad \varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{vt}\, Log\, \frac{tang\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right]}{tang\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right]} - 1\right).$$

$arctang\left[tang\,\frac{vt}{r}\, . \cos\beta \, . \cos\alpha\right]$ fällt hier ganz weg. Für die Bewegung südwärts ist in unseren Breiten β negativ zu nehmen. Multiplicirt man das φ mit $r\cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)$, d. h. mit dem Radius des Parallelkreises der Stelle zu t, so erhält man den Abstand und die Ablenkung des bewegten Punktes vom anfänglichen Meridian, und zwar auf den entsprechenden Parallelkreisen und in Längeneinheiten gemessen.

Unsere Reihe für φ geht in diesem Falle über in

$$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\Big(\tfrac{1}{2}\, tang\beta \, . \, \frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(1 + 2\, tang^2\beta) \, . \, \frac{v^2 t^2}{r^2}$$
$$+ \tfrac{1}{24}\, tang\beta\, (5 + 6 \, . \, tang^2\beta) \, . \, \frac{v^3 t^3}{r^3} \ldots\Big);$$

sie kann natürlich auch unmittelbar aus dem geschlossenen Integral hergeleitet werden.

Setzt man $vt = 100000^m$, $\beta = 70^0$, so liefert der obere Klammernausdruck des φ den Werth 0,022263, und die zwei ersten Glieder der Reihe des letzten Ausdruckes für φ liefern 0,022240598. Für $\beta = -70^0$, also für die Bewegung nach Süden, wird der erstere Werth $= -0{,}020939$ und der andere $= -0{,}02091668$. Man sieht hieraus, dass bis zur vierten Decimalstelle eine vollständige Uebereinstimmung der beiderseitigen Werthe stattfindet. Diese Uebereinstimmung muss noch grösser werden, wenn $vt < 100000^m$ und $\beta < 70^0$ ist, weil in diesem Falle die Reihe mehr convergirt. Wir können nach diesen Beispielen mit einem beträchtlichen Grade der Annäherung für diese Fälle setzen

$$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\tfrac{1}{2} \, tang\,\beta \, . \, \frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(1 + 2\, tang^2\beta) \, . \, \frac{v^2 t^2}{r^2}\right).$$

Dieser Ausdruck ist nicht nur für weitere Schlussfolgerungen innerhalb der gegebenen Grenzen, sondern auch für numerische Bestimmungen dem Ausdrucke mit dem geschlossenen Integral entschieden vorzuziehen. Die logarithmischen Tabellen behalten nämlich für den letztgenannten Ausdruck selbst bei verhältnissmässig kleinen Werthen von vt noch einen grossen Grad der Genauigkeit, während in diesen Fällen $tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$ und $tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)$ so nahe liegen, dass die Tabellen keine genauen Differenzen mehr ergeben und kleine Unterschiede in den Werthen der Logarithmen — und zwar bei demselben vt — das Gesammtresultat um Beträchtliches ändern. Beispielsweise soll hier nur erwähnt werden, dass bei $vt = 1000^m$ oder $\frac{vt}{2r} = \frac{\pi}{40000} = 16{,}2''$ und $\beta = 70^0$ der fragliche Ausdruck mit Benutzung der siebenstelligen Logarithmen $= 0{,}001401$ wird, und dass er, wenn zur Annäherung $16{,}2'' = 16''$ gesetzt werden, $-0{,}9881755$ liefert. Umgekehrt verhält sich natürlich die Sache, wenn grosse Werthe von vt in Betracht kommen. Ausserdem lässt der Näherungswerth wieder alle die hierher gehörigen Bemerkungen erkennen, welche am Schlusse der Nr. 20 im Allgemeinen ausgesprochen wurden.

Weil unser jetziger Fall im Allgemeinen eine geschlossene Integration zulässt und insofern von allgemeiner Bedeutung ist, als die Entstehung der Winde vorwiegend in der Richtung von Norden nach Süden und umgekehrt stattfindet, indem in dieser Richtung im Allgemeinen die grössten Temperaturdifferenzen herrschen, so wollen wir denselben noch etwas weiter verfolgen. Die drei Gleichungen der Curve sind:

1) $$\varrho = f_z,$$

2) $$z = s \sin\left(\frac{vt}{r} + \beta\right),$$

3) $$\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{vt}\, Log \frac{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)} - 1\right).$$

Wollten wir bestimmen, bis zu welcher Zeit der Körper bei gegebenem v und β unter dem Einflusse der Erddrehung einen Umlauf vollendet, so hätten wir in der Gleichung 3) $\varphi = 2\pi$ zu setzen und nach t

aufzulösen. Dies kann nun nicht ausgeführt werden, ebenso wenig die Aufgabe, bis zu welcher Zeit ein gewisser Meridian überhaupt von dem Körper erreicht wird. Dagegen lässt sich aus der Gleichung 2) sofort bestimmen, wann der Körper an einem bestimmten Parallelkreise ankommt; man darf nur $\frac{vt}{r}+\beta$ gleich der geographischen Breite des Parallels setzen und nach t auflösen.

Ist zu bestimmen, unter welchem Winkel der Körper den Parallelkreis bis zu einem gewissen z-Werthe schneidet, so erhält man zu dem Ende

$$tang\,\delta=\frac{dm}{dp}=\frac{\partial z_t\sqrt{1+\partial f_z^2}}{\partial\varphi_t\sqrt{r^2-z^2}}.$$

Bei der Kugel ist

$$\sqrt{1+\partial f_z^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-z^2}}=\frac{1}{cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)},\quad \partial z_t=v.cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right),$$

$$\partial\varphi_t=\frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{cos\,\beta}{cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)}-1\right),$$

daher

$$tang\,\delta=\frac{24.60.60.v}{2r\pi\left(cos\,\beta-cos\left(\beta+\frac{vt}{r}\right)\right)}.$$

Auch die Geschwindigkeit ist bestimmbar, mit welcher der Körper irgend einen Parallelkreis durchschneidet. Diese Geschwindigkeit ist nämlich

$$c=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{dm^2+dp^2}}{dt}=\sqrt{(1+\partial f_z^2)\,\partial z_t^2+f^2\,\partial\varphi_t^2}.$$

Bei der Kugel findet sich dieser Werth entsprechend dem Vorausgegangenen

$$c=\sqrt{v^2+\left[\frac{2r\pi}{24.60.60}\left(cos\,\beta-cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)\right)\right]^2}.$$

Hat man δ schon voraus bestimmt, so ergiebt sich

$$c=\frac{dm}{dt\,.\,sin\,\delta}=\frac{\sqrt{1+\partial f_z^2}\,.\,\partial z_t}{sin\,\delta}=\frac{v}{sin\,\delta}.$$

Letzteres Resultat kann unmittelbar erhalten werden, wenn man erwägt, dass die Umdrehung der Erde nicht im Stande ist, dem Körper eine Geschwindigkeit in der Richtung des Meridians zu ertheilen, dass diese Geschwindigkeit deshalb stets $=v$ bleibt und die wirkliche Geschwindigkeit daher $=\frac{v}{sin\,\delta}$ werden muss. Ebenso ergiebt sich die erste Formel für c unmittelbar daraus, dass das c sich zusammensetzt aus v und dem Ueberschusse der Rotationsgeschwindigkeiten der Stellen zu $\frac{vt}{r}+\beta$ und β.

Wird β negativ genommen, so erhält man die Gleichungen der Curve für die Bewegung gegen den Aequator hin. Letzterer wird erreicht, wenn $z=0$, also $\frac{vt}{r}-\beta=0$ oder $t=\frac{r\beta}{v}$ ist. Man erhält für diese Stelle

$$\varrho=r,\quad \varphi z=0,\quad \varphi=\frac{2\pi r}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\, tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta\right),$$

$$tang\,\delta=\frac{v.24.60.60}{2r\pi\,(\cos\beta-1)},\quad c=\frac{v}{\sin\delta}.$$

$tang\,\delta$ ist hier negativ, δ demnach stumpf, oder c geht nach Südwesten hin.

Wächst t so, dass $\frac{vt}{r}-\beta=\beta$, also $t=\frac{2\beta r}{v}$ wird, so ist

$$\varrho=r\cos\beta,\quad z=r\sin\beta,\quad \varphi=\frac{2\pi r}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}-2\beta\right),$$

$$tang\,\delta=\infty \text{ oder } \delta=90^0,\quad c=v.$$

Aus $\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}=tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$ folgt noch

$$\varphi=\frac{4r\pi}{24.60.60.v}\left(\cos\beta\, Log\, tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\beta\right),$$

d. h. φ doppelt so gross als bis zum Aequatorschnitt. Nach diesen Resultaten und weil $tang\,\delta$ für $\frac{vt}{r}>\beta$ abnimmt, muss die Richtung des Körpers nach dem Passiren des Aequators sich der Meridianrichtung wieder nähern und dann mit ihr zusammenfallen, wenn der Parallelkreis erreicht ist, der auf der andern Seite des Aequators liegt und mit dem Anfangsparallel übereinstimmt. Da für diese Stelle $\partial\varphi_t=0$ ist, so hat hier φ ein Minimum oder Maximum; aus dem leicht zu ermittelnden $\partial^2\varphi_t$, sowie aus der Natur der Sache ergiebt sich, dass für $t=\frac{2\beta r}{v}$ Ersteres stattfindet. Von dieser Stelle an wendet sich der Körper wieder östlicher und hält gegen den Südpol hin eine Bewegung ein, die auf der andern Hemisphäre der entspricht, welche der Körper annimmt, wenn er bei uns mit der Geschwindigkeit v nach dem Nordpole bewegt wird. Dass die Bewegung von unserem Standpunkte aus nach Norden in nordöstlicher und nach Süden zuerst in südwestlicher Richtung stattfindet, wurde bereits im Allgemeinen ermittelt. Nimmt man, ähnlich wie bei den Windrichtungen, die Bezeichnung von der Himmelsrichtung her, von welcher der Körper anrückt, so ist die erste Bewegung eine von Südwesten und die andere eine von Nordosten herkommende.

Um auf einige Zahlenbeispiele überzugehen, setzen wir voraus, dass $v=10^{m}$, $\beta=50^{0}$ sei; dann ergiebt sich für t bei je 1^{0} Breitendifferenz $\frac{vt}{r}+50^{0}=51^{0}$, $\frac{vt}{r}-50^{0}=-49^{0}$, also t stets $=\frac{r}{v}\cdot\frac{\pi}{180}=3$ Std. 5 Min. $11\frac{1}{8}$ Sec. Für 5^{0}, 10^{0} Breitendifferenz erhält man die fünf- oder zehnfache Zeit. Der Aequator wird erreicht in 6 Tag. 10 Std. $19\frac{1}{4}$ Min., der südliche Parallel von 50^{0} in der doppelten Zeit.

Bei der Bewegung nach Norden findet sich für die Breiten von 55^{0}, 60^{0} das φ bezüglich $=13{,}28^{0}$ und $59{,}37^{0}$. Von Mainz aus gerechnet, würde der Weg über Königsberg, Tilsit und den nördlichen Theil des Uralgebirges gehen. Bei der Bewegung nach Süden erhielte man für die Breiten von 45^{0} und 40^{0} die φ-Werthe $-11{,}003^{0}$ und $-40{,}5^{0}$, also wird der Weg von Mainz etwas nordwärts von Bordeaux und gegen die Insel Flores hinführen. Der Aequator wird erreicht bei $\varphi=-591{,}554^{0}$, also nach einem vollständigen Umlauf noch $231{,}5^{0}$ westlich von dem Meridian zu Mainz, oder $205{,}5^{0}$ westlich von Ferro, mithin nördlich von Neu-Guinea. Die südliche Richtung stellt sich wieder ein bei $-2.591{,}554^{0}=-1183{,}108^{0}$, oder nach drei Umläufen und bei dem Meridian $+77{,}1^{0}$ westlich von dem zu Ferro, also ungefähr 20^{0} westlich vom Golf von Trinidad in Patagonien. Von dort ist die Bewegung nach dem Südpol analog beschaffen, geht jedoch in südöstlicher Richtung vor sich, wie bei uns nordöstlich nach dem Nordpol. — Die Winkel δ mit den entsprechenden, nach Osten gerichteten Parallelkreisen sind für die Breiten von 55^{0} und 60^{0} bezüglich $17^{0}\,19'\,57''$ und $8^{0}\,36'\,7''$ oder die Bewegung findet bald fast in östlicher Richtung statt, für die Breiten 45^{0}, 40^{0}, 0^{0} bezüglich $161^{0}\,26'\,12''$, $170^{0}\,3'\,37''$ und $176^{0}\,32'\,23''$, oder die Bewegung geht bald in eine fast westliche oder von Osten herkommende über. Es darf hier nicht überraschen, dass der Winkel von 90^{0} rasch so grosse Aenderungen erleidet; der Ueberschuss oder das Zurückbleiben der Umdrehungsgeschwindigkeit für die nachfolgenden Stellen der Erde ist in Bezug auf die Geschwindigkeit von 10^{m} bald so bedeutend, dass die Richtung der letzteren sehr schnell beträchtlich abgeändert wird. Rein östlich oder westlich würde die Bewegung erst am Pol werden können, weil nur hier $\partial z_t = v\cos\left(\frac{vt}{r}+\beta\right)$ gleich Null wird.

Endlich erhält man für die Geschwindigkeiten an den Stellen zu 55^{0} und 60^{0} $33{,}58995^{m}$ und $66{,}85882^{m}$; für die an den Stellen zu 45^{0}, 40^{0}, 0^{0} entsprechend $31{,}4117^{m}$, $57{,}93341^{m}$ und $165{,}686^{m}$. Diese Geschwindigkeit nimmt auf der südlichen Hemisphäre in analoger Weise ab und wird bei 50^{0} südlicher Breite wieder 10^{m}. Aus $c=\frac{v}{\sin\delta}$ ist dazu sofort ersichtlich, dass c bei $\delta=90^{0}$ ein Minimum ist und dass es immer dasselbe wird, so oft δ denselben oder den Supplementswerth erhält.

Die Abweichung in Längenmass wird erhalten, wenn man den φ-Werth mit dem zugehörigen f multiplicirt.

Statt des obigen Körpers kann man sich wieder eine bewegte Luftschicht denken. Ist hier auch der Widerstand ein sehr beträchtlicher und treten auch noch andere Einflüsse auf, die wir in unserer Formel nicht berücksichtigten, so ist doch aus unseren Ergebnissen zu ersehen, wie rasch unter Umständen die Richtung des Windes durch die Umdrehung der Erde verändert wird und wie durch den Zuwachs von Geschwindigkeit von dieser Seite her etwaige Verluste, die durch die vorhandenen Widerstände entstehen, nicht blos gedeckt, sondern sogar übertroffen werden können und wie daher eine factische Vermehrung der Geschwindigkeit eintreten muss.

Die oben berührte Bewegung auf der südlichen Hemisphäre, wo sich an der Stelle der zweiten Nordrichtung die Bewegung vom Aequator her und gegen den Pol hin unmittelbar aneinander anschliessen, lässt vermuthen, dass auch für unsere Gegenden die Bahnen der Bewegungen nach Süden und Norden miteinander in Verbindung gebracht werden können. Wir lassen zu dem Ende auch negative Werthe von t in den Gleichungen für z und φ zu. Man erhält dann bei der Bewegung nach Norden für diese t-Werthe die Gleichungen — t ist dann nur absolut zu nehmen —

$$z = r \sin\left(\beta - \frac{vt}{r}\right), \quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{v} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{vt}{2r}\right)} + t\right).$$

Durch Vergleichung dieser Werthe mit den Werthen der Bewegung nach Süden, oder mit

$$z = r \sin\left(\frac{vt}{r} - \beta\right), \quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{r\cos\beta}{v} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} - \frac{vt}{2r}\right)} - t\right)$$

und in Berücksichtigung dessen, dass $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}$ etc.

ist, dass z in beiden Fällen wegen der entgegengesetzten Lage der z-Axe für dieselben Parallelkreise entgegengesetzte Vorzeichen erhält, ergiebt sich, dass man im ersten Falle für jeden negativen Werth von t oder für jeden beliebigen Parallelkreis den gleichen und entgegengesetzten φ-Werth erhält, als im zweiten Falle für den entsprechenden positiven t-Werth oder für den gleichen Parallelkreis. Die Curve der Bewegung nach Norden für die negativen t-Werthe liegt daher mit der Curve der Bewegung nach Süden für die positiven t-Werthe symmetrisch gegen den Meridian zu $t = 0$. Die Geschwindigkeit c und der Winkel δ dieser

Geschwindigkeit mit dem Parallelkreise sind entsprechend einander gleich und es findet nur die Bewegung in beiden Fällen in entgegengesetzter Richtung statt. Während also die Bewegung nach Norden für die positiven t-Werthe in nordöstlicher Richtung mit wachsender Geschwindigkeit weiter geht, kommt sie für die negativen t-Werthe von südöstlicher Richtung her und nimmt ihre Geschwindigkeit ab. Aehnlich giebt die Gleichung für die Bewegung nach Süden in Bezug auf φ gleiche und entgegengesetzte Werthe von denen der Bewegung nach Norden, erstere für negative und letztere für positive t-Werthe genommen, so dass auch hier eine symmetrische Lage der zwei Curven gegen den Meridian zu $t = 0$ vorhanden ist. Die für positive t-Werthe stets schneller nach Südwesten gehende Bewegung kommt hier von Nordwesten her und wird langsamer. Auf diese Art erhält man überhaupt zwei Bahnen, die symmetrisch gegen den Meridian zu $t = 0$ liegen und bei welchen die Punkte zu den positiven t-Werthen der einen mit den Punkten zu den absolut gleichen, aber negativen t-Werthen der andern Bahn auf den gleichen Parallelkreisen liegen.

Durch die zulässige Verwendung der obigen Zahlenresultate erhielten wir sofort, dass der von Mainz über Tilsit etc. weitergehende Körper von Peterwardein und Baku, und dass der südwärts gehende Körper, welcher Bordeaux berührt, von der Südspitze von Grönland und dem Nordcanal der irischen See herkommen müsste. Alle übrigen Schlüsse sind nach den obigen Bemerkungen leicht auf die neuen Zweige der Curve zu übertragen.

Es hält nun nicht schwer, die Curve eines Körpers für den Fall zu bestimmen, dass derselbe an einer bestimmten Stelle der Erdoberfläche in einer beliebigen tangentiellen Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt und sich überhaupt nach unseren jetzigen Gesetzen bewegt. Aus $v = c.\sin\delta$, wo c und δ als gegebene Grössen anzunehmen sind, ergiebt sich die Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians. Liegt v etwa nach Norden hin und ist β' die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man $\beta + \frac{vt}{r} = \beta'$ zu setzen und es kann folglich aus $tang\,\delta = \frac{v.24.60.60}{2r\pi(\cos\beta - \cos\beta')}$ das β, d. h. die geographische Breite des Ortes ermittelt werden, wo der Körper sich nur nach Norden bewegt und gewissermassen die Bewegung entstanden ist. $\beta + \frac{vt}{r} = \beta'$ giebt die Zeit t, die verflossen ist, bis der Körper von der Ursprungsstelle nach dem Beobachtungsorte gelangte. Durch Einsetzen des gefundenen t-, β- und v-Werthes in die Gleichung für φ erhält man auch die geographische Länge der Ursprungsstelle. In ähnlicher Weise ergeben sich durch Substitution der gefundenen v- und β-Werthe in die Gleichungen für z und φ die Gleichungen der Bewegungscurve überhaupt, und ist dabei nur zu beachten, dass dann das t von dem Moment an gerechnet wird, in dem die Bewegung eine rein nördliche war.

Auch für die letzten Resultate wollen wir ein Zahlenbeispiel angeben. An einem Orte in der Nähe von Bern, dessen nördliche Breite 47^0 und östliche Länge 25^0 ist, wehe ein Südwestwind, welcher mit der Ostrichtung des Parallelkreises einen Winkel von 30^0 bildet, eine Geschwindigkeit von 20^m hat und bei seinem Fortschreiten unseren Bedingungen entspricht; dann erhalten wir, weil in dem Falle $c = 20$, $\beta' = 47^0$, $\delta = 30^0$ ist, nach dem Obigen für die anfängliche, nach Norden gerichtete Geschwindigkeit v desselben 10^m, für die geographische Breite β' der Ursprungsstelle $43^0\, 59'\, 39''$, für die Zeit t, welche der Wind bis zu dem genannten Orte braucht, 9 St. 16 Min. 38 Sec., und endlich für den φ-Werth dieses Ortes, wenn von der Ursprungsstelle an gerechnet wird, $= 3{,}72^0$. Die letztgenannte Stelle liegt demnach $3{,}72^0$ westlicher als unser gegebener Ort, oder unter $22{,}28^0$ westlicher Länge und ungefähr 44^0 nördlicher Breite, mithin zwischen Nimes und Avignon. Wollte man untersuchen, ob irgend ein anderer Ort auch von diesem bestimmten Winde berührt wird, ohne gerade die ganze Bewegungscurve verfolgen zu müssen, so setzt man in $\beta + \frac{vt}{r} = \beta''$ statt β'' die geographische Breite dieses Ortes, bestimmt daraus t und nun mit Hilfe der Gleichung für φ das letztere und die geographische Länge dazu. Stimmt diese Länge mit der des Ortes überein, so geht der Wind über den Ort weg; ist sie grösser oder kleiner als letztere, so geht der Wind entsprechend östlich oder westlich vorüber. Wenn nun auch bei Luftströmungen sich noch viele Einflüsse geltend machen, welche in unseren Formeln nicht berücksichtigt sind, und daher die obigen Resultate keine absolute Giltigkeit in Anspruch nehmen können, so geben uns dieselben doch einen Fingerzeig, in welch hervorragender Weise die Schweiz von den Wärmeverhältnissen des waldlosen und oft stark erhitzten südlichen Frankreichs beeinflusst werden muss. Es soll nicht gerade behauptet und müsste erst durch Beobachtung ermittelt werden, dass der Ursprung des Föhn dahin verlegt werden muss, aber gewiss ist, dass die beiden Gebiete in abgeschwächter Weise sich ähnlich wie die Aequator- und Polargegenden verhalten müssen.

Es scheint in dem Obigen ganz allgemein die Aufgabe gelöst zu sein, die Bahn eines Körpers zu bestimmen, der unter irgend einem Winkel δ gegen den Parallelkreis mit einer beliebigen Geschwindigkeit c bewegt wird; dem ist aber nicht so. Die Anwendbarkeit unserer Gleichungen setzt voraus, dass der Körper unabhängig von der Umdrehung der Erde eine bestimmte Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians erhält und diese Geschwindigkeit auf allen Meridianen beizubehalten sucht. Die erste Aufgabe ist, wie schon erwähnt wurde, an und für sich eine unbestimmte und führt mit der weitern, der Trägheit der Körper angepassten Bedingung der ebenen Bahn bei nicht rotirender Erde, auf elliptische Integrale.

Nr. 23. In Nr. 20 wurde bereits hervorgehoben, dass das Integral des Ausdruckes für φ allgemein in geschlossener Form nicht angebbar ist und daselbst eine nach Potenzen von $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe für dieses Integral aufgestellt. Bezüglich dieser Reihe wurde in Nr. 22 unter der Voraussetzung, dass $\alpha = 90^0$ ist, nachgewiesen, dass bis zu einer beträchtlichen Breite und bedeutendem Werthe von vt — es wurde $\beta = 70^0$ und $vt = 100000^m$ angenommen — die zwei ersten Glieder der Reihe numerische Resultate geben, die für die Anwendung innerhalb der Grenzen hinreichend genau sind. Die Grösse der Reihe $A = tang^2\beta - sin^2\alpha$ hat in dem Falle bei unveränderlichem β ihren kleinsten, die Grösse $B = tang\,\beta\,.\,sin\,\alpha$ ihren grössten Werth. Auch in dem andern extremen Falle, wo $\alpha = 0$ ist, und A seinen grössten und B den kleinsten Werth erhält, genügen nach Nr. 21 diese Glieder für numerische Bestimmungen. Erwägt man nun, dass A und B oder Potenzen dieser Grössen meist nur als Summanden in den Factoren der Glieder der Reihe vorkommen, dass bei geringeren Breiten A und B unter allen Umständen kleiner sind und ihr Einfluss gegen den von $\frac{vt}{r}$ zurücktritt, dass bei höheren Breiten und $\alpha \lessgtr 90^0$ B kleiner als der Maximalwerth $tang\,\beta$ ist und der Werth von A dem Minimalwerthe $tang^2\beta - 1$ verhältnissmässig immer näher rückt, so scheint der Schluss gerechtfertigt zu sein, dass in allen Fällen bis zu beträchtlicher Breite und grösseren Werthen von vt die zwei ersten Glieder der Reihe zu numerischen Bestimmungen genügen. Setzen wir noch statt *arctang* die bis zu gleichen Potenzen von $\frac{vt}{r}$ gehenden Glieder der Reihe oder

$$arctang\left[tang\frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\right] = \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\left[1 + \frac{v^2t^2}{r^2}\,.\,\frac{1 - cos^2\alpha\,.\,cos^2\beta}{3}\right],$$

wo wir uns auch mit dem ersten Gliede begnügen könnten, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{2\pi t}{24.60.60}&\left[\tfrac{1}{2}sin\,\alpha\,.\,tang\,\beta\,.\,\frac{vt}{r} + \tfrac{1}{6}(sin^2\alpha - tang^2\beta + 3\,sin^2\alpha\,.\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\right]\\ &+ \frac{vt}{r}\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta\left[1 + \frac{v^2t^2}{r^2}\,.\,\frac{1 - cos^2\alpha\,.\,cos^2\beta}{3}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Das erste Glied des rechten Ausdruckes bestimmt die Aenderung des φ-Werthes, welche durch die Umdrehung der Erde entsteht. Zu dieser Gleichung sind aus Nr. 20 noch $z = r\left(sin\frac{vt}{r}\,.\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\beta + cos\frac{vt}{r}\,.\,sin\,\beta\right)$, oder mit derselben Annäherung wie oben

2) $$z = r\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha . \cos\beta + \sin\beta\left(1 - \frac{v^2 t^2}{2r^2}\right)\right)$$

und endlich

3) $$f^2 = \sqrt{r^2 - z^2}$$

zu nehmen.

Sollten die verschiedenen Grössen so bestimmt werden, dass der Körper durch eine bestimmte Stelle geht, die durch die geographische Breite β'. und in Bezug auf die Ausgangsstelle durch die geographische Länge φ' bestimmt ist, so hätte man in den obigen Gleichungen φ' statt φ und $r\cos\beta'$ statt z zu setzen. Hierdurch erhielte man zwei Gleichungen zwischen den Grössen v, t und α, so dass eine dieser Grössen unter gewissen Beschränkungen beliebig gewählt werden könnte. Z. B. ergiebt sich aus der Natur der Verhältnisse, dass das α beim Wirken der Erdrotation und bei der Bewegung nach Norden in unseren Breiten sich entweder grösser ergeben wird, oder grösser angenommen werden muss als beim Wegfallen dieser Rotationswirkung. Bei der Bewegung nach Süden verhält sich α umgekehrt. Zu den gleichen Schlüssen führt eine algebraische Betrachtung, bei welcher ausser der obigen Gleichung für φ noch die berücksichtigt wird, die nur das zweite Glied der rechten Seite enthält und den Fall ohne Erddrehung bestimmt. Auch die Werthe von α sind ausgeschlossen, bei welchen vt zu gross würde und daher unsere Näherungsgleichungen nicht mehr ausreichen. Aehnlich ergiebt sich auf doppelte Weise, dass, wenn man etwa $vt = s$ einführt und diesem s einen nicht allzugrossen Werth beilegt, α nur dann bestimmbar ist, wenn s mindestens $= r(\beta' - \beta)$ ist. Die Gleichung für $z = r\cos\beta'$ giebt in diesem Falle α, die Gleichung für φ hierzu das t und $s = vt$ endlich das v. Sehr einfache Resultate können erhalten werden, wenn man sich in den Gleichungen für z und φ nur mit den Gliedern der ersten Dimension von $\frac{vt}{r}$ begnügt, die immer noch einem bedeutenden Grade der Annäherung entsprechen. Geometrisch genommen, liegt im letzten Falle vt in der Tangentialebene der Kugel, welche der Ausgangsstelle entspricht. Die wirkliche Länge der durchlaufenen Strecke könnte nur mit Hilfe der Rectificationsformel

$$L = \int_0^t \sqrt{f^2\,\partial\varphi_t^2 + (1 + \partial f_z^2)\,\partial z_t^2}\,dt$$

bestimmt werden, und könnten hierbei wieder die obigen Näherungsformeln für z und φ Anwendung finden.

Sollte die Abweichung vermöge der Erdumdrehung in Längenmass erhalten werden, so hätte man zu berücksichtigen, dass diese Umdrehung auf den z-Werth keinen Einfluss äussert, dass daher die genannte Längenabweichung nur auf dem Parallelkreise zu z liegt und mithin $= f$ oder

$\sqrt{r^2-z^2}$-mal der Aenderung des φ-Werthes durch die Umdrehung der Erde oder gleich $\sqrt{r^2-z^2}$-mal dem ersten Gliede in der obigen Gleichung für φ ist. Begnügt man sich mit dem Gliede $\frac{1}{2} \sin\alpha . tang\beta . \frac{vt}{r}$ und setzt entsprechend $z = r\left(\sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \frac{vt}{r}\right)$, so wird die genannte Längenabweichung auf dem Parallelkreise

$$f\varphi' = r\sqrt{1-\left(\sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \frac{vt}{r}\right)^2} . \frac{2\pi t}{24.60.60} . \frac{1}{2}\sin\alpha . tang\beta . \frac{vt}{r}.$$

Für die geographische Breite $\beta = 50^0$ der Ausgangsstelle, für $vt = 10000^m$ und bei einer rein nordöstlichen oder rein nordwestlichen Anfangsrichtung der Bewegung oder bei $\alpha = 45^0$ und 135^0 findet sich $f\varphi' = 0{,}1967 . t^m$. Die Bewegung nach südöstlicher oder südwestlicher Richtung, für welche wieder $\alpha = 45^0$ oder 135^0 und $\beta = -50^0$ zu setzen ist, liefert $f\varphi' = -0{,}1973\ t^m$. Wäre gleichzeitig noch $v = 500^m$, also etwa gleich der Geschwindigkeit einer Kanonenkugel, so wird $t = 20$, und wäre $f\varphi'$ in einem Falle $= 3{,}934^m$ und im andern Falle $= -3{,}946^m$ — eine wohl zu berücksichtigende Distanz. Für $vt = 1000^m$ ergeben sich numerische Werthe, die nahezu $\frac{1}{10}$ der obigen sind.

Am Schlusse der Nr. 20 wurden in Bezug auf die hierher gehörigen φ-Aenderungen verschiedene allgemeine Bemerkungen gemacht; dieselben können zum Theil ohne Weiteres auf die Längenabweichung in die Richtung der Parallelkreise übertragen werden, so z. B. die über den Einfluss der Zeit t, die über die auf der nördlichen Erdhälfte nach rechts und auf der südlichen nach links gehende Lage der Abweichung gegen den nachsehenden Beobachter und die über die Gleichheit der Ablenkung für α und $180-\alpha$ Ebenso ergiebt sich unmittelbar, dass die Abweichung in Längenmass bei der reinen Bewegung nach Süden in unseren Gegenden ein Maximum ist, weil hier ein Maximum der φ-Aenderung noch mit dem grössten Werthe von f multiplicirt wird. Dagegen wird bei der rein nördlichen Bewegung die grösste φ-Aenderung mit dem kleinsten Werthe von f multiplicirt und entscheidet erst eine unmittelbare Untersuchung, ob die Abweichung in Längenmass in der That noch ein Maximum bleibt. Bezüglich des Minimums tritt ebenfalls keine Aenderung ein. Ob die Bewegung nach Süden in unseren Breiten unter sonst gleichen Umständen im Allgemeinen eine kleinere Längenabweichung liefert, als die nach Norden, ist wieder fraglich, weil im ersten Falle die kleinere φ-Aenderung mit einem grössern f und im zweiten Falle die grössere φ-Aenderung mit einem kleinern f multiplicirt wird. Entwickelt man zur Entscheidung dieser Frage $\sqrt{r^2-z^2} = r\sqrt{1-\left(\sin\frac{vt}{r}\sin\alpha . \cos\beta + \cos\frac{vt}{r}\sin\beta\right)^2}$ in in die nach $\frac{vt}{r}$ fortschreitende Reihe

$$r\cos\beta\left(1-\frac{vt}{r}\sin\alpha\,.\,tang\,\beta+\tfrac{1}{2}(tang^2\beta-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\,.\,tang^2\beta)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\ldots\right)$$

und multiplicirt diese Reihe mit dem ersten Theile der Reihe von φ in Nr. 19, so erhält man für unsere Abweichung in Längenmass bei der Bewegung nach Norden

$$f\varphi'=\frac{2r\pi t}{24.60.60}\cos\beta\,.\left[\tfrac{1}{2}\sin\alpha\,.\,tang\,\beta\,.\,\frac{vt}{r}-\tfrac{1}{6}(tang^2\beta-\sin^2\alpha)\,.\,\frac{v^2t^2}{r^2}\ldots\right].$$

Für die Bewegung nach Süden ist β negativ zu nehmen. Man sieht hieraus, dass unter unseren Convergenzbedingungen und in unseren Breiten, wo stets $tang\,\beta > \sin\alpha$ ist, die Längenabweichung bei der nördlichen Bewegung unter sonst gleichen Umständen sich entgegengesetzt verhält als die φ-Aenderung, d. h. kleiner als bei der südlichen Bewegung ist. Dies Resultat bleibt so lange bestehen, als unter allen Breiten, die grösser als 45^0 sind, von selbst $tang\,\beta > \sin\alpha$ ist, als bei $\beta < 45^0$ noch immer diese Bedingung erfüllt sein kann, und schlägt erst in das Gegentheil um, wenn in Gegenden von $\beta < 45^0$, $\sin\alpha > tang\,\beta$ ist. Für ein gegebenes β kann das α, welches hier die Grenze bildet, genau bestimmt werden.

Lässt man es bei einer Genauigkeit bis zur ersten Potenz von $\frac{vt}{r}$ bewendet sein, so erhält man für unsere Abweichung

$$f\varphi'=\frac{\pi t}{24.60.60}\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,vt.$$

Wie schon durch den Umstand angedeutet ist, dass dieser Ausdruck kein r enthält, stellt dieser Ausdruck die Ablenkung unter der annähernden Voraussetzung vor, dass vt gerade ist und der ganze Vorgang in der Tangentialebene zur Ausgangsstelle stattfindet. Hier stellt in der That $\sin\alpha.\sin\beta.vt$ die Aenderung des Radius des Parallelkreises und $\frac{\pi t}{24.60.60}$ den in t zurückgelegten Winkel der Winkelgeschwindigkeit der Erde vor und beide zusammen multiplicirt müssen die verlangte Abweichung geben. Es ist nämlich, wenn f den Radius des Parallelkreises der Anfangsstelle und $f-\Delta f$ den der Schlussstelle bezeichnet, die fragliche Abweichung $f\cdot\frac{\pi t}{24.60.60}-(f-\Delta f)\frac{\pi t}{24.60.60}=\frac{\pi t}{24.60.60}\cdot\Delta f$, oder die ebengenannte. Umgekehrt kann auf diesem Wege schnell die obige Formel unmittelbar erhalten werden.

Bei der letzten Formel ist begreiflicherweise, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, eine Verschiedenheit der Abweichung bei der Bewegung nach Norden oder Süden nicht vorhanden, weil der Unterschied dieser Abweichung erst im darauffolgenden und weggelassenen Gliede beginnt. Bei der Bewegung nach Osten oder Westen erscheint hier aus gleichen Gründen gar kein Ablenkungswerth. Die obigen Bemerkungen über die

Maxima und Minima sind sofort ersichtlich. Sonst gilt noch — und dieses Resultat behält seine Giltigkeit auch bei Berücksichtigung von mehr Gliedern der Reihe —, dass die Abweichung um so grösser, je grösser β ist, d. h. in höheren Breiten grösser als in der Nähe des Aequators. Ein sehr bemerkenswerthes Resultat ist noch, dass β und α miteinander vertauscht werden können, ohne dass unser Ausdruck sich ändert. Wird also an einem Orte mit der geographischen Breite β ein Körper unter dem Winkel α gegen den Parallelkreis bewegt, so ist nach unserer Näherungsformel die Ablenhung dieselbe, als wenn der Körper an einem Orte mit der Breite α unter dem Winkel β gegen den Parallelkreis bewegt wird.

Hat man den Ausdruck $\frac{\pi}{24.60.60} . \sin\alpha$ für alle möglichen α-Werthe berechnet, so lässt sich sofort für ein gegebenes t, vt und β auf die Ablenkung schliessen. Es hält auch nicht schwer, die Lösung geometrisch darzustellen. Zu dem Ende construirt man ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\frac{\pi}{24.60.60} = 0{,}00003636$ und dem $\angle\beta$ der geographischen Breite, betrachtet die dem Winkel β gegenüberliegende Kathete als Hypotenuse eines neuen Dreiecks und giebt diesem noch den Winkel α, oder, wenn α stumpf sein sollte, den Winkel $180-\alpha$ — die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete giebt dann, in dem Verhältnisse $1 : vt^2$ oder $1 : st$ vergrössert, die verlangte Ablenkung. Führt man von vornherein einen Weg von 1000^{m} ein, so ist die erste Hypotenuse $= 0{,}03636^{\text{m}}$ zu setzen und die letzte Kathete in dem Verhältnisse $1 : \frac{st}{1000}$ zu vergrössern, um in der Zeichnung sofort die Ablenkung in ihrer wirklichen Grösse zu erhalten.

Um auch einige Zahlenbeispiele zu berühren, sollen die Ablenkungen mit Hilfe der letztgenannten Formel für $\beta = 50^0$, $s = 1000^{\text{m}}$ und $\alpha = 0$ oder 45^0 oder 90^0 angegeben werden. Es ergiebt sich bei der Bewegung nach Norden und Süden, entsprechend den drei Winkeln und abgesehen vom Vorzeichen, welches südwärts negativ ist, $f\varphi' = 0$ oder $0{,}0196958^{\text{m}}.t$ oder $0{,}02785416^{\text{m}}.t$. Das zweite Glied der Reihe für $f\varphi'$ ist, wie unmittelbar ersehen werden kann, bei $\alpha = 0$ am grössten und bei $\alpha = 90^0$ am kleinsten. Man erhält für dieses Glied in unseren drei Fällen die entsprechenden Werthe $-0{,}000001738^{\text{m}}.t$ oder $-0{,}0000011262^{\text{m}}.t$ oder $-0{,}00000051432^{\text{m}}.t$ und daher für die Bewegung nach Norden

$$-0{,}000001738^{\text{m}}.t, \quad +0{,}01969474^{\text{m}}.t, \quad +0{,}02785365^{\text{m}}.t,$$

für die Bewegung nach Süden

$$-0{,}000001738^{\text{m}}.t, \quad -0{,}019697^{\text{m}}.t, \quad -0{,}02785467^{\text{m}}.t.$$

Bei $\alpha = 135^0$ sind die Ablenkungen ebenso gross wie bei $\alpha = 45^0$. Diese Werthe lassen sofort die Richtigkeit der obigen allgemeinen Bemerkungen über die Grösse der Ablenkung erkennen. Wenn $vt = 10000^m$ angenommen wird, so sind die Werthe aus dem ersten Gliede 10 mal und die aus dem zweiten Gliede 100 mal grösser. Für eine Flintenkugel, welche etwa 3 Sec. zum Durchfliegen der 1000^m braucht, wäre die Ablenkung dreimal so gross, als oben angegeben wurde, also z. B. bei der reinen Bewegung nach Norden oder Süden $c. 8^{cm}$, für eine Kanonenkugel, welche 5000^m in 15 Sec. zurücklegt, 75 mal so gross, mithin unter den obigen Umständen $c. 2{,}1^m$.

Eine Bestätigung erhalten die obigen Resultate, wenn man $\beta = 0$ setzt, oder die Bewegung vom Aequator aus erfolgt. Hier wird für $\alpha = 0$, wie es sein muss, auch das zweite Glied der Reihe und also die ganze Ablenkung $= 0$; dann wird für alle anderen α das zweite Glied, welches hier allein die Ablenkung bestimmt, positiv, und vermehrt demnach, der Wirklichkeit entsprechend, die Ablenkung stets den Winkel φ.

Die Abweichung senkrecht zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit ist für den ersten Fall der Annäherung leicht zu bestimmen; sie ist nämlich gleich der Abweichung auf dem Parallelkreis mal $\sin\alpha$, also gleich $\frac{\pi t}{24.60\,60} \sin^2\alpha . \sin\beta . vt$. Bei genauer Bestimmung würde man statt des rechtwinkligen ebenen Dreiecks ein ebenso beschaffenes sphärisches Dreieck erhalten und daraus die Abweichung bestimmen müssen.

Es wurde schon mehrmals angedeutet, dass unsere Formeln, ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, auch die Ablenkung von Geschossen durch die Umdrehung der Erde geben. Dies ist, streng genommen, nur unter den letzten Voraussetzungen der Fall, wo die Ablenkungscurve in die Tangentialebene des Ausgangspunktes fällt; denn hier kann die Wirkung der Schwere stets senkrecht zu dieser Ebene, also die Bahn des Körpers, abgesehen von anderen Einflüssen, als eine Parabel, und die horizontale Geschwindigkeit, unseren Voraussetzungen gemäss, als constant betrachtet werden. Die oben betrachtete Curve stellt hier die Projection der Curve im Raume vor und die letztere wird erhalten, wenn man in den Punkten der Projectionscurve Senkrechte zu der Tangentialebene errichtet und sie gleich den Lothen macht, welche die reine Parabelbahn zur gleichen Zeit hätte. Aus denselben Gründen wird durch die obige Formel die Ablenkung eines Geschosses für den Moment des Auffallens bestimmt, wenn man statt v eine horizontale Seitengeschwindigkeit, also $e . \cos\gamma$ setzt, wo e die anfängliche Wurfgeschwindigkeit und γ den Elevationswinkel bezeichnet, und statt t die Zeit, die der Körper braucht, um wieder herab zur Erde zu gelangen. Hier ergiebt sich nun sofort das bemerkenswerthe Resultat, dass, wenn nach einem bestimmten Ziele geschossen wird, also $vt = s$ ein gegebenes ist, die Ablenkung um so grösser wird, je grösser der Elevationswinkel ist. Unabhängig von e folgt nämlich aus $t = \sqrt{\frac{2s . \tan g\gamma}{g}}$

für ein grösseres γ ein grösseres t und damit die grössere Abweichung von dem Ziele. Im Zusammenhange damit steht, dass von den zwei Werthen, welche sich aus $\frac{gs}{e^2} = \sin 2\gamma$, bei $gs < e^2$ und gegebenen e und s für γ ergeben, der Werth zwischen 45 und 90° im Vergleich zum Werthe zwischen 0 und 45° ein soviel mal grösseres t und daher eine soviel mal grössere Ablenkung giebt, als die *cotang* des Winkels zwischen 0 und 45° angiebt. Man kann nun für die Längenabweichung aus

$$f\varphi' = \frac{\pi t}{24.60.60} \cdot e . \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . t,$$

dann aus $s = e.\cos\gamma.t$ und $t = \frac{2e}{g}\sin\gamma$ verschiedene Formeln angeben, wenn man aus den zwei letzten Gleichungen zwei der Grössen e, t, γ sucht und die Werthe in den ersten Ausdruck einsetzt oder nur eine der letzten Gleichungen verwendet.

In Betreff der umgekehrten Aufgabe, nämlich α, v oder t so zu bestimmen, dass der Körper unter dem Einflusse der Erddrehung an eine bestimmte Stelle kommt, wurden hierher gehörige Aufgaben schon zu Anfang unserer Nummer betrachtet. Man könnte jedoch noch statt des dortigen φ' und β' die Grössen s' und α', d. h. die wirkliche Entfernung des vorgeschriebenen Zieles und den Winkel α', oder den Winkel der Richtung dahin mit dem Parallelkreise einführen. Die dieser Aufgabe zu Grunde liegenden Gleichungen wären dann für unsern ersten Grad der Annäherung, wo die Curve auf der Tangentialebene liegt,

1) $$s'^2 = s^2 + (f\varphi')^2 + 2s(f\varphi') . \cos\alpha,$$

2) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{s}{s'}$$

oder

1) $$s'^2 = v^2 t^2 \left(1 + \left(\frac{\pi t}{24\ 60.60}\right)^2 . \sin^2\alpha . \sin^2\beta + \frac{2\pi t}{24.60.60} . \sin\alpha . \cos\alpha . \sin\beta\right),$$

2) $$\sin\alpha = \frac{s' . \sin\alpha'}{vt}.$$

Man hätte also wieder zwei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten v, t und α, so dass wieder eine beliebig gewählt werden könnte. Nimmt man dazu noch den Wurf und die Wurfgleichungen, oder

3) $$v = e . \cos\gamma$$

und

4) $$t = \frac{2e}{g} . \sin\gamma$$

hinzu, so hat man vier Gleichungen mit fünf Unbekannten. Bei gegebenem e, d. h. bei gegebener Geschwindigkeit des Projectils, lassen sich alle anderen Grössen bestimmen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der Werth von α, weil $\alpha - \alpha'$ den Winkel bestimmt, um den die Richtung des Geschützes von der Richtung nach dem Ziele abweichen muss, damit letzteres getroffen wird. Diese Abweichung liegt auf der Nordhälfte der Erde dem Schiessenden zu linken Seite. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Gleichung zur Bestimmung von α herzuleiten; dieselbe ist jedoch von so complicirter Gestalt, dass sich keine weiteren einfachen Bemerkungen an das knüpfen lassen, was in dieser Beziehung schon erwähnt wurde.

Wollte man die zweiten Beziehungen auf den Wurf anwenden, so wäre es angemessener, statt der parabolischen Wurfbahn eine elliptische zu setzen. Das Fortschreiten der Projection des geworfenen Körpers auf dem grössten Kreise der Bahnebene, in welcher der Körper ohne Einfluss der Erddrehung bleibt, würde dann jedoch nicht mehr mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sondern dem zweiten Kepler'schen Gesetze entsprechend stattfinden. Es wären also unsere letzten Formeln, welche dieses gleichförmige Fortschreiten voraussetzen, hier gar nicht mehr anwendbar. Wir wollen in einer spätern Nummer auf diesen Fall wieder zurückkommen.

Nr. 24. Weil die Aufgabe in Nr. 19 dadurch eine gewisse Bedeutung erlangt, dass die ebene Bahn und die constante Geschwindigkeit v den Forderungen des Beharrungsvermögens entsprechen, so sollen hier noch die dortigen Gleichungen dadurch verallgemeinert werden, dass man statt der Kugel irgend eine Rotationsfläche setzt. Die ursprüngliche Kreisbahn des Körpers geht dann in die ebene Bahn über, nach welcher die Ebene, die den Ursprung und die anfängliche Richtung des v enthält, die Rotationsfläche schneidet. Der Ursprung kann irgendwo auf der Rotationsaxe liegen. Sämmtliche Bestimmungen und Bezeichnungen der Nr. 19 in Bezug auf den Anfangszustand, die Lage des Coordinatensystems etc. sollen hier beibehalten werden. Analog den Nrn. 18 und 19 erhält man hier zur Bestimmung unserer Curve die Gleichungen

$$1)\qquad \varrho = f_z,$$

$$2)\qquad z = r \sin(\psi_t + \mu) \,.\, \sin\theta,$$

$$3)\qquad \varphi = \int_0^t \omega\, dt + arctang\left[tang\,\psi_t \,.\, cos\,\theta\right].$$

In diesen Gleichungen müssen jedoch erst r, μ, ψ und θ den neuen Verhältnissen gemäss bestimmt werden. Zunächst ist $r = \sqrt{z^2 + f^2}$; dann ist, wie früher, $\mu = arcsin \frac{z'}{r' \sin\theta} = arcsin \frac{z'}{\sin\theta \sqrt{z'^2 + f'^2}}$, wo z', f' etc. sich auf den Anfangspunkt beziehen. Aus $r^2\, d\psi^2 + dr^2 = r^2\, dt^2$ folgt weiter

$$d\psi = \sqrt{\frac{v^2\,dt^2 - dr^2}{r^2}}$$

und

$$\psi = \int\limits_0^t \sqrt{\frac{v^2 - (\partial(\sqrt{f^2+z^2})_t)^2}{f^2+z^2}}\,dt = \int\limits_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z + z)^2\,\partial z_t^2}}{f^2+z^2}\,dt.$$

Endlich ergiebt sich θ auf folgende Weise. Die Normalgleichung der Bahnebene sei $x.\cos\lambda + y.\cos\mu + z.\cos\nu = 0$, wo λ, μ und ν unbekannt sind und $\nu = \theta$ wird. Diese Ebene geht durch den Ausgangspunkt und muss deshalb sein

4) $$f'\cos\lambda + z'\cos\nu = 0.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v bildet mit den drei Axen die Winkel α', β', γ', deren Cosinusse gleich sind $\cos\alpha' = \frac{dx'}{v\,dt} = \frac{df'}{v\,dt} = \frac{\partial f'_z\,dz'}{v\,dt}$, $\cos\beta' = \frac{dy'}{v\,dt} = \cos\alpha$ und $\cos\gamma' = \frac{dz'}{v\,dt}$; dabei ist $dz'^2 + \partial f_{z'}^2\,dz'^2 = v^2\sin^2\alpha.dt^2$, also $dz' = \frac{v\sin\alpha.dt}{\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}}$. Nun liegt aber unsere Anfangsgeschwindigkeit in der Bahn, mithin giebt

5) $$\cos\lambda.\frac{\partial f_{z'}}{v\,dt}.\frac{v\sin\alpha.dt}{\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}} + \cos\mu.\cos\alpha + \cos\gamma.\frac{v\sin\alpha.dt}{v\,dt\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}} = 0.$$

Dazu kommt noch die Richtungsgleichung

6) $$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 4), 5) und 6) das λ und μ, so erhält man

$$\cos\nu = \cos\theta = \frac{f'\sqrt{1+\partial f_{z'}^2}}{\sqrt{(z'^2+f'^2)(1+\partial f_{z'}^2) + (z'\partial f_{z'} - f')^2.\,tang^2\alpha}}.$$

Es ist nun auch leicht, daraus $\sin\theta$ zu bestimmen.

Setzt man den Werth von ψ in die Gleichung 2) für z ein, so erhält man

2) $$z = \sqrt{f^2+z^2}\sin\left(\int\limits_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z + z)^2\,\partial z_t^2}}{f^2+z^2}\,dt + \mu\right)\sin\theta.$$

Diese Gleichung ist nur scheinbar nach z aufgelöst, weil die rechte Seite noch z, ja sogar noch ∂z_t enthält. Es ist daher zunächst z zu bestimmen, zumal auch noch ψ und φ sich erst mit Hilfe des z erhalten lassen. Zu dem Ende lösen wir in der letzten Gleichung zunächst nach dem Integral auf, leiten auf beiden Seiten nach t ab und suchen aus der erhaltenen Differentialgleichung ∂z_t; es wird dann

$$\partial z_t = v \sqrt{\frac{(f^2+z^2)(f^2 \sin^2\theta - z^2 \cos^2\theta)}{f^2(f - z\,\partial f_z)^2 + (f\,\partial f_z + z)^2 (f^2 \sin^2\theta - z^2 \cos^2\theta)}}$$

und daraus

$$2)\quad t = \frac{1}{v}\int_0^z \sqrt{\frac{f^2(f - z\,\partial f_z)^2 + (f\,\partial f_z + z)^2(f^2 \sin^2\theta - z^2\cos^2\theta)}{(f^2+z^2)(f^2\sin^2\theta - z^2\cos^2\theta)}}\,dz.$$

Um z zu finden, dürfte die letzte Gleichung nur nach z aufgelöst werden.

Aus der Gleichung $z = \sqrt{f^2+z^2}\,.\,\sin(\psi+\mu)\,.\sin\theta$ lässt sich ψ und damit das zugehörige Integral finden. Es ergiebt sich hier

$$\psi = \int_0^t \frac{\sqrt{v^2(f^2+z^2) - (f\,\partial f_z^{\,2} + z^2)\,\partial z_t^{\,2}}}{f^2+z^2}\,dt$$

$$= \arcsin \frac{z}{\sin\theta\sqrt{f^2+z^2}} - \arcsin \frac{z'}{\sin\theta\sqrt{f'^2+z'^2}},$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist. Wollte man die Function von t für ψ haben, so müsste der vorher bezeichnete z-Werth eingesetzt werden.

Das Einsetzen des oben bestimmten ψ-Werthes in die Gleichung 3) giebt in ähnlicher Weise wie in Nr. 19

$$3)\quad \varphi = \int_0^t \omega\,dt + \operatorname{arctang}\left(\frac{z\sqrt{f'^2\sin^2\theta - z'^2\cos^2\theta} - z'\sqrt{f^2\sin^2\theta - z^2\cos^2\theta}}{z z' + \sqrt{(f'^2\sin^2\theta - z'^2\cos^2\theta)(f^2\sin^2\theta - z^2\cos^2\theta)}}\,.\cos\theta\right).$$

Wird in die letzte Gleichung noch statt t die in der letzten Gleichung 2) gefundene Function von z eingesetzt, so erhält man die Gleichung der windschiefen Fläche, die in Verbindung mit der Rotationsfläche die verlangte Curve bestimmt. Sonst ist noch einfach zu übersehen, wie sich die Formeln gestalten, wenn v nicht constant, sondern eine Function von t oder z ist.

Setzt man $f^2+z^2=r^2$ und ω constant, so gehen unsere Resultate in die der Nr. 19 über.

Für die ursprüngliche Bewegung längs des Meridians ist $\alpha = 90^0$ und wird $\cos\theta = 0$ oder $\theta = 90^0$, dann $t = \frac{1}{v}\int_0^z \sqrt{1+\partial f_z^{\,2}}\,.\,dz$. Letzteres Resultat kann aus $\sqrt{\partial z_t^{\,2} + \partial f_z^{\,2}\,.\,\partial z_t^{\,2}} = v$ unmittelbar erhalten werden. Weiter wird

$$\psi = arcsin \frac{z}{\sqrt{f^2+z^2}} - arcsin \frac{z'}{\sqrt{f'^2+z'^2}}$$

und endlich

$$\varphi = \int_0^t \omega \, dt.$$

Der andere Fall, wo $\alpha = 0$ ist, giebt keine so einfachen Resultate.

Auch die Aufgabe der Nr. 20 kann sofort den jetzt gegebenen Stücken angepasst werden, wenn man in der Gleichung 3) für φ statt ω den Ausdruck $\frac{p-f\omega}{f} = \omega \frac{f'-f}{f}$ setzt. Die beiden anderen Gleichungen für t oder z und ϱ bleiben dieselben, wie oben.

(Schluss folgt.)

XII.

Beziehungen zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen.

Von

R. Müller,

Studirender der Mathematik am königl. Polytechnikum Dresden.

(Hierzu Taf. V, Fig. 1—9.)

In den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Jahre 1866 giebt Herr Niemtschik folgende Construction der Contouren orthogonal dargestellter Rotationsflächen an: Sind von der Rotationsfläche die Axe AA' und der Meridian M gegeben (Fig. 1), so projicire man die Fläche auf eine zu AA' parallele Verticalebene E und lege diese Projection um die Horizontalspur E' von E in den Grundriss nieder, so dass $A_3A'_3$ die Projection der Axe und der Meridian M die Contour der Rotationsfläche auf der umgelegten Ebene darstellt. Hierauf ziehe man einen beliebigen Parallelkreis $p_3m_3q_3 \perp A_3A'_3$, sowie die Tangente p_3s_3 und die Normale p_3n_3 der Curve M, bestimme die Punkte s_1, s_2, n_1, n_2 auf $A_1A'_1$, resp. $A_2A'_2$, und beschreibe eine Kugel, welche die darzustellende Fläche in dem genannten Parallelkreise berührt, also n zum Mittelpunkte hat. Legt man an die als Grundriss- und Aufrissprojection dieser Kugel auftretenden Kreise von s_1, resp. s_2 aus die Tangenten $s_1\varphi_1$, $s_1\varphi'_1$, $s_2\psi_2$, $s_2\psi'_2$, so sind φ_1 und φ'_1 Punkte der Grundrisscontour, ψ_2 und ψ'_2 Punkte der Aufrisscontour.

Diese Construction kann noch folgendermassen abgeändert werden. Die Punkte φ und φ' sind die Schnittpunkte des grössten horizontalen Kugelkreises mit dem Parallelkreise der Rotationsfläche. Zieht man $n_3\varphi_3$ parallel $A_1A'_1$, so ist $n_3\varphi_3$ die seitliche Projection dieses Kugelkreises und φ_3 diejenige von φ und φ'; mithin erhält man φ_1 und φ'_1, indem $\varphi_3\varphi_1 \perp A_1A'_1$ und $n_1\varphi_1 = n_1\varphi'_1 = n_3p_3$ macht. Die Punkte ψ und ψ' sind ferner die Schnittpunkte des Parallelkreises mit demjenigen grössten Kugelkreise, dessen Ebene parallel zum Aufriss ist. Denkt man sich nun die Grundrissebene parallel zu sich selbst so verschoben, dass $\varphi_1\varphi'_1$ Grundrissspur der Ebene des Parallelkreises wird, so ergiebt sich die

Durchschnittslinie der Ebene des Parallelkreises mit der des Kugelkreises, indem man $n_1 t_1$ und $n_2 t_2$ parallel zur Projectionsaxe zieht und von t_2 auf $A_2 A'_2$ die Senkrechte $t_2 \psi_2$ fällt. Schlägt man alsdann von n_2 aus mit dem Radius $n_3 p_3$ einen Kreis, welcher $t_2 \psi_2$ in ψ_2 und ψ'_2 trifft, so sind ψ_2 und ψ'_2 die gesuchten Contourpunkte*.

Aus dieser Construction folgt, dass φ_3 ein Punkt der seitlichen Projection der auf der Rotationsfläche liegenden Grundrisscontourlinie ist. Es soll überhaupt in den folgenden Betrachtungen diejenige Linie, in welcher die verticalen Projectionsstrahlen die Fläche berühren, Grundrisscontourlinie, die Grundrissprojection derselben aber Grundrisscontourcurve oder Grundrisscontour genannt werden.

Denkt man sich zu allen Punkten n_3 der seitlichen Projectionsebene nach einer der angeführten Methoden alle Punkte φ_1 resp. ψ_2 der Grundriss- resp. Aufrissebene bestimmt, so werde in Zukunft unter Meridiansystem die Gesammtheit aller Punkte der seitlichen Projectionsebene, unter Grundriss- resp. Aufrisscontoursystem die Gesammtheit aller Punkte der Grundriss- resp. Aufrissebene verstanden.

Aus der zuerst angegebenen Construction geht hervor, dass $n_1 \varphi_1$, $n_1 \varphi'_1$, $n_2 \psi_2$, $n_2 \psi'_2$ Normalen der bezüglichen Contourcurven sind. Betrachtet man also die Punkte p_3, q_3, φ_1, φ'_1, ψ_2, ψ'_2 als entsprechende Punkte, so ergiebt sich der Satz: Entsprechende Punkte im Meridian- und Contoursystem besitzen in Bezug auf die Projectionen der Rotationsaxe gleichlange Normalen.

Wie man sofort erkennt, entsprechen nicht allen Punkten der Meridiancurve Punkte der Contourcurven, da s_1 oder s_2, von denen man Tangenten an die betreffenden Kreise zu ziehen hat, innerhalb der letzteren liegen können. Dann werden auch $\varphi_3 \varphi_1$, resp. $t_2 \psi_2$ von den Kreisen nicht mehr geschnitten. — Bezeichnet man den von $A_1 A'_1$ und $A_3 A'_3$ gebildeten spitzen Winkel, d. h. den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die Grundrissebene, mit h, so besitzen alle Punkte der Meridiancurve, deren Normalen mit $A_3 A'_3$ einen Winkel, kleiner als h, einschliessen, im Grundrisscontoursystem keine entsprechenden Punkte. Diejenigen Punkte der Meridiancurve, deren Normalen mit $A_3 A'_3$ den Winkel h bilden, liefern im Grundrisscontoursystem Punkte auf $A_1 A'_1$.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen der Meridian- und Aufrisscontourcurve.

Der Umstand, dass möglicherweise einem Punkte im Meridiansystem gar kein Punkt im Contoursystem entspricht, wird bei den meisten noch zu entwickelnden Sätzen zu berücksichtigen sein, auch wenn derselbe nicht in jedem Falle von Neuem erwähnt werden wird.

---

* Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung etc., Leipzig 1875; S. 114.

Man kann nun auch, wie bisher die Meridiancurve, eine der Contourcurven, z. B. die im Grundrisse, als gegeben betrachten und hierzu die Meridian- und Aufrisscontourcurve bestimmen.

Um z. B. zu dem Punkte φ_1 den entsprechenden p_3 im Meridiansystem zu finden, construire man zunächst die Normale $\varphi_1 n_1$ der Grundrisscontourcurve, ziehe $n_1 n_3$ und $\varphi_1 \varphi_3 \perp A_1 A'_1$, $n_3 \varphi_3$ parallel $A_1 A'_1$, $\varphi_3 p_3 \perp A_3 A'_3$ und mache $p_3 n_3 = \varphi_1 n_1$. Hierbei entspricht jedem Punkte der Grundrisscontour ein Punkt des Meridians, denn es ist stets $n_3 \varphi_3 < n_1 \varphi_1$, folglich um so mehr $m_3 n_3 < n_1 \varphi_1$. — Ist $n_1 \varphi_1$ parallel $A_1 A'_1$, so entspricht dem Punkte φ_1 ein unendlich ferner Punkt im Meridiansystem.

Soll sich ferner zu φ_1 ein Punkt ψ_2 im Aufrisscontoursystem ergeben, so muss $n_2 \mu_2 \leqq n_1 \varphi_1$ sein. Bezeichnet man also die von $A_1 A'_1$ und $A_2 A'_2$ mit der Projectionsaxe gebildeten spitzen Winkel bezüglich mit α und β und $\angle \varphi_1 n_1 s_1$ mit γ, so erhält man für das Vorhandensein des Punktes ψ_2 die Bedingung

$$n_1 \varphi_1 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cos\gamma \leqq n_1 \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \cos\gamma \leqq \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Hieraus folgt: So lange α kleiner als β ist, entspricht jedem Punkte im Grundrisscontoursystem ein Punkt im Aufrisscontoursystem. Ist dagegen α grösser als β, so entsprechen nicht allen Punkten der Grundrisscontour Punkte der Aufrisscontour; bei

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

erhält man alsdann einen auf $A_2 A'_2$ gelegenen Punkt.

Die eben angeführte Gleichung liefert eine einfache Bestimmung des auf $A_2 A'_2$ liegenden Punktes der Aufrisscontour, wenn die Grundrisscontour gegeben ist und man sich der seitlichen Projection nicht bedienen will.

Ist α kleiner als β und nur die Grundrisscontour der Rotationsfläche, aber nicht ihr Meridian bekannt, so hat die aus der Grundrisscontour entwickelte Aufrisscontour mit $A_2 A'_2$ keinen Punkt gemein. — Bei α gleich β sind Aufriss- und Grundrisscontour congruent.

In den folgenden Betrachtungen wird es unsere Aufgabe sein, zu gegebenen Meridian- oder Contourcurven die entsprechenden Curven in den beiden anderen Systemen zu bestimmen.

1. Im Meridiansystem sei ein Punkt P_3 im Abstande a von $A_3 A'_3$ gegeben. (Fig. 2.) Da man jeden Punkt als einen unendlich kleinen Kreis, als einen sogenannten Punktkreis, auffassen kann, so folgt hieraus, dass P_3 eine unendlich dünne Ringfläche erzeugen muss. Wie aus der darstellenden Geometrie bekannt ist, projicirt sich aber jede schief-

gestellte Ringfläche als Aequidistante einer Ellipse. Diese Curve muss also in dem vorliegenden Falle für einen Punktkreis in eine Ellipse übergehen. Man gelangt mithin zu dem Satze: **Jedem als Punktkreis aufgefassten Punkte im Meridiansystem entspricht eine Ellipse im Contoursystem.** Die Halbaxen dieser Ellipse sind a und $a \sin h$ im Grundriss, a und $a \sin v$ im Aufriss, wobei v den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die Aufrissebene bezeichnet.

Liegt P_3 auf $A_3 A'_3$, so degenerirt auch die Contourellipse in einen auf der betreffenden Projection der Rotationsaxe liegenden Punkt. — Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie fällt mit der durch P_3 gehenden Senkrechten $P_3 Q_3$ zusammen.

Einem zu P_3 symmetrisch liegenden Punkte P'_3 entspricht dieselbe Ellipse im Contoursystem.

Da überhaupt Meridian- und Contourcurve in Bezug auf die Projectionen der Rotationsaxe symmetrisch sind, so wird es in Zukunft genügen, nur eine Hälfte der betreffenden Curven zu betrachten.

In Fig. 2, wie in den folgenden Figuren ist der Einfachheit wegen die Aufrisscontour weggelassen, die Grundrisscontour dagegen in eine bequemere Lage gebracht worden.

Nimmt man umgekehrt im Grundrisscontoursystem einen Punktkreis P_1 in der Entfernung a von $A_1 A'_1$ an (Fig. 3), so erhält man Punkte der Meridiancurve, indem man durch P_1 alle möglichen Normalen zieht und dann die bekannte Construction anwendet. Entspricht der Normale $P_1 Q_1$ die Normale $R_3 Q_3$ der Meridiancurve, und bezeichnet man $R_3 M_3$ mit x und $O_3 M_3$ mit y, so ist

$$M_3 P_3 = Q_3 P_3 \sin h$$

mithin

$$y = Q_3 P_3 \sin h \tan h$$

oder

$$Q_3 P_3 = \frac{y}{\sin h \tan h}$$

und

$$Q_3 M_3 = \frac{y}{\tan^2 h}.$$

Dann ergiebt sich aus $\triangle R_3 M_3 Q_3$

$$x^2 + \frac{y^2}{\tan^4 h} = a^2 + \frac{y^2}{\sin^2 h \tan^2 h}$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a \tan h}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgt der Satz: **Jedem als Punktkreis aufgefassten Punkte im Contoursystem entspricht eine Hyperbel im Meridiansystem.** Der Asymptotenwinkel der vorliegenden Hyperbel beträgt $2h$; $P_1 O_3$ ist die eine Asymptote; die Hauptaxe der Hyperbel steht senkrecht auf $A_3 A'_3$. — Das gewonnene Resultat wird auch durch die Anschauung bestätigt. Bringt man nämlich ein einfaches Rotationshyperboloid in eine solche Lage, dass eine Mantellinie senkrecht auf der Grundrissebene steht, so degenerirt seine Grundrisscontour in zwei Punkte P_1 und P'_1, denn die Projection jeder Mantellinienschaar umhüllt einen Punkt. — Da die vorliegende Fläche ein Rotationshyperboloid ist, so ergiebt sich aus einem später noch zu beweisenden Satze, dass die dem Punkte P_1 entsprechende Aufrisscontourcurve bei $v > h$ oder $\alpha > \beta$ eine Ellipse mit den Halbaxen

$$a \text{ und } a\frac{\sqrt{\sin(v+h)\sin(v-h)}}{\cos h},$$

bei $v = h$ ein Punkt und bei $v < h$ eine Hyperbel sein muss.

Die Gerade $O_3 P_1$ ist zugleich die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie, d. h. der beiden verticalen Mantellinien.

2. Hat man im Meridiansystem eine beliebige Curve σ, so entspricht derselben in einem der Contoursysteme eine Curve Σ, und dann stehen σ und Σ in einer interessanten Beziehung, welche jedoch nicht zu den bisher eingehender behandelten geometrischen Beziehungen gehört. Dieselbe ist ein specieller Fall der von Herrn Lie aufgestellten räumlichen Reciprocität. (Siehe die Abhandlung dieses Autors „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen“, im V. Bande der Math. Ann.) Es wird daher nöthig sein, vorerst einige Hauptsätze aus dieser geometrischen Beziehung anzuführen. Herr Lie geht von den Gleichungen aus

$$F_1(xyz\,XYZ) = 0$$

und

$$F_2(xyz\,XYZ) = 0,$$

wobei xyz und XYZ die Punktcoordinaten zweier Räume r und R bedeuten. Durch diese beiden Gleichungen werden die Räume r und R so aufeinander bezogen, dass den Punkten des einen Raumes die Curven eines Complexes im zweiten Raume entsprechen. Complexcurven, die durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen den Punkten derjenigen Curve, die dem gegebenen Punkte zugeordnet ist. Zwei von Complexcurven umhüllte Curven C und c in R und r stehen in solcher gegenseitiger Beziehung, dass den Punkten der einen diejenigen Complexcurven entsprechen, welche die zweite umhüllen.

Einen speciellen Fall dieser Reciprocität gründet Plücker auf die Interpretation der Gleichung

$$F(xy\,XY) = 0$$

(Analytisch-geometrische Entwickelungen Bd. II, S. 251).

Hierbei bilden die einem Punkte xy in dem einen von zwei ebenen Systemen conjugirte Punkte XY im andern System eine Curve C, die durch die Gleichung

$$F(xy\,XY)=0$$

dargestellt wird, wenn xy als Parameter, XY hingegen als laufende Coordinaten aufgefasst werden. Zu dieser von Plücker behandelten Reciprocität gehört nun auch die Beziehung, welche zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen stattfindet, und zwar gelten analog den von Herrn Lie aufgestellten folgende Sätze: Den Punkten des Meridiansystems entspricht ein Complex homothetischer Ellipsen im Contoursystem, und den Punkten des Contoursystems ein Hyperbelcomplex im Meridiansystem.

Complexellipsen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen den Punkten derjenigen Complexhyperbel, welche dem gegebenen Punkte zugeordnet ist, und umgekehrt. Hat man im Meridian- und Contoursystem zwei einander zugeordnete Curven σ und Σ, so entspricht den Punkten von σ ein Ellipsencomplex, welcher Σ einhüllt, und den Punkten von Σ ein Hyperbelcomplex, von dem σ umhüllt wird.

Aus früheren Betrachtungen ergiebt sich ferner: Dem Berührungspunkte mehrerer Meridiancurven ist der Berührungspunkt der entsprechenden Contourcurven zugeordnet; dagegen entsprechen dem Schnittpunkte mehrerer Meridiancurven auf den betreffenden Contourcurven verschiedene Punkte der dem Schnittpunkte zugeordneten Complexellipse, und umgekehrt.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen dem Grundriss- und Aufrisscontoursystem.

Ist die Meridiancurve bekannt, so lässt sich in folgender Weise die Contourcurve analytisch bestimmen. Die Gleichung der Meridiancurve sei in Bezug auf einen auf $A_3A'_3$ liegenden Punkt M_3 als Coordinatenanfang und $A_3A'_3$ als Abscissenaxe (Fig. 5)

I) $$y=f(x).$$

Zu einem beliebigen Punkte p_3 dieser Curve mit den Coordinaten x und y werde der entsprechende Punkt φ_1 im Grundrisscontoursystem bestimmt. Die Coordinaten von φ_1 seien für M_1 als Anfangspunkt und $A_1A'_1$ als Abscissenaxe ξ und η. Dann ist wegen der Gleichheit der Normalen p_3n_3 und φ_1n_1

1) $$y\sqrt{1+y'^2}=\eta\sqrt{1+\eta'^2}.$$

Ferner ist

$$n_3m_3=n_1\mu_1\cos h$$

oder

2) $$y y' = \eta \eta' \cos h.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt durch Elimination von η'

II) $$y^2 (\cos^2 h - y'^2 \sin^2 h) = \eta^2 \cos^2 h.$$

Da

$$\xi = r m_3 + m_3 s$$

($r m_3 s$ parallel $A_1 A'_1$) ist, so ergiebt sich, weil $\angle n_3 p_3 m_3$ als negativ in Rechnung gebracht werden muss,

III) $$x \cos^2 h - y y' \sin^2 h = \xi \cos h.$$

Man erhält nun die Gleichung der Contourcurve, indem man x und y zwischen den Gleichungen I), II) und III) eliminirt. Ein ähnliches Verfahren ist anzuwenden, wenn die Gleichung der Meridiancurve in der unentwickelten Form

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist.

Bezeichnet man $\varphi_3 m_3$ mit $\mathfrak{y}$ und $M_3 m_3$ mit $\mathfrak{x}$, so ist

IV) $$\mathfrak{y} = y y' \tan h$$

und

V) $$\mathfrak{x} = x.$$

Aus I), IV) und V) kann die Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie gefunden werden.

3. Eine Gerade im Meridiansystem kann als Mantellinie einer Rotationskegelfläche aufgefasst werden, und hieraus folgt, dass einer Geraden im Meridiansystem eine Gerade im Contoursystem entspricht. Aus naheliegenden Gründen gilt hierbei die Beschränkung, dass alle Meridiangeraden, die mit $A_3 A'_3$ einen Winkel einschliessen, der grösser ist als $(90^0 - h)$, keine entsprechende Contourgerade im Grundrisse besitzen. Schneidet eine Meridiangerade $A_3 A'_3$ unter dem Winkel $(90^0 - h)$, so degenerirt die entsprechende Contourgerade im Grundrisse in einen auf $A_1 A'_1$ liegenden Punkt. — Bezeichnet man den Winkel, den die Meridiangerade mit $A_3 A'_3$ bildet, mit μ, und den, welchen die Grundrisscontourgerade mit $A_1 A'_1$ einschliesst, mit ν, so ist

$$\sin \nu = \frac{\sin \mu}{\cos h}.$$

Parallelen Meridiangeraden entsprechen also parallele Contourgeraden. — Gehen mehrere Meridiangerade durch denselben Punkt von $A_3 A'_3$, so treffen die entsprechenden Contourgeraden in einem Punkte von $A_1 A'_1$, resp. $A_2 A'_2$ zusammen.

Mit Rücksicht auf den letzten der unter 2 angeführten Sätze ergiebt sich ferner: Einem Strahlenbüschel im Meridiansystem entspricht im Contoursystem eine Schaar von Tangenten, welche die dem Büschelmittelpunkte zugeordnete Ellipse umhüllen. Als Umkehrung dieses Satzes erhält man: Einem Strahlenbüschel in dem einen Contoursystem entspricht eine Schaar von Hyperbeltangenten im Meridiansystem und eine Schaar von Ellipsen- oder Hyperbeltangenten, oder wieder ein Strahlenbüschel im andern Contoursystem. Die beiden zuletzt angegebenen Sätze lassen sich in folgenden vereinigen: Einem Strahlenbüschel erster Ordnung in dem einen System entsprechen im Allgemeinen Strahlenbüschel zweiter Ordnung in den beiden anderen Systemen.

4. Wählt man als Meridian eine Parabel, deren Axe mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt (Fig. 4), so wird ein Rotationsparaboloid erzeugt, und die Contouren dieser Fläche sind bekanntlich im Allgemeinen wieder Parabeln. Der Scheitel T_1 der Grundrisscontourparabel wird gefunden, indem man an den Meridian eine zu $A_1 A'_1$ senkrechte Tangente $T_3 T_1$ legt. — Bezeichnet man den Halbparameter des Paraboloids, also auch des Meridians, mit p, so ergiebt sich aus der Construction, dass die Subnormale, also auch der Halbparameter der Contourparabeln, in Grundriss und Aufriss $p\,sec\,h$, resp. $p\,sec\,v$ sein muss. Diese Beziehung liefert ein Mittel, um ein Rotationsparaboloid ohne Benutzung seitlicher Projection orthogonal darzustellen, wenn gegeben sind die Axe AA', der Scheitel B und der Halbparameter p. Man würde nämlich T_1 finden können, wenn $B_1 T_1$ bekannt wäre. Zieht man nun $B_3 C_3$ parallel und gleich $B_1 T_1$, so ist

$$B_3 C_3 = B_1 T_1 = \frac{p}{2}\,tan\,h\,sin\,h.$$

Hiernach ist $B_1 T_1$ zu construiren. Bequemer ist es jedoch, zunächst den Brennpunkt f_1 der Grundrisscontourparabel zu ermitteln. Dann erhält man

$$B_1 f_1 = T_1 f_1 - B_1 T_1 = \frac{p}{2}\,sec\,h - \frac{p}{2}\,sec\,h\,sin^2 h = \frac{p}{2}\,cos\,h.$$

Es ergiebt sich also folgende Construction: Man mache $\angle A_1 B_1 D = h$, $B_1 D = \frac{p}{2}$, $Df_1 \perp A_1 A'_1$, $DE \perp B_1 D$ und $f_1 T_1 = E B_1$. Im Aufriss hat man analog zu verfahren.

Es kann nun noch erwünscht sein, die dargestellte Fläche durch einen Parallelkreis zu begrenzen, und zwar wiederum ohne Benutzung seitlicher Projection. Soll die als Horizontalprojection des Parallelkreises auftretende Ellipse die Grundrissparabel in dem Punkte P_1 berühren, so ziehe man in P_1 die Normale $P_1 Q$ und fälle auf $A_1 A'_1$ das Loth $P_1 R$. Macht man dann $\angle SQR = h$, $SR \perp SQ$ und $SO_1 \perp A_1 A'_1$, so ist, wenn wir auf Fig. 1 zurückblicken, O_1 Ellipsenmittelpunkt und SO_1 Richtung der grossen Axe. Legt man hierauf in P_1 an die Contourcurve eine Tangente, welche SO_1 in U trifft, und fällt von P_1 auf SO_1 ein Loth

$P_1 V$, so ist UV Subtangente des Punktes P_1 in Bezug auf die Ellipse, deren grosse Halbaxe mit a bezeichnet werde. Dann ist

$$UV = \frac{a^2}{VO_1},$$

also

$$a = \sqrt{\overline{UV} \,.\, \overline{VO_1}}.$$

Hiernach kann a construirt werden. Die kleine Halbaxe ist $a \sin h$. — Die angegebene Construction lässt sich für jede beliebige Curve anwenden. Für den speciellen Fall der Parabel kann man sie natürlich noch vereinfachen.

5. Ist als Meridianfigur eine Ellipse mit der grossen Halbaxe a und der kleinen b gegeben, wobei a mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt, so sind die Contourcurven bekanntlich wieder Ellipsen. Für diesen Fall gehen die unter 2 angeführten Gleichungen I), II) und III) über in

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y^2\left(\cos^2 h - \frac{b^2(b^2 - y^2)}{a^2 y^2}\sin^2 h\right) = \eta^2 \cos^2 h,$$

$$x \cos^2 h + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, \frac{b}{a} \,.\, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin^2 h = \xi \cos h,$$

und hieraus folgt als Gleichung der Grundrisscontourellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h + b^2 \sin^2 h} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung liefert wiederum ein Mittel, um die Contouren des Rotationsellipsoids ohne Benutzung seitlicher Projection zu construiren, wenn der Mittelpunkt M, a und b gegeben sind. (Fig. 5.) Man mache nämlich $\angle DM_1E = h$, $DM_1 = a$, $F_1 M_1 = b$, $DE \perp EM_1$, $F_1 G \perp EM_1$, $EH = GM_1$, $HM_1 = B_1 M_1$. B_1 ist dann der eine Endpunkt der grossen Axe der darzustellenden Ellipse. — Eine analoge Construction ist im Aufrisse anzuwenden, wobei natürlich h mit v vertauscht werden muss.

6. Hat man im Meridiansystem eine Hyperbel, deren Hauptaxe $2a$ mit $A_3 A'_3$ zusammenfällt und deren Nebenaxe $2b$ ist, so lautet die Gleichung der Grundrisscontourcurve

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h - b^2 \sin^2 h} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergiebt sich wieder eine Construction der Contouren ohne Benutzung seitlicher Projection. Die Contour des getheilten Rotationshyperboloids kann, wie die Gleichung lehrt, unter Umständen imaginär werden.

Für den Fall eines einfachen Rotationshyperboloids erhält man durch Vertauschung von a und b für die Grundrisscontour die Gleichung

$$\frac{\eta^2}{a}+\frac{\xi^2}{a^2 \sin^2 h - b^2 \cos^2 h}=1.$$

Die Contouren dieser Fläche können also sowohl Ellipsen, als auch Hyperbeln sein.

Aus den unter 2 angegebenen Gleichungen I), IV), V) ergiebt sich, dass die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung ein Durchmesser der Meridiancurve ist. Derselbe geht durch die Berührungspunkte derjenigen Tangenten des Meridians, die auf $A_1A'_1$ senkrecht stehen. Da sich die Grundrisscontourlinie auf der verticalen Hilfsebene als Gerade projicirt, so folgt hieraus, dass die Ebene der Grundrisscontourlinie jeder Rotationsfläche zweiter Ordnung auf jener Hilfsebene senkrecht steht. Ein analoger Satz gilt für den Aufriss.

Betrachtet man einen Kegelschnitt, dessen Abscissenaxe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, als gegebene Contourcurve und construirt hierzu die Meridiancurve und die zweite Contourcurve, so erhält man in vielen Fällen nur einzelne Theile dieser Curven und nicht den vollständigen, durch Rechnung sich ergebenden Kegelschnitt.

7. Ist im Meridiansystem ein Kreis mit dem Radius r gegeben, dessen Mittelpunkt O_3 von $A_3A'_3$ um a entfernt ist, so entsteht ein cyklisches Annuloid, und die Contouren dieser Rotationsfläche sind, wie aus der darstellenden Geometrie bekannt ist, bei schiefer Stellung Ellipsenäquidistanten. Einem gegen $A_3A'_3$ allgemein liegenden Kreise entsprechen also als Contourcurven die Aequidistanten derjenigen Ellipsen, welche dem Mittelpunkte des Kreises zugeordnet sind.

Dem Kreisbogen ed (Fig. 6) entspricht der äussere, dem Bogen bc der innere Theil der Grundrisscontourcurve; die Bögen bd und ce besitzen im Grundrisse keine entsprechenden Curventheile.

Die Rückkehrpunkte P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 werden dadurch genauer bestimmt, dass man an die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie Tangenten senkrecht zu $A_1A'_1$ legt.

Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie ist eine Curve vierter Ordnung. Wählt man $A_3A'_3$ als X- und eine von O_3 auf $A_3A'_3$ gefällte Senkrechte als Y-Axe, so gehen die Gleichungen I), IV), V) unter 2 über in

$$y=a+\sqrt{r^2-x^2},$$

$$\mathfrak{y}=y\,y'\tan h=-\left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\tan h$$

und

$$x=\mathfrak{x},$$

und hieraus folgt als Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\,coth)^2\,(r^2-\mathfrak{x}^2)=a^2\mathfrak{x}^2.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich die Rückkehrpunkte durch Rechnung bestimmen.

Es sei ferner im Grundrisscontoursystem ein Kreis mit dem Radius r gegeben, dessen Mittelpunkt O_1 von $A_1A'_1$ um $O_1U_1=a$ entfernt ist (Fig. 7), und es soll ermittelt werden, welche Rotationsfläche die Eigenschaft hat, sich im Grundriss als ein, resp. zwei Kreise zu projiciren. Zieht man einen beliebigen Durchmesser $P_1O_1Q_1$ und bestimmt im Meridiansystem zu P_1, O_1, Q_1 die entsprechenden Punkte p, o, q, so ist

$$po=oq=r.$$

Nun ist c bekanntlich ein Punkt der O_1 entsprechenden Hyperbel und pq eine Normale derselben, folglich liegen p und q auf der Aequidistante dieser Hyperbel. Einem Kreise im Contoursystem entspricht also im Meridiansystem die Aequidistante der dem Kreismittelpunkte zugeordneten Hyperbel.

Zieht man in dem Kreise einen Durchmesser $\Omega_1\Omega'_1$ parallel $A_1A'_1$, so gehören zu Ω_1 und Ω'_1 unendlich ferne Punkte der Meridiancurve. Den Kreistangenten $J_1\Omega_1$ und $J'_1\Omega'_1$ entsprechen also im Meridiansystem vier Gerade L_3J_3, $L'_3J'_3$, K_3J_3, $K'_3J'_3$, welche die Hyperbeläquidistante in unendlicher Ferne berühren und mit den Asymptoten der Hyperbel parallel laufen.

Die Contourcurve im Aufrisse ist, wie man durch eine ähnliche Ueberlegung erfährt, die Aequidistante derjenigen Curve, die dem Kreismittelpunkte im Aufrisse entspricht, d. h. Aequidistante einer Ellipse oder Hyperbel, oder ein dem gegebenen congruenter Kreis.

Die Grundrisscontourlinie projicirt sich auf der seitlichen Verticalebene als eine Curve vierter Ordnung, welche mit J_1J_3 und $J'_1J'_3$ den unendlich fernen Punkt gemein hat. Setzt man $\omega_3O_3=\mathfrak{x}$ und $O_3Q_3=\mathfrak{y}$, so ist

$$\mathfrak{x}=O_3R_3\,tan\,h=R_1U_1\,tan\,h=\frac{a\mathfrak{y}\,tan\,h}{\sqrt{r^2-\mathfrak{y}^2}};$$

mithin lautet die Gleichung der seitlichen Projection der Grundrisscontourlinie

$$r^2\mathfrak{x}^2=\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+a^2\mathfrak{y}^2\,tan^2h$$

oder

$$\frac{r^2}{\mathfrak{y}^2}-\frac{a^2\,tan^2h}{\mathfrak{x}^2}=1.$$

8. Wählt man statt des Kreises einen beliebigen andern Kegelschnitt als Meridianfigur, so ergeben sich je nach der Lage und Gestalt dieses Kegelschnittes ausserordentlich mannichfaltige Contourfiguren. Einer Parabel entspricht z. B. im Contoursystem eine geschlossene Curve, oder eine Curve, welche aus zwei getrennten, in der Unendlichkeit sich tref-

fenden Theilen besteht, je nachdem die Parabelaxe mit $A_3 A'_3$ einen Winkel einschliesst, der grösser ist als $(90^0 - h)$, oder nicht.

Einer Ellipse entspricht eine Contourcurve, die aus zwei geschlossenen Theilen besteht, von denen der eine innerhalb des andern liegt.

Fig. 8 stellt die einer Hyperbel entsprechende Contourcurve dar. Der Meridian ist so gelegt, dass den schwächer gezeichneten Curventheilen und der Asymptote pq kein Theil der Contourfigur entspricht. Der Asymptote mn sind die Geraden $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ zugeordnet. Die Contourcurve besteht aus zwei getrennten Aesten, die von $M_1 N_1$ und $M'_1 N'_1$ in der Unendlichkeit berührt werden. B_1, B'_1, E_1, E'_1 sind Culminationspunkte der Contourcurve, P_1 und P'_1 Rückkehrpunkte derselben.

In Fig. 9 ist umgekehrt zu einer Ellipse im Contoursystem die zugehörige Meridianfigur aufgesucht. Dieselbe besteht aus vier getrennten Theilen, von denen je zwei in Bezug auf $A_3 A'_3$ symmetrisch sind. Den auf $A_1 A'_1$ senkrechten Ellipsentangenten $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ entsprechen vier Gerade, welche die Meridiancurve asymptotisch berühren. Die Tangenten in den Ellipsenpunkten D_1 und E_1 laufen parallel $A_1 A'_1$, folglich sind d, d', e, e' Culminationspunkte der Meridiancurve. Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie strebt dem unendlich fernen Punhte von $J_1 \Omega_1$ und $J'_1 \Omega'_1$ zu.

Eine Parabel als Contourfigur besitzt immer einen, aber auch nur einen Punkt Ω_1, dessen Tangente $J_1 \Omega_1$ auf $A_1 A'_1$ senkrecht steht. Die entsprechende Meridianfigur setzt sich also aus vier Theilen zusammen, von denen je zwei in Bezug auf $A_3 A'_3$ symmetrisch sind. Sie besitzt zwei symmetrisch liegende Asymptoten. Je zwei nicht symmetrische Theile der Meridiancurve haben denjenigen Punkt gemein, welcher dem unendlich fernen Punkte der Parabel entspricht.

Ist im Contoursystem eine Hyperbel gegeben, welche nicht zwei auf $A_1 A'_1$ senkrechte Tangenten hat, so entspricht keinem endlichen Hyperbelpunkte ein unendlich ferner Punkt der Meridiancurve. Dieselbe besitzt also in diesem Falle keine Asymptoten, welche von Hyperbeltangenten senkrecht auf $A_1 A'_1$ herrühren könnten, wohl aber vier Asymptoten, welche den beiden Hyperbelasymptoten entsprechen. Die Meridiancurve besteht mithin aus vier getrennten Theilen, von denen je zwei symmetrisch sind und symmetrische Asymptoten besitzen. Je zwei nicht symmetrische Theile liegen dagegen zwischen denselben, aber auch nicht symmetrischen Asymptoten. — Wählt man die Contourhyperbel so, dass zwei ihrer Tangenten auf $A_1 A'_1$ senkrecht stehen, so erhält man eine aus acht Theilen zusammengesetzte Meridiancurve mit acht Asymptoten.

9. Eine interessante Beziehung zwischen Contour- und Meridiancurve besteht ferner beim Logarithmoid. Ist

$$y = b e^{\frac{x}{a}}$$

die Gleichung der Meridiancurve, so erhält man aus den Gleichungen IV) und V) unter 2

$$\mathfrak{y} = b\, e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{b}{a}\, e^{\frac{x}{a}} \tan h$$

oder

$$\mathfrak{y} = \frac{b^2}{a}\, e^{\frac{2x}{a}} \tan h.$$

Hieraus folgt der Satz: Die seitliche Projection der Grundrisscontourlinie des Logarithmoids ist wieder eine logarithmische Linie. Die Contourcurven selbst sind, wie man aus den Gleichungen I), II), III) unter 2 erfährt, nur logarithmische Linien, wenn h, resp. v zu Null wird; andernfalls aber nicht.

XIII.

Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem.

Von

Dr. K. Schwering

in Münster.

---

§ 1.

Man kann mit Recht die Eigenschaften der Curven in metrische und projectivische unterscheiden. Den ersteren, als den in der neueren Geometrie minder bedeutenden, ist bei Salmon, „*Higher plane curves*“, das 4. Capitel gewidmet. Zu Anfang desselben hebt der Verfasser hervor, dass die Cartesischen Coordinaten sich den Dreieckscoordinaten gegenüber bei Erforschung der metrischen Eigenschaften der Curven im Allgemeinen im Vortheil befinden. Es erscheint daher wünschenswerth, für die Liniencoordinaten ein System zu besitzen, welches annähernd dieselben Vortheile, wie bei den Punktcoordinaten das Cartesische System, darbietet. Als solches kann ich dasjenige, welches als Coordinaten einer Geraden die reciproken Werthe der auf den Axen abgeschnittenen Strecken nimmt, nicht gelten lassen, weil dasselbe viel zu sehr in den Charakter des Punktcoordinatensystems eingeht und es andererseits durchaus wünschenswerth ist, als Coordinaten nicht reciproke Werthe, sondern direct messbare Strecken zu definiren. Noch weniger dürfte sich der Vorschlag Plücker's empfehlen, als Liniencoordinaten einen der von der fraglichen Geraden auf den Axen bestimmten Abschnitte und die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels derselben zu wählen. Dass das von mir im Folgenden anzugebende System wirklich das angestrebte Ziel erreicht, wage ich nicht zu behaupten; einen Vortheil anderer Art glaube ich aber durch Zugrundelegung desselben bei meinen Vorlesungen mit Sicherheit gewonnen zu haben. Das neue Coordinatensystem ist nämlich von den dem Anfänger bekannten Punktcoordinaten so wesentlich verschieden, dass eine aus Verwechselung der Begriffe resultirende Verwirrung unmöglich wird und der Lernende das Verschiedene und Gleichartige der beiden Systemarten leichter und klarer einsieht.

Das Coordinatensystem besteht aus zwei parallelen Geraden, die durch ein auf ihnen errichtetes Loth in den Punkten O und Q geschnitten werden. Die Strecke OQ, die Entfernung der beiden Parallelen, nennen wir e, und definiren nun als Coordinaten der Geraden L, welche die Parallelen in den Punkten A und B schneidet, die in derselben Richtung gemessenen Strecken OA und QB. Wir bezeichnen dieselben durch

$$u = OA \text{ und } v = QB$$

und nennen die beiden Parallelen OA und QB mit Rücksicht darauf die U- und V-Axen.

Aus dieser Definition folgt, dass jede im Endlichen liegende Gerade zwei endliche bestimmte Coordinaten besitzt, mit Ausnahme derjenigen, welche den Axen parallel gehen. Diese letzteren haben zwei unendlich grosse Coordinaten, die zu einander in einem bestimmten Verhältnisse stehen, nämlich in demjenigen der Entfernungen der fraglichen Geraden von den Coordinatenaxen. Sie spielen also dieselbe Rolle, wie im Cartesischen Coordinatensystem die Punkte der unendlich fernen Geraden.

Betrachten wir nun die lineare Gleichung

1) $$\alpha u + \beta v + \gamma = 0.$$

Möge die Gerade u_0, v_0 derselben Genüge thun, so ist durch Subtraction

2) $$\alpha(u - u_0) + \beta(v - v_0) = 0.$$

Die geometrische Bedeutung von $\alpha : \beta$ ist also das mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Verhältniss der Entfernung des Schnittpunktes der beiden Geraden u_1, v_1; u_0, v_0, welche der Gleichung 1) genügen, von den beiden Axen. Soll daher zu einer weiteren Coordinate u die zugehörige v gefunden werden, so haben wir den auf der U-Axe gegebenen Punkt mit dem Schnittpunkte der Geraden u_1, v_1; u_0, v_0 zu verbinden. Alle Geraden, deren Coordinaten u, v die Gleichung 1) befriedigen, laufen also durch jenen Schnittpunkt. Mithin ist 1) die Gleichung eines Punktes.

Wenn die Coefficienten α, β in Gleichung 1) gleiche Vorzeichen haben, so beweist 2), dass $u - u_0$ und $v - v_0$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, und daraus leitet man ab, dass der fragliche Punkt innerhalb der beiden Axen liegt Ist das Vorzeichen von α und β verschieden, so liegt aus dem analogen Grunde der Punkt ausserhalb der beiden Parallelen. Insbesondere bedeutet jede Gleichung

3) $$u - v = \gamma$$

einen unendlich fernen Punkt.

Um diese Betrachtungen noch genauer zu verfolgen, ziehen wir durch den Punkt 1) eine Parallele zur Geraden (u_0, v_0). Möge dieselbe die Coordinaten $u_0 + A$, $v_0 + A$ haben. Dann findet man

$$\alpha(u_0+A)+\beta(v_0+A)+\gamma=0.$$

Daraus folgt

$$A=-\frac{\alpha u_0+\beta v_0+\gamma}{\alpha+\beta}. \tag{4}$$

Damit ist die geometrische Bedeutung der linken Seite von 1) in analoger Weise erschlossen, wie es bei den Punktcoordinaten mit der Gleichung der geraden Linie zu geschehen pflegt. Auch hier kann von einer Normalform der Gleichung 1) die Rede sein. Multiplicirt man 1) mit einem Factor, so dass $\alpha+\beta=1$ wird, so bedeutet die linke Seite von 1):

„Die Entfernung des Punktes 1) von der Geraden u, v, gemessen in der Richtung der Axen."

Die senkrechte Entfernung des Punktes 1) in der allgemeinen Form von der Geraden (u, v) wird, wie man sich leicht überzeugt, gegeben durch

$$\frac{e}{\sqrt{e^2+(u-v)^2}}\cdot\frac{\alpha u+\beta v+\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Hieraus ergiebt sich alsbald die allgemeine Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt 1) und dessen Radius R ist. Sie ist:

$$(\alpha u+\beta v+\gamma)^2 e^2=[e^2+(u-v)^2](\alpha+\beta)^2R^2. \tag{5}$$

Stellen wir mit derselben die Gleichung eines Punktes zusammen, so erhält man zwei Werthepaare u, v, die den beiden Tangenten angehören, welche man vom Punkte aus an den Kreis ziehen kann. Diese Werthepaare fallen zusammen, wenn der fragliche Punkt der Kreisperipherie angehört. Dies ist nun der Fall bei den beiden imaginären Punkten

$$u-v=ei,\quad u-v=-ei;$$

deren Gleichungen sind von R und den Coefficienten von 1) unabhängig, sie gehören also allen Kreisen der Ebene an. Sie liegen, wie wir soeben sahen, unendlich fern und spielen unter dem Namen unendlich ferne Kreispunkte in der neueren Geometrie eine hervorragende Rolle.

Suchen wir endlich den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches von den Punkten $A=0$, $B=0$, $C=0$ gebildet wird. Sei

$$A\equiv a_1u+b_1v+c_1=0,$$
$$B\equiv a_2u+b_2v+c_2=0,$$
$$C=a_3u+b_3v+c_3=0.$$

Nehmen wir an, die Gleichungen seien auf die Normalform gebracht, so dass

$$1=a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3,$$

ziehen wir durch A und C Parallele, durch B eine Senkrechte zu der Axen; möge die durch A gegebene Parallele der Dreiecksseite BC im Punkte D begegnen, und der Schnittpunkt der Parallelen durch C mit der Senkrechten durch B möge E heissen. Dann ist der Inhalt der Dreiecks

$$J = \tfrac{1}{2} BE . AD.$$

Möge die Seite BC die Coordinaten u', v' haben, so ist

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) u' + b_3 c_2 - c_3 b_2 = 0,$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) v' + a_2 c_3 - a_3 c_2 = 0.$$

Werden die Werthe u', v' in A für u und v eingesetzt, so ergiebt sich Die Länge AD. Ferner hat man

$$BE : CE = e : v' - u', \quad CE = c_2 - c_3.$$

Setzt man diese Werthe von BE und AD ein, so findet sich

6) $$J = \tfrac{1}{2} e \Sigma \pm a_1 b_2 c_3.$$

§ 2.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Wir schreiben dieselbe in der Form

7) $$a_{11} u^2 + 2 a_{12} uv + a_{22} v^2 + 2 a_{13} u + 2 a_{23} v + a_{33} = 0.$$

Dann beweist man zunächst auf mannigfache Art, dass dieselbe in das System zweier Punkte zerfällt, wenn

8) $$H \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Hiervon überzeugt man sich vielleicht am einfachsten, indem man versucht, die Bedingung anzugeben, unter welcher die Curve zweiter Classe 7) eine Doppeltangente besitzt.

Bei den ferneren hierher gehörigen Discussionen spielt die Betrachtung der parallelen Tangenten die Hauptrolle. Im Allgemeinen besitzt der Kegelschnitt 7) zu jeder gegebenen eine parallele Tangente. Denn ist u, v die gegebene Tangente, so wird $u + \alpha$, $v + \alpha$ die parallele sein, wenn α durch die Gleichung bestimmt wird

9) $$(a_{11} + 2 a_{12} + a_{22}) \alpha + 2 [a_{11} u + a_{12}(u + v) + a_{22} v + a_{13} + a_{23}) = 0.$$

Diese lineare Gleichung ist nur dann unerfüllbar, wenn

10) $$a_{11} + 2 a_{12} + a_{22} = 0.$$

In diesem Falle haben wir also einen Kegelschnitt, der im Endlichen keine parallelen Tangentenpaare besitzt, also eine Parabel vor uns. Die Frage, ob eine Curve zweiter Classe Ellipse oder Hyperbel ist, wird nun durch die Betrachtung der Asymptoten entschieden. Dieselben sind für die erstere Curve reell, für die letztere imaginär.

Damit die Tangente (u, v) Asymptote der Curve werde, muss die ihr unendlich benachbarte Tangente derselben parallel gehen, oder umgekehrt, die parallele Tangente muss mit (u, v) zusammenfallen. Dies tritt, wie 9) beweist, ein, wenn

11) $$a_{11} u + a_{12}(u + v) + a_{22} v + a_{13} + a_{23} = 0$$

wird, denn dann resultirt für α der Werth 0. Die Gleichung 11) hat für sich die Bedeutung der Gleichung eines Punktes, und zwar, da sie in Verbindung mit 7) die Asymptoten liefert, ist sie die Gleichung des Schnittpunktes der Asymptoten, d. h. des Mittelpunktes der Curve. Für die Parabel kann man ihr die Form ertheilen

$$(a_{11}+a_{12})(u-v)+a_{13}+a_{23}=0$$

und diese Form lehrt, dass der Mittelpunkt unendlich fern liegt. Setzen wir $u=v$, so wird für die Parabel

$$2a_{13}u+2a_{23}u+a_{33}=0.$$

Sie besitzt demnach nur eine Tangente, welche zu den Coordinatenaxen senkrecht steht, im Endlichen. Dividirt man durch u^2, so lässt sich das Resultat auch dahin aussprechen, dass die unendlich ferne Gerade, deren Coordinaten ja gleich und unendlich gross sind, alle Parabeln der Ebene berührt.

Führen wir die Elimination zwischen 11) und 7) aus, so erkennen wir, dass reelle Wurzeln u, v, also reelle Asymptoten, also die Hyperbel gefunden wird, wenn der Ausdruck

$$(a_{11}+2a_{12}+a_{22})H$$

negativ ist; dass dagegen, wenn derselbe positiv ist, unsere Curve eine Ellipse sein wird.

Die Rechnung kann auch in der Weise geführt werden, dass man die Entscheidung, ob die Curve Ellipse oder Hyperbel ist, durch die Realität ihrer unendlich fernen Punkte führt. Sei die Gleichung des unendlich fernen Punktes

$$u-v=\gamma,$$

so muss das Eliminationsresultat zwei gleiche Wurzeln besitzen. Dies führt für γ zu der quadratischen Gleichung

$$\gamma^2(a^2_{12}-a_{11}a_{22})+2\gamma\{a_{23}(a_{11}+a_{12})-a_{13}(a_{12}+a_{22})\}$$
$$+(a_{13}+a_{23})^2-a_{33}(a_{11}+2a_{12}+a_{22})=0,$$

deren Discriminante die vorhin angegebene ist. Die Rechnung ist nicht so schwierig, als sie beim ersten Anblick scheinen könnte, wenn man nur die durch $a_{11}+2a_{12}+a_{22}$ theilbaren Glieder gleich anfangs bei Seite stellt.

Die Transformation für das Coordinatensystem spielt in der Theorie der Curven zweiter Classe natürlich eine bedeutende Rolle. Wenden wir zunächst einmal die Umformung an

$$u'=\alpha u+\beta v, \quad v'=\gamma u+\delta v,$$

so bedeutet u' die Entfernung des Punktes $\alpha u+\beta v=0$, von der Geraden u, v gemessen nach der Richtung der Coordinatenaxen. Nun liegt aber dieser Punkt in der Linie OQ und somit wird durch die angegebene Transformation eine Verschiebung der Coordinatenaxen parallel mit sich selbst bewirkt, ohne dass dabei das e' mit dem ursprünglichen e übereinzustimmen braucht. Ersetzen wir u' durch $u''+\alpha$, v' durch $v''+\beta$, so wird eine Aenderung des Systems dahin vorgenommen, dass die Punkte O, Q im Allgemeinen aus ihrer zu den Axen festgesetzten bevorzugten Lage treten.

Soll eine Drehung der Axe erfolgen, so erhält man Ausdrücke für u, v, die linear in u', v' sind und ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können. Nennen wir die Mittelpunkte O', Q' des neuen Coordinatensystems und haben dieselben die Gleichungen

$$O' \equiv au + bv + c = 0, \quad Q' \equiv a_1 u + b_1 v + c_1 = 0,$$

dann wird die senkrechte Entfernung derselben

$$e' = \sqrt{(c-c_1)^2 + e^2(ab_1 - ba_1)^2}$$

und man findet zwischen den alten Coordinaten u, v und den neuen u', v' einer beliebigen Geraden, wenn wir voraussetzen

$$a+b=1, \quad a_1+b_1=1:$$

$$v' = ee' \frac{c+v-a_1(v-u)}{(c-c_1)(v-u)+(a_1-a)e^2}.$$

Analog wird der Ausdruck für u'. Der Nenner ist derselbe.

Nehmen wir die parallelen Scheiteltangenten zu Axen unseres Coordinatensystems, so können wir die Gleichung der Ellipse und Hyperbel in die Form setzen

$$u.v = G.$$

Ist G positiv, so haben wir eine Ellipse, ist es negativ, eine Hyperbel vor uns. Für den Kreis mit dem Radius $r = \frac{1}{2}e$ wird

$$u.v = r^2$$

und daraus erhalten wir eine sehr elegante Construction der Ellipse und Hyperbel mit Hilfe eines Kreises. Bestimmen wir nämlich am Kreise durch eine Reihe von Tangenten Paare u, v und tragen diese Paare dann auf die Axen OU und QV, die eine andere Entfernung von einander haben, ab in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, so erhalten wir ersteren Falle eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel. Bemerkenswerth ist dabei die gleichseitige Hyperbel.

Da es mir durchaus fern liegt, eine Theorie der Kegelschnitte, gegründet auf unser Coordinatensystem, zu schreiben, so breche ich die Untersuchungen hier ab, um die Anwendbarkeit des Systems noch bei Erörterungen darzulegen, die einige Curven höherer Ordnung betreffen.

§ 3.

Weitere Anwendungen des Systems.

Nehmen wir die Asymptote der Cissoide zur Axe der v, die durch den Doppelpunkt derselben parallel gehende Gerade zur Axe der u, ferner den Doppelpunkt selbst als den Mittelpunkt O, so wird die Gleichung der Curve in unseren Liniencoordinaten

$$v^3 + 27 r^2 u = 0. \tag{12}$$

Dies Resultat finden wir folgendermassen. In Punktcoordinaten kann man die Gleichung der Cissoide schreiben

$$x^3 = y^2 (2r - x). \tag{13}$$

Dieselbe ist eine Curve vom Geschlechte (Range, Defecte, Riemann'sche Zahl p) Null, weshalb die Coordinaten als Functionen eines Parameters λ darstellbar sind, nämlich

$$x = \frac{2r\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{2r\lambda^3}{1+\lambda^2}.$$

Demnach wird die Gleichung der Tangente im Punkte, dem der Parameter λ zugehört:

$$\lambda(\lambda^2 + 3)x - 2y - 2r\lambda^3 = 0. \tag{14}$$

Andererseits ist die Gleichung der Geraden u, v in unserem Punktcoordinatensystem

$$(v-u)x = 2r(y-u). \tag{15}$$

Indem man 14) mit 15) identificirt, folgt zunächst

$$v = 3r\lambda, \quad u = -r\lambda^3$$

und daraus die gesuchte Gleichung 12). Wir wollen dieselbe zur Auffindung der Brennpunkte unserer Curve verwenden.

Man erhält die **Brennpunkte** einer Curve n^{ter} Classe dadurch, dass man von den beiden unendlich fernen Kreispunkten I und J (Salmon) aus die $2n$ Tangenten an die Curve zieht. Dieselben schneiden sich im Allgemeinen in n^2 Punkten, von denen n reell sind, und diese Punkte heissen Brennpunkte der Curve

Um dieselben für unser Coordinatensystem zu ermitteln, setzen wir

$$u = z + \tfrac{1}{2}ei, \quad v = z - \tfrac{1}{2}ei.$$

Dann resultirt eine Gleichung n^{ten} Grades für z, deren Coefficienten im Allgemeinen complex sein werden. Möge die Auflösung derselben ein Werthepaar u_0, v_0 liefern, welches im Allgemeinen complexe Grössen sind. Nehmen wir dazu die conjugirten Werthe u_1, v_1, so ist die Gleichung

$$u(v_0 - v_1) - v(u_0 - u_1) = v_0 u_1 - u_0 v_1 \tag{16}$$

die eines reellen Brennpunktes, nämlich des Schnittpunktes einer I-Tangente mit der entsprechenden J-Tangente. (Vergl. hierzu übrigens Siebeck, Crelle's Journal Bd. 64.)

Für die Cissoide erhalten wir als Gleichung, welche z bestimmt,

$$(z + ri)^3 + 27r^2(z + ri) = 54r^2 i.$$

Diese Gleichung besitzt die Doppelwurzel $z + ri = 3ri$ und die einfache $z + ri = -6ri$. Daraus folgt, dass die Curve einen reellen Doppelbrennpunkt und einen reellen einfachen Brennpunkt besitzt.

Dieselben haben die Gleichungen

$$3u = v \text{ und } 3u = 4v.$$

Sie liegen daher auf der Linie OQ oder der X-Axe unseres Punktcoordinatensystems, und zwar in den Entfernungen $x = -r$ und $x = 8r$. Nennen wir die Entfernungen eines Curvenpunktes von den beiden Brennpunkten α und β, so findet man

17) $$\beta^2(\alpha^2 + 3r^2) = (\alpha^2 + 15r^2)^2.$$

Wenden wir uns zur Kardioide, so ist deren Gleichung in Punktcoordinaten bekanntlich

$$(x^2+y^2)^2 - 4rx(x^2+y^2) - 4r^2y^2 = 0.$$

Da dieselbe ebenfalls $p = 0$ hat, so findet man x und y als rationale Functionen eines Parameters λ, nämlich

$$x = \varphi(\lambda) : \psi(\lambda), \quad y = \vartheta(\lambda) : \psi(\lambda),$$

wo

$$\varphi(\lambda) = 4r^3(r^2 - \lambda^2),$$
$$\vartheta(\lambda) = 8r^4\lambda,$$
$$\psi(\lambda) = (r^2+\lambda^2)^2.$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$r(3\lambda^2 - r^2)x - \lambda(3r^2 - \lambda^2)y + 4r^4 = 0,$$

indem ein Factor $r^2 + \lambda^2$ abgeschieden werden kann. Dieser Umstand beweist, dass der Parameter $\lambda = ri$, welcher wegen $\varphi(ri) : \vartheta(ri) = i$ dem unendlich fernen Kreispunkte angehört, einem Rückkehrpunkte unserer Curve entspricht. Nun folgt aus den Plücker'schen Formeln, indem unsere Curve vierter Ordnung drei Rückkehrpunkte besitzt, dass sie von der dritten Classe sein muss. Da die unendlich fernen Kreispunkte Rückkehrpunkte sind, so werden alle neun Brennpunkte zusammenfallen.

Nehmen wir die Doppeltangente der Kardioide — es ist die Linie $0 = 2x + r$ — als Axe der u, die dazu parallele $x = 4r$ als Axe der v, so erhalten wir als Gleichung der Curve in unserem System, dessen OQ die reelle Rückkehrtangente ist,

18) $$v = \frac{24r^2u}{4u^2 - 3r^2}.$$

Da zu jedem u zwei unendlich grosse Werthe von v gehören, so ist die u-Axe in der That Doppeltangente. Die Berührungspunkte haben die Gleichungen $u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.r$. Schreibt man 18) in der Form

$$4u^2v - 3r^2(v + 8u) = 0,$$

o sehen wir, dass die Gerade OQ die Rolle spielt, welche bei den in 'unktcoordinaten gegebenen Curven dem Mittelpunkte zufällt.

Zur Tangente u, v findet man die parallelen Tangenten $u+\alpha$, $v+\alpha$ ıs der Gleichung

$$\alpha^2 + (v + 2u)\alpha + u^2 + 2uv - \tfrac{1}{4}.27r^2 = 0.$$

Setzt man das von α unabhängige Glied dieser Gleichung gleich Null, so erhält man die Bedingung, unter welcher zwei parallele Tangenten zusammenfallen. Durch Combination mit der Curvengleichung ergeben sich dann die (nicht reellen) Asymptoten.

Da in unserem Falle $e=\frac{3}{4}r$ ist, so hat man zur Ermittelung des Brennpunktes die Supposition

$$u=z+\tfrac{3}{4}ri,\quad v=z-\tfrac{3}{4}ri.$$

Dann folgt für z die Gleichung $(z+\frac{1}{4}ri)^3=0$, also ergiebt sich, wie wir voraussahen, ein einziger Brennpunkt. Derselbe hat die Gleichung

$$2u+v=0.$$

Er liegt auf der X-Axe in dem Abstande $x=r$; er fällt also mit dem Centrum des festen Kreises, welcher bei Erzeugung der Cardioide als Rollcurve benutzt wird, zusammen.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Ueber die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie.

(Hierzu Taf. V, Fig. 10—12.)

§ 1. In verschiedenen Aufsätzen, welche der königl. Akademie der Wissenschaften in Stockholm vorgelegt sind, habe ich von einigen Untersuchungen, betreffend die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie, Bericht erstattet. Ich erlaube mir, einige der gefundenen Resultate mitzutheilen, welche zeigen, dass bemerkenswerthe geometrische Beziehungen stattfinden zwischen den vornehmsten der in der mechanischen Wärmetheorie vorkommenden Quantitäten.

Wir denken uns hierbei, die Gewichtseinheit eines Körpers werde einer unendlich kleinen umkehrbaren Wärmeveränderung unterworfen. Der äussere Druck sei stets normal gegen die Oberfläche; dp, dv und dT mögen die Aenderungen von Druck, Volumen und absoluter Temperatur bezeichnen. Dann kann man bekanntlich setzen

1a) $$dq = \lambda\, dv + \varkappa\, dp,$$

1b) $$dq = l\, dv + c\, dT,$$

1c) $$dq = C\, dT + h\, dp.$$

Hier bezeichnen λ, $\varkappa$, l, c, C und h Functionen der unabhängigen Variabeln v und p. C ist die specifische Wärme bei constantem Drucke, c dieselbe bei constantem Volumen, l die latente Ausdehnungswärme; h kann füglich latente Druckveränderungswärme genannt werden. Wir geben hier die verschiedene Wärmemenge durch die äquivalente Arbeitsmenge an; dq ist dann die elementare Arbeit. Die Zustandsänderung wird nach Clapeyron's bekannter Methode bestimmt.

§ 2. Wir wollen die Gleichung 1a) transformiren, damit sie für die Untersuchung eine bequemere Form erhalte. Das Bogenelement ds von der die Zustandsveränderung darstellenden Curve ist

2) $$ds = \sqrt{dv^2 + dp^2}.$$

Wir setzen

3) $$\frac{dp}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \cos\varphi$$

und weiter

4) $$z = \sqrt{\lambda^2 + \varkappa^2}$$

und

5) $$\frac{\lambda}{z} = \sin\psi, \quad \frac{\varkappa}{z} = \cos\psi.$$

Dann ist

6) $$dq = z(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi)\,ds = z\sin(\varphi+\psi)\,ds = z\sin\chi\,ds,$$

wenn man annimmt

7) $$\varphi + \psi = \chi.$$

Man findet ohne Schwierigkeit, dass φ der Winkel ist zwischen der Tangente an der Zustandscurve im Punkte vp und der v-Axe, und ψ das Supplement des Winkels zwischen der Tangente im selben Punkte an der adiabatischen Curve und der v-Axe; χ ist der Winkel zwischen beiden Tangenten.

§ 3. Einen analogen Ausdruck kann man für die Veränderung du der innern Arbeit herleiten. Man hat zufolge der bekannten Gleichung

8) $$dq = du + p\,dv,$$

9) $$du\, dq - p\,dv = (\lambda - p)\,dv + \varkappa\,dp.$$

Setzt man hier

10) $$z' = \sqrt{(\lambda - p)^2 + \varkappa^2},$$

11) $$\frac{\lambda - p}{z'} = \sin\psi', \quad \frac{\varkappa}{z} = \cos\psi',$$

so erhält man

12) $$du = z'(\sin\psi'\cos\varphi + \cos\psi'\sin\varphi)\,ds = z'\sin(\varphi+\psi')\,ds = z'\sin\chi'\,ds.$$

Hier ist ψ' das Supplement zum Winkel zwischen der Tangente an der isodynamischen Curve und der v-Axe, χ' der Winkel zwischen dieser Tangente und derjenigen an der die Zustandsveränderung ergebenden Curve.

§ 4. Die Gleichungen 6) und 12) können eine geometrische Auslegung erhalten, welche eine in hohem Grade anschauliche Vorstellung der erwähnten Veränderung giebt.

Man ziehe zu diesem Zwecke zwei gegen einander winkelrechte Linien ab und cd (Fig. 10) durch den Punkt o, welcher den Zustand angiebt, worin der Körper bei Anfang der Veränderung sich befindet; die eine ab dieser Linien wird so gezogen, dass sie die adiabatische Curve im Punkte o tangirt. Mit einem willkürlichen Halbmesser werden zwei gleiche Kreise construirt, welche durch o gehen und deren Mittelpunkte auf der Linie cd liegen. Man ziehe noch zwei andere gegen einander winkelrechte Linien $a'b'$ und $c'd'$, welche auch durch o gehen, und lasse $a'b'$ die isodynamische Curve im erwähnten Punkte berühren. Mit einem Halbmesser, welcher sich zu dem Halbmesser der ersten Kreise verhält wie $z' : z$, zeichnet man zwei Kreise durch o und mit den Mittelpunkten auf der Linie $c'd'$. Die also construirte Figur giebt die Geschwindigkeit der Wärmevariation in verschiedenen Richtungen. Man hat kämlich

$$\frac{dq}{ds} = z \sin\chi, \quad \frac{du}{ds} = z' \sin\chi'.$$

Die von o gezogenen Sehnen bestimmen folglich bei einem constanten Werthe ds die Veränderungen, welche die totale und innere Wärmemenge erleidet. So z. B. giebt die Figur, dass bei Veränderung nach*

o1 die totale Wärmemenge constant ist; innere Wärme wird zur Arbeit verwandelt.

o2. Wärme wird aufgenommen von aussen und eine ebenso grosse Veränderung in der innern Wärmemenge findet statt.

o3. Wärme wird aufgenommen und gänzlich zur Arbeit verwandelt; keine Veränderung in der innern Wärme.

o4. Die grösste Veränderung in der totalen Wärmemenge; die innere Wärme wird vermehrt.

o5. Die grösste Veränderung in der innern Wärme.

o6. Aus der aufgenommenen Wärme wird innere Wärme.

§ 5. Man kann eine andere Auslegung der Gleichungen geben, welche als Ausdruck für die Veränderungen, die ein Körper durch die Wärme erleidet, hergeleitet wird.

Sei o (Fig. 11) ein Punkt, welcher den Zustand des Körpers bezeichnet, und od die Tangente zur adiabatischen Curve durch o, ob eine dagegen winkelrechte Linie, deren Länge z ist. Wir betrachten z als eine Kraft, welche auf einen materiellen Punkt in o wirkt, der sich nach der die Zustandsveränderung ergebenden Curve bewegt, während die Kraft z beständig normal gegen die adiabatische Curve durch den Punkt o, wo der bewegliche materielle Punkt sich gelegentlich befindet, gerichtet ist. Man findet aus 6), dass die Arbeit, welche die Kraft z verrichtet, während ihr Angriffspunkt das Bogenelement ds durchläuft; $= dq$ ist. In der That ist der Winkel zwischen der Richtungslinie der Kraft und der Richtung des Wegelements $\frac{\pi}{2} - \chi$, also die erwähnte Arbeit

$$z \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) ds = z \sin\chi \, ds = dq.$$

Wird $z = ob$ in zwei Componenten oa und oc zerlegt parallel mit den v- und p-Axen, so ist, wenn der Winkel $oba = \psi$ gesetzt wird,

* Die Darstellung ist analog mit Zeuner's bekanntem Diagramm für die Schieberbewegung.

$$oa = z \sin\psi = \lambda, \quad oc = z \cos\psi = \varkappa. \tag{13}$$

Man findet hieraus, dass die beiden Componenten zu z gerade λ oder $\varkappa$ sind. Dieses zeigt auch die Gleichung 1a), indem, während das Wegelement ds beschrieben wird, dv und dp die Projectionen dieses Elementes nach den Richtungen oa und oc sind.

Sei oe die Tangente zu der isodynamischen Curve durch den Punkt o und sei of dagegen winkelrecht gezogen. Der Winkel ofg ist dann ψ'. Aus der Gleichung 11) erhält man

$$z' = \frac{\varkappa}{\cos\psi'} = \frac{oc}{\cos ofg} = of. \tag{14}$$

Die Linie of stellt also eine Kraft z' vor, welche bei der Bewegung des Punktes o längs der Zustandscurve die innere Arbeit verrichtet. Die mit den p- und v-Axen parallelen Componenten zu z' sind $oc = \varkappa$ und $og = \lambda - p$.

Wenn man sich die Kraft z in zwei Componenten $of = z'$ und $oh = p$ zerlegt denkt, so verrichtet bei der Bewegung des Punktes o die Kraft z' eine Arbeit gleich der innern Arbeit und die Kraft p eine Arbeit gleich der äussern Arbeit während der Zustandsveränderung.

§ 6. Bezeichnet man die Tangente und die Normale der adiabatischen Curve mit T_a und N_a, so ist

$$T_a = -p\frac{ds}{dp}, \quad N_a = \frac{p\,ds}{dv}. \tag{15}$$

Hieraus folgt

$$N_a : T_a = -\,dp : dv.$$

Aber für die erwähnte Curve hat man zufolge der Gleichung 1a)

$$\lambda\,dv + \varkappa\,dp = 0$$

oder

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\lambda}{\varkappa},$$

also ist für die adiabatische Curve

$$N_a : T_a = \lambda : \varkappa. \tag{16}$$

Die beiden Functionen λ und $\varkappa$ sind daher proportional den Normalen und den Tangenten an der adiabatischen Curve durch den Punkt, welcher den Zustand des Körpers angiebt.

Denkt man sich λ als Normale, $\varkappa$ als Tangente, so findet man noch, dass die Summe der Subnormale und der Subtangente die Function z darstellt.

§ 7. Wenn man in den Gleichungen 1a) und 1c) p constant annimmt, so erhält man

$$dq = \lambda\,dv = C\,dT,$$

woraus folgt

17) $$\frac{C}{\lambda}=\left(\frac{dv}{dT}\right)_p.$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen 1a) und 1b), wenn man v constant setzt,

$$dq=\varkappa\,dp=c\,dT$$

oder

18) $$\frac{\varkappa}{c}=\left(\frac{dT}{dp}\right)_v.$$

Endlich erhält man aus den Gleichungen 1b) und 1c), wenn in ihnen T constant angenommen wird,

$$dq=l\,dv=h\,dp$$

oder

19) $$\frac{l}{h}=\left(\frac{dp}{dv}\right)_T.$$

Aber nun ist*

20) $$\left(\frac{dp}{dv}\right)_T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left(\frac{dT}{dp}\right)_v=-1.$$

Dadurch, dass man die Gleichungen 17), 18), 19) und 20) mit einander vergleicht, findet man

21) $$\frac{C}{c}\cdot\frac{l}{h}\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}=-1.$$

Aus den Gleichungen 5) folgt

22) $$\frac{\lambda}{\varkappa}=tang\,\psi.$$

Weiter hat man, wenn Θ das Supplement des Winkels bedeutet, welchen die Tangente an der isothermischen Curve mit der v-Axe bildet,

23) $$tang\,\Theta=-\left(\frac{dp}{dv}\right)_T=-\frac{l}{h}.$$

Durch Vergleichung zwischen den Gleichungen 21), 22) und 23) bekommt man

24) $$\frac{C}{c}=\frac{tang\,\psi}{tang\,\Theta}.$$

Diese Gleichung hat eine geometrische Bedeutung. Wenn man nämlich od und oi (Fig. 12) die Tangenten zu den adiabatischen und isothermischen Curven in einem Punkte o vorstellen lässt, entsprechend dem Volumen On und dem Drucke on, so ist

$$tang\,\psi=\frac{on}{nd},\quad tang\,\Theta=\frac{on}{ni}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{C}{c}=\frac{ni}{nd}.$$

* Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, II, S. 15.

Die specifische Wärme bei constantem Druck verhält sich also zu der specifischen Wärme bei constantem Volumen wie die Subtangenten für die isothermische und die adiabatische Curve.

§ 8. Man hat ferner nach Clausius* mit Anwendung der hier angenommenen Bezeichnungen

$$25)\qquad C-c=T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left(\frac{dp}{dT}\right)_v,$$

wie auch

$$26)\qquad l=T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v,\quad h=-T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p.$$

Durch Multiplication der beiden Gleichungen 26) erhält man

$$hl=-T^2\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

und mit Benutzung der Gleichung 25)

$$27)\qquad hl=-T(C-c).$$

§ 9. Zieht man (Fig. 12) eine Linie bs durch den Punkt b winkelrecht gegen die Tangente oi der isothermischen Curve, so giebt die Linie ou die latente Ausdehnungswärme l an und die Linie os die latente Druckveränderungswärme h. Man hat nämlich $\angle\, oba=\psi$ und $\angle\, uba=\Theta$, also $\angle\, obu=\psi-\Theta$, wie auch

$$ob:ou=\sin bua:\sin obu=\cos\Theta:\sin(\psi-\Theta),$$

woraus folgt

$$ou=\frac{z\sin(\psi-\Theta)}{\cos\Theta}.$$

Setzt man in den Gleichungen 1b) und 6) T constant, so ist

$$\chi=\psi-\Theta$$

und

$$dq=l\,dv=z\sin(\psi-\Theta)\,ds$$

oder

$$l=\frac{z\sin(\psi-\Theta)}{\left(\frac{dv}{ds}\right)_T}.$$

Aber nun ist

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)_T=\cos\Theta$$

und folglich

$$l=\frac{z\sin(\psi-\Theta)}{\cos\Theta}=ou.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck ous ist

$$os=ou\,.\,\cot osu=l\cot\Theta.$$

Mit Benutzung der Gleichung 23) findet man hieraus

---

* Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, II, S. 17.

$$os = -h.$$

Aus den zwei ähnlichen Dreiecken *ous* und *aub* erhält man

$$bu : us = ua : uo,$$

also

$$bu + us : us = ua + uo : uo$$

oder

$$bs : us = ao : uo = \lambda : l.$$

Aber ausserdem ist

$$us : bu = os : ab = -h : \varkappa.$$

Hieraus folgt

$$bs : bu = -\lambda h : \varkappa l$$

oder mit Benutzung der Gleichung 21)

$$\frac{bs}{bu} = \frac{C}{c}.$$

Die beiden gegen die Tangente der isothermischen Curve winkelrechten Geraden bs und bu geben also die relative Grösse von C und c an; werden sie mit C_1 und c_1 bezeichnet, so hat man folglich

28) $$\frac{C_1}{c_1} = \frac{C}{c}.$$

Die Linie ot, welche einen Theil der Tangente an der isothermischen Curve ausmacht, steht in einer bemerkenswerthen Beziehung zu der absoluten Temperatur, dem durch den Punkt o angegebenen Zustande des Körpers entsprechend. Man hat nämlich aus den ähnlichen Dreiecken ous, ots, uab und bcs

$$ot : ou = ab : ub, \quad ot : os = bc : bs.$$

Wird ot mit T_1 bezeichnet, so findet man hieraus

29) $$T_1 = \frac{l\varkappa}{c_1} = -\frac{h\lambda}{C_1}.$$

Aber durch Vergleichung zwischen den Gleichungen 18), 26), 17) und 26) erhält man

30) $$T = \frac{l\varkappa}{c} = -\frac{h\lambda}{C},$$

also ist

31) $$Tc = T_1 c_1, \quad TC = T_1 C_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die doppelten Flächen der Dreiecke obu und abs die Producte Tc und TC darstellen.

§ 10. Die angegebene geometrische Darstellung macht es leicht, mehrere Relationen zwischen verschiedenen Arten der Wärmecapacität herzuleiten.

Weil in der Fig. 12 die Flächen

$$obs = obu + osu$$

und

$$obs = \frac{os \, . \, bc}{2} = -\frac{h\lambda}{2},$$

$$obu = \frac{ou \, . \, ab}{2} = \frac{l\varkappa}{2},$$

$$osu = \frac{ou \, . \, os}{2} = -\frac{lh}{2},$$

so folgt hieraus

$$-\frac{h\lambda}{2} = \frac{l\varkappa}{2} - \frac{lh}{2},$$

eine Gleichung, welche auch in die Form gebracht werden kann

32a) $$l\varkappa + h\lambda = lh$$

oder

32b) $$\frac{\varkappa}{h} + \frac{\lambda}{l} = 1.$$

Die Fläche des Dreiecks osu kann auch durch

$$\frac{ot \, . \, su}{2} = \frac{T_1(C_1 - c_1)}{2}$$

ausgedrückt werden. Man erhält daher mit Benutzung der Gleichung 31)

$$T(C-c) = -hl,$$

eine Gleichung, welche wir in § 8 als Gleichung 27) auf anderem Wege hergeleitet haben.

Aus den ähnlichen Dreiecken osu und csb findet man

$$bs : su = sc : so$$

oder

$$bs - su : su = sc - so : so,$$

also

$$c_1 : C_1 - c_1 = \varkappa : -h$$

oder

33) $$\frac{h}{\varkappa} = -\frac{C_1 - c_1}{c_1} = \frac{C-c}{c}.$$

In derselben Weise findet man

34) $$\frac{\lambda}{l} = \frac{C-c}{C}.$$

G. R. Dahlander.

XVII. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms.

In dem 6. Hefte vorigen Jahrgangs (S. 454) dieser Zeitschrift hat Herr Becker zum Beweise der Parallelentheorie die Bertrand'sche Methode benützt, in welcher der Winkel definirt ist als der von den beiden Schenkeln begrenzte Ausschnitt der Ebene, und die Anhänger der nichteuklidischen Geometrie, die jenen Beweis nicht als richtig erkennen, aufgefordert, anzugeben, wo der Fehler liege. Als Anhänger der angegriffenen Theorie erlaube ich mir, den Punkt zu bezeichnen, der nach meiner Meinung fehlerhaft ist, besonders auch deshalb, weil er in Bezug auf das formale Rechnen interessant ist.

Nennt man Streifen den Theil der Ebene, der eingeschlossen ist von einer Geraden AA_1 und den beiden auf ihr nach derselben Seite errichteten Senkrechten AB, A_1B_1, so beruht der Bertrand'sche Beweis auf der Unmöglichkeit, dass ein Winkel BAC_1 ganz in dem Streifen BAA_1B_1 liegen könne. Nach Bertrand wird sie folgendermassen erkannt. Gesetzt, der Winkel BAC_1 sei grösser als der n^{te} Theil eines rechten, so lege man die $n-1$ dem Winkel BAC_1 gleichen Winkel C_1AC_2, C_2AC_3, ... $C_{n-1}AC_n$ neben einander, so erhält man einen Winkel BAC_n, der grösser ist als ein rechter, und folglich die Linie AA_1 ganz enthält. Legt man aber neben den Streifen BAA_1B_1 die $n-1$ ihm congruenten $B_1A_1A_2B_2$, $B_2A_2A_3B_3$, ... $B_{n-1}A_{n-1}A_nB_n$, so entsteht ein Streifen BAA_nB_n, der ganz in dem Winkel BAC_n enthalten und folglich kleiner ist als dieser. Somit ist der $n$fache Winkel $BAC_1 = a$ grösser als der $n$fache Streifen $BAA_1B_1 = b$ oder $na > nb$. Daher ist auch, schliesst Bertrand, $a > b$, was mit der Annahme, der Winkel liege ganz im Streifen, im Widerspruch steht. Der Schluss: weil $na > nb$, ist auch $a > b$, ist aber nicht richtig, oder doch wenigstens muss bewiesen werden, dass man so schliessen darf. Wären a und b Zahlen, so wäre der Schluss richtig; aber auch in diesem Falle versteht er sich nicht ohne Beweis von selbst, sondern er wird aus den Definitionen der Addition und des „grösser" hergeleitet. Wieviel mehr ist es nöthig, hier, wo a und b geometrische Grössen sind, bei welchen die durch na, resp. nb ausgedrückte Operation eine rein geometrische ist, zu beweisen, dass man so schliessen darf, wie Bertrand thut. Denn dass jene Folgerung nicht gezogen werden darf, wenn a und b Objecte beliebiger Art, mit beliebig definirten Verknüpfungsgesetzen sind, ist leicht zu zeigen. Operiren wir z. B. statt mit Zahlen, mit Zahlengruppen von je zwei reellen Zahlen. Unter (α, β) und (γ, δ) zwei solche Gruppen (aus den reellen Zahlen α, β, γ, δ gebildet) verstanden, sei festgesetzt: es ist $(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)$, wenn $\alpha + \beta > \gamma + \delta$, und es ist $2(\alpha, \beta) = (\alpha^2, \beta^2)$. Ist dann a gleich der Gruppe $(4, -3)$, und b gleich der $(2, 1)$, so ist

$$2a = (16, 9), \quad 2b = (4, 1),$$

also $2a > 2b$, weil $16 + 9 > 4 + 1$. Dagegen ist $a < b$, weil $4 + (-3) < 2 + 1$. Also bestehen hier die Ungleichungen $2a > 2b$ und $a < b$ zusammen.

Ein directer Beweis der Richtigkeit jenes Schlusses fällt nun ersichtlich mit dem Beweise des Parallelenaxioms zusammen; man könnte einen andern zu liefern suchen, indem man constatirte, dass im vorliegenden Falle alle jene Prämissen erfüllt sind, aus welchen rein formell, ohne Rücksicht auf die verknüpften Objecte und die Verknüpfungsgesetze, folgt, dass $na > nb$ auch $a > b$ nach sich zieht. Meines Wissens sind jene Prämissen noch nicht aufgestellt; man kann aber behaupten, dass die Eigenschaften der Geraden und des Winkels, mit welchen man das Parallelenaxiom beweisen will, jene Prämissen nicht erfüllen können. Denn diese Eigenschaften gelten wörtlich auch für die geodätischen Linien und deren Winkel auf der pseudosphärischen Fläche von constantem negativem Krümmungsmasse, und wenn also für die Ebene die Prämissen erfüllt wären, müssten sie es auch für die Pseudosphäre sein. Dass aber für diese der oben bestrittene Satz nicht gilt, ist leicht zu zeigen. Nach Beltrami (*Saggio di interpretatione della geometria non Euclidea*, *Giorn. Mat. Nap.* 1868) kann man die Punkte einer solchen Fläche so auf die Punkte im Innern eines Kreises beziehen, dass sie sich gegenseitig eindeutig entsprechen und jede geodätische Linie der Fläche durch eine gerade Linie in der Ebene des Kreises dargestellt wird. In dem Kreise seien nun zwei aufeinander senkrechte Durchmesser gezogen MP, MQ und ein dritter MR, der den rechten Winkel PMQ halbirt. Wie Beltrami gezeigt, entsprechen diesen drei geodätische Linien, welche sich in dem durch M dargestellten Punkte schneiden und zwei Winkel $= 45^0$ bilden. Sie begrenzen zwei Flächenausschnitte, die durch die Kreissectoren PMR und RMQ abgebildet werden, und miteinander zur Deckung gebracht werden können, weil sie bei M gleiche Winkel haben. Nennen wir einen von ihnen a, so ist der Ausschnitt der Pseudosphäre, der aus beiden gebildet ist, durch $2a$ zu bezeichnen. Dieser wird durch den rechten Winkel PMQ abgebildet. Nun sei $RS \perp MQ$, so ist RS das Bild einer geodätischen Linie, die auf der durch MQ vorgestellten senkrecht steht, und folglich ist $PMSR$ das Bild eines Streifens C der Pseudosphäre, der den Winkel a ganz enthält und daher grösser ist als dieser. Bestimmt man nun auf MQ die Länge $MT = u$ so, dass der ihr entsprechende geodätische Bogen doppelt so gross ist als der durch MS dargestellte, so muss nach den von Beltrami gegebenen Formeln u der Gleichung genügen

$$\frac{R}{2}\, l\, \frac{a+u}{a-u} = 2 \cdot \frac{R}{2}\, l\, \frac{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}{a-\frac{a}{\sqrt{2}}},$$

wo a der Kreisradius ist. Hieraus folgt $u = 0{,}95 \,.\, a$. Also fällt der Punkt T noch in den Kreis. Errichtet man in T die Senkrechte TV, so entspricht der Figur $RSTV$ auf der Fläche ein Streifen, der mit dem durch $PMSR$ abgebildeten zur Deckung gebracht werden kann, weil die Strecken MS, ST gleichen Bogen angehören. Der durch $PMTV$ dargestellte Flächenstreifen ist also $2b$, und es ist ersichtlich, dass er nicht ganz mit dem Winkel $2a$ zusammenfällt, sondern um das durch VTQ abgebildete Stück kleiner ist. Folglich ist $2a > 2b$, obgleich $a < b$ ist. Also ist in diesem

Falle für die Pseudosphäre jener Bertrand'sche Schluss nicht zulässig, und damit ist, wie ich glaube, gezeigt, dass er auch für die Ebene nicht zum Beweise des Parallelenaxioms dienen kann.

Carlsruhe, Januar 1876. J. Lüroth.

XVIII. Die Malfatti'sche Aufgabe für das geradlinige Dreieck.

In ein gegebenes Dreieck sollen drei Kreise so beschrieben werden, dass jeder derselben die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Bezeichnen a, b, c, A, B, C die Seiten und Ecken des gegebenen Dreiecks, x, y, z bezüglich die Abstände der Ecken A, B, C von den Berührungspunkten der die Seiten b und c, c und a, a und b berührenden Kreise und setzt man zur Abkürzung — alle Wurzeln positiv gedacht —

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s,$$

$$\sqrt{\frac{s-a}{s}}=\alpha,\quad \sqrt{\frac{s-b}{s}}=\beta,\quad \sqrt{\frac{s-c}{s}}=\gamma,$$

$$\sqrt{\frac{a}{s}}=\alpha',\quad \sqrt{\frac{b}{s}}=\beta',\quad \sqrt{\frac{c}{s}}=\gamma',$$

so sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen der Aufgabe

$$1)\qquad y+z+2\alpha\sqrt{y}\sqrt{z}=a,$$

$$2)\qquad z+x+2\beta\sqrt{z}\sqrt{x}=b,$$

$$3)\qquad x+y+2\gamma\sqrt{x}\sqrt{y}=c,$$

wo $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ mit demselben Zeichen zu nehmen sind.

Die erste dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn man ausdrückt, dass die Seite a aus den Strecken y, z und dem zwischen den Berührungspunkten der diese Seite berührenden Kreise enthaltenen Stücke besteht. Das letztere wird, wenn die Halbmesser dieser Kreise mit r_2 und r_3 bezeichnet werden,

$$=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=2\sqrt{r_2r_3}$$

oder, den Gleichungen

$$r_2=y\,tg\,\frac{B}{2}=y\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad r_3=z\,tg\,\frac{C}{2}=z\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

zufolge,

$$=2\sqrt{\frac{(s-a)yz}{s}}=2\alpha\sqrt{y}\sqrt{z}.$$

Aehnlich ergeben sich 2) und 3).

Betrachtet man die Gleichung 1) einmal in Bezug auf die Unbekannte $\sqrt{y}$, das andere Mal in Bezug auf die Unbekannte $\sqrt{z}$ als quadratische Gleichung, so ergiebt sich durch Auflösung derselben

4) $$\sqrt{y}+\alpha\sqrt{z}=\alpha'\sqrt{s-z},$$

5) $$\sqrt{z}+\alpha\sqrt{y}=\alpha'\sqrt{s-y},$$

und wenn von dem Producte dieser beiden Gleichungen die mit α multiplicirte Gleichung 1) abgezogen wird,

$$(1-\alpha^2)\sqrt{y}\sqrt{z}=\alpha'^2\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}-a\alpha$$

oder

6) $$\sqrt{y}\sqrt{z}-\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}=-s\alpha.$$

Multiplicirt man andererseits die aus 4) und 5) folgenden Gleichungen

$$\sqrt{y}=-\alpha\sqrt{z}+\alpha'\sqrt{s-z},$$
$$\sqrt{z}=-\alpha\sqrt{y}+\alpha'\sqrt{s-y}$$

miteinander, so wird

$$\sqrt{y}\sqrt{z}=\alpha^2\sqrt{y}\sqrt{z}-\alpha\alpha'(\sqrt{y}\sqrt{s-z}+\sqrt{z}\sqrt{s-y})+\alpha'^2\sqrt{s-y}\sqrt{s-z}$$

und mit Hilfe von 6)

7) $$\sqrt{y}\sqrt{s-z}+\sqrt{z}\sqrt{s-y}=s\alpha'.$$

Die Gleichungen 6) und 7) sind am leichtesten in der Verbindung

8) $$(\sqrt{y}+i\sqrt{s-y})(\sqrt{z}+i\sqrt{s-z})=s(-\alpha+i\alpha')$$

zu behandeln.

Ebenso leitet man aus 2) und 3)

9) $$(\sqrt{z}+i\sqrt{s-z})(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})=s(-\beta+i\beta'),$$

10) $$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})(\sqrt{y}+i\sqrt{s-y})=s(-\gamma+i\gamma')$$

ab.

Die Isolirung der Unbekannten geschieht nun ohne Schwierigkeit. Das Product von 9) und 10) durch 8) dividirt, giebt

$$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})^2=s\,\frac{(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma')}{(-\alpha+i\alpha')}$$

oder, wegen

$$(-\alpha+i\alpha')(-\alpha-i\alpha')=1:$$

$$(\sqrt{x}+i\sqrt{s-x})^2=s(-\alpha-i\alpha')(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma'),$$

$$\sqrt{x}+i\sqrt{s-x}=$$
$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=u+iu',$$

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=v+iv',$$

$$\pm\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$
$$=w+iw',$$

alle Wurzeln positiv gedacht und unter u, v, w die reellen Theile dieser Ausdrücke verstanden, so findet man

11) $$\sqrt{x}=u,\quad \sqrt{y}=v,\quad \sqrt{z}=w.$$

Da überdies
$$(u+iu')(u-iu')=u^2+u'^2=s$$
und demgemäss
$$(u+iu')^2=u^2-u'^2+2iuu'=2u^2-s+2iuu'$$
ist, so wird
$$2u^2-s+2iuu'=s(-\alpha-i\alpha')(-\beta+i\beta')(-\gamma+i\gamma'),$$
$$u^2=\tfrac{1}{2}(s-s\alpha\beta\gamma+s\alpha\beta'\gamma'-s\alpha\beta\gamma'),$$

12) $$x=u^2=\tfrac{1}{2}(s-r+f-g-h)$$

und ebenso

13) $$y=v^2=\tfrac{1}{2}(s-r-f+g-h),$$

14) $$z=w^2=\tfrac{1}{2}(s-r-f-g+h),$$

wo r den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und f, g, h die Abstände des Mittelpunktes desselben von den Ecken A, B, C vorstellen.

Es ist nun umgekehrt noch zu zeigen, dass die Werthe u, v, w für $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ gesetzt den Gleichungen 1), 2), 3) genügen und dasselbe Zeichen besitzen.

Zunächst folgt aus der Gleichung
$$(v+iv')(w+iw')=s(-\alpha+i\alpha'):$$
$$0=vw-v'w'+s\alpha,$$
und wenn mit $vw+v'w'+s\alpha$ multiplicirt wird,
$$0=(vw+s\alpha)^2-v'^2w'^2=(vw+s\alpha)^2-(s-v^2)(s-w^2)$$
$$=s(v^2+w^2)+2s\alpha vw-s^2(1-\alpha^2),$$
d. h.
$$v^2+w^2+2\alpha vw=a.$$

Ebenso bestätigt man die Gleichungen
$$w^2+u^2+2\beta wu=b,\quad u^2+v^2+2\gamma uv=c.$$

Da nun hiernach und nach 13), 14)
$$2\alpha vw=a-v^2-w^2=r+f-(s-a),$$
$$2\beta wu=b-w^2-u^2=r+g-(s-b),$$
$$2\gamma uv=c-u^2-v^2=r+h-(s-c)$$
und aus geometrischen Gründen
$$r+f>s-a,\quad r+g>s-b,\quad r+h>s-c$$
ist, so müssen vw, wu, uv positiv sein.

Man kann zur Auflösung der Gleichungen 1), 2), 3) auch in folgender Weise gelangen.

Löst man 2) und 3) bezüglich nach $\sqrt{z}$ und $\sqrt{y}$ auf, so wird

$$\sqrt{z} = -\beta\sqrt{x} + \beta'\sqrt{s-x}, \quad \sqrt{y} = -\gamma\sqrt{x} + \gamma'\sqrt{s-x}$$

und hieraus

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')\sqrt{x} = \beta'\sqrt{y} - \gamma'\sqrt{z}, \quad (\beta\gamma' - \gamma\beta')\sqrt{s-x} = \beta\sqrt{y} - \gamma\sqrt{z}.$$

Aus diesen Gleichungen beseitige man x, was einfach durch Quadrirung und Addition erreicht wird. Wird hierauf das Resultat

$$y + z - 2(\beta\gamma + \beta'\gamma')\sqrt{y}\sqrt{z} = s(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2$$

mit der Gleichung 1) zur Bestimmung von $y+z$ verbunden, so ergiebt sich

$$(\alpha + \beta\gamma + \beta'\gamma')(y+z) = s\left(\alpha(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + \frac{a}{s}(\beta\gamma + \beta'\gamma')\right).$$

Da nun

$$\frac{a}{s} = \alpha'^2 = 1 - \alpha^2$$

und identisch

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\beta\gamma + \beta'\gamma')^2 = (\beta^2 + \beta'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2) = 1$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + \frac{a}{s}(\beta\gamma + \beta'\gamma') &= \alpha - \alpha(\beta\gamma + \beta\gamma')^2 \\ &\quad + \beta\gamma + \beta'\gamma' - \alpha^2(\beta\gamma + \beta'\gamma') \\ &= (\alpha + \beta\gamma + \beta'\gamma')(1 - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta'\gamma') \end{aligned}$$

und demzufolge

15) $$y + z = s - s\alpha\beta\gamma - s\alpha\beta'\gamma' = s - r - f.$$

Ebenso findet man

16) $$z + x = s - r - g,$$

17) $$x + y = s - r - h$$

und aus 15), 16), 17)

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(s - r + f - g - h), \\ y &= \tfrac{1}{2}(s - r - f + g - h), \\ z &= \tfrac{1}{2}(s - r - f - g + h). \end{aligned}$$

Krakau. Dr. F. Mertens.

XIV.

Das System der polaren Liniencoordinaten in der Ebene.

Von

Dr. JOHANN PHILIPP WEINMEISTER,

Oberlehrer an der Realschule I. Ordnung in Leipzig.

---

§ 1.

In der analytischen Geometrie der Ebene ist bekanntlich die Gleichung

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

einer doppelten Deutung fähig. Betrachtet man x, y als veränderliche rechtwinklige Punktcoordinaten, so repräsentirt sie eine gerade Linie, welche von den Coordinatenaxen die Strecken $-\frac{1}{\xi}$, $-\frac{1}{\eta}$ abschneidet; betrachtet man dagegen ξ, η als veränderliche Linien-Coordinaten, denen die eben erwähnte Bedeutung beizulegen ist, so repräsentirt sie einen Punkt, welcher von den Coordinatenaxen die bezüglichen Entfernungen x, y besitzt. Jene Gleichung ist deswegen das unentbehrliche Mittelglied zwischen Punkt- und Liniencoordinaten. Ausser den Punktcoordinaten x, y macht die analytische Geometrie der Ebene einen ausgedehnten Gebrauch von polaren Punktcoordinaten r, θ, dagegen scheint eine analoge Einführung polarer Linien-Coordinaten im Gegensatze zu den gewöhnlichen Liniencoordinaten noch wenig Beachtung gefunden zu haben. Wir haben in Absicht, im Folgenden eine systematische Entwickelung der auf ein solches Coordinatensystem bezüglichen Lehren zu geben und schreiten zunächst zur Definition desselben. Statt der oben angegebenen Gleichung führen wir eine andere als Normalform ein, nämlich die folgende:

$$1) \qquad \varrho - x\cos\theta - y\sin\theta = 0.$$

Die wohl auch unter dem Namen Normalform bekannte Gleichung mit den Punktcoordinaten x, y:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - \varrho = 0$$

stellt eine Gerade dar, welche vom Anfang den Abstand ϱ besitzt, während θ der Winkel ist, welchen dieser Abstand mit der x-Axe bildet. Jene Gleichung ist deswegen wichtig, weil ihre linke Seite bei der Substitution der Coordinaten eines fremden Punktes dessen negativen Abstand von der Geraden ausdrückt, falls jener Punkt mit dem Coordinaten-Anfang auf derselben Seite der Geraden gelegen ist. Die linke Seite der in 1) aufgestellten Gleichung wird daher diesen Abstand selbst angeben.

Indem wir uns an das Obige anschliessen, setzen wir nun fest:

2) Dem System der polaren Liniencoordinaten liegen eine unbegrenzte Gerade — die Coordinatenaxe — und ein Punkt auf derselben — der Coordinatenanfang — zu Grunde. Die polaren Liniencoordinaten bestehen aus einer Längencoordinate ϱ, welche die Grösse der Senkrechten angiebt, die man vom Anfang auf die Gerade fällen kann, und aus einer Winkelcoordinate θ, welche den Winkel ausdrückt, den jene Senkrechte mit der Coordinatenaxe bildet.

Wir wollen der Grösse ϱ kein Vorzeichen geben und die verschiedenen Lagen der Geraden dadurch kennzeichnen, dass wir θ die Werthe von -180^0 bis $+180^0$ zukommen lassen. Aus 2) geht hervor, dass die polaren Liniencoordinaten identisch sind mit den polaren Punktcoordinaten des Fusspunktes des vom Anfang auf die Gerade gefällten Perpendikels.

Stellen wir die Polarcoordinaten ϱ, θ mit den rechtwinkligen ξ, η zusammen, so haben wir

$$\xi = -\frac{\cos\theta}{\varrho}, \quad \eta = -\frac{\sin\theta}{\varrho}.$$

Die Coordinatenaxe hat die Coordinaten $\varrho = 0$, $\theta = 90^0$; eine die Coordinatenaxe im Anfang unter dem Winkel τ schneidende Gerade: $\varrho = 0$, $\theta = \tau + 90^0$; eine der Coordinatenaxe unter dem Abstande a parallele Gerade: $\varrho = a$, $\theta = 90^0$. Bei auf der Coordinatenaxe senkrechten Geraden ist $\theta = 0$. Die Geraden $\varrho_1 \theta_1$ und $\varrho_2 \theta_2$ schneiden sich unter dem Winkel $(\theta_1 - \theta_2)$. Sie sind parallel, wenn $\theta_1 = \theta_2$. Ihr Abstand ist dann $(\varrho_1 \pm \varrho_2)$.

Findet zwischen den Polarcoordinaten ϱ, θ einer bestimmten Geraden und den rechtwinkligen Coordinaten x, y eines bestimmten Punktes die Gleichung 1) identisch statt, so ist das ein Zeichen dafür, dass der Punkt x, y auf der Geraden ϱ, θ liegt, oder, was dasselbe sagt, dass die Gerade ϱ, θ durch den Punkt x, y hindurchgeht. Lassen wir nun ϱ und θ variiren, aber so, dass sie der Gleichung 1) stets Genüge leisten, so erhalten wir unzählig viele Gerade, welche sämmtlich durch den Punkt x, y hindurchgehen. Wir können sagen: die Gleichung 1) ist die Bedingung für die Coordinaten ϱ, θ, unter welcher die durch ϱ, θ repräsentirte Gerade durch den Punkt x, y geht. Setzen wir zur Abkürzung

$$3) \qquad P \equiv \varrho - x\cos\theta - y\sin\theta,$$

so gilt

4) $$P=0$$

mit den Veränderlichen ϱ, θ und den Constanten x, y ist die Gleichung des Punktes x, y, und zwar in der Normalform.

So ist z. B. die Gleichung des Coordinatenanfanges

$$\varrho=0.$$

Ist der Punkt durch seine Polarcoordinaten r, t ausgedrückt, so wird seine Gleichung in Liniencoordinaten

$$\varrho-r.\cos(\theta-t)=0.$$

Wir haben daher als charakteristisches Kennzeichen der Punktgleichung drei Glieder, eins mit ϱ, eins mit $\cos\theta$ und eins mit $\sin\theta$. Fehlt eins der beiden letzteren Glieder, so liegt der Punkt auf einer der Coordinatenaxen; fehlt das erstere, so liegt er im Unendlichen. Ein absolutes Glied besitzt die Punktgleichung nicht. In der allgemeinen Form kann die Punktgleichung verschieden auftreten. So sind

$$\begin{aligned} A\varrho+B\cos\theta+C\sin\theta&=0,\\ A\varrho+\quad B\cos(\theta+\omega)\quad&=0,\\ A\varrho+B\sin(\theta+\omega)+C\cos(\theta+\omega)&=0 \end{aligned}$$

lauter Punktgleichungen. Wir erhalten aus der allgemeinen Form die Normalform, sobald wir erstere durch den Coefficienten von ϱ dividiren.

Die drei Geraden $\varrho_1\theta_1$, $\varrho_2\theta_2$, $\varrho_3\theta_3$ gehen durch denselben Punkt x, y, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \varrho_1-x\cos\theta_1-y\sin\theta_1&=0,\\ \varrho_2-x\cos\theta_2-y\sin\theta_2&=0,\\ \varrho_3-x\cos\theta_3-y\sin\theta_3&=0, \end{aligned}$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ \varrho_2 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ \varrho_3 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \end{vmatrix}=0.$$

Nach erfolgter Multiplication mit (-1) kann die Gleichung auch geschrieben werden

$$\varrho_1\sin(\theta_2-\theta_3)+\varrho_2\sin(\theta_3-\theta_1)+\varrho_3\sin(\theta_1-\theta_2)=0.$$

Nehmen wir eins dieser drei Coordinatenpaare als variabel an, so können wir sagen:

5) Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varrho & \cos\theta & \sin\theta\\ \varrho_1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ \varrho_2 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{vmatrix}=0$$

oder

$$\varrho\sin(\theta_1-\theta_2)+\varrho_1\sin(\theta_2-\theta)+\varrho_2\sin(\theta-\theta_1)=0$$

st die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $\varrho_1\theta_1$ nd $\varrho_2\theta_2$.

Bereits oben haben wir erwähnt, dass, wenn ϱ, θ die Coordinaten einer beliebigen Geraden und x, y die eines beliebigen Punktes sind, die Function $\varrho - x\cos\theta - y\sin\theta$ den Abstand jenes Punktes von der Geraden ausdrückt. Wir können das jetzt verwerthen, indem wir sagen:

6) Setzt man in die linke Seite einer Punktgleichung in der Normalform $P=0$ die Coordinaten einer beliebigen Geraden ein, so erhält man den Abstand des Punktes von der Geraden, und zwar mit negativem Vorzeichen, wenn der Punkt und der Coordinatenanfang auf derselben Seite der Geraden liegen.

Sind zwei Punkte gegeben mit ihren Gleichungen in der Normalform

$$P_1 \equiv \varrho - x_1\cos\theta - y_1\sin\theta = 0,$$
$$P_2 \equiv \varrho - x_2\cos\theta - y_2\sin\theta = 0,$$

so ist die Gleichung

$$X = P_1 + \lambda P_2 = 0, \quad \lambda > 0$$

ihrem Bau nach wieder die eines Punktes. Da die Coordinaten der Verbindungslinie der Punkte $P_1=0$, $P_2=0$ die Gleichung $X=0$ identisch befriedigen, so geht daraus hervor, dass der Punkt $X=0$ auf derselben gelegen ist. Schreibt man letztere Gleichung in der Form

$$\frac{P_1}{P_2} = -\lambda,$$

so sieht man, dass jede andere durch den Punkt $X=0$ gezogene Gerade die Punkte $P_1=0$ und $P_2=0$ auf verschiedenen Seiten liegen hat, und zwar so, dass das Verhältniss der Abstände dem absoluten Werthe nach durch λ angegeben wird.

7) Die Gleichung

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

repräsentirt einen Punkt, welcher die Verbindungslinie von $P_1=0$ und $P_2=0$ innerlich im Verhältniss $\lambda:1$ theilt.

Ist $\lambda < 0$, so wird die Gleichung

$$\frac{P_1}{P_2} = +\lambda.$$

Jede durch $X=0$ gehende Gerade hat dann $P_1=0$ und $P_2=0$ auf derselben Seite liegen und wird äusserlich im Verhältniss $\lambda:1$ getheilt.

Im speciellen Falle $\lambda = -1$ wird

$$P_1 - P_2 = 0$$

die Gleichung des unendlich entfernten Punktes der Geraden P_1P_2. Dies geht daraus hervor, dass diese Gleichung frei von der Coordinate ϱ ist. Der dann resultirende Winkel

$$arctg\,\theta = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

ist das Complement des Winkels, welchen die Verbindungslinie mit der Coordinatenaxe bildet.

Ebenso ergiebt sich die Gleichung für die Mitte der Verbindungslinie als

$$P_1 + P_2 = 0$$

oder in der Normalform

$$\frac{P_1 + P_2}{2} = 0.$$

Verbinden wir diesen Punkt mit einem dritten, dessen Gleichung ist $P_3 = 0$, und theilen die letztgezogene Gerade im Verhältniss $1:2$, so ist wegen $\lambda = \frac{1}{2}$ die Gleichung des Theilungspunktes

$$\frac{P_1 + P_2}{2} + \tfrac{1}{2} P_3 = 0$$

oder auch

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0.$$

Dieses ist mithin die Gleichung des Schwerpunktes der drei gegebenen Punkte. Die Symmetrie lässt erkennen, dass derselbe auch noch auf zwei andere Arten hätte gefunden werden können. In der Normalform heisst seine Gleichung

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = 0.$$

Wählen wir einen vierten Punkt $P_4 = 0$, verbinden den eben gefunndenen Schwerpunkt mit demselben und theilen die Verbindungslinie im Verhältniss $1:3$, so hat der neue Schwerpunkt die Gleichung

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} + \tfrac{1}{3} P_4 = 0$$

oder auch

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0.$$

Wir können also im Allgemeinen sagen:

8) Sind

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_3 = 0,\ \ldots\ P_n = 0$$

Gleichungen in der Normalform von n Punkten, so ist die Gleichung ihres Schwerpunktes

$$\Sigma P_n = 0$$

oder in der Normalform

$$\frac{1}{n} \Sigma P_n = 0.$$

Fallen mehrere Punkte mehrfach je in einen zusammen, oder — was dasselbe sagt — sind die n Punkte materiell und mit den bezüglichen Gewichten $g_1, g_2, g_3, \ldots g_n$ versehen, so wird die Schwerpunktgleichung in der Normalform

$$\frac{1}{n} \Sigma g_n P_n = 0.$$

Ihre Symmetrie beweist, dass ein System materieller Punkte in einer Ebene immer nur einen einzigen Schwerpunkt besitzt.

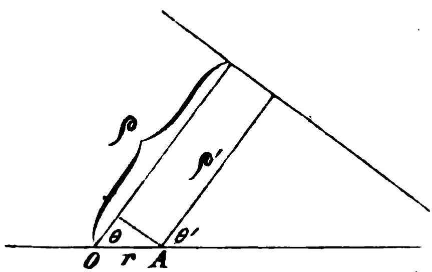
Wir wenden uns nun zur **Transformation der gewählten Coordinaten.** Es seien ϱ, θ die ursprünglichen, ϱ', θ' die neuen Coordinaten. Bleibt der Coordinatenanfang derselbe, wird aber die Axe um den Winkel ω positiv gedreht — wir denken entgegengesetzt dem Lauf der Zeiger der Uhr —, so ist

$$\varrho' = \varrho, \quad \theta' = \theta - \omega.$$

Es wird also

$$F(\varrho, \theta) = 0 \text{ zu } F(\varrho', \theta' + \omega) = 0.$$

Fig.1.



Bleibt alsdann die Coordinaten-Axe ruhen, wird aber der Anfang auf derselben um r von O nach A verschoben (s. Fig. 1), so ist

$$\varrho' = \varrho - r.\cos\theta, \quad \theta' = \theta.$$

Nehmen wir ferner an, dass der neue Coordinatenanfang A eine beliebige Lage habe, dass z. B. seine Polarcoordinaten ϱ, ω seien, so können wir zunächst die Coordinatenaxe um O so lange drehen, bis sie durch A hindurchgeht. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses Hilfs-Coordinatensystems mit ϱ_h, θ_h, so ist

$$\varrho_h = \varrho, \quad \theta_h = \theta - \omega.$$

Verlegen wir jetzt das Cordinatensystem nach dem neuen Anfange, lassen aber dabei der Coordinatenaxe ihre eben erhaltene Lage, so ist, wenn wir die jetzigen Coordinaten mit ϱ'_h, θ'_h bezeichnen, nach dem eben erhaltenen Resultat

$$\varrho'_h = \varrho_h - r\cos\theta_h = \varrho - r\cos(\theta - \omega), \quad \theta'_h = \theta_h = \theta - \omega.$$

Geben wir nun der Coordinatenaxe wieder ihre alte Richtung, drehen sie also um ω negativ, so ist

$$\varrho' = \varrho'_h = \varrho - r\cos(\theta - \omega), \quad \theta' = \theta'_h + \omega = \theta.$$

Da nun aber $\varrho \equiv \varrho' + r.\cos(\theta - \omega) = 0$ nichts Anderes ist, als die Gleichung des ursprünglichen Coordinatenanfanges in der Normalform im neuen System, so können wir sagen:

9) **Hat bei der Coordinatentransformation der ursprüngliche Anfang im neuen System die Gleichung in der Normalform**

$$U = 0$$

und bleibt die Richtung der Coordinatenaxe dieselbe, so geht die Curvengleichung

$$F(\varrho, \theta) = 0$$

über in die Gleichung

$$F(U, \theta) = 0.$$

Bleibt dagegen der Coordinatenanfang derselbe, und wird die Axe in positiver Richtung um den Winkel ω gedreht, so heisst die neue Gleichung

$$F(\varrho, \theta - \omega) = 0.$$

Hat also der neue Coordinatenanfang die rechtwinkligen Coordinaten x, y, und wird gleichzeitig die Axe um ω positiv gedreht, so heisst die neue Gleichung

$$F[\varrho - x \cos(\theta + \omega) - y \sin(\theta + \omega), \theta - \omega] = 0.$$

§ 2.

Kreis und Kegelschnitt.

Da die Kreistangente die Eigenschaft besitzt, dass sie immer vom Mittelpunkte um die Länge des Radius entfernt ist, so schliessen wir unmittelbar:

10) Ist $M = 0$ die Gleichung des Kreismittelpunktes in der Normalform und r der Kreisradius, so ist die Kreisgleichung

$$M = \pm r.$$

Das doppelte Vorzeichen ist nothwendig, da Plus oder Minus eintritt, je nachdem der Kreismittelpunkt und der Coordinatenanfang auf derselben oder auf verschiedener Seite der sich bewegenden Kreistangente gelegen sind. Wollen wir es vermeiden, so schreiben wir die Gleichung in der Form

$$M^2 = r^2.$$

Wir sehen daraus, dass, wenn zu den drei Gliedern der Punktgleichung mit ϱ, $\cos\theta$, $\sin\theta$ noch ein Absolutglied hinzutritt, dieselbe eine Kreislinie vertritt, welche jenen Punkt zum Mittelpunkte und nach geschehener Reduction auf die Normalform das Absolutglied zum Radius hat. Umgekehrt ist der Punkt ein Kreis mit dem Radius Null.

Suchen wir die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise

$$\frac{M_1}{r_1} = \pm 1, \quad \frac{M_2}{r_2} = \pm 1,$$

so sehen wir, dass dieselben nothwendig die Gleichung befriedigen

$$\frac{M_1}{r_1} = + \frac{M_2}{r_2}, \text{ d. h. } M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 = 0,$$

oder auch die Gleichung

$$\frac{M_1}{r_1} = - \frac{M_2}{r_2}, \text{ d. h. } M_1 + \frac{r_1}{r_2} M_2 = 0.$$

Wir haben in diesen Gleichungen die Aehnlichkeitspunkte beider Kreise. Sie liegen hiernach auf der Centrale und theilen sie im Verhältniss $r_1 : r_2$.

Die obere Gleichung giebt den äussern, die untere den innern Aehnlichkeitspunkt an.

Bewegt sich ein Punkt so, dass die Summe oder Differenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten eine constante ist, so beschreibt er eine Ellipse, resp. Hyperbel. Ist das Product der Entfernungen constant, so entsteht eine Curve vierten Grades, im speciellen Falle eine Lemniscate, bei constantem Quotienten beschreibt er einen Kreis. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben vier Fälle zu untersuchen bei Bewegung einer Geraden, und werden wir da bedeutend einfachere Resultate erhalten. Bewegt sich zunächst eine Gerade so, dass die Summe ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ immer gleich c ist, so hüllt sie eine Curve ein mit der Gleichung

$$P_1 + P_2 = c.$$

Sie umhüllt mithin einen Kreis, dessen Mittelpunkt, wegen $M \equiv \frac{P_1 + P_2}{2}$, die Mitte der Verbindungslinie beider Punkte, und dessen Radius $r = \frac{c}{2}$, der Hälfte der gegebenen Constanten, gleich ist.

Wir können diesen Satz auf n Punkte erweitern, dann ist

$$M \equiv \frac{1}{n} \Sigma P_n \text{ [s. 8)] und } r = \frac{c}{n}.$$

11) **Bewegt sich eine Gerade um ein System von n festen Punkten, ohne dieses zu durchdringen, so, dass die Summe ihrer Entfernungen von sämmtlichen Punkten eine constante ist, so hüllt sie einen Kreis ein, welcher den Schwerpunkt jenes Systems zum Mittelpunkt und den n^{ten} Theil der Constanten als Radius hat.**

Wir haben auch dann noch einen Kreis, wiewohl mit anderem Mittelpunkte, wenn jene Summe eine algebraische ist und wenn zu einer jeden Entfernung ein beliebiger, sich immer gleich bleibender Factor hinzutritt. Ausnahmefälle liegen vor, wenn die gegebene Constante Null ist. Alsdann dreht sich die Gerade um einen festen Punkt herum. Ferner ist noch zu beachten, dass bei der Summation das Glied mit ϱ herausfallen kann. Die Gerade bleibt dann sich stets parallel. Im speciellen Falle tritt dies ein bei

$$P_1 - P_2 = c,$$

d. h. wenn sich die Gerade so bewegt, dass die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten immer dieselbe ist.

Ist der Quotient der Entfernungen $= \lambda$ gegeben, so ist die Gleichung

$$P_1 - \lambda P_2 = 0.$$

Wie wir schon oben sahen, dreht sich die Gerade dann um einen festen Punkt.

Es fehlt uns hiernach noch der Fall, dass das Product der Entfernungen ein gegebenes ist. Hier rufen wir nun einen bekannten Satz der Kegelschnittslehre zu Hilfe, nämlich: Fällt man von den Brennpunkten eines Kegelschnittes Perpendikel auf beliebige Tangenten, so ist das Product derselben constant, nämlich $=b^2$, dem Quadrat der kleinen Halbaxe. Hieraus schliessen wir unmittelbar:

12) Sind $F_1=0$, $F_2=0$ die Gleichungen der Brennpunkte eines Kegelschnittes in der Normalform, und ist dessen kleine Halbaxe b, so ist seine Gleichung

$$F_1 F_2 = \pm b^2,$$

wo Plus oder Minus zu wählen ist, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Das doppelte Vorzeichen erklärt sich daraus, dass bei der Ellipse die Brennpunkte immer auf derselben Seite der Tangente, bei der Hyperbel immer auf der entgegengesetzten liegen. Fallen die Brennpunkte zusammen, so entsteht ein Kreis mit reellem oder imaginärem Radius, je nachdem die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel war. Durch Variiren von b erhält man ein System confocaler Kegelschnitte.

Wir gehen nun zur Ableitung der Centralgleichung des Kegelschnittes über. Ist die Mittelpunkt-Gleichung in der Normalform

13) $$M \equiv \varrho - x_m \cos\theta - y_m \sin\theta = 0$$

und sind die Brennpunkt-Gleichungen

14) $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \varrho - x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta = 0, \\ F_2 &\equiv \varrho - x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta = 0, \end{aligned}$$

so ist

$$F_1 - F_2 = (x_2 - x_1) \cos\theta + (y_2 - y_1) \sin\theta.$$

Ist $2c$ die Entfernung beider Brennpunkte und ω der Winkel, welchen die Curvenaxe $2a$ mit der Coordinatenaxe bildet, so ist

$$x_2 - x_1 = 2c\,.\cos\omega, \quad y_2 - y_1 = 2c\,.\sin\omega,$$

also

$$F_1 - F_2 = 2c\,.\cos(\theta - \omega).$$

Schreiben wir hierzu die gemäss 7) zu bildende Gleichung

$$F_1 + F_2 = 2M,$$

so finden wir durch Quadriren und Subtrahiren mit Berücksichtigung von 12)

$$M^2 - c^2\,.\cos^2(\theta - \omega) = \pm b^2.$$

Wegen $c^2 = a^2 \mp b^2$ ist auch

$$M^2 = (a^2 \mp b^2) \cos^2(\theta - \omega) \pm b^2$$

und wir können schliessen:

15) Sind a und b die Halbaxen eines Centralkegelschnittes, ist ω der Winkel, welchen seine Axe mit der Coordinatenaxe bildet, und ist $M=0$ die Gleichung seines Mittelpunktes in der Normalform, so ist seine Gleichung

$$M^2 = a^2\,.\cos^2(\theta - \omega) \pm b^2\,.\sin^2(\theta - \omega).$$

Die Gleichung

$$\lambda M^2 = a^2 . \cos^2(\theta - \omega) \pm b^2 . \sin^2(\theta - \omega)$$

giebt uns durch Variiren von λ eine Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte an.

Wählt man den Mittelpunkt zum Coordinatenanfang und lässt die Axe mit der Coordinatenaxe zusammenfallen, so wird die Kegelschnitts-Gleichung

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2\theta \pm b^2 \sin^2\theta$$

oder in rechtwinkligen Liniencoordinaten

$$a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 = 1.$$

Wählen wir statt des Mittelpunktes den einen Brennpunkt zum Coordinatenanfang, so wird die Gleichung

$$\varrho . F = \pm b^2.$$

Ist hierbei

$$F \equiv \varrho - m \cos\theta - n \sin\theta,$$

so können wir auch schreiben

$$\varrho^2 - m \varrho \cos\theta - n \varrho \sin\theta = \pm b^2.$$

Wir wollen uns nun daran erinnern, dass die polaren Liniencoordinaten der Tangente identisch sind mit den polaren Punktcoordinaten des Fusspunktes des vom Anfang auf sie gefällten Perpendikels. Fassen wir also in der eben entwickelten Gleichung ϱ, θ als Punktcoordinaten auf, so lesen wir sofort den Satz ab: Die Fusspunkte der Senkrechten, welche vom einen Brennpunkte auf die Tangente gefällt werden können, liegen sämmtlich auf der Peripherie eines Kreises. Aehnlich können wir auch mit der Punktgleichung verfahren. Multipliciren wir eine solche mit ϱ, so erhalten wir

$$\varrho^2 - m\varrho \cos\theta - n \varrho \sin\theta = 0,$$

d. h.: Fällt man von einem Punkte Senkrechte auf alle Geraden, welche sich durch einen zweiten Punkt hindurchlegen lassen, so liegen die Fusspunkte auf der Peripherie eines Kreises.

Allgemein lässt sich sagen:

16) Liegt eine Gleichung mit einer variabelen Längencoordinate und mit einer variabelen Winkelcoordinate vor, so können diese beiden Grössen sowohl als Punkt-, als auch als Liniencoordinaten aufgefasst werden. Von den beiden so entstandenen Curven bildet die zweite die Fusspunkt-Curve der ersteren in Beziehung auf den Coordinatenanfang als Ausgangspunkt.

Dieses Verfahren wollen wir nun umgekehrt zur Anwendung bringen, um die Gleichung der Parabel zu finden. Bekanntlich ist die Fusspunkt-Curve einer Parabel mit deren Brennpunkt als Ausgangspunkt die Scheiteltangente. Wählen wir den Brennpunkt zum Coordinatenanfang und die Parabelaxe zur Coordinatenaxe, so ist, wenn q die Focaldistanz des Scheitels bezeichnet, die Gleichung der Scheiteltangente in polaren Punktcoordinaten

$$\varrho \cos\theta = q.$$

Folglich heisst die Gleichung der Parabel in polaren Liniencoordinaten ebenso. Auf Grund der Coordinatentransformation 9) schliessen wir:

17) Ist $F=0$ die Gleichung des Brennpunktes der Parabel in der Normalform, ω der Winkel, welchen ihre Axe mit der Coordinatenaxe bildet, und q die Focaldistanz des Scheitels, so ist ihre Gleichung

$$F.\cos(\theta-\omega) = q.$$

Wählen wir den Scheitel als Coordinatenanfang und nehmen $\omega = 180^0$, also die gewöhnliche Lage der Parabel, so ist

$$F \equiv \varrho - q\cos\theta$$

und die Parabelgleichung wird

$$\varrho\cos\theta - q\cos^2\theta + q = 0$$

oder

$$\varrho\cot\theta + q\sin\theta = 0.$$

Von Interesse ist noch der Uebergang der Gleichung des Centralkegelschnittes in die der Parabel. Nehmen wir in der ersteren den einen Brennpunkt zum Coordinatenanfang an und $\omega = 180^0$, so wird

$$F_1 \equiv \varrho, \quad F_2 = \varrho + 2c.\cos\theta.$$

Alsdann kann die Gleichung des Centralkegelschnittes geschrieben werden

$$\varrho\left(\frac{\varrho}{2c} + \cos\theta\right) = \frac{b^2}{2c}.$$

Beim Uebergang zur Parabel wird $c = \infty$, und die Gleichung lautet

$$\varrho.\cos\theta = \lim\frac{b^2}{2c},$$

also ist

$$\lim\frac{b^2}{2c} = q.$$

Wir können auch leicht durch Liniencoordinaten eine Punktgleichung der Ellipse herstellen.

Der Ellipsengleichung in Punktcoordinaten

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

wird auch genügt durch

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Setzen wir diese Werthe in die Punktgleichung ein, so erhalten wir

$$\varrho = a.\cos\varphi\cos\theta + b.\sin\varphi\sin\theta.$$

Durch Verallgemeinerung des Coordinatensystems ergiebt sich folgender Satz:

Variirt in der Punktgleichung

$$M = a . \cos\varphi \cos(\theta - \omega) + b \sin\varphi \sin(\theta - \omega)$$

oder auch

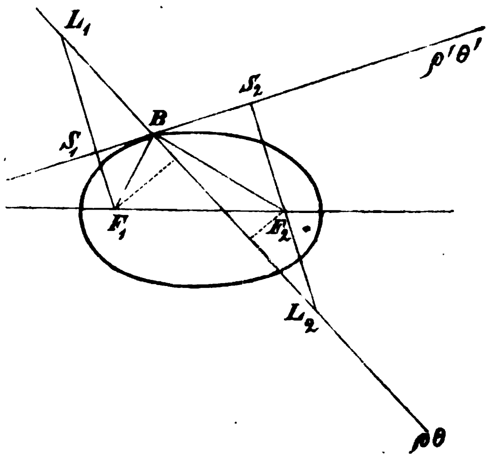
$$M = \frac{a+b}{2} \cos(\varphi - \theta + \omega) + \frac{a-b}{2} \cos(\varphi + \theta - \omega)$$

der Winkel φ, so beschreibt der Punkt eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Gleichung $M = 0$ befriedigt, deren Halbaxen a und b sind und deren Hauptaxe mit der Coordinatenaxe den Winkel ω bildet.

Aehnliches lässt sich von der Hyperbel nachweisen.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichung des Berührungspunktes bei dem Centralkegelschnitt zu entwickeln. Wir stützen uns dabei auf den Satz, dass die Radien vectoren des Berührungspunktes mit der Tangente gleiche Winkel bilden. In Fig. 2 sind von den Brennpunkten F_1 und F_2 auf die Tangente mit den Coordinaten ϱ', θ' und dem Berührungspunkte B die Senkrechten $F_1 S_1$ und $F_2 S_2$ gefällt worden. Ferner ist durch B eine beliebige Gerade mit den Coordinaten ϱ, θ gelegt worden, und sind die Senkrechten bis zu ihren Schnittpunkten L_1, L_2 mit dieser verlängert worden.

Fig. 2.



Dann ist nach jenem Satze

$$\angle F_1 B S_1 = \angle F_2 B S_2, \text{ also } \triangle F_1 B S_1 \sim \triangle F_2 B S_2,$$

und verhält sich sonach

$$F_1 S_1 : F_2 S_2 = B S_1 : B S_2 = L_1 S_1 : L_2 S_2.$$

Hieraus geht hervor

$$\frac{L_1 S_1}{F_1 S_1} = \frac{L_2 S_2}{F_2 S_2}, \quad \frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} - 1 = \frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} + 1, \quad \frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} - \frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} = 2.$$

Ist nun die Gleichung des einen Brennpunktes in der Normalform $F_1 = 0$, so ist nach 6) F_1 die Länge desjenigen Perpendikels, welches von diesem Brennpunkte auf die Gerade $\varrho\,\theta$ gefällt werden kann. Die beiden von F_1 ausgehenden Perpendikel bilden nun denselben Winkel, als die sich in B kreuzenden Geraden, nämlich $\angle(\theta - \theta')$, also ist

$$F_1 = F_1 L_1 \cos(\theta - \theta').$$

Ferner erhalten wir die Länge des Perpendikels $F_1 S_1$ dadurch, dass wir in die Gleichung $F_1 = 0$ die Coordinaten ϱ', θ' einsetzen. Wir wollen den so erhaltenen Werth mit F'_1 bezeichnen; dann ist

$$\frac{L_1 F_1}{F_1 S_1} = \frac{F_1}{F'_1 \cos(\theta - \theta')}.$$

Analog ist

$$\frac{L_2 F_2}{F_2 S_2} = -\frac{F_2}{F'_2 \cos(\theta - \theta')}.$$

Somit wird die Gleichung des Berührungspunktes

$$18)\qquad \frac{F_1}{F'_1} + \frac{F_2}{F'_2} = 2 \cos(\theta - \theta').$$

Multipliciren wir die Gleichung mit $F'_1 F'_2$ und berücksichtigen, dass weil $\varrho'\theta'$ Tangente ist, die Gleichung existiren muss

$$F'_1 F'_2 = \pm b^2,$$

so erhalten wir für die Gleichung des Berührungspunktes

$$19)\qquad F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2 b^2 . \cos(\theta - \theta').$$

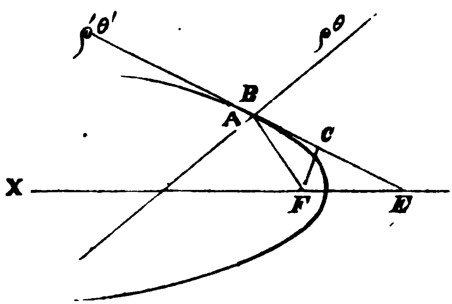
In dieser Form wird uns die Gleichung ihrer Symmetrie wegen noch Dienste leisten. Ausserdem sei noch bemerkt, dass die Entwickelung bei der Hyperbel im Wesentlichen dieselbe ist und dass das Resultat vollständig mit dem angegebenen übereinstimmt.

Im speciellen Falle $F_1 = F_2$ erhalten wir die Gleichung des Berührungspunktes beim Kreise, dessen Mittelpunkt $M = 0$ und dessen Radius r ist, in den beiden Formen

$$20)\qquad \frac{M}{M'} = \cos(\theta - \theta'), \quad M = \pm r . \cos(\theta - \theta').$$

Die Gleichung des Berührungspunktes bei der Parabel stützen wir auf den Satz, dass die Tangente mit der Axe denselben Winkel bildet, als mit dem Radius vector ihres Berührungspunktes. Es sei B der Berührungspunkt (Fig. 3). Durch ihn gehe eine Tangente mit den Coordinaten ϱ', θ', welche die Parabelaxe FX in E schneidet; ausserdem gehe durch ihn eine andere Gerade ϱ, θ. Vom Brennpunkte F sei auf letztere das Perpendikel FA und auf die Tangente das FC gefällt. Lassen wir die obige Bezeichnung auch hier gelten, so ist $FA \equiv F$, $FC \equiv F'$. Denken wir uns ausserdem die Parabelaxe der Curvenaxe parallel, so ist

Fig. 3.



$$\angle AF = \theta \text{ und } \angle CFX = \theta'.$$

Ferner ist nach dem obengenannten Satze

$$\angle BF = 2 . \angle BEF = 2[\angle CF - 90^0] = 2\theta' - 180,$$

also $\angle BFA = 2\theta' - \theta - 180^0$ und

$$\frac{F}{cos(\theta - 2\theta')} = - BF = \frac{F'}{cos\theta'},$$

da $\angle BFC = \angle EFC$. Also ist die Gleichung des Berührungspunktes

21) $$F cos\theta' = F' cos(\theta - 2\theta').$$

Wir können diese Gleichung auch aus der entsprechenden bei dem Centralkegelschnitt herleiten. Läuft wieder die Curvenaxe der Coordinatenaxe parallel und fällt der Anfang mit dem einen Brennpunkt $F_1 = 0$ zusammen, so ist für den andern

$$F_2 \equiv \varrho - 2c\, cos\theta, \quad F'_2 \equiv \varrho' - 2c\, cos\theta',$$

mithin

$$\frac{F_2}{F'_2} = \frac{\frac{\varrho}{2c} - cos\theta}{\frac{\varrho'}{2c} - cos\theta'}.$$

Geht nun der Kegelschnitt in eine Parabel über, so ist $2c = \infty$, und jener Bruch wird

$$\frac{F_2}{F'_2} = \frac{cos\theta}{cos\theta'},$$

also die Gleichung des Berührungspunktes [s. 18)]

$$\frac{F}{F'} + \frac{cos\theta}{cos\theta'} = 2\, cos(\theta - \theta').$$

Wegen $2\, cos\alpha\, cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$ ist dann

$$\frac{F . cos\theta'}{F'} + cos\theta = cos\theta + cos(\theta - 2\theta')$$

oder endlich

$$F . cos\theta' = F' . cos(\theta - 2\theta').$$

Aus der Symmetrie der Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente, 19), schliessen wir nun, dass die Gleichung des Poles der dem Kegelschnitt fremden Geraden $\varrho'\theta'$ dieselbe sei, in folgender Weise.

Nehmen wir die beiden bestimmten Tangenten $\varrho'\theta'$ und $\varrho''\theta''$ an, so genügt jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt der ersteren gezogen wird, der Gleichung

$$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2b^2 . cos(\theta - \theta'),$$

und eine jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt der zweiten gezogen wird, der Gleichung

$$F_1 F''_2 + F_2 F''_1 = \pm 2b^2 . cos(\theta - \theta'').$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten derjenigen Geraden, welche beide Berührungspunkte miteinander verbindet, mit ϱ^0, θ^0, so muss das System der beiden Gleichungen identisch giltig sein:

$$F_1^0 F'_2 + F_2^0 F'_1 = \pm 2b^2 . \cos(\theta^0 - \theta'),$$
$$F_2^0 F''_2 + F_2^0 F''_1 = \pm 2b^2 . \cos(\theta^0 - \theta'').$$

Stellen wir nun die Gleichung auf

$$F_1^0 F_2 + F_2^0 F_1 = \pm 2b^2 \cos(\theta^0 - \theta),$$

so ist dieselbe ihrem Bau nach die eines Punktes, und zwar wegen der soeben angegebenen Identitäten die Gleichung desjenigen Punktes, durch welchen die beiden Geraden $\varrho'\theta'$ und $\varrho''\theta''$ hindurchgehen, d. h. des Schnittpunktes beider Tangenten. Bekanntlich wird aber dieser Punkt als Pol der Geraden $\varrho^0\theta^0$ bezeichnet. Wenden wir endlich statt der Coordinaten $\varrho^0\theta^0$ die anderen $\varrho'\theta'$ wieder an, so gilt Folgendes:

Die Gleichung des Poles der Geraden $\varrho'\theta'$ ist

22) $$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = \pm 2b^2 . \cos(\theta - \theta').$$

Schneidet die Gerade $\varrho'\theta'$ den Kegelschnitt gar nicht, so kann doch ihr Pol nach 22) construirt werden, und halten wir die Bezeichnung „Pol der Geraden" fest, wiewohl die bisherige Erklärung nicht mehr anwendbar ist.

Wir können auch in der Gleichung 22) beide Coordinatenpaare $\varrho\theta$ und $\varrho'\theta'$ als veränderlich annehmen und sagen dann, jene Gleichung ist die Bedingung dafür, dass die beiden Geraden $\varrho\theta$ und $\varrho'\theta'$ harmonische Polaren sind.

Bei Aufstellung der Centralgleichung des Kegelschnitts 15) benutzten wir die Gleichungen

$$F_1 + F_2 = 2M \text{ und } F_1 - F_2 = 2c . \cos(\theta - \omega).$$

Dem entsprechend ist

$$F'_1 + F'_2 = 2M' \text{ und } F'_1 - F'_2 = 2c . \cos(\theta' - \omega),$$

Durch Multiplication je zweier untereinander stehenden Gleichungen ergiebt sich

$$F_1 F'_1 + F_1 F'_2 + F_2 F'_1 + F_2 F'_2 = 4MM',$$
$$F_1 F'_1 - F_1 F'_2 - F_2 F'_1 + F_2 F'_2 = 4c^2 . \cos(\theta - \omega)\cos(\theta' - \omega),$$

also durch Subtraction

$$F_1 F'_2 + F_2 F'_1 = 2MM' - 2c^2 . \cos(\theta - \omega)\cos(\theta' - \omega);$$

nach 22)

$$MM' - c^2 . \cos(\theta - \omega)\cos(\theta' - \omega) = \pm b^2 . \cos(\theta - \theta').$$

Da $c^2 = a^2 \mp b^2$ und $\theta - \theta' = (\theta - \omega) - (\theta' - \omega)$, so ist die Gleichung des Poles mit Hilfe der Centralgleichung

23) $$MM' = a^2 \cos(\theta - \omega) . \cos(\theta' - \omega) \pm b^2 . \sin(\theta - \omega)\sin(\theta' - \omega).$$

Nehmen wir den Curvenmittelpunkt zum Coordinatenanfang und setzen $\omega = 0$, so wird diese Gleichung

$$\varrho'\varrho' = a^2 \cos\theta' \cos\theta \pm b^2 \sin\theta' \sin\theta.$$

Sind also x, y die Polarcoordinaten, so ist

$$x = a^2 \frac{\cos\theta'}{\varrho'}, \quad y = \pm b^2 \frac{\sin\theta'}{\varrho'}.$$

Lassen wir noch die Accente fort und denken an den Zusammenhang zwischen rechtwinkligen und polaren Liniencoordinaten, so können wir sagen:

24) Sind x, y Punktcoordinaten und ξ, η oder ϱ, θ die Liniencoordinaten seiner Polare in Beziehung auf den Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist

$$-\xi = \frac{\cos\theta}{\varrho} = \frac{x}{a^2} \text{ und } -\eta = \frac{\sin\theta}{\varrho} = \frac{y}{\pm b^2}.$$

Sind r, t die Polarcoordinaten des Poles, so ist

$$r^2 = \xi^2 a^4 + \eta^2 b^4, \quad \frac{tg\,\theta}{tg\,t} = \frac{a^2}{\pm b^2}.$$

Für $x = y = 0$ wird, da wegen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ nicht $\cos\theta = \sin\theta = 0$ sein kann, $\varrho = \infty$, d. h. die Polare des Mittelpunktes liegt im Unendlichen. Einer linearen oder quadratischen Verbindung der rechten Seiten entspricht eine ebensolche der linken. D. h.: „Bewegt sich der Punkt auf einer geraden Linie oder beschreibt er einen Kegelschnitt, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, resp. beschreibt auch einen Kegelschnitt, und umgekehrt."

§ 3.

Discussion der Kegelschnitts-Gleichung in der allgemeinen Form.

Die Kegelschnittsgleichung in rechtwinkligen Liniencoordinaten lautet in der allgemeinen Form

25) $$\alpha_{11}\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2 + 2\alpha_{13}\xi + 2\alpha_{23}\eta + \alpha_{33} = 0.$$

Durch Substitution von

$$\xi = -\frac{\cos\theta}{\varrho}, \quad \eta = -\frac{\sin\theta}{\varrho}$$

geht dieselbe in folgende Gleichung mit Polarcoordinaten über:

26) $$\alpha_{33}\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0.$$

Wir fragen zunächst: Unter welcher Bedingung zerfällt der Kegelschnitt in die beiden Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten x_f, y_f und x_g, y_g? Alsdann muss sein

$$\alpha_{33}(\varrho - x_f\cos\theta - y_f\sin\theta)(\varrho - x_g\cos\theta - y_g\sin\theta)$$
$$\equiv \alpha_{33}\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin^2\theta$$

Setzen wir nacheinander $\varrho=0$, $\theta=0$, $\theta=90^{\circ}$, so ergiebt sich

$$\alpha_{33}(x_f+x_g)=2\alpha_{13},\quad \alpha_{33}(y_f+y_g)=2\alpha_{23},$$
$$\alpha_{33}x_fx_g=\alpha_{11},\quad \alpha_{33}y_fy_g=\alpha_{22},$$
$$\alpha_{33}(x_fy_g+y_fx_g)=2\alpha_{12}.$$

Hieraus folgt:

26*) $\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}, \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}}$ sind die rechtwinkligen Coordinaten der Mitte der Verbindungslinie beider Punkte.

x_f und x_g sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha_{33}x^2-2\alpha_{13}x+\alpha_{11}=0,$$

ebenso y_f und y_g die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha_{33}y^2-2\alpha_{23}y+\alpha_{22}=0.$$

Es ist mithin

$$\alpha_{33}x_f=\alpha_{13}\pm\sqrt{\alpha^2_{13}-\alpha_{11}\alpha_{33}},$$
$$\alpha_{33}x_g=\alpha_{13}\mp\sqrt{\alpha^2_{13}-\alpha_{11}\alpha_{33}},$$
$$\alpha_{33}y_f=\alpha_{23}\pm\sqrt{\alpha^2_{23}-\alpha_{22}\alpha_{33}},$$
$$\alpha_{33}y_g=\alpha_{23}\mp\sqrt{\alpha^2_{23}-\alpha_{22}\alpha_{33}}.$$

Die Bedingung, unter welcher die Zerlegung möglich ist, lautet dann

$$\alpha_{13}\alpha_{23}-\sqrt{\alpha^2_{13}-\alpha_{11}\alpha_{33}}\cdot\sqrt{\alpha^2_{23}-\alpha_{22}\alpha_{33}}=\alpha_{12}\alpha_{33}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$27)\quad \begin{aligned}\varDelta &\equiv \frac{1}{\alpha_{33}}\left[(\alpha^2_{13}-\alpha_{11}\alpha_{33})(\alpha^2_{23}-\alpha_{22}\alpha_{33})-(\alpha_{13}\alpha_{23}-\alpha_{12}\alpha_{33})^2\right]\\ &=2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}-\alpha^2_{12}\alpha_{33}-\alpha^2_{23}\alpha_{11}-\alpha^2_{13}\alpha_{22}+\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\\ &=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Alsdann lautet das gefundene Resultat:

28) Unter der Bedingung

$$\varDelta=0$$

zerfällt der Kegelschnitt in zwei Punkte.

Nehmen wir ferner an, dass die Gleichung 26) einen wirklichen Kegelschnitt vertritt, so können wir rücksichtlich der Grösse α_{33} die beiden Fälle unterscheiden:

$$\text{I.}\quad \alpha_{33}=1;\qquad \text{II.}\quad \alpha_{33}=0.$$

Jeder andere Fall lässt sich leicht auf den ersten zurückführen. Wir wollen zunächst diesen ersten Fall festhalten.

Die kleine Halbaxe des Kegelschnitts sei b. Ihr Quadrat b^2 denken wir uns stets, um gleichzeitig beide Curvengattungen zu betrachten, als mit doppeltem Vorzeichen versehen, lassen es aber der Einfachheit halber fort. Dann lässt sich die Gleichung 26) auch so schreiben:

29) $$\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + (\alpha_{11}+b^2)\cos^2\theta + (\alpha_{22}+b^2)\,.\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = b^2.$$

Diese Gleichung muss ferner auf die Form 12)

$$F_1 F_2 = b^2$$

gebracht werden können, d. h. die linke Seite muss sich in zwei Factoren zerlegen lassen, oder b^2 ist eine Wurzel der quadratischen Gleichung

30) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+b^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}+b^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder auch der Gleichung

31) $$b^4 - b^2(\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} - \alpha_{11} - \alpha_{22}) + \Delta = 0.$$

Sind $x_m . y_m$ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes, so erhalten wir aus 26*) sofort ihre Werthe, da der Mittelpunkt die Verbindungslinie der Brennpunkte halbirt. Es ist also

$$x_m = \alpha_{13}, \quad y_m = \alpha_{23}$$

die Mittelpunktsgleichung

32) $$M \equiv \varrho - \alpha_{13}\cos\theta - \alpha_{23}\sin\theta = 0.$$

Hiernach lässt sich die Kegelschnittsgleichung auch so schreiben:

$$2M\varrho - \varrho^2 + \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0$$

oder auch

33) $$M^2 = (\alpha^2_{13} - \alpha_{11})\cos^2\theta + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})\sin^2\theta + (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})\sin 2\theta = 0.$$

Vergleichen wir sie in dieser Gestalt mit der Gleichung 15)

$$M^2 = a^2\cos^2(\theta - \omega) + b^2 . \sin^2(\theta - \omega),$$

so ergiebt sich

34) $$\begin{aligned} \alpha^2_{13} - \alpha_{11} &= a^2 . \cos^2\omega + b^2 . \sin^2\omega, \\ \alpha^2_{23} - \alpha_{22} &= a^2 . \sin^2\omega + b^2 . \cos^2\omega, \\ \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12} &= (a^2 - b^2) . \frac{\sin 2\omega}{2}. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen erhalten wir

35) $$\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} - \alpha_{11} - \alpha_{22} = a^2 + b^2.$$

Setzen wir diesen Werth in 31) ein, so wird dieselbe

$$b^4 - b^2(a^2 + b^2) + \Delta = 0,$$

d. h.

36) $$\Delta = a^2 . b^2.$$

Aus 35) und 36) erkennen wir, dass a^2 die andere Wurzel der quadratischen Gleichung 30) ist.

a^2 und b^2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

37) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+z & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}+z & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$z^2 - z(\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} - \alpha_{11} - \alpha_{22}) + \Delta = 0.$$

Dividiren wir die dritte Gleichung von 34) durch die Differenz der beiden ersten, so haben wir

$$38) \qquad tg\, 2\omega = \frac{2(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})}{\alpha^2_{13} - \alpha^2_{23} - \alpha_{11} + \alpha_{22}}.$$

Aus der Gleichung 37) scheint hervorzugehen, dass, wenn wir die Kegelschnittsgleichung in der Form schreiben:

$$\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + (\alpha_{11} + a^2)\cos^2\theta + (\alpha_{22} + a^2)\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = a^2,$$

sich die linke Seite derselben ebenfalls in zwei Factoren zerlegen lassen müsse. Man erhält dann in der That auch zwei Brennpunkte, aber zwei imaginäre; sie liegen auf der reellen kleinen Axe des Kegelschnittes, um $\pm i\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkte entfernt. Wir haben so die fünf wichtigsten Momente des Kegelschnittes, nämlich seinen Mittelpunkt, seine Halbaxen und die Richtung seiner Axe auf einfache Weise aus der allgemeinen Gleichung bestimmt. Bei der Berechnung der quadratischen Gleichung 37) kann man nie im Zweifel sein, welche Wurzel a^2 und welche b^2 angiebt. Erhält man nämlich zwei positive Werthe, so ist die Curve eine Ellipse, also der grössere Werth a^2 und der kleinere b^2. Erhält man eine positive und eine negative Wurzel, so ist die Curve eine Hyperbel, und die positive $= a^2$, die negative $= b^2$. Sind die Wurzeln beide negativ, so wird allerdings die Curve imaginär. Dies tritt ein, wenn $\Delta > 0$ und $\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} < \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Mit Benutzung von 27) können die Bedingungen auch geschrieben werden

$$(\alpha^2_{13} - \alpha_{11})(\alpha^2_{23} - \alpha_{22}) > (\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2, \quad (\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22}) < 0.$$

Ist nun aber die Summe zweier Grössen negativ, aber ihr Product positiv, so muss jede einzelne negativ sein. Also können wir auch sagen

$$\alpha_{11} > \alpha^2_{13}, \quad \alpha_{22} > \alpha^2_{23}, \quad \Delta > 0.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung würden complex sein, wenn

$$0 > [(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})]^2 - 4\Delta \text{ nach } 27),$$
$$0 > [(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) + (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})]^2 - 4(\alpha^2_{13} - \alpha_{11})(\alpha^2_{23} - \alpha_{22}) + 4(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2,$$
$$0 > [(\alpha^2_{13} - \alpha_{11}) - (\alpha^2_{23} - \alpha_{22})]^2 + 4(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12})^2,$$

was niemals möglich ist.

Also ist der einzige Fall, in welchem bei reellen Grössen α der Kegelschnitt imaginär wird, der, dass die quadratische Gleichung zwei negative Wurzeln besitzt. Denn in jedem andern Falle lässt sich a^2, b^2, x_m, y_m und ω in brauchbarer Weise bestimmen. Man stösst nirgends auf Schwierigkeiten.

Soll die Curve einen Kreis mit dem Radius r darstellen, so muss nach den Gleichungen 34) sein

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12} \text{ und } r^2 = \alpha^2_{13} - \alpha_{11} = \alpha^2_{23} - \alpha_{22}.$$

Dann wird auch, wie das sein muss, Gleichung 38)

$$tg\, 2\omega = \tfrac{0}{0}.$$

Für $a^2 + b^2 = 0$ haben wir eine gleichseitige Hyperbel, d. h. wenn $\varDelta < 0$, $\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Dann ist nämlich $a = \sqrt{-\varDelta}$. Wir fassen nun das gefundene Resultat zusammen.

39) Die Gleichung

$$\alpha_{11}\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2 + 2\alpha_{13}\xi + 2\alpha_{23}\eta + 1 = 0$$

stellt eine Ellipse, ein Punktpaar oder eine Hyperbel dar, je nachdem

$$\varDelta \gtreqless 0.$$

Die Ellipse wird imaginär, wenn

$$\alpha_{11} > \alpha^2_{13}, \quad \alpha_{22} > \alpha^2_{23}.$$

Sie wird ein Kreis mit dem Radius r, wenn

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12}, \quad \alpha^2_{13} - \alpha_{11} = \alpha^2_{23} - \alpha_{22} = r^2.$$

Zur Bestimmung der Brennpunkte x_f, y_f und x_g, y_g bedienen wir uns der bei Gleichung 26) gefundenen Werthe. Wir müssen dabei berücksichtigen, dass die Grössen α_{11} und α_{22} eine Vermehrung um b^2 erlitten haben, und erhalten dann

$$40) \quad \left.\begin{array}{l} x_f + x_g = 2\alpha_{13}, \; x_f . x_g = \alpha_{11} + b^2 \\ y_f + y_g = 2\alpha_{23}, \; y_f . y_g = \alpha_{22} + b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_f . x_g - y_f . y_g = \alpha_{11} - \alpha_{22}, \\ x_f . y_g + x_g . y_f = 2\alpha_{12}. \end{array}$$

Wir haben nun zur Bestimmung der Brennpunkte vier zum Theil quadratische Gleichungen mit vier Unbekannten. Setzen wir $x_g = 2\alpha_{13} - x_f = 2\alpha_{13} - x$ und $y_g = 2\alpha_{23} - y_f = 2\alpha_{23} - y$ in den anderen Gleichungen ein, so erhalten wir als Bestimmungsgleichungen der Brennpunkt-Coordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} xy - \alpha_{23}x - \alpha_{13}y + \alpha_{12} = 0, \\ x^2 - y^2 - 2\alpha_{13}x + 2\alpha_{23}y + \alpha_{11} - \alpha_{22} = 0 \end{array}\right.$$

41) oder auch

$$\left\{\begin{array}{l} (x - \alpha_{13})(y - \alpha_{23}) = \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}, \\ (x - \alpha_{13})^2 - (y - \alpha_{23})^2 = \alpha^2_{13} - \alpha^2_{23} - \alpha_{11} + \alpha_{22}. \end{array}\right.$$

Beide Gleichungen sind miteinander verwandt. Betrachten wir nämlich x, y nicht als Unbekannte, sondern als Veränderliche, so drücken beide Gleichungen gleichseitige, dem Kegelschnitt concentrische Hyperbeln aus, und zwar sind die Asymptoten der einen Hyperbel die Axen der anderen, und umgekehrt. Schreiben wir die Kegelschnittsgleichung in der Form

$$\varrho^2 - 2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) + \beta_{11}\cos^2\theta + \beta_{12}\sin 2\theta + \beta = 0,$$

wo $\beta_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{22}$, $\beta_{12} = \alpha_{12}$ und $\beta = \alpha_{22}$, so sehen wir, was schon Gleichung 12) folgern liess, dass durch Variiren von β eine confocale Kegelschnittsschaar entsteht. Lassen wir weiter auch noch β_{12} variiren, so beschreiben die Brennpunkte die zweite der in 41) angegebenen Hyperbeln; variirt dagegen β_{11}, so beschreiben sie die erste.

Sind r_f, θ_f und r_g, θ_g die Polarcoordinaten der Brennpunkte, so werden die letzten Gleichungen von 40)

$$r_f r_g . \sin(\theta_f + \theta_g) = 2\alpha_{12},$$
$$r_f r_g . \cos(\theta_f + \theta_g) = \alpha_{11} - \alpha_{22},$$

durch Division

42) $$tg(\theta_f + \theta_g) = \frac{2\alpha_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{22}}.$$

Verbindet man die Brennpunkte mit dem Coordinatenanfang und halbirt den Winkel der Verbindungslinien, so schliesst diese Halbirungslinie mit der Coordinatenaxe den Winkel $\frac{\theta_f + \theta_g}{2}$ ein. Wir sehen daher, dass wir diesem Winkel durch Drehung der Coordinatenaxe jeden beliebigen Werth geben können. Hat er den Werth Null, so ist auch $\alpha_{12} = 0$ und die Brennpunkte liegen auf der ersteren der in 41) angegebenen Hyperbeln, welche durch den Coordinatenanfang hindurchgeht und deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel laufen. Ist $\frac{\theta_f + \theta_g}{2} = 45^0$, also $tg(\theta_f + \theta_g) = \infty$, und $\alpha_{11} - \alpha_{22} = 0$, so erhalten wir als Ort der Brennpunkte die zweite Hyperbel, welche durch den Anfang geht, die neuen Coordinatenaxen aber zu Curvenaxen hat. Da eine Drehung von 45^0 stattgefunden hat, so finden wir das Obige bestätigt.

Die Gleichungen 41) sind dann von Wichtigkeit, wenn die Grössen α von einer Veränderlichen abhängig gemacht sind, wodurch die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine Schaar Kegelschnitte vertritt. Eliminirt man dann aus beiden Gleichungen diese Veränderliche, so erhält man den Ort der Brennpunkte der genannten Kegelschnittsschaar.

Die Halbaxen des Kegelschnittes ergeben sich dann besonders leicht, wenn

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = \alpha_{12}, \quad \alpha^2_{13} - \alpha_{11} \gtrless \alpha^2_{23} - \alpha_{22}.$$

Dann ist nach 38) $tg\, 2\omega = 0$, also entweder $\omega = 0$ oder $\omega = 90^0$, und zwar

$$\text{für } \omega = 0 \text{ nach 34): } a^2 = \alpha^2_{13} - \alpha_{11}, \; b^2 = \alpha^2_{23} - \alpha_{22},$$

und

$$\text{für } \omega = 90^0: \qquad a^2 = \alpha^2_{23} - \alpha_{22}, \; b^2 = \alpha^2_{13} - \alpha_{11}.$$

Hiermit stimmt überein, dass für $\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12} = 0$ nach 41) sein muss

$$(x_f - x_m)(y_f - y_m) = 0,$$

d. h. entweder $x_f = x_m$, dann ist $\omega = 90^0$, oder $y_f = y_m$, dann ist $\omega = 0$.

Für $\alpha^2_{13} - \alpha_{11} = \alpha^2_{23} - \alpha_{22}$, $\alpha_{13}\alpha_{23} \gtrless \alpha_{12}$ wird $tg\, 2\omega = \infty$, also $\omega = 45^0$ oder $\omega = 135^0$. Dann ist [Gleichung 34)]

$$a^2+b^2=2(\alpha_{13}^2-\alpha_{11}),$$
$$a^2-b^2=2(\alpha_{13}\alpha_{23}-\alpha_{12}).$$

Diese Fälle kann man bei jedem Kegelschnitte durch Axendrehung herbeiführen.

Ist der Anfang auch Curvenmittelpunkt, so ist wegen $\alpha_{13}=\alpha_{23}=0$ die Gleichung des Kegelschnittes

$$\varrho^2+\alpha_{11}\cos^2\theta+\alpha_{22}\sin^2\theta+\alpha_{12}\sin 2\theta=0.$$

Steht eine der beiden Curvenaxen auf der Coordinatenaxe senkrecht, so ist $\alpha_{12}=0$ und die Gleichung selbst

$$\varrho^2+\alpha_{11}\cos^2\theta+\alpha_{22}\sin^2\theta=0.$$

Ist die grosse Axe Coordinatenaxe, so ist $\alpha_{11}=-a^2$, $\alpha_{22}=-b^2$; ist die kleine Axe Coordinatenaxe, so ist $\alpha_{11}=-b^2$, $\alpha_{22}=-a^2$. Bei einer Neigung von 45^0 ist $\alpha_{11}=\alpha_{22}$, also die Curvengleichung

$$\varrho^2+\alpha_{11}+\alpha_{12}\sin 2\theta=0,$$

und zwar ist $\alpha_{11}=-\frac{a^2+b^2}{2}$, $\alpha_{12}=-\frac{a^2-b^2}{2}$. Man vergleiche bei diesen Werthen die Centralgleichung 15).

Wir wollen noch Einiges durchnehmen über die geometrische Bedeutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung in der Form

$$\varrho^2-2\varrho(\alpha_{13}\cos\theta+\alpha_{23}\sin\theta)+\alpha_{11}\cos^2\theta+\alpha_{22}\sin^2\theta+\alpha_{12}\sin 2\theta=0.$$

Die nothwendige Homogeneïtät der Gleichung zeigt uns, dass α_{13} und α_{23} Strecken, α_{11}, α_{22} und α_{12} Flächen sind. Ersteres haben wir schon constatirt. Es sind nämlich α_{13} und α_{23} die Entfernungen des Mittelpunktes von den beiden Coordinatenaxen. Um α_{11} und α_{22} zu interpretiren, übertragen wir den Begriff der Potenz des Punktes beim Kreise auf die Potenz einer Geraden beim Kegelschnitt. Wir wollen unter derselben die Differenz verstehen, welche wir erhalten, wenn wir vom Rechteck aus den Abständen der Brennpunkte von der Geraden das Quadrat der kleinen Halbaxe subtrahiren. Es ist klar, dass eine Gerade mit dem Kegelschnitt zwei, einen oder gar keinen Punkt gemeinsam hat, je nachdem ihre Potenz negativ, Null oder positiv ist. Wir sehen aus der Kegelschnittsgleichung $F_1 F_2-b^2=0$, dass wir die Potenz einer beliebigen Geraden erhalten, wenn wir ihre Coordinaten in die linke Seite der Kegelschnittsgleichung einsetzen. Da die Coordinatenaxe (x-Axe) die Coordinaten $\varrho=0$, $\theta=90^0$ besitzt, so ist ihre Potenz $=\alpha_{22}$, und da die y-Axe die Coordinaten $\varrho=0$, $\theta=0$ hat, so ist ihre Potenz $=\alpha_{11}$. Da ferner nach 42) $\alpha_{12}=\frac{1}{2}r_f\,.\,r_g\,.\,\sin(\theta_f+\theta_g)$, so können wir sagen: α_{12} ist die Fläche desjenigen Dreiecks, welches den Coordinatenanfang, den einen Brennpunkt und den Spiegelpunkt des andern in Beziehung auf die Coordinatenaxe zu Ecken hat.

Nach dieser Ausführung scheint die Discussion der allgemeinen Kegelschnittsgleichung und die Bestimmung der für den Kegelschnitt wichtigsten Grössen a, b, x_m, y_m, ω in Liniencoordinaten einfacher zu sein als in Punktcoordinaten.

Es bleibt uns nur noch übrig, den Fall

II. $$\alpha_{33} = 0$$

näher zu untersuchen. Die Kegelschnittsgleichung lautet dann

43) $$2\varrho\,(\alpha_{13}\cos\theta + \alpha_{23}\sin\theta) = \alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta.$$

Ist ausserdem noch $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, so geht aus

44) $$\alpha_{11}\cos^2\theta + \alpha_{22}\sin^2\theta + \alpha_{12}\sin 2\theta = 0$$

hervor

$$tg\,\theta = \frac{-\alpha_{12} \pm \sqrt{\alpha^2_{12} - \alpha_{11}\alpha_{22}}}{\alpha_{22}}.$$

Ist auf diese Weise θ als Constante bestimmt, so repräsentirt die Gleichung 44) den Schnittpunkt sämmtlicher unter $(90^0 - \theta)$ gegen die Coordinatenaxe geneigten, also einander parallelen Geraden. Da die Gleichung quadratisch ist, so können wir sagen, sie stellt zwei im Unendlichen gelegene Punkte dar, die allerdings imaginär werden oder auch in einen einzigen zusammenfallen können.

Ist dagegen nicht $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, so kann die Gleichung 43) durch Division mit der Wurzelgrösse $2\sqrt{\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23}}$ auf die Form gebracht werden

$$\varrho\,(\cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega) = \beta_{11}\cos^2\theta + \beta_{22}\sin^2\theta + \beta_{12}\sin 2\theta,$$

wo

$$tg\,\omega = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}},\quad \beta_{11} = \frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23}}},\quad \beta_{22} = \frac{\alpha_{22}}{2\sqrt{\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23}}},\quad \beta_{12} = \frac{\alpha_{12}}{2\sqrt{\alpha^2_{13} + \alpha^2_{23}}}.$$

Diese Gleichung repräsentirt aber nach 17) eine Parabel, deren Axe unter Winkel ω gegen die Coordinatenaxe geneigt ist. Hat ihr Brennpunkt die Coordinaten x_f, y_f, und ist q die Focaldistanz des Scheitels, so lässt sie sich auch schreiben

$$(\varrho - x_f\cos\theta - y_f\sin\theta)(\cos\theta\cos\omega + \sin\theta\sin\omega) = q\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= x_f\cos\omega + q, \\ \beta_{22} &= y_f\sin\omega + q, \\ 2\beta_{12} &= x_f\sin\omega + y_f\cos\omega, \end{aligned}$$

so

$$\beta_{11} - \beta_{22} = x_f\cos\omega - y_f\sin\omega,$$

. h.

46) $$\begin{aligned} x_f &= 2\beta_{12}\sin\omega + (\beta_{11} - \beta_{22})\cos\omega, \\ y_f &= 2\beta_{12}\cos\omega - (\beta_{11} - \beta_{22})\sin\omega, \\ q &= \beta_{11}\sin^2\omega + \beta_{22}\cos^2\omega - \beta_{12}\sin 2\omega. \end{aligned}$$

ir haben immer eine Parabel, so lange nicht $q = 0$. Dann geht die rabel in ihren Brennpunkt über; also wenn

$$\beta_{11}\, tg^2\omega - 2\beta_{12}\, tg\,\omega + \beta_{22} = 0$$

oder

$$\alpha_{11}\,\alpha^2_{23} = 2\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23} + \alpha_{22}\,\alpha^2_{13} = 0.$$

Der Gleichung 39) ist noch nachzutragen:

47) Für $\alpha_{33} = 0$ stellt die Gleichung

$$\alpha_{11}\,\xi^2 + 2\,\alpha_{12}\,\xi\eta + \alpha_{22}\,\eta^2 + 2\,\alpha_{13}\,\xi + 2\,\alpha_{23}\,\eta + \alpha_{33} = 0$$

eine Parabel dar, so lange nicht

$$\alpha_{11}\,\alpha^2_{23} - 2\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23} + \alpha_{22}\,\alpha^2_{13} = 0.$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt und nicht gleichzeitig

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0,$$

so repräsentirt die Gleichung einen im Endlichen gelegenen Punkt, im andern Falle ein im Unendlichen gelegenes Punktepaar.

XV.

Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik, abgeleitet mit Hilfe der Function complexen Arguments $Z=\sqrt{z}$.

Von

Dr. Gustaf Holzmüller,

Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 1—5.)

§ 1. Vorbemerkungen.

In Folgendem soll die durch die Function complexen Arguments $Z=\sqrt{z}$ vermittelte Abbildung in Bezug auf ihre geometrischen Consequenzen einer speciellern Untersuchung unterworfen werden.

Es wird sich zeigen, dass bei dieser conformen Uebertragung jedem beliebigen Kreise in der Ebene des Arguments eine lemniscatische Curve $p.p_1=c$ in der Ebene der Function entspricht, die stets den Nullpunkt zum Centrum hat, die jedoch nach Gestalt, Axenlage und Brennweite ohne Einschränkung variiren kann. Ist im speciellen Falle der Kreis eine Gerade, so geht die Lemniscate in eine gleichseitige Hyperbel über, deren lemniscatische Brennpunkte im Unendlichen zu denken sind.

In einem bestimmten Bereiche der Geometrie wird demnach jedem Satze über Kreis und Gerade, über Kreisbüschel und Kreisschaar, über Strahlenbüschel durch einen Punkt und Punktreihen auf einer Geraden ein solcher über Lemniscaten und gleichseitige Hyperbeln desselben Centrums, über Lemniscatenbüschel und Lemniscatenschaar, über Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch zwei Punkte und Punktreihenpaare auf gleichseitiger Hyperbel entsprechen, und ebenso wird jede dahin gehörige Constructionsmethode ihr Analogon finden.

Besonderes Augenmerk soll auf eine aus der Transformation durch reciproke Radii vectores entspringende Operation gerichtet werden, die man als „isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate" bezeichnen könnte. Dieselbe ist mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar und hat eine Reihe interessanter Consequenzen aufzuweisen. Ueber den Specialfall der Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel habe ich bereits in den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften" in dieser Zeitschrift XVIII, S. 227 flgg., einige Mittheilungen gegeben und auf den Reichthum geometrischer Beziehungen hingewiesen, die aus dieser Transformation hervorgehen.

Bekanntlich liefert die Abbildung durch reciproke Radii vectores Gebilde, die in Kreisverwandtschaft stehen, und umgekehrt lässt sich jeder Fall der Kreisverwandtschaft, die allgemein der Transformation durch die Function complexen Arguments $Z=\frac{az+b}{cz+d}$ entspricht, im Wesentlichen auf eine Abbildung durch reciproke Radii vectores zurückführen. So wird auch die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate auf eine Verwandtschaft führen, bei welcher jedes Individuum unter den Lemniscaten desselben Centrums in der einen Ebene einem solchen unter den Curven desselben Charakters in der andern entspricht, eine Beziehung, die man zweckmässig als „lemniscatische Verwandtschaft“ bezeichnen kann. Dieselbe wird wiederum durch eine bestimmte Function complexen Arguments repräsentirt sein.

Die Kreisverwandtschaft hat eine ausgedehnte, aber wohlbegrenzte Gruppe von sonst schwierigen Problemen aus dem Gebiete der Geometrie, der Wärmetheorie und der conformen Abbildungen zur Lösung geführt. Dasselbe ist hier zu erwarten. Zwar scheint in dem Umstande, dass nur von Lemniscaten desselben Centrums gesprochen wird, im Vergleich zur Kreisverwandtschaft, wo die Lage des Kreiscentrums ganz beliebig ist, eine gewisse Beschränkung zu liegen; es stellt sich jedoch heraus, dass der beliebigen Lage des Kreiscentrums die unbeschränkt willkürliche Lage des einen lemniscatischen Brennpunktes entspricht, und dass im Gegensatz zur Aehnlichkeit sämmtlicher Kreise die unendliche Mannichfaltigkeit der lemniscatischen Gestaltung zur Geltung kommt. Schon der Umstand ist bemerkenswerth, dass die Transformation durch reciproke Radii vectores als der Specialfall der lemniscatischen Spiegelung zu betrachten ist, bei dem die beiden Brennpunkte der spiegelnden Curve in einen zusammenfallen.

Von besonderem Interesse ist wohl die Bemerkung, dass der von Möbius* bewiesene Satz über die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, die für entsprechende Punktquaternionen in kreisverwandten Systemen übereinstimmen, auch hier, wenn auch in neuer Form, erhalten bleibt, so dass die Theorie der lemniscatischen Verwandtschaft zu vollständiger Allgemeinheit geführt werden kann. Damit ist auch der Weg gezeigt, die bei anderen isogonalen Verwandtschaften den Doppelverhältnissen entsprechenden Beziehungen zu ermitteln und so ihre Theorie zum Abschluss zu bringen, was bis jetzt nur bei der Aehnlichkeits- und Kreisverwandtschaft** erreicht war.

---

* Möbius: „Die Theorie der Kreisverwandtschaft“, Abhdl. der königl. sächs. Ges. d. Wiss. IV, S. 544 flgg.

** Vergl. die Bemerkung bei Durège: „Elemente der Theorie der Functionen etc.“, S. 33.

Die Theorie der krummlinigen Coordinaten wird insofern einen Beitrag erhalten, als die von Lamé behandelten lemniscatischen Coordinaten* eine wesentliche Verallgemeinerung erfahren, analog der Ausdehnung der Kreiscoordinaten durch Einführung des Kreisbüschels $\vartheta - \vartheta_1 = \gamma$ und der orthogonalen Kreisschaar $\frac{p}{p_1} = c$.

Bei der Wichtigkeit, die Jacobi** solchen Substitutionen für die Integration der Differentialgleichungen und die Lösung mechanischer Probleme beilegt, mag dies nicht unerwähnt bleiben.

Ueber Lösung von Problemen conformer Abbildung durch Einführung der verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

auf dem von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 36) gegebenen Wege sollen einige Andeutungen folgen.

Am Schlusse finden sich noch Bemerkungen über die jetzt angebahnte Kinematik conform veränderlicher Systeme,*** speciell der lemniscatisch verwandten, so dass sich die Fruchtbarkeit der Methode, jedoch auch die Grenzen ihrer Tragweite, hinreichend klarlegen werden.

---

§ 2. Allgemeiner Charakter der Abbildung $Z = \sqrt{z}$.

Zum Zweck der Präcisirung des Folgenden sei es gestattet, über den Charakter der vorliegenden Abbildung einiges Bekannte vorauszuschicken.

Zwischen beiden Ebenen besteht die Beziehung

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X + Yi = \sqrt{x + yi}, \\ R\,[\cos\Phi + i\sin\Phi] = \sqrt{r}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi), \end{array} \right.$$

so dass $R = +\sqrt{r}$ und Φ entweder gleich $\frac{\varphi}{2}$ oder gleich $180^0 + \frac{\varphi}{2}$ ist. Jedem Punkte A der z-Ebene entsprechen also zwei Punkte A_1 und A_2 der Z-Ebene, deren Verbindungslinie durch den Nullpunkt halbirt wird. Zwei so zusammengehörige Punkte sollen stets als Punktpaar bezeichnet werden. Die Construction des einem gegebenen Punkte entsprechenden Punktpaares geschieht durch Halbirung der Abweichung φ und Construction der mittleren Proportionale zwischen r und der Einheit. Die Uebertragung geschieht also mit elementaren Hilfsmitteln.

---

* *Lamé: „Leçons sur les coordonnées curvilignes"*, S. 217.

** Jacobi: „Vorlesungen über Dynamik", S. 199.

*** Burmester: „Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme", diese Zeitschr. XX, S. 381 flgg.

Jeder vom Nullpunkte unter der Neigung φ gegen die positive reelle Axe ausgehenden Geraden entspricht eine unter $\frac{\varphi}{2}$ geneigte Gerade der Z-Ebene und ihre Rückwärtsverlängerung über den Nullpunkt hinaus. Der vollständigen Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen zwei orthogonale Gerade mit den Neigungen $\frac{\varphi}{2}$ und $\frac{\varphi}{2}+90^0$.

Jedem Kreise mit Radius r um den Nullpunkt der z-Ebene entspricht ein Kreis mit Radius $\sqrt{r}$ um den Nullpunkt der Z-Ebene, dem doppelten Umgange auf dem ersteren der einfache Umgang auf dem letzteren. Um dies zu veranschaulichen und gleichzeitig die obige Zweideutigkeit aufzuheben, muss man nach Riemann die z-Ebene als zweiblätterig betrachten, und zwar so, dass beide Blätter längs einer beliebigen, sich selbst nicht schneidenden Linie vom Nullpunkte nach dem unendlich fernen Punkte sich gegenseitig durchkreuzen. Man denke sich diesen „Schnitt“ längs der positiven reellen Axe gelegt und setze fest, dass dem oberen Blatte der z-Ebene der erste und zweite Quadrant der Z-Ebene, dem unteren Blatte der dritte und vierte Quadrant entspricht. Vermeidet man es alsdann, den Schnitt zu überschreiten und so aus dem oberen Blatte in das untere zu gelangen, so kann man die Geometrie jedes Blattes eindeutig auf eine Halbebene übertragen.

Im Nullpunkte aber ist es zweifelhaft, in welchem Blatte man sich befindet. In ihm hängen beide Blätter zusammen, was dem Zusammenfallen der beiden Wurzelwerthe für $z=0$ entspricht. Während man also, wenn ein Punkt der z-Ebene von irgend einer Stelle eines bestimmten der beiden Blätter aus sich beliebig bewegt, im Allgemeinen stets weiss, in welcher Schicht man sich befindet, so dass also der entsprechende Punkt der Z-Ebene eindeutig bestimmt ist, hört diese Eindeutigkeit auf, sobald der Punkt den Nullpunkt passirt. Man kann dort willkürlich in beiden Blättern weitergehen, der Weg verzweigt sich in zwei sich deckende Arme, in der Z-Ebene entsprechend in zwei sich rechtwinklig schneidende Züge. Der Nullpunkt der z-Ebene ist also ein Verzweigungspunkt. Ein einfacher Umgang um denselben führt ohne Unstetigkeit in das andere Blatt, der doppelte Umgang führt ins erste zurück. Man nennt deshalb den Punkt einen Windungspunkt erster Ordnung, dessen Bedeutung sich mit Hilfe des in Fig. 1 dargestellten Modells veranschaulichen liesse.*

Nimmt man an, dass nur ein unendlicher Punkt existire, so müssen dort die Blätter ebenfalls zusammenhängend gedacht werden, und er ist ebenso

* Vergl. Figurentafel bei Neumann: „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“.

als Windungspunkt erster Ordnung aufzufassen, wodurch die unbestimmte Vorstellung des unendlich fernen Bereiches zu einer präcisen wird.

Die Transformation $Z=\sqrt{z}$ giebt, wie jede durch eine Function complexen Arguments vermittelte, in der Z-Ebene Gebilde, die den entsprechenden der z-Ebene conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich sind. Zwei Curven der einen Ebene schneiden sich also unter demselben Winkel, wie die entsprechenden der andern. Im Nullpunkte aber hört diese Aehnlichkeit auf, denn jeder Winkel, der in ihm seinen Scheitel hat, wird, wie oben gezeigt, auf die Hälfte reducirt. Aehnlich ist das Verhalten des unendlichen Punktes zu denken.

Ferner: Das Dimensionsverhältniss kleiner entsprechender Bereiche beider Ebenen hängt ab vom absoluten Betrage des Differentialquotienten*

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\left(\frac{-\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\varphi}{2}\right)\right], \text{ resp.}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\left(180^0-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0-\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Folglich: In der Entfernung r vom Nullpunkte ist das Vergrösserungsverhältniss $1:\frac{1}{2\sqrt{r}}$. Auf dem Kreise mit Radius $r=\frac{1}{4}$ ist es gleich der Einheit, ausserhalb desselben kleiner, innerhalb grösser, und zwar wird die Umgebung des Nullpunktes unendlichfach vergrössert, die des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt. Beide Punkte sind also in mehrfacher Hinsicht singulären Charakters.

Die Abweichung des Differentialquotienten $\frac{-\varphi}{2}$, resp. $180^0-\frac{\varphi}{2}$ zeigt an, dass die Tangente einer Curve in einem Punkte der z-Ebene um diese Winkel gedreht werden muss, wenn sie mit den Tangenten in den correspondirenden Punkten der entsprechenden Curven der Z-Ebene parallel und gleichgerichtet werden soll.

Erhebt man Gleichung 1) zum Quadrat, so ergiebt sich aus der Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile .

2) $$X^2-Y^2=x,$$

3) $$2XY=y.$$

Folglich:

Die Curve $f(x,y)=0$ der z-Ebene verwandelt sich durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ in die Curve $f[(X^2-Y^2),(2XY)]=0$ der Z-Ebene.

Curven n^{ten} Grades gehen also in solche vom $2n^{ten}$ Grade über, deren Gleichung sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen

* Siebeck: „Ueber graphische Darstellung imaginärer Functionen“, Crelle's Journal Bd. 55.

von X und Y ändert. Klappt man eine solche Curve erst um die X-Axe, dann um die Y-Axe, so deckt sie sich in letzterer Lage mit ihrer ersten Lage.

Umgekehrt lässt sich mit Hilfe der Transformation $Z = z^2$ die Behandlung einer ausgedehnten Curvengruppe $2n^{\text{ten}}$ Grades auf die von Curven n^{ten} Grades reduciren.

§ 3. Uebertragung der Geraden und des Kreises durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ und die daraus entspringenden verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten.

Nach Gleichung 2) verwandelt sich die verticale Gerade $x = a$ in die gleichseitige Hyperbel

$$4)\qquad X^2 - Y^2 = a,$$

deren Centrum der Nullpunkt ist und deren Scheitel $\pm\sqrt{a}$ und Brennpunkte $\pm\sqrt{2a}$ auf der reellen oder imaginären Axe liegen, je nachdem a positiv oder negativ ist. Dass der Punkt $2a$, das Spiegelbild des Nullpunktes gegen die Gerade, in den Brennpunkt der Hyperbel transformirt wird, giebt später Veranlassung zu einem interessanten Satze. Allgemein:

Die verticale Parallelenschaar der z-Ebene geht über in eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, die sich im Endlichen nicht schneiden und deren Brennpunkte auf der reellen und imaginären Axe liegen.

Bilden die Schnittpunkte der Verticalenschaar mit der reellen Axe die Reihe

$$\ldots -3a,\ -2a,\ -a,\ 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,$$

so liegen die Schnittpunkte der Hyperbeln mit beiden Axen in den Entfernungen

$$0,\ \sqrt{a},\ \sqrt{2a},\ \sqrt{3a},\ \ldots$$

vom Nullpunkte (vergl. Fig. 2).

Nach Gleichung 3) entspricht der horizontalen Geraden $y = b$ die Curve

$$5)\qquad 2XY = b.$$

Dies ist gleichfalls eine gleichseitige Hyperbel, deren Axe die Linie $+45^0$ oder -45^0 ist, je nach dem Vorzeichen von b. Der Beweis liegt als specieller Fall in folgender Betrachtung. Die Curven, welche die verticale Axe unter dem Winkel α schneiden, werden gefunden, wenn man untersucht, was der Verticalenschaar bei der Abbildung

$$Z = \sqrt{(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\,z} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{z}$$

entspricht. Diese leistet aber dasselbe, wie $Z=\sqrt{z}$, nur muss die Z-Ebene um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gedreht werden. Folglich:

Der Parallelenschaar mit Neigung α gegen die reelle Axe entspricht eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, deren Axe die Linie $\frac{\alpha}{2}+45^0$ oder $\frac{\alpha}{2}-45^0$ ist.

Gleichzeitig ergiebt sich folgende Consequenz:

Jede isogonale Trajectorienschaar der gleichseitigen Hyperbelschaar ist wieder eine gleichseitige Hyperbelschaar. Ist α der constante Schnittwinkel, so sind die Axen beider Systeme um $\frac{\alpha}{2}$ gegen einander gedreht.

So ist z. B. die durch Gleichung 5) dargestellte Schaar die Orthogonalschaar der durch Gleichung 4) repräsentirten. Dies bestätigt den Satz vom constanten Inhalt des Rechtecks $X.Y$ für die gleichseitige Hyperbel, der sich durch Orthogonalprojection in den Satz vom Parallelogramm constanten Inhalts der allgemeinen Hyperbel verwandelt.

Der isogonale Charakter der Verwandtschaft $Z=\sqrt{z}$ kann an dieser Stelle selbstständig nachgewiesen werden.

Die oben besprochenen Vergrösserungsverhältnisse werden besonders veranschaulicht durch die Abbildung orthogonaler Parallelenschaaren, welche die Ebene in ein System von Quadraten eintheilen. In Fig. 2 ist dies durchgeführt. Die beiden orthogonalen Hyperbelschaaren theilen die Z-Ebene in ein System von rechtwinkligen Flächenräumen ein, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit, und zwar der quadratischen Gestalt, zustreben.

Es handelt sich also um zwei Isothermenschaaren, deren Schnittpunkte mit den Axen und den Linien $\pm 45^0$ vom Centrum die Entfernungen $0, \sqrt{a}, \sqrt{2a}, \sqrt{3a}, \ldots$ haben. Der singuläre Charakter des Nullpunktes ist sofort zu erkennen, denn an Stelle des rechten Winkels tritt dort ein Winkel von 45^0.

Nun ist bekannt, dass für Radii vectores, die von den Durchschnitten einer gleichseitigen Hyperbel mit einer durch das Centrum gehenden Geraden nach ihren einzelnen Punkten gezogen sind, die Winkelsumme $+\vartheta_1=const.$ resp. $=180^0+const.$ ist, und zwar ist die Constante das Doppelte des Winkels, unter dem die Asymptote, an welche sich der eine Hyperbelarm anlehnt, gegen die Schnittlinie geneigt ist. Folglich:

Die Gerade durch den Punkt $(a+bi)$, welche gegen den Radius" desselben um den Winkel β, resp. $180^0+\beta$ geneigt t, geht durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ über in die gleich-'tige Hyperbel durch das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$, deren Radii vectores, von den Punkten $\sqrt{a+bi}$ ausgehend, gegen die Verbindungslinie derselben das Gesetz $\vartheta+\vartheta_1=\beta$, resp. $\vartheta+\vartheta_1=180^0+\beta$ befolgen.

Nimmt man jedoch, wie es bei Polarcoordinaten gebräuchlich ist, den Radius nur positiv, so kann man sagen:

Die Abbildung $Z=\sqrt{z}$ verwandelt die Relation $\varphi=\beta$ in Bezug auf den „Radius" eines Punktes $a+bi$ in die Relation $\vartheta+\vartheta_1=\beta$ in Bezug auf das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und dessen Verbindungslinie, d. h. z. B. die Gerade $\varphi=\beta$ geht über in die gleichseitige Hyperbel $arc.tan\,\frac{y}{x+\sqrt{e}}+arc.tan\,\frac{y}{x-\sqrt{e}}=\beta$, wenn die Entfernung des Schnittpunktes der Geraden und der reellen Axe vom Nullpunkte mit e bezeichnet wird.

Einem Strahlenbüschel durch jenen Punkt, dessen Abweichungen die arithmetische Reihe $0,\ \gamma,\ 2\gamma,\ 3\gamma, \ldots$ bilden, entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, deren benachbarte Individua sich unter γ schneiden und deren Winkelsummen $(\vartheta+\vartheta_1)$ dieselbe arithmetische Reihe bilden. Die Asymptoten des Büschels folgen einander nach der Reihe $0,\ \frac{\gamma}{2},\ \frac{2\gamma}{2},\ \frac{3\gamma}{2}, \ldots$ (vergl. Fig. 3).

Um die entsprechenden Betrachtungen für den Kreis durchzuführen, beschränke man sich auf den Fall, dass das Kreiscentrum auf der reellen Axe in der Entfernung e vom Nullpunkte liegt. Die allgemeine Lage erledigt sich dann durch die Function $Z=\sqrt{(\cos\alpha+i\sin\alpha)z}$ ebenso, wie oben.

Die Gleichung des Kreises

$$(x-e)^2+y^2=c^2$$

geht durch unsere Transformation nach Gleichung 2) und 3) und einigen Umformungen über in

$$6)\qquad \begin{cases} (X^2+Y^2)^2-2e(X^2-Y^2)=c^2-e^2, \\ [(X+\sqrt{e})^2+Y^2]\,.\,[(X-\sqrt{e})^2+Y^2]=c^2. \end{cases}$$

Dies ist aber die Gleichung einer lemniscatischen Curve mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{e}$ und dem constanten Product der Radii vectores $p\,.\,p_1=c$.

Das allgemeine Resultat ist also:

Der Kreis um den Punkt $a+bi$ mit dem Radius $r=c$ geht über in die Lemniscate $p\,.\,p_1=c$ mit dem Brennpunktpaare $\sqrt{a+bi}$.

Dass das Kreiscentrum in die Brennpunkte der Lemniscate transformirt wird, ist besonders bemerkenswerth.

Nur der doppelt zu denkende Kreis geht in die vollständige Lemniscate über. Schliesst er den Nullpunkt aus, so entspricht ihm die aus zwei Ovalen bestehende Lemniscate; schliesst er ihn ein, so entsteht die einfache Lemniscate; geht er durch den Nullpunkt, so verwandelt er sich in die gewöhnliche Schleifenlemniscate.

Die gleichseitige Hyperbel ist als Lemniscate zu betrachten, deren lemniscatische Brennpunkte im Unendlichen liegen.

Der Extract des Obigen liegt nun in folgendem sehr verwerthbaren Resultate:

Ist die Gleichung einer Curve in Bezug auf den Punkt $(a+bi)$ und den Radius desselben in Polarcoordinaten $f(r\varphi)=0$, so geht sie durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ über in die Curve $f[(p.p_1),(\vartheta+\vartheta_1)]=0$, deren Radii vectores auf das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und dessen Verbindungslinie zu beziehen sind.*

Das System concentrischer Kreise und der orthogonalen Radien kann zur Eintheilung der Ebene in ähnliche rechtwinklige Flächenstücke benutzt werden, die zur Construction und Untersuchung der logarithmischen Spiralen verwendbar sind. Die Abweichungen der Radien bilden dabei eine arithmetische, ihre Längen eine geometrische Reihe. Folglich:

Die confocale Lemniscatenschaar wird von dem durch ihre Brennpunkte gehenden Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums orthogonal durchschnitten. Man erreicht die Eintheilung der Ebene in rechtwinklige Flächenstücke, die der Aehnlichkeit zustreben, wenn man die Parameter $(\vartheta+\vartheta_1)$ in arithmetischer, die Parameter $p.p_1$ in geometrischer Reihe aufeinander folgen lässt.

In Fig. 3 ist die Eintheilung in kleine „Quadrate" durchgeführt, die man z. B. erreicht, wenn die Winkelsumme $(\vartheta+\vartheta_1)$ die Reihe 0, a, $2a$, $3a$, ..., die Producte $p.p_1$ die Reihe e^0, e^a, e^{2a}, e^{3a}, ... bilden. Letzteres geht aus der logarithmischen Abbildung** hervor.

Man vergleiche hier die Bemerkungen über diese Curven und ihre isothermischen Parameter in dem bereits citirten Werke von Lamé.

Dort wird unter Anderem bemerkt, wie aus der Differentialgleichung der Gleichung 6)

$$(X^2+Y^2-e).(X\,dX+Y\,dY)+2eY\,dY=0$$

folgt, dass die confocalen Lemniscaten ihre Maxima zum Theil auf der imaginären Axe, zum Theil auf dem Kreise mit Radius $\sqrt{e}$ um den Null-

---

* Vergl. an dieser Stelle die entsprechenden Bemerkungen in den „Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften" im 18. und 20. Bande dieser Zeitschrift.

** „Ueber die logarithmische Abbildung etc.", 16. Bd. dieser Zeitschrift.

punkt haben, ferner, dass derselbe Kreis in bestimmter Weise die Gruppe der eingebuchteten Lemniscaten von der der nicht eingebuchteten trennt.

Es sei hier Folgendes hinzugefügt:

Die Brennpunkte des gleichseitigen Hyperbelbüschels liegen sämmtlich auf der orthogonalen Schleifenlemniscate, welche die Büschelpunkte zu Brennpunkten hat; die Scheitelpunkte liegen auf der im Verhältniss $1:\sqrt{\frac{1}{2}}$ verkleinerten Lemniscate.

Der Beweis ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Spiegelpunkte des Nullpunktes gegen ein Strahlenbüschel auf einem Orthogonalkreise des letzteren liegen, der durch den Nullpunkt geht.

Diese lemniscatischen Coordinaten sind jedoch einer durchgreifenden Verallgemeinerung fähig, die sich aus der Abbildung des Kreisbüschels durch zwei Punkte und der orthogonalen Kreisschaar ergiebt. Die Mittelpunkte jeder dieser Schaaren liegen auf der gemeinschaftlichen Potenzlinie der andern, die selbst ein Individuum der ersteren Schaar ist. Folglich:

Sämmtliche Lemniscaten desselben Centrums, die durch zwei feste Punktpaare gehen, haben ihre Brennpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel, die orthogonal zu der zum Büschel gehörigen Hyperbel ist. Die Orthogonalschaar ist wiederum ein System von Lemniscaten desselben Centrums, deren Brennpunkte auf der zweiten der erwähnten Hyperbeln liegen. (Fig. 5 stellt ein solches Lemniscatenbüschel und die orthogonale Lemniscatenschaar dar.)

Die Scheitel beider Lemniscatenbüschel liegen auf gleichseitigen Hyperbeln, die im Verhältniss $\sqrt{2}:1$ grösser sind, als die beiden genannten.

Beiläufig sei bemerkt, dass, wenn sich zwei Lemniscaten desselben Centrums schneiden, sämmtliche Schnittwinkel gleich sind.

Die Frage nach den Parametern der verallgemeinerten lemniscatischen Coordinaten erledigt sich folgendermassen:

Sind $a+bi$ und a_1+b_1i die Schnittpunkte eines Kreisbüschels, so hat jedes Individuum die Gleichung $\xi-\xi_1=\beta$, resp. $180^0-\beta$, wenn diese Winkel gegen die Verbindungslinie der beiden Punkte gemessen werden. Misst man jedoch die Winkel gegen die „Radien" der beide Punkte, so wird zwar die Constante β eine andere, z. B. α, die Gleic ung selbst aber wird sonst nicht geändert. Nach Obigem geht aber b vorliegender Abbildung die Coordinate ξ in eine Winkelsumme $(\vartheta+\vartheta_1$ ξ_1 in eine Winkelsumme $(\chi+\chi_1)$ über, also:

Das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare $\sqrt{a+l}$ und $\sqrt{a_1+b_1i}$, welches dem obigen Kreisbüschel entsprich befolgt das Gesetz:

7) $$(\vartheta+\vartheta_1)-(\chi+\chi_1)=\alpha, \text{ resp. } (180^0-\alpha),*$$

wobei die Winkelsumme $\vartheta+\vartheta_1$ gegen die Verbindungslinie des einen, $\chi+\chi_1$ gegen die des andern Punktpaares zu messen ist.

Die Orthogonalschaar des Kreisbüschels hat, wenn p und p_1 die von $a+bi$ und a_1+b_1i ausgehenden Radii vectores sind, die Gleichung $\frac{p}{p_1}=c$. Bezeichnet man also die von dem Punktpaare $\sqrt{a+bi}$ ausgehenden Radii vectores mit p, p_1, die von $\sqrt{a_1+b_1i}$ ausgehenden mit q, q_1, so folgt:

Die Radii vectores der Orthogonalschaar des Lemniscatenbüschels befolgen das Gesetz

8) $$\frac{p\cdot p_1}{q\cdot q_1}=c.$$

Beide Resultate, zusammengefasst, geben den Satz:

Der geometrische Ort für die constante Differenz der Winkelsummen $(\vartheta+\vartheta_1)$ und $(\chi+\chi_1)$ der von zwei Punktpaaren ausgehenden Radii vectores ist eine durch beide Punktpaare gehende Lemniscate. Der geometrische Ort für das constante Verhältniss der Producte $p.p_1$ und $q.q_1$ der Radii vectores ist eine zur vorigen orthogonale Lemniscate.

Aus den entsprechenden Sätzen über Kreisschaaren folgt, dass die Fälle

9) $$\left\{\begin{array}{c}(\vartheta+\vartheta_1)-(\chi+\chi_1)=0, \text{ resp. } 180^0,\\ \dfrac{p\cdot p_1}{q\cdot q_1}=1\end{array}\right.$$

auf die beiden genannten gleichseitigen Hyperbeln führen, die man nach Analogie der Potenzlinien als „Potenzhyperbeln" des Büschels, resp. der Schaar bezeichnen kann. Wird eine von diesen Hyperbeln zu zwei durch den Nullpunkt gehenden orthogonalen Geraden, so findet gegen dieselben Symmetrie statt. Werden beide zu je zwei Geraden, was dem Falle entspricht, dass die Potenzlinien der beiden Kreisschaaren durch den Nullpunkt gehen, so findet gegen alle vier Gerade Symmetrie statt. In diesem Falle gehört zum Büschel ein Kreis, gegen welchen Reciprocität stattfindet.

Geht das Kreisbüschel durch den Nullpunkt, so fällt eins der entsprechenden Punktpaare mit diesem zusammen, und es entsteht ein Büschel von Schleifenlemniscaten durch den Nullpunkt und ein Punktpaar mit der Gleichung

10) $$(\vartheta+\vartheta_1)-2\chi=\alpha$$

und die Orthogonalschaar

* Das Gesetz entspricht auch dem Satze vom constanten Peripheriewinkel beim Kreise.

11) $$p \cdot p_1 = c \cdot q^2.$$

Dass beides Curven sind, die man durch Transformation der confocalen Lemniscatenschaar und des orthogonalen Hyperbelbüschels mittelst reciproker Radii vectores vom Nullpunkte aus erhalten kann, ist leicht zu zeigen. Dieser Satz wird sich jedoch als Specialfall eines allgemeineren erledigen.

Fig. 4 stellt dieses Curvensystem dar, und zwar ist die Eintheilung der Ebene in „Quadrate" durchgeführt. Die gewöhnliche, symmetrisch gegen die reelle Axe liegende Schleifenlemniscate hat hier die Gleichung

$$(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi = 90^0,$$

die entsprechende Hyperbel hat die Gleichung

$$p \cdot p_1 = q^2,\text{*}$$

so dass stets das Rechteck aus dem einen Paare der Radii vectores gleich dem Quadrate des dritten ist (es handelt sich eben um drei Radii vectores und drei „Brennpunkte").

Bilden die Parameter des allgemeinen Lemniscatenbüschels, d. h. die constanten Differenzen $(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1)$, eine arithmetische, die Parameter der Orthogonalschaar, d. h. die constanten Verhältnisse $\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1}$, eine geometrische Reihe, so lässt sich die Eintheilung der Ebene in ein System von „Rechtecken" erzielen, die der Aehnlichkeit zustreben.

Die Eintheilung in „Quadrate" wird erreicht durch Anwendung der Reihen

$$\ldots\ -3\alpha,\ -2\alpha,\ -\alpha,\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,$$
$$\ldots\ e^{-3\alpha},\ e^{-2\alpha},\ e^{-\alpha},\ e^0,\ e^{\alpha},\ e^{2\alpha},\ e^{3\alpha},\ \ldots.$$

Durch Verbindung der aufeinander folgenden Diagonalpunkte des „Rechteck"-Netzes erhält man mit beliebiger Genauigkeit die isogonalen Trajectorien des Lemniscatenbüschels. Dieselben entsprechen den „logarithmischen Doppelspiralen", die ich in der citirten Abhandlung (Ueber logarithmische Abbildung) ausführlicher behandelt habe und deren einfachste Gleichung ich in dieser Zeitschrift XX, S. 6, als

$$\frac{p}{p_1} = c \cdot \varkappa^{\vartheta - \vartheta_1}$$

* Auf die Analogie der beiden Gleichungen, die sich auch in der Form

$$\sin[(\vartheta + \vartheta_1) - 2\chi] = 1 \text{ und } \frac{p \cdot p_1}{q^2} = 1$$

schreiben lassen, wird besonders aufmerksam gemacht. (Vergl. das Entsprechende in der Kreisverwandtschaft von Möbius.)

aufstellte, wo $\varkappa = e^{\frac{a}{b}}$ und $\frac{a}{b}$ Tangente des constanten Schnittwinkels gegen das Kreisbüschel ist. Die Gleichung der allgemeinsten „lemniscatischen Spiralen" (wenn man wegen der Form der Gleichung diesen Namen beibehalten will) ist also

12)
$$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \cdot \varkappa^{(\varphi + \varphi_1) - (\chi + \chi_1)}.$$

Diese transcendenten Curven befolgen also das Gesetz:

Das Verhältniss der Producte je zweier zusammengehöriger Radii vectores nimmt geometrisch zu oder ab, wenn die Differenz der entsprechenden Winkelsummen arithmetisch wächst.

Die Eigenschaften derselben lassen sich aus denen der logarithmischen Doppelspiralen einfach ableiten, was später an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Für jetzt sei bemerkt, dass ihre Parallelschaaren als Isothermensysteme zu betrachten sind, als deren isogonale Trajectorien sich Curven desselben Charakters ergeben.

Für den Fall der confocalen Lemniscaten vereinfacht sich die Gleichung zu folgender:

13)
$$p \cdot p_1 = c \cdot \varkappa^{\vartheta + \vartheta_1},$$

wie schon in der citirten Abhandlung aus der Gleichung der logarithmischen Spirale $r = c \cdot \varkappa^{\vartheta}$ geschlossen wurde.

Auch die anderen Specialfälle, bei denen Symmetrie auftritt, sind leicht zu erledigen.

Die Allgemeinheit des durch die Gleichungen 7) und 8) dargestellten Coordinatensystems ist eine sehr bemerkenswerthe. Bei ausserordentlicher Mannichfaltigkeit der Gestaltung umfasst es neben einer Reihe von symmetrischen Fällen die von Lamé eingeführten confocalen Lemniscaten, ferner das System der beiden orthogonalen Hyperbelschaaren, das der beiden orthogonalen Kreisschaaren und endlich die Polarcoordinaten und die gewöhnlichen geradlinigen als specielle Fälle. Als noch allgemeinere Coordinaten liessen sich die durch Gleichung 12) dargestellten lemniscatischen Spiralen betrachten; die praktische Verwerthbarkeit derselben mag jedoch für jetzt dahingestellt bleiben.

---

4. Die Geometrie des Kreises, der Geraden und der projectivischen Gebilde, transformirt durch die Function $Z = \sqrt{z}$.

Es handelt sich jetzt darum, die Grundlagen der aus vorliegender ansformation entspringenden Geometrie, die als lemniscatische metrie bezeichnet werden soll, kurz zu skizziren. Dass dabei, wie vorher, stets nur von Hyperbeln und Lemniscaten desselben Centrums die Rede ist, soll nicht mehr besonders hervorgehoben werden.

Der Grundsatz, dass zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist, geht in folgenden über:

Durch zwei Punktpaare ist nur **eine** gleichseitige Hyperbel möglich.

Die beiden Postulate der Geometrie verwandeln sich in folgende:

1. Die durch zwei Punktpaare bestimmte gleichseitige Hyperbel zu zeichnen;
2. um ein gegebenes Brennpunktpaar eine Lemniscate mit gegebenem Parameter $p.p_1=c$ zu legen.

Beide sind mit elementaren Hilfsmitteln ausführbar.

An Stelle gleicher Strecken treten Hyperbelbogen, die „correspondirende“ genannt werden sollen. Sie stehen untereinander in einer Beziehung, die als specieller Fall der unten behandelten lemniscatischen Verwandtschaft zu betrachten ist. Beispiele werden dies am besten klarlegen.

Kreise der z-Ebene mit demselben Radius c können zur Deckung gebracht werden, indem man den Mittelpunkt des einen direct nach dem des andern wandern lässt. Dem entspricht in der Z-Ebene Folgendes: Bewegt man den einen Brennpunkt einer Lemniscate $p.p_1=c$ in der Z-Ebene auf beliebigem Wege, z. B. auf gleichseitiger Hyperbel, nach dem einen Brennpunkte einer Lemniscate desselben Parameters, die jedoch eine andere Brennweite und Axenlage hat, so unterliegt die Curve während der Wanderung einer stetigen Veränderung ihrer Gestalt, schmiegt sich in jedem Momente neuen Bedingungen an und deckt sich schliesslich mit der zweiten Curve. Der andere Brennpunkt fügt sich natürlich der Bewegung so, wie es der Begriff des Punktpaares vorschreibt.

In diesem Sinne also lassen sich Lemniscaten desselben Parameters $p.p_1=c$ zur Deckung bringen. Wir sagen: sie sind „lemniscatisch congruent“ oder „correspondirend“.

Ferner: Correspondirende Hyperbelbogen, die Geraden von der Länge l entsprechen, haben die Eigenschaft, dass die Differenz der lemniscatischen Radii vectores, die von den Durchschnitten der Hyperbel mit irgend einer Axe durch den Nullpunkt ausgehen, für ihre Endpunkte $p.p_1-q.q_1=l$ ist. Sie lassen sich unter stetiger Gestaltveränderung auf dem Wege zur Deckung bringen, welcher der parallelen Verschiebung und schliesslichen Drehung einer Geraden entspricht, die mit einer andern zur Deckung gebracht werden soll.

In dem Momente, wo der Hyperbelbogen den Nullpunkt passirt degenerirt er in eine oder zwei orthogonale Gerade, während die Lemniscate in dem Momente, wo ihr Brennpunkt den Nullpunkt durchwandert, zum Kreise, wo er hingegen den unendlichen Punkt passirt, zur gleichseitigen Hyperbel wird.

Das Resultat solcher Bewegungen unter dauernder Gestaltveränderung im „lemniscatisch veränderlichen System" ist stets identisch mit einer Abbildung durch eine einfach zu bestimmende Function, die ein specieller Fall der die lemniscatische Verwandtschaft repräsentirenden Function ist. So fremdartig auch diese Bewegungen auf den ersten Blick erscheinen mögen, so kommen sie doch in der Wärmetheorie zur Geltung, sobald es sich nicht um einen stationären Wärmezustand handelt, sondern um eine Bewegung der Isothermen durch fortschreitende und sich ausbreitende Erwärmung. In der Optik tritt eine hierher gehörige Bewegung sogar in die reale Erscheinung. Es handelt sich um das System der Interferenzlemniscaten und des gleichseitigen Hyperbelbüschels, welches durch Polarisation entsteht. Die bei Drehung des Krystalls oder des Nicol'schen Prismas entstehenden Bewegungen sollen noch einmal zur Sprache kommen.*

Das Gegebene reicht hin, die Fundamentalsätze und Constructionen eines gewissen Bereiches der Elementargeometrie richtig, und zwar mit elementaren Hilfsmitteln, zu übertragen. Stets wird man zum Ziele kommen, wenn man die einfachere Construction mit den durch $z=Z^2$ in die z-Ebene transformirten Daten in letzterer durchführt und das Resultat in die Z-Ebene zurücktransformirt. In den meisten Fällen sind jedoch erhebliche Abkürzungen möglich. Einige Beispiele von Aufgaben, deren Lösung auf der Hand liegt, werden genügen:

a) Theilung eines gegebenen Hyperbelbogens in zwei oder mehr correspondirende Theile und Verlängerung desselben um correspondirende Theile;

b) Errichtung der Orthogonalhyperbel im gegebenen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel und Fällen derselben von einem ausserhalb liegenden Punkte auf dieselbe;

c) Halbirung des von zwei sich schneidenden gleichseitigen Hyperbeln gebildeten Winkels durch eine dritte u. s. w.

Correspondirende Hyperbeldreiecke sind solche, die congruenten Dreiecken der z-Ebene entsprechen und sich auf dem besprochenen Wege zur Deckung bringen lassen. Liegen sie nicht gleichstimmig, so ist das eine Dreieck vorher um die reelle oder imaginäre Axe zu klap-

* Durch ein einfaches Experiment kann man sich einen vorläufigen Begriff von solchen Bewegungen im gesetzmässig-veränderlichen System machen. Man stelle einen geraden Kreiskegel mit spiegelndem Mantel auf eine mit zwei orthogonalen Parallelschaaren bedeckte Papierfläche und bringe das Auge senkrecht über die Spitze des Kegels. Bewegt man dann die Zeichnung in beliebigem Sinne unter dem Kegel fort, so bewegen sich die Spiegelbilder der Parallelschaar, zwei sich schneidende Curvensysteme, unter stetiger Gestaltveränderung. Die Bewegung eines gefärbten Kreises in einem der Parallelstreifen würde im Spiegelbilde die oben besprochene Bewegung der Lemniscate einigermassen veranschaulichen können.

pen. Dass die Winkel solcher Dreiecke gleich sind, folgt aus dem isogonalen Charakter der Verwandtschaft $Z = \sqrt{z}$. An Stelle der Seitengleichheit tritt Folgendes: Bezeichnet man die Durchschnitte der ein Dreieck ABC bildenden gleichseitigen Hyperbeln a, b, c mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt bezüglich mit P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, so sind die „lemniscatischen Entfernungen" der Punkte A, B und C von einander charakterisirt durch die Differenzen folgender lemniscatischen Coordinaten:

$$14)\quad PC \,.\, P_1C - PB \,.\, P_1B, \quad QA \,.\, Q_1A - QC \,.\, Q_1C, \quad RB \,.\, R_1B - RA \,.\, R_1A.$$

Sind diese Relationen für zwei Hyperbeldreiecke identisch, so sind die Dreiecke correspondirende. Die Uebertragung der anderen Congruenzsätze ist ohne Schwierigkeit. — Sind übrigens λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel der lemniscatischen Radii vectores gegen die zu Grunde gelegte Gerade, so stimmen in correspondirenden Dreiecken auch die homologen Differenzen der Winkelsummen

$$15)\quad (\nu + \nu_1) - (\lambda + \lambda_1), \quad (\lambda + \lambda_1) - (\mu + \mu_1), \quad (\mu + \mu_1) - (\nu + \nu_1)$$

überein.

Sind die Ausdrücke 14) für zwei Hyperbeldreiecke proportional, so stimmen die Dreiecke gleichfalls in den Differenzen 15) überein. Sie sind „lemniscatisch ähnlich". In leicht zu ermittelnden Specialfällen der Lage kann die lemniscatische Aehnlicheit in die gewöhnliche Aehnlichkeit übergehen.

In ähnlicher Weise findet die gesammte Geometrie der Lage ihre Uebertragung, während die Geometrie des Masses nur in speciellen Fällen der Uebersetzung fähig ist.

Aus den wesentlichsten Eigenschaften der Potenzlinien z. B. schliesst man auf die analogen der Potenzhyperbeln. Die Sätze von den Aehnlichkeitspunkten, von Pol und Polare, der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz (zunächst für den Kreis) sind leicht zu übersetzen. Offenbar ist auch das Tactionsproblem, eine Lemnicate zu construiren, die drei gegebene Lemniscaten desselben Centrums berührt, mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar.

Sind ferner P, Q und R, S zugeordnete harmonische Punkte in der z-Ebene, und p, q, r, s ihre Entfernungen vom Durchschnitt der Geraden mit einer durch den Nullpunkt gelegten Axe, so ist das Doppelverhältniss

$$\frac{r-p}{r-q} \cdot \frac{s-q}{s-p} = -1.$$

Durch Transformation $Z = \sqrt{z}$ gehen die vier Punkte in vier an einer gleichseitigen Hyperbel liegende Punktpaare über, die man „lemniscatisch-harmonische" nennen kann. Die lemniscatischen Radii vectore jeder der beiden Punktgruppen, bezogen auf die Durchschnitte der Hyp bel mit der durch den Nullpunkt gelegten Axe, genügen demnach der Relation

$$16)\qquad \frac{r.r_1 - p.p_1}{r.r_1 - q.q_1}.\frac{s.s_1 - q.q_1}{s.s_1 - p.p_1} = -1.$$

Die Relation für die Winkel harmonischer Strahlen a, b, c, d,

$$17)\qquad \frac{\sin(ac)\sin(bd)}{\sin(bc)\sin(ad)} = -1,$$

bleibt für die von den entsprechenden Hyperbeln gebildeten Winkel unverändert bestehen. Für die lemniscatischen Radii vectores, bezogen auf die Verbindungslinie des Punktpaares, von dem die Hyperbeln ausstrahlen, verwandelt sie sich bei entsprechender Bezeichnung in folgende:

$$18)\qquad \frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\,.\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\,.\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha+\alpha_1)]} = -1.$$

Die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen sind nun ohne Weiteres auf die lemniscatisch-harmonischen Punktpaare auf gleichseitiger Hyperbel und auf lemniscatisch-harmonische Hyperbeln durch ein Punktpaar zu übertragen.

Jetzt ist es leicht, die Fundamentaleigenschaften projectivischer Gebilde in die lemniscatische Geometrie einzuführen. Wir werden der Kürze halber dabei im Allgemeinen nur von Punktquaternionen in einer Halbebene sprechen. Für die paarweise zugeordneten Punkte gilt dann dasselbe.

Schneidet man vier von einem Punktpaare ausstrahlende gleichseitige Hyperbeln durch beliebige gleichseitige Hyperbeln desselben Centrums, so ist für die lemniscatischen Coordinaten der Schnittpunkte, bezogen auf die Durchschnitte der schneidenden Hyperbeln mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt, das lemniscatische Doppelverhältniss stets constant, also:

$$19)\qquad \begin{aligned} &\frac{r.r_1 - p.p_1}{r.r_1 - q.q_1}.\frac{s.s_1 - q.q_1}{s.s_1 - p.p_1} = \frac{\sin(ac)\sin(bd)}{\sin(bc)\sin(ad)} \\ &= \frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha-\alpha_1)]} = const. \end{aligned}$$

Ferner:

Zieht man durch vier auf gleichseitiger Hyperbel liegende Punktpaare beliebige Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums, so ist stets das lemniscatische Doppelverhältniss constant, also

$$20)\qquad \begin{aligned} &\frac{\sin(ac)\sin(bd)}{\sin(bc)\sin(ad)} = \frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\,\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha+\alpha_1)]} \\ &= \frac{r.r_1 - p.p_1}{r.r_1 - q.q_1}.\frac{s.s_1 - q.q_1}{s.s_1 - p.p_1} = const. \end{aligned}$$

Das Princip der Dualität bleibt in voller Allgemeinheit bestehen. So entsprechen sich z. B. folgende Sätze:

a) Die Durchschnitte entsprechender Elemente zweier lemniscatisch-projectivischen Büschel gleichseitiger Hyperbeln desselben Centrums liegen auf einer Curve vierten Grades mit zwei Brennpunktpaaren, deren Gleichung in lemniscatischen Coordinaten sich auf eine der folgenden Formen reduciren lässt:

$$21)\left\{\begin{array}{l} p.p_1+q.q_1=c, \text{ der Ellipse entsprechend;} \\ p.p_1-q.q_1=c, \text{ der Hyperbel entsprechend;} \\ p.p_1 \cos^2\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}=\frac{p}{4}, \text{ der Parabel entsprechend (Polargleichung für Brennpunkt).} \end{array}\right.$$

b) Die Verbindungshyperbeln entsprechender Elemente zweier lemniscatisch-projectivischer Punktreihen auf gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums haben eine der sub 21) genannten Curven vierten Grades zur Enveloppe.

In Betreff der Parabel sei bemerkt, dass, wenn der Brennpunkt im Nullpunkte liegt, die Gleichung der transformirten Curve wird

$$r\cos\vartheta=\sqrt{\frac{p}{4}},$$

woraus folgt, dass sämmtliche Parabeln, die den Nullpunkt zum Centrum haben, durch die Abbildung $Z=\sqrt{z}$ in Gerade übergehen, so dass man aus Sätzen über Parabel und Gerade entsprechende über Gerade und gleichseitige Hyperbel ableiten kann.

Dass von den Curven 21) der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz etc. Geltung haben, nur dass man statt „Gerade" zu setzen hat „gleichseitige Hyperbel", ist selbstverständlich.

Als besonders interessant seien erwähnt die Uebertragungen der Siebeck'schen Curvenschaaren,* die mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.

Die Analoga der Methode der reciproken Radii vectores und der Kreisverwandtschaft, bei welcher die Doppelverhältnisse in noch allgemeinerer Gestalt auftreten, sollen im folgenden Paragraphen besonders behandelt werden.

§ 5. Lemniscatische Reciprocität und lemniscatische Verwandtscha[ft]

Angenommen, zwei Ebenen stehen in der Beziehung, dass jedem Punktpaare der einen ein und nur ein Punktpaar der andern entspricht,

* Siebeck: „Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades etc.", Crelle's Journal Bd. 57 und 59.

und dass je vier Punktpaaren der ersteren, die auf einer der Lemniscaten desselben Centrums liegen, jedesmal vier Punktpaare der andern entsprechen, die gleichfalls auf einer solchen Lemniscate liegen, kurz, dass unter allen Lemniscaten eines gemeinschaftlichen Centrums der einen Ebene jedes Individuum einem solchen unter den Lemniscaten desselben Centrums in der andern Ebene entspricht, dann steht jedes Gebilde der einen Ebene zu dem entsprechenden der andern in einer bestimmten geometrischen Beziehung, die man als lemniscatische Verwandtschaft bezeichnen kann.

Die Realität ihrer Existenz und ihr isogonaler Charakter gehen schon daraus hervor, dass kreisverwandte Gebilde der z-Ebene durch die Abbildung $Z=\sqrt{z}$ in lemniscatisch verwandte übergehen. Der Bereich dieser Verwandtschaft ist ferner ein scharf begrenzter, da die Abbildung $z=Z^2$ lemniscatisch verwandte Systeme in kreisverwandte überführt, sobald der Nullpunkt der Transformation mit dem gemeinschaftlichen Centrum jedes Systems zusammenfällt. Jedoch dürfte auch der rein geometrische Nachweis, der dem von Möbius für die Kreisverwandtschaft gegebenen entsprechen würde, ohne Schwierigkeit durchführbar sein. Hier soll dieser Weg nicht eingeschlagen werden, da schon das Studium der Möbius'schen Abhandlung dem Anfänger einige Schwierigkeiten bereitet, die hier in erhöhtem Masse eintreten würden. Directer führt Folgendes zum Ziele:

Die Eigenschaften der Kreisverwandtschaft werden besonders übersichtlich durch den Umstand, dass sich dieselbe im Wesentlichen auf die Transformation durch reciproke Radii vectores zurückführen lässt. Man hat nur vom Massstabe der Zeichnung, von der speciellen Lage des abbildenden Centrums (des Nullpunktes) und von einer Drehung des Systems (Richtung der reellen Axe) abzusehen. Alle diese Nebenumstände beeinflussen den geometrischen Charakter der Gebilde nicht und erledigen sich durch Congruenz oder Aehnlichkeit. Analytisch gesprochen: Die Abbildung $Z=\frac{az+b}{cz+d}$ lässt sich durch lineare Substitutionen auf $Z=\frac{1}{z}$ reduciren.

Ganz analog lässt sich die lemniscatische Verwandtschaft zurückhren auf eine Operation, die bei der Abbildung $Z=\sqrt{z}$ der Transrmation durch reciproke Radii vectores entsprechen würde, die man emnach als lemniscatische Reciprocität oder als isothermische piegelung gegen die Lemniscate bezeichnen dürfte. Letzterer ame empfiehlt sich deshalb, weil jede isothermische Spiegelung durch ransformation vermittelst einer bestimmten Function complexen Arguents in die wirkliche Spiegelung gegen eine Gerade verwandelt werden kann, woraus gleichzeitig folgt, dass alle diese Spiegelungen involutorisch sind.

Wiederum müsste bei der Reduction der lemniscatischen Verwandtschaft auf die lemniscatische Reciprocität von den genannten Nebenumständen zu abstrahiren sein.

Da die Lemniscate im speciellen Falle zum Kreise, resp. zur gleichseitigen Hyperbel wird, so ist die Methode der reciproken Radii vectores und ebenso die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel, die ich in der bereits citirten Abhandlung als „Uebertragung von Hyperbel auf Complementarhyperbel" bezeichnete, als specieller Fall in der jetzt zu behandelnden Spiegelungsmethode enthalten. Dort geschah die Uebertragung durch confocale Ellipsen. Man wird jetzt sehen, dass sie auch durch orthogonale Hyperbeln und Lemniscaten vermittelt werden kann, ebenso, wie jedes Spiegelbild gegen die Gerade nicht nur durch Lothe, sondern überhaupt durch orthogonale Curvenschaaren erzeugt werden kann, die symmetrisch gegen die Gerade sind.

Die Spiegelung gegen die Lemniscate ist also eine Operation von bemerkenswerther Allgemeinheit.

Um ihren Charakter zu skizziren, sind in Folgendem die entsprechenden Eigenschaften der Kreis- und der lemniscatischen Reciprocität tabellarisch zusammengestellt. Der Radius des spiegelnden Kreises sei $r=1$, die Entfernung seines Centrums vom Nullpunkte der Transformation $Z=\sqrt{z}$ sei e. Entsprechend sei der Parameter der spiegelnden Lemniscate $p.p_1=1$, die Entfernung der Brennpunkte vom Nullpunkte der Z-Ebene sei $\sqrt{e}$. Da e ganz beliebig sein kann, so ist durch diese Bestimmungen die Allgemeinheit nicht beschränkt, die ganze Mannichfaltigkeit der Lemniscaten kommt zur vollen Geltung.

Reciproke Radii vectores.	**Lemniscatische Reciprocität.**
1. Jeder concentrische Kreis mit Radius $r=c$ geht über in einen concentrischen mit Radius $r=\frac{1}{c}$.	1. Jede confocale Lemniscate $p.p_1=c$ geht über in eine confocale $p.p_1=\frac{1}{c}$.
2. Jeder Radius der concentrischen Kreisschaar erzeugt sich selbst wieder.	2. Jede gleichseitige Orthogonalhyperbel der Confocalschaar erzeugt sich selbst wieder.
3. Der äussere und innere Raum des Kreises werden eindeutig aufeinander abgebildet. Der Nullpunkt und der unendliche Punkt entsprechen einander. — Die Abbildung	3. Streng genommen ist die Abbildung eine zweideutige. So entspricht der unendliche Punkt den beiden Brennpunkten, die imaginäre Axe und die Verbindungslinie der

wird mit elementaren Hilfsmitteln bewerkstelligt.

4. Ein Kreis mit Radius $r = c$, in Bezug auf den die Potenz des abbildenden Centrums t^2 ist, geht über in einen Kreis mit Radius $r = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf den die Potenz des abbildenden Centrums $\frac{1}{t^2}$ ist.

Die Mittelpunkte beider Kreise entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist der eine vom abbildenden Centrum um a entfernt, so hat der andere die Entfernung $\frac{a}{t^2}$. Beide liegen auf einer durch das Abbildungscentrum gehenden Geraden.

Brennpunkte führen gleichfalls auf Zweideutigkeit, die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel ist durchaus zweideutig. Beschränkt man jedoch die Betrachtung auf die Halbebene rechts von der imaginären Axe, so kann man die Zweideutigkeit vermeiden. Nur muss die Strecke von 0 bis $\sqrt{e}$ aufgeschnitten gedacht werden. — Die Abbildung wird elementar bewerkstelligt.

4. Eine Lemniscate mit beliebigem Brennpunktpaare und dem Parameter $q \,.\, q_1 = c$, in Bezug auf welche die lemniscatische Potenz* der abbildenden Brennpunkte $p^2 \,.\, p_1^2 = t^2$ ist, geht über in eine Lemniscate mit dem Parameter $q \,.\, q_1 = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf welche die lemniscatische Potenz der abbildenden Brennpunkte $p^2 \,.\, p_1^2 = \frac{1}{t^2}$ ist.

Die Brennpunkte beider Lemniscaten entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist für das eine Paar die lemniscatische Entfernung vom abbildenden Brennpunktpaare $p \,.\, p_1 = a$, so ist für das andere Paar $p \,.\, p_1 = \frac{a}{t^2}$. Beide Paare liegen auf der durch das abbildende Brennpunktpaar gehenden gleichseitigen Hyperbel.

* Der Begriff der lemniscatischen Potenz ist leicht, nur etwas umständlich [au]szudrücken:

Liegt ein Punktpaar ausserhalb der Lemniscate, so lege man durch das [Pu]nktpaar eine tangirende Hyperbel. Ist der Parameter des Berührungspunktes [in] Bezug auf das Punktpaar $p \,.\, p_1 = t$, so ist t^2 die lemniscatische Potenz des Punkt[p]aares in Bezug auf die Lemniscate. Liegt hingegen das Punktpaar innerhalb, so [le]ge man eine gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar und die Brennpunkte [un]d errichte auf dieser im Punktpaare die Orthogonalhyperbel. Jetzt ist das Qua[dra]t vom Parameter des Schnittpunktes (gegen das Punktpaar) als Potenz zu be[tra]chten.

5. Schliesst der abzubildende Kreis das Abbildungscentrum aus, so ist letzteres äusserer Aehnlichkeitspunkt der beiden sich entsprechenden Kreise; schliesst er es ein, so ist es innerer Aehnlichkeitspunkt. Alle drei Kreise haben gemeinschaftliche Potenzlinie.

5. Schliesst die Lemniscate das abbildende Brennpunktpaar aus, so schneiden sich in letzterem die gemeinschaftlichen äusseren Berührungshyperbeln der sich entsprechenden Lemniscaten. Schliesst sie es ein, so ist das Brennpunktpaar Durchschnitt einer leicht zu definirenden Hyperbel mit der durch beide Brennpunktpaare gehenden gleichseitigen Hyperbel. Alle drei Lemniscaten haben eine gemeinschaftliche Potenzhyperbel.

6. Einfacher ist Alles auszudrücken, wenn der abzubildende Kreis den abbildenden unter einem Winkel α schneidet. Der reciproke schneidet dann in denselben Punkten unter dem Winkel $-\alpha$. Orthogonalkreise des abbildenden gehen also in sich selbst über. Zwei beliebige Punkte und ihre Abbildungen liegen stets auf einem Orthogonalkreise des abbildenden Kreises.

6. Einfacher wird der Ausdruck, wenn die abzubildende Lemniscate die abbildende unter dem Winkel α schneidet. Die reciproke schneidet dann in denselben Punkten unter dem Winkel $-\alpha$. Orthogonallemniscaten der abbildenden gehen also in sich selbst über. Zwei beliebige Punktpaare und ihre Abbildungen liegen stets auf einer Orthogonallemniscate der abbildenden Lemniscate.

7. Jede Gerade in Entfernung c vom Transformationscentrum geht über in einen durch letzteres gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Normale der Geraden in Entfernung $\frac{1}{2c}$ vom Centrum liegt.

7. Jede gleichseitige Hyperbel in der lemniscatischen Entfernung $p.p_1 = c$ vom abbildenden Centrum (welche also die confocale Lemniscate $p.p_1 = c$ berührt) geht über in eine durch das abbildende Brennpunktpaar gehende Lemniscate, deren Brennpunkte von letzterem die lemniscatische Entfernung $p.p_1 = \frac{1}{2c}$ haben und auf der Orthogonalhyperbel liegen, die vom abbildenden Centrum auf die erstgenannte Hyperbel zu fällen ist.

Umgekehrt verwandeln sich Kreise durch das Centrum in entsprechende Gerade.

Umgekehrt verwandeln sich Lemniscaten durch das Centrum in entsprechende gleichseitige Hyperbeln

8. Das Kreisbüschel durch die Punkte r, φ und r_1, φ_1 verwandelt sich in das Kreisbüschel durch $\frac{1}{r}$, φ und $\frac{1}{r_1}$, φ_1. Die Orthogonalschaar des ersteren geht in die des letztern über. Jede isogonale Trajectorienschaar des erstern (logarithmische Doppelspiralen) wird in die entsprechende des letztern verwandelt.

9. Die Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $r = 1$ um den Punkt $a + bi$ ist, abgesehen vom Umklappen um die reelle Axe, identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{1}{z - (a + bi)}.$$

Die Spiegelung gegen den Kreis mit Radius $r = c$ um $a + bi$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{c^2}{z - (a + bi)}.$$

10. Die Spiegelung gegen die verticale Gerade $x = a$ ist im Wesentlichen identisch mit der Transformation

$$Z = 2a - z.$$

8. Das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare

$$[p \cdot p_1 = r,\ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi]$$

und

$$[p \cdot p_1 = r_1,\ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi_1]$$

verwandelt sich in das Lemniscatenbüschel durch

$$\left[p \cdot p_1 = \frac{1}{r},\ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi\right]$$

und

$$\left[p \cdot p_1 = \frac{1}{r_1},\ \vartheta + \vartheta_1 = \varphi_1\right];$$

die orthogonale Lemniscatenschaar des erstern in die des letztern. Jede isogonale Trajectorienschaar des erstern (allgemeine lemniscatische Spiralenschaar) geht in die entsprechende des letztern über.

9. Die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate $p \cdot p_1 = 1$ um das Punktpaar $\sqrt{a + bi}$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{1}{z^2 - (a + bi)}}$$

(für die Schleifenlemniscate um ± 1 also $Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}$).

Die Spiegelung gegen die Lemniscate $p \cdot p_1 = c$ um $\sqrt{a + bi}$ reducirt sich auf die Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{c^2}{z^2 - (a + bi)}}.$$

10. Die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar $\sqrt{a}$ mit den Brennpunkten $\sqrt{2a}$ wird repräsentirt durch die Function

$$Z = \sqrt{2a - z^2}.$$

Sind z. B. die Brennpunkte ± 1, so ist die abbildende Function

Bei dieser Spiegelung bleibt der Radius des gespiegelten Kreises ungeändert. Geometrisch kann die Operation durchgeführt werden durch Lothe, die um sich selbst verlängert werden. — Gerade gehen in Gerade über.

11. Ist der abbildende Kreis mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt geschlagen, so ist die abbildende Function

$$Z = \frac{c^2}{z}.$$

12. Transformirt man ein Kreisbüschel durch reciproke Radii vectores mittelst beliebigen Kreises, der einen der Büschelpunkte zum Centrum hat, so geht das Kreisbüschel in eine Radienschaar, die Kreisschaar in ein System concentrischer Kreise über. Die logarithmischen Doppelspiralen, welche die isogonalen Trajectorien des Büschels sind, gehen in logarithmische Spiralen über.

13. Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei sich nicht schneidenden Kreisen in einen concentrischen

$$Z = \sqrt{1 - z^2}.$$

Bei dieser Spiegelung bleibt der Parameter $p \cdot p_1$ ungeändert. Der Brennpunkt λ geht in $\sqrt{1 - \lambda^2}$ über. Die Spiegelung kann vollführt werden durch Orthogonalhyperbeln, die um correspondirende Bogen verlängert werden.* Gleichseitige Hyperbeln gehen wieder in solche über.

11. Ist die Lemniscate im speciellen Falle ein Kreis um den Nullpunkt, so bleiben die allgemeinen Gesetze bestehen. Transformation durch reciproke Radii vectores vom Nullpunkte aus verwandelt also Lemniscatenschaaren wiederum in solche, so dass z. B. Fig. 3 durch diese Operation in Fig. 4 übergeht.

12. Wird ein durch zwei Punktpaare gehendes Lemniscatenbüschel durch eine Lemniscate, deren Brennpunkte mit einem Büschelpunktpaare zusammenfallen, isothermisch gespiegelt, so entsteht ein Hyperbelbüschel. Die Orthogonalschaar geht in eine Schaar confocaler Lemniscaten über. Die entsprechende Curvenschaar 12) verwandelt sich in eine von der Form 13).

13. Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei beliebigen, sich nicht schneidenden Lemniscaten in einen

* Da die Spiegelung auch durch confocale Ellipsen vermittelt werden kann, so ergiebt sich mancher interessante Zusammenhang. Schlägt man z. B. mit der Halbaxe einer einfachen Lemniscate einen Kreis um den Scheitel der confocalen Schleifenlemniscate, so trifft man die imaginäre Axe im Schnittpunkte derselben mit der ersten Lemniscate. Das Verhalten ist also ähnlich dem der Ellipsenhalbaxen. So ergeben sich manche Constructionserleichterungen, z. B. zur Herstellung des Netzes in Fig. 3, resp. 4, wo stets je acht Punkte auf einer der confocalen Ellipsen liegen. Auch für die Construction des Netzes der *sin am*-, *cos am*-, *Δ am*-Curven (*mod* $\varkappa$ positiv, reell und < 1) ist dies zu verwerthen.

Kreisring zu verwandeln, hat also folgende geometrische Lösung: Man construire die Potenzlinie beider Kreise, schlage um einen beliebigen Punkt derselben einen Orthogonalkreis und nehme einen der Durchschnitte desselben mit der Centrale der gegebenen Kreise zum Centrum der Transformation durch reciproke Radii vectores. Der Radius des spiegelnden Kreises ist beliebig. Von der Wahl des Büschelpunktes hängt es ab, welcher Kreis der innere wird.

14. Diese Transformation und überhaupt jede Kreisverwandtschaft lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z=\frac{az+b}{cz+d}.$$

confocalen Lemniscatenring zu verwandeln, hat also folgende Lösung: Man construire die Potenzhyperbel beider Lemniscaten, lege um ein beliebiges Punktpaar derselben eine orthogonale Lemniscate und mache ein Durchschnitts-Punktpaar derselben mit der Centralhyperbel zu Brennpunkten der spiegelnden Lemniscate, deren Parameter beliebig ist. Von der Wahl des Durchschnitts-Punktpaares hängt es ab, welche Lemniscate die innere wird.

14. Diese Transformation und überhaupt jede lemniscatische Verwandtschaft lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z=\sqrt{\frac{az^2+b}{cz^2+d}},$$

der noch eine additive Constante hinzugefügt werden kann.

Für das Spätere sei noch bemerkt, dass die Drehung einer Geraden um einen beliebigen Punkt ein Resultat giebt, welches der Transformation $Z=a+(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z-a)$ entspricht. Folglich wird die in der Optik auftretende Drehung der Polarisationshyperbeln um das Brennpunktpaar $\sqrt{e}$ in ihrem Resultate dargestellt durch die Abbildung

$$Z=\sqrt{e+(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z^2-e)}.$$

Das Resultat entspricht also stets der Spiegelung gegen eine der gleichseitigen Hyperbeln durch einen Punkt.

Ferner ist noch von Interesse die Frage, auf welchen Curven bei der isothermischen Spiegelung gegen die Lemniscate das Vergrösserungsverhältniss constant ist, d. h. für welche Punkte der absolute Betrag des Differentialquotienten constant ist. Zwei Specialfälle geben ein einfaches Resultat.

15. Die Function $Z=\sqrt{1-z^2}$ vermittelt die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1. Da der Differentialquotient

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

für reelle Werthe des Arguments, die kleiner als die Einheit sind, reell ist, so folgt aus

$$X+Yi=-\frac{x+yi}{\sqrt{1-(x+yi)^2}}$$

die Gleichung

$$X-Yi=-\frac{x-yi}{\sqrt{1-(x-yi)^2}},$$

also entsteht durch Multiplication und Radicirung der absolute Betrag

$$R=\frac{r}{\sqrt[4]{(1+x+yi)(1+x-yi)(1-x+yi)(1-x-yi)}}=\frac{r}{\sqrt{p\cdot p_1}},$$

wenn p und p_1 die von ± 1 ausgehenden Radii vectores sind.*

Setzt man diesen absoluten Betrag, also auch das Vergrösserungsverhältniss $R=c$, so ergiebt sich Folgendes:

Bei der isothermischen Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 ist das Vergrösserungsverhältniss constant gleich c für die Punkte der Curve

$$22)\qquad \frac{r^2}{p\cdot p_1}=c^2,$$

d. h. für die Individua der Orthogonalschaar des durch 0 und ± 1 gehenden Büschels von Schleifenlemniscaten.

[Vergl. Fig. 4 und Gleichung 11)].

Nun verwandelt sich aber bei der Abbildung $Z=\sqrt{1-z^2}$ der Parameter $p\cdot p_1$, von ± 1 aus gerechnet, in das Quadrat des vom Nullpunkte ausgehenden Radius r, und umgekehrt r^2 in $p\cdot p_1$. (Vergl. Beiträge zur Theorie etc. S. 235.) Folglich: Die durch Gleichung 22) dargestellte Curve geht über in die Lemniscate

$$23)\qquad \frac{r^2}{p\cdot p_1}=\frac{1}{c^2}.$$

Die Curve 22) und ihr Spiegelbild 23) gegen die gleichseitige Hyperbel haben also folgende Beziehungen:

1. Ihre Parameter (in Bezug auf Radii vectores von 0 und ± 1 aus) sind reciprok.
2. Ist der Brennpunkt der einen $\pm\lambda$, so ist der der andern $\pm\sqrt{1-\lambda^2}$; liegt also das eine Paar auf der imaginären Axe, so liegt das andere auf der reellen, und zwar ausserhalb ± 1.

---

* Multiplication von $(1+x+yi)$ und $(1+x-yi)$ giebt das Quadrat des absoluten Betrages jeder dieser conjugirten Zahlen, d. h. den Radius vector p im Quadrat. Der Richtungssinn des Radius vector wird durch diese Multiplication gewissermassen eliminirt.

3. Ist die Brennpunktsgleichung der einen Lemniscate $p \cdot p_1 = \varkappa$, so lautet die der andern genau ebenso; nur sind die neuen Brennpunkte zu Grunde zu legen.
4. Hat die eine den Umfang u, so ist der Umfang der andern $c \cdot u$.
5. Ist die eine in gleiche Bogen getheilt, so wird, wenn man durch die Theilpunkte Orthogonalhyperbeln zur spiegelnden Hyperbel oder Lemniscaten durch 0 und ± 1 legt, auch die andere in gleiche Bogen getheilt.

Hier ist also die Analogie mit der Transformation durch reciproke Radii vectores eine sehr weitgehende. Der Umstand, dass man von der Theilung einer einfachen Lemniscate zu der einer aus zwei Ovalen bestehenden übergehen kann, dürfte für das Gebiet der Curventheilung von Interesse sein.

Aehnliches geschieht bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate. Sind ihre Brennpunkte ± 1, also auch der Parameter gleich 1, so wird diese Transformation vermittelt durch

$$Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}.$$

Hier ist

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{(z^2-1)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2-1}}} = \frac{-1}{(z^2-1)^{3/2}}.$$

Multiplicirt man hier die Gleichungen conjugirten Arguments, so ergiebt sich als absoluter Betrag

$$R = \frac{1}{[(x+yi+1)(x-yi+1)(x+yi-1)(x-yi-1)]^{3/4}} = \left(\frac{1}{p \cdot p_1}\right)^{3/2},$$

wobei die Radii vectores wiederum von ± 1 ausgehen. Setzt man $R = c$, so folgt:

Bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate sind die confocalen Lemniscaten die Curven constanten Vergrösserungsverhältnisses, und zwar ist dasselbe constant gleich c für die Lemniscate

24) $$p \cdot p_1 = c^{-2/3}.$$

Diese geht aber durch die Transformation über in die confocale Lemniscate

25) $$p \cdot p_1 = c^{2/3}.$$

Setzt man $c^{-2/3} = \varkappa$, also $c^{2/3} = \frac{1}{\varkappa}$ und $c = \varkappa^{-3/2}$, so ergiebt sich der Satz:

Haben zwei confocale Lemniscaten mit Brennpunkten ± 1 die reciproken Parameter $\varkappa$ und $\frac{1}{\varkappa}$, so ist der Umfang des zweiten das $\varkappa^{-3/2}$-fache vom Umfang des erstern.

Sind z. B. die Parameter 2 und $\frac{1}{2}$, so verhalten sich die Umfänge wie $1:\frac{1}{\sqrt{8}}$. Ist die eine Curve in gleiche Theile getheilt, so wird die zweite durch die Orthogonalhyperbeln, die durch die Theilpunkte gelegt werden, ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

Bei der Spiegelung gegen die Lemniscate allgemeiner Gestalt scheint diese Analogie mit der Kreisreciprocität aufzuhören. Sind z. B. die Brennpunkte $\sqrt{e}$ und der Parameter die Einheit, so ergiebt sich auf demselben Wege, dass die Curven constanten Vergrösserungsverhältnisses c die Gleichung

26) $$\frac{r^2}{p^3 . p_1^3 . q . q_1} = e . c^2$$

haben, wo die Radii vectores p, p_1 von ± 1, q, q_1 von $\pm\sqrt{1+\frac{1}{e}}$, und r von 0 ausgehen.

Jetzt ist es leicht, die allgemeinen Eigenschaften der lemniscatischen Verwandtschaft nach Analogie der Möbius'schen Abhandlung über die Kreisverwandtschaft auszusprechen. Wir beschränken uns darauf, die wichtigsten Sätze über Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, die Möbius für Punktquaternionen in kreisverwandten Ebenen aufgestellt hat, zu übertragen. Um Zweideutigkeiten auszuweichen, nehmen wir stets an, dass die Punktquaternionen sich in einer Halbebene befinden; dann gilt jeder Satz gleichzeitig für die vier zugeordneten Punkte.

Sind A, B, C, D und a, b, c, d entsprechende Punkte kreisverwandter Ebenen, so ist

$$\frac{AB . CD}{BC . DA} = \frac{ab . cd}{bc . da},$$

also, wenn man die Durchschnitte der Geraden AB, BC, CD und DA mit einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden P, Q, R, S nennt und in der andern Ebene die entsprechenden Buchstaben wählt:

$$\frac{(PB - PA)(RD - RC)}{(QC - QB)(SA - SD)} = \frac{(pb - pa)(rd - rc)}{(qc - qb)(sa - sd)}.$$

Durch die Transformation $Z = \sqrt{z}$ geht der Satz in folgenden über:

Sind A, B, C, D und a, b, c, d entsprechende Punkte lemniscatisch verwandter Halbebenen, und bezeichnet man die Durchschnitte der durch A und B, B und C, C und D, D und A gehenden gleichseitigen Hyperbeln mit einer durch den Nullpunkt gelegten Geraden mit P, P_1, Q, Q_1, R, R_1, S, S_1, während man in der andern Ebene die entsprechenden kleinen Buchstaben wählt, so gilt der Satz:

$$27)\quad \frac{(PB.P_1B-PA.P_1A).(RD.R_1D-RC.R_1C)}{(QC.Q_1C-QB.Q_1B).(SA.S_1A-SD.S_1D)} = \frac{(pb.p_1b-pa.p_1a).(rd.r_1d-rc.r_1c)}{(qc.q_1c-qb.q_1b).(sa.s_1a-sd.s_1d)},$$

d. h. die „lemniscatischen Doppelverhältnisse" sind gleich.

Liegen im speciellen Falle die vier Punktpaare der einen Ebene auf einer Lemniscate (mit Nullpunkt als Centrum), so liegen auch die entsprechenden der andern auf einer Lemniscate, und für beide Quaternionenpaare besteht die der Ptolemäischen entsprechende Relation

$$28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(PB.P_1B-PA.P_1A)(RD.R_1D-RC.R_1C)+(QC.Q_1C-QB.Q_1B)(SA.S_1A-SD.S_1D)}{(VC.V_1C-VA.V_1A)(WD.W_1D-WB.W_1B)} \\ &= \frac{(pb.p_1b-pa.p_1a)(rd.r_1d-rc.r_1c)+(qc.q_1c-qb.q_1b)(sa.s_1a-sd.s_1d)}{(vc.v_1c-va.v_1a)(wd.w_1d-wb.w_1b)} \\ &= 1, \end{aligned}\right.$$

wo V, V_1, W, W_1 etc. die Durchschnitte der Diagonalhyperbeln mit der Axe bedeuten.

Sind A, B und C feste Punkte und X ein variabler Punkt, der jedoch so wandert, dass stets die Bedingung

$$\frac{AB.XC}{BC.AX}=1$$

erfüllt bleibt, so ist der geometrische Ort für X ein Kreis durch B, dessen durch A und C gehender Durchmesser harmonisch getheilt wird. Folglich:

Sind A, B und C fest und genügt X stets der Bedingung, dass

$$29)\quad \frac{(PB.P_1B-PA.P_1A).(YC.Y_1C-YX.Y_1X)}{(QC.Q_1C-QB.Q_1B).(ZX.Z_1X-ZA.Z_1A)}=1$$

ist (wo P, Q, Y, Z die Durchschnitte der entsprechenden Hyperbeln mit der durch den Nullpunkt gelegten Axe sind), so ist der geometrische Ort von X eine Lemniscate.

Man erkennt Folgendes:

Soll zu einem System von Punktpaaren einer Ebene ein lemniscatisch verwandtes System in einer andern Ebene construirt werden, so kann man in der zweiten Ebene die **drei** Punktpaaren entsprechenden Paare willkürlich wählen und den Drehungssinn für die Winkel willkürlich bestimmen. Dann aber ist die Verwandtschaft vollständig bestimmt und die weiteren Uebertragungen sind mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar.

Die entsprechenden Sätze für die „Doppelwinkel" sind ebenso zu übersetzen. $ABCD$ und $abcd$ seien entsprechende Punktquaternionen kreisverwandter Ebenen. Dann ist nach Möbius

$$30)\quad \angle ABC+CDA=abc+cda \text{ und } \angle BCD+DAB=bcd+dab.$$

Bei der Transformation $Z = \sqrt{z}$ bleibt wegen des isogonalen Charakters derselben diese Relation für Winkel, unter denen sich die das Viereck bildenden gleichseitigen Hyperbeln schneiden, unverändert bestehen; folglich gilt er auch von den lemniscatischen Winkelsummen, die den entsprechenden Radii vectores zugehören. Also:

Die lemniscatischen Doppelwinkel entsprechender Paare von Punktquaternionen in lemniscatisch verwandten Ebenen sind einander gleich.

Ist für ein Punktquaternionenpaar der lemniscatischen Ebene die Winkelsumme des Hyperbelvierecks

$$31) \qquad \angle ABC + CDA = BCD + DAB = 180^0,$$

so gilt von dem Viereckspaare die der Ptolemäischen entsprechende Relation 28); ist umgekehrt letztere erfüllt, so gilt auch die Relation 31), d. h. das Viereckspaar hat seine Eckpunkte auf einer Lemniscate.

Demnach lässt sich die lemniscatische Verwandtschaft auch dadurch definiren, dass das lemniscatische Doppelverhältniss jedes Punktquaternionenpaares der einen Ebene gleich ist dem lemniscatischen Doppelverhältnisse des entsprechenden Punktquaternionenpaares der andern Ebene, oder dadurch, dass die lemniscatischen Doppelwinkel von Punktquaternionenpaaren der einen Ebene gleich den Doppelwinkeln der entsprechenden in der andern Ebene sind.

Schliesslich sei bemerkt, dass auch der von Möbius und Bretschneider für jedes Viereck bewiesene Satz

$$\frac{\sin(ABC + CDA)}{\sin(BCA + ADB)} = \frac{AC.BD}{BA.CD} \,*$$

in einen leicht auszusprechenden über die lemniscatischen Doppelverhältnisse und Doppelwinkel eines Viereckqaares übergeht.

Um den Algorithmus zu vereinfachen, dürften als abgekürzte Bezeichnungen für das lemniscatische Doppelverhältniss, resp. die lemniscatischen Doppelwinkel, die Symbole

$$[ABCD] \text{ und } \angle[ABCD]$$

ausreichen, die den Möbius'schen Zeichen ganz analog sind.

Das Gegebene reicht hin, die von Möbius über die Kreisverwandtschaft ausgesprochenen allgemeinen Sätze ausnahmslos in solche über die lemniscatische Verwandtschaft zu übertragen.

§ 6. Einige Sätze und Probleme, die der lemniscatischen Verwandtschaft und ihrer Combination mit anderen Verwandtschaften entspringen.

Auch hier ist nur von Lemniscaten und gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums, resp. von den isogonalen Trajectorien der entspre-

* Möbius: „Theorie der Kreisverwandtschaft", S. 552.

chenden Schaaren und Büschel die Rede. Die Entwickelung der Sätze und Probleme, die jetzt ohne Beweis angegeben werden sollen, ergiebt sich leicht aus der Kenntniss der Kreisverwandtschaft, der logarithmischen Abbildung und der behandelten Transformation $Z = \sqrt{z}$. Auf anderen Wegen würden sich dem Beweise, resp. der Ausführung der Probleme grössere Schwierigkeiten entgegenstellen.

1. Lemniscaten, die einem Streifen zwischen gleichseitigen Hyperbeln derselben Parallelschaar (Fig. 2) eingeschrieben sind, haben ihre Brennpunkte auf derjenigen Hyperbel derselben Schaar, welche den Streifen in zwei correspondirende Theile zerlegt. Berühren sich die Individua der eingeschriebenen Reihe gegenseitig, so liegen die Berührungspunkte auf derselben Hyperbel.

   Dasselbe gilt von Lemniscatenreihen in dem Raume zwischen zwei sich schneidenden gleichseitigen Hyperbeln.

2. Die einem Ringe zwischen zwei confocalen Lemniscaten eingeschriebenen Lemniscaten haben ihre Brennpunkte auf einer confocalen Lemniscate. Berühren sie sich gegenseitig, so liegt die Reihe der Berührungspunkte auf einer andern confocalen Lemniscate, die den Ring in zwei correspondirende Theile zerlegt. Schliesst die Reihe nach einem, resp. mehreren Umgängen, was vom Verhältniss der Parameter beider Lemniscaten abhängt, so schliesst sie stets, welchen Anfangspunkt man auch wählen möge. (Die verschiedenen Zeichnungen, die auf diese Weise entstehen, sind lemniscatisch verwandt!)

3. Der Satz von den Berührungspunkten der eingeschriebenen Lemniscatenreihe gilt auch von dem Raume zwischen nicht confocalen Lemniscaten, die sich schneiden, berühren, umschliessen oder auseinander liegen. Dann liegen aber die Brennpunkte auf einer der Curven vierten Grades, die durch die Gleichungen 21) dargestellt sind. Schneiden sich die umhüllenden Lemniscaten nicht, so ist eine Schliessung der Reihe möglich, die Art derselben aber abhängig von den Parametern beider Curven und der lemniscatischen Entfernung ihrer Brennpunkte.

4. In ähnlicher Weise übertragen sich die Schliessungsprobleme, die von Jacobi mit dem Additionstheorem der elliptischen Functionen in Verbindung gebracht sind.* Die Geraden gehen dabe natürlich in tangirende gleichseitige Hyperbeln über.

---

* Jacobi: „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie", Crelle's Journ. Bd. 3; und Durège: „Theorie der elliptischen Functionen", Abschn. 10.

In der Abhandlung über „die logarithmische Abbildung etc.“ entwickelte ich die Eigenschaften der logarithmischen Spirale und der isogonalen Trajectorien der Kreisschaar (d. h. der logarithmischen Doppelspiralen) aus denen der Geraden mit Hilfe der Abbildungen complexen Arguments

$$Z = lg\, z, \text{ resp. } Z = e^z$$

und

$$Z = lg \frac{az+b}{cz+d}, \text{ resp. } Z = \frac{a_1 e^z + b_1}{c_1 e^z + d_1}.$$

In entsprechender Weise verwandelt die Abbildung

32) $$Z = \sqrt{\frac{ae^z+b}{ce^z+d}}$$

Gerade in allgemeine lemniscatische Spiralen, deren Gleichung ist

12) $$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c \cdot \varkappa^{(\varphi+\varphi_1)-(\chi+\chi_1)},$$

während die einfachere Transformation

33) $$Z = \sqrt{e^z}$$

auf die den logarithmischen Spiralen entsprechenden isogonalen Trajectorien der confocalen Lemniscatenschaar, also auf die durch Gleichung 13)

$$p \cdot p_1 = c\varkappa^{\vartheta+\vartheta_1}$$

repräsentirten Curven führt.

Von den Eigenschaften dieser transcendenten Curven seien nur einige genannt:

5. Die Parallschaaren der lemniscatischen Spiralen bilden isothermische Curvenschaaren, deren Individua sich, abgesehen von den Büschelpunkten, gegenseitig nicht schneiden. Um diese Punkte finden unendlich viele Windungen statt. Im Allgemeinen haben zwei bestimmte Individua je zwei Asymptoten.
6. Ihre isogonalen Trajectorien sind Curven desselben Charakters. Mit Hilfe der Orthogonalschaar kann man die Eintheilung der Ebenen in „ähnliche Rechtecke“ erzielen.
7. Die isothermische Spiegelung gegen eine solche Curve, die im speciellen Falle Lemniscate, Kreis, Hyperbel sein kann, verwandelt lemniscatische Spiralen mit denselben Büschelpunkten wiederum in solche. Die abbildende Function für diesen Fall ist nach Analogie eines früheren leicht aufzustellen.
8. Die Berührungspunkte von Lemniscatenreihen, die dem Raume zwischen zwei lemniscatischen Parallelspiralen eingeschrieben sind, liegen auf einer den Streifen correspondirend theilenden Parallelspirale. Haben die Curven die Form 13), so liegen auch die Brennpunkte auf einer Parallelspirale, die jedoch mit der vorigen nicht zusammenfällt.

9. Die gleichseitigen Hyperbeln desselben Centrums, welche eine lemniscatische Spirale in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden, haben eine Curve der Parallelschaar zur Enveloppe. In speciellen Fällen ist die erste Curve mit der Enveloppe identisch. (Man denke z. B. an das Analogon der Selbstevolute.

   Dasselbe gilt von Lemniscaten, die durch das Brennpunktpaar der Curve 13), resp. durch ein Büschelpunktpaar der Curve 12) gehen und dieselbe in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden. Der erste Theil des Satzes ist also der specielle Fall des zweiten, wo der Büschelpunkt im Unendlichen liegt.

Die Sätze über Krümmungskreise der Doppelspiralen, resp. der logarithmischen Spiralen, die in jener Abhandlung ausgesprochen sind, gehen über in solche über Lemniscaten, deren Krümmung mit der der lemniscatischen Spiralen identisch ist. Man könnte dieselben als Krümmungslemniscaten bezeichnen, wobei zu bemerken ist, dass die Krümmungslemniscate einer beliebigen Curve für einen bestimmten Punkt mit der Wahl des Lemniscatencentrums variirt.

Noch einige Bemerkungen über Abbildungsaufgaben, die mit der lemniscatischen Verwandtschaft zusammenhängen, seien gestattet.

Die Aufgabe: den von zwei Lemniscaten eines Büschels und zwei orthogonalen Lemniscaten begrenzten rechtwinkligen Raum auf den Einheitskreis abzubilden, ist synthetisch auf folgendem Wege lösbar: Die Abbildung $Z = z^2$ verwandelt jenen Raum in einen von zwei sich schneidenden Kreisen und zwei Orthogonalkreisen begrenzten (wobei zu bemerken ist, dass der abzubildende Raum und der nach dem Begriffe der Punktpaare ihm coordinirte sich jetzt decken). Durch eine Abbildung von der Form $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ geht dieser neue Raum in ein von Radien begrenztes Stück eines concentrischen Kreisringes über, der durch die Transformation $Z = lg\,z$ in ein Rechteck verwandelt wird, dessen Centrum (durch Hinzufügung einer additiven Constante) in den Nullpunkt zu verlegen ist. Ist nun das Verhältniss der Rechtecksseiten $2K : K'$, so wird die Abbildung des Rechtecks auf die Halbebene vermittelt durch die Function

$$Z = \sin am\, z \,(\mathrm{mod}\, \varkappa),*$$

* Die hier zur Sprache kommende Aufgabe, das Rechteck conform auf den Einheitskreis abzubilden, ist von Herrn Prof. Dr. H. A. Schwarz bereits im Jahre 1864 gelöst worden und muss wohl als das erste mit den Hilfsmitteln der Analysis vollständig durchgeführte Beispiel zu dem in Riemann's Dissertation § 21 behandelten allgemeinen Abbildungsproblem betrachtet werden. Ausser der Lösung einer grössern Reihe von Aufgaben von principieller Wichtigkeit ist es

wo jedoch der Modul $\varkappa$ dem Periodenverhältnisse entsprechend zu bestimmen ist.

Bis jetzt ist die fragliche Abbildung vermittelt durch eine Function von der Form

$$Z = sin\,am\left[g + lg\frac{a z^2 + b}{c z^2 + d}\right] \;(mod\,\varkappa).$$

Durch die Abbildung

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa}\,.\,sin\,am\,u}{i + \sqrt{\varkappa}\,.\,sin\,am\,u}\;(mod\,\varkappa),\;\text{wo}\;u = g + lg\frac{a z^2 + b}{c z^2 + d},$$

wird schliesslich die Halbebene conform auf die Fläche des nicht eingeschnittenen Einheitskreises übertragen.*

Nach Voraussagung dieses Resultates dürfte auch die analytische Lösung der Aufgabn zu ermöglichen sein. Sind

$$f(xy) = \alpha = \left(\frac{p\,.\,p_1}{q\,.\,q_1}\right),$$
$$f_1(xy) = \beta = [(\vartheta + \vartheta_1) - (\chi + \chi_1)]$$

die Gleichungen der Lemniscatenschaar und des Lemniscatenbüschels, der hier geeigneten Coordinatensysteme, so müssten mit Hilfe dieser Gleichungen x und y durch die beiden Parameter dargestellt und letztere als neue Coordinaten auf dem Jacobi'schen Wege (Crelle's Journal Bd. 36) in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

eingeführt werden. Die Schwierigkeiten der Integration derselben für den vorgeschriebenen Bereich dürften sich in den Specialfällen der Symmetrie noch vermindern. Die Lösung der Aufgabe würde auf die Verwerthbarkeit der allgemeinen lemniscatischen Coordinaten für die Analysis ein helles Licht werfen.

Herrn Schwarz gelungen, das von Riemann zu Grunde gelegte Dirichlet'sche Princip, gegen welches erhebliche Bedenken geltend gemacht werden, durch ein anderes Beweisverfahren zu ersetzen. — Man vergleiche die Arbeiten des Herrn Schwarz im 70. und 77. Bande des Crelle'schen Journals, im Programm 18$\frac{69}{70}$ der polytechnischen Schule zu Zürich, im Monatsberichte der königl. Akademie der Wissenschaften vom October 1870, im 15. Jahrgange der naturforschenden Gesellschaft in Zürich etc

Einige Schüler des Herrn Schwarz haben auf Anregung desselben eine Reihe von Abbildungsaufgaben analytisch gelöst. Vergl.:

Hentschel: „Ueber einige conforme Abbildungen", 17. Jahrg. dieser Zeitschrift.

Derselbe: „Conforme Abbildung einiger einfach zusammenhängender Flächen etc.", Programm 1874 des Gymnasiums zu Salzwedel.

Amstein: „Conforme Abbildung des regulären Octaeders etc.", Zürich 1872.

* Vergl. Jochmann: „Zur Abbildung des Rechtecks auf die Kreisfläche", diese Zeitschr. Jahrg. 14.

Auch die Function, welche die Abbildung eines von je zwei „parallelen" lemniscatischen Spiralen begrenzten rechtwinkligen Raumes auf den Einheitskreis vermittelt, lässt sich mit Hilfe der Umkehrung von Function 32) synthetisch leicht voraussagen, ebenso das Resultat für eine ganze Gruppe hierher gehöriger Aufgaben.

Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen.

In den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften" wies ich ferner darauf hin, dass zu den *sinam*- und Δam-Curven ($mod\, \varkappa +$, reell und <1) stets ein Kreis und eine Lemniscate, zu den *cosam*-Curven unter denselben Bedingungen für den Modul stets zwei Lemniscaten gehören, Sätze, für die ich in den weiteren Beiträgen einfache Beweise gab und die sich für gewisse Specialfälle auf die Trajectorien zu 45^0 ausdehnen lassen. Es findet in jenen Curvensystemen gegen die fraglichen Individua Reciprocität statt, was die Construction unterstützt und ein geometrisches Bild von den Erleichterungen giebt, die bei Berechnung von Werthtabellen für elliptische Functionen möglich sind: der unbegrenzte Bereich der Z-Ebene wird nämlich in 16 Theile zerlegt, für welche Construction, resp. Rechnung erledigt sind, sobald man die Resultate für einen der Theile kennt.*

Schliesslich sei bemerkt, dass die Abbildungen $Z=\sqrt[4]{z}$, $Z=\sqrt[8]{z}$ etc. nichts wesentlich Neues ergeben, nur treten z. B. bei der ersteren Transformation an Stelle der Coordinaten $p \cdot p_1$ und $(\vartheta+\vartheta_1)$ jetzt $p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ und $(\vartheta+\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)$, die von den vier Punkten ausstrahlen, die durch $\sqrt[4]{a+bi}$ dargestellt sind.

Dabei tritt an Stelle der Schleifenlemniscate eine analoge, aus vier Theilen bestehende Curve, deren einzelne Züge sich im Nullpunkte unter von 45^0 schneiden. Man könnte hier von Lemniscaten zweiter, vierter, achter etc. Ordnung sprechen.

Es ist vorauszusehen, dass ähnliche Verhältnisse bei der Abbildung $Z=\sqrt[n]{z}$ auftreten, wo n eine ganze, positive, reelle Zahl ist. Die Entwickelungen würden den obigen ganz analog sein.

---

§ 7. Bemerkungen über die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems.

Nach § 4 verwandelt sich durch die Transformation $Z=\sqrt{z}$ jedes starre, in der z-Ebene frei bewegliche System in ein „lemniscatisch

---

* Vergl. auch die Bemerkung des Herrn Schwarz in der ersten der citirten Abhandlungen über den von Abel bewiesenen Satz, dass der Werth von $sinam\, \frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ sich durch Auflösung quadratischer Gleichungen ergiebt.

veränderliches" in der Z-Ebene frei bewegliches Gebilde, dessen strenge Definition keine Schwierigkeiten bietet. Die Bewegung geschieht im Allgemeinen stets unter gesetzmässiger Gestaltveränderung. An Stelle des Zwanges, der im Begriffe der Starrheit liegt, tritt jetzt der Zwang, dass die gleichseitigen Verbindungshyperbeln je dreier Punktpaare des Systems bei Bewegung des letzteren stets correspondirende Hyperbelbogen bleiben, wobei die Hyperbeln stets dasselbe gemeinschaftliche Centrum beibehalten und ihre Schnittwinkel offenbar ungeändert bleiben, so dass es sich um ein „conform veränderliches System" handelt.

Einige Fälle solcher Bewegung sollen jetzt besprochen werden.

1. Der parallelen Verschiebung eines starren Gebildes der z-Ebene längs einer festen Geraden mit constanter Geschwindigkeit c entspricht eine Bewegung des entsprechenden lemniscatisch-veränderlichen Gebildes (strenger noch Gebildepaares) der Z-Ebene derart, dass jeder Punkt desselben sich auf einer gleichseitigen Hyperbel bewegt, die zur Parallelschaar der Hyperbel gehört, welche jener Richtungsgeraden entspricht. Dabei ist die Richtung und Geschwindigkeit jedes Punktes variabel, und zwar letztere abhängig von der momentanen Entfernung vom Nullpunkte, nämlich

$$v = \frac{c}{2\sqrt{r}},$$

d. h. gleich dem Producte aus c und dem absoluten Betrage des Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$.* Man könnte jedoch sagen, dass, da das Product $p \cdot p_1 = c$ sich gleichmässig ändert, die „lemniscatische Geschwindigkeit" constant sei. Die Winkelsumme $\vartheta + \vartheta_1$ bleibt selbstverständlich ungeändert.

In dem Momente, wo ein Punkt den Nullpunkt passirt, fällt er mit mit seinem zugeordneten zusammen, und die Geschwindigkeit beider ist unendlich gross.** Gleichzeitig tritt eine Degeneration jeder den Nullpunkt passirenden Curve ein, so dass z. B. jede gleichseitige Hyperbel in zwei orthogonale Gerade degenerirt. Beispielshalber unterwerfe man das System der Fig. 2 einer solchen Bewegung. Es wird sich unter Anderem zeigen, dass die kleinen „Quadrate" sich unter steter Vergrösserung beschleunigt bewegen, sobald sie sich dem Nullpunkte nähern, während bei zunehmender Entfernung das Umgekehrte stattfindet. In

* Vergl. die citirte Siebeck'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 55.

** Es ist eine vielfach verbreitete Ansicht, dass unendlich grosse Geschwindigkeiten in der Natur nicht vorkämen. Jedenfalls sind jedoch optische Probleme von dieser Ansicht auszuschliessen. Bei den jetzt zu behandelnden optischen Erscheinungen treten in der That momentane, unendlich grosse Geschwindigkeiten bestimmter Punkte ein, die volle Analogie mit dem mathematischen Falle vorausgesetzt.

der Nähe des Nullpunktes beginnt das „Quadrat“ auffallend zu degeneriren, erhält sogar gegebenenfalls einen Winkel von 45^0.

2. Ein starres System von Radien und concentrischen Kreisen rotire um einen festen Punkt $a+bi$ der z-Ebene, und zwar mit constanter Winkelgeschwindigkeit, so dass die Neigungswinkel der Radien gleichmässig wachsen, während jeder Kreis sich in sich selbst bewegt.

Dem entspricht in der Z-Ebene eine Drehung des gleichseitigen Hyperbelbüschels um zwei feste Punkte, bei welcher jede Lemniscate der Orthogonalschaar sich in sich selbst bewegt, während jede Hyperbel unter beständiger Gestaltveränderung sich so dreht, dass die Winkelsumme $(\vartheta+\vartheta_1)$ der entsprechenden Radii vectores für die Punkte jeder Hyperbel arithmetisch wächst. Dabei bewegen sich nach Obigem die Brennpunkte jeder Hyperbel auf der orthogonalen Schleifenlemniscate; die Scheitelpunkte bewegen sich auf der Hyperbel selbst und ausserdem mit der Hyperbel, und zwar geschieht ihre absolute Bewegung auf der im Verhältniss $1:\sqrt{\frac{1}{2}}$ verkleinerten Schleifenlemniscate. In dem Momente, wo der Scheitel der Hyperbel den Nullpunkt passirt, ist seine Geschwindigkeit unendlich gross.

Diese interessante, jetzt leicht zu discutirende Bewegung kommt zur Erscheinung bei den Polarisationshyperbeln und Interferenzlemniscaten optisch zweiaxiger Krystalle (Salpeter), sobald man das analysirende Nicol'sche Prisma oder das Krystallblättchen in seiner Ebene dreht. Jeder Punkt des Hyperbelbüschels bewegt sich auf einer der Interferenzlemniscaten. Das Büschel degenerirt in dem Moment zum orthogonalen Axenkreuze, wo die Ebene der optischen Axen mit der Schwingungsebene des einen Nicol'schen Prismas zusammenfällt.

3. Bewegt sich ein starres Kreisbüschel mit seiner Orthogonalschaar gleichzeitig drehend und verschiebend in der z-Ebene, so entstehen in der Z-Ebene die verschiedensten Gestalten des in Fig. 5 veranschaulichten Coordinatensystems.

4. Die Bewegung eines starren Systems der z-Ebene lässt sich betrachten als eine continuirliche Reihe aufeinanderfolgender Rotationen um aufeinanderfolgende Punkte, welche das sogenannte Polvieleck und für die Grenze die Polbahn bilden. Die relative Bewegung des Drehungspoles gegen das bewegte System giebt eine zweite, mit Annäherung leicht zu construirende Curve, die sogenannte Polcurve. Bekanntlich geschieht die Bewegung des Systems so, als ob die starr mit ihm verbundene Polcurve auf der festen Polbahn ohne Gleitung sich abrollte.*

Dieser Fundamentalsatz der Kinematik findet folgende Uebertragung. Die allgemeine Bewegung des lemniscatisch-veränderlichen Systems in

* Vergl. Reuleaux: „Theoretische Kinematik“, § 6, wo sich eine anschauliche Darstellung des Satzes findet.

seiner Ebene ist aufzufassen als eine Reihe der oben besprochenen lemniscatischen Drehungen um aufeinanderfolgende Punktpaare, welche die lemniscatische Polbahn bilden. Die Polcurve, d. h. die relative Bewegung des Poles gegen das bewegte System ist durch die elementare Uebertragung der Construction, welche die gewöhnliche Polcurve giebt, mittelst der Function $Z = \sqrt{z}$ mit Annäherung darzustellen. Die Bewegung des Systems geschieht so, als ob die mit ihm „lemniscatisch verbundene" Polcurve unter entsprechender Gestaltveränderung auf der festen Polbahn, ohne zu gleiten, sich abrollte.

Die Sätze über die Bewegung der Krümmungsmittelpunkte gehen über in solche von den Brennpunkten der oben definirten Krümmungslemniscaten. Jeder Punkt des Systems beschreibt seine Roulette, jede gleichseitige Hyperbel erzeugt ihre Enveloppe.

So ist z. B. das Cycloidenproblem einer einfachen Uebertragung fähig.

Noch einige Fälle der Uebertragung von Bewegungen veränderlicher Systeme:

5. Man denke sich in der z-Ebene ein System concentrischer Kreise, die aus einem Punkte hervorquellen und dauernd anschwellen, wie sie sich auf einer ruhigen Wasserfläche nach dem Aufschlagen eines Steines entwickeln. Die Uebertragung $Z = \sqrt{z}$ giebt eine Bewegung confocaler Lemniscaten, deren Ovale aus den Brennpunkten hervorquellen, sich im Nullpunkte treffen und, vereinigt anschwellend, sich allmälig der Kreisgestalt nähern. Jeder Punkt bewegt sich dabei auf einer orthogonalen gleichseitigen Hyperbel. Ueber die Wanderung der Maximalpunkte auf Kreis und Gerade ist § 3 zu vergleichen.

Die Erscheinung würde in der Physik bei dem allerdings nur hypothetischen Experimente auftreten, dass die Salpeterplatte ihre Dicke gesetzmässig änderte.

6. Denkt man sich die concentrischen Kreise in der z-Ebene anschwellend und gleichzeitig die Radien rotirend, so entspricht dieser Bewegung das Anschwellen der confocalen Lemniscaten und das gleichzeitige Drehen der Hyperbeln. Diese Bewegung tritt in die Erscheinung beim Drehen der Salpeterplatte im Polarisationsapparate um eine horizontale Axe.

Denkt man sich dabei die Abweichungen der Radien arithmetisch wachsend und gleichzeitig die Länge der Kreisradien geometrisch zu- oder abnehmend, so bewegt sich jeder Eckpunkt des Netzes auf einer logarithmischen Spirale. In der Z-Ebene würden sich die Eckpunkte des lemniscatischen Netzes auf einer lemniscatischen Spirale der Form 13) bewegen.

Das eben besprochene optische Experiment würde diese Bewegung wenigstens einigermassen veranschaulichen.

Durch diese Betrachtungen ist der Forschung ein neues Gebiet der Kinematik gesetzmässig veränderlicher Systeme eröffnet. Die von Herrn Burmester in der citirten Abhandlung gegebenen allgemeinen Sätze über die Bewegung im kreisverwandt-veränderlichen System sind sofort der entsprechenden Uebertragung fähig.

Diese Andeutungen mögen hinreichen, um von der Verwerthbarkeit der lemniscatischen Verwandtschaft und der allgemeinen lemniscatischen Coordinaten ein Bild zu geben. Wir schliessen mit dem Vorbehalte eingehenderer Untersuchungen auf diesem noch nicht bebauten Gebiete.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Bemerkung zu der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

In einem Programme der Realschule zu Trier habe ich 1855 eine Abhandlung über die Zerlegung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Functionen und die Auflösung der entsprechenden Gleichungen veröffentlicht. Da diese Arbeit jedoch nicht ganz bekannt geworden ist, so glaube ich die Methode, die ich wählte, hier kurz andeuten zu sollen, und beschränke mich der Kürze wegen auf die Functionen vierten Grades.

Wenn man in die Function

$$f(xy) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

die neuen Veränderlichen ξ, η mittels der Gleichungen

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

setzt, so kann man die Function in eine quadratische mit den Veränderlichen ξ^2, η^2 verwandeln, und es müssen für diesen Zweck die eingesetzten Coefficienten α, β, γ, δ der Doppelgleichung

$$\frac{a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta}{-\gamma\delta} = \frac{b\alpha\beta + c(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\gamma\delta}{\frac{1}{2}(\alpha\delta + \beta\gamma)}$$
$$= \frac{c\alpha\beta + d(\alpha\delta + \beta\gamma) + e\gamma\delta}{-\alpha\beta}$$

Genüge leisten.

Wird der gemeinsame Werth dieser drei Quotienten mit m bezeichnet, so erhält man ein System von drei Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} a\alpha\beta + \quad & b(\alpha\delta + \beta\gamma) + (c+m)\gamma\delta = 0, \\ b\alpha\beta + (c - \tfrac{1}{2}m)& (\alpha\delta + \beta\gamma) + \quad d\gamma\delta = 0, \\ (c+m)\alpha\beta + \quad & d(\alpha\delta + \beta\gamma) + \quad e\gamma\delta = 0. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen neben einander bestehen können, muss die Determinante* des Systems Null sein, also die Grösse m aus der Gleichung

---

* Diese Determinante ist 1856, also ein Jahr nach dem Erscheinen meiner Arbeit, von Herrn Dr. Aronhold in Crelle's Journal, Bd. 52, mitgetheilt worden.

d. i. aus

$$\begin{vmatrix} a & b & c+m \\ b & c-\frac{1}{2}m & d \\ c+m & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

$$m^3 - (ae - 4bd + 3c^2)m + 2(ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3) = 0$$

bestimmt werden.

Nachdem diese Gleichung aufgelöst ist, wird die Umformung der Function erreicht, wenn man für $\frac{\alpha}{\gamma}$ die eine, für $\frac{\beta}{\delta}$ die andere Wurzel von einer der folgenden drei Gleichungen wählt:

$$\begin{aligned} [ac - b^2 - \tfrac{1}{2}am]\, z^2 + [ad - bc - bm]\, z + bd - c^2 - \tfrac{1}{2}m(c-m) &= 0, \\ [ad - bc - bm]\, z^2 + [ae - (c+m)^2]\, z + be - cd - dm &= 0, \\ [bd - c^2 - \tfrac{1}{2}m(c-m)]\, z^2 + [be - cd - dm]\, z + ce - d^2 - \tfrac{1}{2}em &= 0. \end{aligned}$$

Dadurch entsteht

$$f(xy) = f(\alpha\gamma)\,.\,\xi^4 + 3m(\alpha\delta - \beta\gamma)\,.\,\xi^2\eta^2 + f(\beta\delta)\,.\,\eta^4,$$

und demnach können die linearen Factoren der Function $f(xy)$ und ebenso die Wurzeln der entsprechenden Gleichung durch die Coefficienten a, b, c, d, e dargestellt werden.

Essen. Dr. HEILERMANN.

XX. Theilbarkeit einer gegebenen Zahl durch eine andere.

Da die Theilbarkeit durch 2 und 5 auf den ersten Blick zu erkennen ist, so haben wir nur die Theilbarkeit durch diejenigen Zahlen zu betrachten, welche in der Einerstelle eine der Ziffern 1, 3, 7, 9 haben. Alle diese Zahlen haben die gemeinsame Eigenschaft, dass sie sich durch Multiplication (mit resp. 1, 7, 3, 9) auf die Form $10\lambda + 1$ bringen lassen.

Sei nun a_0 eine gegebene Zahl und u_0 ihre letzte Ziffer, so bilden wir

$$a_1 = \frac{a_0 - u_0}{10} - \lambda u_0 = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10}.$$

Ist nun a_0 durch $(10\lambda + 1)$ theilbar, so ist dasselbe mit a_1 der Fall. Bildet man a_2 aus a_1 ebenso, wie a_1 aus a_0, so erhält man immer kleinere Zahlen, da jedesmal eine Stelle wegfällt. Die Formeln lauten successive:

$$a_1 = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10},$$

$$a_2 = \frac{a_1 - u_1(10\lambda + 1)}{10} = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10^2} - \frac{u_1(10\lambda + 1)}{10},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} - u_{n-1}(10\lambda + 1)}{10} = \frac{a_0 - u_0(10\lambda + 1)}{10^n} - \frac{u_1(10\lambda + 1)}{10^{n-1}} - \cdots$$

$$\cdots - \frac{u_{n-1}(10\lambda + 1)}{10},$$

worin a_n die erste Zahl ist, die sich nicht mehr verkleinern lässt. Ist $a_n = 0$, so folgt aus der letzten Formel:

$$a_0 = (10\lambda + 1)(u_0 + 10\,u_1 + 10^2 u_2 + \ldots + 10^{n-1} u_{n-1});$$

d. h.: die Endziffern der Zahlen a_0, a_1, ... sind, von rechts nach links geschrieben, die Ziffern des zweiten Factors der durch $(10\lambda + 1)$ theilbaren Zahl. — Beispiele:

$158627 : 31;\ \lambda = 3.$

$$\begin{array}{r}
15862|7 \\
\underline{21} \\
1584|1 \\
\underline{3} \\
158|1 \\
\underline{3} \\
15|5 \\
\underline{15} \\
0
\end{array}$$

Also: $158627 = 31.5117.$

$410643 : 67$, mit 3 erweitert:
$= 1231929 : 201;\ \lambda = 20.$

$$\begin{array}{r}
123192|9 \\
\underline{180} \\
12301|2 \\
\underline{40} \\
1226|1 \\
\underline{20} \\
120|6 \\
\underline{120} \\
0
\end{array}$$

$410643 = 67.6129.$

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

XXI. Ueber die Theilbarkeit der Zahlen.

Nr. 6, Jahrg. 20, dieser Zeitschrift enthielt in einer Recension des Herrn Prof. Dr. Cantor über das bei Georg Weiss in Heidelberg erschienene „Lehrbuch für den Rechenunterricht" von Henrici die Notiz, dass in dem genannten Werke das folgende bemerkenswerthe Kennzeichen für die Theilbarkeit einer Zahl durch 7 gegeben werde:

„Eine Zahl ist durch 7 theilbar, wenn die doppelte letzte Ziffer, von den vorhergehenden Ziffern als Zahl abgezählt, einen Rest ergiebt, der durch 7 theilbar ist."

Der Beweis ist leicht. Wir übergehen denselben, weil er nur einen ganz speciellen Fall der Aufgabe betrifft: für eine beliebige Primzahl p einen Factor n zu finden derart, dass, wenn man mit demselben die letzten s Stellen der vorgelegten Zahl Z multiplicirt und das Product von der durch die übrigen Ziffern dargestellten Zahl abzieht, die Theilbarkeit des Restes die der ursprünglichen Zahl bedinge.

Sei Z_r die Zahl, welche nach Abstrich der s letzten Ziffern übrig bleibt, z_s die durch diese s Ziffern gegebene Zahl, so wird also vorausgesetzt

$$1)\qquad Z_r - n\,z_s \equiv 0 \pmod p$$

und behauptet

2) $$10^s . Z_r + z_s \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zieht man 1) nach Multiplication mit 10^s von 2) ab, so bleibt

$$z_s + 10^s n . z_s \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

3) $$z_s (1 + 10^s n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wäre z_s nicht relativ prim zu p, etwa $= \delta . p$, so ginge p in der Zahl z_s auf; man kann alsdann die s letzten Stellen ganz unberücksichtigt lassen. Nehmen wir also z_s relativ prim zu p und dividiren 3) durch z_s: die Congruenz wird jetzt

4) $$1 + 10^s n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dieselbe hat offenbar für $p = 2$ oder $= 5$ keine Lösung, diese Werthe sollen daher für die Folge ausgeschlossen werden. Vergleicht man 4) mit

$$1 + 10^{s-1} m \equiv 0 \pmod{p},$$

so ergiebt sich durch Subtraction die neue Congruenz

$$n . 10^s - m . 10^{s-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hierin darf man infolge der für p geltenden Beschränkung mit 10^{s-1} dividiren und erhält

5) $$n . 10 - m \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ist nun m berechnet, so genügen der zugehörigen Congruenz die Werthe von der Form $pk + m$. Die Primzahl p kann am Ende nur eine der Ziffern 1, 3, 7 oder 9 haben. Diese werden durch Multiplication mit den Zahlen 0 bis 10 in Zahlen übergeführt, welche an letzter Stelle wieder 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 haben. Mag daher m heissen, wie es wolle: man ist jederzeit in der Lage, einen Factor k zu finden, welcher $p . k + m$ zu einem Vielfachen von 10 macht: $= 10q$. Somit hat nach Einsetzung von $10q$ für m 5) das Aussehen

$$n . 10 - 10q \equiv 0 \pmod{p},$$

d. i.

$$n - q \equiv 0 \pmod{p},$$

und n gehört zu den Zahlen $p . k_1 + q$.

Man ist durch dieses Verhalten des Factors für z_s zu demjenigen von z_{s-1} in den Stand gesetzt, aus dem Multiplicator für die letzte Stelle einer vorgelegten Zahl alle übrigen zu ermitteln. Folglich wird man sich auf die Behandlung der Congruenz

6) $$10n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

beschränken dürfen. Bezeichnet aber nach Gauss $[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots]$ den Ausdruck für die Factoren, welche auftreten, wenn man die Vielfachen von p in 10, von 10 in p, vom Rest in 10 u. s. w. bestimmt, bis man zum Rest 1 gelangt, so ist die Wurzel von 6)

$$n \equiv [\beta, \gamma, \delta, \ldots] \pmod{p}.$$

Stellen wir z. B. die Berechnung für $p = 47$ an, so ist

$$
\begin{aligned}
10 &= 0.47 + 10, & \alpha &= 0,\\
47 &= 4.10 + 7, & \beta &= 4,\\
10 &= 1.7 \;\; + 3, & \gamma &= 1,\\
7 &= 2.3 \;\; + 1, & \delta &= 2,\\
[4, 1, 2] &= 4\,[1, 2] + [2] & &\\
&= 4.(1.2 + 1) + 2 & &\\
&= 12 + 2 & &\\
&= 14. & &
\end{aligned}
$$

Die Werthe von n sind also enthalten in der Form $47k + 34$. Prüfen wir hiernach die Zahl 10392687 bezüglich ihrer Theilbarkeit durch 47:

$$
\begin{array}{l}
1039268{,}7\\
\quad\;\; 98\\
\hline
10391{,}7{,}0\\
\quad\; 98\\
\hline
1029{,}3\\
\;\; 42\\
\hline
98{,}7\\
98\\
\hline
0
\end{array}
$$

10392687 ist sonach theilbar durch 47, was die Division bestätigt.

Um den Factor für die beiden letzten Stellen zu finden, wählt man $k = 8 : 47.8 + 14 = 390$; 39 ist der gesuchte Werth, und die allgemeine Form des Multiplicators $47k_1 + 39$. Es können auch negative Werthe auftreten, wenn die k negativ genommen werden. Man hat natürlich die Producte der so gefundenen Factoren an entsprechender Stelle zu addiren.

Primzahlen.	Factoren für die letzte Ziffer.	Factoren für die beiden letzten Ziffern.	Factoren für die drei letzten Ziffern.	Factoren für die vier letzten Ziffern.
3.	+2, +5, +11 −1, −4, −10	+2 . . . −2 . . .	ebenso wie vorher	ebenso wie vorher
7.	+2, +9 −5, −12	+3 −4, −11	+1, +8 −6	+5, +12 −2, −9
11.	+1, +12	−1, −12	wie in der ersten Reihe	wie in der zweiten Reihe
13.	+9 −4	−3	+1 −12	+4 −9
17.	+5 −12	+9 −8	+6 −11	+4 −13
19.	−2	−4	+11 −8	+3

Primzahlen.	Factoren für die letzte Ziffer.	Factoren für die beiden letzten Ziffern.	Factoren für die drei letzten Ziffern.	Factoren für die vier letzten Ziffern.
23.	− 7	− 8	+ 2	− 9
29.	− 3	− 9	+ 2	+ 6
31.	+ 3	− 9	− 4	+ 12
37.	+ 11		− 1	+ 11
41.	+ 4	+ 25		− 10
43.	− 13	+ 3	− 4	− 9
47.	+ 14	− 8	+ 18	− 17
53.	− 16	+ 9	− 15	+ 25
59.	− 6			+ 2
61.	+ 6	+ 25		− 15
67.		+ 2		− 4
71.	+ 7	+ 22	− 12	
73.	− 22			+ 1
79.	− 8	+ 15		+ 12
83.	− 25		− 21	
89.	− 9	+ 8	− 17	+ 25
97.	+ 29			

Obige Tabelle enthält die Hauptfactoren für die Primzahlen bis 100. er Werth − 1 bei der 3 führt ersichtlich auf das bekannte Kennzeichen ırück. Auch für die 11 lässt sich der Zusammenhang mit der Schul- ɡel erkennen. Wichtig sind besonders die Stellen, welche ± 1 zum ıctor haben. So kann man bei 7 und 13 die drei, bei 73 die vier letzten Ziffern ohne Weiteres von der nach ihrer Abstreichung restirenden Zahl abziehen, bei 37 ähnlich die drei letzten Ziffern addiren u. s. w.

Dresden. P. Otte,
Realschuloberlehrer.

Preisaufgaben

der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.)

1. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgiltig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der *Mécanique céleste*), von Leverrier (in den *Annales de l'Observatoire* und den *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*), von Hansen (in den Berichten der königl. sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen, S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraumes vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left\{1+2e^{-\pi\left(\frac{a}{r}\right)^2}+2e^{-\pi\left(\frac{2a}{r}\right)^2}+e^{-\pi\left(\frac{3a}{r}\right)^2}+e^{-\pi\left(\frac{4a}{r}\right)^2}+\ldots\right\}$$

$$=1+2e^{-\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2}+2e^{-\pi\left(\frac{2r}{a}\right)^2}+2e^{-\pi\left(\frac{3r}{a}\right)^2}+2e^{-\pi\left(\frac{4r}{a}\right)^2}+\ldots,$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\pi\left(\frac{a}{r}\right)^2}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2}+2e^{-4\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2}+2e^{-9\pi\left(\frac{r}{a}\right)^2}+\ldots,$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besondern Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Um-ng und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen ethode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu sen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der issenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist bgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1876 Geh. Hofrath Prof. Dr. Hankel) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

XVI.

Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von

Dr. R. Beez,

Professor an der Realschule zu Plauen i. V.

(Fortsetzung.)

In dem vorhergehenden Theile dieser Abhandlung[1]) hatte ich auf Grund der Gleichungen 18) und 26) die Behauptung aufgestellt, dass das Krümmungsmass einer Mannigfaltigkeit, deren Curvenelement durch die Gleichung

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\, \partial x_i\, \partial x_k$$

gegeben ist, im Allgemeinen nur für $n=2$ eine reine Function der Coefficienten a_{ik} und deren ersten und zweiten Derivirten sei, woraus sich dann weiter ergeben hätte, dass eine höhere Mannigfaltigkeit nur mit Verlust ihrer ursprünglichen Krümmung deformirt werden könne.

Geht man nämlich von der entgegengesetzten Annahme aus, dass das Krümmungsmass K aus den Coefficienten a_{ik} sich berechnen lässt, so ergiebt sich sofort aus der Gleichung 26) auch die Darstellbarkeit der Grösse D_{11} und analog sämmtlicher D_{ik} aus denselben Coefficienten, sobald $n > 2$ ist. Führt man weiter die so gefundenen Werthe der D_{ik} in Gleichung 18) ein, so ist ersichtlich, dass nicht blos das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit oder das reciproke Product der n Hauptkrümmungshalbmesser, sondern jeder einzelne Hauptkrümmungshalbmesser durch die Grössen a_{ik} bestimmt wird. Dasselbe gilt dann auch von den Krümmungslinien der Mannigfaltigkeit und endlich von dem Krümmungshalbmesser jedes beliebigen Normalschnittes. Denn multiplicirt man die Gleichungen 18) der Reihe nach mit $\partial p_1, \partial p_2, \ldots \partial p_n$ und addirt, so erhält man

$$\Sigma_{ik}\left(\frac{a_{ik}}{\varrho} + \frac{D_{ik}}{H}\right) \partial p_i\, \partial p_k = 0,$$

woraus

---

1) Diese Zeitschrift XX, S. 423.

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\Sigma D_{ik}\,\partial p_i \partial p_k}{H\,\Sigma a_{ik}\,\partial p_i \partial p_k}\ ^{2)}$$

sich ergiebt. Da die n Hauptkrümmungshalbmesser dieser Gleichung genügen, so drückt ϱ überhaupt den Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnittes aus, welcher durch das Element $\Sigma a_{ik}\,\partial p_i \partial p_k$ hindurchgeht. Nun muss eine Mannigfaltigkeit, für welche in jedem Punkte ausser der Länge des Curvenelements die Krümmung jedes beliebigen Normalschnittes gegeben ist, als eine bestimmte angesehen werden. Die Krümmung irgend eines Normalschnittes aber kann, wie wir soeben gesehen haben, aus den Coefficienten a_{ik} des Curvenelements berechnet werden. Es ist daher klar, dass eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, welche in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, durch den Ausdruck für das Curvenelement vollständig bestimmt wird, sobald n die Zahl 2 übersteigt. Nimmt man nun ebenfalls nach Analogie der Linien und Flächen im empirischen Raume an, dass eine n-fache Mannigfaltigkeit in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen sich deformiren, d. h. biegen lasse, ohne dass Dehnung oder Zusammenziehung der einzelnen Theile stattfindet,[3]) so kommt man, sobald das Gegentheil meiner Behauptung als richtig erwiesen wird, zu folgenden Sätzen:

1. Bei der Deformation einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen bewahren die Krümmungslinien ihren Charakter als Krümmungslinien.

2. Bei der Deformation einer Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen bleibt nicht nur das Krümmungsmass in jedem einzelnen Punkte, sondern auch die Krümmung sämmtlicher Normalschnitte — mögen sie nun Hauptschnitte sein oder nicht — unverändert.

Beide Sätze stehen in vollem Widerspruch mit den entsprechenden Sätzen der Flächen, d. h. also derjenigen Mannigfaltigkeiten, die noch vollständig unserer Anschauung zugänglich sind, ja an denen wir überhaupt erst unsere geometrischen Vorstellungen erlernt haben.

---

2) Herr R. Lipschitz hat dieselbe Gleichung in der Form

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\overline{\mu}(dy)}{\overline{g}(dy)}$$

aufgestellt (Borchardt's Journal Bd. 81, S. 233).

3) Diese Annahme ist wohl von allen Mathematikern, die sich mit höheren Mannigfaltigkeiten beschäftigt haben, ohne Bedenken zugelassen worden. Auch Herr R. Lipschitz ist der Ansicht (Borchardt's Journal Bd. 81, S. 232), dass eine Transformation des Ausdruckes $\partial s^2 = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$ durch Einführung eines neuen Systems von n independenten Variabelen der Biegung einer Oberfläche entspricht, wobei das Quadrat des Linearelements der Oberfläche nicht geändert wird.

Der zweite Satz enthält aber auch in bester Form eine *contradictio in adjecto*, denn er spricht von einer Deformation, bei welcher Nichts deformirt wird.

Nun hat Herr Lipschitz neuerdings[4]) den vollständigen Beweis geliefert, dass die Kronecker'sche Verallgemeinerung des Gaussschen Krümmungsmasses

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \cdot \varrho_n}$$

für jedes gerade n eine reine Function der Coefficienten a_{ik} der Form $\Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k$ und ihrer ersten und zweiten Derivirten sei, für jedes ungerade n aber durch die Quadratwurzel aus einer reinen Function jener Coefficienten dargestellt werden könne. Die nothwendigen Consequenzen dieses Theorems sind in den bereits angeführten Sätzen 1 und 2 enthalten.

Offenbar ist hiermit die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten an einem höchst kritischen Punkte angelangt und die Entscheidung kann nicht mehr fern liegen, ob eine in sich widerspruchsfreie Geometrie von Räumen, die mehr als drei Dimensionen enthalten, auf der Grundlage der gewöhnlichen Geometrie möglich ist oder nicht. Einer solchen über unsere Erfahrung hinausgehenden Geometrie wollen wir der Kürze wegen im Folgenden den Namen „Metageometrie" beilegen, wodurch sie zugleich in präciser Weise von anderen Mannigfaltigkeitstheorien, die nicht auf durchgreifender Analogie mit der empirischen Ausdehnungslehre beruhen, unterschieden werden kann.

Sollte sich auch schliesslich die Unmöglichkeit einer Metageometrie herausstellen, so würden zwar die auf diesem Gebiet geführten Untersuchungen nur ein negatives Resultat, nämlich den Beweis liefern, dass ausser dem empirisch gegebenen Raume kein anderer ihm analog gebildeter von mehr als drei Dimensionen denkbar sei. Dieses eine Resultat würde jedoch wegen seiner eminenten erkenntniss-theoretischen Bedeutung selbst mit dem Opfer der ganzen Metageometrie nicht zu theuer erkauft sein.

Was die Widersprüche in den oben aufgestellten Sätzen 1 und 2 anlangt, so glaube ich, dass dieselben durch eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Fassung des Hauptsatzes der Deformationstheorie, wenn auch nicht vollständig gehoben, doch wenigstens insoweit gemildert werden können, dass das Princip der Analogie nicht geradezu verletzt wird. Jener Deformationssatz lautet in der gewöhnlichen Weise: Wenn die Ausdrücke für die Linearelemente zweier Mannigfaltigkeiten

4) Borchardt's Journal Bd. 81, S. 230. Herr R. Lipschitz hatte bereits für gerade n im 71. Bande desselben Journals diesen Beweis gegeben, doch ist mir erst durch seine neuere Mittheilung die Identität seiner Formeln mit den von mir auf directem Wege gefundenen Ausdrücken klar geworden.

$$\partial s^2 = \Sigma a_{ik} \partial p_i \partial p_k$$

und

$$\partial s'^2 = \Sigma a'_{ik} \partial p'_i \partial p'_k$$

vorgelegt sind und es möglich ist, durch Einführung eines Systems von n unabhängigen Functionen der n unabhängigen Variabelen $p'_1, p'_2, \dots p'_n$ an Stelle der Variabele $p_1, p_2, \dots p_n$ den ersten Ausdruck in den zweiten so zu transformiren, dass er mit ihm identisch wird, so lässt sich die zweite Mannigfaltigkeit auf der erstern abwickeln.

Aus den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen scheint mir nun aber hervorzugehen, dass dieser Satz folgendermassen formulirt werden müsse: Wenn die Linearelemente zweier Mannigfaltigkeiten durch die soeben angegebene Substitution gleich gemacht werden können, so lassen sich die beiden Mannigfaltigkeiten zur Coincidenz bringen, wozu bei den Mannigfaltigkeiten der ersten und zweiten Ordnung eventuell eine Deformation erforderlich ist.

Wenn nun auch die in den obigen Sätzen 1 und 2 enthaltenen Widersprüche abgeschwächt worden sind, so kommt man doch selbst bei dem besten Willen, die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten aufrecht zu erhalten, in Bezug auf Biegung derselben über gewisse erhebliche Zweifel nicht hinweg.

Bei dem Ausdrucke „Biegung" denken wir zunächst an einen vorwiegend in die Länge, oder zugleich in Länge und Breite ausgedehnten Körper, dessen Enden einander genähert oder von einander entfernt werden sollen. Hierbei findet die Biegung in dem Raume selbst statt, von welchem der Körper ein begrenztes Stück ist. Sie wird also charakterisirt als Biegung einer Mannigfaltigkeit in sich selbst nach einer der Mannigfaltigkeit angehörenden Dimension, wobei natürlich die Verschiebbarkeit der Mannigfaltigkeit in sich selbst ohne Biegung vorausgesetzt wird. Eine derartige Biegung ist, wie man leicht einsieht, bei Linien, Flächen und Körpern des gewöhnlichen Raumes stets mit Dehnung oder Zusammenziehung einzelner Theile verbunden. Wir können daher wohl den allgemeinen Satz aufstellen: Bei jeder Biegung einer Mannigfaltigkeit in sich selbst findet Dehnung und Zusammenziehung statt.

Anders verhält es sich bei der Deformation. Eine Linie lässt sich unter allen Umständen auf einer andern abwickeln, ohne dass sie gedehnt wird; dabei ändert sie ihr Krümmungsmass und, was in diesem Falle hiermit gleichbedeutend ist, ihren Krümmungshalbmesser. Eine Fläche lässt sich ebenfalls deformiren, wobei das Krümmungsmass erhalten bleibt, aber die Werthe der einzelnen Krümmungshalbmesser sich ändern. Die Deformationsfähigkeit der Linien und Flächen leuchtet uns deshalb auf der Stelle ein, weil sie in Bezug auf die Dimension, nach welcher sie gebogen werden, unendlich dünn sind. Dies ist aber auch bei den höheren Mannigfaltigkeiten der Fall. Eine Raumgrösse von n Dimensionen ist in Bezug auf einen ebenen Raum von $n+1$ Dimensionen, in welchem die Biegung vorgenommen werden soll, von unendlich geringer Dicke. So würde z. B. unser gewöhnlicher Raum einem Beobachter, der in der vierten Dimension sehen könnte, als eine Mannigfaltigkeit von verschwindender vierter Dimension erscheinen. Derselbe Beobachter würde infolge dessen die frappante Wahrnehmung machen, dass kein Punkt unseres Raumes ihm durch einen andern verdeckt wird, dass es kein Vorn und Hinten in demselben giebt, sondern alle Theile nebeneinander gewissermassen in flächenhafter Ausbreitung zu sehen sind.[5]) Er würde das Innere eines geschlossenen Körpers mit einem Blicke durch- oder überschauen, gerade so, wie uns das Innere einer geschlossenen ebenen Figur sich vollständig öffnet, sobald unser Auge aus der Ebene dieser Figur in die dritte Dimension versetzt wird. Vom Standpunkte der Metageometrie aus sehe ich daher absolut keinen Grund, warum eine n-fache Mannigfaltigkeit, die in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, sich nicht sollte ohne Dehnung und Zusammenziehung biegen lassen, da sie ja in Bezug auf diese $n+1^{\text{te}}$ Dimension unendlich dünn ist. Und doch würde diese Annahme dem Lipschitz'schen Satze widersprechen.

Denn, wenn eine Mannigfaltigkeit gebogen wird, so müsste doch mindestens ein Krümmungshalbmesser seine Grösse ändern. Die Aenderung eines einzigen Krümmungshalbmessers aber würde nicht möglich sein ohne entsprechende Aenderung in der Länge des Curvenelements selbst. Bleibt dieses ungeändert, so müssen auch sämmtliche Krümmungshalbmesser ihre ursprünglichen Werthe beibehalten Es scheint mir daher ausser Zweifel, dass man nur die Alternative hat, entweder die Metageometrie ganz aufzugeben, oder wenigstens die Deformationsfähigkeit höherer Mannigfaltigkeiten in Abrede zu stellen. Man würde also, wenn man sich für das Letztere entschiede, annehmen müssen, dass eine Mannigfaltigkeit von einer höheren als der zweiten Ordnung nur mit gleichzeitiger Dehnung und Zusammenziehung einzelner Theile gebogen werden könne.

Eine Prüfung der im Vorigen gefundenen Resultate wird sich am besten an den Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, unter denen unser Raum die einfachste und zugleich die einzige uns bekannte Species ist, vornehmen zu lassen. Wir wollen zu diesem Zwecke die bei Gleichung 51) abgebrochene Rechnung gemäss der höchst schätzenswerthen Andeutung[6]) des Herrn R. Lipschitz weiter fortsetzen.

---

5) Diese Analogie scheint mir zu wenig zu Gunsten einer vierten Dimension zu sprechen.

6) Borchardt's Journal Bd. 81, S. 236.

Wenn $n=3$ ist, so giebt die Formel 14) das Krümmungsmass

$$K=\frac{1}{\sqrt[2]{a^5}}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix},$$

welches sich nach 51) auch in der Gestalt

$$K=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

darstellen lässt, worin A_{22}, A_{23}, A_{33} die in 48) angegebenen Werthe besitzen. Bezeichnen wir ferner den Coefficienten von D_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

mit δ_{ik}, so ist nach einem bekannten Determinantensatze

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}^2$$

und da

$$\delta_{ik}=a\,.\,A_{ik},$$

so wird

$$K=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{D_{11}}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{ik}=A_{ki}.$$

Bezeichnet man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

mit A und den Coefficienten von A_{ik} in derselben mit α_{ik}, so findet sich

$$D_{11}=\sqrt{\frac{a}{A}}\,.\,\alpha_{11}.$$

Auf entsprechende Weise wird allgemein

$$D_{ik}=\sqrt{\frac{a}{A}}\,.\,\alpha_{ik}$$

erhalten. Durch Einsetzung dieser Werthe in 18) nehmen die Differentialgleichungen der Krümmungslinien folgende Form an:

$$\left(\frac{a_{11}}{\varrho}+\frac{\alpha_{11}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{12}}{\varrho}+\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{13}}{\varrho}+\frac{\alpha_{13}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

$$\left(\frac{a_{21}}{\varrho}+\frac{\alpha_{21}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{22}}{\varrho}+\frac{\alpha_{22}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{23}}{\varrho}+\frac{\alpha_{23}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

$$\left(\frac{a_{31}}{\varrho}+\frac{\alpha_{31}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_1+\left(\frac{a_{32}}{\varrho}+\frac{\alpha_{32}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_2+\left(\frac{a_{33}}{\varrho}+\frac{\alpha_{33}}{\sqrt{A}}\right)\partial p_3=0,$$

und der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, der durch das Element ∂s gelegt, wird

$$\text{A)} \qquad \frac{1}{\varrho} = -\frac{\Sigma \alpha_{ik} \partial p_i \partial p_k}{\sqrt{A}\, \Sigma a_{ik} \partial p_i \partial p_k}.$$

Wendet man die gefundenen Ausdrücke auf das Riemann'sche Linearelement

$$\partial s^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \partial x_3^2),$$

$$\lambda = 1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

an, so ergiebt sich, da

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{\alpha}{\lambda^4},$$

$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0,$$

$$K = \sqrt{\alpha^3}.$$

Setzt man nun $\alpha = \frac{1}{R^2}$, so kommt

$$K = \pm \frac{1}{R^3}.$$

Ferner ergiebt sich aus den Differentialgleichungen der Krümmungslinien

$$\left(\frac{1}{\varrho} + \sqrt{\alpha}\right)^3 = 0,$$

so dass also die drei Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 den Werth $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ erhalten. Derselbe Werth ergiebt sich auch für den Krümmungshalbmesser jedes beliebigen Normalschnittes aus Gleichung A). In Betreff des Vorzeichens ist zu bemerken, dass sämmtliche Krümmungshalbmesser entweder positiv oder negativ zu nehmen sind, da bei stetiger Aenderung in der Lage des Curvenelements ein plötzliches Ueberspringen des Krümmungshalbmessers von einem positiven auf einen negativen Werth, ohne dass einmal $\frac{1}{\varrho} = 0$ wird, unmöglich ist. Durch das Riemann'sche Curvenelement für $n = 3$ wird also eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Normalschnitte dieselbe Krümmung $+\frac{1}{R}$ oder $-\frac{1}{R}$ haben und deren Krümmungsmass demgemäss entweder $+\frac{1}{R^3}$ oder $-\frac{1}{R^3}$ ist. Je nachdem man nämlich die Richtung der Normale nach Innen als positiv oder negativ annimmt, sind die Krümmungshalbmesser entweder sämmtlich gleich $+R$ oder gleich $-R$ zu setzen. Die Riemann'sche Formel für das Curvenelement charakterisirt also für $n > 2$ lediglich eine kugelförmige Mannigfaltigkeit. Wenn Riemann dieselbe als den Ausdruck für das Linearelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung überhaupt bezeichnet, so beruht dies auf der unhaltbaren Voraussetzung, dass eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung in eine kugelförmige Mannigfaltigkeit ohne Dehnung umgebogen werden könne.

In die Kategorie der Mannigfaltigkeiten dritter Ordnung fällt nun auch der sogenannte „Nicht-Euklidische Raum". Bekanntlich ist die Nicht-Euklidische Ebene eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen mit constantem negativem Krümmungsmass, sie lässt sich mit Biegung in sich selbst verschieben und deshalb lassen sich Figuren in derselben, ebenso wie in der Ebene oder auf der Kugel, zur Deckung bringen.

Wenn der Analogie nach der Nicht-Euklidische Raum als eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mit negativem constantem Krümmungsmass definirt wird, so ergiebt sich seine Unmöglichkeit einfach daraus, dass eine Mannigfaltigkeit ungerader Ordnung von wesentlich negativer Krümmung überhaupt nicht denkbar ist. Denn sobald man die Vorzeichen der Hauptkrümmungshalbmesser sämmtlich umkehrt, erhält man den entgegengesetzten positiven Werth. Eingehendere Betrachtungen über die Nicht-Euklidische Geometrie werden weiter unten an geeigneter Stelle ihren Platz finden.

Zu den oben aufgestellten vier Verallgemeinerungen des Gauss'schen Krümmungsmasses tritt endlich noch die Riemann'sche, die wir bis jetzt absichtlich nicht berührt haben, da sie wenigstens nicht unmittelbar auf der Gleichung 30) beruht. Bevor ich jedoch näher auf dieselbe eingehe, sei es mir gestattet, einige allgemeine Bemerkungen in Bezug auf die epochemachende Riemann'sche Schrift „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", vorauszuschicken.

Als ich im Jahre 1868 zum Zwecke des elementaren geometrischen Unterrichts an der hiesigen Realschule es unternahm, einen Leitfaden der Geometrie auf wissenschaftlicher Basis zu entwerfen,[7]) hatte ich bereits, ohne die Riemann'sche Schrift zu kennen, welche mir erst, nachdem der der Druck meines Buches fast vollendet war, zu Gesichte kam, die Analogie des gewöhnlichen Raumes mit der Ebene und der geraden Linie wahrgenommen und den genannten drei Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft der Gleichartigkeit beigelegt. Dieser Ausdruck war jedoch insofern nicht glücklich gewählt, als in ihm jene merkwürdige und, wie ich glaubte, bisher noch nicht beachtete Eigenthümlichkeit des gewöhnlichen Raumes, dass er unter den Mannigfaltigkeiten oder Raumgrössen von drei Dimensionen genau dieselbe Stellung einnimmt, wie die Ebene unter den Flächen und die Gerade unter den Linien, nicht sofort deutlich hervortrat. Man charakterisirt diese Eigenthümlichkeit mit Riemann ganz treffend durch den Aus-

7) R. Beez, Elemente der Geometrie. Plauen, im März 1869.

druck „Ebenheit", doch würde es wohl consequenter sein, sie durch das Prädicat „Geradheit" zu bezeichnen, da dann auch die Ebene als „gerade Fläche" unter den allgemeinen Begriff einer geraden Mannigfaltigkeit sich subsummiren liesse. Der Beweis, dass unser Raum eben ist, würde sofort zu führen sein, wenn die Unmöglichkeit eines Raumes von vier Dimensionen deutlich sich erkennen liesse. Wäre aber ein Raum von vier Dimensionen denkbar und darüber hinaus kein höherer Raum von mehr als vier Dimensionen, so würde die Ebenheit des empirischen Raumes sich ergeben, wenn ausser freier Beweglichkeit der Körper auch die Unendlichkeit unseres Raumes constatirt wäre. Gäbe es aber noch einen Raum von fünf Dimensionen und keinen darüber, so müsste man ausserdem noch beweisen, dass unser Raum bei einer Drehung um vier feste Punkte immer mit sich selbst zusammenfiele. Denn wäre dieses nicht der Fall, so könnte er auch das Analogon der cylindrischen Spirale sein u. s. w.

Was die wissenschaftliche Bedeutung der Riemann'schen Schrift anlangt, so kann es jedenfalls nicht hoch genug angeschlagen werden, dass durch sie zwei neue fruchtbare Begriffe in die Mathematik eingeführt worden sind, nämlich erstens der Begriff einer Mannigfaltigkeit oder mehrfach ausgedehnten Grösse überhaupt und zweitens der schon erwähnte Begriff einer ebenen oder geraden Mannigfaltigkeit. Hierdurch ist der Weg zu einer Metageometrie erst gebahnt worden.

Wenn ich nun auch den hohen Werth der Riemann'schen Schrift als Grundlage für die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten vollständig anerkenne, so vermag ich doch nicht allenthalben, mich den Voraussetzungen Riemann's anzuschliessen. Eine derselben, nämlich die Annahme, dass es möglich sei, constant gekrümmte Mannigfaltigkeiten höherer Ordnungen in sich selbst ohne Dehnung zu verschieben, ist schon oben als unhaltbar nachgewiesen worden. Ferner ist darauf aufmerksam zu machen, dass das Gauss'sche Krümmungsmass nur für torsionslose Flächen, d. h. für Flächen in einem ebenen Raume von drei Dimensionen, nicht aber für gewundene Flächen, d. h. für solche Flächen, welche einen ebenen Raum von mehr als drei Dimensionen durchziehen, giltig ist. Von der letztern Art dürften aber wohl im Allgemeinen die Riemann'schen Flächen sein, aus denen das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit bestimmt werden soll.

Endlich erscheint mir die Annahme, dass das Curvenelement einer Mannigfaltigkeit anders als durch die Quadratwurzel aus einem homogenen Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt werden könne, nicht vereinbar mit dem Wesen der gewöhnlichen Geometrie und einer auf sie gegründeten Metageometrie zu sein. Die gebräuchliche Darstellung des Curvenelements einer Fläche und allgemein einer höhern Mannigfaltigkeit beruht doch in letzter Instanz auf dem Satze, dass das

Quadrat einer begrenzten Geraden in einer Ebene gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf zwei rechtwinklige Axen ist. Dieser Satz — der Fundamentalsatz der algebraischen Geometrie — hat sein Gegenstück in dem Satze der Mechanik, dass das Quadrat einer Kraft durch die Summe der Quadrate ihrer rechtwinkligen Componenten sich ersetzen lässt. Eine derartige Uebereinstimmung in den metrischen Relationen der gewöhnlichen Geometrie und der Mechanik weist offenbar auf einen tiefen innern Zusammenhang zwischen der Natur des empirischen Raumes und der Beschaffenheit der in ihm wirkenden Kräfte hin. Infolge dieser Uebereinstimmung sind Geometrie und Physik als solidarisch miteinander verbunden zu betrachten und jede Aenderung in unseren Voraussetzungen über den Raum, in welchem Kräfte wirken sollen, macht sofort auch eine entsprechende Aenderung der Principien der Mechanik nöthig. Giebt man daher in der Geometrie den Pythagoräischen Satz oder dessen Erweiterung auf — was der Fall ist, wenn man das Curvenelement in einer andern, als der gewöhnlichen Form darzustellen unternimmt —, so muss man consequenterweise in der auf diese Geometrie zu gründenden Mechanik den Satz vom Parallelogramm der Kräfte über Bord werfen. Es wird also durch die Annahme, dass man das Linienelement einer Mannigfaltigkeit durch die p^{te} Wurzel aus einem homogenen Differentialausdrucke p^{ten} Grades darstellen könne, die gewöhnliche Geometrie und Mechanik vollständig negirt und deshalb kann diese Erweiterung der Form des Linienelements einer Mannigfaltigkeit in unserer Metageometrie keinen Platz finden, wobei ich jedoch nicht in Abrede stellen will, dass sie in einer andern Mannigfaltigkeitstheorie möglich sei.

Dass vom rein analytischen Standpunkte aus gegen eine solche Verallgemeinerung Nichts einzuwenden sei, ebenso wenig wie gegen die Ausdehnung der für den gewöhnlichen Raum geltenden mechanischen Begriffe auf Räume von anderer Beschaffenheit,[8]) versteht sich von selbst. Nur darf man nicht glauben, dass eine blosse Applicirung dieser mechanischen Principien auf anders geartete Räume auch schon eine Dynamik in diesen Räumen — also eine Art „Metadynamik" — darstellte. Es ist vielmehr ausser allem Zweifel, dass eine Aenderung in den räumlichen Voraussetzungen auch eine adäquate Aenderung in den mechanischen Grundbegriffen bedingen müsse, wenn man die Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie und Mechanik aufrecht erhalten will.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir zunächst versuchen, den Gedankengang Riemann's zu reproduciren, wobei uns die

8) S. Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Borchardt's Journal Bd. 74; ferner die Abhandlungen Schering's: Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt, Göttingen 1873, und: Verallgemeinerung der Poisson-Jacobi'schen Störungsformeln, Göttingen 1874

bereits mehrfach erwähnte Abhandlung[9]) von Beltrami wesentliche Dienste leisten wird. Wenn wir hierbei vielleicht etwas ausführlicher zu Werke gehen, als unbedingt nöthig erscheint, so leitet uns nur die Absicht, zum Verständniss der Riemann'schen Schrift nach Kräften beizutragen und über unsere Auffassung derselben nirgends einen Zweifel entstehen zu lassen.

Riemann's Entwickelungen stützen sich auf die Verallgemeinerung der bekannten Gauss'schen Formel

52) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta^2,$$

worin ∂s das Linienelement der Fläche, ϱ die von einem beliebig gewählten Punkte der Fläche nach einem der Endpunkte von ∂s gezogene kürzeste oder geodätische Linie und ϑ den Winkel bedeutet, den dieselbe im Punkte $\varrho = 0$ mit einer fest angenommenen, ebenfalls geodätischen Linie bildet. In diesem Falle ist, wie sich aus Gleichung 30) leicht ergiebt, wenn $E = 1$, $F = 0$, $G = m^2$ gesetzt wird, das Krümmungsmass

$$K = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial \varrho^2}.$$

Ist die Fläche abwickelbar oder eben, so hat man

52*) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial \vartheta^2,$$

die bekannte Formel für das Linienelement der Ebene in Polarcoordinaten. Für die Kugel, deren geodätische Linien ϱ sämmtlich grösste Kreise sind, erhält man, wenn man

$$x = R \sin \frac{\varrho}{R} \cos \vartheta,$$

$$y = R \sin \frac{\varrho}{R} \sin \vartheta,$$

$$z = R \cos \frac{\varrho}{R}$$

setzt, wodurch der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

genügt wird:

52**) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \cos \frac{\varrho}{R}\right)^2 \partial \vartheta^2.$$

Es mögen nun neue Coordinaten eingeführt werden, welche durch die Gleichungen

53) $$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \vartheta, \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta \end{aligned}\right.$$

oder durch das Gleichungssystem

53*) $$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \varrho \lambda_1, \\ x_2 &= \varrho \lambda_2, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

definirt sind. Aus 53*) findet man

9) *Teoria fondamentale degli spasii di curvatura costante, Annali di matematica Serie II, Tom II.*

$$\partial x_1^2 + \partial x_2^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2),$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 52), welche man auch schreiben kann

54) $$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2),$$

die Gleichung

$$\partial s^2 = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + (m^2 - \varrho^2)(\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2)$$

entsteht. Durch Differentiation der Gleichungen

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{\varrho}, \quad \lambda_2 = \frac{x_2}{\varrho}$$

findet man aber

$$\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 = \frac{\varrho^2 (\partial x_1^2 + \partial x_2^2) - \varrho^2 \partial \varrho^2}{\varrho^4}$$

$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2)(\partial x_1^2 + \partial x_2^2) - (x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2)^2}{\varrho^4}$$

$$= \frac{(x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1)^2}{\varrho^4},$$

welche, in die vorige Gleichung substituirt, für das Curvenelement die wichtige Formel liefert:

55) $$\partial s^2 = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} \left(\frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{2} \right)^2.$$

Wenn der Factor $\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}$ verschwindet, so erhält man das Linearelement einer Ebene, d. h. einer Fläche von verschwindender Krümmung; offenbar steht also dieser Coefficient zum Krümmungsmass in naher Beziehung. Untersuchen wir zuvörderst, welchen Werth derselbe für die Kugelfläche annimmt. In diesem Falle ist

$$m = R \sin \frac{\varrho}{R}$$

und es nähert sich der Ausdruck

$$\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} = \frac{4\left(R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4}$$

für $\varrho = 0$ dem Grenzwerth

$$-\tfrac{4}{3} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Multiplicirt man denselben mit $-\frac{3}{4}$, so erhält man das Krümmungsmass der Kugelfläche $\frac{1}{R^2}$. Beiläufig mag auch noch bemerkt werden, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{2} \right)^2,$$

in welchem x_1 und x_2 für ein verschwindendes ϱ ebenfalls zur Null abnehmen, das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks darstellt, welches durch die Punkte

$$(0, 0), \quad (x_1, x_2), \quad (\partial x_1, \partial x_2)$$

gebildet wird.

Es entsteht nun die Frage, ob allgemein, wenn m eine beliebige Function von ϱ und θ darstellt, die Gleichung

56) $$K = -\tfrac{3}{4} \lim_{\varrho=0} \frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}$$

giltig bleibt, worin K das Krümmungsmass der Fläche im Punkte $\varrho=0$ bedeutet. Beltrami[10]) beweist dies folgendermassen. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit und Endlichkeit des Krümmungsmasses in der Nähe des Punktes $\varrho=0$ folgt aus der Gauss'schen Formel

$$K = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \varrho^2},$$

dass m von der Form

57) $$m = \varrho + b\varrho^3$$

sein müsse, wo b eine von ϱ und ϑ abhängige Function ist, die mit ihren Derivirten nach ϱ endlich und stetig bleibt. Dann hat man im Punkte $\varrho=0$

$$K = -6b_0.$$

Nun ist mit Rücksicht auf 57)

$$\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4} = 2b_0 = -\frac{K}{3}, \quad \varrho = 0,$$

also

$$K = -\tfrac{3}{4} \lim \frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0.$$

Einen directen Beweis der Richtigkeit dieser Formel findet man, wenn man mit Hilfe der Gleichung 30) unter Zugrundelegung der Gleichung 50) das Krümmungsmass der Fläche bestimmt und berücksichtigt, dass für $\varrho=0$ auch x_1 und x_2 verschwinden. Denn schreibt man 55) in der Form

$$\partial s^2 = \left(1+\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}x_2^2\right)\partial x_1^2 - 2x_1x_2\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\partial x_1\,\partial x_2 + \left(1+\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}x_1^2\right)\partial x_2^2,$$

so ist klar, dass in der Nähe eines gewöhnlichen, d. h. nicht mit einer Singularität behafteten Punktes $\varrho=0$ auf der Fläche der Quotient $\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}$ eine endliche und stetige Grösse darstellen wird, deren Ableitungen nach ∂x_1 und ∂x_2 nicht unendlich werden. Vertauscht man nun in Gleichung 30) p mit x_1, q mit x_2, setzt

10) *Teoria fondamentale* etc. oder Math. Ann. Bd. 2, S. 6.

$$E = 1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_2^2,$$
$$F = -\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1 x_2,$$
$$G = 1 + \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4} x_1^2$$

und substituirt die Ableitungen dieser Grössen nach x_1 und x_2 in die Gleichung 30), so reducirt sich dieselbe schliesslich, wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gesetzt werden, auf den einfachen Ausdruck

$$K \lim \frac{m^2}{\varrho^2} = -3 \lim \frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0.$$

Der Quotient $\frac{m^2}{\varrho^2}$ hat aber für $\varrho = 0$ zur Grenze die Einheit. Denn das Linienelement der krummen Fläche fällt für $\varrho = 0$ offenbar zusammen mit dem Linienelement

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial \vartheta^2$$

der im Punkte $\varrho = 0$ berührenden Ebene. Man erhält daher auch auf diesem Wege für das Krümmungsmass einer Fläche den Ausdruck 56).

Bevor wir die erhaltenen Resultate, die in der Hauptsache schon Beltrami gefunden hat, auf Gebiete von mehr als zwei Dimensionen ausdehnen, wollen wir ebenfalls nach Anleitung dieses scharfsinnigen Interpreten Lobatschefsky's und Riemann's diejenige Formel für das Linienelement einer Fläche von constanter Krümmung ableiten, aus welcher die allgemeine Formel Riemann's für das Linienelement einer constant gekrümmten Mannigfaltigkeit höherer Ordnung hervorgegangen ist. Zu diesem Zwecke erinnern wir zunächst daran, dass die Formel 52**)

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + \left(R \sin \frac{\varrho}{R}\right)^2 \partial \vartheta^2$$

nicht blos für die Kugelfläche vom Halbmesser R, sondern überhaupt für jede Fläche, deren Krümmung constant und gleich $\frac{1}{R^2}$ ist, Geltung hat. Denn aus dem Satze von der Erhaltung der Krümmung einer Fläche bei der Deformation geht hervor, dass, wenn die Krümmung constant und gleich c ist, die Fläche stets auf einer Kugel vom Halbmesser $\sqrt{\frac{1}{c}}$ aufgewickelt werden kann und dass man daher dem Linienelement einer solchen Fläche stets die obige Form 52**) geben kann, die zunächst nur für die Kugel abgeleitet worden war. Führt man in das mit ihr identische System

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

eine neue Art Coordinaten ein, welche durch die Gleichungen

$$x_1 = 2R\lambda_1 \tan\frac{\varrho}{2R},$$

$$x_2 = 2R\lambda_2 \tan\frac{\varrho}{2R}$$

definirt sind, so wird

$$\partial x_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\varrho}{2R}}\lambda_1\,\partial\varrho + 2R\tan\frac{\varrho}{2R}\,\partial\lambda_1$$

oder

$$\partial x_1 \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_1\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_1$$

und ebenso

$$\partial x_2 \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_2\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_2,$$

woraus sich durch Quadrirung und Addition, da

$$\lambda_1\,\partial\lambda_1 + \lambda_2\,\partial\lambda_2 = 0$$

ist, ergiebt

$$(\partial x_1^2 + \partial x_2^2)\cos^4\frac{\varrho}{2R} = \partial\varrho^2 + R^2\sin^2\frac{\varrho}{R}(\partial\lambda_1^2 + \partial\lambda_2^2)$$
$$= \partial s^2.$$

Wegen 57) ist aber

$$x_1^2 + x_2^2 = 4R^2\tan^2\frac{\varrho}{2R}$$
$$= \frac{4R^2}{\cos^2\frac{\varrho}{2R}} - 4R^2,$$

folglich

$$\cos^2\frac{\varrho}{2R} = \frac{4R^2}{4R^2 + x_1^2 + x_2^2},$$

also

$$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4R^2}}\sqrt{\partial x_1^2 + \partial x_2^2},$$

oder wenn man

$$R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt,

59) $$\partial s = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)}\sqrt{\partial x_1^2 + \partial x_2^2}.$$

Dies ist die **Riemann**'sche Formel für $n = 2$. Schreibt man sie in der Gestalt

$$\partial s^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)^2}\partial x_1^2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)^2}\partial x_2^2$$

und berechnet die Krümmung nach Gleichung. 30), indem man

$$E = G = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)^2}, \quad F = 0$$

setzt, oder aus einer der beiden Gleichungen 35) und 39), indem man n den Werth 2 giebt, so erhält man für die Krümmung der Fläche den constanten Werth

$$K = \alpha.$$

Die bis jetzt für Flächen aufgestellten Formeln wollen wir weiter in der Art verallgemeinern, dass wir zu den Riemann'schen Ausdrücken gelangen. Offenbar ist die Formel, von der wir ausgingen:

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 \partial \vartheta^2,$$

wenn sie in der Gestalt

$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2)$$

mit der Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

geschrieben wird, ein specieller Fall der allgemeineren Gleichung

60)
$$\partial s^2 = \partial \varrho^2 + m^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2),$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1.$$

Führt man neue Coordinaten

61)
$$x_k = \varrho \lambda_k,$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

ein, die also der Bedingung

62)
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \varrho^2$$

genügen, so ergiebt sich leicht

$$\partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \ldots + \partial x_n^2 = \partial \varrho^2 + \varrho^2 (\partial \lambda_1^2 + \partial \lambda_2^2 + \ldots + \partial \lambda_n^2),$$

folglich, wenn man $\partial \varrho^2$ aus 60) eliminirt:

$$\partial s^2 = \Sigma \partial x_k^2 + (m^2 - \varrho^2) \Sigma \partial \lambda_k^2,$$
$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Da

$$\partial \lambda_k = \frac{\varrho \partial x_k - x_k \partial \varrho}{\varrho^2}$$

ist, so folgt

$$\Sigma \partial \lambda_k^2 = \frac{\Sigma x_k^2 \Sigma \partial x_k^2 - (\Sigma x_k \partial x_k)^2}{\varrho^4}$$
$$= \frac{\Sigma (x_i \partial x_k - x_k \partial x_i)^2}{\varrho^4},$$
$$i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Daher wird

63)
$$\partial s^2 = \Sigma \partial x_k^2 + \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4} \Sigma \left(\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}\right)^2.$$

Da im Punkte $\varrho = 0$ die x sämmtlich aufeinander senkrecht sind, so stellt

$$\Sigma \left(\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}\right)^2$$

für verschwindende x das Quadrat der Fläche des unendlich kleinen Dreiecks, welches durch die Punkte

$$(0, 0, \ldots 0), \quad (\partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_n), \quad (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

bestimmt ist, dar. Seine Projection auf die durch die Linienelemente x_i und x_k gelegte Ebene hat den Ausdruck

$$\frac{x_i \partial x_k - x_k \partial x_i}{2}.$$

Analog dem Frühern würde nun auch der Grenzwerth

$$Lim \frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0$$

in nächster Beziehung zum Krümmungsmass stehen müssen, da das Verschwinden von $\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho^4}$ den Ausdruck 63) auf

$$\partial s^2 = \partial x_1{}^2 + \partial x_2{}^2 + \ldots + \partial x_n{}^2$$

reducirt, welches das Quadrat des Linienelements einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit darstellt.

Bevor wir jedoch unsere Untersuchung weiter fortsetzen, wollen wir uns überzeugen, ob die vorstehende Entwickelung auch wirklich mit den Angaben Riemann's im Einklang sich befindet, und zugleich diejenigen Partien seiner Schrift zusammenstellen, welche auf das Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit Bezug haben.

Auf S. 9 und 10 heisst es:

„und setze ... solche Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, dass die Quadratsumme $= s^2$ ist. (S. Gl. 62, wo ϱ mit s zu vertauschen ist.) Führt man diese Grössen ein, so wird für unendlich kleine Werthe von x das Quadrat des Linienelements $= \Sigma \partial x^2$ [63)], das Glied der nächsten Ordnung in demselben aber gleich einem homogenen Ausdrucke zweiten Grades der $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen $(x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1)$, $(x_1 \partial x_3 - x_3 \partial x_1) \ldots$, also eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension, so dass man eine endliche Grösse $\left(\frac{4(m^2 - \varrho^2)}{\varrho^4}\right)$ erhält, wenn man sie durch das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks dividirt, in dessen Eckpunkten die Werthe der Veränderlichen sind $(0, 0, 0 \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, $(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3 \ldots)$. Diese Grösse behält denselben Werth, so lange die Grössen x und ∂x in denselben binären Linearformen (x_i und x_k) enthalten sind, oder so lange die beiden kürzesten Linien von den Werthen 0 bis zu den Werthen x und von den Werthen 0 bis zu den Werthen ∂x in demselben Flächenelemente bleiben, und hängt also nur von Ort und Richtung derselben ab. Sie wird offenbar $= 0$, wenn die dargestellte Mannigfaltigkeit eben, d. h. das Quadrat des Linienelements auf $\Sigma \partial x^2$ reducirbar ist und kann daher als das Mass der in diesem Punkte in dieser Flächenrichtung stattfindenden

Abweichung der Mannigfaltigkeit von der Ebenheit angesehen werden. Multiplicirt mit $-\frac{3}{4}$ wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geh. Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung der Massverhältnisse einer n-fach ausgedehnten in der vorausgesetzten Form darstellbaren Mannigfaltigkeit wurden vorhin $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionen des Ortes nöthig gefunden; wenn also das Krümmungsmass in jedem Punkte in $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist, so werden daraus die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen, wofern nur zwischen diesen Werthen keine identischen Relationen stattfinden, was in der That, allgemein zu reden, nicht der Fall ist."

Ferner auf S. 12:

„Um dem Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einem gegebenen Punkte und einer gegebenen durch ihn gelegten Flächenrichtung eine greifbare Bedeutung zu geben, muss man davon ausgehen, dass eine von einem Punkte ausgehende kürzeste Linie völlig bestimmt ist, wenn ihre Anfangsrichtung gegeben ist. Hiernach wird man eine bestimmte Fläche erhalten, wenn man sämmtliche von dem gegebenen Punkte ausgehenden und in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, und diese Fläche hat in dem gegebenen Punkte ein bestimmtes Krümmungsmass, welches zugleich das Krümmungsmass der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in dem gegebenen Punkte und der gegebenen Flächenrichtung ist."

Aus den angezogenen Stellen geht deutlich hervor, dass Riemann nicht sowohl einen bestimmten Ausdruck für das Krümmungsmass einer n-fachen Mannigfaltigkeit aufzustellen beabsichtigt, als vielmehr die Meinung ausspricht, dass man die Massverhältnisse derselben bestimmen könne, wenn das Krümmungsmass in jedem Punkte nach $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen gegeben ist.

Wir wollen zunächst untersuchen, ob es im Allgemeinen möglich ist, aus der Formel 63) die Krümmung einer Fläche zu bestimmen, welche die beiden Linearelemente x_i und x_k enthält. Wir setzen zu diesem Zwecke in 63) sämmtliche x bis auf die genannten x_i und x_k gleich Null und erhalten

$$63^*)\qquad \partial s^2 = \partial x_i^2 + \partial x_k^2 + \left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik} \left(\frac{x_i\,\partial x_k - x_k\,\partial x_i}{2}\right)^2,$$

worin

$$\left(\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik} = \frac{m^2-(x_i^2+x_k^2)}{(x_i^2+x_k^2)^2}.$$

Die Formel 63*) hat dann ganz die Form der Gleichung 55), so dass man versucht ist, zu glauben, der Grenzwerth

64) $$k = -\tfrac{3}{4}\, lim \left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik}, \quad \varrho = 0$$ [11])

ergäbe wie dort das Krümmungsmass der durch das Linearelement 63*) charakterisirten Fläche. Dass dies jedoch falsch sein würde, lehrt folgende einfache Betrachtung. Die Gleichung 56) ist aus 30) abgeleitet worden, bei deren Entwickelung vorausgesetzt wurde, dass die Cartesischen Coordinaten x, y, z einer Fläche als Functionen zweier unabhängigen Parameter p und q gegeben seien, so dass also die Gleichungen stattfinden

$$x = f_1(p, q), \quad y = f_2(p, q), \quad z = f_3(p, q).$$

Die Fläche, deren Krümmung durch die Gleichung 56) ausgedrückt wird, ist demnach eine solche, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen enthalten ist. Da wir eine Curve, die in einem ebenen Raume von zwei Dimensionen, d. h. in einer Ebene liegt, als eine torsionslose Curve oder als Curve von einfacher Krümmung bezeichnen, so würden wir der Analogie nach jede Fläche der gewöhnlichen Geometrie — also auch die in Rede stehende — zu den torsionslosen Flächen oder Flächen von einfacher Krümmung zu rechnen haben. Einen Gegensatz zu diesen bilden die gewundenen Flächen, die einen Raum von mehr als drei Dimensionen durchziehen. Sie sind das Analogon der Curven doppelter Krümmung. Wenn eine solche im gewöhnlichen Raume durch die Gleichungen

$$x_0 = f_0(p), \quad x_1 = f_1(p), \quad x_2 = f_2(p),$$

im ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen aber allgemein durch das System

$$x_k = f_k(p), \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \quad n > 1$$

sich darstellen lässt, so würde dem entsprechend eine Fläche von doppelter Krümmung durch das Gleichungssystem

$$x_k = f_k(p_1, p_2), \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \quad n > 2$$

zu charakterisiren sein. Hieraus ergiebt sich aber das Linearelement derselben:

65) $$\begin{aligned} \partial s^2 &= \Sigma\, \partial x_k^2 \\ &= a_{11}\, \partial p_1^2 + 2 a_{12}\, \partial p_1\, \partial p_2 + a_{22}\, \partial p_2^2, \end{aligned}$$

und die Coefficienten dieser Form würden die Werthe haben:

---

11) Dieser Ausdruck ist identisch mit dem von Lipschitz aufgestellten:

$$k_0 = -\tfrac{3}{4}\, \frac{[2\varphi(du) - 2f_0(du)]_2}{f_0(u)(f_0(du) - d\sqrt{f_0(u)})^2},$$

sobald man nur ein gewisses Geschlecht von Formen in Betracht zieht. (Siehe Lipschitz, Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Borchardt's Journal Bd 72.)

$$a_{11} = \Sigma \left(\frac{\partial x_k}{\partial p_1}\right)^2,$$
$$a_{12} = a_{21} = \Sigma \frac{\partial x_k}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_2},$$
$$a_{22} = \Sigma \left(\frac{\partial x_k}{\partial p_2}\right)^2.$$

Der analytische Ausdruck für das Linienelement einer gewundenen Fläche unterscheidet sich demnach nicht von dem ür das Linienelement einer Fläche einfacher Krümmung und doch beruht er auf wesentlich anderen geometrischen Voraussetzungen. Wenn nun die Gauss'sche Gleichung 30) aus den Coefficienten dieser quadratischen Form 65) das Krümmungsmass einer Fläche finden lehrt, so darf man nicht ausser Acht lassen, dass die ganze Entwickelung auf der Annahme $n = 2$ basirt ist. Denn nur in diesem Falle ist die Normale eines Punktes der Fläche eindeutig bestimmt. Ist $n > 2$, so ist die Lage der Normale unbestimmt, wie bei den Curven doppelter Krümmung. Man hat dann zunächst diejenige ebene Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen zu construiren, in welcher zwei aufeinander folgende Flächenelemente liegen — die Krümmungsmannigfaltigkeit. Denn ganz ebenso, wie bei den gewundenen Curven im Ausdrucke des Krümmungshalbmessers die Bestimmungsstücke der Osculationsebene auftreten, müssten auch in der Formel für die Krümmung einer gewundenen Fläche die Bestimmungsstücke des ebenen dreifachen Osculationsraumes enthalten sein. Dies ist aber bei der Gauss'schen Formel nicht der Fall, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil sie eben nur für Flächen gilt, deren Osculationsräume sämmtlich mit dem einen, empirisch gegebenen Raume zusammenfallen.

Durch das Vorstehende halte ich es für erwiesen, dass im Allgemeinen die Krümmung einer Fläche, deren Linienelement durch die Gleichung 63*) gegeben ist, sobald sie nicht in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegt, durch die Gleichung 64) nicht gefunden werden kann, und somit ist die Unhaltbarkeit der Riemann'schen Definition dargethan.

Aber auch zugegeben, dass es möglich sei, die Krümmungen der $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenelemente zu bestimmen, welche durch die n Kanten des rechtwinkligen Elementar-Parallelepipedons (x_1, x_2, ... x_n) sich legen lassen, so ist nicht abzusehen, wie aus denselben das Krümmungsmass der Mannigfaltigkeit zusammengesetzt werden soll, wenn nicht dieses Parallelepiped mit demjenigen zusammenfällt, welches die Elemente der n Krümmungslinien im Punkte $\varrho = 0$ bilden. Dies findet nur statt bei den ebenen und kugelförmigen Mannigfaltigkeiten und deshalb gelangt man auch bei diesen, wie wir noch zeigen wollen, mittelst des **Riemann**'schen Verfahrens zu einem richtigen Resultat.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ Werthe des Ausdruckes

$$lim \left(\frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}\right)_{ik}, \quad \varrho = 0$$

unmöglich von einander verschieden sein können. Denn da

$$\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4} = \frac{m^2-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2},$$

so wird für $\varrho = 0$, wodurch auch $x_1, x_2, \ldots x_n$ Null werden, der vorstehende Ausdruck sich einem Werthe nähern, der von den x unabhängig ist. Denselben Grenzwerth wird aber auch

$$\left(\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik} = \frac{m^2-(x_i^2+x_k^2)}{(x_i^2+x_k^2)^2}$$

haben. Denn es bleibt sich jedenfalls gleich, ob man in dem Ausdrucke $\frac{m^2-\varrho^2}{\varrho^4}$ gleichzeitig alle x gleich Null setzt, oder erst $(n-2)$ derselben und schliesslich auch noch die übrigen zwei. Da nun die ebenen und kugelförmigen Mannigfaltigkeiten in jedem Punkte nach jeder beliebigen Flächenrichtung, die durch zwei senkrecht aufeinander stehende geodätische Linien bestimmt ist, denselben Werth der Krümmung besitzen, ja zwei beliebig gewählte, einander senkrecht durchschneidende geodätische Linien überdies auch als Krümmungslinien angesehen werden können, so wird sich für sie in der That sowohl das Krümmungsmass nach den $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen im Punkte $\varrho = 0$, als auch die Krümmung der Mannigfaltigkeit selbst in diesem Punkte berechnen lassen.

Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit lässt sich durch das System

$$66)\qquad x_k - x_k^0 = b_{k,1}\, p_1 + b_{k,2}\, p_2 + \ldots + b_{k,n}\, p_n, \quad k = 0, 1, \ldots n,$$

worin die x die Cartesischen Coordinaten des veränderlichen Punktes, p die n Parameter bedeuten, darstellen. Unterwirft man die Constanten b den Bedingungen

$$b_{0r}^2 + b_{1r}^2 + \ldots + b_{nr}^2 = 1,$$
$$b_{0r}\, b_{0s} + b_{1r}\, b_{1s} + \ldots + b_{nr}\, b_{ns} = 0,$$

so sind die Geraden $p_1, p_2 \ldots p_n$ auf einander senkrecht und das Linearelement hat die Form

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2$$
$$= \partial p_1^2 + \partial p_2^2 + \ldots + \partial p_n^2.$$

In diesem Falle ist nach 63)

$$-\tfrac{3}{4}\, Lim\, \frac{4(m^2-\varrho^2)}{\varrho^4}, \quad \varrho = 0$$

für sämmtliche $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenelemente $(\partial p_i, \partial p_k)$ Null. Durch Elimination der p aus den Gleichungen 66) erhält man aber die Gleichung der ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit in der Form

$$F = a_0(x_0 - x_0^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0.$$

Das Krümmungsmass derselben ergiebt sich aus der Formel[12])

$$67)\qquad K = -\frac{1}{S^{n+2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{01} & \ldots & F_{0n} \\ F_1 & F_{10} & F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_n & F_{n0} & F_{n1} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix},$$

worin $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$, $F_{ki} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$, $S = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2}$ ebenfalls gleich Null.

Um das Curvenelement der kugelförmigen Mannigfaltigkeit zu erhalten, setze man

$$68)\qquad \begin{aligned} x_0 &= R \cos\frac{\varrho}{R}, \\ x_1 &= R \sin\frac{\varrho}{R} \cos\vartheta_1, \\ x_2 &= R \sin\frac{\varrho}{R} \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{n-1} &= R \sin\frac{\varrho}{R} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1}, \\ x_n &= R \sin\frac{\varrho}{R} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}, \end{aligned}$$

welche Werthe, wie man leicht sieht, der Gleichung des kugelförmigen Raumes

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

genügen. Das Linienelement dieser Mannigfaltigkeit ist dann

$$\begin{aligned} \partial s^2 &= \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2 \\ 69)\qquad &= \partial\varrho^2 + \left(R \sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 \{\partial\vartheta_1^2 + \sin^2\vartheta_1\, \partial\vartheta_2^2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\, \partial\vartheta_{n-1}^2\}. \end{aligned}$$

Setzt man

12) S. Mathem. Annal. Bd. VII, S. 392.

$$
68)\quad \begin{aligned}
\lambda_1 &= \cos\vartheta_1,\\
\lambda_2 &= \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2,\\
&\;\;\vdots\\
\lambda_{n-1} &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1},\\
\lambda_n &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1},
\end{aligned}
$$

so ist

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

und man erhält das Linienelement der Mannigfaltigkeit in der Form

$$69^*)\qquad \partial s^2 = \partial\varrho^2 + \left(R \sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 (\partial\lambda_1^2 + \partial\lambda_2^2 + \ldots + \partial\lambda_n^2).$$

Führt man in diese Formel neue Coordinaten ein, welche durch die Gleichungen

$$p_k = \varrho\lambda_k,\quad k = 1, 2, \ldots n$$

definirt sind, worin die λ dieselbe Bedeutung haben wie vorher, so folgt

$$\Sigma\,\partial p_k^2 = \partial\varrho^2 + \varrho^2\,\Sigma\,\partial\lambda_k^2$$

und man findet ganz wie bei Ableitung der Gleichung 63)

$$70)\qquad \partial s^2 = \Sigma\,\partial p_k^2 + \frac{4\left(R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4}\,\Sigma\left(\frac{p_i\,\partial p_k - p_k\,\partial p_i}{2}\right)^2.$$

Für $\varrho = 0$ wird

$$Lim\,\frac{4\left(R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2\right)}{\varrho^4} = -\tfrac{4}{3}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $-\frac{3}{4}$, so erhält man $\frac{1}{R^2}$, welches das Krümmungsmass einer Kugelfläche ist. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man $(n-2)$ der p gleich Null setzt und unter Voraussetzung der Torsionslosigkeit der hierdurch bestimmten Elementarfläche das Krümmungsmass derselben ableitet. Das Linearelement dieser Fläche hat dann die Form

$$71)\quad \partial s^2 = \partial p_i^2 + \partial p_k^2 + 4\left(\frac{R^2 \sin^2\frac{\varrho}{R} - \varrho^2}{\varrho^4}\right)_{ik}\left(\frac{p_i\,\partial p_k - p_k\,\partial p_i}{2}\right)^2,$$

und es ist leicht nachzuweisen, dass wir es im vorliegenden Falle in der That mit einer torsionslosen Fläche zu thun haben. Denn um direct von dem Ausdrucke

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2,$$

wobei die x der Bedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

genügen, zu der Formel 70) zu gelangen, haben wir für x folgende Werthe zu substituiren:

$$x_0 = R \cos \frac{\varrho}{R},$$

$$x_1 = R \frac{p_1}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R},$$

$$x_2 = R \frac{p_2}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R},$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$x_n = R \frac{p_n}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R}.$$

Setzt man hier alle p bis auf p_i und p_k gleich Null, so erhält man

$$x_0 = R \cos \frac{\varrho}{R},$$

$$x_i = R \frac{p_i}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R},$$

$$x_k = R \frac{p_k}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{R}.$$

Diese drei Gleichungen repräsentiren eine im ebenen Raume x_0, x_i, x_k gelegene Kugel

$$x_0^2 + x_i^2 + x_k^2 = R^2,$$

deren Curvenelement durch die Gleichung 71) gegeben ist. Die geodätischen Linien sowohl, als die Krümmungslinien der kugelförmigen Mannigfaltigkeit sind grösste Kreise; daher lassen sich für $\varrho = 0$ die ∂p als die Elemente der n Krümmungslinien ansehen, die vom Punkte $\varrho = 0$ ausgehen. Bedeuten nun ϱ_i und ϱ_k die zu den Elementen ∂p_i und ∂p_k gehörigen Hauptkrümmungshalbmesser, so kann das Krümmungsmass K_{ik} der durch die Gleichung 71) charakterisirten Fläche einerseits durch die Formel

$$K_{ik} = -3 \, Lim \left(\frac{R^2 \sin^2 \frac{\varrho}{R} - \varrho^2}{\varrho^4} \right)_{ik}, \quad \varrho = 0,$$

andererseits durch

$$K_{ik} = \frac{1}{\varrho_i \cdot \varrho_k}$$

dargestellt werden. Das Krümmungsmass der n-fachen Kugelmannigfaltigkeit ergiebt sich daher

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n} = \sqrt[n-1]{K_{ik}^{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

und da

$$K_{ik} = \frac{1}{R^2}$$

ist:

$$K = \frac{1}{R^n}.$$

Das gleiche Resultat erhält man, wenn man das Krümmungsmass derselben Mannigfaltigkeit:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

aus der Formel 67) berechnet, worin

$$F = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R^2,$$

$$F_k = 2x_k, \quad S = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2},$$

$$F_{ik} = F_{ki} = 0, \quad F_{kk} = 2$$

zu setzen ist.

Der Formel 69*), welche einen Ausdruck für das Linienelement des n-fachen kugelförmigen Raumes liefert, wollen wir endlich noch die Gestalt geben, welche Riemann dem Linienelement einer constant gekrümmten Mannigfaltigkeit von n Dimensionen überhaupt vindicirt. Setzen wir

$$72)\qquad p_r = 2R\lambda_r \tan\frac{\varrho}{2R},$$

so wird

$$\partial p_r \cos^2\frac{\varrho}{2R} = \lambda_r\,\partial\varrho + R\sin\frac{\varrho}{R}\,\partial\lambda_r,$$

also

$$73)\qquad \partial\varrho^2 + \left(R\sin\frac{\varrho}{R}\right)^2 \Sigma\,\partial\lambda_r^2 = \cos^4\frac{\varrho}{2R}\,\Sigma\,\partial p_r^2.$$

Durch Vergleichung von 69*) und 73) findet man

$$\partial s = \cos^2\frac{\varrho}{2R}\sqrt{\Sigma\,\partial p_r^2}.$$

Nun ist wegen 72)

$$\Sigma p_r^2 = 4R^2\tan^2\frac{\varrho}{2R},$$

folglich

$$\cos^2\frac{\varrho}{2R} = \frac{4R^2}{4R^2 + \Sigma p_r^2},$$

also

$$\partial s = \frac{1}{1 + \dfrac{\Sigma p_r^2}{4R^2}}\sqrt{\Sigma\,\partial p_r^2}$$

oder, wenn man

$$R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt:

$$74)\qquad \partial s = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha}{4}\,\Sigma p_r^2}\sqrt{\Sigma\,\partial p_r^2}, \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

Diese Formel stellt also das Linienelement einer kugelförmigen Mannigfaltigkeit dar. Wenn Riemann sie überhaupt als Ausdruck für das Linienelement einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung angesehen wissen will, so beruht dies, wie schon oben erwähnt worden ist, auf der unhaltbaren Voraussetzung, dass eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung sich deformiren und auf einer kugelförmigen Mannigfaltigkeit von ebensoviel Dimensionen aufwickeln lasse.

Die kugelförmige Mannigfaltigkeit, deren Linienelement durch die Gleichung 74) gegeben ist, besitzt — wie nach der Ableitung dieser Formel nicht anders zu erwarten steht — in ihren sämmtlichen Elementarflächen, die ohne Ausnahme torsionslos sind, die Krümmung α. Denn setzt man alle p bis auf p_i und p_k gleich Null, so kommt

$$\partial s = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}(p_i^2+p_k^2)} \sqrt{\partial p_i^2 + \partial p_k^2},$$

welche Gleichung dieselbe Form hat, wie 59). Die Torsionslosigkeit der betreffenden Fläche ergiebt sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie vorher. Um das Element

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \partial x_1^2 + \ldots + \partial x_n^2$$

des kugelförmigen Raumes

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

in die Form 74) zu transformiren, hat man

$$x_0 = R \cos\frac{\varrho}{R},$$

$$x_r = \frac{p_r}{2} \sin\frac{\varrho}{R} \cot\frac{\varrho}{2R}$$

mit der Bedingung

$$\Sigma p_r^2 = 4R^2 \tan^2\frac{\varrho}{2R}$$

zu setzen. Dann verschwinden, wenn man die p bis auf zwei gleich Null setzt, alle x bis auf drei, folglich hat man eine Fläche, welche in einem ebenen Raume von drei Dimensionen liegt, für welche also die Gauss'sche Formel 30) giltig ist.

Gehen wir noch einen Augenblick auf die Formel 60) zurück, welche aller Wahrscheinlichkeit nach Riemann seinen Betrachtungen zu Grunde gelegt hat. Sie lautete:

$$\partial s^2 = \partial\varrho^2 + m^2(\partial\lambda_1^2 + \partial\lambda_2^2 + \ldots + \partial\lambda_n^2), \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 1$$

oder, wenn wir statt der λ die in 68*) gegebenen Werthe einführen:

75) $\partial s^2 = \partial\varrho^2 + m^2(\partial\vartheta_1^2 + \sin^2\vartheta_1\,\partial\vartheta_2^2 + \ldots + \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\partial\vartheta_{n-1}^2)$,

und stellte die Verallgemeinerung der Gauss'schen Gleichung

$$\partial s^2 = \partial\varrho^2 + m^2\,\partial\vartheta_1^2$$

dar. Um das Linienelement der kugelförmigen Mannigfaltigkeit aus ihr zu erhalten, hat man $m = R\sin\frac{\varrho}{R}$ zu setzen. Ebenso ergiebt sich das

Linienelement der ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit, wenn man für m die Grösse ϱ substituirt. Denn wenn $x_1, x_2, \dots x_n$ die Cartesischen Coordinaten einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit bedeuten, so erhält man das Linienelement, in Polarcoordinaten ausgedrückt, wenn man

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos\vartheta_1, \\
x_2 &= \varrho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1}, \\
x_n &= \varrho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}
\end{aligned}$$

setzt. Man findet dann

$$\begin{aligned}
\partial s^2 &= \Sigma \partial x_k^2 \\
&= \partial \varrho^2 + \varrho^2 \partial\vartheta_1^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 \partial\vartheta_2^2 + \dots + \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \dots \sin^2\vartheta_{n-2} \partial\vartheta^2_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dass aber die Formel 75) dem Linienelement jeder beliebigen andern Mannigfaltigkeit Genüge leistet, dürfte wohl nicht zu erwarten sein. Hierzu ist sie offenbar nicht allgemein genug. Wir ersetzen sie daher durch die umfassendere Gleichung:

$$76)\qquad \partial s^2 = \partial \varrho^2 + m_1^2 \partial\vartheta_1^2 + m_2^2 \partial\vartheta_2^2 + \dots + m^2_{n-1} \partial\vartheta^2_{n-1}.$$

Da für $\varrho = 0$ das Linienelement der n-fachen Mannigfaltigkeit zusammenfällt mit dem Linienelement der in diesem Punkte berührenden ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit, so müssen die m folgenden Grenzbedingungen Genüge leisten:

$$77)\qquad \begin{aligned}
&Lim \frac{m_1}{\varrho} = 1, \\
&Lim \frac{m_2}{\varrho} = \sin\vartheta_1, \\
&\vdots \\
&Lim \frac{m_{n-1}}{\varrho} = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{n-2}.
\end{aligned}$$

Auch Beltrami und Lipschitz haben in ihren späteren Abhandlungen[13]) allgemeinere Gleichungen abgeleitet. Von den Formeln, die sie daselbst aufstellen:

$$\partial s^2 = \partial x_0^2 + \Sigma a_{ik} \partial x_i \partial x_k, \quad {}^{i}_{k} = 1, 2, \dots n-1$$

und

$$\partial s^2 = \partial R^2 + \Sigma m_{ik} \partial \varphi_r \partial \varphi_s, \quad {}^{r}_{s} = 1, 2, \dots n-1,$$

---

13) *Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali,* S. 17, und Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt's Journal Bd. 74, S. 146, Gl. 74), in welcher $2(U+H) = 1$ zu setzen ist.

ist aber nur noch ein Schritt bis zu der Formel 76). Dass diese aus der allgemeinen quadratischen Form

$$\partial s = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$$

wirklich abgeleitet werden könne, ergiebt sich aus Beltrami's Theorie des ersten Differentialparameters. Wir erhalten mit Hilfe derselben folgende Transformationsrelationen:

78) $$\Sigma_{ik}\frac{\alpha_{ik}}{a}\frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho}{\partial x_k} = 1 = \varDelta_1(\varrho),$$

79) $$\Sigma_{ik}\frac{\alpha_{ik}}{a}\frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial x_k} = 0,$$

80) $$\Sigma_{ik}\frac{\alpha_{ik}}{a}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial x_i}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial x_k} = \frac{1}{m_r^2},$$

81) $$\Sigma_{ik}\frac{\alpha_{ik}}{a}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial x_i}\frac{\partial\vartheta_s}{\partial x_k} = 0,$$

worin

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial a}{\partial a_{ik}}$$

ist. Die partielle Differentialgleichung 78) stellt den ersten Differentialparameter von ϱ in Bezug auf die Form

$$\varphi = \Sigma a_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k$$

dar. Sie fällt zusammen, wie weiter unten gezeigt werden soll, mit der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung, welche das System der isoperimetrischen Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{d\dfrac{\partial\varphi}{\partial x'_i}}{dt}, \quad x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots n$$

ersetzt, denen die x zu genügen haben, damit das Integral

$$\varrho = \int\sqrt{a_{ik}\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_k}{dt}}\,dt$$

ein Minimum wird. Für $n = 2$ hat Gauss in Art. 22 seiner *Disquisitiones circa superficies curvas* unter Voraussetzung der gewöhnlichen Form des Curvenelements einer Fläche

$$\partial s^2 = E\,\partial p^2 + 2F\,\partial p\,\partial q + G\,\partial q^2$$

die betreffenden Transformationsrelationen [s. Gl. 5) und 6)] gegeben. Dieselben sind:

$$EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,$$

$$\left(E\frac{\partial r}{\partial q} - F\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F\frac{\partial r}{\partial q} - G\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Setzt man hierin $p = p_1$, $q = p_2$, $E = a_{11}$, $F = a_{12} = a_{21}$, $G = a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a$, so lassen sich diese Gleichungen übersichtlicher schreiben:

$$\frac{1}{a}\left(a_{22}\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial r}{\partial p_2} + a_{11}\left(\frac{\partial r}{\partial p_2}\right)^2\right) = 1,$$

$$\frac{1}{a}\left(a_{22}\frac{\partial r}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - a_{21}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - a_{12}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + a_{11}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right) = 0$$

oder, da

$$a_{22} = \alpha_{11}, \quad -a_{21} = \alpha_{12}, \quad -a_{12} = \alpha_{21}, \quad a_{11} = \alpha_{22}$$

ist:

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{2\alpha_{12}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial r}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{22}}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial p_2}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\alpha_{12}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{21}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\alpha_{22}}{a}\frac{\partial r}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = 0,$$

welche bezüglich den Gleichungen 78) und 79) entsprechen. Es ist also zur Vervollständigung noch die dritte Gleichung 80) hinzuzufügen:

$$\frac{\alpha_{11}}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{2\alpha_{12}}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \frac{\alpha_{22}}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

oder in der Gauss'schen Bezeichnungsweise

$$\frac{EG - F^2}{m^2} = E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2.$$

Sie dient zur Bestimmung der Function m. Die vierte Gleichung 81) kommt für $n = 2$ in Wegfall.

Eine ausführlichere Ableitung der Gleichung 78) soll am Schlusse der Abhandlung gegeben werden, nachdem zuvor die Zulässigkeit der Form, unter welcher Beltrami im Anschluss an Riemann's Abhandlung das Linearelement einer Mannigfaltigkeit von constanter negativer Krümmung und die Berechtigung der damit im Zusammenhang stehenden Nicht-Euklidischen Geometrie des Raumes geprüft worden ist.

(Schluss folgt.)

Berichtigungen im vorhergehenden Theile der Abhandlung.

Seite 432	Zeile 12	von oben	statt	$+\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_i}$	ist zu lesen	$-\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_n}$,
„ 436	„ 8	„	„	$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{x}{2}x_l$	„ „ „	$\frac{\partial h}{\partial x_l} = \frac{\alpha}{2}x_l$,
„ 438	„ 11	„ unten	„	$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x_l^2}$	„ „ „	$\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x_l^2\right)^2}$,
„ 443	„ 1	„ oben	„	$G_4 = \psi$	„ „ „	$G_4 = -\frac{1}{2}\psi$,
„ 443	„ 13	„	„	A_{22}	„ „ „	A_{12},
„ 444	„ 10	„ unten	„	ψ	„ „ „	$-\frac{1}{2}\psi$.

XVII.

Axonometrische Theorie der perspectivischen und projectivischen Collineation im Raume.

Von

Prof. Dr. GUIDO HAUCK
in Tübingen.

(Fortsetzung zu V, Heft 2.)

(Hierzu Taf. VIII, Fig. 1—5.)

Die folgenden Ausführungen schliessen sich direct an den Aufsatz: „Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective“ im 2. Hefte des gegenwärtigen Jahrgangs dieser Zeitschrift (S. 81 flgg.) an. Sie übertragen die dort gewonnenen Resultate auf die räumliche Projection und geben damit die Grundzüge einer axonometrischen Theorie der Reliefperspective und der collinearen Verwandtschaft räumlicher Systeme. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Uebertragung von Statten geht, oder umgekehrt die Einfachheit der Specialisirungen, durch welche die Theorie der Planperspective aus derjenigen der centrischen Collineation und diese aus der Theorie der projectivischen Collineation fliesst, dürfte ein Zeugniss für die Brauchbarkeit der Methode sein. Sie ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, welches die Abbildung des Coordinatensystems der Originalfigur repräsentirt. Bei Untersuchungen über collineare Verwandtschaft wird das Bildcoordinatensystem häufig beliebig angenommen, insofern dieselbe dargestellt wird durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Den Connex zwischen dieser Darstellungsweise und unserer axonometrischen Methode stellen die §§ 13 und 14 her. Dabei wird beiläufig die collineare Abbildung eines Ellipsoids, namentlich seine Abbildung als Kugelfläche, besprochen. — § 12 giebt ein einfaches Criterium dafür, dass eine durch fünf Paare entsprechender Punkte gegebene Collineation eine centrische sei, und lehrt ein einfaches praktisches Verfahren, zwei solche Systeme in perspectivische Lage überzuführen, was jederzeit auf doppelte Weise (directe und inverse Lage) geschehen kann. — Der

Unterschied zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Collineation wird durch die in den §§ 9, 12 und 14 enthaltenen Bemerkungen ins richtige Licht gesetzt. — § 15 bespricht die in der allgemeinen Theorie mit inbegriffene Collineation ebener Systeme. — Schliesslich wirft § 16 ein interessantes Licht auf die ganze Theorie, indem er die axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und projectivischen Coordinaten in Beziehung setzt.

§ 8.

Allgemeine Sätze über Collineation.

Es erscheint zweckmässig, die Fundamentalsätze über Collineation im Raume, auf die wir uns im Folgenden beziehen werden, als Einleitung vorauszuschicken.*

Zwei räumliche Systeme heissen projectivisch collinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern Systems entspricht und dass solchen Punkten des einen Systems, die in gerader Linie liegen, stets solche Punkte des andern Systems entsprechen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Alsdann entspricht auch jeder Ebene wieder eine Ebene, jeder Fläche n^{ter} Ordnung wieder eine Fläche n^{ter} Ordnung.

Existiren in zwei collinearen räumlichen Systemen zwei einander entsprechende congruente Strahlenbündel, so liegt der Specialfall der centrischen oder perspectivischen Collineation vor. Man kann nämlich zwei solche Systeme in perspectivische Lage überführen, indem man jene zwei Strahlenbündel zur Coincidenz bringt. Zwei centrisch collineare Systeme in perspectivischer Lage haben ausser ihrem gemeinschaftlichen Strahlenbündel, dessen Centrum wir Collineationscentrum nennen, auch noch sämmtliche Punkte einer Ebene entsprechend gemein, welche wir die Collineationsebene nennen. Je zwei entsprechende Gerade beider Systeme müssen sich in einem Punkte der Collineationsebene schneiden, den wir die Spur der Geraden nennen.

Von zwei perspectivisch collinearen Figuren kann jede als die Reliefabbildung der andern angesehen werden. Denn die Eindrücke, welche

* Als wichtigste Originalarbeiten über Collineation im Raume vergleiche man: Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, S. 301 flgg. — Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures.* Neue Ausgabe, *Paris 1865, Tome I,* S. 357 flgg. — Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, Berlin 1837, S. 72 flgg. — Richelot, Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten, Crelle's Journal Bd. 70, S. 137 flgg. — Mägis, Ueber die allgemeinste eindeutige Correlation zweier räumlicher Gebilde, Königsberg 1868. — *Stephen Smith, On the Focal Properties of Homographic Figures, Procedings of the London Mathematical Society, Vol. II, 1869,* S. 196 flgg.

beide einem im Collineationscentrum befindlichen Auge machen, sind identisch. Mit Rücksicht hierauf fassen wir von zwei collinearen Figuren die eine als Original- oder Objectfigur, die andere als Bildfigur auf,* wobei jedoch ausdrücklich constatirt werden möge, dass es vollständig gleichgiltig ist, welche Figur als Original und welche als Bild genommen wird, und dass ein Tausch zwischen Original und Bild jederzeit vorgenommen werden kann.

Diejenigen Punkte des Bildsystems, welche den unendlich entfernten Punkten des Originalsystems entsprechen, nennen wir Fluchtpunkte. Dieselben liegen alle in einer Ebene, welche wir die Fluchtebene nennen und welche das Bild der unendlich fernen Ebene des Originalsystems repräsentirt. Alle Punkte des Originalsystems, welche den unendlich fernen Punkten des Bildsystems entsprechen, nennen wir Gegenpunkte; sie liegen alle in einer Ebene, der Gegenebene,** welche der unendlich fernen Ebene des Bildsystems entspricht. Fluchtebene und Gegenebene sind beide der Collineationsebene parallel (denn die Schnittlinie der Fluchtebene mit der Collineationsebene ist der Fluchtebene und der unendlich fernen Ebene des Originalsystems entsprechend gemein, liegt also im Unendlichen).

Zu einer gegebenen Originalfigur ist die Bildfigur vollständig und eindeutig bestimmt, wenn die Lage des Collineationscentrums oder Auges, der Collineationsebene und der Fluchtebene in Beziehung zur Originalfigur gegeben ist. Man kann alsdann das Bild μ irgend einer Geraden m der Originalfigur auf folgende Weise finden: Construire (Taf. VIII, Fig. 1) die Spur M der Geraden m als Schnittpunkt derselben mit der Collineationsebene. Construire den Fluchtpunkt F als Schnittpunkt der Fluchtebene mit einer durch das Auge A zur Geraden m gelegten Parallelen. Dann ist MF das Bild μ.

Zieht man durch das Auge A eine Parallele zu μ, so schneidet diese die gegebene Gerade m in deren Gegenpunkt G. Da nun die vier Punkte $AFMG$ die Ecken eines Parallelogramms bilden, so folgt: Der Abstand des Auges von der Gegenebene ist gleich dem Abstande der Collineationsebene von der Fluchtebene.

§ 9.

Axonometrische Behandlung der Reliefperspective.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem O, xyz bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen reliefperspectivisches Bild

---

* Wir übertragen diese Determination auch auf projectivisch collineare Systeme.

** Vergl. S. 83 Anmerkung.

zu construiren, wenn die relative Lage von Auge, Collineationsebene und Fluchtebene gegen das Objectcoordinatensystem gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe wieder dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der räumliche Dreistrahl $\Omega, \xi\eta\zeta$ (Heft 2, Taf. II, Fig. 1).* Derselbe ist bestimmt durch die drei scheinbaren Axenwinkel, die wir wieder mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen, wobei aber nun

67) $$w_{12}+w_{23}+w_{31}<360^{0}.$$

Im Uebrigen gelten die Ausführungen des § 1 Wort für Wort auch für die Reliefperspective. Wir haben wieder die Reductionsformeln:

I. 68) $$\xi=\frac{f_1 x}{x-g_1},\quad \eta=\frac{f_2 y}{y-g_2},\quad \zeta=\frac{f_3 z}{z-g_3},$$

wo f_i und g_i wieder die Abscissen der Fluchtpunkte und Gegenpunkte repräsentiren.

Ebenso behalten die in § 3 besprochenen graphischen Methoden der Coordinatenreduction, sowie die Constructionen am scheinbaren Axensystem, durch welche das Bild eines Punktes aus seinen reducirten Coordinaten erhalten wird, in der Reliefperspective ihre volle Giltigkeit. Nur sind jetzt Taf. II, Fig. 1b und Fig. 2 als planperspectivische Abbildungen der in Wirklichkeit räumlichen Figuren anzusehen.

Die Aufgabe kommt somit wieder darauf hinaus, die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i und g_i auszudrücken als Functionen der Orientirungsconstanten.

Die auf das Objectcoordinatensystem bezogenen Coordinaten des Auges seien a_1, a_2, a_3; die Axenabschnitte der Collineationsebene seien m_1, m_2, m_3, und die Axenabschnitte der mit ihr parallelen Fluchtebene qm_1, qm_2, qm_3. Wir haben also die sieben Orientirungsconstanten a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3, q.

Die drei Coordinatenaxen (Taf. VIII, Fig. 2a) mögen von der Collineationsebene in den Punkten M_1, M_2, M_3, von der Fluchtebene in den Punkten N_1, N_2, N_3, von der Gegenebene in den Punkten G_1, G_2, G_3 und von einer durch das Auge zu diesen drei Ebenen gelegten Parallelebene in den Punkten H_1, H_2, H_3 geschnitten werden. Dem am Schlusse von § 8 citirten Satze zufolge ist nun

69) $$H_i G_i = N_i M_i = m_i - q m_i.$$

Diese Bemerkung liefert uns die Mittel zur Berechnung der drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3. Die Gleichung der durch A gelegten Parallelebene ist zunächst:

* Auf Taf. II im 2. Hefte sind die Punkte O und Ω mit o und ω bezeichnet.

$$70)\qquad \frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}+\frac{z}{m_3}=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}.$$

Deren Axenabschnitte sind:

$$71)\qquad O_i H_i = m_i\left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}\right),$$

und hieraus folgt für die drei Axenabschnitte der Gegenebene oder die drei Gegenstrecken:

$$72)\qquad g_i = O_i H_i + H_i G_i = m_i\left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}+1-q\right).$$

Führt man also die Bezeichnung ein

$$\text{II. } 73)\qquad \varkappa = \frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}+1-q,$$

so hat man für g_i die Werthe:

$$\text{IV. } 74)\qquad g_i = \varkappa m_i.$$

Die geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ ist dieselbe wie bei der Planperspective:

$$75)\qquad \varkappa = \frac{r}{r-\varrho},$$

wenn nämlich wieder AO mit r und $A\Omega$ mit ϱ bezeichnet wird.

Um die übrigen Grundconstanten zu bestimmen, sind die Schlussfolgerungen genau dieselben wie bei der Planperspective. Die Coordinaten von Ω sind $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, woraus sich für die Strecken ΩM_i die Werthe ergeben:

$$\text{III. } 76)\qquad \mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Hierauf folgt aus der Bemerkung, dass die Punkte M_1, M_2, M_3 den Coordinatenaxen und deren Bildern entsprechend gemein sind:

$$\text{V. } 77)\qquad f_i = (1-\varkappa)\mu_i,$$

und schliesslich ergiebt sich aus den drei Dreiecken $M_i \Omega M_k$:

$$\text{VI. } 78)\qquad \cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2+\mu_k^2-m_i^2-m_k^2}{2\mu_i\mu_k}.$$

Wir sehen also, dass für die Reliefperspective genau dieselben Formeln gelten, wie für die Planperspective. Nur die Hilfsgrösse $\varkappa$ hat einen etwas andern Werth. — Hat q den Werth 1, so fällt die Fluchtebene mit der Collineationsebene zusammen, und die Reliefperspective wird zur Planperspective.

Durch die drei Axenwinkel w_{12}, w_{23}, w_{31} ist das Bildcoordinatensystem nicht vollständig bestimmt, insofern aus denselben zweierlei Axensysteme construirt werden können, die zu einander symmetrisch sind. Das eine ist mit dem Objectcoordinatensystem gleichstimmig, das andere ungleichstimmig. Zur Entscheidung über die Wahl zwischen diesen zwei Formen wird uns folgende Betrachtung die Mittel liefern:

Wir haben im Vorangehenden — entsprechend Taf. VIII, Fig. 2a — stillschweigend angenommen, Collineationscentrum und Collineationsebene liegen zwischen Gegenebene und Fluchtebene, d. h. es sei $q < 1$. Man überzeugt sich jedoch leicht — vergl. hierzu Taf. VIII, Fig. 3a —, dass unsere Formeln auch für den Fall gelten, wo $q > 1$ ist. Zwischen diesen zwei Fällen besteht folgender charakteristische Unterschied:

Liegen Collineationscentrum und Collineationsebene zwischen Gegenebene und Fluchtebene, so liegt jeder Punkt der Originalfigur mit seinem Bilde auf einer und derselben Seite der Collineationsebene. Hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde gleichstimmig ist. (Denn sind S_1, S_2, S_3 die Spuren der drei Strahlen, P und Π die zwei Scheitel, so liegen die Spitzen P und Π der zwei Pyramiden $S_1 S_2 S_3 P$ und $S_1 S_2 S_3 \Pi$ auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundfläche.) Liegen dagegen Fluchtebene und Gegenebene zwischen Collineationscentrum und Collineationsebene, so liegen irgend zwei entsprechende Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Collineationsebene, und hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde ungleichstimmig ist.

Wir nennen im ersten Falle die collineare Verwandtschaft zwischen beiden Figuren eine **gleichstimmige**, im zweiten Falle eine **ungleichstimmige**.*

Aus dem Gesagten geht nun für die Construction des Bildcoordinatensystems folgende Regel hervor:

> Das Bildcoordinatensystem ist gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Objectcoordinatensystem zu construiren, je nachdem $q \lessgtr 1$ ist.

Eliminirt man aus den obigen Gleichungen die sieben Orientirungsconstanten, so bleiben noch zwei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten. Es sind dies die aus den drei Gleichungen

VIII. 79) $$\lambda^2(g_i^2 + g_k^2) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}$$

durch Elimination von λ^2 folgenden.

Diese Gleichungen sprechen die **Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks und des Gegenpunktendreiecks** aus, wie dies bei

---

* In der Reliefsculptur und der decorativen Kunst findet nur die gleichstimmige centrische Collineation Verwerthung. — Als wichtigster Specialfall der ungleichstimmigen centrischen Collineation ist die **involutorische** Collineation zu nennen mit $q = \varkappa$.

der Planperspective näher erörtert wurde. Alle hieraus gezogenen Folgerungen gelten also auch für die Reliefperspective. Namentlich erinnern wir an die zwei graphischen Bestimmungen eines Grundconstantensystems (s. Heft 2, S. 91 und 92). Es tritt bei diesen Constructionen nur die eine Aenderung ein, dass Punkt ω nunmehr ausserhalb der Ebene des Fluchtpunktendreiecks anzunehmen ist

Soll ein Grundconstantensystem mittelst Rechnung aufgestellt werden, so dürfen sieben Grundconstanten willkürlich gewählt werden. Man wählt entweder f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, w_{31}, λ willkürlich und hat dann zur Bestimmung von g_1, g_2, g_3 die Gleichungen 23) oder 24), oder man wählt f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, λ willkürlich und hat zur Bestimmung von w_{12}, w_{23}, w_{31} die Gleichungen 29).

Jedem Werthsysteme der Grundconstanten entsprechen zwei Bildsysteme, — ein mit dem Originalsystem gleichstimmiges und ein mit ihm ungleichstimmiges.

Bezeichnet man wieder den Fusspunkt der vom Auge auf die Ebene des Fluchtpunktendreiecks gefällten Senkrechten als Hauptpunkt und die Länge dieser Senkrechten als Augdistanz, so gilt Alles, was in der Planperspective (vergl. Heft 2, S. 94) über Hauptpunkt und Augdistanz gesagt wurde, auch für die Reliefperspective. Auch die Formeln XIX) und XX) behalten ihre Giltigkeit.

§ 10.

Malerische Perspective. — Bemerkungen über optische Wirkung.

Unter den Specialfällen verdient in erster Linie die malerische Perspective und deren Unterfall: die Cavalierperspective, Beachtung.

Was in § 6 hierüber bemerkt ist, behält in der Reliefperspective seine volle Giltigkeit. Namentlich beachte man die zwei Gleichungen 40) und 41) und die graphische Bestimmung eines malerisch-perspectivischen Grundconstantensystems (Heft 2, Taf. II, Fig. 7). Bei letzterer tritt nur die eine Aenderung ein, dass die auf einander senkrecht stehenden Geraden $F_1 F_2$ und $\omega\zeta$ nunmehr windschief sind. Taf II, Fig. 7 ist jetzt als planperspectivische Abbildung der in Wirklichkeit räumlichen Figur zu betrachten. — Bei der Cavalierperspective ist $w_{23} = 90^0$, die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, w_{31}, f_1, g_1, p ist vollständig willkürlich.

In der Kunst wird zu reliefperspectivischen Constructionen fast ausschliesslich die malerische Perspective verwendet; namentlich ist es die Cavalierperspective, welche die *in praxi* gebräuchlichsten Constructionsmethoden*

* Man vergl. hierüber: *Poudra, Traité de perspective-relief, Paris 1862.*

liefert. Ich glaube jedoch, dass auch eine schiefe Annahme der Collineationsebene in gewissen Fällen ihre volle Berechtigung hat. Die physiologische Seite der Frage, inwieweit die Annahme einer verticalen Stellung der Bildebene oder Collineationsebene in der Planperspective oder Reliefperspective nothwendig oder zweckmässig ist, wird nicht selten mit einer gewissen Leichtfertigkeit behandelt, und scheint mir daher ein genaueres Eingehen auf diesen Punkt — wenn auch von unserem eigentlichen Thema etwas abliegend — doch nicht überflüssig zu sein.

Der Grund dafür, dass im Allgemeinen die malerische Perspective unter allen Perspectivarten die naturgetreuesten Bilder liefert, liegt in dem Umstande, dass nur bei ihr verticale Linien sich als Parallelen darstellen, was mit unserer Gewohnheit, von verticalen Geraden einen parallelen Eindruck zu erhalten, harmonirt. Diese Gewohnheit aber findet ihre physiologische Erklärung in Folgendem: Hat die optische Axe des Auges beim Betrachten eines Objects eine horizontale Lage, so hat das Flächenelement der Netzhaut (gelber Fleck), auf welches das von den brechenden Medien des Auges entworfene Bildchen fällt, eine verticale Stellung. In diesem Falle ist also jenes inverse Bildchen ein malerisch-perspectivisches, in welchem alle *in natura* verticalen Linien sich als Parallelen abbilden; in diesem — aber nur in diesem — Falle kommen uns daher jene Linien als parallel zum Bewusstsein. Die genannte Stellung des Auges ist nun bei aufrechter Haltung des Kopfes die natürliche und deshalb gewöhnliche, und daher rührt es, dass unserem Auge verticale Linien allerdings für gewöhnlich einen parallelen Eindruck machen. Der parallele Eindruck hört jedoch auf, sobald wir mit schiefgestellter Augenaxe — von unten hinauf oder von oben herab — beobachten. Es entstehen in solchem Falle Netzhautbildchen, ähnlich jenen unnatürlichen Photographien architektonischer Objecte, die mit geneigter *Camera obscura* aufgenommen wurden.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass bei der malerischen Perspective der Augpunkt so angenommen werden muss, dass von ihm aus das vertical aufgestellte Bild oder Relief mit horizontal gestellter Augenaxe bequem betrachtet werden kann. Diese Regel wird auch im Allgemeinen immer befolgt. Nur bei Abbildungen aus der Vogel- oder Froschperspective wird die Einhaltung derselben unmöglich, und es wird daher für solche die Bildebene häufig mit Vortheil geneigt angenommen. — Reliefabbildungen aus der Vogelperspective sind nun zwar äusserst selten, wohl aber treten solche aus der Froschperspective häufig auf, z. B. in den Fries-, Gibelfeld- und Deckenreliefs, und für diese dürfte sich daher aus den angeführten Gründen unter Umständen eine schiefe Annahme der Collineationsebene empfehlen. Da bei einem Relief dieses Genres noch der weitere günstige Umstand hinzukommt, dass der Standpunkt des Beschauers nicht willkürlich, sondern fast immer genau vorgezeigt ist, so glaube ich, dass, wenn bei der Construction eines solchen Reliefs jener Punkt als Augpunkt und die Collineationsebene senkrecht zur Augenaxe des Beschauers gewählt würde, man überraschende Effecte erzielen könnte.*

§ 11.

Schiefwinkliges Objectcoordinatensystem.

Unseren seitherigen Betrachtungen haben wir stets ein rechtwinkliges Objectcoordinatensystem zu Grunde gelegt. Es ist jedoch nothwendig, unsere Untersuchungen für ein schiefwinkliges System zu erweitern. Im Wesentlichen ändert sich hierbei Nichts, nur die Formeln III), VI) und VIII) erleiden einige Modificationen.

Sind u_{12}, u_{23}, u_{31} die von den drei Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, so erhalten die genannten Gleichungen folgende Gestalt:

$$\text{III}^0.\ 80)\quad \mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2} - 2\frac{m_i}{\varkappa}(a_k \cos u_{ik} + a_l \cos u_{li}),$$

$$\text{VI}^0.\ 81)\quad \cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2 + 2 m_i m_k \cos u_{ik}}{2\mu_i \mu_k},$$

$$\text{VIII}^0.\ 82)\quad \lambda^2(g_i^2 + g_k^2 - 2 g_i g_k \cos u_{ik}) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}.$$

Der letzten Gleichung zufolge gilt auch bei Zugrundelegung eines schiefwinkligen Coordinatensystems der Satz: „Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind ähnlich.“ Dagegen kommt der Satz, dass die Winkel dieser Dreiecke alle spitz sein müssen (vergl. S. 91), nunmehr in Wegfall.

§ 12.

Projectivische Collineation.

Die Aehnlichkeit von Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck ist das charakteristische Merkmal der perspectivischen Collineation. Ohne diese Aehnlichkeit haben wir den allgemeinen Fall der projectivischen Collineation.

Wählt man also die Grössen u_{12}, u_{23}, u_{31}, g_1, g_2, g_3 und w_{12}, w_{23}, w_{31}, f_1, f_2, f_3 vollkommen willkürlich und bezieht irgend eine Originalfigur auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln u_{ik}, construirt sodann zu diesem eine Bildfigur mit Zugrundelegung von w_{ik} als scheinbaren Axenwinkeln, f_i als Fluchtstrecken und g_i als Gegen-

* Wenn Herr Poudra in dem oben citirten Werke (S. 91) vorschlägt, bei Gibelfeldern die Horizontebene schief aufsteigend anzunehmen und dem Relief bei der Aufstellung eine leichte Neigung nach vorn zu geben, so muss ich diesem Vorschlage meine Zustimmung entschieden versagen, wiewohl ich glaube, dass ihn bei demselben ähnliche Gedanken wie die oben ausgesprochenen geleitet haben.

strecken, so ist die Bildfigur mit der Originalfigur projectivisch collinear, und zwar gleichstimmig oder ungleichstimmig collinear, je nachdem das Bildcoordinatensystem mit dem Originalcoordinatensystem gleichstimmig oder ungleichstimmig construirt wird.* Man kann sich dann umgekehrt die Bildfigur als ursprünglich denken, indem man sie auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln w_{ik} bezieht und die frühere Originalfigur aus ihr dadurch entstehen lässt, dass man u_{ik} als scheinbare Axenwinkel, g_i als Fluchtstrecken und f_i als Gegenstrecken nimmt.

Statt die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die willkürliche Annahme der Grundconstanten zu bestimmen, kann die Bestimmung auch dadurch geschehen, dass fünf beliebig gewählten Punkten des einen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Punkte des andern Systems, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen, als entsprechende zugewiesen werden.

Wir stellen uns dementsprechend die Aufgabe: Wenn fünf Paare entsprechender Punkte einer Collineation gegeben sind, 1. zu jedem sechsten Punkte des einen Systems den entsprechenden des andern Systems zu construiren; 2. die Beziehung aufzufinden, die zwischen den zwei gegebenen Punktsystemen stattfinden muss, damit die Collineation eine concentrische sei; 3. vorausgesetzt, dass diese Beziehung stattfindet: die zwei Punktsysteme in perspectivische Lage überzuführen.

Zum Behuf der Lösung dieser Aufgaben müssen wir unsere axonometrischen Anschauungen von den seitherigen perspectivischen Fesseln befreien. Was wir bisher nur als reliefperspectivische Abbildung eines Cartesischen Coordinatensystems betrachtet haben, stellen wir nunmehr unabhängig von jenem als eine neue Art von Coordinatensystem auf. Wir führen hierfür den Namen „axonometrisches Coordinatensystem“ ein. Die Namen: Coordinatenursprung, Coordinatenaxen, Axenwinkel, erklären sich selbst. Statt des Namens „Fluchtpunkte“ führen wir den Namen „Knotenpunkte“ ein und nennen deren Abscissen „Axenlängen“. Den Namen „Fluchtpunkte“ reserviren wir ausschliesslich für die Bilder von unendlich fernen Punkten und verwenden nur in bestimmten Fällen Fluchtpunkte als Knotenpunkte. — Soll irgend ein Punkt E auf ein axonometrisches Coordinatensystem, dessen Ursprung O und dessen Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 sind (Taf. VIII, Fig. 4), bezogen werden, so zieht man K_3E, welche die Ebene K_1OK_2 schneidet in e, zieht Oe, welche die Linie K_1K_2 schneidet in D, zieht endlich K_2e, K_1e und DE, welche die drei Axen schneiden in den Punkten E_1, E_2

* Dass der zunächst nur für die centrische Collineation (s. § 9) nachgewiesene Satz: „In zwei collinearen Gebilden sind entsprechende Dreistrahlen entweder sämmtlich gleichstimmig oder sämmtlich ungleichstimmig“, auch für die projectivische Collineation gilt, beweist sich aus dem am Schlusse dieses Paragraphen erwähnten Satze.

und E_3. Wir nennen diese letzteren Punkte die „**Coordinatenpunkte**" und ihre Entfernungen von O die „**axonometrischen Coordinaten**" des Punktes E.

Diese Construction lässt sich auch in folgender Form aussprechen: Um irgend einen Punkt E auf das axonometrische Coordinatensystem $O, K_1 K_2 K_3$ zu beziehen, legt man durch je zwei Knotenpunkte $K_i K_k$ und den Punkt E eine Ebene, welche die dritte Axe in dem Coordinatenpunkte E_l schneidet.

Wie umgekehrt ein Punkt im Raume aus seinen axonometrischen Coordinaten construirt wird, bedarf keiner weitern Erklärung.

Das Cartesische Coordinatensystem ist ein specieller Fall des axonometrischen: die Knotenpunkte sind die unendlich fernen Punkte der Axen.

Zwei axonometrische Coordinatensysteme mit gemeinschaftlichen Axen, aber verschiedenen Knotenpunkten nennen wir **conaxial**. Zu jedem axonometrischen Coordinatensystem existirt also ein conaxiales Cartesisches.

Es seien nun (Taf. VIII, Fig. 4) $O K_1 K_2 K_3 E$ fünf Punkte des einen von zwei collinearen Systemen, $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ die ihnen entsprechenden Punkte des andern. Es soll zu irgend einem sechsten Punkte P des ersten Systems der entsprechende Punkt Π des zweiten Systems construirt werden.

Wir wählen irgend einen der fünf Punkte des ersten Systems, z. B. O, als Ursprung, drei andere, z. B. $K_1 K_2 K_3$, als Knotenpunkte eines axonometrischen Coordinatensystems, auf das wir den fünften Punkt E nach der oben besprochenen Procedur beziehen. Mit den fünf Punkten $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ verfahren wir genau ebenso. Sind alsdann $E_1 E_2 E_3$ und $E_1 E_2 E_3$ die Coordinatenpunkte der Punkte E und E, so sind durch die Punkte $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ auf je zwei entsprechenden Axen zwei projectivische Punktreihen bestimmt. Um nun zu Punkt P des ersten Systems den entsprechenden Punkt Π des zweiten Systems zu construiren, beziehen wir Punkt P auf das lateinische Coordinatensystem, suchen zu seinen Coordinatenpunkten $P_1 P_2 P_3$ die entsprechenden Punkte $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$ der drei griechischen Punktreihen* und construiren aus ihnen als Coordinatenpunkten den Punkt Π.**

Bei Anwendung dieser Construction auf eine grössere Anzahl von Punkten ist es häufig von Vortheil, die zwei Coordinatensysteme conaxial

---

* Man bringt zu dem Ende die zwei Punktreihen $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ in perspectivische Lage, indem man sie so legt, dass die Punkte O und Ω zusammenfallen (vergl. § 8).

** Diese Construction ist übereinstimmend mit der schon von **Möbius** gegebenen; vergl. **Möbius**, Bar. Calcul, S. 329. Dagegen dürften die folgenden Constructionen neu sein.

zu ändern, in der Art, dass statt der Punkte $K_1 K_2 K_3$ und $K_1 K_2 K_3$ die Coordinatenpunkte irgend zweier anderer entsprechender Punkte als Knotenpunkte gewählt werden. Es können namentlich die den unendlich fernen Punkten der drei griechischen Punktreihen entsprechenden Punkte $G_1 G_2 G_3$ construirt und diese als Knotenpunkte des lateinischen Coordinatensystems benützt werden; alsdann bestimmen sich die Punkte des griechischen Systems durch Cartesische Coordinaten. Oder man kann umgekehrt die Punkte des lateinischen Systems durch Cartesische Coordinaten bestimmen und hat dann als Knotenpunkte im griechischen System die den unendlich fernen Punkten der lateinischen Axen entsprechenden Punkte $F_1 F_2 F_3$ zu nehmen.

Ueberhaupt empfiehlt es sich, die Punkte $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ gleich zu Anfang zu construiren,* indem sie die beste Auskunft über die Natur der collinearen Beziehung ertheilen. So ergiebt sich z. B. als Lösung der zweiten oben formulirten Aufgabe aus dem Vorangehenden unmittelbar der Satz:

Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die durch die zwei Punktsysteme bestimmte Collineation eine **centrische** sei, besteht darin, dass die zwei Dreiecke $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ ähnlich sind.

Trifft dieses Criterium zu, so können die zwei Systeme durch folgende praktische Construction in perspectivische Lage gebracht werden (Taf. VIII, Fig. 2):

Errichte über dem Dreieck $G_1 G_2 G_3$ als Basis eine mit $F_1 F_2 F_3 \Omega$ ähnliche Pyramide $G_1 G_2 G_3 A$, und über dem Dreieck $F_1 F_2 F_3$ als Basis eine mit $G_1 G_2 G_3 O$ ähnliche Pyramide $F_1 F_2 F_3 A'$. Lege die zwei hierdurch entstandenen ähnlichen Gebilde (Doppelpyramiden) $G_1 G_2 G_3 O A$ und $F_1 F_2 F_3 A' \Omega$ so, dass die homologen Kanten parallel sind und dass die zwei Punkte A und A' in einen Punkt A zusammenfallen. Alsdann liegen beide Systeme perspectivisch und haben Punkt A als Collineationscentrum.

Man kann die zwei Doppelpyramiden in zwei verschiedenen Formen construiren: bei der einen liegen die beiden Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche, bei der andern auf entgegengesetzten Seiten. Bei der einen Form sind die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich und wer-

---

* Dies wird am zweckmässigsten auf graphischem Wege geschehen. Uebrigens bestimmen sich die Fluchtstrecken und Gegenstrecken auch leicht durch Rechnung: Sind k_i und $\varkappa_i$ die Abscissen der Punkte K_i und K_i. ferner e_i und ε_i die axonometrischen Coordinaten der zwei Punkte E und E, so erhält man mittelst der Formeln I):

$$83)\qquad f_i = \frac{\varkappa_i\,\varepsilon_i(k_i - e_i)}{k_i\,\varepsilon_i - \varkappa_i\,e_i}, \quad g_i = \frac{k_i\,e_i(\varkappa_i - \varepsilon_i)}{\varkappa_i\,e_i - k_i\,\varepsilon_i}.$$

den also in direct ähnliche Lage gebracht (Fig. 2b), bei der andern Form sind sie invers ähnlich und werden in invers ähnliche Lage gebracht (Fig. 2a). Zwei centrisch collineare räumliche Systeme können demnach jederzeit auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage übergeführt werden. Da bei der Lage a) je zwei entsprechende Punkte der zwei Systeme auf der nämlichen —, bei der Lage b) auf verschiedenen Seiten vom Collineationscentrum liegen, so ist die Lage a) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden invers ähnlich sind) als directe —, die Lage b) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich sind) als inverse zu bezeichnen.*

Fig. 2a und 2b zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diejenigen zwei Doppelpyramiden, bei welchen die Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche liegen, invers ähnlich sind; Fig. 3a und 3b zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diese zwei Formen direct ähnlich sind. Im Falle der Fig. 2 ist die Collineation eine gleichstimmige, im Falle der Fig. 3 eine ungleichstimmige.

Der Beweis für die Richtigkeit unserer Construction für beide Lagen in beiden Fällen beruht darauf, dass von den zwei projectivischen Punktreihen auf je zwei entsprechenden Axen der Ursprung, der Fluchtpunkt und der unendlich ferne Punkt der einen Reihe resp. mit dem Ursprunge, dem unendlich fernen Punkte und dem Gegenpunkte der andern Reihe durch jene Construction thatsächlich in perspectivische Lage gebracht sind; damit liegt aber auch jedes vierte Paar entsprechender Punkte der zwei Punktreihen perspectivisch, also K_i mit K_i, ferner E_i mit E_i und daher auch E mit E.

Schliesslich möge noch der Satz erwähnt werden, dass zu zwei projectivisch collinearen Systemen jederzeit, und zwar auf fünffach unendlich verschiedene Weise ein drittes construirt werden kann, das mit beiden centrisch collinear ist. Am einfachsten wird die Bestimmung, wenn entweder die drei Axenwinkel des gesuchten Systems als Rechte gewählt, oder wenn drei Paare entsprechender Punkte der zwei gegebenen Systeme als Bilder von drei unendlich fernen Punkten des gesuchten Systems genommen und gleichzeitig als Knotenpunkte verwerthet werden.

---

* Findet die centrische Collineation bei directer Lage ihre praktische Verwerthung in der Reliefsculptur und in der decorativen Kunst, so hat die inverse Lage eine wichtige Bedeutung in der Optik, insofern das von einem Linsensystem entworfene Bild eines Objects mit dem Object gleichstimmig centrisch collinear in inverser Lage ist. Man vergl. hierüber die Abhandlung von Möbius: „Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft", in den Berichten der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Classe, 1855, S. 8 flgg.

§ 13.

Transformation auf das conaxiale Cartesische Coordinatensystem. — Collineare Abbildungen eines Ellipsoids.

Von zwei projectivisch collinearen Figuren sei die Originalfigur auf das rechtwinklige Coordinatensystem O, xyz, die Bildfigur auf das axonometrische Coordinatensystem $\Omega, F_1 F_2 F_3$ bezogen. Die collineare Beziehung beider Figuren sei bestimmt durch die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i.

Sind nun $\xi \eta \zeta$ die axonometrischen Coordinaten irgend eines Punktes Π der Bildfigur, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ die auf das conaxiale Cartesische System bezogenen Cartesischen Coordinaten desselben Punktes, so bestehen zwischen $\xi \eta \zeta$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ einfache Beziehungen. Es ergeben sich nämlich aus der Bemerkung, dass z. B. ξ, f_2, f_3 die Axenabschnitte der durch $F_2 F_3$ und Π gelegten Ebene sind, dass folglich die Gleichung dieser Ebene in den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ lautet: $\frac{\mathfrak{x}}{\xi} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} = 1$, — die Relationen:

$$84)\quad \xi = \frac{\mathfrak{x}}{1 - \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - \frac{\mathfrak{z}}{f_3}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1 - \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{z}}{1 - \frac{\mathfrak{x}}{f_1} - \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen I) ein, so erhält man folgende Beziehungen zwischen den Coordinaten xyz eines Punktes P der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ des entsprechenden Punktes Π der Bildfigur:

$$85)\quad x = \frac{g_1 \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}, \quad y = \frac{g_2 \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}, \quad z = \frac{g_3 \frac{\mathfrak{z}}{f_3}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}.$$

Als Beispiel für die Anwendung dieser wichtigen Relationen stellen wir uns folgende Aufgabe:

Gegeben sei im Originalsystem ein Ellipsoid

$$86)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wie sind die axonometrischen Grundconstanten zu wählen, damit demselben als collineare Abbildung ein bestimmter Flächentypus, namentlich eine Kugelfläche, entspreche?

Die Anwendung unserer Formeln 85) auf die Gleichung 86) liefert für die Abbildung der Fläche die Gleichung:

$$87)\quad \frac{g_1^2}{a^2}\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2} + \frac{g_2^2}{b^2}\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2} + \frac{g_3^2}{c^2}\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2} - \left(\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1\right)^2 = 0$$

oder entwickelt:

$$88)\quad \begin{gathered}\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right)\\ -2\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{f_1f_2}-2\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{f_2f_3}-2\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{f_3f_1}+2\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+2\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+2\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1=0.\end{gathered}$$

Bezeichnen wir zum Behuf der Discussion dieser Gleichung die Determinante derselben mit A (so dass also

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

ist, wo nach bekannter Bezeichnungsweise a_{11}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{14}$, ... die Coefficienten von x^2, xy, xz, x, ... bedeuten), so ergiebt sich für A folgender Werth:

$$89)\qquad A=-\frac{1}{f_1^2f_2^2f_3^2}\,\frac{g_1^2g_2^2g_3^2}{a^2b^2c^2}.$$

Hieraus folgt* vor Allem, dass A nie positiv werden kann, dass sich also ein Ellipsoid nie als Regelfläche, sondern nur als Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder elliptisches Hyperboloid abbilden kann.**

Welcher dieser drei Fälle eintritt, hängt davon ab, ob die Gegenebene das Originalellipsoid nicht schneidet oder berührt oder schneidet. Es sind also hierfür lediglich die drei Grössen g_i massgebend, und zwar ergiebt sich folgendes Criterium:

Die Abbildung ist ein Ellipsoid, Paraboloid oder Hyperboloid, je nachdem:

$$90)\qquad \frac{a^2}{g_1^2}+\frac{b^2}{g_2^2}+\frac{c^2}{g_3^2}\lesseqgtr 1.$$

Fragen wir endlich nach den Bedingungen, die die Grundconstanten erfüllen müssen, damit sich das Ellipsoid speciell als Kugelfläche abbilde, so liefert die Vergleichung der Gleichung 88) mit der allgemeinen — auf das Cartesische System mit den Axenwinkeln $w_{12}\,w_{23}\,w_{31}$ bezogenen — Gleichung einer Kugel

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cos w_{12}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cos w_{23}+2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\cos w_{31}\\ -2p\mathfrak{x}-2q\mathfrak{y}-2r\mathfrak{z}+s=0\end{gathered}$$

folgende Bedingungen:

$$91)\left\{\begin{gathered}\frac{1}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)=\frac{1}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right)=W,\\ \cos w_{12}=-\frac{1}{f_1f_2}\,\frac{1}{W},\quad \cos w_{23}=-\frac{1}{f_2f_3}\,\frac{1}{W},\quad \cos w_{31}=-\frac{1}{f_3f_1}\,\frac{1}{W}.\end{gathered}\right.$$

---

* Vergl. Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes, 3. Aufl., S. 465. (Die Determinante A ist dort mit C_0 bezeichnet.)

** Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 314.

Da hiernach vier Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können als weitere Bestimmungsgleichungen noch die Gleichungen VIII) hinzugefügt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen, dass jede Kugel als die Reliefperspective eines beliebigen Ellipsoids angesehen werden kann. — Oder es können die drei Grössen g_i willkürlich gewählt werden, womit die Aufgabe gelöst ist: Ein beliebiges Ellipsoid und eine dasselbe nicht reell schneidende Ebene so collinear abzubilden, dass das Ellipsoid sich als Kugelfläche darstellt und das Bild der Ebene ins Unendliche fällt.

§ 14

Bestimmung der Collineation durch drei lineare Relationen zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich die Aufgabe des vorigen Paragraphen erledigte, ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, dessen Axen die Abbildungen der Coordinatenaxen der Originalfigur sind. Bezieht man aber nun die Bildfigur auf ein vollkommen willkürliches Coordinatensystem XYZ, das wir, wie das Coordinatensystem der Originalfigur, rechtwinklig und mit diesem gleichstimmig annehmen wollen, so gehen die Formeln 85) über in Gleichungen von folgender Form:

$$92)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ y &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ z &= \frac{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen repräsentiren den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme und bilden häufig den Ausgangspunkt bei der Untersuchung der collinearen Verwandtschaft.** Es ergiebt sich nun für uns die Aufgabe, diese Bestimmungsart der Collineation mit unserer axonometrischen Methode in Beziehung zu setzen, d. h. es ergiebt sich die Aufgabe:

Wenn die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die Formeln 92) gegeben ist, die neun axonometrischen Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i auszudrücken als Functionen der in jenen Gleichungen enthaltenen Coefficienten $a_i b_i c_i d_i$.***

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj., Tome I,* S. 396.

** Z. B. in den S. 403 citirten Arbeiten von Magnus, Richelot und Mägis

*** Da sich die Gleichungen 92) nicht ändern, wenn man sämmtliche 16 Coefficienten mit einem und demselben Factor multiplicirt, so kann einer dieser Coefficienten $= 1$ gesetzt werden, so dass alsdann ihre Anzahl sich auf 15 reducirt.

Wir beginnen die Lösung dieser Aufgabe damit, dass wir das Bildsystem transformiren auf dasjenige Cartesische Coordinatensystem $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Axen die Bilder der Axen des Originalsystems sind.

Die auf das Coordinatensystem XYZ bezogenen Coordinaten des neuen Ursprungs seien $p_1 p_2 p_3$. Die Richtungswinkel der neuen Axen seien $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$; zwischen den letzteren bestehen die Beziehungen:

$$93)\quad \left\{ \begin{aligned} &\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1, \\ &\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, \\ &\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1. \end{aligned} \right.$$

Alsdann haben wir die Transformationsformeln:

$$94)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= p_1 + \mathfrak{x}\cos\alpha_1 + \mathfrak{y}\cos\beta_1 + \mathfrak{z}\cos\gamma_1, \\ Y &= p_2 + \mathfrak{x}\cos\alpha_2 + \mathfrak{y}\cos\beta_2 + \mathfrak{z}\cos\gamma_2, \\ Z &= p_3 + \mathfrak{x}\cos\alpha_3 + \mathfrak{y}\cos\beta_3 + \mathfrak{z}\cos\gamma_3. \end{aligned} \right.$$

Wendet man nun diese Substitutionen auf die Gleichungen 92) an, so müssen die letzteren identisch werden mit den Gleichungen 85). Dies liefert folgende Bedingungsgleichungen:

$$95)\quad \left\{ \begin{aligned} &a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 = 0, \\ &b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 = 0, \\ &c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 = 0; \end{aligned} \right.$$

$$96)\quad \left\{ \begin{aligned} &b_1 \cos\alpha_1 + b_2 \cos\alpha_2 + b_3 \cos\alpha_3 = 0, \\ &c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + c_3 \cos\alpha_3 = 0, \\ &c_1 \cos\beta_1 + c_2 \cos\beta_2 + c_3 \cos\beta_3 = 0, \\ &a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2 + a_3 \cos\beta_3 = 0, \\ &a_1 \cos\gamma_1 + a_2 \cos\gamma_2 + a_3 \cos\gamma_3 = 0, \\ &b_1 \cos\gamma_1 + b_2 \cos\gamma_2 + b_3 \cos\gamma_3 = 0; \end{aligned} \right.$$

$$97)\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{g_1}{f_1} &= \frac{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{g_2}{f_2} &= \frac{b_1\cos\beta_1 + b_2\cos\beta_2 + b_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{g_3}{f_3} &= \frac{c_1\cos\gamma_1 + c_2\cos\gamma_2 + c_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}; \end{aligned} \right.$$

$$98)\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{f_1} &= \frac{d_1\cos\alpha_1 + d_2\cos\alpha_2 + d_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{1}{f_2} &= \frac{d_1\cos\beta_1 + d_2\cos\beta_2 + d_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{1}{f_3} &= \frac{d_1\cos\gamma_1 + d_2\cos\gamma_2 + d_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}. \end{aligned} \right.$$

Aus den 18 Gleichungen 93), 95), 96), 97), 98) bestimmen sich nun die 18 Grössen $p_i\, \alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i\, f_i\, g_i$. Schliesslich ergeben sich dann die drei Axenwinkel w_{ik} aus den Gleichungen

$$99)\quad \left\{\begin{aligned} \cos w_{12} &= \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3, \\ \cos w_{23} &= \cos\beta_1 \cos\gamma_1 + \cos\beta_2 \cos\gamma_2 + \cos\beta_3 \cos\gamma_3, \\ \cos w_{31} &= \cos\gamma_1 \cos\alpha_1 + \cos\gamma_2 \cos\alpha_2 + \cos\gamma_3 \cos\alpha_3. \end{aligned}\right.$$

Zum Behuf der Auflösung unserer Gleichungen führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir bezeichnen die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

$$100)\quad R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, ferner die Unterdeterminanten der Determinante

$$101)\quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{B}_1 \ \ldots$

Es liefern nun zunächst die Gleichungen 95) für die Ursprungscoordinaten — und die Gleichungen 96) und 93) für die Richtungswinkel folgende Werthe:

$$102)\quad p_i = \frac{D_i}{D_4};$$

$$103)\quad \left\{\begin{aligned} \cos^2\alpha_i &= \frac{\mathfrak{A}_i^2}{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}, \\ \cos^2\beta_i &= \frac{\mathfrak{B}_i^2}{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}, \\ \cos^2\gamma_i &= \frac{\mathfrak{C}_i^2}{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}. \end{aligned}\right.$$

Mit diesen Werthen erhält man sodann aus den Gleichungen 97) 98) und 99) für die axonometrischen Grundconstanten folgende Ausdrücke:

$$104)\quad \left\{\begin{aligned} g_1 &= -\frac{D_4}{A_4}, \\ g_2 &= -\frac{D_4}{B_4}, \\ g_3 &= -\frac{D_4}{C_4}; \end{aligned}\right.$$

$$105)\quad \left\{\begin{aligned} f_1 &= \pm \frac{R}{D_4} \frac{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}{A_4}, \\ f_2 &= \pm \frac{R}{D_4} \frac{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}{B_4}, \\ f_3 &= \pm \frac{R}{D_4} \frac{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}{C_4}; \end{aligned}\right.$$

$$106)\quad \begin{cases} \cos w_{12} = \dfrac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3}{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}\ \sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}, \\ \cos w_{23} = \dfrac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3}{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}\ \sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}, \\ \cos w_{31} = \dfrac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_3}{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}\ \sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 105) und 106) können noch auf eine etwas andere Form gebracht werden. Bildet man nämlich nach dem Multiplicationstheorem das Quadrat von D_4 und bezeichnet die Unterdeterminanten der so entstehenden Determinante

$$107)\qquad D_4^2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

mit Q_{ik}, so ist z. B.

$$\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 = Q_{11},$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 = Q_{12} \text{ u. s. f.}$$

Man erhält daher für f_i und $\cos w_{ik}$ folgende Ausdrücke:

$$108)\quad \begin{cases} f_1 = \pm \dfrac{R}{D_4}\dfrac{\sqrt{Q_{11}}}{A_4}, \\ f_2 = \pm \dfrac{R}{D_4}\dfrac{\sqrt{Q_{22}}}{B_4}, \\ f_3 = \pm \dfrac{R}{D_4}\dfrac{\sqrt{Q_{33}}}{C_4}; \end{cases}$$

$$109)\quad \begin{cases} \cos w_{12} = \dfrac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}}, \\ \cos w_{23} = \dfrac{Q_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}}, \\ \cos w_{31} = \dfrac{Q_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 105) und 108) lassen die Vorzeichen von f_i unbestimmt. Dieselben bestimmen sich aus denjenigen der g_i, insofern f_i und g_i entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Bezüglich der Axenwinkel w_{ik} muss noch entschieden werden, wie aus denselben das Bildcoordinatensystem zusammenzusetzen ist, ob gleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem, oder ungleichstimmig. D. h. es ist zu entscheiden, ob die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation eine gleichstimmige oder ungleichstimmige ist.

Das Bild des Dreistrahls o, xyz sei $\omega, \xi\eta\zeta$. Wir denken uns ein mit O, XYZ paralleles Coordinatensystem mit Ursprung in ω. Sind dann $X'Y'Z'$ die auf dieses System bezogenen Coordinaten eines auf $\omega\xi$ beliebig gewählten Punktes, ebenso $X''Y''Z''$ und $X'''Y'''Z'''$ die Coordinaten zweier auf $\omega\eta$ und $\omega\zeta$ beliebig gewählter Punkte, so ist der Dreistrahl $\omega, \xi\eta\zeta$ mit O, XYZ gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem

$$110)\qquad \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} \gtrless 1$$

ist. Es handelt sich nun darum, diese Determinante, die wir mit $\varDelta$ bezeichnen wollen, auszudrücken in den Coefficienten $a_i b_i c_i d_i$.

Zwischen den Coordinaten unserer drei Punkte bestehen vermöge ihrer Lage auf den drei Strahlen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ folgende Beziehungen:

$$111)\qquad \left\{\begin{aligned} b_1 X' + b_2 Y' + b_3 Z' &= 0, \\ c_1 X' + c_2 Y' + c_3 Z' &= 0, \\ c_1 X'' + c_2 Y'' + c_3 Z'' &= 0, \\ a_1 X'' + a_2 Y'' + a_3 Z'' &= 0, \\ a_1 X''' + a_2 Y''' + a_3 Z''' &= 0, \\ b_1 X''' + b_2 Y''' + b_3 Z''' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Setzt man daher je eine Coordinate der drei Punkte $= 1$, so erhält man für $\varDelta$ folgenden Werth:

$$112)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} & \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_1} \\ \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} & 1 & \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_2} \\ \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_3} & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\,\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,\frac{1}{\mathfrak{C}_3} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\,\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\,\frac{1}{\mathfrak{C}_3} D_4^2.$$

Wir haben somit (weil O, XYZ mit o, xyz gleichstimmig) den Satz:

Die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation ist eine gleichstimmige oder ungleichstimmige, je nachdem

$$113)\qquad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_3 \gtrless 1.$$

Diesem Criterium entsprechend ist nun das Bildcoordinatensystem entweder gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem zu construiren.

Anmerkung. Substituirt man die obigen Ausdrücke in den Bedingungsgleichungen 90) und 91), so ist damit die Aufgabe gelöst: Welche Beziehungen müssen zwischen den Coefficienten einer linearen Substitution obwalten, damit einem im Originalsystem gegebenen Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ im Bildsystem ein bestimmter Flächentypus (namentlich eine Kugelfläche) entspreche?

§ 15.
Collineation zwischen ebenen Systemen.

In der vorangehenden axonometrischen Theorie der collinearen Verwandtschaft von räumlichen Systemen ist die Collineation zwischen ebenen

Systemen mit einbegriffen, insofern man nur nothwendig hat, von den unseren Betrachtungen zu Grunde gelegten Coordinatensystemen immer nur eine Coordinatenebene, z. B. die xy-Ebene, bezw. $\xi\eta$-Ebene, zu berücksichtigen. Es mögen in dieser Beziehung folgende Andeutungen genügen:

Das axonometrische Coordinatensystem in der Ebene wird gebildet von zwei vom Ursprung O ausgehenden Axen mit den Knotenpunkten K_1 und K_2. Auf dasselbe wird ein Punkt E dadurch bezogen, dass man K_2E und K_1E zieht, welche die beiden Axen in den Coordinatenpunkten E_1 und E_2 schneiden; OE_1 und OE_2 sind die axonometrischen Coordinaten des Punktes E.

Die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Figuren kann dadurch bestimmt werden, dass man die fünf axonometrischen Grundconstanten $w_{12} f_1 f_2 g_1 g_2$ willkürlich wählt, die Originalfigur auf ein Cartesisches Coordinatensystem O, xy bezieht und die nach den Formeln

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}$$

reducirten Coordinaten auf das axonometrische Coordinatensystem $\Omega, F_1 F_2$ mit w_{12} als Axenwinkeln und $f_1 f_2$ als Axenlängen bezieht.

Dass zwei collineare ebene Systeme immer, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können,* ergiebt sich folgendermassen:

Geht man von der perspectivischen Abbildung eines ebenen Systems aus, indem man die xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems O, xyz als Ebene des Originalsystems wählt, die Lage der Ebene des Bildsystems durch ihre drei Axenabschnitte $m_1 m_2 m_3$ und die Lage des Auges durch seine drei Coordinaten $a_1 a_2 a_3$ bestimmt, so erhält man in den Gleichungen II) bis VI) (S. 406) die fünf Grundconstanten $w_{12} f_1 f_2$ $g_1 g_2$ ausgedrückt als Functionen der sechs Orientirungsconstanten $m_1 m_2 m_3$ $a_1 a_2 a_3$. Will man alsdann umgekehrt die sechs Orientirungsconstanten als Functionen der fünf Grundconstanten ausdrücken, so bleibt eine der ersteren unbestimmt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch vier Paare entsprechender Punkte OK_1K_2E und $\Omega K_1 K_2 E$ gegeben, so ist das Verfahren analog mit dem in § 12 angegebenen. Die dort gelehrte Lösung der Aufgabe, zwei collineare Systeme in perspectivische Lage überzuführen, reducirt sich für ebene Systeme auf folgende Construction:

Beziehe die Punkte E und E auf die zwei axonometrischen Coordinatensysteme $O, K_1 K_2$ und $\Omega, K_1 K_2$, ihre Coordinatenpunkte seien $E_1 E_2$ und $E_1 E_2$; construire für die zwei projectivischen Punktreihen

---

* Vergl. *Jacobi*, *„Theoria analytica generalis projectionis centralis"*, Crelle's Journal Bd. 8, S. 338.

OE_1K_1 und ΩE_1K_1 den Gegenpunkt G_1 und Fluchtpunkt F_1, desgleichen für die zwei Punktreihen OE_2K_2 und ΩE_2K_2 die Punkte G_2 und F_2; lege durch G_1G_2 (Taf. VIII, Fig. 2) unter beliebigem Winkel φ gegen die Ebene des Originalsytems eine Ebene und construire in dieser ein Dreieck G_1G_2A ähnlich $F_1F_2\Omega$; lege ebenso durch F_1F_2 unter demselben Neigungswinkel φ gegen die Ebene des Bildsystems eine Ebene und construire in ihr ein Dreieck F_1F_2A' ähnlich G_1G_2O; ziehe AO und $A'\Omega$ und bringe die zwei so entstandenen ähnlichen Tetraeder OG_1G_2A und $A'F_1F_2\Omega$ in ähnliche Lage, so dass Punkt A mit A' zusammenfällt.

Die zwei Tetraeder können sowohl direct ähnlich, als invers ähnlich construirt werden. Hierdurch sind zwei verschiedene Arten der perspectivischen Lage — eine (resp.) inverse und eine directe — bedingt, von denen jede einzelne durch Veränderung des Winkels φ beliebig variirt werden kann. — Mit $\varphi = 0$ oder $= 180^0$ fallen die zwei Systeme in eine und dieselbe Ebene. Demnach können zwei collineare ebene Systeme in einer und derselben Ebene auf vier verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden.* Die Figuren 5 (Taf. VIII) zeigen diese vier Lagen: Fig. a) und b) die zwei directen, Fig. c) und d) die zwei inversen Lagen, a) und c) mit $\varphi = 0$, b) und d) mit $\varphi = 180^0$.

Die Ausführungen der §§ 13 und 14 lassen sich ebenfalls mit Leichtigkeit auf ebene Systeme übertragen:

Die Transformationsformeln vom axonometrischen zum conaxialen Cartesischen Bildcoordinatensystem lauten:

$$114)\qquad \xi = \frac{\mathfrak{x}}{1-\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1-\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}}.$$

Zwischen den Coordinaten xy eines Punktes der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ des entsprechenden Punktes der Bildfigur bestehen die Beziehungen:

$$115)\qquad x = \frac{g_1\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}+\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}-1}, \quad y = \frac{g_2\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\dfrac{\mathfrak{x}}{f_1}+\dfrac{\mathfrak{y}}{f_2}-1}.$$

Als Criterium dafür, dass die Ellipse

$$116)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sich im Bildsystem als Ellipse, Parabel oder Hyperbel abbilde, ergiebt sich:

* Vergl. die S. 403 citirte Abhandlung von Stephen Smith, S. 202.

$$117)\qquad \frac{a^2}{g_1^2}+\frac{b^2}{g_2^2}\lesseqgtr 1.$$

Für den Kreis erhält man die Bedingungen:

$$118)\qquad \frac{1}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)=-\frac{1}{f_1 f_2 \cos w_{12}}.$$

Da hiernach drei Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können z. B. die zwei Grössen g_i willkürlich gewählt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen: Eine Ellipse und eine sie nicht schneidende Gerade können stets so projicirt werden, dass die Ellipse sich als Kreis abbildet und dass das Bild der Geraden ins Unendliche fällt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch die zwei linearen Relationen

$$119)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{a_1 X+a_2 Y+a_3}{d_1 X+d_2 Y+d_3},\\ y&=\frac{b_1 X+b_2 Y+b_3}{d_1 X+d_2 Y+d_3}\end{aligned}\right.$$

gegeben, und bezeichnet man die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

$$120)\qquad R=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, so drücken sich die fünf Grundconstanten folgendermassen in den Substitutionscoefficienten aus:

$$121)\qquad \left\{\begin{aligned} g_1&=-\frac{D_3}{A_3},\\ g_2&=-\frac{D_3}{B_3},\end{aligned}\right. \qquad 122)\qquad \left\{\begin{aligned} f_1&=\pm\frac{R}{D_3}\,\frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{A_3},\\ f_2&=\pm\frac{R}{D_3}\,\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{B_3},\end{aligned}\right.$$

$$123)\qquad \cos w_{12}=-\frac{a_1 b_1+a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

§ 16.

Schlusswort. Chasles'sche und projectivische Coordinaten.

Die in § 12 definirten axonometrischen Coordinaten stehen in naher Beziehung zu den allgemeinen projectivischen Coordinaten. Sie können nämlich als eine Modification der Chasles'schen Coordinaten** angesehen werden, welche ihrerseits einen Specialfall der — von Möbius

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj. des fig., Tome I,* S. 53.

** Für die Ebene findet man die ausführliche Behandlung dieser Coordinaten in *Chasles, Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852,* S. 341 flgg. Für den Raum ist das von Chasles in seiner Geschichte der Geometrie (s. die deutsche Ausgabe von Sohnke, Halle 1839, S. 282) aufgestellte allgemeinere Coordinatensystem in derselben Weise zu specialisiren, wie Chasles dies in seinem *Traité de Géom. sup.,* S. 341, für die Ebene ausgeführt hat.

angedeuteten, von v. Staudt ausgesprochenen und von Fiedler nutzbar gemachten und mit den tetrametrischen Coordinaten identificirten — allgemeinen projectivischen Coordinaten* repräsentiren.

Es sei nämlich $O, K_1 K_2 K_3$ ein axonometrisches Coordinatensystem, $k_1 k_2 k_3$ seien die Axenlängen, $e_1 e_2 e_3$ und xyz die axonometrischen Coordinaten zweier Punkte E und P. Bezeichnen wir nun mit $e_1^{(c)} e_2^{(c)} e_3^{(c)}$ und $x^{(c)} y^{(c)} z^{(c)}$ die auf dasselbe System bezogenen Chasles'schen Coordinaten der Punkte E und P, ferner mit $x^{(F)} y^{(F)} z^{(F)}$ die auf dasselbe System mit E als Einheitspunkt bezogenen projectivischen (Fiedler'schen) Coordinaten von P, so definiren sich die Chasles'schen und projectivischen Coordinaten durch folgende Gleichungen:

$$124)\qquad x^{(c)} = \frac{x}{k_1 - x},\quad y^{(c)} = \frac{y}{k_2 - y},\quad z^{(c)} = \frac{z}{k_3 - z};$$

$$125)\quad x^{(F)} = \frac{x^{(c)}}{e_1^{(c)}} = \frac{\frac{x}{k_1 - x}}{\frac{e_1}{k_1 - e_1}},\quad y^{(F)} = \frac{y^{(c)}}{e_2^{(c)}} = \frac{\frac{y}{k_2 - y}}{\frac{e_2}{k_2 - e_2}},\quad z^{(F)} = \frac{z^{(c)}}{e_3^{(c)}} = \frac{\frac{z}{k_3 - z}}{\frac{e_3}{k_3 - e_3}}.$$

Sind $\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4$ die auf das Fundamentaltetraeder $O K_1 K_2 K_3$ mit E als Einheitspunkt bezogenen tetrametrischen Coordinaten von P (so dass also $\chi_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{e}_i}$ ist, wenn $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_4$ resp. die Abstände der Punkte P und E von den Ebenen $O K_2 K_3$, $O K_3 K_1$, $O K_1 K_2$, $K_1 K_2 K_3$ bedeuten), so ist:

$$126)\qquad \frac{\chi_1}{\chi_4} = x^{(F)},\quad \frac{\chi_2}{\chi_4} = y^{(F)},\quad \frac{\chi_3}{\chi_4} = z^{(F)}.$$

Ist eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte $O K_1 K_2 K_3 E$ und $\Omega\, K_1 K_2 K_3 E$ gegeben, so finden zwischen den axonometrischen, Chasles'schen und projectivischen Coordinaten zweier entsprechender Punkte P und Π folgende Beziehungen statt:

$$127)\quad \xi = \frac{\varkappa_1 \varepsilon_1 (k_1 - e_1) x}{(k_1 \varepsilon_1 - \varkappa_1 e_1) x + k_1 e_1 (\varkappa_1 - \varepsilon_1)},\text{**}\quad \eta \text{ und } \zeta \text{ entsprechend},$$

$$128)\quad \xi^{(c)} = \frac{\varepsilon_1^{(c)}}{e_1^{(c)}} x^{(c)},$$

$$129)\quad \xi^{(F)} = x^{(F)}.$$

So brauchbar sich auch die axonometrischen Coordinaten namentlich in constructiver Beziehung vermöge ihrer Handlichkeit und An-

---

* Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 320 und 329; v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857, S. 266; Fiedler, Ueber die projectivischen Coordinaten, in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich, Bd. 15, S. 152 flgg., oder Fiedler, Darstellende Geometrie, Leipzig 1871, S. 507 flgg.

** Diese Gleichung folgt unmittelbar aus Gleichung I) in Verbindung mit 83). Die griechischen Buchstaben haben hier und im Folgenden für das griechische Punktsystem genau dieselbe Bedeutung, wie die gleichlautenden lateinischen Buchstaben für das lateinische System.

schaulichkeit erweisen, so ungeeignet zeigt sich häufig ihre Anwendung bei analytischen Untersuchungen (schon darum, weil die Ordnung einer Fläche nicht mit dem Grade ihrer Gleichung in axonometrischen Coordinaten übereinstimmt). Der Uebergang von axonometrischen Coordinaten zu Chasles'schen oder projectivischen oder tetrametrischen kann aber nun nach den obigen Formeln jeden Augenblick mit Leichtigkeit bewerkstelligt werden. Am besten wird man thun, alle vier Arten von Coordinaten gleichzeitig zu berücksichtigen, indem man sich die Modificationen, die die Form eines analytischen Ausdruckes beim Uebergange von einer Art zu einer andern erleidet, jederzeit präsent erhält und sich eine möglichste Fertigkeit und Ungenirtheit im Changiren aneignet.

Die in § 12 gegebene Lösung der Aufgabe: „Wenn eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte gegeben ist, zu jedem sechsten Punkte den entsprechenden zu construiren", ist übereinstimmend mit der schon von Möbius, dem scharfsinnigen Erfinder der tetrametrischen Coordinaten, gegebenen Construction. Sie fliesst jedoch bei Möbius nicht mit der innern Nothwendigkeit aus der Natur seines Coordinatensystems, als dies bei unserer axonometrischen Methode der Fall ist. Es ist bei Möbius weniger die Theorie der barycentrischen Coordinaten, als vielmehr die Theorie der geometrischen Netze, welche speciell jener Construction das Leben gegeben hat. Mit dieser Construction hat aber nun Möbius den Grundgedanken der allgemeinen projectivischen Coordinaten ausgesprochen und damit den Keim zu der Verschmelzung der constructiven und analytischen Methode gelegt, deren wir uns heute erfreuen. v. Staudt nahm den Möbius'schen Gedanken auf und verarbeitete ihn weiter, indem er die Doppelverhältnisse als Variable einführte.* Aber erst Fiedler wurde sich der eminenten Bedeutung dieser Coordinaten vollständig bewusst. Er hat das Ziel seines Strebens: die analytische und constructive Methode so enge miteinander zu verknüpfen, dass es sich bei ihrer Anwendung nicht mehr um ein *aut — aut*, sondern vielmehr um ein *sive — sive* handle, durch die Ausbildung der projectivischen Coordinaten auf's Schönste realisirt und sich dadurch das hohe Verdienst erworben, die Kluft, die zwischen beiden Methoden bestand, für immer geschlossen zu haben.

---

* Uebrigens deutet schon Möbius S. 330 an: „— die zwei oder drei Doppelverhältnisse, wodurch jeder andere Punkt der gegebenen Figur in Bezug auf die ersten vier oder fünf Punkte vollkommen bestimmt wird, ...".

XVIII.

Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

MILINOWSKI,

Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg im Elsass.

I. Allgemeine Eigenschaften.

Um auf rein synthetischem Wege die Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung zu erforschen, geht man wohl am besten von einer Curve dritter Ordnung aus, welche als Ort der gemeinschaftlichen Tripel der in einem Kegelschnittnetze vorkommenden Büschel auftritt und die daher nach Steiner (vergl. Steiner's Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter) Tripelcurve heissen soll. Namentlich ist in den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes auch ein Mittel gegeben, die Polareigenschaften der Curven dritter Ordnung abzuleiten, was ich in einem Programm des Tilsiter Gymnasiums vom Jahre 1872 in einer Abhandlung: „Die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten", ausgesprochen habe. Gleichzeitig hat Herr Dr. Slawyk in seiner Inauguraldissertation „Die Polareigenschaften der allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung" (Breslau, Jungfer's Buchdruckerei) die Polareigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes abgeleitet. Um diese Ableitung allgemein giltig zu machen, bleibt noch zu zeigen, dass eine Tripelcurve eine ganz allgemeine Curve dritter Ordnung ist, also z. B. auch erzeugt werden kann durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel Letzteres habe ich im Programm des Gymnasiums von Weissenburg vom Jahre 1875 in der Abhandlung „Die Haupterzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung" bewiesen. Später bin ich jedoch auf einen weit einfachern Beweis gestossen, den ich im Folgenden mittheile. Daran knüpfe ich die Theorie der Polaren einer Curve dritter Ordnung, indem ich von der Chasles'schen Erzeugungsart ausgehe. Die angewendete Methode ist einfach und lässt sich modificirt auch bei Curven höherer Ordnung zur Anwendung bringen.

1. Haben zwei projectivische Kegelschnittbüschel $(ABCD)(\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2\varkappa_4^2\ldots)$ und $(ABC'D')(\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2\ldots)$ zwei Grundpunkte AB gemein und entspricht das Geraden-

paar (AB, CD) dem Paare $(AB, C'D')$, so erzeugen beide durch die Durchschnitte homologer Elemente eine Curve C^3 dritter Ordnung, die auch durch jedes dieser Büschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden kann, dessen Scheitel M auf C^3 liegt.

Jeder Kegelschnitt des einen Büschels $(ABCD)$ wird von allen Kegelschnitten des andern $(ABC'D')$ in den Punktpaaren einer Involution geschnitten, deren Centrum auf $C'D'$ liegt; nennen wir diese Involutionscentra $K_1 K_2 K_3 \ldots$ und lassen jedem Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ das ihm zukommende Centrum entsprechen, so ist

$$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \barwedge (\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots).$$

Ebenso wird jeder Kegelschnitt des zweiten Büschels von allen des ersten in einer Involution geschnitten. Sämmtliche Involutionscentra $L_1 L_2 L_3 \ldots$ liegen auf CD und es ist wieder

$$(L_1 L_2 L_3 \ldots) \barwedge (\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \ldots),$$

also auch

$$(K_1 K_2 K_3 \ldots) \barwedge (L_1 L_2 L_3 \ldots).$$

Der Schnittpunkt $(CD, C'D')$ entspricht bei dieser projectivischen Beziehung sich selbst, also liegen die Punktreihen perspectivisch und es schneiden sich die Geraden $K_1 L_1$, $K_2 L_2$, ... in einem Punkte M. Diese Geraden sind aber die Durchschnitte der homologen Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \lambda_1^2$, $\varkappa_2^2 \lambda_2^2$, ... Lassen wir jede Gerade jedem der Kegelschnitte, deren Durchschnitt sie ist, entsprechen, so ist zwischen den Kegelschnitten und den Geraden eine projectivische Beziehung hergestellt und daher liegen die Schnittpunkte $(\varkappa_1^2 \lambda_1^2)$, ... auf einer Curve C^3 dritter Ordnung.

Anmerkung. Haben die projectivischen Büschel $(ABCD)$ und $(ABC'D')$ die Geradenpaare (AB, CD) und $(AB, C'D')$ nicht als homologe, so umhüllen die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Elemente verbinden, einen Kegelschnitt, welcher CD und $C'D'$ berührt.

2. Ist eine Curve C^3 dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel $(ABCD)\{\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots\}$ und ein projectivisches Strahlenbüschel $M(s_1 s_2 s_3 \ldots)$ entstanden, so kann sie auf unzählige Arten durch dasselbe Strahlenbüschel (M) und andere projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden, deren Grundpunkte auf C^3 liegen.

Die Kegelschnitte $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2 \ldots$ mögen s_1 in $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... schneiden; ferner seien $G_2 H_2$, $G_3 H_3$, ... die Schnittpunkte von $\varkappa_2^2$, $\varkappa_3^2$, ... mit s_2, s_3, ... Legt man durch A und die Punkte $E_2 F_2 G_2 H_2$ einen Kegelschnitt λ_2^2 und durch $A E_3 F_3 G_3 H_3$ einen andern λ_3^2, so bestimmen beide ein Büschel mit den Grundpunkten $AB'C'D'$, von dem ein Kegelschnitt λ_1^2 durch $E_1 F_1$ gehen muss, weil $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$, ... in Involution sind.

Lassen wir den Strahlen $s_1 s_2 s_3$ die Kegelschnitte $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ entsprechen, so ist dadurch eine projectivische Beziehung hergestellt; wir nennen $\lambda_4^2 \lambda_5^2 \ldots$ die den Strahlen $s_4 s_5 \ldots$ entsprechenden Kegelschnitte. Die beiden Büschel $M(s_1 s_2 \ldots)$ und $(AB'C'D')\{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots\}$ erzeugen eine Curve C_1^3 dritter Ordnung, welche mit C^3 zusammenfallen muss. Dazu ist nachzuweisen, dass $\varkappa_4^2$ und λ_4^2 sich auf s_4, $\varkappa_5^2$ und λ_5^2 sich auf $s_5, \ldots$ schneiden. — Jeder Strahl des Büschels $(s_1 s_2 \ldots)$ wird von beiden Kegelschnittbüscheln $(\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots)$ in einer quadratischen Involution geschnitten; auf jedem Strahle fällt ein Punktpaar der einen mit einem Punktpaare der andern Involution zusammen. Ordnen wir die beiden Kegelschnitte, welche durch das gemeinsame Punktpaar gehen, einander zu, so ist zwischen den Kegelschnittbüscheln dadurch eine projectivische Beziehung hergestellt. Wenn auf dem Strahle s sich die beiden Kegelschnitte $\varkappa^2$ und λ^2 der Büschel schneiden, so lässt sich zeigen, dass der Kegelschnitt $\varkappa^2$ von keinem andern Kegelschnitte des Büschels $(\lambda_1^2 \ldots)$ in zwei Punkten eines Strahles von $(s_1 \ldots)$ geschnitten wird. Der Kegelschnitt $\varkappa^2$ wird von allen Kegelschnitten von $(\lambda_1^2 \ldots)$ ausser in A Gruppen von je drei Punkten geschnitten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ einhüllen. Zu den Tangenten dieses Kegelschnittes gehört auch s_1, weil die Kegelschnitte $(\varkappa_1^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \ldots)$ die Gerade s_1 in derselben Involution schneiden. Daher kann man von M nur noch eine Tangente s an $\mathfrak{K}$ ziehen, welche also der einzige Strahl durch M ist, auf dem sich $\varkappa^2$ und ein Kegelschnitt λ des Büschels $(\lambda_1^2 \ldots)$ schneiden. Dadurch ist zwischen den Kegelschnitten von $(\varkappa_1^2 \ldots)$ und $(\lambda_1^2 \ldots)$ und den Strahlen von $(s_1 \ldots)$ eine projectivische Beziehung hergestellt. Da in dieser aber $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \varkappa_3^2$, $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ und $s_1 s_2 s_3$ entsprechende Elemente sind, so müssen auch $\varkappa_4^2 \lambda_4^2 s_4$, $\varkappa_5^2 \lambda_5^2 s_5, \ldots$ homologe Elemente der drei Büschel sein. Die Curven C^3 und C_1^3 haben also unendlich viele Punkte gemein und fallen daher zusammen.

F o l g e r u n g. Die Curve C^3, welche durch die projectivischen Büschel $(ABCD)$ und (M) erzeugt ist, wird von jedem Kegelschnitte K^2 in sechs Punkten geschnitten.

Es seien EFG drei beliebige Punkte von K^2, die nicht auf C^3 liegen, und XY zwei beliebige Punkte von C^3. Die fünf Punkte $EFGXY$ bestimmen einen Kegelschnitt Y^2 und wenn Y die Curve C^3 durchläuft, durchläuft Y^2 das Büschel $(EFGX)$. Wenn darauf X die ganze Curve C^3 durchläuft, so erhält man alle Büschel, die im Netze $((EFG))$ vorkommen können und daher auch den Kegelschnitt K^2. Dieser schneidet daher C^3 in zwei Punkten $X_0 Y_0$. Auf dieselbe Art denken wir uns jetzt alle Kegelschnitte des Netzes $((EX_0 Y_0))$ entstanden und folgern, dass K^2 die Curve C^3 noch in zwei weiteren Punkten $Z_0 Z'_0$ schneiden muss. Ein Strahl s_1 durch M schneidet C^3 in $E_1 F_1$ und der durch $E_1 F_1 X_0 Y_0 Z_0$ bestimmte Kegelschnitt trifft die Curve C^3 noch in U, so kann nach dem

Vorigen C^3 erzeugt werden durch die Büschel (M) und $(X_0 Y_0 Z_0 U)$. Die Elemente dieser beiden Büschel schneiden K^2 in einer Involution und einer dazu projectivischen Punktreihe und die drei Doppelpunkte beider Reihen sind weitere drei Schnittpunkte von K^2 und C^3.

Ginge K^2 zufällig durch M, so würden die Büschel (M) und $(X_0 Y_0 Z_0 U)$ diesen Kegelschnitt in zwei projectivischen Punktreihen treffen, deren Doppelpunkte Schnittpunkte von K^2 und C^3 sind.

3. Eine Tripelcurve wird von jedem Kegelschnitte in sechs Punkten geschnitten.

Sind ABC drei Schnittpunkte der Tripelcurve C^3 und des Kegelschnittes K^2 und $[A]$, $[B]$, $[C]$ die Geradenpaare durch A, B, C, welche zu den Kegelschnitten des Netzes gehören, dessen Tripelcurve C^3 ist, so bilden die Polaren der Punkte von K^2 bezüglich $[A]$, $[B]$, $[C]$ drei projectivische Strahlenbüschel (A), (B), (C), von denen die beiden ersten und beiden letzten je einen Kegelschnitt $[AB]$, $[BC]$ erzeugen. Beide schneiden sich ausser in B noch in drei Punkten, deren conjugirte in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Netzes die Punkte von K^2 sind, welche dieser Kegelschnitt ausser ABC noch mit C^3 gemein hat.

6. Liegen sechs Punkte der Tripelcurve C^3 auf einem Kegelschnitte, so liegen zwei von ihnen mit den conjugirten der vier übrigen auch auf einem Kegelschnitte.

Sind $ABCDEF$ sechs Punkte, in denen C^3 von einem Kegelschnitte getroffen wird, $C'D'E'F'$ die conjugirten der vier letzten, so ist

1) $$A(CDEF) \barwedge B(CDEF),$$

2) $$\left\{\begin{array}{l} A(CDEF) \barwedge A(C'D'E'F'), \\ B(BCDE) \barwedge B(C'D'E'F'), \end{array}\right.$$

da $A(CC'DD'EE'FF')$ und $B(CC'DD'EE'FF')$ involutorische Büschel sind, also:

3) $$A(C'D'E'F') \barwedge B(C'D'E'F').$$

7. Jede Tripelcurve kann auf unendlich viele Arten durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden.

I. Beweis. In Steiner's Vorlesungen, herausgegeben von Schroeter, II. Aufl., S. 507, ist der Satz bewiesen: „Wenn man durch drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve und einen beliebigen Punkt Q derselben ein Büschel von Kegelschnitten legt, so trifft jeder Kegelschnitt desselben die Tripelcurve im Allgemeinen noch in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt P der Tripelcurve läuft, welcher der dem Punkte Q conjugirte ist." Die Verbindung dieses Satzes mit 2 liefert den Beweis.

Anmerkung. Hieraus folgt auch sofort der Satz in 3.

II. Beweis. Wir nehmen wieder vier beliebige Punkte $ABCD$ der Tripelcurve C^3 und legen durch sie die Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$, welche C^3 noch in EF, E_1F_1, E_2F_2, ... schneiden. Es treffe EF die C^3 in M und es sei M' der conjugirte Punkt zu M, dann bilden $M'EF$ ein Tripel. Durch dieses Tripel und AB lege man einen Kegelschnitt λ^2, welcher C^3 noch in einem Punkte T trifft, der mit AB zu einem Tripel gehört. Legt man dann durch $ABTM'$ die Kegelschnitte $\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots$, so müssen diese C^3 in solchen Punkten treffen, deren Verbindungslinien durch M gehen (vergl. Steiner); deshalb müssen nach 2) auch EF, E_1F_1, E_2F_2, ... durch M gehen.

8. Alle Kegelschnitte, welche dieselben drei Paare von conjugirten Punkten haben, bilden ein Netz.

AA', BB', CC' seien drei Punktpaare; auf ihren Verbindungslinien a, b, c sind durch die Punktpaare drei Involutionen bestimmt, deren Punktpaare $\alpha\alpha'$, $\alpha_1\alpha'_1$, ..., $\beta\beta'$, $\beta_1\beta'_1$, ..., $\gamma\gamma'$, $\gamma_1\gamma'_1$, ... heissen mögen. Sind DE zwei ganz beliebige Punkte, so ist durch diese ein Kegelschnitt bestimmt, der A und A', B und B', C und C' als conjugirte Punkte hat. Denn von allen Kegelschnitten des Büschels $(DE\alpha\alpha')$ geht nur ein einziger durch ein Punktpaar auf b; dasselbe gilt von den Kegelschnitten des Büschels $(DE\alpha_1\alpha'_1)$. Diese beiden Kegelschnitte seien $\varkappa^2$ und $\varkappa_1^2$; sie bestimmen ein Büschel mit den Grundpunkten $DEFG$, dessen Kegelschnitte a und b in den Punktpaaren der Involutionen $\alpha\alpha'$, ... und $\beta\beta'$, ... schneiden. In dem durch $\varkappa^2$ und $\varkappa_1^2$ bestimmten Büschel giebt es nur einen Kegelschnitt, welcher c in einem Punktpaare der Involution $\gamma\gamma'$, ... schneidet, und dieser ist der einzige Kegelschnitt, welcher durch je ein Punktpaar der Involutionen auf a, b, c und durch D und E geht.

Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punkt D gehen und AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte haben, bilden ein Büschel.

Durch D und E, D und E_1 sind zwei Kegelschnitte λ^2, λ_1^2 bestimmt, welche ein Büschel bestimmen; die Kegelschnitte desselben haben sämmtlich AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte. Ist X ein beliebiger Punkt, so ist der Kegelschnitt, welcher durch D und X geht und AA', BB', CC' als Paare conjugirter Punkte hat, ein Kegelschnitt des Büschels $(\lambda^2\lambda_1^2)$, weil er a, b, c in Punktpaaren der Involutionen $\alpha\alpha'$, ..., $\beta\beta'$, ... $\gamma\gamma'$, ... schneidet und dies dieselben sind, in denen a, b, c von den Kegelschnitten des Büschels $(\lambda^2\lambda_1^2)$ geschnitten werden.

Durch zwei Punkte D und F sind also zwei Büschel bestimmt; sie haben einen Kegelschnitt gemein.

Und zwar ist dies derjenige Kegelschnitt, welcher durch D und F geht und AA', BB', CC' zu Paaren conjugirter Punkte hat. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte bildet ein Netz. Durch drei von ihnen sind die übrigen bestimmt, und dies ist die Steiner'sche Definition des Kegelschnittnetzes.

9. **Ist eine Curve dritter Ordnung durch die Schnittpunkte homologer Elemente eines Kegelschnittbüschels und eines projectivischen Strahlenbüschels entstanden, so ist sie eine Tripelcurve.**

Es sei $(ABCD)(\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots)\,\overline{\wedge}\,M(ss_1s_2\ldots)$. Die von beiden erzeugte Curve sei C^3. Die Tangente in M an C^3 schneide die Curve noch in T, so lässt sich erkennen, dass sich durch T an C^3 noch andere Tangenten ziehen lassen. Bestimmt man nämlich auf allen Strahlen durch T zu ihren beiden Schnittpunkten mit C^3 und T den vierten harmonischen, dem T zugeordneten Punkt, so muss der geometrische Ort dieser Punkte die C^3 in M und noch in anderen Punkten treffen. Einer von ihnen sei M'. Man kann nun nach 2) die C^3 durch dasselbe Strahlenbüschel M und ein anderes Kegelschnittbüschel erzeugen, dessen Grundpunkte man dadurch festlegt, dass man durch ABM' und die Punktpaare EF und E_1F_1, in denen s und $\varkappa^2$, s_1 und $\varkappa_1^2$ sich treffen, zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{K}_1^2$ legt, die sich noch in G schneiden mögen, so dass also $ABGM'$ die vier Grundpunkte sind. Sind E_2F_2, E_3F_3, E_4F_4 die Punkte, in denen s_2, s_3, s_4 von $\varkappa_3^2$, $\varkappa_4^2$, $\varkappa_5^2$ geschnitten werden, so wählen wir drei von ihnen, etwa E_2, E_3, E_4, und legen durch sie eine Tripelcurve $\mathfrak{C}^3$ so, dass sie ABG als ein Tripel, M und M' als conjugirte Punkte hat. — Alle Kegelschnitte $\mu^2\mu_1^2\ldots$, welche ABG als Tripel und MM' als conjugirte Punkte haben, bilden ein Büschel. In Bezug auf dasselbe seien E'_2, E'_3, E'_4 die conjugirten Punkte von E_2, E_3, E_4. Sämmtliche Kegelschnitte $\nu^2\nu_1^2\ldots$, welche $E_2E'_2$, $E_3E'_3$, $E_4E'_4$ als conjugirte Punkte haben, bilden ein Netz, zu dem also auch das Büschel $\mu^2\mu_1^2$ gehört und die Tripelcurve $\mathfrak{C}^3$ desselben geht durch $ABGMM'E_2E'_2E_3E'_3E_4E'_4$ und kann (vergl. Steiner a. a. O.) durch ein Kegelschnittbüschel $(ABGM')$ und ein Strahlenbüschel (M) erzeugt werden. Den Kegelschnitten $\mathfrak{K}^2\mathfrak{K}_1^2\mathfrak{K}_2^2\mathfrak{K}_3^2\mathfrak{K}_4^2$ dieses Büschels, welche durch $EE_1E_2E_3E_4$ gehen, entsprechen die Strahlen $M(EE_1E_2E_3E_4)$ und diesen wieder die Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2\varkappa_4^2$ des Büschels $(ABCD)$. Aus 2) folgt, dass der Punkt G auf C^3 liegt und dass C^3 und $\mathfrak{C}^3$ zusammenfallen.

10. **Wenn die homologen Elemente zweier projectivischen Kegelschnittbüschel sich auf einer Geraden schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auf einer Tripelcurve.**

Die Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\ldots$ und $\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots$ der projectivischen Büschel $(ABCD)$ und $(A_1B_1C_1D_1)$ schneiden sich resp. in den Punktpaaren EF, E_1F_1, $E_2F_2\ldots$ einer Geraden l und ausserdem in GH, G_1H_1, G_2H_2, ... Wir bezeichnen die Geraden GH, G_1H_1, G_2H_2, ... mit g, g_1, g_2, ..., so ergiebt sich zunächst, dass keine zwei derselben sich auf l

schneiden können. Denn würden etwa g_m und g_n sich in O auf l schneiden, so müssten die Polaren von O in Bezug auf $\varkappa^2_m$ und λ^2_m in eine Gerade o_m zusammenfallen und auf dieser lägen die conjugirten Punkte von O bezüglich beider Büschel. Ebenso müssten die Polaren von O nach $\varkappa^2_n$ und λ^2_n mit o_m zusammenfallen, so dass also O ein gemeinschaftlicher Eckpunkt der zu den Büscheln $(\varkappa^2\varkappa_1^2\ldots)$ und $(\lambda^2\lambda_1^2\ldots)$ gehörigen Tripel sein müsste, was nicht vorausgesetzt ist. Die Geraden $gg_1\ldots$ mögen l in $JJ_1\ldots$ schneiden, so lässt sich zeigen, dass $(JJ_1\ldots)$ $\overline{\wedge}\,(\varkappa^2\varkappa_1^2\ldots)\,\overline{\wedge}\,(\lambda^2\lambda_1^2\ldots)$ ist. Denn erstlich entspricht jedem Paare homologer Kegelschnitte $(\varkappa^2\lambda^2)$ ein Punkt J und zweitens diesem Punkte wieder jenes Kegelschnittpaar, weil es nur einen einzigen Strahl durch J geben kann, auf dem sich zwei homologe Kegelschnitte schneiden.

Schnitten sich drei der Strahlen $gg_1g_2\ldots$, etwa gg_1g_2, in einem Punkte M und wäre

$$M(gg_1g_2g'_3\ldots)\,\overline{\wedge}\,(\varkappa^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2\ldots),$$

so müsste auch, wenn $J'_3\ldots$ die Schnittpunkte von $g'_3\ldots$ mit l wären,

$$(JJ_1J_2J_3\ldots)\,\overline{\wedge}\,(JJ_1J_2J'_3\ldots)$$

sein, d. h. J'_3 mit J_3 zusammenfallen. In drei von den Punkten $J\ldots$, es seien $J_qJ_rJ_s$, schneiden sich die homologen Elemente $\varkappa_q^2\lambda_q^2g_q$, $\varkappa_r^2\lambda_r^2g_r$, $\varkappa_s^2\lambda_s^2g_s$, so dass also J_q mit E_q und G_q, J_r mit E_r und G_r, J_s mit E_s und G_s und daher auch g'_q mit g_q, g'_r mit g_r, g'_s mit g_s zusammenfällt. Daher schneiden sich in M die sechs Strahlen $gg_1g_2g_qg_rg_s$. Hieraus schliessen wir, dass es keinen zweiten Punkt M' geben kann, in welchem sich drei der Strahlen $g\ldots$ schneiden, weil sonst die drei Strahlen $g_qg_rg_s$ sich auch in ihm treffen müssten. Entweder gehen also durch M alle Strahlen $g\ldots$, oder es wird jeder beliebige derselben, ausgenommen $gg_1g_2g_qg_rg_s$, von allen anderen so geschnitten, dass keine zwei Schnittpunkte zusammenfallen, so dass also die übrigen Strahlen $g\ldots$ Tangenten eines Kegelschnittes sind, der sich aber auf einen Punkt reduciren muss, da sich von allen Punkten der Geraden l nur je eine Tangente an ihn ziehen lässt. Da aber in keinem andern Punkte als M sich drei Gerade $g\ldots$ treffen können, so muss M jener Punkt sein. Wenn also drei der Geraden g sich in einem Punkte treffen, so thun es alle.

Gingen keine drei der Geraden $g\ldots$ durch einen Punkt, müssten sie einen Kegelschnitt einhüllen, der sich aber wieder auf einen Punkt M reducirt, weil von den Punkten von l aus sich nur je eine Tangente an ihn ziehen lässt.

Es treffen sich also alle Strahlen $g\ldots$ in einem Punkte M und daher ist der Ort der Schnittpunkte $(\varkappa^2\lambda^2),\ldots$ eine Curve dritter Ordnung und nach 9) eine Tripelcurve.

Der Satz, dass eine Curve dritter Ordnung, welche durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden kann, ist eigentlich auf einem Umwege bewiesen, indem zuerst gezeigt ist, dass jede Tripelcurve durch zwei solche Büschel auf unzählige Arten hervorgebracht werden kann und jede Curve dritter Ordnung, die durch ein Kegelschnittbüschel und projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, als eine Tripelcurve betrachtet werden kann. Doch kann man jenen Satz auch direct beweisen, indem man die Aufgabe der Curvenerzeugung gewissermassen umkehrt und die Frage stellt: Wenn auf jeder von drei durch einen Punkt A gehenden Geraden $g g_1 g_2$ noch zwei Punkte BC, B_1C_1, B_2C_2 und ausserdem beliebig zwei Punkte DE angenommen werden, welches ist der geometrische Ort der Punkte XY von der Eigenschaft, dass die Punkte BC, B_1C_1, B_2C_2 mit den vier Punkten $DEXY$ je auf einem Kegelschnitte liegen?

Durch $BCDE$ lege man einen beliebigen Kegelschnitt $\varkappa^2$, so wird er von den Kegelschnitten der beiden Büschel (DEB_1C_1) und (DEB_2C_2) in zwei quadratischen Involutionen geschnitten, welche ein Punktpaar XY gemein haben. Die durch dasselbe gehenden Kegelschnitte seien $\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2$ und die Gerade, welche es verbindet, sei k. Dann sind XY Punkte des gesuchten Ortes. Sind $\lambda^2\mu^2\ldots$ andere Kegelschnitte durch $BCDE$, so erhält man auf jedem zwei Punkte X_1Y_1, X_2Y_2, ... des gesuchten Ortes; die Kegelschnitte der Büschel (BCD_1E_1), (BCD_2E_2), welche durch sie hindurchgehen, seien $\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2$, $\mu_1{}^2\mu_2{}^2$, ... und die Geraden, welche sie verbinden, l, m, ... Ordnen wir je drei Kegelschnitte der Büschel $(BCDE)$, (BCD_1E_1), (BCD_2E_2) einander zu, die sich in XY, X_1Y_1, X_2Y_2, ... schneiden, so sind dieselben projectivisch aufeinander bezogen und erzeugen eine Curve.

Die Involutionscentra der quadratischen Involutionen, in denen $\varkappa^2\lambda^2\mu^2\ldots$, also die Kegelschnitte des Büschels $(BCDE)$, von den Kegelschnitten der Büschel (BCD_1E_1) und (BCD_2E_2) geschnitten werden und die wir mit K_1K_2, L_1L_2, M_1M_2, ... bezeichnen wollen, liegen auf den Geraden B_1C_1 und B_2C_2 und bilden auf ihnen zwei projectivische Punktreihen. Diese liegen perspectivisch; denn wählen wir aus dem ersten Büschel das Geradenpaar (DE, BC), so ist das Involutionscentrum auf B_1C_1 wie auf B_2C_2 der Punkt A. Daher laufen die Geraden klm... durch einen Punkt S und die Punkte XYX_1Y_1 .. liegen auf einer Curve K^3 dritter Ordnung, die auch durch jedes der Kegelschnittbüschel $(BCDE)$, (B_1C_1DE), (B_2C_2DE) und das projectivische Büschel (S) erzeugt werden kann, wenn jedem der Kegelschnitte $\varkappa^2\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2$ der Strahl k, $\lambda^2\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2$ der Strahl l, ... zugewiesen wird.

Wenn wir den Kegelschnitten $\varkappa^2\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2$ des Büschels $(XYDE)$ die Geraden gg_1g_2 der Reihe nach zuordnen, so ist dadurch zwischen den Kegelschnitten des Büschels und den Strahlen von (A) eine projectivische Beziehung hergestellt. Die homologen Elemente erzeugen also eine Curve C^3 dritter Ordnung. Wir erhalten eine andere Curve C_1^3 dritter Ordnung, wenn wir das Büschel $(X_1 Y_1 D E)$ wählen und den Kegelschnitten $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ die Geraden $g g_1 g_2$ zuordnen. Weiter können wir die Kegelschnitte der Büschel $(X Y D E)$ und $(X_1 Y_1 D E)$ projectivisch dadurch aufeinander beziehen, wenn wir der Reihe nach den Kegelschnitten $\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ des ersten Büschels die Kegelschnitte $\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$ des zweiten zuordnen. Bei dieser Zuordnung entspricht dem Geradenpaare (DE, XY) das Geradenpaar $(DE, X_1 Y_1)$. (Vgl. 1, Anm.) Daraus folgt wieder, wie vorher und wie in 1 gezeigt ist, dass die beiden Büschel $(DEXY)$ und $(DEX_1 Y_1)$ eine Curve dritter Ordnung erzeugen, welche auch durch jedes dieser Büschel und das projectivische Strahlenbüschel (A) erzeugt werden kann. Es müssen also die Curven C^3 und C_1^3 zusammenfallen. Wählen wir andere Kegelschnittbüschel $(DEX_2 Y_2)$, ..., so folgt, dass wir die Curve C^3 durch diese und das projectivische Büschel (A) erzeugen können, wodurch zunächst wieder der Satz 2 bewiesen ist, dass eine Curve dritter Ordnung, welche durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt ist, auf unzählige Arten durch dasselbe Strahlenbüschel und andere Kegelschnittbüschel hervorgebracht werden kann.

Da also alle Punkte $X Y X_1 Y_1 \ldots$ sowohl auf C^3, wie auf K^3 liegen, so fallen beide Curven zusammen und C^3 kann durch ein Strahlenbüschel (S) und jedes der projectivischen Kegelschnittbüschel $(DEBC)$, $(DEB_1 C_1)$, $(DEB_2 C_2)$, also auf unzählige Art durch das Büschel (S) und andere projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden. Es bleibt noch nachzuweisen, dass S jeder beliebige Punkt von C^3 sein kann. — Wir halten D fest und lassen E auf C^3 sich ändern in $E'E'' \ldots$; es entstand S durch den Durchschnitt von XY mit C^3, XY aber waren die Schnittpunkte von $\varkappa^2$ mit C^3. Wenn wir nun Kegelschnitte durch $BCDE'X$, $BCDE''X$, ... legen, so schneiden sie C^3 in immer neuen Punkten $Y'Y'' \ldots$ und die Geraden XY', XY'', ... treffen C^3 in $S'S'' \ldots$. Lässt man E die Curve C^3 durchlaufen, so durchlaufen auch Y und S dieselbe, so dass also S jeder beliebige Punkt von C^3 sein kann. Damit aber ist ganz allgemein bewiesen:

> Ist eine Curve C^3 durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt, so kann sie auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden.

Aus diesem Satze und dem Satze 9 lassen sich viele der wichtigsten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung, namentlich auch ihre Polareigenschaften rein synthetisch ableiten.

II. Polareigenschaften.

11. Zieht man durch einen Punkt A einer Tripelcurve C^3 Gerade $g g_1 \ldots$, welche C^3 noch in BC, $B_1 C_1$, ... treffen, so liegen alle Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \ldots$, welche A von jenen Punkten harmonisch trennen, auf einem Kegelschnitte A^2, der C^3 in A berührt und die erste Polare von A nach C^3 heisst.

Man denke sich C^3 durch ein Strahlenbüschel (A) und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt, so werden die Polaren von A nach den Kegelschnitten des Büschels ein zu (A) projectivisches Strahlenbüschel (A') bilden und beide Büschel erzeugen den Kegelschnitt A^2.

12. Sind A und B zwei Punkte von C^3, A^2 und B^2 ihre ersten Polaren, so fällt die Polare von A nach B^2 mit der von B nach A^2 zusammen.

Die Gerade AB treffe C^3 noch in C; die Polaren A^2 und B^2 treffen AB in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Durch einen Punkt C_1 von C^3 ziehen wir die Geraden AC_1 und BC_1, welche C^3 noch in B_1 und A_1 treffen; die ersten Polaren $A_1{}^2$ und $B_1{}^2$ von A_1 und C_1 treffen die Geraden BA_1 und AB_1 in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, dann sind $A\mathfrak{A}BC$, $A\mathfrak{A}_1 B_1 C_1$, $B\mathfrak{B}AC$, $B\mathfrak{B}_1 A_1 C_1$ je vier harmonische Punkte, also treffen sich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, BB_1, CC_1 in einem Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, AA_1, CC_1 in einem Punkte $\mathfrak{B}'$, so dass also $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'C$ in einer Geraden liegen. Wenn A_1 mit A und B_1 mit B, also $A_1{}^2$ mit A^2, $B_1{}^2$ mit B^2 zusammenfällt, so geht die Linie $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'C$ in die gemeinsame Polare von A nach B^2 und B nach A^2 über.

13. Die drei ersten Polaren $A^2 B^2 C^2$ von drei auf einer Geraden g liegenden Punkten ABC der Curve C^3 schneiden sich in denselben vier Punkten. Ordnet man den Kegelschnitten $A^2 B^2 C^2$ die Punkte ABC zu, so ist dadurch zwischen den Kegelschnitten des Büschels und den Punkten von g eine projectivische Beziehung hergestellt der Art, dass, wenn P und Q zwei Punkte von g, P^2 und Q^2 ihre ersten Polaren sind, die Polare von P nach Q^2 mit der von Q nach P^2 zusammenfällt.

Ist D ein Schnittpunkt von A^2 und B^2, so verbinde man ihn mit ABC. Die Verbindungslinien treffen C^3 in sechs Punkten eines Kegelschnittes, in Bezug auf welchen D und g Pol und Polare sind, also muss C^2 auch durch D und somit durch jeden Schnittpunkt von A^2 und B^2 gehen. — Die Polaren von A nach $A^2 B^2 C^2 P^2$ seien $abcp$, die von $ABCP$ nach A^2 seien $ab'c'p'$, so ist $(abcp) \barwedge (ab'c'p')$ und da wegen 12 b und b', c und c' zusammenfallen, müssen auch p und p', d. h. die Polaren von A nach P^2 und von P nach A^2 zusammenfallen. — Es seien weiter die

Polaren von P nach $A^2B^2C^2P^2Q^2$ mit $a_1b_1c_1p_1q_1$ und die von $ABCPQ$ nach P^2 mit $a'_1b'_1c'_1p_1q'_1$ bezeichnet, so ist

$$(a_1b_1c_1p_1q_1) \overline{\wedge} (a'_1b'_1c'_1p_1q'_1)$$

und da a_1 mit a'_1, b_1 mit b'_1, c_1 mit c'_1 zusammenfällt, so muss auch die Polare q_1 von P nach Q^2 mit der Polare q'_1 von Q nach P^2 zusammenfallen.

14. Zieht man durch einen Punkt P beliebige Geraden $gg_1\ldots$, welche C^3 in ABC, $A_1B_1C_1$, ... treffen, so bestimmen ihre ersten Polaren $A^2B^2C^2$, $A_1^2B_1^2C_1^2$, ... Büschel. In jedem von ihnen entspricht dem Punkte P derselbe Kegelschnitt P^2, vorausgesetzt, dass die projectivische Beziehung dadurch hergestellt wird, dass den Punkten ABC, $A_1B_1C_1$, ... ihre ersten Polaren zugeordnet werden. P^2 heisst die erste oder conische Polare von P.

Ist X ein beliebiger Punkt von C^3, X^2 seine erste Polare, sind $P^2P_1^2\ldots$ die dem Punkte entsprechenden Curven, sind $abcp$ die Polaren von X nach $A^2B^2C^2P^2$, $abcp'$ die von $ABCP$ nach X^2, so ist $(abcp)$ $\overline{\wedge}$ $(abcp')$, also fällt p mit p' zusammen. Ebenso folgt, dass, wenn p_1 die Polare von X nach P_1^2 ist, diese mit p' zusammenfallen muss. Da also die Polaren P^2 und P_1^2 die Eigenschaft haben, dass die Polaren aller Punkte X von C^3 nach ihnen in eine Gerade zusammenfallen, so fallen P^2 und P_1^2 selbst zusammen.

Jeder Geraden g ist ein Kegelschnittbüschel zugeordnet, dessen Grundpunkte die vier Pole von g heissen. Dann können wir dem eben bewiesenen Satze den Ausdruck geben:

15. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt P, so durchlaufen ihre Pole die erste Polare P^2 von P.

Die Gerade g heisst die zweite oder gerade Polare jedes ihrer vier Pole.

16. Folgerungen:

a) Liegt ein Punkt auf der ersten Polare eines andern, so liegt der zweite auf der geraden Polare des ersten und umgekehrt.

b) Berührt eine Gerade die Tripelcurve C^3, so fallen zwei ihrer Pole mit dem Berührungspunkte zusammen.

c) Die gerade Polare eines Punktes von C^3 berührt C^3 in diesem Punkte.

d) Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel.

e) Die ersten Polaren aller Punkte bilden ein Netz.

17. Die Polaren aller Punkte $P\ldots$ einer Geraden g nach ihren ersten Polaren $P^2\ldots$ werden von einem

Kegelschnitte G^2 umhüllt, welcher die zweite Polare von g nach C^3 genannt wird und mit dem geometrischen Orte der Pole von g bezüglich aller P^2 oder mit dem Orte der den Punkten P... von g bezüglich des Büschels (P^2...) conjugirten Punkte zusammenfällt. Der Pol von g nach P^2 fällt dabei mit dem zu P conjugirten Punkte zusammen.

Ist Q ein ganz beliebiger Punkt, so bilden seine Polaren bezüglich aller P^2... ein zur Punktreihe P... projectivisches Strahlenbüschel, von dessen Strahlen zwei durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen. Diese seien P_1 und P_2, ihre ersten Polaren P_1^2 und P_2^2, so treffen sich die Polaren von P_1 nach P_1^2 und von P_2 nach P_2^2 in Q und es giebt auf g keinen andern Punkt, dessen Polare nach seiner ersten Polare durch Q geht. Daher werden alle diese Polaren von einem Kegelschnitte G^2 eingehüllt. — Es seien $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$... die Pole von g nach $P^2 P_1^2$..., $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1$... die conjugirten Punkte zu PP_1.... Die Polare p_1 von P nach P_1^2 muss durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ und, da sie mit der Polare von P_1 nach P^2 zusammenfällt, auch durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'_1$ gehen; die Polare von P_2 nach P_2^2 muss durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}'$ und, da sie mit der Polare von P_2 nach P^2 zusammenfällt, auch durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'_2$ gehen u. s. f. Da also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ sowohl auf p_1, als auf p_2, p_3, ... liegen, so müssen sie in einen Punkt zusammenfallen. — Die Polaren von $\mathfrak{P}$ bezüglich aller P^2... schneiden sich in dem zu $\mathfrak{P}$ conjugirten Punkte P und die Polare von P nach P^2 ist die einzige eines Punktes von g nach seiner ersten Polare, welche durch $\mathfrak{P}$ geht, also liegt $\mathfrak{P}$ auf G^2.

18. Liegt ein Punkt P_1 auf der Polare eines andern P_2 nach seiner conischen Polare P_2^2, so liegt der letzte auf der conischen Polare P_1^2 des ersten.

Wenn P_1 auf der Polare von P_2 nach seiner conischen Polare P_2^2 liegt, so muss P_2 auf der Polare von P_1 nach P_2^2 oder auf der Polare von P_2 nach P_1^2, welches nach 13 dieselbe Gerade ist, liegen, d. h. es muss der Berührungspunkt dieser Geraden mit P_1^2 sein oder auf P_1^2 liegen.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

18a. Die gerade Polare eines Punktes P nach C^3 fällt mit seiner Polare nach seiner conischen Polare P^2 zusammen,

den man auch auf folgende Art beweisen kann:

Alle conischen Polaren, welche durch einen Punkt P gehen, bilden ein Büschel. In ihm kommen drei Geradenpaare vor (ll_1), $(l'l'_1)$, $(l''l''_1)$, deren Pole Q, Q', Q'' sein mögen. Die geraden Polaren aller Punkte von l und l_1 müssen sich in Q, von l' und l'_1 in Q', von l'' und l''_1 in Q'' schneiden, also ist die gerade Polare von P die Gerade $QQ'Q''$, denn sie muss durch jeden dieser drei Punkte gehen. Wenn l durch P geht und C^3 in ABC schneidet, so fallen die geraden Polaren von ABC mit den Tangenten in diesen Punkten an C^3 oder mit den Polaren von ABC bezüglich der conischen Polaren $A^2B^2C^2$ dieser Punkte zusammen. Es umhüllen die Polaren der Punkte von l bezüglich der conischen Polaren dieser Punkte einen Kegelschnitt, der sich auf den Punkt Q reduciren muss, weil die Polaren von ABC bezüglich $A^2B^2C^2$ durch Q gehen, also muss die Polare von P bezüglich der conischen Polare P^2 von P durch Q gehen. Auf ganz dieselbe Weise zeigt man, dass diese Polare auch durch Q' und Q'' gehen muss und also mit $QQ'Q''$ zusammenfällt.

Ueber die Lage der Scheitel der drei Geradenpaare eines Büschels conischer Polaren und ihrer Pole, sowie über die gegenseitige Bedeutung dieser sechs Punkte geben uns die Sätze 14, 17 und 18 Aufschluss. Die Scheitel der drei Geradenpaare (ll_1), $(l'l'_1)$, $(l''l''_1)$, welche in einem Büschel conischer Polaren vorkommen, seien $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$; ihre Pole Q, Q', Q''. Es muss die Polare von Q bezüglich $(l'l'_1)$ mit der von Q' bezüglich (ll_1) zusammenfallen und da erstere durch $\mathfrak{Q}'$, letztere durch $\mathfrak{Q}$ gehen muss, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ die gemischte gerade Polare von Q und Q'. Daher muss $\mathfrak{Q}'Q$ von $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}$ durch $l'l'_1$ und $\mathfrak{Q}Q'$ von $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ durch ll_1 harmonisch getrennt sein, folglich ist Q der Schnittpunkt von $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$, und Q' der von $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}''$ mit der Geraden g, auf welcher $QQ'Q''$ liegen. Ebenso zeigt man, dass Q'' auf $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ liegt, und so folgt:

19. Die Pole derjenigen conischen Polaren eines Büschels, welche Geradenpaare sind, bilden mit den Scheiteln der letzteren die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

Die conische Polare von $\mathfrak{Q}$ sei $\mathfrak{Q}^2$. Da die gerade Polare von Q auch die Polare von Q bezüglich Q^2 oder (ll_1) ist, so muss sie durch $\mathfrak{Q}$ gehen und daher muss Q sowohl auf der geraden, wie auf der conischen Polare von $\mathfrak{Q}$ liegen. — Ferner ist die Polare von $\mathfrak{Q}$ bezüglich aller conischen Polaren $P^2\ldots$ der Punkte $P\ldots$ der Geraden g oder $QQ'Q''$ die Gerade $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ und daher müssen die Polaren aller Punkte $P\ldots$ von g bezüglich $\mathfrak{Q}^2$ auch in die Gerade $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ fallen, welche durch Q geht. Dies aber ist nicht anders möglich, als wenn $\mathfrak{Q}^2$ in zwei Gerade zerfällt, deren Scheitel in Q liegt, so dass dadurch der Satz gewonnen ist:

20. Ist die conische Polare eines Punktes Q ein Geradenpaar mit dem Scheitel $\mathfrak{Q}$, so ist die conische Polare von $\mathfrak{Q}$ auch ein Geradenpaar mit dem Scheitel Q.

Auf jeder Geraden g giebt es drei Punkte, deren conische Polaren Geradenpaare sind, also liegen sie sämmtlich auf einer Curve dritter Ordnung und wir folgern mit Hilfe des letzten Satzes:

21. Die Pole derjenigen conischen Polaren, welche Geradenpaare sind, sowie die Scheitel der letzteren liegen auf einer Curve dritter Ordnung K^3, welche die Hesse'sche Curve von C^3 genannt wird.

Sind $ABCDEFGHJ$ die neun Grundpunkte eines Büschels von Tripelcurven $C^3 C_1^3 \ldots$, so können wir jede erzeugt denken durch das Kegelschnittbüschel $(ABCD)$ und Strahlenbüschel (S), (S_1), ..., deren Scheitel auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen, welcher durch die fünf Punkte $EFGHJ$ geht. Da die Büschel (S), (S_1), ... in projectivischer Beziehung stehen, so schneiden sie $\mathfrak{K}$ in projectivischen Punktreihen, die aber sämmtlich zusammenfallen müssen, weil die fünf homologen Punkte $EFGHJ$ zusammenfallen. Diese Punktreihe auf $\mathfrak{K}$ sei $TT'T'' \ldots$. Durch A ziehen wir eine Gerade g, welche die Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$ in einer zu diesem und daher auch zu $TT'T'' \ldots$ projectivischen Punktreihe $MM'M'' \ldots$ schneidet. Die Büschel (S), (S_1), ... schneiden g in den zu den vorigen projectivischen Punktreihen $NN'N'' \ldots$, $N_1 N'_1 N''_1 \ldots$, ... Jede von diesen hat zwei Punkte, die mit ihren homologen in der Reihe $MM'M'' \ldots$ zusammenfallen, und diese Punkte sind die Schnittpunkte von g mit $C^3 C_1^3 \ldots$. Um sie zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt Q, dann ist das Büschel $Q(MM'M'' \ldots) \,\overline{\wedge}\, (S) \,\overline{\wedge}\, (S_1) \,\overline{\wedge} \ldots$ Das Büschel Q erzeugt mit jedem der anderen einen Kegelschnitt $[QS]$, $[QS_1]$, ... Alle diese Kegelschnitte gehen durch Q. Die Strahlen des Büschels $Q(MM'M'' \ldots)$ schneiden $\mathfrak{K}$ in einer zur Reihe $TT'T'' \ldots$ projectivischen Involution, von deren Punkten drei mit den homologen der Reihe $(TT'T'' \ldots)$ zusammenfallen. Nennen wir diese drei Punkte $Q'Q''Q''' \ldots$, so bilden alle Kegelschnitte $[QS]$, $[QS_1]$, ... ein Büschel mit den vier Grundpunkten $QQ'Q''Q'''$ und schneiden also g in einer Involution. Da aber die Schnittpunkte von g und $[QS]$ mit denen von g und C^3 zusammenfallen, so folgt:

22. Jede Gerade durch einen der Grundpunkte eines Büschels von Tripelcurven wird von diesen Curven in einer quadratischen Involution geschnitten.

Die Transversale g schneide die Curven $C^3 C_1^3 \ldots$ in den Punktpaaren $B'C'$, $B'_1 C'_1$, ... Man lege durch diese Punkte die Kegelschnitte $K^2 K_1^2 \ldots$ eines Büschels und durch A eine beliebige Gerade l, so sind (K^2, l), (K_1^2, l), ... Curven dritter Ordnung. Ist P ein beliebiger Punkt von l, so lässt sich zeigen, dass die conischen Polaren desselben bezüglich (K^2, l), ... ein Kegelschnittbüschel bilden. Da (K^2, l) eine Tripelcurve ist, so gelten von ihr die oben abgeleiteten Sätze über Polaren der Tripelcurven. Unter den Kegelschnitten des Büschels $(K^2 K_1^2 \ldots)$ giebt es drei Geradenpaare (xx_1), (yy_1), (zz_1), deren Scheitel XYZ sein mögen. Sind $\xi^2 \xi_1^2 \ldots$, $\eta^2 \eta_1^2 \ldots$, $\zeta^2 \zeta_1^2 \ldots$ die conischen Polaren von XYZ bezüglich (K^2, l), (K_1^2, l), ..., so schneiden alle $\xi^2 \ldots$ die Geraden

xx_1, alle $\eta^2 \ldots$ die Geraden yy_1, alle $\zeta^2 \ldots$ die Geraden zz_1 in denselben vier Punkten und bilden daher drei Büschel. Die conischen Polaren von P bezüglich (K^2, l), ... seien $\pi^2 \ldots$. Es treffen sich die Polaren von P bezüglich $\xi^2 \ldots$, $\eta^2 \ldots$, $\zeta^2 \ldots$ in drei Punkten X', Y', Z', welche dem Punkte P bezüglich jener Kegelschnittbüschel conjugirt sind, und weil die Polare von P bezüglich ξ^2 mit der von X bezüglich π^2 zusammenfällt, so sind XX', YY', ZZ' conjugirte Punktpaare bezüglich aller $\pi^2 \ldots$. Zwei von den Kegelschnitten $K^2 \ldots$ berühren l in MM', dann sind die conischen Polaren $\mu^2 \ldots$ von M Geradenpaare mit dem gemeinsamen Scheitel M'. Weil nun die Polaren von P bezüglich aller $\mu^2 \ldots$ sich in M' schneiden, so müssen auch die Polaren von M bezüglich aller $\pi^2 \ldots$ sich in M' schneiden, d. h. M und M' sind auch conjugirte Punkte in Bezug auf alle $\pi^2 \ldots$. Letztere haben also vier Paare conjugirter Punkte und bilden daher ein Kegelschnittbüschel. Sind $P^2 P_1^2 \ldots$ die conischen Polaren von P in Bezug auf $C^3 C_1^3 \ldots$, so müssen P^2 und π^2, P_1^2 und π_1^2, ... sich in denselben Punkten auf l schneiden, also schneiden alle $P^2 \ldots$ die Gerade l in den Punktpaaren einer Involution. Zieht man von P aus durch die übrigen acht Grundpunkte $BCDEFGHJ$ Gerade, so folgt ebenso, dass jede dieser acht Geraden von den Kegelschnitten $P^2 \ldots$ in einer Involution geschnitten wird. Also treffen sich alle $P^2 \ldots$ in denselben vier Punkten. Es folgt:

23. Die conischen Polaren $P^2 P_1^2 \ldots$ eines Punktes P in Bezug auf die Tripelcurven eines Büschels bilden selbst ein Büschel.

Hiermit wären einige Hauptsätze über die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetischem Wege abgeleitet.

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Eine einfache Darstellungsform der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Bedeutet $f(x)$ eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe und $D_x^\mu.\{f(x)\}$ eine Reihe, die sich aus der ersten dadurch ergiebt, dass jedes Glied von der Form $A_h x^h$ mit dem Factor

$$\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+1-\mu)}\,x^{-\mu}$$

multiplicirt wird, so hat man bekanntlich folgende Transformation:

$$D_x^\mu.\{f(x)\}=\frac{x^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)}.\int\limits_0^1 f(xt)(1-t)^{-\mu-1}\,dt,$$

die ohne Schwierigkeit durch Benutzung der Formel

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

hergeleitet werden kann. Für $f(x)=x^\alpha(1-x)^\gamma$ und $\mu=-\beta-1$ folgt hieraus

$$\int\limits_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta(1-xt)^\gamma\,dt=\frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\alpha+\beta+1}}\,D_x^{-\beta-1}.\{x^\alpha(1-x)^\gamma\}.$$

Um daraus die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung K und E zu bilden, hat man einmal

$$\alpha=-\tfrac{1}{2},\quad \beta=-\tfrac{1}{2},\quad \gamma=-\tfrac{1}{2},\quad x=k^2,$$

das andere Mal

$$\alpha=-\tfrac{1}{2},\quad \beta=-\tfrac{1}{2},\quad \gamma=+\tfrac{1}{2},\quad x=k^2$$

zu setzen. Alsdann ergeben sich die interessanten Formeln

$$K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,D_{k^2}^{-1/2}.\left\{\frac{1}{k\,k'}\right\},$$

$$E=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,D_{k^2}^{-1/2}.\left\{\frac{k'}{k}\right\}.$$

Entwickelt man die Ausdrücke $\frac{1}{k\,k'}$, resp. $\frac{k'}{k}$ nach steigenden Potenzen von k^2, also

$$\frac{1}{kk'} = (k^2)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(k^2)^{+1/2} + \frac{1.3}{2.4}(k^2)^{+3/2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}(k^2)^{+5/2} + \ldots,$$
$$\frac{k'}{k} = (k^2)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(k^2)^{+1/2} - \frac{1.3}{2.4}\frac{(k^2)^{+3/2}}{3} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(k^2)^{+5/2}}{5} - \ldots,$$

führt dann die durch das Zeichen D angedeutete Rechnungsoperation aus und multiplicirt mit $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, so findet man die bekannten Reihenentwickelungen für K und E.

Bromberg. A. Radicke.

XXIII. Eine analytische Auflösung der Aufgabe des Apollonius.

I. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ gleichartig berührt.

Bezeichnen (a_1, b_1, r_1), (a_2, b_2, r_2), (a_3, b_3, r_3), (u, v, h) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der drei gegebenen und des gesuchten Kreises, so verlangt die Aufgabe die Auflösung der drei nothwendigen und hinreichenden Gleichungen

$$1)\qquad \begin{cases} (r_1+h)^2 - (u-a_1)^2 - (v-b_1)^2 = 0, \\ (r_2+h)^2 - (u-a_2)^2 - (v-b_2)^2 = 0, \\ (r_3+h)^2 - (u-a_3)^2 - (v-b_3)^2 = 0 \end{cases}$$

nach den Unbekannten u, v, h.

Durch Entwickelung der Quadrate und Einführung der vierten Unbekannten $t = h^2 - u^2 - v^2$ verwandelt sich dieses Gleichungssystem in das gleichgeltende, aber einfachere

$$2)\qquad \begin{cases} t + 2a_1 u + 2b_1 v + 2r_1 h + r_1^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0, \\ t + 2a_2 u + 2b_2 v + 2r_2 h + r_2^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0, \\ t + 2a_3 u + 2b_3 v + 2r_3 h + r_3^2 - a_3^2 - b_3^2 = 0, \\ t = u^2 + v^2 - h^2 = 0. \end{cases}$$

Um dasselbe aufzulösen, sind mit Hilfe der drei ersten Gleichungen t, u, v durch h auszudrücken, was immer möglich ist, wofern nur der Ausdruck
$$a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1$$
von Null verschieden ist, d. h. wofern nur die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise nicht in einer Geraden liegen, und die gefundenen Werthe in die vierte Gleichung einzusetzen, welche alsdann die Unbekannte h bestimmt.

Am Einfachsten ist folgendes Verfahren:

Man bestimme aus den auflösbaren linearen Gleichungen

$$3)\qquad \begin{cases} a_1 A + b_1 B + C + r_1 = 0, \\ a_2 A + b_2 B + C + r_2 = 0, \\ a_3 A + b_3 B + C + r_3 = 0 \end{cases}$$

die Coefficienten A, B, C und setze, mit ξ, η, ζ drei neue Unbekannte bezeichnend, in 2), um h zu beseitigen,

$$4)\qquad u=\xi+Ah,\quad v=\eta+Bh,\quad t=\zeta+2Ch.$$

Das Resultat wird den Gleichungen 3) zufolge

$$5)\qquad \begin{cases} \zeta+2a_1\xi+2b_1\eta+r_1^2-a_1^2-b_1^2=0, \\ \zeta+2a_2\xi+2b_2\eta+r_2^2-a_2^2-b_2^2=0, \\ \zeta+2a_3\xi+2b_3\eta+r_3^2-a_3^2-b_3^2=0, \\ h^2(1-A^2-B^2)-2(A\xi+B\eta+C)h-\zeta-\xi^2-\eta^2=0. \end{cases}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen, welche in Bezug auf ξ, η, ζ linear sind, geben unmittelbar die Werthe dieser Unbekannten und führen, in der Form

$$\begin{aligned} (\xi-a_1)^2+(\eta-b_1)^2-r_1^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta, \\ (\xi-a_2)^2+(\eta-b_2)^2-r_2^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta, \\ (\xi-a_3)^2-(\eta-b_3)^2-r_3^2&=\xi^2+\eta^2+\zeta \end{aligned}$$

geschrieben, zu dem Schlusse, dass, wenn mit a, b, r die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und der Halbmesser des Kreises bezeichnet werden, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet,

$$6)\qquad \xi=a+Ah,\quad \eta=b+Bh,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta=r^2$$

zu setzen ist. Nach 4), 6), 2) wird dann

$$7)\qquad \begin{cases} u=a+Ah, \\ v=b+Bh, \\ u^2+v^2-h^2=a^2+b^2-r^2-2Ch \end{cases}$$

und, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2-r^2&=\mathfrak{K}, \\ Ax+By+C&=\mathfrak{A} \end{aligned}$$

gesetzt wird, identisch

$$(x-u)^2+(y-v)^2-h^2=\mathfrak{K}-2h\mathfrak{A}.$$

Zur Bestimmung von h dient die vierte Gleichung in 5), nämlich

$$(1-A^2-B^2)h^2-2(Aa+Bb+C)h-r^2=0,$$

deren Wurzeln h', h'' seien.

Es entsprechen demnach den Bedingungen der Aufgabe zwei Kreise, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}-2h'\mathfrak{A}&=0, \\ \mathfrak{K}-2h''\mathfrak{A}&=0 \end{aligned}$$

sind und besagen, dass die gesuchten Kreise beide zu derjenigen Kreisschaar gehören, welche durch den Kreis

$$\mathfrak{K}=0$$

und die Gerade

$$\mathfrak{A}=0$$

bestimmt ist. Diese Gerade ist, da den Gleichungen 3) zufolge die von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise auf dieselbe gefällten Lothe den Halbmessern r_1, r_2, r_3 proportional sind, diejenige, auf welcher die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ liegen. Dies folgt auch einfach daraus, dass der Ausdruck $\mathfrak{A}$ verschwindet, wenn man die Coordinaten

$$\frac{r_2 a_3 - r_3 a_2}{r_2 - r_3}, \quad \frac{r_2 b_3 - r_3 b_2}{r_2 - r_3} \quad \text{u. s. w.}$$

der äusseren Aehnlichkeitspunkte einsetzt und die Gleichungen 3) berücksichtigt.

Um also die gesuchten Kreise zu finden, reicht es hin, zwei Kreise zu zeichnen, welche zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehören und einen der gegebenen Kreise, etwa $\mathfrak{K}_1$, berühren. Zu diesem Ende hat man die Polare des Durchschnittspunktes der Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{A}$ mit der gemeinschaftlichen Sehne von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, welcher der Punkt gleicher Potenzen der Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ und der gesuchten Kreise ist, in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}_1$ zu ziehen und die Punkte, in welchen diese Polare den Kreis $\mathfrak{K}_1$ schneidet, mit dem Mittelpunkte desselben durch gerade Linien zu verbinden. Diese Geraden treffen das vom Punkte gleicher Potenzen (a, b) auf $\mathfrak{A}$ gefällte Loth in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

Die Gergonne'sche Construction ergiebt sich unmittelbar, wenn man erwägt, dass die erwähnte Polare den Pol von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}_1$ und den Punkt gleicher Potenzen (a, b) der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ enthalten muss.

Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass jeder zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehörende Kreis die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

Nimmt man statt der äussern Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{A}$ der Reihe nach die drei inneren, welche die inneren Aehnlichkeitspunkte je zweier Kreispaare und den äussern des dritten Paares enthalten, was der Behaftung eines der Halbmesser r_1, r_2, r_3 in den Gleichungen 1), 2), 3) mit dem negativen Vorzeichen entspricht, so erhält man durch die nämliche Construction die sechs Kreise, welche $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ ungleichartig berühren.

II. Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$ ist, sind drei Kreise gegeben; es soll ein Kreis gefunden werden, welcher diese Kreise gleichartig berührt.

Bezeichnen (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (u, v, w, h) die rechtwinkligen, auf den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt bezogenen Coordinaten der Mittelpunkte und die sphärischen Halbmesser der drei gegebenen und des gesuchten Kreises, so sind die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen der Aufgabe

$$8)\qquad \begin{cases} a_1 u + b_1 v + c_1 w = \cos(h + r_1), \\ a_2 u + b_2 v + c_2 w = \cos(h + r_2), \\ a_3 u + b_3 v + c_3 w = \cos(h + r_3), \end{cases}$$

welche mit Hilfe der Gleichung

$$9) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

die Unbekannten u, v, w, h bestimmen.

Man suche aus den Gleichungen

$$10) \qquad \begin{cases} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \sin r_1 = 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + \sin r_2 = 0, \\ a_3 A + b_3 B + c_3 C + \sin r_3 = 0, \end{cases}$$

welche immer und nur auf eine Art auflösbar sind, wofern die Mittelpunkte der gegebenen Kreise nicht auf einem grössten Kreise liegen, die Coefficienten A, B, C und setze, mit ξ, η, ζ drei neue Unbekannte bezeichnend,

$$11) \qquad u = \xi + A \sin h, \quad v = \eta + B \sin h, \quad w = \zeta + C \sin h.$$

Es verwandeln sich alsdann die Gleichungen 8) in

$$12) \qquad \begin{cases} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta = \cos r_1 \cos h, \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta = \cos r_2 \cos h, \\ a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta = \cos r_3 \cos h. \end{cases}$$

Bezeichnen ferner (a, b, c, r) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und den sphärischen Halbmesser des Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet, so hat man

$$13) \qquad \begin{cases} a_1 a + b_1 b + c_1 c = \cos r_1 \cos r, \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = \cos r_2 \cos r, \\ a_3 a + b_3 b + c_3 c = \cos r_3 \cos r. \end{cases}$$

Aus 12) und 13) folgt

$$a_1(\xi \cos r - a \cos h) + b_1(\eta \cos r - b \cos h) + c_1(\zeta \cos r - c \cos h) = 0,$$
$$a_2(\xi \cos r - a \cos h) + b_2(\eta \cos r - b \cos h) + c_2(\zeta \cos r - c \cos h) = 0,$$
$$a_3(\xi \cos r - a \cos h) + b_3(\eta \cos r - b \cos h) + c_3(\zeta \cos r - c \cos h) = 0$$

und hieraus

$$\xi \cos r - a \cos h = \eta \cos r - b \cos h = \zeta \cos r - c \cos h = 0,$$

$$\xi = \frac{\cos h}{\cos r} a, \quad \eta = \frac{\cos h}{\cos r} b, \quad \zeta = \frac{\cos h}{\cos r} c.$$

Die Unbekannten u, v, w haben demnach nach 11) folgende Werthe:

$$u = \frac{\cos h}{\cos r} a + A \sin h,$$

$$v = \frac{\cos h}{\cos r} b + B \sin h,$$

$$w = \frac{\cos h}{\cos r} c + C \sin h$$

und es ist identisch

$$14) \qquad ux + vy + wz - \cos h = \frac{\cos h}{\cos r}(ax + by + cz - \cos r)$$
$$+ \sin h (Ax + By + Cz).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von h ergiebt sich durch Einsetzung der Werthe von u, v, w in 9) und lautet

$$(1-A^2-B^2-C^2)\sin^2 h - 2\left(\frac{Aa+Bb+Cc}{\cos r}\right)\sin h \cos h - tg^2 r \cos^2 h = 0.$$

Die Identität 14) zeigt, dass die zwei den Bedingungen der Aufgabe genügenden Kreise zu derjenigen sphärischen Kreisschaar gehören, welche durch den Kreis

$$\mathfrak{K} = ax + by + cz - \cos r = 0$$

und den grössten Kreis

$$\mathfrak{A} = Ax + By + Cz = 0$$

bestimmt wird. Dieser letztere ist derjenige, auf welchem den Gleichungen 10) zufolge die Punkte, deren Coordinaten den Ausdrücken

$$\begin{array}{lll} a_2 \sin r_3 - a_3 \sin r_2, & b_2 \sin r_3 - b_3 \sin r_2, & c_2 \sin r_3 - c_3 \sin r_2, \\ a_3 \sin r_1 - a_1 \sin r_3, & b_3 \sin r_1 - b_1 \sin r_3, & c_3 \sin r_1 - c_1 \sin r_3, \\ a_1 \sin r_2 - a_2 \sin r_1, & b_1 \sin r_2 - b_2 \sin r_1, & c_1 \sin r_2 - c_2 \sin r_1 \end{array}$$

proportional sind, d. h. die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier der gegebenen Kreise liegen.

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, einen Kreis zu construiren, welcher zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehört und einen der gegebenen Kreise, etwa $\mathfrak{K}_1$, berührt. Zu diesem Ende hat man durch die Durchschnittspunkte der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ einen grössten Kreis zu legen und von dem Durchschnittspunkte desselben mit dem Kreise $\mathfrak{A}$ die sphärischen Tangenten an $\mathfrak{K}_1$ zu ziehen. Verbindet man hierauf die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ durch Bogen grösster Kreise, so treffen diese letzteren das vom Mittelpunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ auf den Kreis $\mathfrak{A}$ gefällte sphärische Loth in den sphärischen Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

Die Kreise, welche die drei gegebenen ungleichartig berühren, erhält man ähnlich wie unter 1.

III. Die Aufgabe, eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln, deren Mittelpunkte nicht in einer Ebene liegen, gleichartig berührt, kann in ähnlicher Weise gelöst werden.

Es sei

$$K = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 - k^2 = 0$$

die Gleichung der gesuchten,

$$\mathfrak{K} = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung derjenigen Kugel, welche alle vier gegebenen Kugeln unter rechten Winkeln schneidet. Bezeichnen (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (a_4, b_4, c_4, r_4) die rechtwinkligen Mittelpunktscoordinaten und Halbmesser der gegebenen Kugeln, so bestehen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Aufgabe darin, dass der Ausdruck K für

$$\begin{array}{lll} x = a_1, & y = b_1, & z = c_1, \\ x = a_2, & y = b_2, & z = c_2, \end{array}$$

$$x = a_3, \quad y = b_3, \quad z = c_3,$$
$$x = a_4, \quad y = b_4, \quad z = c_4$$

bezüglich die Werthe $2hr_1 + r_1^2$, $2hr_2 + r_2^2$, $2hr_3 + r_3^2$, $2hr_4 + r_4^2$ annehmen muss. Da nun $\mathfrak{K}$ für die nämlichen Werthe von x, y, z die Werthe r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2 annimmt, so muss der lineare Ausdruck $K - \mathfrak{K}$ für die genannten Werthe bezüglich $= 2hr_1$, $2hr_2$, $2hr_3$, $2hr_4$ werden. Hierdurch ist derselbe aber vollkommen bestimmt. Denn setzt man

$$K - \mathfrak{K} = 2h(Ax + By + Cz + D),$$

so muss

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D = r_1,$$
$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + D = r_2,$$
$$Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + D = r_3,$$
$$Aa_4 + Bb_4 + Cc_4 + D = r_4$$

sein. Diese Gleichungen sind immer und nur auf eine Weise auflösbar und zeigen, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{A} = Ax + By + Cz + D$$

für

$$x = \frac{r_1 a_2 - r_2 a_1}{r_1 - r_2}, \quad y = \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{r_1 - r_2}, \quad z = \frac{r_1 c_2 - r_2 c_1}{r_1 - r_2},$$
$$x = \frac{r_1 a_3 - r_3 a_1}{r_1 - r_3}, \quad y = \frac{r_1 b_3 - r_3 b_1}{r_1 - r_3}, \quad z = \frac{r_1 c_3 - r_3 c_1}{r_1 - r_3}$$

u. s. w. verschwindet, d. h. dass die Ebene

$$\mathfrak{A} = 0$$

alle sechs äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier der vier gegebenen Kugeln enthalten muss.

Da also

$$K = \mathfrak{K} + 2h\mathfrak{A}$$

gefunden worden ist, so schliesst man, dass die gesuchte Kugel zu der Kugelschaar gehören muss, welche durch die Kugel $\mathfrak{K} = 0$ und die Ebene $\mathfrak{A} = 0$ bestimmt wird und dass die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt ist: Eine Kugel zu construiren, welche zur Schaar $(\mathfrak{K}, \mathfrak{A})$ gehört und eine der gegebenen Kugeln, etwa $\mathfrak{K}_1$, berührt. Hierzu wird man durch die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{A}$ legen und in dieser Ebene diejenigen zwei Kreise suchen, welche mit dem Durchschnittskreise von $\mathfrak{K}$ und der Spur von $\mathfrak{A}$ zu derselben Kreisschaar gehören und den Durchschnittskreis von $\mathfrak{K}_1$ berühren. Diese zwei Kreise bilden je einen grössten Kreis zweier Kugeln, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Krakau. Dr. Mertens.

XXIV. Zur Geometrie der Geraden.

Im Mittelpunkte o der Strecke, welche zu zwei Geraden G, G' normal steht, schneiden sich bekanntlich rechtwinklig zwei Gerade $o\alpha$, $o\beta$, welche in einer Ebene parallel zu G, G' und beziehungsweise in zwei Ebenen e, e' liegen, die den Winkel (G, G') und seinen Nebenwinkel normal halbiren. Die $\begin{Bmatrix} o\,\alpha \\ o\,\beta \end{Bmatrix}$ halbirt normal die zwischen G und G' liegenden Strecken einer Regelschaar $\begin{Bmatrix} R \\ R' \end{Bmatrix}$, rücksichtlich welcher die Geraden G, G' und die unendlich ferne der $\begin{Bmatrix} e' \\ e \end{Bmatrix}$ Leitstrahlen sind.

Durch die Regelschaaren R, R' sind sämmtliche Richtungen der Geraden gegeben, welche gegen G und G' gleich geneigt sind.

Je zwei Ebenen, die, einen Strahl S der Schaar R enthaltend, durch $o\alpha$ und normal zu $o\alpha$ gelegt werden, halbiren den Flächenwinkel (SG, SG') und seinen Nebenwinkel; sie werden daher von Geraden parallel zu S erfüllt, welche gegen G, G' gleich geneigt und von G, G' gleich entfernt sind.

Da Gleiches bezüglich eines Strahles S' der Schaar R' und der Geraden $o\beta$ der Fall ist, so folgt:

Durch jeden Punkt des Raumes können (im Allgemeinen) vier Strahlen gezogen werden, welche mit den gegebenen Geraden G, G' gleiche Winkel bilden und von G, G' gleichen Abstand haben; legt man nämlich durch diesen Punkt zwei den Winkel (G, G') und seinen Nebenwinkel normal halbirende Ebenen und sucht man ihre Schnittpunkte mit G und G', so liegen in jeder dieser Ebenen zwei dieser Geraden; die erste verbindet den Mittelpunkt der Strecke zwischen den genannten Schnittpunkten mit dem gegebenen Punkte, die zweite ist parallel zur Verbindungslinie dieser Schnittpunkte.

Graz. Prof. Carl Moshammer.

XXV. Ueber die unvollständige Gammafunction.

Zur Berechnung der sogenannten unvollständigen Gammafunction, d. h. des Integrales

$$\Gamma(\mu, \xi) = \int_0^\xi x^{\mu-1} e^{-x}\, dx,$$

hat man bis jetzt zwei Formeln; bei kleinem ξ dient die Entwickelung von Legendre:

$$\Gamma(\mu,\xi)=\xi^\mu\left\{\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1}\,\frac{\xi}{\mu+1}+\frac{1}{1.2}\,\frac{\xi^2}{\mu+2}-\dots\right\},$$

bei grossen ξ dagegen ist nach Schlömilch

$$\Gamma(\mu,\xi)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx-\int_\xi^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx$$

$$=\Gamma(\mu)-\xi^{\mu-1}e^{-\xi}\left\{1-\frac{a_1}{\xi+1}+\frac{a_2}{(\xi+1)(\xi+2)}-\dots\right\},$$

worin die Coefficienten a_1, a_2 etc. ganze rationale Functionen von μ sind*. Eine dritte Formel ergiebt sich mittelst der Substitution

$$x=\xi(1-u);$$

es wird dann

$$\Gamma(\mu,\xi)=\xi^\mu e^{-\xi}\int_0^1(1-u)^{\mu-1}e^{\xi u}\,du,$$

ferner durch Entwickelung von $e^{\xi u}$ und durch Integration der einzelnen Theile

$$\Gamma(\mu,\xi)=\frac{\xi^\mu e^{-\xi}}{\mu}\left\{1+\frac{\xi}{\mu+1}+\frac{\xi^2}{(\mu+1)(\mu+2)}+\dots\right\}.$$

Diese Formel gewährt in dem Falle einen Vortheil, wo μ eine grosse und ξ eine kleine Zahl ist.

Wien. HOČEVAR, Assist. am k. k. Polytechn.

XXVI. Zwei Sätze vom Schwerpunkte.

1. Welche Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Entfernungen von n festen Punkten ein Minimum ist?

Die Ebene sei durch drei ihrer Punkte, x_1, x_2, x_3 bestimmt, die n Punkte seien $p_1, p_2, \dots p_n$. Dann sind die Höhen der Pyramiden, welche das Dreieck $x_1x_2x_3$ als gemeinsame Grundfläche und die Punkte $p_1, \dots p_n$ als Spitzen haben, diejenigen Strecken, deren Summe ein Minimum sein soll. Man hat also, wenn $h_1 \dots h_n$ diese Höhen sind:

$$h_1+h_2+\dots+h_n=Min;$$

daher, wenn man mit der doppelten Grundfläche (die gleich dem äussern Producte der Punkte x_1, x_2, x_3 ist) multiplicirt:

$$h_1(x_1x_2x_3)+h_2(x_1x_2x_3)+\dots+h_n(x_1x_2x_3)=Min.$$

---

* Vergl. Schlömilch, Compendium der höhern Analysis, Bd. 2, die Gammafunctionen V.

Links stehen die sechsfachen Volumina der n Pyramiden. Da nun das Volumen jeder dreiseitigen Pyramide gleich dem sechsten Theile des äussern Productes ihrer Eckpunkte ist, so kann man schreiben

$$(p_1 x_1 x_2 x_3) + (p_2 x_1 x_2 x_3) + \ldots + (p_n x_1 x_2 x_3) = Min$$

oder

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(x_1 x_2 x_3) = Min.$$

Ist nun p der Schwerpunkt der n Punkte $p_1 \ldots p_n$, so ist

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n.p,$$

also

$$n(p x_1 x_2 x_3) = Min,$$

oder

$$(p x_1 x_2 x_3) = Min.$$

Da der Ausdruck links den Minimalwerth 0 annimmt, wenn p in der Ebene der Punkte $x_1 x_2 x_3$ liegt, so hat man den Satz:

Jede durch den Schwerpunkt von n festen Punkten gelegte Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen der n Punkte von der Ebene gleich Null ist

2. Der Abstand des Schwerpunktes der Eckpunkte eines Polygons von einer beliebigen Geraden ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Abständen seiner Eckpunkte.

Beweis. Seien $p_1 \ldots p_n$ die Ecken des Polygons, p ihr Schwerpunkt, so ist

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}.$$

Sei ferner a ein beliebiger Linientheil auf der Geraden, so ist

$$ap = \frac{ap_1 + ap_2 + \ldots + ap_n}{n}.$$

Aber $a.p_r$ ist die doppelte Fläche des Dreiecks, welches a als Grundlinie und p_r als Spitze hat, also, wenn h_r seine Höhe und a_1 der numerische Werth seiner Grundlinie ist:

$$a p_r = a_1 h_r,$$

ferner

$$a_1 h = \frac{a_1 h_1 + a_1 h_2 + \ldots + a_1 h_n}{n}$$

oder

$$h = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n},$$

w. z. b. w. — Man sieht, wie sich dieser Satz ähnlich für das Gebiet des Raumes aussprechen lässt und wie dann der erste Satz als specieller Fall aus ihm hervorgeht. Die Ableitungen beider Sätze zeigen, wie einfach sich manche Untersuchungen durch Anwendung der Methoden der Ausdehnungslehre gestalten.

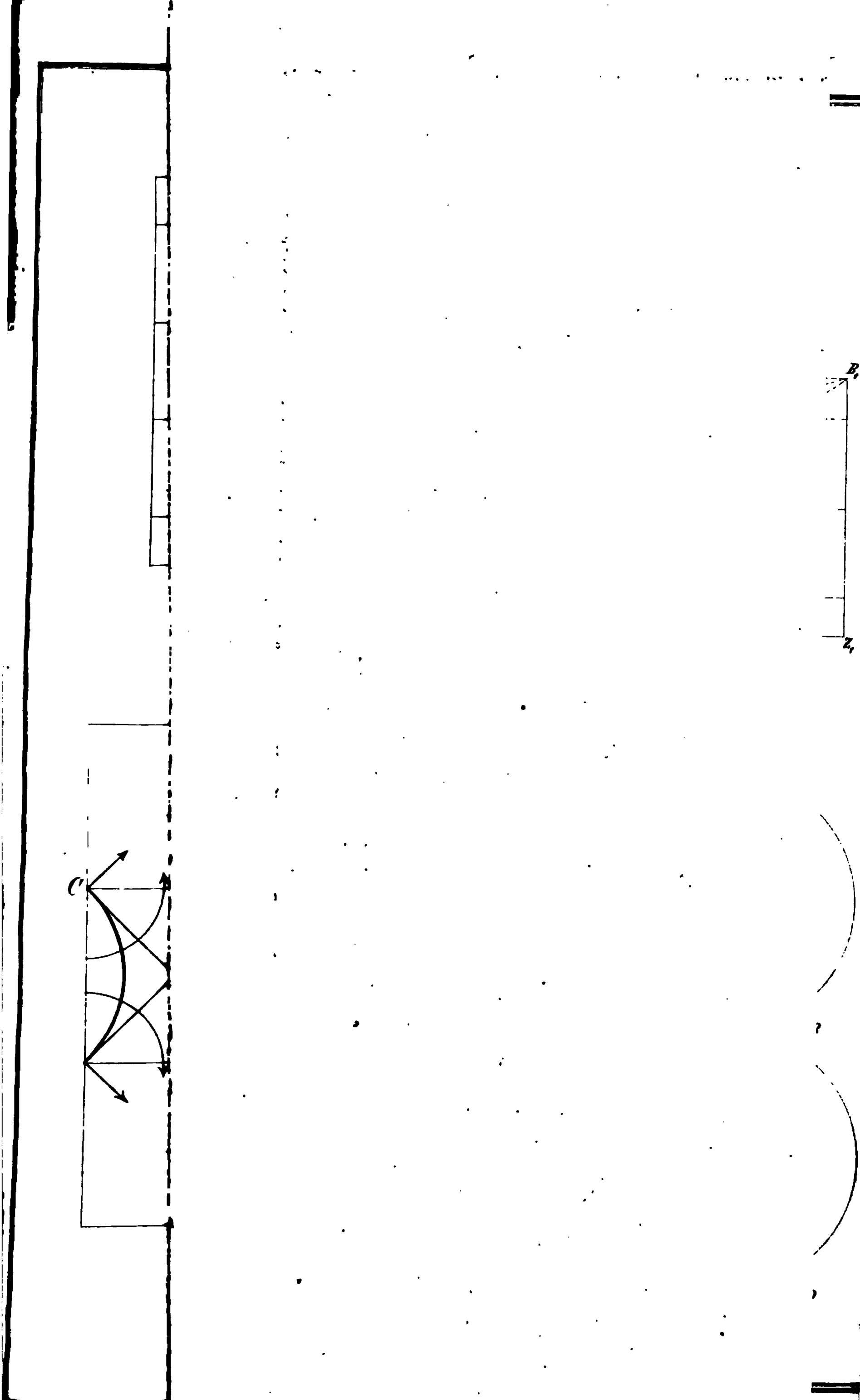
Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

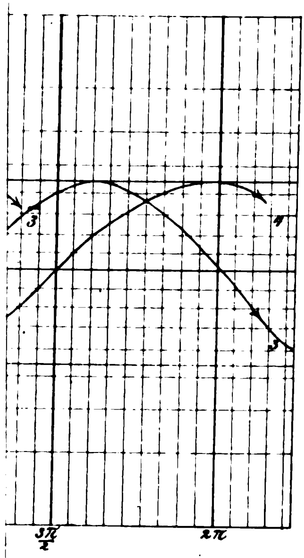
XXVI. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

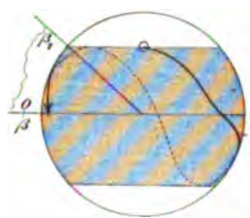
Die Eingangsworte zur Abhandlung Riemann's über diesen Gegenstand (Abhandl d. königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 8. Bd. 1860) zeigen, dass demselben die früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand gänzlich unbekannt waren. Da auch im betreffenden Referate der Fortschritte der Physik dieser früheren Untersuchungen nicht gedacht wurde und jene Eingangsworte unverändert in die so verdienstvolle Sammlung der Riemann'schen Werke von Herrn Weber übergegangen sind, so scheint es, dass die Vorarbeiten für die Riemann'sche Abhandlung überhaupt nicht so bekannt sind, als sie es verdienen, und ich glaube nur im Geiste des verstorbenen grossen Analysten zu handeln, wenn ich hiermit die Aufmerksamkeit darauf lenke, dass nicht nur der Fall ebener longitudinaler Luftwellen schon vielfach vor Riemann untersucht worden ist, sondern auch die Gesetze der Veränderung der Wellencurve derselben in ihren Grundzügen (beständige Verlängerung der Wellenthäler und Stauung der Wellenberge), sowie die Nothwendigkeit der Bildung von Verdichtungsstössen und die wesentlichsten Gesetze der Fortpflanzung derselben schon lange vor dem Erscheinen der Riemann'schen Abhandlung bekannt waren. Vergl.

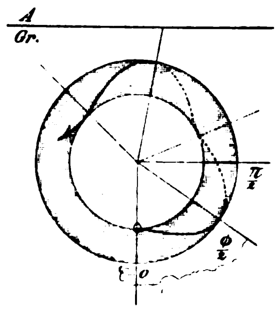
Poisson, *Journal de l'école polytechnique vol. VII*, *cah.* 14, S. 319;
Stokes, *Phil. mag.* 3. *ser.*, *vol.* 33, S. 349, November 1848;
Airy, *Phil. mag.* 3. *ser.*, *vol.* 34, S. 401, Juni 1849;
Earnshaw, *Phil tranact.* 1860, S. 133;
Saint-Venant et Wantzel, *Journ. de l'école polytechnique cah.* 27.

Wien. LUDWIG BOLTZMANN.


C
B,
Z,







Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Fig. 1.

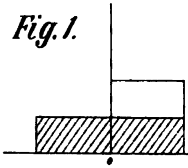


Fig. 2.

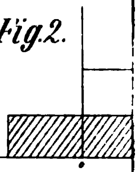


Fig. 5.

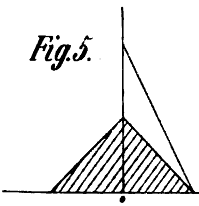


Fig. 6.

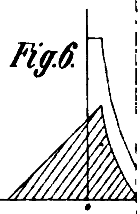


Fig. 9.

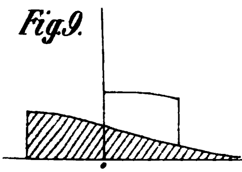


Fig. 10.

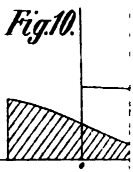


Fig. 13.

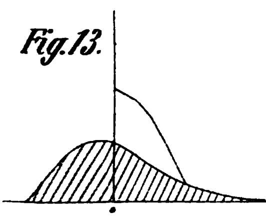


Fig. 14.

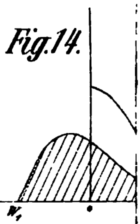


Fig. 17.

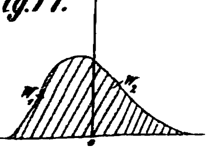
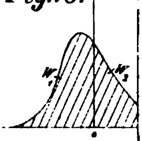


Fig. 18.



W = Wendepunkt.

Fig. 5.

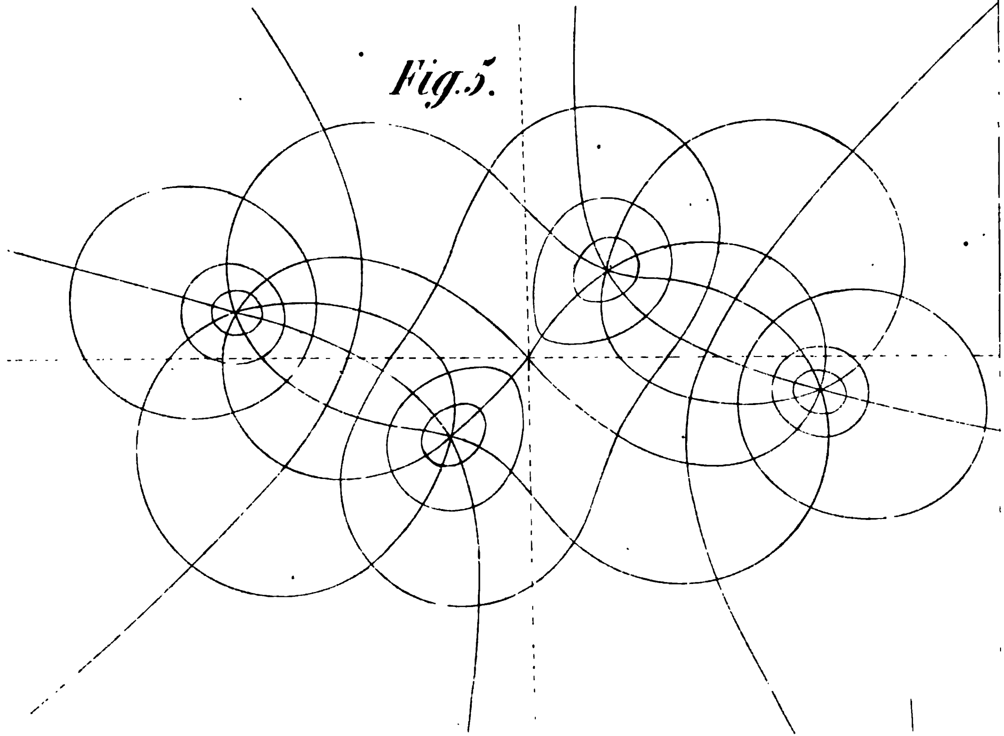
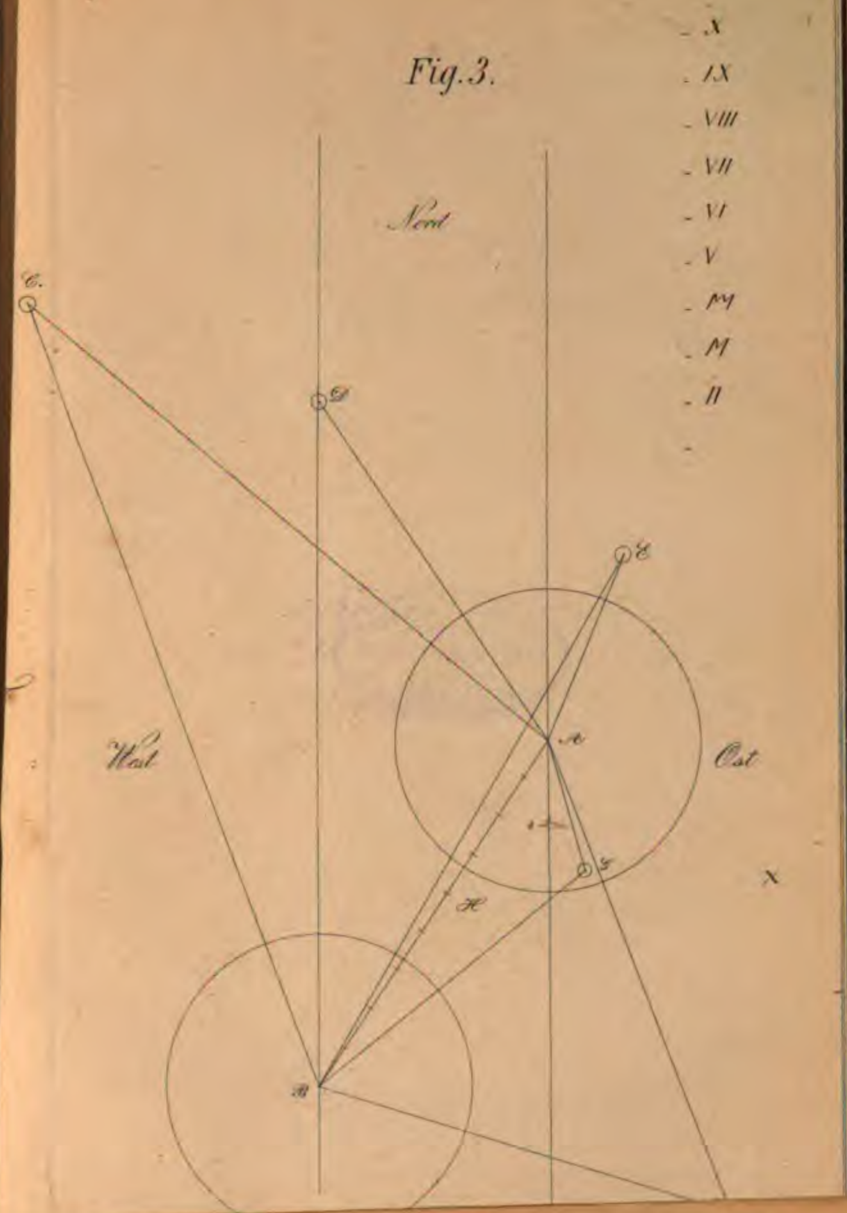
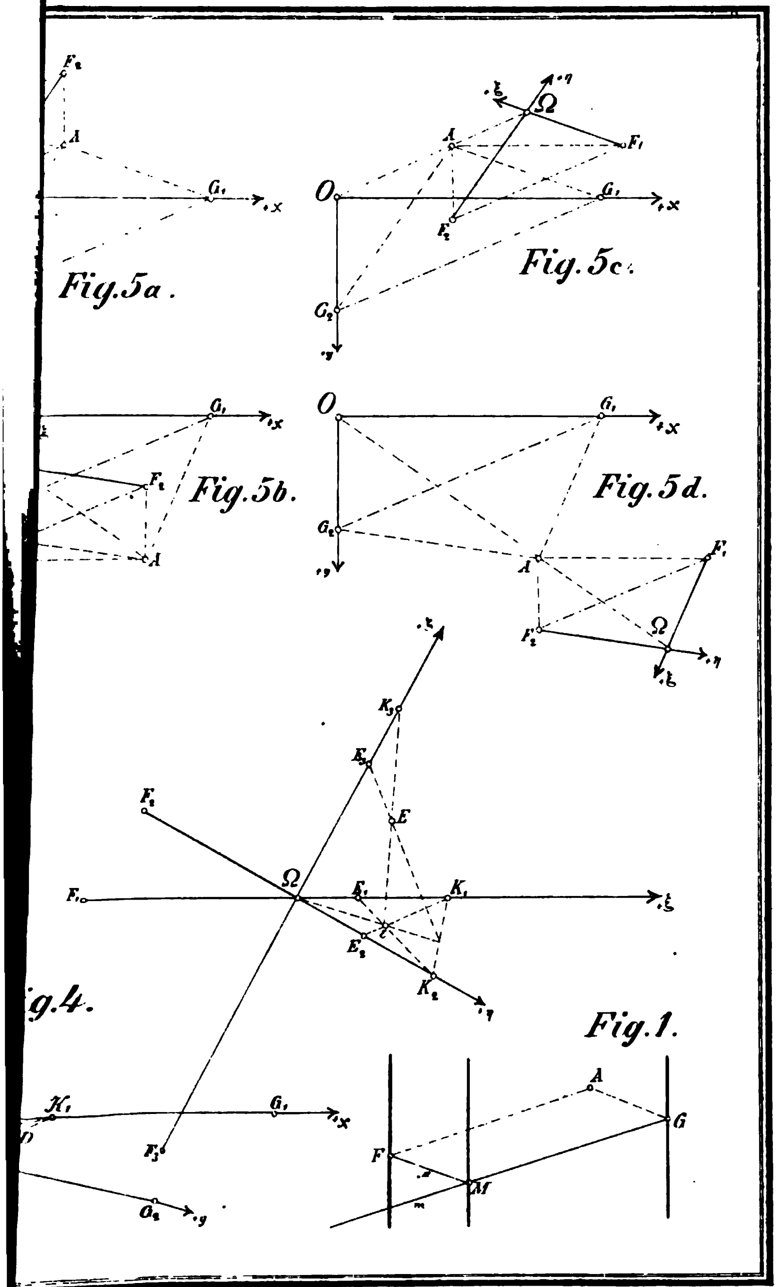
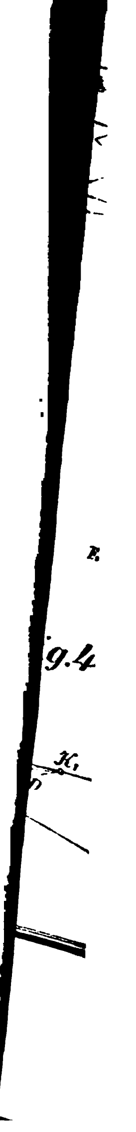


Fig. 3.





Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.


g.4
K₁

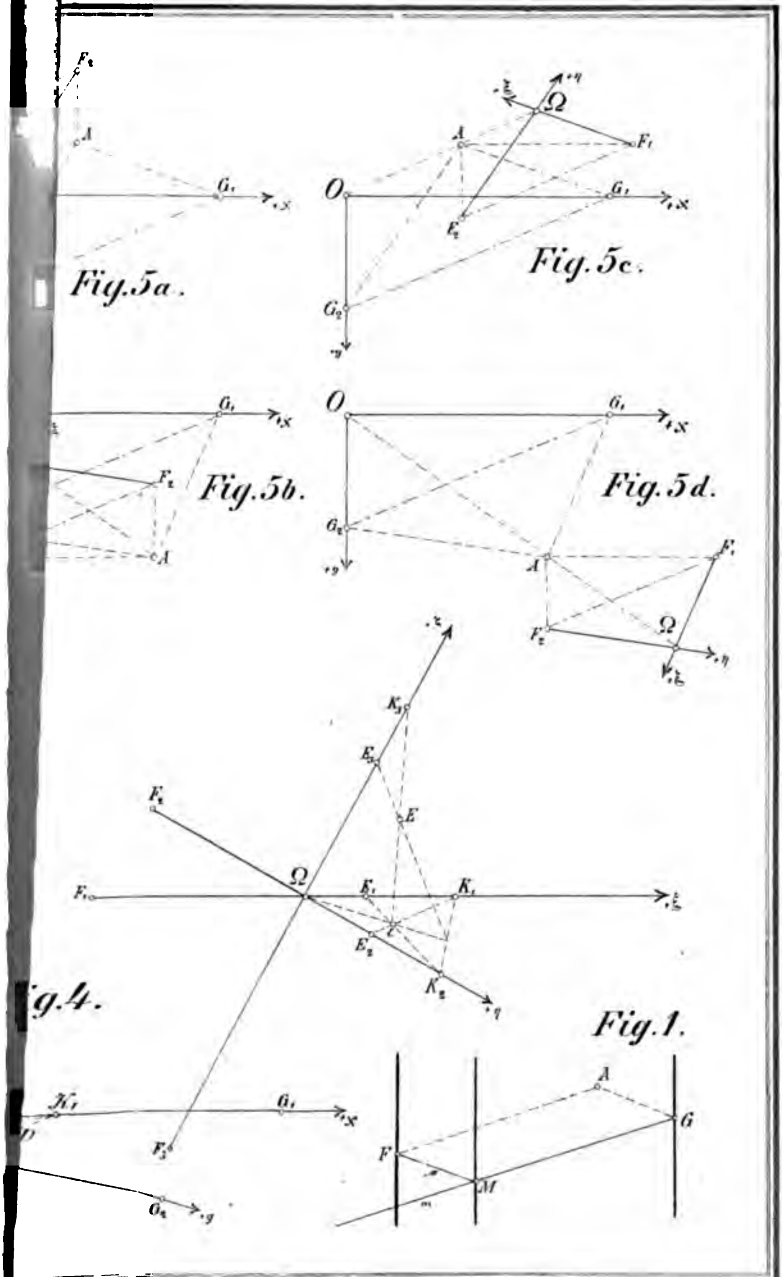


Fig. 5a.

Fig. 5b.

Fig. 5c.

Fig. 5d.

Fig. 4.

Fig. 1.

Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXI. Jahrgang.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1876.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschicht deer Mathematik und Physik.

Historisch-literarische Abtheilung.

C. G. Reuschle †.

Ein Nekrolog von P. Zech.

Am 22. Mai 1875 starb 62 Jahre alt in Stuttgart ein Mann, dessen Thätigkeit, in engere Kreise gebannt, nicht die Anerkennung gefunden hat, die sie verdiente. Es war C. G. Reuschle, Professor der Mathematik am Stuttgarter Gymnasium. Vermöge seiner umfassenden Bildung — er hatte Philosophie und Theologie studirt, das theologische Examen in Tübingen mit glänzendem Erfolg gemacht, bei Nörrenberg noch ein Jahr Mathematik studirt, dann auf ein Jahr Paris, auf ein zweites Berlin zu gleichem Zwecke besucht — hätte man erwarten sollen, dass ihm ein höheres Lehramt zu Theil werde, als die Professur für Mathematik, Geographie und Physik, die er vom Jahre 1840 bis zu seinem Tode am Stuttgarter Gymnasium bekleidete. „Hätte die Universität," schreibt ein Studiengenosse und besonderer Freund von ihm, jetzt Universitätslehrer, „während unserer Studienzeit einen Lehrer der Mathematik besessen, der im Stande gewesen wäre, Reuschle's universellen Geist zu begreifen, ihm zu imponiren und ihn in diejenigen Bahnen zu weisen, welche der künftige Mathematiker von Fach schon frühe einschlagen muss, so wäre Reuschle bei seiner eminenten Begabung in die Lage versetzt worden, gleich nach vollbrachten Studien Arbeiten zu liefern, die ihm den Weg zu jedem akademischen Lehrstuhl geöffnet hätten."

In den 35 Jahren, während deren er Gymnasiallehrer war, widmete er sich seinem Berufe mit voller Hingabe. Er hatte schon im theologischen Seminar in Urach, einer der vier Vorbildungsanstalten für das Stift in Tübingen, nicht blos mathematische sondern auch grosse und vielbändige geschichtliche und geographische Werke studirt und excerpirt, nicht blos während der vorgeschriebenen Studienzeit, sondern auch — trotz des Lärms der ihn umgebenden Studiengenossen — während der Zeit der Erholung. Mit ganzem Ernst suchte er nun die mathematischen Studien am Gymnasium zu heben, nachdem dieselben lange brach gelegen. Freilich ertönte nun gleich die Klage über Unverständlichkeit und zu weite Erstreckung des Unterrichts und noch nach seinem Tode wurde in dem Nekrolog eines schwäbischen Blattes dieser Vorwurf wiederholt. Der Verfasser dieses war Schüler von **Reuschle** in der ersten Zeit, die er am Gymnasium lehrte, und glaubt noch heute, dass sein Unterricht nicht über das mögliche Verständniss der Durchschnittsschüler hinausging. Aber freilich um jene Zeit und noch lange war die Mathematik an den württembergischen Gymnasien sehr stiefmütterlich behandelt, und wenn ein Lehrer über das Gewöhnlichste hinausging, so setzte er sich einer Rüge seiner vorgesetzten Behörde aus, und Jedermann, natürlich auch die Schüler, waren dann sich klar, dass er viel zu viel verlange. Insbesondere erregte es Anstoss, dass **Reuschle** von den verschiedenen Zahlensystemen sprach und Uebungen in Umwandelungen aus dem dekadischen ins dodekadische, dyadische u. s. w. vornahm. Und doch ist für eine humanistische Bildung ein Einblick gerade in diese Verhältnisse von grösstem Werth und für den im Zahlenrechnen geübten Schüler spielend zu erlernen.

Auch in der Geographie begann **Reuschle** eine für das Gymnasium neue Methode des Unterrichts, bei welchem hauptsächlich das geschichtliche Werden der Städte und Staaten im Verhältniss zur Gestaltung der Erdoberfläche Berücksichtigung fand. Er hat ein Lehrbuch der Geographie in vier Auflagen, ein Handbuch der Geographie und eine illustrirte Geographie herausgegeben.

Obgleich sich **Reuschle** mit vollem Ernste seinem Amte widmete, fand er doch bei seiner ungemeinen Arbeitskraft Zeit, alle neuen, Epoche machenden Erscheinungen und Entdeckungen auf dem Gebiete der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik und Astronomie, zu verfolgen, in sich zu verarbeiten und sein Urtheil darüber abzugeben. Dem Verfasser sind 8 Programme des Gymnasiums, 31 grössere Abhandlungen in Zeitschriften und 13 selbstständige Werke bekannt, die **Reuschle** während seiner Lehrthätigkeit abfasste. Er stattete gerne an Zeitschriften Berichte ab über den neuesten Stand einzelner Wissenschaften, so an die deutsche Vierteljahrsschrift, an die Jahrbücher der Gegenwart, an das Ausland u. s. w., und liebte es, mit seinem philosophisch durchgebildeten Geiste die Bedeutung der einzelnen Entdeckung für die gesammte Naturanschauung darzulegen. Er verfasste einen Kosmos für Schule und Laien, um das unsterbliche Werk **Humboldt's** dem Publikum näher zu bringen. Er beschäftigte sich vielfach mit den Verdiensten **Kepler's** um die Astronomie und schrieb zum 300jährigen Jubiläum seiner Geburt eine Denkschrift, die zu dem Besten gehört, was über **Kepler** im Verhältniss zu **Copernicus** und **Newton** geschrieben worden ist. Er war einer der Ersten oder der Erste, der die hohen Verdienste **Kant's** um die Naturwissenschaften zur Geltung zu bringen suchte: Verdienste, die jetzt von den ersten naturwissenschaftlichen [illegible]tellern mehr und mehr anerkannt werden. Er scheute sich a[illegible] auch nicht, gegen falsche Theorien mit aller Wucht seiner Logik aufzutreten. Die Lehre vom Stillstand der Welt, wie sie Clausius und Thomson aufgestellt hatten, verbreitete sich rasch unter dem naturwissenschaftlichen Gelehrten- und Laienpublikum; Reuschle zeigte (Ausland 1872) ihre Unhaltbarkeit, indem er auf den logischen Fehler hinwies, aus endlichen Vorgängen auf ein unendlich Ausgedehntes schliessen zu wollen; er liess sich den Untergang der Erde gefallen, aber nicht den der Welt.

Es ist unmöglich, hier auf alle die verschiedenen Arbeiten Reuschle's hinzuweisen, in denen er durchweg kurz und treffend, gleichgiltig, ob er irgendwo Anstoss errege, sein Urtheil, wie das Studium es ihm gegeben, über das Neueste im wissenschaftlichen Leben abgegeben hat. Aber nicht vergessen darf werden seine Schrift „Philosophie und Naturwissenschaft", welche er dem Andenken an David Fr. Strauss gewidmet hat. Als langjähriger Freund stellt er sich hier auf Seite des Verfassers des „alten und neuen Glaubens", nachdem er ihn vielfach bei seinem naturwissenschaftlichen Studium berathen hatte. Dass Reuschle ganz mit den Grundgedanken der Darwin'schen Lehre einverstanden war, hat er in verschiedenen Abhandlungen ausser der ebengenannten Schrift ausgeführt.

An dieser Stelle tritt die mathematische Wirksamkeit des Verstorbenen in den Vordergrund. Schon im Beginn seiner Gymnasialthätigkeit hatte er ein Lehrbuch der Arithmetik für seine Schüler ausgearbeitet, das sich von allen anderen dadurch unterscheidet, dass im 12. Buche die Elemente der Zahlentheorie aufgenommen sind. Später folgte ihm ein Lehrbuch der Trigonometrie. In Crelle's Journal schrieb er (1843 und 1844) Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate, in vorliegender Zeitschrift (Bd. XI) über Dreieckspunkte und über das Deltoid, in Grunert's Archiv (1845) über das Princip des kleinsten Zwanges u. s. w. Sein Hauptwerk aber ist das Resultat einer beinahe zwanzigjährigen Arbeit. Die Untersuchung der Primzahlen und ihrer Perioden hatte ihn schon frühe beschäftigt, mit besonderer Liebe ist dieses Capitel in seiner Arithmetik behandelt. Der *Canon arithmeticus* von Jacobi gab ihm Anlass zu immer weiteren Berechnungen, namentlich als er selbst im Jahre 1850 mit dem „Grossmeister der Mathematik" in Gotha und im Jahre 1856 bei der Naturforscher Versammlung in Wien mit Kummer zusammengtroffen war. Hier wurde der Vorsatz gefasst, Tafeln complexer Primzahlen, welche aus Wurzeln der Einheit gebildet sind, abzufassen. Bei ununterbrochener Beschäftigung damit neben all seinen anderen Arbeiten kam er bis 1870 zu einem Abschlusse, im Jahre 1872 konnte der Druck, den die Akademie der Wissenschaften in Berlin übernommen hatte, beginnen und einen Monat vor dem Tode Reuschle's berichtete Kronecker der Akademie über das fertige Werk: „Die Tafeln enthalten in möglichster Vollständigkeit und in wohlgeordneter Folge die hauptsächlichsten Ergebnisse von vieljährigen umfangreichen und mühsamen Rechnungen, welche Reuschle angestellt hatte, um die Zerlegung der Primzahlen des ersten Tausend in complexe, aus Wurzeln der Einheit gebildete Factoren zu ergründen. Das ganze Werk charakterisirt sich als eine werthvolle Sammlung von Rechnungsresultaten, welche für die Erforschung der Theorie der complexen Zahlen von Wichtigkeit sein können. Der berühmte Fermat'sche Satz gab Kummer vor etwa 30 Jahren die hauptsächlichste Anregung zu jenen von so glücklichem Erfolg gekrönten Untersuchungen, auf denen das Reuschle'sche Werk basirt und deren Weiterbeförderung es zugleich gewidmet ist."

Als Reuschle kurze Zeit vor seinem Tode, der durch eine unglückliche Verletzung eines Fusses herbeigeführt wurde, den Lohn seiner Arbeit in dem fertigen Werke vor sich sah, da schrieb ihm Kummer: „Sie können wohl das Bewusstsein haben, dass Sie durch Ihre mühevolle Arbeit der Wissenschaft einen guten Dienst geleistet, dass Sie sich den Dank der späteren Generationen verdient und ein Werk von bleibendem Werthe ausgeführt haben."

Recensionen.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VII. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche **1874.**

Von der für die Geschichte der Mathematik so überaus wichtigen Publication des hochverdienten Herausgebers liegt nun bereits der siebente Band abgeschlossen vor uns. Obschon es im Allgemeinen nicht üblich ist, über Zeitschriften ausführlich zu referiren, so wollen wir doch hier eine Ausnahme von der Regel machen und (im Einverständniss mit Herrn Boncompagni) die in dieser Sammlung uns mitgetheilten Arbeiten einer kurzen Besprechung unterziehen. Wie immer, enthält auch dieser Band eine Reihe mit äusserster Sorgfalt zusammengestellter Publicationsverzeichnisse; da deren Einrichtung bereits allgemein bekannt ist, so beschränken wir uns auf die eigentlichen Originalarbeiten, indem wir dem *in extenso* wiedergegebenen Titel sofort das Referat nachfolgen lassen.

1) ***Mariano Quercia, Intorno alla vita ed ai lavori scientifici di Guglielmo Giovanni Macquorn Rankine,*** S. 1 – 61.

Wir haben hier eine sehr eingehende Biographie des berühmten englischen Mechanikers vor uns, welche zuerst in den „*Atti dell'Ateneo Veneto*" erschienen ist. Das biographische Detail wird nicht vernachlässigt, dabei aber doch ein Hauptgewicht auf sachgemässe Darstellung des wissenschaftlichen Elementes gelegt. Am 5. Juli 1820 zu Edinburgh geboren, gewann Rankine bereits im Alter von 16 und 18 Jahren zwei Prämien für physikalische Arbeiten. Nach Vollendung seiner Studien auf der Hochschule der Vaterstadt betrat er die praktische Laufbahn des Ingenieurs, ohne jedoch der rein wissenschaftlichen Forschung untreu zu werden, wie er denn auch 1854 mit der grossen Medaille für seine thermodynamischen Arbeiten ausgezeichnet wurde. Das Jahr darauf erhielt er die Professur für Mechanik und Ingenieurwissenschaften an der Universität Glasgow, welche er bis zu seinem frühen Tode (24. December 1872) bekleidete.

Sehr ausführlich ist die Darstellung der Verdienste gehalten, welche sich Rankine um die Ausbildung der mechanischen Wärmetheorie erworben hat, und zwar hat dieser Abschnitt eine besondere Wichtigkeit für uns Deutsche, die wir, freilich lediglich durch die Schuld gewisser literarischer Kreise Englands, die Leistungen der Briten auf diesem Gebiete vielleicht nicht ihrem vollen Werthe nach zu würdigen geneigt sind. Auf die sehr ausführlichen Resumés, welche der Verfasser über die einzelnen Abhandlungen Rankine's (besonders auch über sein bekanntestes Werk *„A manual of applied mechanics"*, *London and Glasgow*, 1858) giebt, können wir hier natürlich nicht eingehen. Wenig bekannt dürfte bei uns besonders die philosophisch-historische Inauguralrede *„De concordia inter scientiarum machinalium contemplationem et usum"* sein, mit welcher der neue Professor sein akademisches Amt antrat.

Durch seine kalorischen Arbeiten ward Rankine auf ein anderes Feld geführt, das ebenfalls direct mit der eigentlichen Molecularphysik zusammenhängt — auf die Elasticitäts- und Festigkeitslehre starrer Körper. Seine Behandlungsweise dieses Gegenstandes wird hier ebenfalls eingehend beschrieben. Er widmete auch der reinen Bewegungstheorie oder Kinematik einen eigenen, originell bearbeiteten Abschnitt in einem später erschienenen Werke: *„A manual of machinery and Millwork"*, 1869, indem er sich an die Principien eines Professor Willis anschloss, dessen Name, obschon er von Herrn Quercia mit dem Beiworte *„eminente"* belegt wird, bei uns wohl nur in engen Fachkreisen bekannt sein dürfte. Leider ist an dieser Stelle die Darstellung nicht ganz so ausführlich wie sonst, so dass man nicht klar ersehen kann, wie weit Rankine's Geometrie der Mechanismen bereits die neuen Gedanken anticipirt hat, welche Reuleaux' kürzlich erschienenes Buch enthält. Beiläufig sei noch bemerkt, dass Rankine hier auch einen neuen Begriff in die Wissenschaft einführt, nämlich den der *„Counter-Efficiency"*, d. h. den Unterschied zwischen der berechneten und wirklich geleisteten Arbeit einer Maschine.

Auch dasjenige Fach, welches wir jetzt graphische Statik nennen, ist von dem grossen schottischen Forscher bereits cultivirt worden, und jedenfalls ist es als ein Mangel der sonst so sehr dankenswerthen Zusammenstellung von Weyrauch (diese Zeitschr., XIX. Jahrg.) zu bezeichnen, dass Rankine's Name in der Reihe Derjenigen fehlt, welche für Culmann die Stätte bereiten halfen.

Den Schluss der besprochenen Abhandlung bildet eine kurze Analyse derjenigen Arbeiten Rankine's, welche sich auf Hydraulik und Theorie des Schiffbaues beziehen.

2) *D. Bierens de Haan, Notice sur quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas*, S. 99—144.

Das Problem der Zirkelquadratur hat in den Niederlanden von jeher eifrige Anhänger gefunden, und es ist daher sehr erwünscht, dass Prof. Bierens de Haan seinem früheren Essai über die Logarithmotechnie seiner Landsleute diese neue Untersuchung über ihre Bemühungen um jene uns jetzt so steril erscheinende Frage nachfolgen lässt. Der erste Gelehrte, welcher dabei in Betracht kommt, ist Simon van der Eycke, dessen bezügliches Buch im Jahre 1584 erschien, der sich aber, wie hier gezeigt wird, auch mit anderen wichtigen Problemen, wie mit der Meereslänge, beschäftigte. Sein zuerst gefundener Werth für π ist $3\frac{69}{484}$, wofür er später $2\sqrt{2\sqrt{5}-2}$ * setzt, — diese letztere Zahl ist auch von Raymarus Ursus, dem bekannten Gegner Tycho de Brahe's angegeben worden.

Gegen Simon trat Ludolf van Ceulen auf. Der Verfasser benützt die Gelegenheit, um einige Notizen in der Biographie dieses berühmten Rechners, welche Vorsterman van Oijen (*Bullett.* I. Bd.) gegeben hat, zu rectificiren.** Der entstehende wissenschaftliche Streit scheint dann Ludolf zur Verabfassung seines bekannten Werkchens „*Van den Circel*“, *Delft* 1596, angereizt zu haben, in welchem die nach ihm benannte Ludolphine auf 20 Stellen genau berechnet erscheint. Die noch genauere Berechnung auf 32 Decimalen findet sich zuerst in seinem von der anscheinend sachverständigen Wittwe — Bierens sagt von ihr (S. 111), dass sie „*n'était pas étrangère aux travaux de son mari*“ — edirten posthumen Lehrbuch der Arithmetik und Geometrie. Dieses Buch ward 1615 von Snellius ins Lateinische übertragen. Mit wie unglaublicher Mühe Ludolf sein Ziel erreichen musste, geht aus den von dem Uebersetzer in seinem selbstständigen Werke „*Cyclometricus*“ mitgetheilten Papieren des Ersteren hervor; es bedurfte nämlich zur Gewinnung des zuletzt genannten Näherungswerthes der Discussion eines regelmässigen Vielecks von nicht weniger als 2^{62} Seiten. Von anderen Gelehrten, welche Ludolf's Bestimmung reproducirten und weiter ausführten, werden Huyghens und Lansberg, sowie auch einige ziemlich unbekannte Mathematiker, Praalder und van Nienrode, namhaft gemacht.

Der zweite Gegner Simon's van der Eycke war Adriaan Anthonisz; er setzte der Verhältnisszahl des Ersteren die von ihm gefundene $\frac{355}{113}$ gegenüber, deren Erfindung man so häufig irrthümlich seinem Sohne Adrianus Metius (1571—1635) zugeschrieben findet. Der Grund hiervon ist hauptsächlich der, dass man den Originaltractat des Vaters Adrian für verloren erachtete und auch die Stelle in des Jüngeren „*Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae*“ ignorirte, in welcher der Sohn ausdrücklich Jenem die Priorität wahrt.

---

*) Diese Zahl ist infolge eines Schreib- oder Druckfehlers unrichtig angegeben.

**) Ueber Ludolf van Ceulen (Colen oder Collen) kann man auch einen Artikel des nämlichen Autors im „*Messenger of mathematics*“ vom Jahre 1873 nachsehen.

Als dritter Opponent erscheint endlich auch ein Vertreter der vornehmen akademischen Welt, Adrianus Romanus. In seiner Vertheidigung des Archimedes bekämpft er gleichmässig den Simon, Raymarus Ursus, Cardinal von Cusa und den bereits von Ludolf scharf mitgenommenen Scaliger. Gegen diesen Letzteren hatten sich aber bereits Vieta und der aus der Geschichte der Kettenbrüche bekannte Cataldi erklärt. Für uns Deutsche bietet dieser Abschnitt wohl nichts Neues, da wir bereits im dritten Bande von Kästner's „Geschichte der Mathematik" eine relativ vollständige Schilderung dieser Polemik besitzen.

Den Schluss der Abhandlung bildet eine kurze Charakterisirung der „Pseudoquadraturen" einiger subalterner Geister, wie Marcelis, Krugk, Soeten, de Graaf, Waeywel und Bovy. Möge es dem Verfasser gefallen, noch weitere historische Bilder aus der niederländischen Mathematik vor uns zu entrollen; denn gerade von den durchaus nicht unbedeutenden Gelehrten zu Ende des vorigen Jahrhunderts, wie van Swinden, Hennert, Pibo Steenstra etc., hat man bei uns meistentheils nur sehr unvollkommen Kenntniss.

Bemerkt sei noch, dass die Arbeit von Glaisher, „*On the quadrature of the circle*", in ihren Resultaten bis auf's Einzelnste mit der eben besprochenen übereinstimmt.

3) *Eugenio Catalan (lettera a D. B. Boncompagni), Intorno ad una iscrizione posta sulla tomba di Ludolf van Ceulen,* S. 141—144.

Catalan meldet hier aus einem im Jahre 1840 an ihn gerichteten Briefe des französischen Gelehrten Lakanal — über welchen im Anhang Einiges mitgetheilt wird —, dass derselbe damals die Ludolf'sche Zahl auf dessen Grabstein zu Leyden eingravirt gefunden habe.

4) Referat von Th. H. Martin über: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ex recognitione Godofredi Friedlein. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri,* S. 145—151.

Der berühmte Altmeister mathematisch-philologischer Forschung registrirt zunächst die grossen Verdienste, welche sich die Verlagshandlung durch ihre Ausgaben griechischer und römischer Autoren um sein Fach erworben hat. Alsdann bespricht er die eigentliche Bedeutung des Commentars von Proclus und bemerkt mit Recht, dass selbst unter der „Spreu", die sich reichlich vorfinde, „*il y a encore des documents utiles à recueillir en ce qui concerne les spéculations philosophiques, mythologiques et superstitieuses des anciens sur les nombres et les figures*". Nach kurzer Durchmusterung der früheren Editionen wird dann bemerkt, dass Friedlein mit guten Gründen den bisher auf vier Bücher vertheilten Text in ein einziges Buch zusammengezogen habe. Abgesehen von den gedruckten Hilfsmitteln benützte der Verfasser der neuen Herausgabe vor Allem einen Codex der Münchener Hof- und Staatsbibliothek und als Ergänzung eine Reihe von Varianten, welche ihm die allbekannte Liberalität des Fürsten Boncompagni aus zwei vaticanischen Manuscripten zur Verfügung gestellt hatte. Diesen Notizen fügt Martin noch eine Verwahrung bei, welcher zufolge nicht Hultsch, wie man vielleicht aus Friedlein's Vorrede schliessen könnte, sondern er selbst auf gewisse benützte Quellen aufmerksam gemacht hat.

Zum Schluss endlich fällt Martin ein für die ganze Leistung äusserst günstiges Gesammturtheil.

5) *B. Boncompagni, Intorno al comento di Proclo sul primo libro degli elementi di Euclide,* S. 152—165.

Eine mit der gewohnten stupenden Erudition des Herausgebers durchgeführte bibliographische Vergleichung der verschiedenen Originale und Uebersetzungen, in welchen der Commentar des Proclus vorhanden ist. Interessant sind besonders die Angaben über die Riesenausgabe älterer mathematischer Classiker, welche von dem Oxforder Professor Bernard vorbereitet, aber nicht zur Ausführung gebracht wurde.

6) *S. Günther, Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all'Euler, traduzione del Dr.e Alfonso Sparagna,* S. 213—254.

Wir werden hierauf später bei der ähnlich betitelten Arbeit Favaro's zurückkommen.

7) *F. Woepcke, Intorno ad un metodo per la determinazione approssimativa degl'irrazonali di secondo grado. Brano di lettera a D. B. Boncompagni,* S. 255—262.

In der vorstehend erwähnten Abhandlung war der Verdienste des Bologneser Professors Cataldi Erwähnung gethan worden, der zwei Methoden zur Näherungsberechnung einer Irrationalzahl angegeben hat. Die eine ist die bekannte Kettenbruchentwickelung, wo

$$\sqrt{n} \equiv \sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

gesetzt wird; bei der anderen wird eine Reihe von Näherungswerthen durch die Relationen

$$a_1 = a + \frac{b}{2a}, \quad a_2 = a_1 - \frac{a_1^2 - n}{2a_1}, \quad a_3 = a_2 - \frac{a_2^2 - n}{2a_2}$$

berechnet. Woepcke zeigt nun in dem vom Adressaten hier wiedergegebenen Schreiben, dass erstlich diese Methode schon bei Pacioli sich finde, und dass zweitens Libri in seiner Darstellung derselben in seiner „*Histoire des sciences mathématiques en Italie*" Fehler begangen habe. Fürst Boncompagni theilt dann einige hierauf bezügliche Stellen aus den Werken der genannten Mathematiker im Urtexte mit.

8) *Th. H. Martin (lettre à D. B. Boncompagni), Sur l'époque et l'auteur du prétendu XVe livre des élements d'Euclide,* S. 263—266.

Martin knüpft an die im vorhergehenden Bande abgedruckte Studie Friedlein's über Hypsicles an und erklärt sich mit dessen Resultaten einverstanden, denen zufolge das fälschlich sogenannte 14. Buch der „ςοιχεῖα“ von Hypsicles, einem Geometer des zweiten Jahrhunderts v. Chr., verfasst sein soll, während das 15. mit Euclid und Hypsicles gar Nichts zu thun, sondern seinen Platz erst in einer sehr viel späteren Zeit zu erhalten hätte. Der Lehrer des unbekannten Verfassers soll ein im 4. Säculum unserer Zeitrechnung lebender Isidor von Alexandrien gewesen sein. Diesen Lehrer glaubt nun Martin in der Person des Neuplatonikers gleichen Namens zu erkennen, dessen Schüler Damascius sodann mit hoher Wahrscheinlichkeit als der Autor jener Schrift zu bezeichnen sein würde; freilich wäre damit auch die Zeit der Abfassung um zwei Jahrhunderte hinausgeschoben.

Diese Hypothese wird mit der Gelehrsamkeit vertheidigt, welche stets ihren berühmten Urheber charakterisirt hat. Uebrigens unterrichtete, wie es scheint, Isidor den Damascius nur im Allgemeinen; die specielle mathematische Unterweisung scheint Letzterer von dem durch seine Vorrede zu Euclid's Daten bekannten Philosophen Marinus von Tyrus empfangen zu haben.

9) *Aristide Marre, Extrait du Kitâb al Mobârek d'Abu'l Wafa al Djoueïni, transcrit d'après le Ms. 1912 du supplément arabe de la bibliothèque nationale de Paris, et traduit pour la première fois en français,* S. 267—277.

Der als Astronom und Geometer gleichbedeutende Araber, dessen Name in dem zwischen zwei der ersten französischen Mathematiker neuerdings ausgebrochenen literarischen Streite vielfach genannt wird, beschäftigte sich auch mit Algebra, und es ist gewiss wiederum eine höchst dankenswerthe Gabe, die wir hier durch Herrn Marre's schon oft bewährte Sprachkenntniss erhalten. Nur ist uns in seiner einleitenden Note eine Stelle aufgefallen, die wir berichtigen zu können glauben. Es wird nämlich daselbst erklärt, dass dieser Mathematiker von allen Literarhistorikern ignorirt worden sei, und somit nimmt der Uebersetzer seinen Abu'l Wafa mit dem berühmten Gelehrten dieses Namens als nicht identisch an, was er auch später ausdrücklich bemerkt. Allein dieser Letztere, den wir auch bei unserer obigen Bemerkung im Auge hatten, stammt (man sehe wegen der Details in Hankel's nachgelassenem Werk S. 243 nach) aus der zur Provinz Khorassan gehörigen Stadt Buzgan, und in die gleiche Provinz verlegt Marre auch den Geburtsort seines Autors. Gleiches Geburtsland, gleiche gelehrte Thätigkeit, gleicher Name, — da liegt es doch wohl überaus nahe, beide Persönlichkeiten miteinander zu identificiren, und diese Voraussetzung wollen wir wenigstens bis zur Beibringung von Gegengründen festhalten. Die beiden

Gründe wenigstens, welche am Schlusse des Aufsatzes angedeutet werden, konnten uns nicht vom Gegentheil überzeugen. Denn wenn auch die (im Jahre 979 der Hedschra) verfasste Vorlage des Herrn Uebersetzers dreihundert Jahre nach der Lebenszeit des berühmten Astronomen fällt, so ist das eben doch zugestandenermassen blos eine Copie, und warum sollte zweitens zur näheren Bezeichnung dem Namen eines Mannes nicht einmal der Name der Stadt, das andere Mal derjenige des engeren Districtes beigelegt werden, in welchem jene belegen ist? Zur genauen Feststellung der Identität würde freilich der Nachweis gehören, dass Buzgan in der Landschaft Djouein zu suchen ist.

Was nun die Schrift selbst betrifft, so besteht dieselbe aus drei Problemen, welche auf lineare Gleichungen führen — sogenannten Textgleichungen. Man erhält den Urtext nebst einer wortgetreuen französischen Uebersetzung, und überdies unter der Zeile eine Uebertragung der bekanntlich ganz wörtlichen arabischen Darstellung in unsere jetzige algebraische Zeichensprache.

Interessant ist die auch hier mit Vorliebe angewandte Zerlegung von Brüchen im Sinne der welschen Praktik; so wird einmal die Unbekannte $x = 3\frac{15}{16}$ in die Form

$$3 + \frac{1}{2}^{+\frac{1}{2}^{+\frac{1}{2}^{+\frac{1}{2}}}}$$

umgegossen.

10) *Cornelio di Simoni, Intorno alla vita ed ai lavori di Andalò di Negro matematico ed astronomo Genovese del secolo decimoquarto e d'altri matematici e cosmografi Genovesi,* S. 313—336.

Der Held dieser Biographie stammt aus der altberühmten Genueser Patrizierfamilie di Negro, welche der Republik eine Reihe tüchtiger Beamten und Feldherren geliefert hat. Die genauen Daten über sein Leben sind nicht bekannt; jedoch macht es der Verfasser wahrscheinlich, dass er um 1260 geboren sein muss, und sein Todesjahr wird ungefähr auf 1340* anzusetzen sein, da er nach Mojon 80 Jahre und darüber erreichte. Dass noch im Jahre 1338 ein Seefahrer gleichen Namens lebte, ist urkundlich festgestellt.

Di Negro vertrat eine Zeit lang seine Vaterstadt als Gesandter am kaiserlichen Hofe zu Trapezunt, und erfreute sich auch, nach seines Freundes und Mitschülers Boccaccio Zeugniss, der besondern Gunst des Königs Hugo IV. von Cypern und Jerusalem. Nach dem Tode des berühmten Physikers Cecco d'Ascoli, dessen wissenschaftliche Laufbahn einen besonders vortheilhaften Vorwurf für eine mathematisch-histo-

---

* Poggendorff's Handwörterbuch, das nach Libri den Vornamen *Andame* statt *Andalò* schreibt, giebt als Geburts- und Todesjahr bezüglich 1270 und 12 an. Das dort gegebene Schriftenverzeichniss ist unzureichend.

rische Monographie bilden würde, bekleidete er auch längere Zeit hindurch die astronomische Professur zu Florenz.

Von den wissenschaftlichen Leistungen di Negro's wird zuerst sein handschriftlich zu Paris erhaltenes Werk „*Introductio ad judicia astrologica*“, alsdann das 1475 zu Ferrara gedruckte „*Opus praestantissimum astrolabii*“ erwähnt. Interessante Angaben werden über das sich hier vorfindende Fixstern-Verzeichniss mitgetheilt, welches nach Herrn Simoni's Meinung nicht die zu jener Zeit bereits erreichbare Genauigkeit besitzt. Am höchsten wird von Zeitgenossen und Späteren di Negro's geographische Thätigkeit geschätzt; so berichtet Fregoso, dass derselbe bei seinen ausgedehnten Reisen nie das mathematische Element der Ortsbestimmung vernachlässigt und die Karten der Alten zu verbessern getrachtet habe. Ramusio stellt ihn mit Marko Polo zusammen und über diesen, dem gegenüber er ungefähr die nämliche Stellung einnehmen möchte, wie im Alterthum Ptolemaeus gegen Strabo — natürlich nur relativ.

Die weiteren Bemerkungen der Arbeit besitzen ein vorwiegend geographisches Interesse; als besonders interessant heben wir noch die Notiz über eine dem Jahre 1447 entstammende Weltkarte hervor, welche von einem unbekannten Genueser Kartenzeichner verfertigt wurde und sich zur Zeit in der *Biblioteca nazionale* zu Florenz befindet.

11) ***Andalo de Negri** (De le vite de matematici libri due di Bernardino Baldi da Urbino abbate di Guastalla MDXCVI, Manoscritto da D. B. Boncompagni)*, S. 337—338.

Herr Boncompagni reproducirt hier mit einigen Zusätzen den auf di Negro bezüglichen Abschnitt aus dem bekannten biographischen Werke des Baldus, welches wir leider noch nicht *in extenso* besitzen.

12) ***Boncompagni**, Catalogo de'lavori di Andalò di Negro*, S. 339—376.

Dieses äusserst sorgfältig zusammengestellte Verzeichniss führt drei gedruckte und zehn nicht edirte Werke auf, wozu dann noch acht weitere Pièceu hinzutreten, die — an sich nicht näher bekannt — von einzelnen mittelalterlichen Schriftstellern über poetische und mathematische Materien namhaft gemacht werden.

13) ***Ferdinando Jacoli**, Intorno a due scritti di Raffaele Gualterotti Fiorentino relativi alla apparizione di una nuova stella avvenuta nell'anno 1604*, S. 377—405.

Her Jacoli giebt hier eine eingehende Analyse einer von Rafael Gualterotti* über den neu erschienenen Stern im Schlangenträger verfassten Monographie, betitelt: „*Discorso sopro l'apparizione de la nuova stella*“, — bekanntlich hatten diesem Phänomen auch Kepler und

* Dieser Naturforscher fehlt bei Poggendorff.

Galilei ihre eifrige Theilnahme zugewandt.* Dasselbe besteht aus 20 Capiteln nebst einigen poetischen Beigaben. Deren eine ist für die Geschichte der Astronomie von directer Bedeutung, denn es ergiebt sich daraus, dass nicht, wie man bisher auf Arago's Autorität hin annahm, Gassendi, sondern Gualterotti den ersten Merkurdurchgang beobachtet hat. Auch die Venus glaubte er in der Sonne bemerkt zu haben, aber es kann dies, wie eine Rückwärtsberechnung lehrt, nur ein ungewöhnlich grosser Sonnenfleck gewesen sein, etwa wie bei Averröes.

In einem andern Schriftchen, welches von Herrn Jacoli ebenfalls besprochen wird, findet sich auch die richtige Deutung des sogenannten aschgrauen Mondlichtes. Freilich war darauf vorher schon Leonardo da Vinci gekommen, aber von seiner in den Manuscripten vergrabenen Entdeckung konnte Gualterotti Nichts wissen. Auch Mästlin's und Kepler's Verdienste um die Aufklärung dieses Factums werden dargelegt. In dem bereits genannten Buche „*Scherzi degli spiriti animali*" macht unser Autor auch die gelegentliche Bemerkung, die Bahn eines geworfenen Körpers müsse eine Parabel sein, während Tartaglia und kurz vorher Rivius über diese Flugbahn noch sehr im Unklaren waren.

Jedenfalls geht aus der fleissigen Arbeit des Verfassers hervor, dass Gualterotti einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der inductiven Wissenschaften verdient.

14) *Lettere inedite di Raffaele Gualterotti*, S. 406—415.

Als Anhang zum Vorigen werden hier sechs Briefe Gualterotti's an Galilei und einer an Sartini mitgetheilt, welche sich ausschliesslich auf astronomische Gegenstände beziehen. Aus dem dritten dieser Briefe meint Jacoli entnehmen zu können, dass Gualterotti schon vor Marius einen Nebelfleck observirt habe; indess scheint er uns hier doch etwas zuviel aus dem Texte herauszulesen.

15) *Antonio Favaro, Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo*, S. 416—589.

Der durch seine schöne Untersuchung über die Geschichte der mechanischen Planimetrie auch in Deutschland auf das Vortheilhafteste bekannte Verfasser unternimmt hier einen interessanten Excurs in die ältere Geschichte der Kettenbruchlehre, wobei es natürlich an den mannichfaltigsten Berührungspunkten mit des Referenten ähnlich betitelter Arbeit nicht fehlen konnte. Insbesondere in dem Gebiete, welches wir als die Vorgeschichte oder als die Periode der unbewussten Anwendung

* Soviel Aufsehen in der astronomischen Welt scheint diese Himmelserscheinung nicht gemacht zu haben, wie die 30 Jahre früher aufgetauchte des Sternes in der Cassiopeja. Eine eingehende Uebersicht der über diesen letzteren zusammengeschriebenen Literatur findet man in der mit Unrecht vergessenen „Geschichte der Astronomie", 1. Band, Chemnitz 1792.

der Kettenbrüche bezeichnen möchten, ist absolute Identität vorhanden, und ebenso für die Anfänge der Geschichte des aufsteigenden Kettenbruches; hierbei bemerkt Herr Favaro (S. 21) mit Recht, dass schon vor Hankel bereits Woepcke auf das Vorkommen dieser Form bei dem Araber Alkalsadî hingewiesen habe. Nebenbei wird auch ein Versehen des Unterzeichneten berichtigt (S. 28), indem das Rechenbuch des Schleupner die eigentlich sogenannte „wälsche Praktik" nicht berücksichtigt. Ein neues Element treffen wir dagegen bei Herrn Favaro durch Hereinziehung der Methoden Pacioli's und Juan Ortega's zur Auswerthung von Wurzelgrössen. Dass aber die ertere in Wirklichkeit hierher gehöre, musste erst bewiesen werden, und so hat denn auch der Verfasser die jenen Beweis leistenden Noten Moret-Blanc's und des Referenten, sowie eine uns nicht bekannt gewordene Programmabhandlung von Matthaei (Liegnitz 1844) mit in Betracht gezogen. Dass jenes Verfahren auch bei Cardan sich finde, hatte bereits Cantor gezeigt, aber Favaro hat dasselbe auch bei einer Reihe anderer italienischer Mathematiker, bei Ghaligai, Lazisio, Tartaglia, Bombelli und Unicorno gefunden.

Der vierte Abschnitt ist Cataldi's Leistungen gewidmet, wobei auf die von Grunert dazu in der bekannten langathmigen Form gegebene Paraphrase doch etwas zu ausführlich eingegangen wird; im fünften wird Schwenter behandelt, und hier ist es ein sehr guter Gedanke des Verfassers, den von Jenem gegebenen Berechnungsschematen der Näherungsbrüche das ganz analoge, im Geiste der combinatorischen Analysis ausgeführte Arrangement Lambert's gegenüberzustellen. Alsdann folgt Albert Girard,* dessen hierher gehörige Bemerkungen von Robert Simson und Plana weiter ausgeführt wurden, — Thatsachen, welche uns entgangen waren. Andererseits können wir als Ergänzung beifügen, dass auch in Deutschland Kunze in seinem trefflichen Lehrbuche der Planimetrie auf jene Stelle bei Girard aufmerksam gemacht und Schlömilch in Grunert's Archiv eine analytische Entwickelung darauf gegründet hat.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit Wallis und analysirt genau dessen Verfahren; als gute Documente wissenschaftlichen Fortschrittes werden die das Wallis'sche Problem weiter ausführenden Arbeiten von Euler und Gustav Bauer mit berücksichtigt. Alsdann folgt Huyghens und zuletzt eine kurze Analyse der Abhandlungen, in welchen Euler, Daniel Bernoulli und Lagrange die Integralrech

* Hierbei ist dem sonst mit der deutschen Sprache sehr wohl vertrauten Verfasser ein kleines Unglück begegnet, denn offenbar wollte die von ihm mit den Worten *„Alberto Girard, morto in ‚Armuth' nel 1633"* (S. 81) übersetzte Klügel'sche Notiz eigentlich etwas Anderes besagen.

nung mit der Theorie der Kettenbrüche in Beziehung setzten; dabei rügt Herr Favaro (S. 107) einen auch von uns angemerkten historischen Irrthum von Hermann Klein in dessen Preisschrift über Geschichte der Mechanik. Saunderson's dagegen wird nicht Erwähnung gethan, und auch bei Daniel Bernoulli, dessen Wirkungszeit bereits ausserhalb der unserer eigenen Arbeit gesteckten Grenzen fiel, hätten wir das Factum anerkannt zu sehen gewünscht, dass bei ihm zuerst die Darstellung des periodischen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}$$

in independenter Form sich vorfindet.

Jedenfalls wird man zugestehen müssen, dass von allen Specialdisciplinen, welche man unter der gemeinschaftlichen Bezeichnung der algebraischen Analysis zusammenfasst, die Lehre von den Kettenbrüchen zur Zeit die am Genauesten geschichtlich durchforschte ist.

16) *S. Günther, Paragone di due metodi per la determinazione approssimativa di quantità irrazionali, traduzione del Dre Alfonso Sparagna,* S. 590—596.

Ein auf Wunsch des Herrn Herausgebers erfolgter Abdruck einer früher erschienenen Notiz des Referenten, deren Zweck bereits in der vorigen Besprechung angedeutet ist. Angehängt sind derselben einige erklärende Noten Boncompagni's.

Dies mit kurzen Worten eine Gesammtdarstellung des reichen Inhalts, welcher in dem 7. Bande des gewaltigen literarischen Unternehmens enthalten ist. Möge unsere Anzeige das allgemeine Interesse auf jenes hinlenken helfen, damit die Theilnahme der Sachkenner dasselbe noch für lange Zeit in Flor erhalte.

München. Dr. S. Günther.

Bibliotheca Historico-Naturalis, Physico-Chemica et Mathematica oder systematisch geordnete Uebersicht der in Deutschland und dem Auslande auf dem Gebiete der gesammten Naturwissenschaften und der Mathematik neu erschienenen Bücher herausgegeben von Dr. A. Metzger, Professor an der Forstakademie zu Münden. 24. Jahrgang 1874. 2 Hefte. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 8°. 1 Bltt., S. 1—94; 1 Bltt., S. 95—232.

Wenn eine periodische Schrift ihren 24. Jahrgang ausgiebt, so darf man füglich annehmen, dass dieselbe einerseits einem Bedürfniss entspringt und andererseits diesem Bedürfniss auch in bescheidenen Grenzen gerecht wird. Dass das Erste der Fall ist, wollen wir gern zugeben, um so mehr, da eine Jahresbibliographie in dieser Form nur die deutsche Literatur besitzt. In Betreff des zweiten Punktes dagegen müssen wir die Befriedigung des Bedürfnisses, soweit die allgemeine Literatur und speciell Physik, Mathematik und Astronomie in Frage kommt, selbst in bescheidenen Grenzen entschieden als nicht vorhanden bezeichnen — für die beschreibenden Naturwissenschaften, worin der Herr Verfasser Fachmann ist, sowie für Chemie maassen wir uns als Laien kein Urtheil an —. Wir haben schon an anderer Stelle* eine ähnliche Meinung über das vorliegende Buch ausgesprochen, glauben aber auch hier nochmals darauf zurückkommen zu können, da die eben angeführte Zeitschrift in Fachkreisen wohl kaum grosser Verbreitung sich erfreuen dürfte. Einige Beispiele mögen unser hartes Urtheil gerechtfertigt erscheinen lassen.

Herr Metzger führt von mathematischen Zeitschriften folgende auf: 1. Mathematische Annalen, Leipzig; 2. Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig (das beiläufig noch immer von dem längst verstorbenen Grunert herausgegeben wird); 3. *Giornale di matematica elementare e computisteria*, *Torino*; 4. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlin; 5. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin; 6. *Mathématiques élémentaires*, *Clermont-Ferrand*; 7. *Rivista di matematica elementare*, *Alessandria*; 8. *Tidskrift för matematik och fysik*, *Upsala*; 9. *Tidsskrift for Mathematik*, *Kjøbenhavn*; 10. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig. Folgende Zeitschriften, welche grösstentheils schon lange Jahre erscheinen, sind ihm also unbekannt geblieben: 1. *Annales (Nouvelles) de mathématiques*, *Paris*; 2. *Annali di matematica pura ed applicata*, *Milano*; 3. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, *Paris*; 4. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche*, *Roma*; 5. *Časopis pro pestování matematiky a fysiky*, *Prag*; 6. *Correspondance (Nouvelle) Mathématique*, *Mons*; 7. *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane*, *Napoli*; 8. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, *Paris*; 9. *Matematitscheskii Sbornik*, *Moskau*; 10. *Messenger of mathematics*, *London*; 11. *Periodico di scienze matematiche e naturali*, *Roma*; 12. *Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, *London*; 13. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig. Von physikalischen Zeitschriften fehlen ausserdem: 1. *Annales de Chimieet de Physique*, *Paris*; 2. *Il nuovo Cimento, Giornale di fisica ecc.*, *Pisa*; 3. *Journal de physique théorique et appliquée*, *Paris*; 4. Repertorium für Experimentalphysik, München. Noch ärger ist es, wenn man die Zeitschriften der Akademien und gelehrten Gesellschaften vergleicht. Da fehlen z. B. — um nur die schlimmsten Auslassungen zu rügen, da sonst der Umfang dieser Besprechung wohl zu ausgedehnt würde — die *An-*

* Neuer Anzeiger für Bibliographie und Bibliothekwissenschaft Jahrg. 1875, Heft 2, Nr. 161, S. 80.

nales scientifiques de l'école normale supérieure, Paris; l'Annuaire publié par le Bureau des Longitudes, Paris; Annuaire de la société philotechnique, Paris: Annuario della società dei naturalisti di Modena, Modena; Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, La Haye: Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, Roma: Atti della Reale Accademia dei Lincei, Roma: Atti dell'Ateneo Veneto, Venezia: Bulletin de l'Academie R. de Belgique, Bruxelles: Bulletin de la société mathématique de France, Paris: Bulletin de la société chimique de Paris, Paris: Bulletin de la société philomathique, Paris: Bulletin de la société d'Anthropologie, Paris: Bulletin de la société des naturalistes de Moscou, Moskau: Bullettino della società geografica italiana, Roma: Annuario scientifico ed industriale, Milano: Bullettino del Volcanismo italiano, Roma: Comptes rendus de l'académie des sciences, Paris: Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg, Stuttgart; *Journal des Savans, Paris: Memorie della società dei spettroscopisti italiani, Palermo; Les Mondes, Paris: Monthly notices of the astronomical society, London; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, London; Proceedings of the R. Institution of Great Britain, London: Proceedings of the London mathematical society, London: Proceedings of the R. Society of Edinbourgh, Edinbourgh: Proceedings of the philosophical Society of Glasgow, Glasgow: Processen-Verbaal van de gewone vergaderingen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam; Rendiconti dell' Istituto Lombardo, Milano; Rendiconto delle Sessioni dell'Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Bologna: Rendiconto dell'Accademia di Napoli, Napoli: Rivista Scientifico-Industriale, Firenze: Società R. di Napoli, Atti dell'Accademia delle scienze fisiche e naturali, Napoli: Transactions of the Cambridge philosophical Society, Cambridge: Transactions of the R. Society of Edinbourgh, Edinbourgh:* Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel, Basel. Die Liste ist bei Weitem noch nicht vollständig und könnte leicht verdoppelt werden.

Auch von sonstigen fehlenden Büchern will ich einige aufführen. Man vermisst z. B.: *Bachet, Sieur de Mésiriac, Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres 3e., ed. Paris, Gauthier-Villars: Bagutti, Manuale pratico del perito Misuratore, Casale, Casane:* Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie, 2. Theil, Stereometrie, Köln, Du Mont-Schauberg; Klein, Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe, Köln & Leipzig, Mayer; Köstlin, Ueber die Grenzen der Naturwissenschaft, 2. Aufl., Tübingen, Fues; Kunze, Der geometrische Unterricht in der Oberclasse der Volksschule, Brandenburg, Müller; *Marianini, Memorie de Fisica sperimentale, Bologna, Zanichelli: Papillon, Storia d'un raggio di Sole, Milano, Gnocchi* (das französische Original ist aufgeführt); *Pochet, Nouvelle mécanique industrielle, Paris, Dunod: Poncelet, Cours de Mécanique appliquée, Paris, Gauthier-Villars:* Postel, Naturlehre, Langensalza, Schulbuchhandlung; *Rapisardi, Elementi di*

Geometria, *Catania*, *Galàtola*; *Zavaglia*, *Esperienze intorno al potere calorifico pratico di alcuni combustibili*: *Bologna*, *Genelli*; *Cremona*, *Elementi di calcolo Grafico*, *Torino*, *Paravia*; Frommhold, Elektrolysis und Elektrokatalysis vom physikalischen und medicinischen Gesichtspunkte, Buda-Pest; *Kutter*, *Le nuove formole sul moto dell'acqua nei canali ecc.*, *Milano*, *Tip. degli Ingegneri*: *Lenormant*, *Les sciences occultes en Asie*, *Paris*, *Maisonneuve*; *Ernouf*, *Denis Papin sa vie et ses oeuvres*, *Paris*, *Hachette*; Peters, Beobachtungen mit dem Bessel'schen Pendelapparate, Hamburg, Mauke; *Riolo*, *Regole pratiche per la scompartizione della superficie dei poligoni e circoli ecc.*, *Palermo*: *Eysseric et Pascal*, *Eléments d'algèbre*, *Paris*, *Delagrave*: *Saint-Robert*, *Mémoires scientifiques*, *T. III*, *Turin*, *Bona* u. s. w. u. s. w. Ich mache mich anheischig, aus den von Herrn Metzger nicht aufgeführten Büchern, soweit dieselben die oben angegebenen Fächer betreffen, mit leichter Mühe ein Heft zusammenzustellen, das in der Ausstattung der *Bibliotheca Historico-Naturalis* mindestens halb so stark ist wie der ganze Jahrgang 1874. Wie sehr es Herrn Metzger mit der Vollständigkeit Ernst ist, geht wohl daraus hervor, dass meine obenerwähnte Notiz im Februar d. J., also zu einer Zeit erschien, wo jedenfalls ein grosser Theil meiner Berichtigungen für das 2. Heft, das erst vor Kurzem ausgegeben wurde, noch zu verwerthen waren. Es ist Nichts benutzt worden. Was soll man aber von einer Bibliographie sagen, die Boncompagni's *Bullettino* nicht kennt, dessen Genauigkeit und relative Vollständigkeit Herr Metzger sich zum Muster nehmen sollte.

Die Arbeit soll auch systematisch sein. Hier ist das System: 1. Vermischte mathematische Schriften; 2. Niedere Mathematik; 3. Höhere Mathematik; 4. Tafeln; 5. Darstellende Geometrie und geometrisches Zeichnen; 6. Praktische Geometrie; 7. Mechanik!! Und das wird noch nicht einmal innegehalten. Arbeiten über denselben Gegenstand, ja Ausgaben ein und derselben Schrift in verschiedenen Sprachen werden bald unter diese, bald unter jene Rubrik subsumirt. Was hat z. B. *Caverni*, *Problemi naturali di Galileo Galilei* unter „Vermischte mathematische Schriften" zu suchen? Das Buch gehört gar nicht unter Mathematik, sondern unter „Geschichte der Naturwissenschaften". *Briot*, *Algèbre*, findet man unter „Niedere Mathematik", die holländische Uebersetzung unter „Höhere Mathematik"; die geometrischen Rechenaufgaben von Kehr stehen unter „Mathematische Tafeln"; *Kiaes*, *traité élémentaire de géométrie discriptive*, steht unter „Niedere Mathematik", statt unter „Darstellende Geometrie". Ob *Kimber*, *Mathematical course for the university of London*, wohl wirklich die niedere Mathematik behandelt, zu welcher Rubrik es nämlich gesetzt ist? Solche *qui pro quo* liessen sich leicht vermehren.

Am Schlusse befindet sich ein alphabetisches Verzeichniss. Darin sind verschiedene Männer desselben Namens friedlich als identisch behandelt worden. So sind unter Burckhardt zwei Männer confundirt, ebenso unter Cotta, unter Fuchs, unter Grove, unter Hansen unter Hesse, unter Kraus. Unter Mayer sind vier Personen zusammengezogen, und die Anordnung der Werke so glücklich, dass Nr. 1 und 5 einer Person, die drei anderen den übrigen drei zugehören u. s. w. Es ist damit wohl genug. Ob frühere Jahrgänge, ehe sie von Herrn Metzger redigirt wurden, auch in ähnlicher Art gearbeitet sind, weiss ich nicht; jedenfalls sollte der Verleger so schnell als möglich sich nach einem bibliographisch besser geschulten und in den zu bearbeitenden Fächern genauer bekannten Herausgeber umsehen. Wie soll auch ein Professor der Naturgeschichte auch der Mathematik und Astronomie sammt Physik und Chemie noch die nöthige Aufmerksamkeit zuwenden können. Der Erfolg lehrt, was daraus wird. Trotz alledem kann man, um eine Uebersicht über die gesammten Schriften über Mathematik zu erhalten, die *Bibliotheca* nicht entbehren. Mit Boncompagni's *Bullettino*, der Polytechnischen Bibliothek und dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik lässt sich wenigstens eine annähernde Vollständigkeit erreichen, obwohl auch so noch Manches zu wünschen übrig bleibt.

Thorn, Juli 1875. M. Curtze.

Elemente des graphischen Calculs von Luigi Cremona. Autorisirte deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von Maximilian Curtze. Leipzig 1875. 105 S. mit 131 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Die Leser dieser Zeitschrift sind durch die Beiträge, welche Dr. Jacob Weyrauch dem XIX. Bande in Gestalt seines Aufsatzes „Die graphische Statik", diesem Bande in Gestalt seines, unseren Bemerkungen unmittelbar vorhergehenden ausführlichen Referates zugewandt hat, mit dem Inhalt und dem Zweck jener neuen Disciplin soweit bekannt, dass sie den eigentlichen Quellenwerken sich zuwenden müssen, um noch genauer einzudringen. Ein Hilfsmittel, dessen die graphische Statik sich bedient, ist der graphische Calcul, und seiner Auseinandersetzung ist das Büchlein gewidmet, über welches wir hier mit wenigen Worten berichten. Es genügt fast, den Namen des Verfassers zu nennen, um zu wissen, dass aus der Feder eines Cremona Nichts hervorgeht, welches nicht durch Klarheit, verbunden mit höchster Eleganz, sich auszeichnet, und diese Eigenschaften, welche allen seinen Schriften gemeinsam sind, treten auch in der neuesten ebenmässig hervor. Der Uebersetzer ist gleichfalls dem deutschen Publikum wie durch eigene Arbeiten auf dem Felde der Geschichte der Mathematik, so auch durch gelungene Uebertragungen aus dem Italienischen hinreichend bekannt. Auch er lässt seine alte Sprachgewandtheit auf jeder Seite erkennen. Dem entsprechend liest sich das Büchlein angenehm und leicht, und würde dies in noch höherem Grade, wenn nicht leider ziemlich viele Druckfehler sinnentstellend wirkten, welche man erst überwinden muss. Die neun aufeinanderfolgenden Capitel führen die besonderen Ueberschriften: 1. Princip der Zeichen in der Geometrie; 2. Graphische Addition; 3. Multiplication; 4. Potenzen; 5. Wurzelausziehung; 6. Auflösung der numerischen Gleichungen; 7. Verwandlung ebener Figuren; 8. Schwerpunkt; 9. Rectification eines Kreisbogens. Man sieht, es sind Gegenstände, welche nicht sämmtlich in durchaus erzwungenem Zusammenhange stehen; aber die Methode ist überall die gleiche graphische, überall voraussetzungslos bis zu den niedersten Elementarkenntnissen, entsprechend dem Leserkreise, für welchen die Schrift entstanden ist: in Italien die jugendlichen Zöglinge der *Scuole d'Applicazione* und der *Istituti Tecnici*, in Deutschland, wie der Uebersetzer hofft, die Schüler von Realgymnasien und Gewerbeschulen.

Cantor.

Antonio Favaro: Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità (A. 600 *a. C.* — A. 400 *d. C.*) *Padova* 1875.

Der unseren Lesern aus einer der vorhergehenden Besprechungen dieses Heftes als Mitarbeiter an dem *Bullettino Boncompagni* bekannte Professor in Padua hat uns durch die Zusendung einer kleinen Abhandlung erfreut, über welche hier berichtet werden soll. Es handelt sich um eine Uebersicht der Mathematiker im weitesten Sinne des Wortes eines ganzen Jahrtausend, nämlich derjenigen unserem Fache verwandten Schriftsteller, deren Namen sich durch Verdienst oder Zufall bis heute erhalten haben, während ihre Lebenszeit zwischen 600 v. Chr. bis 400 n. Chr. fällt. Herr Favaro beabsichtigte nicht entfernt, eine Geschichte dieser Männer zu geben. Das auf 14 Spalten gedruckte, 225 Namen enthaltende Verzeichniss soll, alphabetisch geordnet und die Träger der Namen in gedrängtester Kürze kennzeichnend, nur den Zweck erfüllen, das Nachschlagen soweit zu erleichtern, dass man sich dort vergewissern kann, ob der gesuchte Name Aufnahme gefunden hat. Hauptsache ist die tabellarische Zusammenstellung, welche Herr Favaro, soviel wir wissen, zuerst in der Art versucht hat, dass er die graphische Darstellung zur Anwendung brachte. Hundert horizontale Parallellinien zerlegen das Jahrtausend, über welches die Männer, deren Aufeinanderfolge veranschaulicht werden soll, vertheilt sind, in ebensoviele Jahrzehnte, und nun stehen auf jeder Linie nebeneinander die Namen der Männer, welche gerade diesem Zeitpunkte angehören.

Der Gedanke ist gewiss interessant, wenn auch die praktische Ausführung manche Schwierigkeit bereitet. Wir reden nicht blos von den

Druckfehlern, welche den Versuch, der uns vorliegt, entstellen, und an welchen, wie der Verfasser selbst uns klagt, die nothwendige Raschheit der Ausführung die Schuld trägt, da das Schriftchen, als Glückwunsch zu einem Familienfeste entstanden, an einem bestimmten Tage im Drucke vollendet sein musste. Dass Sosigenes z. B. mehr als zehn Zeilen tiefer, also ein Jahrhundert später als Julius Cäsar steht, für welchen er, wie das Inhaltsverzeichniss richtig angiebt, den Kalender berechnete, dass Apollonius von Pergä im Inhaltsverzeichnisse selbstverständlich vorkommend auf der Tabelle ganz wegblieb, das sind Mängel, welchen ein wiederholter Abdruck abhelfen kann. Auch über die Lebenszeit dieses oder jenes Mathematikers, über welche wir von Herrn Favaro weit verschiedene Ansichten haben, wollen wir hier nicht streiten, wo wir nur von seinen Grundgedanken zu reden haben. Aber wir fragen: wann hat ein Mann gelebt, da sein Name doch nur auf einer Zeile stehen darf? Soll sein Geburtsjahr, sein Todesjahr, sein mittleres etwa 35. Lebensjahr, soll das Datum seines Hauptwerkes mit seinem Namen verbunden werden? Aber selbst unter der Voraussetzung, dass man der einmal gewählten Grundlage unverbrüchlich treu bleibe, unter der weiteren noch schwierigeren Voraussetzung, dass alle diese Daten auf den Tag genau bekannt wären, was nicht einmal in den letztverflossenen 500 Jahren, geschweige denn in dem von Herrn Favaro diesmal behandelten Jahrtausend der Fall ist, liessen gegen jede dieser Annahmen sich mannichfache Einwendungen erheben, deren Auffindung wir unseren Lesern überlassen dürfen. Das ist eine Schwierigkeit, der kein wiederholter Abdruck vollständig Abhilfe gewähren kann.

Wir möchten trotzdem nicht anstehen, die Uebersichtlichkeit des graphischen Verfahrens bei allen nicht abzuleugnenden Mängeln zu rühmen. Wir glauben, dass, von Einzelheiten abgesehen und Alles nur im Grossen betrachtet, die Gruppirung des Herrn Favaro einen Einblick in das Nacheinander und damit in die Abhängigkeit einer Zeit von der andern leicht ermöglicht und fester dem Gedächtnisse einprägt, als dieses wohl sonst der Fall ist.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1875.

Periodische Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. 34. Bd. Wien, Gerold. 27 Mk.

Bericht über die Verhandlungen der vierten allgem. Conferenz der europäischen Gradmessung, erstattet von C. Bruhns und A. Hirsch. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Preisschriften, gekrönt und herausgegeben von der Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig. Nr. 18. Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 20 Pf.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, fortges. v. W. Borchardt. 81. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro cmpl. 12 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. C. Ohrtmann, F. Müller und A. Wangerin. 5. Bd. Jahrg 1873, Heft 3. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 60 Pf.

Peters, C. F. W., Generalregister der Bände 61—80 der Astronomischen Nachrichten. Leipzig, Mauke. 20 Mk.

Fortschritte auf dem Gebiete der Physik. Nr. II, 1874—1875. Leipzig, Mayer. 2 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Suter, H., Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 2. Theil, 2. Hälfte. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 8 Mk.

Allé, M., Beitrag zur Theorie der Functionen von drei Veränderlichen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Kowalevski, S. v., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Gegenbauer, L., Ueber einige bestimmte Integrale (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Wangerin, A., Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Jablonowski'sche Gesellsch. XVIII.) Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 20 Pf.

Semmler, F., Reduction der Bewegung eines schweren um einen festen Punkt seiner Axe rotirenden Rotationskörpers auf die elliptischen Transcendenten. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Navier, L., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung; deutsch von Th. Wittstein. 2 Bde. 4 Aufl. Hannover, Hahn. 12 Mk.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie, herausgeg v. F. Lindemann. 1. Bd. 1. Theil. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

Fiedler, W., Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Hankel, H., Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. Leipzig, Teubner. 7 Mk.

Steiner's, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie. 1. Thl.: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Nagel, v., Zweiter Anhang zur ebenen Geometrie. 2. Aufl. Ulm, Wohler. 80 Pf.

Heis & Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. 6. Aufl. 1. Thl. Cöln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk. 80 Pf.

Schlegel, V., System der Raumlehre; nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe. 2. Thl. Leipzig, Teubner. 7 Mk.

Angewandte Mathematik.

Schürmann, F., Unterricht in der Projectionslehre. Iserlohn, Bädeker. 2 Mk. 75 Pf.

Klingenfeld, A., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 3. Bd. Nürnberg, Korn. 3 Mk.

Largiadèr, Ph., Praktische Geometrie. 3. Aufl. Zürich, Schulthess. 1 Mk. 80 Pf.

Cantor, M., Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Schreiber, P., Das Flächennivellement mit Aneroidbarometern, ausgeführt auf fünf Sectionen der kleinen Generalstabskarte des Königreichs Sachsen. Leipzig, Felix. 3 Mk.

Finger, J., Zur elastischen Nachwirkung des tordirten Stahldrahtes. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Bessel, F. W., Abhandlungen, herausgeg. von R. Engelmann. 1. Bd. Leipzig, Engelmann. 18 Mk.

Lamp, E., Der scheinbare Ort des Polarsterns *α Ursae min.* (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Stark, E., Ueber die Bahnbestimmung des Planeten Hecate (100). II. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Lohse, O., Beobachtungen, angestellt auf der Sternwarte zu Bothkamp. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Melde, F., Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung. Tübingen, Laupp. 12 Mk.

Hygini astronomica. Ex codicibus collatis, rec. B. Bunte. Leipzig, Weigel. 4 Mk.

Heis, E., Zodiacallicht-Beobachtungen in den letzten 29 Jahren (1847 bis 1875). Cöln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk.

Riemann, B., Schwere, Elektricität und Magnetismus. Bearb. v. Hattendorff. Hannover, Rümpler. 8 Mk.

Physik und Meteorologie.

Cornelius, C., Zur Molecularphysik. Halle, Schmidt. 2 Mk.

Dvorak, V., Ueber die akustische Anziehung und Abstossung. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Kirchhoff, G., Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. 2. Thl. 3. Abdr. Berlin, Dümmler. 4 Mk.

Mach, E. und J. Merten, Bemerkungen über die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit im Quarz durch Druck. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Lommel, E., Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes. Erlangen, Besold. 2 Mk.

Lippich, F., Ueber die behauptete Abhängigkeit der Lichtwellenlänge von der Intensität. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Mach, E. und Rosicky, Ueber eine neue Form der Fresnel-Arago'schen Interferenzversuche mit polarisirtem Licht. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Plank, J., Versuche über das Wärmeleitungsvermögen von Gasgemengen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Puschl, C., Ueber den Einfluss von Druck und Zug auf die thermischen Ausdehnungscoefficienten der Körper. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Riecke, E., Ueber die elektrischen Elementargesetze. Göttingen, Dieterich. 1 Mk 60 Pf.

Hankel, W., Elektrische Untersuchungen. 12. Abh.: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften von Gyps, Diopsid, Orthoklas, Albit und Periklin. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Dellingshausen, N., Die rationellen Formeln der Chemie, auf Grundlage der mechanischen Wärmetheorie entwickelt. 1. Thl. Heidelberg, Winter. 4 Mk. 80 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten über dieselbe, von Prof. P. Treutlein. Beilage zu dem Programm des grossherzogl. Gymnasiums zu Karlsruhe. Karlsruhe 1875.

Seit den dreissiger Jahren unseres Jahrhunderts währt der bereits hundert Jahre zuvor ausgebrochene, wegen Mangels neuen Materials aber wieder vertagte Streit bezüglich der Entstehung und Uebermittelung unseres dekadischen Zahlensystems. Ohne dass auch nur entfernt von einem selbst vorläufigen Abschlusse dieses Kampfes die Rede sein könnte, ist es sogar schwierig, sich über den momentanen Stand desselben ein Urtheil zu bilden, und zwar besteht diese Schwierigkeit der Orientirung nicht blos für den Laien, sondern auch für Denjenigen, welcher sich mit mathematisch-historischen Fragen anderer Natur beschäftigt. Die Absicht des Verfassers, diesem Uebelstande abzuhelfen und auf möglichst engem Raume eine kritische Zusammenstellung der bedeutendsten Resultate zu liefern, welche die unermüdliche Thätigkeit der verschiedensten Gelehrten ergeben hat, wird deshalb von allen Freunden der geschichtlich-mathematischen Forschung nur freudig begrüsst werden können, denn kein solcher wird leugnen, dass man es hier, wie wir an einem andern Orte (Nekrolog von Friedlein i. d. Augsb. Allg. Ztg., 4. Juli 1875) sagten, mit einem Fundamentalproblem zu thun hat, dessen definitive Erledigung auch auf eine Menge anderer Objecte vom grössten Einfluss sein würde. Und zu dieser Erledigung kann Herrn Treutlein's Schrift immerhin als ein wichtiger vorbereitender Schritt gelten, indem für jeden Fachgenossen die zunächst in Angriff zu nehmenden Punkte aus derselben zu entnehmen sind. Sehen wir uns nun die Arbeit selbst genauer an.

Dieselbe zerfällt, abgesehen von einer kurzen, über das Wesen der Streitfrage und die benützten Quellen Bericht erstattenden Einleitung in [vi]er Abtheilungen mit folgenden Specialüberschriften: I. Die letzten sechs

Jahrhunderte (13—23); II. Die Boëthius-Frage (23—43); III. Die Araber (43—68); IV. Die Inder (69—90). Dann folgt noch ein Blatt Anmerkungen und zum Schluss eine Tafel, welche in 35 Columnen die verschiedenen Zifferformen aller Länder und Zeiten zur Anschauung bringt, begleitet von einem kurzen Commentar.

Diese Art, seine Aufgabe sich zurechtzulegen, motivirt der Verfasser eingangs durch die Bemerkung, dass das an sich natürlichste Eintheilungsprincip, das synchronistische, für seine Zwecke mancherlei Unzukömmlichkeiten mit sich gebracht haben würde, und dass er deswegen auch statt einer chronologisch aufsteigenden Darstellung der Thatsachen eine niedergehende gewählt habe, welche, von der Gegenwart ausgehend, die allmälige Herausbildung des *status quo* schildert. In der That wird man zugestehen müssen, dass die Uebersichtlichkeit der Erzählung durch diese Anordnung nur gewinnen konnte.

Im ersten Abschnitte wird, nachdem zuerst gewisse sinnlose Hypothesen über die Entstehung unserer Ziffern ihre kurze Aburtheilung gefunden haben, die Rechenkunst der früheren Neuzeit und des Mittelalters besprochen und erläutert, wann und von wem zuerst im Occident die uns jetzt so geläufig gewordene Ziffernbezeichnung und Ziffernrechnung gebraucht wurde, wobei selbstverständlich auf Leonardo der Hauptnachdruck gelegt erscheint. In diesem ersten Capitel, dem die umfassende Arbeit von Wildermuth als Grundlage dient, soll an die den eigentlichen Vorwurf des Werkchens bildende Frage noch nicht herangetreten, es soll vielmehr erst die Basis für ihre Discussion gewonnen werden.

Dagegen führt Capitel II gleich *in medias res.* Herr Treutlein berichtet uns, wie als der erste der bekannte Geschichtschreiber der Astronomie, Weidler aus Wittenberg, gestützt auf die von ihm so zu sagen entdeckte hochberühmte Altdorfer (jetzt Erlanger) Handschrift, den römisch-griechischen Ursprung der Zahlzeichen gegen Wallis verfochten habe, wie dann Mannert auf seine Seite trat, wie aber der gelehrte Zwist von den Zeitgenossen unbeachtet blieb und einschlief, bis ihm dann M. Chasles' Publicationen neues Leben verliehen.

Die berühmte Stelle in der Geometrie des Boëthius führt auf die Fundamentalfrage, ob dieselbe ein echtes oder unterschobenes Werk sei; getreu seinem Referirstandpunkte spricht sich der Verfasser über diesen Punkt nicht aus, verspricht aber eine Fortsetzung seiner Studie im angedeuteten Sinne. Allein so weit muss er doch in die Sache eingehen, dass er die Folgen skizzirt, welche sich aus der einen oder andern Auffassung ergeben und bekanntlich von der einschneidendsten Wirkung für die Geschichte der Arithmetik sind.

Der Verfasser verfährt hier mit strenger Unparteilichkeit, denn obwohl er, wie uns gewisse Anzeichen vermuthen lassen, persönlich auf

Cantor's Seite steht, so registrirt er doch genau die Bestrebungen Friedlein's; derselbe suchte die Vermuthungen Cantor's, welcher auch in einer Reihe anderer mittelalterlicher Schriften Spuren des Columnenrechnens zu bemerken glaubte, durchweg als unbegründet hinzustellen,* und man wird ihm in manchen Punkten Recht geben müssen. Allein wenn derselbe hierin, wie Herr Treutlein meint, auch durchweg Recht behalten sollte, so bleibt dies gleichwohl ohne Belang für die Frage der Echtheit, in welcher uns Friedlein's Standpunkt doch ein zu einseitig philologischer scheint.

Im Anschluss an die geistreichen Deutungen, welche Chasles von den Hieroglyphen des Boëthius gegeben hat, wird das Wesen des Columnenrechnens und besonders des Dividirens ausführlich beleuchtet und durch Beispiele versinnlicht; hierauf folgt eine Darstellung der Rechnungsregeln Gerbert's und seiner Schüler (Bernelin etc.), wobei natürlich die Streitfrage bezüglich der eigentlichen Quellen der Gerbert'schen Mathematik nicht umgangen werden kann. Zum Schluss wird der Behauptung französischer Gelehrter gedacht, nicht in der arabischen Arithmetik, sondern im Abacus wurzle unsere heutige Rechenkunst, und die Besprechung dieser von anderer Seite nicht unterstützten Hypothese bildet den naturgemässen Uebergang zum dritten Capitel.

Dasselbe ist selbstverständlich im Wesentlichen nichts Anderes, als ein Auszug aus den gewaltigen Materialsammlungen von Woepcke. Derselbe hat bezüglich der berühmten Gobarziffern, welchen er eine selbstständige Gobarrechnung anreihen zu müssen geglaubt hat, die Nichtigkeit der von Sacy, Humboldt und Gerhardt aufgestellten Ansichten zwingend dargethan und zuerst mit Entschiedenheit den charakteristischen Unterschied zwischen ostarabischen und westarabischen (maghrebinischen oder Gobar-) Ziffern betont. An dies Resumé schliesst sich eine concise Beschreibung der arabischen Logistik und hieran eine sehr verdienstliche Sichtung der Consequenzen, welche sich aus Woepcke's Forschungen für die Vertheidiger und Gegner der „*Geometria Boëthii*“ herleiten lassen. Hier wagt es der Verfasser auch, in etwas bestimmt terer Weise seine eigene Ueberzeugung durchblicken zu lassen; seine Bemerkung, dass die für die Einführung des Stellenwerthes „nothwendige Erfindung der Null das Ganze dem Ei des Columbus wohl vergleichbar macht“ (S. 64), scheint uns wirklich den Nagel auf den Kopf zu treffen. Endlich wird auch die „Frage nach dem geschichtlichen Zusammenhange zwischen arabischem und abacistischem Rechnen“ mit

* Man kann hinzufügen, dass Cantor ganz neuerlich (im 2. Hefte des vor. Jahrgangs) darauf hingewiesen hat, wie seinen Ansichten durch die von Hankel bei Gall Morel eingezogenen Erkundigungen ein Stück Boden entzogen worden ist, auf welchen er selbst sich freilich nie gestützt hatte.

Rücksicht auf die Ausführungen von Gerhardt, Chasles, Friedlein einer- und Arneth, Cantor, Martin und Woepcke andererseits so erschöpfend besprochen, als dies auf dem kleinen Raume von vier Octavseiten geschehen konnte.

Seinem Princip des retrograden Aufsteigens getreu, gelangt der Verfasser schliesslich zu den Indern. Die Ueberzeugung, dass auf dieses Volk in letzter Instanz die Anfänge unseres heutigen Rechnungssystems zurückzuführen seien, hatte sich seit Beginn des XIX. Jahrhunderts allen Kennern aufgedrängt; die Art und Weise der Transferirung desselben nach Westen aber harrte der Klarstellung und bot für Conjecturen ein reiches Feld. Dieselben finden sämmtlich in unserer Schrift ihre Stelle; dann wird, wieder an der Hand Woepcke'scher Darlegungen, der Nachweis zu führen versucht, dass sich das alte Sanskritvolk bereits im Besitze eines durchgebildeten Zehner-Positionssystems befand, welches den ungeheuerlichsten Extravaganzen arithmetischer Phantasterei Genüge zu leisten vermochte.* Den Schluss des Capitels und damit des Büchleins selbst bildet die Charakterisirung der Erklärungsversuche, welche Woepcke für die schon erwähnte Verschiedenheit der maghrebinischen und der von ihm mit Bestimmtheit als arabisch-indisch bezeichneten östlichen Ziffern gegeben hat, — Vermuthungen, welche aller Wahrscheinlichkeit nach das Richtige treffen.

Wie man aus unserer Zusammenstellung ersehen wird, hat der Verfasser von sämmtlichen für das grosse Problem irgend beizuziehenden Fragen genügende Rechenschaft gegeben und mit Aufbietung einer beträchtlichen Literaturkenntniss den Boden für weitere Nachforschungen geebnet. Weniger als mit dem Inhalte der Brochure können wir uns mit ihrer Form einverstanden erklären; die in den einzelnen Capiteln behandelten Materien lassen hier und da die rechte Cohärenz vermissen und der Satzbau lässt zu wünschen übrig; indess verkennen wir keineswegs, dass die dem Verfasser aufgezwungene Form des Schulprogramms diese Mängel bedingt, denn hier kam es darauf an, auf möglichst engem Raume möglichst viel Stoff zusammenzudrängen, und so entstanden die langathmigen Perioden. Alles in Allem begrüssen wir die uns gebotene Leistung auf's Freudigste und möchten wünschen, dass das Schriftchen in erweiterter Gestalt und vielleicht auch mit geringerer Beschränkung subjectiver Ansichten bald eine zweite Auflage als selbstständiges Buch erlebe.

---

* Auch auf Hankel's Anzweiflung der Existenz eines solchen Systems wird Bezug genommen. Hier scheint die an sich gerechtfertigte Abneigung, welche der verdiente Mathematiker gegen Hypothesen jeder Art in oft etwas gar zu prononcirter Weise hervortreten liess, ihn doch entschieden zu weit geführt zu haben.

Für eine solche mögen hier noch einige Bemerkungen folgen; wir stellen eine Anzahl von Wahrnehmungen zusammen, welche sich uns bei der Lecture aufgedrängt haben.

Gelegentlich der abgeschmackten Hypothesen von A. Müller und Rauch wäre zu erwähnen, dass eine der Idee nach ähnliche Theorie bereits von dem Literarhistoriker Reimann im ersten Viertel des vorigen Säculums formulirt, aber todtgeschwiegen wurde (S. 16). — Die sogenannte Division „über sich" ist nicht hinreichend klar auseinandergesetzt (S. 17). Bezüglich der Einführung des Begriffes und Namens „Million" verdienen auch die Angaben von Baltzer und Vorsterman van Oyen Berücksichtigung (S. 17). — Für den Betrieb des Rechnens auf höheren Lehranstalten im XVIII. Jahrhundert ist die von Bartholomaei (Nachtragsheft zu dieser Zeitschrift) so ausführlich geschilderte Methode des Jenenser Professors Weigel höchst bemerkenswerth (S. 18). — Dass die meisten Schriften zwischen 1650 und 1700 lateinisch abgefasst seien, wird sich wohl nicht behaupten lassen (S. 18.) — Bezüglich des Auftretens der Ziffern bei Inschriften etc. enthält der 1. Band von Kästner's „Geschichte der Mathematik" eine beachtenswerthe Notiz (S. 21). Für den Namen des englischen Uebersetzers findet sich hier die wohl richtigste Schreibart „Atelhart" (S. 22). — Dagegen, dass Leonardo Fibonacci ein Kaufmann gewesen sei, haben sich in jüngster Zeit gewichtige Bedenken erhoben (S. 22). — Wir zweifeln, wie bereits erwähnt, nicht im Mindesten daran, dass Vorderindien die Heimath des Stellenwerth-Principes ist; es scheint uns aber doch bei der Begründung dieser Thatsache zuviel Gewicht auf die allerdings auch von Woepcke hervorgehobene Fähigkeit jenes Volkes gelegt, sehr grosse Zahlen zu bilden und auszusprechen, und würden keine anderen Gründe vorliegen, so behielte Hankel mit seiner Zurückhaltung am Ende Recht. Denn im Grunde unterscheidet diese Zahlenarchitektonik, wie sie am Prägnantesten in dem fingirten Verlobungsexamen des Buddha hervortritt, sich ganz und gar nicht von der im „Arenarius" des Archimedes entwickelten Methode; dass aber diese mit Stellenwerth und dekadischem System Nichts zu thun hat, dürfte Nesselmann überzeugend nachgewiesen haben (S. 81 flgg.). — Der dreimal vorkommende Name Colebrooke findet sich an zwei Stellen unrichtig geschrieben, was einen Anfänger zu Irrungen verleiten könnte (S. 81 und 86).

Eine einzige Stelle noch giebt es, welche uns einer wesentlichen Verbesserung zu bedürfen scheint. Wir meinen die Darstellung der abacistischen Division (S. 30), über welche der Sachkenner freilich leicht hinweggeht, welche aber dem mit der Sache noch nicht Vertrauten entschieden nicht klar genug gehalten ist; wenigstens ist es sehr die Frage, ob ein Solcher eine andere Division als die im Paradigma enthaltene selbst abacistisch ausführen kann, wenn er die hier gegebene Darstellung gelesen. In diesem Punkte empfehlen wir für eine etwaige zweite Auflage erhöhte Ausführlichkeit; auch berücksichtigt Herr Treutlein hier, gegen seine sonstige Gewohnheit, etwas zu ausschliesslich eine specielle Auffassung.

München. Dr. S. Günther.

Der „Liber mathematicalis" des heil. Bernward im Domschatze zu Hildesheim, von H. Düker. Hildesheim 1875.

Die Hildesheimer Dombibliothek besitzt unter ihren Handschriften auch eine mathematische, welche von Alters her den Namen des „*liber mathematicalis*" trägt und von der Tradition auf den um Wissenschaft und Kunst gleichhoch verdienten Bischof Bernward zurückgeführt wird. Ueber diesen Codex fanden sich in manchen Localschriften gelegentliche Notizen; vom eigentlich wissenschaftlichen Standpunkte aus war derselbe dagegen bisher ganz unbeachtet geblieben. Um so mehr verdient das Bestreben des Verfassers Anerkennung, in vorliegender Monographie eine historisch-kritische Untersuchung dieses interessanten Manuscripts zu liefern; fügen wir gleich hinzu, dass er seinen Zweck wirklich erreicht hat und zu bemerkenswerthen Resultaten gelangt ist.

Der Verfasser giebt zunächst eine sehr genaue bibliographische Beschreibung der Handschrift und legt sich dann vier Fragen vor: Hat St. Bernward den Inhalt selbstständig verfasst, hat er die vorliegende Schrift mit eigener Hand gefertigt, hat er dieselbe, wie die Sage behauptet, seinem dem Kaiser Otto III. ertheilten arithmetischen Unterricht zu Grunde gelegt, und hat er schliesslich den Codex seiner „Lieblingsstiftung", dem Michaeliskloster, vermacht? Diese Fragen werden beantwortet.

Die erste erledigt sich leicht, denn der Inhalt ist kein selbstständiger, es ist nichts Anderes, als die freilich mehrfach verstümmelte Arithmetik des Boëthius. Was die zweite anlangt, so glaubt der Verfasser allerdings die Ansicht Lappenberg's, als habe Bernward den kaiserlichen Prinzen überhaupt nicht unterrichtet, zurückweisen zu können; allein ein Buch wie den schwierigen Boëthius habe er bei diesem Elementarunterricht gewiss nicht angewandt. Auch selbst geschrieben kann er ihn kaum haben, denn einmal ist es höchst unwahrscheinlich, dass der vielbeschäftigte Bischof, nachdem er sich durch mannichfaltige Connexionen das seltene Original endlich verschafft, zu solchen mehr manuellen Arbeiten Zeit gefunden habe, und andererseits sprechen dagegen directe Handschrift-Vergleichungen; wohl aber hat er aller Wahrscheinlichkeit nach den Act des Copirens selbstständig überwacht und wohl auch durch Correcturen eigenhändig nachgeholfen. Schliesslich liegt kein Grund vor, auf die vierte der oben aufgeworfenen Fragen eine andere als bejahende Antwort zu geben.

Nach dieser Einleitung liefert Herr Düker eine äusserst sorgfältige Zusammenstellung der Abweichungen, welche der Hildesheimer Codex den anderen bekannten und von Friedlein seiner bekannten Ausgabe zu Grunde gelegten Handschriften gegenüber bietet; durch eine Reihe von Belegstellen sucht er den für die Texteskritik natürlich hochwichtigen Nachweis zu erbringen, dass zwischen ersterem und diesen nicht der mindeste Zusammenhang aufgefunden werden könne. Bezüglich des Ursprunges des sonach isolirt dastehenden Manuscripts stellt er die nicht unwahrscheinliche Hypothese auf, Gerbert habe in seinem Bobbio den betreffenden Urcodex aufgefunden und ihn seinem Freunde Bernward zum Abschreiben überlassen.

Wie es sich mit den einzelnen namhaft gemachten Varianten verhält, werden spätere Bearbeiter des Boëthius zu entscheiden haben. Nur möchten wir bemerken, dass der Verfasser vielleicht hier und da gar zu scrupulös auftritt, wie z. B. da, wo er in dem doch auch sonst vielfach vorkommenden „*considerate*“ statt „*consideratae*“ gleich einen grammatischen Fehler erblickt. Auch der Vorwurf, welchen er (S. 10) gegen Friedlein erhebt, derselbe habe „bei seinem Texte gar keine feste Norm befolgt“, scheint uns nicht gerecht; denn so vielfach auch im Allgemeinen die Arbeiten des leider verstorbenen Forschers mit Widerspruch zu kämpfen hatten — seinem Editionsverfahren hat man stets volle Anerkennung gezollt, und auch die vom Verfasser namhaft gemachten Beispiele scheinen zur Erschütterung dieses Urtheils nicht genügend.

Zum Schluss erhalten wir eine vollständige, mit eigenen Bemerkungen ausgestattete Inhaltsübersicht der Arithmetik des Boëthius. Das Werk von Thimus, welches der Verfasser zur Erklärung gewisser pythagoräischer Anklänge heranzieht, scheint von mathematisch-historischer Seite noch nicht in dem Grade gewürdigt worden zu sein, als es Herrn Düker's Angaben zufolge verdienen dürfte.

Geschichtliche Monographien von der Art, wie wir hier eine kennen gelernt haben, sind uns hochnöthig, um in das Dunkel mittelalterlicher Mathematik mehr Licht zu bringen.

München. Dr. S. Günther.

Kurzer Abriss der Geschichte der elektrischen Telegraphie, von K. E. Zetzsche. Gr. 8⁰. 72 S. mit 51 in den Text gedruckten Holzschnitten. 1874. Berlin, Julius Springer. Preis 3 Mk.

In dieser Arbeit des um die Geschichte der Telegraphie bereits vielfach verdienten Verfassers liegt uns ein kurzgefasster Ueberblick über die Entwickelung der elektrischen Telegraphie vor, welcher sich an die von der deutschen Telegraphenverwaltung auf der Wiener Weltausstellung vom Jahre 1873 veranstaltete geschichtliche Ausstellung von Apparaten und Gegenständen der Telegraphie anschliesst.

Das kleine Buch ist durch wiederholte Umarbeitungen und Ergänzungen aus Artikeln entstanden, welche der Verfasser seinerzeit über diesen Theil der Weltausstellung in der Ausstellungszeitung, dann in erweiterter Form im *Journal télégraphique* veröffentlicht hatte. Schon diese Darstellungen hatten in den Kreisen, welche sich für das Telegraphenwesen näher interessiren, allgemeine Anerkennung gefunden; diese Anerkennung ist durch den Abdruck dieser Arbeiten in mehreren ausländischen Telegraphenzeitschriften und im Amtsblatte der deutschen Reichs-Telegraphenverwaltung genügend dargethan worden.

Die in dem Abrisse der Geschichte der Telegraphie vorliegende, vielfach vermehrte und durch zahlreiche, sehr treffliche Abbildungen unterstützte Bearbeitung der vorher erwähnten Artikel erscheint nach Inhalt und Form für ein grösseres Publikum bestimmt zu sein und verdient auch bei der hohen Bedeutung, welche die Telegraphie für die gesammte Entwickelung des wirthschaftlichen, politischen und wissenschaftlichen Lebens erhalten hat, die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen.

Unzweifelhaft leuchtet aus der gesammten Arbeit das verdienstliche Streben hervor, den Antheil der deutschen Nation (im weiteren Sinne genommen) an der Entwickelung der Telegraphie ins rechte Licht zu stellen und dabei besonders den Leistungen von Werner Siemens und seiner Firma die gebührende Anerkennung zu verschaffen.

Es ist dies um so mehr anzuerkennen, als in neuerer Zeit wiederholt, zumal von Engländern, auch hier der Versuch gemacht worden ist, Deutschlands Verdienste zu schmälern. Dabei hat jedoch der Verfasser nirgends in ungebührlicher Hervorhebung unseres geistigen Nationaleigenthums den Leistungen anderer Völker die gerechte Anerkennung versagt, sondern überall hat er unparteiisch auf Grund eingehender Quellenstudien, zumal der Patente, zweifelhafte Prioritätsansprüche entschieden.

Wenn diese Arbeit ihrer Bestimmung und ihrem Umfange nach auch nicht als eine erschöpfende und abschliessende Darstellung anzusehen ist, so kann dieselbe doch auch deshalb einen wohlberechtigten Anspruch auf allgemeine Berücksichtigung erheben, weil es zur Zeit überhaupt noch keine zusammenhängende Geschichte der Telegraphie giebt; die früheren Versuche auf diesem Gebiete, welche sich in den historischen Capiteln der grösseren Werke über elektrische Telegraphie finden, sind nicht nur sehr lückenhaft, sondern enthalten zum Theil nicht unwesentliche Irrthümer.

Auf den ersten Seiten behandelt der Verfasser zunächst die Vorversuche, welche sich ungefähr bis zum Jahre 1839 erstrecken. Es werden die ersten Experimente von Simmering, Schilling, Gauss und Weber und die Nadeltelegraphen von Cooke und Wheatstone besprochen. Hierauf wendet sich die Darstellung zu den Zeigertelegraphen und schildert ausführlich den noch heute zumal für Privatleitungen vielfach benutzten Siemens'schen Inductions-Zeigertelegraphen und den Kramer'schen Zeigertelegraphen. Kurz erwähnt werden im Anschluss hieran die mit diesen Systemen verwandten frühesten Versuche zur Herstellung von Typendruck-Telegraphen.

Nur beiläufig erwähnt sind die Copirtelegraphen, da an deren Entwickelung, wenn man von dem Hipp'schen elektromechanischen Apparate absieht, Deutschland keinen wesentlichen Antheil hat. Dies ist vielleicht die einzige fühlbare Lücke des Werkes, da es, wenigstens mir, nicht unwahrscheinlich erscheint, dass man dieses Princip früher oder später doch noch einmal hervorholen und versuchen wird, dasselbe in brauchbareren Formen, als denen von Caselli, d'Arlincourt und Meyer, in die Praxis einzuführen. Die Möglichkeit, auch Zeichnungen, Schriftzüge etc. auf telegraphischem Wege übertragen zu können, besitzt doch jedenfalls so hervorragende Vorzüge, dass man diesen Gedanken so leicht nicht fallen lassen wird.

Hierauf wendet sich der Verfasser zu den elektromechanischen und elektrochemischen Schreibtelegraphen, die ja noch heute die verbreitetste Form sind. Nach Erwähnung der ersten Doppelstift-Apparate von Stöhrer wird man mit dem auf demselben Princip beruhenden Jaite'schen Fernschreiber in der von Gurlt herrührenden Construction bekannt gemacht. Dieser Jaite'sche Apparat soll bekanntlich die Vorzüge des Hughes'schen Typendruck-Telegraphen mit denen des Morse-Apparates vereinen, ohne dabei des so lästigen Synchronismus der Apparate an der Abgangs- und Empfangsstation zu bedürfen. Von den Relais sind ausführlicher das in Wien zum ersten Male ausgestellte Siemens'sche aperiodische Submarine-Relais und das Abkürzungsrelais von Hefner-Alteneck erwähnt.

Unter dem Gesammtnamen „Zeichengeber" sind einige Schlüssel für Morseschrift und besonders die von Siemens & Halske ausgestellten interessanten Dosenschriftgeber von Hefner-Alteneck für Morseschrift und der principiell verwandte Kettenschriftgeber für Steinheilschrift (zwei Punktreihen) beschrieben. An diese schliesst sich der als „Schnelldrucker" bezeichnete Siemens'sche Typendruck-Telegraph, welcher mit ungemein wenig Strömen, im Durchschnitt drei bis vier, die Einstellung des Typenrades bewerkstelligt, darauf das Drucken vornimmt und dann das Typenrad auf den Nullpunkt zurückführt. Es ist dieser neueste Apparat in wesentlichen Dingen dem Hughes'schen Typendrucker überlegen, zumal aber deshalb, weil er des Synchronismus der beiden miteinander arbeitenden Apparate nicht bedarf. Nach Erwähnung einiger Translationsvorrichtungen und der deutschen Methoden für Gegensprechen wird der vierfache Apparat von Meyer vorgeführt und über den Bauer'schen Illimittelegraphen die Mittheilung im officiellen Ausstellungsberichte reproducirt. Beide Apparate sind Vorrichtungen, welche eine intensivere Ausnutzung der Leitung zum Zwecke haben; sie erfordern aber leider Synchronismus der Abgabe- und Empfangsapparate und es fragt sich daher, ob diese Systeme in der Praxis dauernde Anwendung finden werden. Den Schluss des Buches bilden kurze Notizen über Galvanoscope, Wecker, die Siemens'schen Blockapparate, Blitzableiter und Aehnliches.

Entsprechend den grossen Lücken, welche die Ausstellung für Geschichte der Telegraphie einer Nation an sich tragen musste, sind auch in der vorliegenden Arbeit manche Gebiete nur sehr flüchtig berührt, von denen Jeder gewiss gern Ausführlicheres gelesen hätte; besonders die Stellung des epochemachenden Hughes'schen Apparates und die Entwickelung der submarinen Telegraphie mit ihren eigenartigen Schwierigkeiten hätten wir gern etwas eingehender erörtert gesehen.

Der ganzen Entstehung des Buches nach ist dies aber sehr wohl verständlich und ebenso, dass es sich hier vorzugsweise um eine Geschichte der Construction der Manipulationsapparate handelt, während die übrigen Capitel der Telegraphie, welche doch ebenfalls ihre Geschichte haben, nur beiläufig erwähnt sind. — Wir wünschen von dem Verfasser recht bald eine umfassende pragmatische Geschichte der Telegraphie zu erhalten. Dadurch würde gewiss auch ein, in der Natur des behandelten Stoffes liegender Uebelstand solcher Darstellungen weniger auffällig werden, die nothwendigerweise zahlreichen Beschreibungen von Apparaten könnten dann durch andere Auseinandersetzungen unterbrochen werden und würden infolge dessen weniger leicht ermüdend auf den Leser wirken.

Die Darstellung ist an allen Stellen sehr klar und sachgemäss kurz, die äussere Ausstattung des Buches vortrefflich. Ein Theil der Figuren ist dem im gleichen Verlage erschienenen Dub'schen Werke entnommen; einzelne aber sind in vorzüglicher Weise ganz neu hergestellt.

Wir glauben nach dem Angeführten Allen, die sich für die Entwickelung der Telegraphie bis in ihre neuesten Stadien interessiren, das Zetzsche'sche Buch auf das Wärmste empfehlen zu können.

Chemnitz. RICHARD RÜHLMANN.

Die Entwickelung der automatischen Telegraphie, von Dr. KARL EDUARD ZETZSCHE. G. 8°. 65 S. mit 41 in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1875, Julius Springer. Preis 2 Mark.

Dieses Schriftchen kann recht wohl als eine Ergänzung des vorher besprochenen angesehen werden. Die automatische Telegraphie umfasst alle diejenigen Telegraphirvorrichtungen, bei welchen den Telegraphenleitungen die Ströme durch besondere Vorrichtungen selbstthätig zugeführt werden. Bekanntlich sind die Versuche in dieser Richtung nahezu ebenso alt, als die elektrische Telegraphie selbst. Schon Morse goss metallene Typen für Punkte und Zwischenräume, die er unter dem Contacthebel (Taster) seines Apparates auf einer Schiene vorüberführte und auf diese Weise die langen und kurzen Stromschlüsse bewirkte, aus denen sich seine telegraphischen Zeichen zusammensetzten.

Nach ausführlicher Beschreibung dieser ersten Spuren werden die automatischen Telegraphirvorrichtungen von Bain (1846) und die ersten derartigen Apparate von Siemens & Halske (1853) besprochen. Diese Einrichtungen, sowie die von Wheatstone (1858), Allan (1860), Chauvassaigne und Lambrigot (1867) beruhen alle darauf, dass durch einen besondern Vorbereitungsapparat (meist eine Stanzvorrichtung) das Telegramm auf einem Streifen vorbereitet wird. Bei dem Hindurchführen des Streifens durch den Zeichengeber werden die elektrischen Ströme durch die auf dem Streifen befindlichen Zeichen in geeigneter Weise geschlossen und geöffnet und dadurch das Telegraphiren selbstthätig bewirkt.

Da das Vorbereiten der Streifen von mehreren Arbeitern bewirkt werden kann und die Streifen mit grosser Geschwindigkeit mechanisch durch den Apparat geführt werden, so kann mit Hilfe des Automaten die einzelne Linie viel umfassender ausgenutzt werden. Dies ist aber gerade jetzt, wo die Tragstangen bereits mit Drähten überlastet sind und man ernstlich daran denkt, die oberirdischen Leitungen durch kostspieligere unterirdische zu ersetzen, von grosser volkswirthschaftlicher Bedeutung.

Auch der schon im vorher besprochenen Buche erwähnte Jaite'sche Fernschreiber findet hier nochmals Erwähnung.

Siemens & Halske griffen in neuerer Zeit (1868) nochmals zum durchlochten Streifen zurück und erleichterten durch ihren Tastenschriftlocher die Vorbereitung der Streifen ungemein.

Dieser letzterwähnte Apparat mit seiner Claviatur ist wohl als Vorläufer der Tastenapparate anzusehen, durch welche späterhin die Construction des Siemens'schen Kettenschriftgebers und des Dosenschriftgebers für Morseschrift von v. Hefner-Alteneck (1872) veranlasst worden ist.

Als das Vollkommenste auf diesem Gebiete ist endlich wohl der 1873 von Siemens construirte Typendruck-Telegraph anzusehen, der mit dem Namen „Schnelldrucker" bezeichnet wird. Dieser Apparat besitzt den grossen Vorzug, dass der Schnelldrucker und der mit ihm arbeitende Zeichengeber in ihren Bewegungen voneinander unabhängig sind; besonders dadurch ist diese Einrichtung dem sonst sehr leistungsfähigen Hughes'schen Apparate weit überlegen, weil zwei Apparate dieser Art nicht ohne Synchronismus zusammen arbeiten können.

Der grosse Vorzug, den die Automaten vor den Handapparaten haben, ist recht deutlich aus einem Beispiele zu ersehen, welches Zetzsche am Schlusse seines Heftes giebt; wir wollen dasselbe ausführlicher hier abdrucken.

„Bei Eröffnung des letzten amerikanischen Congresses wurde die 11130 Wörter zählende Rede des Präsidenten Grant von der *Western Union Telegraph Company* von Washington nach Newyork auf Morse-Apparaten gesendet, und zwar auf acht Drähten zugleich, wobei am Ende jedes Drahtes ein Beamter arbeitete; zur Beförderung dieser Rede waren dabei 70 Minuten erforderlich, es wurden also im Durchschnitte stündlich 1192 Worte auf einem Drahte befördert. Die *Automatic Telegraph Company* wollte nun ihrerseits ermitteln, in welcher Zeit sie diese Rede auf ihren automatischen Telegraphen hätte befördern können, welche im Versendungsapparate den mittels eines Tastenlochers gelochten Streifen verwenden, auf der Empfangsstation dagegen die farbige Morseschrift elektrochemisch auf einem Papierstreifen entstehen lassen. Vor Zeugen wurde daher dieselbe Rede auf einem einzigen Drahte, welcher die etwa 450 Kilometer voneinander entfernten Städte Washington und Newyork miteinander verband, abtelegraphirt, und zwar wurden zur blossen telegraphischen Beförderung 45,5 Minuten verbraucht, während die Beförderungszeit einschliesslich der zum Niederschreiben erforderlichen Zeit 69 Minuten betrug. Dabei arbeiteten im Ganzen 25 Personen, nämlich in Washington: 1 Morse-Telegraphist und 10 Personen, welche die Streifen lochten; in Newyork aber arbeiteten: ein Morse-Telegraphist und 13 Schreiber, von denen jedoch 2 bis 3 eine Zeit lang unbeschäftigt blieben, so dass man noch einige Minuten hätte gewinnen können."

Aus dem hier kurz Angeführten ist zu ersehen, dass diese Zetzsche'sche „Entwickelung der automatischen Telegraphie" eine sehr passende Ergänzung zu seinem „Kurzen Abriss der Geschichte der elektrischen Telegraphie" bildet. Da alle Vorzüge, welche wir von dem erstbesprochenen Buche gerühmt haben, auch hier zutreffend sind, so empfehlen wir dieses Heftchen ebenfalls angelegentlichst.

Chemnitz. RICHARD RÜHLMANN.

Notice sur la vie et les travaux de **Rodolphe Frédéric Alfred Clebsch**, *par* **M. Paul Mansion**, *Professeur à l'université de Gand. Extrait du Bulletino di Bibliografia etc. Tome VIII, Mars. Rome* **1875.**

Wenn es eines Beweises dafür bedürfte, wie schmerzlich der frühe Tod des Mannes, den die Ueberschrift des Aufsatzes von Prof. Mansion nennt, von den Mathematikern aller Länder betrauert worden ist und noch betrauert wird, so wäre dieser Beweis schon durch die grosse Zahl der Nachrufe zu erbringen, welche dem Verstorbenen gewidmet worden sind. Wohl einer der letzten in ihrer zeitlichen Erscheinungsfolge ist der uns heute als Sonderabdruck aus dem sogenannten *Bulletino Boncompagni* vorliegende. Die Natur der Sache und der geringe Umfang der Abhandlung von 64 Quartseiten bringen es mit sich, dass wir es nur mit einer gewissenhaften Wiederholung des auch in anderen Nekrologen vorhandenen Stoffes in knappester Form zu thun haben. Als unterscheidend und dankenswerth möchten hervorzuheben sein eine Anmerkung über sämmtliche Nachrufe für Clebsch (S. 3 – 5) und ein vollständiges Verzeichniss der Arbeiten von Clebsch (S. 14 bis zum Schlusse), welches, 180 Nummern umfassend, sogar genauer ist, als das im VII. Bande der Mathematischen Annalen, indem es in seinen Nummern 7, 68, 70, 86, 93 und in Nr. 107—177 Arbeiten angiebt, von welchen die ersteren in dem deutschen Verzeichnisse ganz fehlen, während die letzteren in die wenigen Worte zusammengefasst erscheinen: „Einzelne Referate in den Bänden der Fortschritte der Physik, dem 1. und 2. Bande der Fortschritte der Mathematik, in Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen u. s. w. Unterricht."

Cantor.

Die **Sammlung des Pappus von Alexandrien**, von C. J. Gerhardt. Eisleben 1875.

Im Jahre 1871 erschien in Halle bei H. W. Schmidt ein Band von etwa 24 Druckbogen unter dem Titel: „Der Sammlung des Pappus von Alexandrien siebentes und achtes Buch, griechisch und deutsch herausgegeben von C. J. Gerhardt". Es war, mit Ausnahme einiger früher durch Camerer und durch Vincent veröffentlichten Bruchstücke, eine erstmalige Herausgabe des Originaltextes dieser beiden Bücher. Leider trat dieser Text als vollständiges Mädchen aus der Fremde auf, wie man es selbst in unseren passlosen Zeiten auf wissenschaftlichem Gebiete nicht liebt. Keine Vorrede gab Kunde, woher der Text entstamme, gab Rechenschaft über dessen Zuverlässigkeit, meldete von etwaigen Vergleichungen verschiedener Codices, wenn nicht die ganz gelegentliche Erwähnung zweier Pariser und einer Mailänder Handschrift in zwei Anmerkungen eine solche Vorrede ersetzen sollten. Endlich fand sich nirgends eine Rechtfertigung dafür, warum gerade diese beiden Bücher, das siebente und achte, zur Herausgabe bestimmt worden waren, warum die übrigen Bücher einer gleichen Behandlung nicht unterzogen wurden. Herr Gerhardt mag wohl selbst das Gefühl empfangen haben, dass die hier gerügten Mängel, welche auch gleich beim Erscheinen seines Bandes hier und da von der Kritik namhaft gemacht worden waren, in der That der Abhilfe bedurften, und das uns vorliegende Programm von 15 Quartseiten dürfte jenem Gefühle seinen Ursprung verdanken. Herr Gerhardt sagt es zwar nicht ausdrücklich, aber uns und mit uns wohl den meisten Lesern erscheint die neue Veröffentlichung als die vor vier Jahren vergessene Vorrede, wenn auch die Ausführlichkeit und Deutlichkeit, deren andere Schriftsteller auf verwandten Gebieten sich befleissigen, heute nicht minder als damals vermisst wird. So sagt uns Herr Gerhardt, dass seine Textausgabe des 7. und 8. Buches sich wesentlich auf einen Wolfenbüttler Codex gründe, aber er sagt uns nicht, dass dieser Codex in der reichen Handschriftensammlung der Wolfenbüttler Bibliothek die Signatur 7 *Gud. gr. fol.* trägt, dass er von Kundigen dem XV. Jahrhundert zugewiesen wird. Der Verfasser giebt uns zu verstehen, dass er auch zweier Pariser Handschriften und einer in der Berliner Bibliothek befindlichen Abschrift eines Codex sich bediente, aber wieder vermissen wir jegliche nähere Bezeichnung und Beschreibung, bleiben wir durchaus im Unklaren, ob jene Berliner Abschrift etwa von dem Mailänder *Codex Ambrosianus* 266 herrührt, der auf S. 300 der Ausgabe von 1871 genannt ist. Nur darüber ist es jetzt möglich klar zu sehen, weshalb Hr. Gerhardt sich damals auf die Herausgabe des 7. und 8. Buches beschränkte. Er vermuthet nämlich (S. 5), „dass die Sammlung des Pappus ursprünglich nur aus drei Büchern bestand, aus dem gegenwärtig dritten, vierten (welche ein Ganzes bildeten) und dem siebenten und achten, und dass alles Uebrige damit in Verbindung gebracht ist.“ Wahrscheinlich hielt er es doch für ein zu kühnes Wagniss, diese den Text um ein starkes Drittheil verkürzende Annahme zur Grundlage einer Ausgabe des Pappus zu machen, während er Unrechtes nicht einmengen wollte, und so veröffentlichte er nur die beiden Bücher, welche unmittelbar zusammenhängen und deren Verfasser auch nach seiner Meinung unzweifelhaft Pappus von Alexandrien war.

Ein französischer Schriftsteller Montaigne hat einmal gesagt: „*Il n'y a pas d'opinion aussi ridicule, qu'il ne se soit trouvé un philosophe pour la soutenir.*“ Den Vorwurf der Lächerlichkeit verwahren wir uns bei ernsten Bemühungen redlichen Forschens uns aneignen zu wollen, aber dass keine Ansicht so absonderlich ist, dass sie nicht von irgend einem Gelehrten ausgesprochen worden wäre, das können wir Montaigne wirklich nachsagen. Was an Rettung verlorener Charaktere, an Vernichtung erhaltener Schriften versucht worden ist und theilweise noch versucht wird, das geht ins Unglaubliche, und die Meinungsäusserung, über welche wir an dieser Stelle berichten, nimmt für uns wenigstens die Bezeichnung der Unglaublichkeit im vollsten Masse in Anspruch. Sehen wir zu, was Herr Gerhardt mit den einzelnen Büchern anfängt.

„Von den beiden ersten Büchern ist nur ein Bruchstück, das Ende des zweiten Buches, aufgefunden worden. Es ist darin von Arithmetik die Rede, und man hat daraus geschlossen, dass die beiden ersten Bücher überhaupt arithmetischen Inhalts waren. Dieses Bruchstück enthält Vorschriften, wie die Multiplication von Zahlen, die Vielfache und Potenzen von 10 sind, auf eine kürzere Weise dadurch bewirkt werden kann, dass man sie auf die Multiplication der entsprechenden Einheiten zurückführt, und als Anwendung davon wird gezeigt, dass, wenn man die Buchstaben der Wörter eines Hexameters in ihrer Zahlbedeutung nimmt und nach diesen Regeln miteinander multiplicirt, dasselbe Product sich ergiebt, als wenn man sie in ihrer Reihenfolge auf gewöhnliche Weise multiplicirt. Es wird dabei auf eine Schrift des Apollonius, wahrscheinlich des grossen Geometers, verwiesen, die nicht mehr vorhanden ist und von der man auch sonst keine Kenntniss hat, worin derselbe die hier mitgetheilten Sätze geometrisch, mit Hilfe von geraden Linien, wie die griechischen Mathematiker die Arithmetik zu behandeln pflegten, dargethan hatte. Diese Beweise werden hier nicht wiederholt, zuweilen nur angedeutet: grösstentheils werden die Sätze durch bestimmte Zahlenbeispiele erläutert. Demnach scheint das in diesem Bruchstück Mitgetheilte mehr eine praktische Tendenz zu haben, und wenn man daraus einen Schluss auf den Inhalt der beiden ersten Bücher überhaupt zu machen berechtigt ist, so dürften diese beiden ersten Bücher mit dem sonstigen Streben des Pappus in keiner Harmonie stehen und ihm abzusprechen sein.“ An einer spätern Stelle fügt der Verfasser hinzu, es sei „nicht unwahrscheinlich, dass die beiden ersten Bücher die Arithmetik Theon's von Alexandrien enthielten, von dem berichtet wird, dass er ein solches Werk geschrieben hatte“.

Referent ist nun der Ansicht, dass jeder Schluss auf den Inhalt der beiden ersten Bücher aus dem vorhandenen Fragmente durchaus übereilt wäre. Die Sammlung des Pappus — mag man sogar nur soviel davon für echt halten, wie Herr Gerhardt es thut — ist so vollständig usammenhangslos von Buch zu Buch, dass, wenn ein Rückschluss aus dem 'ragmente über das Multiplicationsverfahren des Apollonius überhaupt estattet ist, derselbe sich nicht weiter zu erstrecken hat, als über das veite Buch.* Damit ist zugleich der logistische, also keineswegs arithetische Charakter dieses Buches gewonnen, ist gewonnen die Unmög-

* Man denke sich z. B. das 7. Buch des Pappus verloren, den Schluss des Buches erhalten. Lässt dasselbe einen Rückschluss auf jenes zu? Gewiss nicht.

lichkeit, es mit der Arithmetik des Theon zu identificiren, welche uns nur von Suidas, so weit unsere Erinnerung reicht, erwähnt wird, wo er von Theon uns sagt: ἔγραψε Μαθηματικά, Ἀριθμητικά, ... καὶ Εἰς τὸν μικρὸν Ἀστρόλαβον [muthmasslich verschrieben statt Ἀστρόνομον] ὑπόμνημα. Wohl hat Theon über Rechenkunst sich verbreitet, aber er that dies bekanntlich in seinem Commentar zum Almagest, aus welchem Nesselmann (Algebra der Griechen S. 139 flgg.) einen Auszug veröffentlicht hat; in der Arithmetik war dafür kein Platz. Aber wir wissen auch ausdrücklich, dass Pappus über Rechenkunst in Anlehnung an den Almagest geschrieben hat, dass also der Gegenstand ihm Nichts weniger als fern lag. Suidas nennt uns von ihm: Εἰς τὰ τέσσαρα βιβλία τῆς Πτολεμαίου μεγάλης Συντάξεως ὑπόμνημα, und Eutokius von Askalon weiss, dass in diesem Commentar die Ausziehung der Quadratwurzeln gelehrt worden ist. (Vergl. die Schrift des Referenten „Die römischen Agrimensoren“ S. 56.) Wenn also eine Zusammengehörigkeit mit der übrigen Sammlung des Pappus geleugnet werden wollte, wozu wir uns allerdings nicht verstehen möchten, so braucht keineswegs nach einem andern Verfasser gefahndet zu werden, so könnte hier ein Stück aus einem andern Werke des Pappus erhalten sein. Aber wie bemerkt, uns können die praktischen Zahlenbeispiele in einem Bruchstücke des zweiten Buches nicht die Nöthigung auferlegen, jenes Buch aus der Sammlung zu entfernen, in deren 3. Buche gleichfalls praktische Zahlenbeispiele der verschiedenen Medietäten vorkommen, wie sie in reicher Auswahl den griechischen Mathematikern dienten.

Nun meint freilich Herr Gerhardt weiter: „Nach unserem Dafürhalten war das gegenwärtige dritte Buch das erste der Sammlung des Pappus, dafür spricht auch die Fassung der Einleitung desselben. Es bildete ursprünglich mit dem vierten ein Ganzes; der Codex, von dem in der Berliner Bibliothek eine Abschrift vorhanden ist, giebt beide Bücher im Zusammenhang, ohne das Ende des dritten oder den Anfang des vierten zu bemerken. Scheidet man aus dem dritten die Sätze 43 bis 58 (nach der Uebersetzung Commandin's) als einen spätern Zusatz aus, so wird der Inhalt beider Bücher homogen.“

Wir möchten auf den Inhalt der Bücher hier nicht eingehen, weil wir uns eine Schilderung desselben für die Anzeige des inzwischen in unsere Hände gelangten 1. Bandes der Pappus-Ausgabe von Hultsch aufsparen, welche wir im nächsten Hefte zu bringen gedenken. Wir haben nur dem Zusammenhang des 3. und 4. Buches in der Berliner Abschrift entgegenzuhalten, dass die Lehrsätze in jenen beiden Büchern doch wohl nicht durchgezählt sein dürften, dass vielmehr, wie anderwärts, so auch in dieser Abschrift, im 4. Buche wieder eine neue Zählung mit Satz 1 beginnen wird. Was aber die Fassung der Einleitung in das 3. Buch angeht, so ist sie um kein Haar anders, als die Einleitungen in das 5., in das 6., in das 7. und in das 8. Buch. Man ist somit berechtigt, mit Hultsch an eine verlorene Einleitung zum 4. Buche zu denken, nicht aber aus dem Vorhandensein einer solchen zum 3. Buche so weitgehende Folgerungen zu ziehen.

Freilich soll nun das 5. und 6. Buch gar nicht von Pappus herrühren. Das 5. Buch gehört ihm nicht an, weil in der Mitte desselben eine Stelle vorkommt, in welcher der synthetische Nachweis von Sätzen versprochen wird, welche bereits von den Alten analytisch behandelt worden seien, und zwar ein verständlicherer (σαφέστερον) und kürzerer (συντομώτερον). Der Verfasser meint: „So schrieb Pappus nicht, im Gegentheil, er liebte die analytische Methode der Alten.“ Muss er deshalb auch eine bestimmte Anwendung derselben geliebt haben, welche irgend ein Schriftsteller vor ihm machte? Ist es unmöglich, dass Pappus jedem Beweisverfahren huldigte, welches für den gegebenen Fall Strenge mit Eleganz vereinigte, jedes Beweisverfahren ablehnte, welches dieser Eigenschaften entbehrte?

Und nun gar der Grund, weshalb das 6. Buch aus der Sammlung des Pappus auszuscheiden habe! Die Ueberschrift lautet nämlich ungefähr, in diesem 6. Buche der Sammlung des Pappus seien Lösungen der Schwierigkeiten des kleinen Astronomen enthalten. Zu diesem, d. h. zu den Schriften, die als Einführung in die Astronomie dienten und deren Verfasser Theodosius, Euklides, Autolykus, Aristarchus, Hypsikles, Menelaus waren, bildete das 6. Buch einen Commentar. „Ein solcher wird aber dem Theon von Alexandrien zugeschrieben.“ Wir haben oben die Stelle des Suidas angeführt, in welcher dieses geschieht. Aber kann darin genügender Anhalt geboten sein, um fünf Zeilen weiter unten ohne jeden verstärkenden Grund den Satz auszusprechen: „Das 6. Buch ist der verloren geglaubte Commentar Theon's zum μικρὸς ἀστρόνομος.“ Oder sollte das Verwerfen des 5. und 6. Buches gemeinschaftlich über jeden Zweifel durch die Bemerkung erhoben werden: „Das 7. Buch zeigt den Charakter des dritten; es verbreitet sich über den Inhalt der Schriften, die, um die analytische Methode der Geometer der klassischen Zeit kennen zu lernen, zu lesen sind. Ebenso ist es mit dem Inhalt des 8. Buches, das die Mechanik betrifft.“ Wo in aller Welt ist denn als Charakter des 3. Buches das angegeben, was Herr Gerhardt hier hineinlegt? Giebt es, wenn ein Zusammenhang denn doch gesucht werden soll, nicht einen weit naturgemässeren zwischen dem verworfenen 6. und dem 7. Buche? Beginnt doch in der Uebersetzung des Commandinus jenes mit den Worten: *Multi eorum, qui astronomicum locum pertractant, cum propositiones negligenter intelligant, alia quidem apponunt tamquam necessaria: alia vero ut non necessaria praetermittunt*, dieses sodann mit der Erklärung: *Locus, qui vocatur ἀναλυόμενος, hoc est resolutus, o Hermodore fili, ut summatim dicam propria quaedam est materia post communium elemen-*

torum constitutionem, iis parata, qui in geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quae ipsis proponuntur: atque huius tantummodo utilitatis gratia inventa est, und hierin ist ein gewisser Parallelismus der Form wohl erkennbar.

Wir können demnach der Hypothese des Verfassers keinen andern Werth beilegen, als den der Neuheit, da in der That allen bisherigen Untersuchungen über Pappus und sämmtlichen Handschriften die Voraussetzung zu Grunde lag, seine Sammlungen hätten sich in acht Bücher vertheilt. Wir geben gern zu, dass in einem Sammelwerke leichter als in einem einheitlichen Ganzen Lücken entstehen, Einschaltungen vorkommen können. Auch bei der Sammlung des Pappus dürfte es an Beidem nicht fehlen. Aber immerhin, glauben wir, darf man nicht das Kind mit dem Bade ausschütten, darf man nicht ohne jegliche äussere Bestätigung, vielmehr der Ueberlieferung geradezu ins Antlitz schlagend, Dinge, welche seit Jahrhunderten einem Verfasser zugeschrieben sind, demselben plötzlich rauben wollen. Man darf vor Allem nicht das umgekehrte Verfahren jenes Redacteurs einschlagen, über welchen Schmock in den Journalisten sich beklagt, er habe nur die Brillanten stehen lassen. Man darf um einer subjectiven Meinung willen nicht gerade die Brillanten wegstreichen.

Wir haben soweit allerdings nur über die erste Hälfte des Eislebner Programms von 1875 uns verbreitet. Die zweite Hälfte besteht aus dem griechischen Texte und der deutschen Uebersetzung eines Abschnittes aus dem 4. Buche, des Abschnittes von der Quadratrix, in welchem — und hier stimmen wir mit Herrn Gerhardt überein — Pappus sich als Mathematiker auf der ganzen Höhe seiner Wissenschaft zeigt.

Cantor.

Anleitung zu Vermessungen in Feld und Wald, insbesondere für das Bedürfniss von Forst- und Landwirthen bearbeitet von Dr. C. Bohn, Professor an der königl. bayr. Central-Forstlehranstalt zu Aschaffenburg. Berlin 1876, Verlag von Wiegandt, Hempel & Parey. XII. 320, mit 179 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Inhalt und Leserkreis, das sind die beiden Componenten, als deren diagonales Ergebniss ein Lehrbuch den beurtheilenden Blicken sich bietet, und welche niemals ausser Augen gelassen sein wollen, wenn die Kritik sich mit dem an die Oeffentlichkeit gelangten Werke beschäftigt. Es ist darum kein unbilliges Verlangen, welches der Verfasser des uns vorliegenden Buches stellt, wenn er in den Schlussworten seiner Vorrede dem Wunsche: „Möge das Buch sich nützlich erweisen und Freunde erwerben in dem Kreise, für welchen es vorzugsweise geschrieben ist" die mahnende Bitte hinzufügt: „und möge der Fachmann bei etwaiger Beurtheilung berücksichtigen, zu welchem Zwecke es verfasst wurde." Wir glauben dieser Bitte am Gerechtesten zu werden, wenn wir gleichfalls der Vorrede entnehmen, welcher Kreis es ist, zu dem der Verfasser zu reden wünscht: „Als Leser sind zunächst Forst- und Landwirthe gedacht, welche Feldvermessungen zu ihren Zwecken bedürfen. Aber auch für andere Berufskreise, namentlich für den militärischen, soll das Buch sich brauchbar erweisen und noch als erstes Lehrbuch der Vermessung für den künftigen Ingenieur dienen können."

Legen wir uns nun die Frage vor, welche Anforderungen wir an ein Werkchen von der so bestimmten Natur stellen dürfen, so scheinen uns dieselben wesentlich dreifacher Natur zu sein. Wir wollen nicht zu wenig geboten, wir wollen auch nicht zu viel, wir wollen das Gebotene fasslich dargestellt. In allen drei Beziehungen hat uns wenigstens das vom Verfasser innegehaltene Mass, wie die gewählte Form durchweg befriedigt. Von den einfachsten Aufgaben an, lösbar mit den einfachsten Vorrichtungen, steigern sich bis zum Schlusse des Buches Forderungen und Leistungen, ohne jemals mehr mathematischen Apparat, als die niedrigsten Theile der Trigonometrie und der Algebra vorauszusetzen, aber auch ohne in Ungründlichkeit zu verfallen. Wo Feinheiten des Calculs nicht vorgetragen werden können, ist wenigstens deren Resultat nicht verschwiegen, und der Leser darf demselben, soweit wir das Buch zu prüfen im Stande waren, Vertrauen schenken. In der Form sagt unserem Geschmacke ganz besonders zu, dass der Verfasser die irgend nöthigen geometrischen oder physikalischen Vorkenntnisse nicht etwa, wie man es häufig findet, als Gesammteinleitung vorangestellt hat, sondern dass sie von Fall zu Fall erörtert werden, wo sie gerade erstmalig zur Anwendung gelangen. Was das Buch dadurch an Symmetrie einbüsst, gewinnt es reichlich an didaktischer Brauchbarkeit. In ähnlicher Weise behagen uns die vielfach eingestreuten, in aller Ausführlichkeit behandelten Zahlenbeispiele, an welchen der Schüler sich bis zu einem gewissen Grade die keineswegs gleichgiltige äussere Anordnung solcher Rechnungen aneignen kann. Wir glauben demnach dem kleinen Lehrbuche eine günstige Aufnahme in den betreffenden Kreisen wünschen und, soweit unser Urtheil dringen mag, nach Kräften fördern zu dürfen.

Cantor.

Notiz.

Durch genaue Information haben wir die Gewissheit erlangt, dass die im 1. Hefte dieses Jahrganges (hist.-lit. Abtheilung S. 14) gerügte Incorrectheit, „*morto in Armuth*", nicht Herrn Prof. Favaro zur Last gelegt werden kann, sondern erst bei einem nachträglichen Zusatz, welchen der Verfasser zu controliren nicht mehr in der Lage war, sich eingeschlichen hat.

Dr. S. Günther.

Bibliographie

vom 1. December 1875 bis 31. Januar 1876.

Periodische Schriften.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg. 7. série, tome 22, *No.* 5, 6 *et* 7; *tome* 23, *Nr.* 1. Leipzig, Voss. 19 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques de l'acad. de St. Petersbourg. Tome V, livr. 2. Ebendas. 1 Mk. 40 Pf.

Mélanges physiques et chimiques de l'acad. de St. Petersbourg. Tome IX, livr. 3. Ebendas. 1 Mk. 70 Pf.

Bibliotheca historico naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. A. Metzger. 25. Jahrg., 1. Heft, Januar — Juni 1875. Göttingen, Vandenboeck & Ruprecht. 1 Mk.

Astronomisch-geodätische Arbeiten des k. k. militär.-geogr. Instituts. 2. u. 3. Bd. Wien, Gerold. 10 Mk.

Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1878, herausgeg. von C. Bremiker. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Repertorium für Meteorologie, redig. von H. Wild. 4. Bd., 2. Heft. Leipzig, Voss. 7 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von V. Hoffmann. Jahrg. VII, Heft 1. Leipzig, Teubner. pro compl. 10 Mk. 80 Pf.

Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie, herausgeg. von C. Jelinek und C. Hann. 11. Bd., Nr. 1. Wien, Braumüller. pro compl. 10 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von C. Poggendorff. Ergänzungsbd. 7, Stück 3. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Tageblatt der 48. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte (Herbst 1875 in Graz). Graz, Leuschner & Lubensky. 5 Mk. 60 Pf.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 20. Bd. v. J. 1875. Göttingen, Dieterich. 22 Mk.

Reine Mathematik.

ENNEPER, A., Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte. Halle, Nebert. 16 Mk.

TREUTLEIN, P., Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten über dieselbe. Carlsruhe, Müller & Gräff. 1 Mk. 60 Pf.

KLINGENFELD, F. A., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 3. Band. Nürnberg, Korn. 3 Mk.

STREISSLER, J., Elemente der darstellenden Geometrie. Brünn, Winiker. 4 Mk.

Faa di Bruno, Théorie des formes binaires. Turin u. Leipzig, Brockhaus. 15 Mk.

SCHOTTKY, F., Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen. Breslau, Köbner. 1 Mk. 20 Pf.

BOLTZMANN, L., Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

SOHNCKE, L., Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 60 Pf.

PETRICK, L., Multiplicationstabellen, geprüft m. d. Thomas'schen Rechenmaschine. 1. Lief.: 1—1000. Berlin, Nauck. 3 Mk.

Angewandte Mathematik.

BERGER, E., Ueber den Einfluss der Erdrotation auf den freien Fall der Körper und die Flugbahnen der Projectile. Coburg, Karlowa. 80 Pf.

MILLER-HAUENFELS, A. v., Die Gesetze der Kometen, abgeleitet aus dem Gravitationsgesetze. Graz, Leuschner & Lubensky. 3 Mk. 50 Pf.

RÜHLMANN, R., Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. 2. Lief. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

CARPENTER & NASMYTH, Der Mond, betrachtet als Planet, Welt und Trabant. Leipzig, Voss. 22 Mk.

WEISBACH's Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Thl. 1. Abth., 1. u. 2. Lief. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Physik und Meteorologie.

BEETZ, W., Leitfaden der Physik. 5. Aufl. Berlin, Nauck'sche Buchhandlung. 3 Mk.

KNOBLAUCH, Ueber die Reflexion der Wärmestrahlen von geneigten diathermanen Platten. Halle, Schmidt. 60 Pf.

LOMMEL, E., Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes. 2. Mitthlg. Erlangen, Besold. 30 Pf.

GROTH, P., Physikalische Krystallographie. Leipzig, Engelmann. 16 Mk.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 4. Bd., 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

Klinkerfues, W., Theorie des Bifilarhygrometers mit gleichtheiliger Procentscala. Göttingen, Peppmüller. 60 Pf.

Tyndall, J., Das Licht. Sechs Vorlesungen, herausgeg. von G. Wiedemann. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

Boltzmann, L., Bemerkungen über die Wärmeleitung in Gasen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Odstrcil, J., Einige Versuche über magnetische Wirkungen rotirender körperlicher Leiter. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Boltzmann, L., Ueber das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1875.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Ueber rationale ebene Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind. Emil Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 286.
2. Quelques théorèmes de géométrie suivis d'une étude géométrique des propriétés de la strophoide. Maleyx. N. ann. math. XXXIII, 404, 468.
3. Sur l'enveloppe d'un système de courbes planes. Laisant. N. ann. math. XXXIII, 571.
4. Sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante entre deux lignes rectangulaires. Bourget. N. ann. math. XXXIII, 446. — Haton de la Goupillière ibid. 534.
5. Déterminer une courbe plane d'après une équation donnée entre l'arc et l'ordonnée du centre de gravité de l'arc. Tourrettes. N. ann. math. XXXIII, 99.

Analytische Geometrie des Raumes.

6. De la détermination, sous forme intégrable, des équations des courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque. Molins. Journ. mathém. XXXIX, 425.
7. Sur les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique quelconque. Crosnier. N. ann. math. XXXIII, 417.
8. Distance d'un point à une droite. Lannoy. N. ann. math. XXXIII, 240.
9. Sur un théorème relatif à la théorie des enveloppes. Laurent. N. ann. math. XXXIII, 273.
10. Sur le tore et la sphère bitangente. Monniot. N. ann. math. XXXIII, 383.
11. Lieu du point de contact d'une sphère de rayon constant et restant tangente à une droite donnée avec un cylindre de révolution. Fouret. N. ann. math. XXXIII, 202.
12. Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions. C Jordan. Compt. rend. LXXIX, 795.
13. Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces dans l'espace à $m+k$ dimensions. C. Jordan. Compt rend. LXXIX, 909.

Vergl. Cubatur.

Astronomie.

14. A method of computing absolute perturbations. G. W. Hill. Astr. Nachr. LXXXIII, 201.
15. Mémoire sur les inégalités séculaires des grands axes des orbites des planètes. E. Mathieu. Compt. rend. LXXIX, 1045.
16. Sur la théorie analytique des satellites de Jupiter. Souillart. Compt. rend. LXXIX, 943.
17. Ueber die Berechnung der Bahnen heller an vielen Orten beobachteter Meteore. Galle. Astr. Nachr LXXXIII, 321
18. Ueber die Abhängigkeit der täglichen Variation des Barometerstandes von der Rotation der Sonne. Hornstein. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 385.

Attraction.

19. Sur l'attraction proportionelle à la distance. Chevilliet. N. ann. math. XXXIII, 97.

B.

Ballistik.

20. Sur deux propriétés de la courbe balistique, quel que soit l'exposant de la puissance de la vitesse à laquelle est proportionelle la résistance du milieu. Resal. Compt rend. LXXIX, 1217.
21. Recherches sur les effets de la poudre dans les armes à feu. Sarrau. Compt. rend. LXXIX, 504.
22. Rapport sur le mémoire de M. Sarrau. Resal. Compt. rend. LXXIX, 1472.

Bernoulli'sche Function.

23. Sur la fonction de Jacob Bernoulli. Hermite. Crelle LXXIX, 339.

Bestimmte Integrale.

24. Exemple de paralogisme dans le calcul des intégrales définies. Realis. N. ann. math. XXXIII, 546.
25. Sur l'intégrale $\int_0^\pi dx.\varphi\left(\frac{\sin x^2}{1+2a.\cos x+a^2}\right)$. Liouville. Journ. mathém. XXXIX, 55.
26. Sur l'intégrale $\int_0^a x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx$. Moreau. N. ann. math. XXXIII, 106.
27. Ueber einige bestimmte Integrale. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 202.
28. Réduction d'une intégrale définie. Besge. Journ. mathém. XXXIX, 423.
29. Valeur et interpretation géométrique d'une intégrale double. Moreau. N. ann. math. XXXIII, 154.

Vergl. Functionen 66, 67. Kettenbrüche. Quadratur 188.

Binomischer Lehrsatz.

30. Démonstration de la formule du binôme au moyen de la différentiation. Catalan. N. ann. math. XXXIII, 59.

Brennpunkte.

Vergl. Kegelschnitte 108, 109, 110. Oberflächen zweiter Ordnung 164.

C.

Cartographie.

31. Ueber conforme Projection. Veltmann. Astr. Nachr. LXXXIII, 225. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 157.]

Combinatorik.

32. Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux, quand deux lettres consécutives sont toujours distinctes. Vachette. N. ann. math. XXXIII, 549.
33. Combinaisons complètes. Niewenglowski. N. ann. math. XXXIII, 285.

Cubatur.

34. Volumes de révolution. Dubost. N. ann. math. XXXIII, 250.

D.

Determinanten.

Vergl. Gleichungen 100. Quadratische Formen 183.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

35. Anwendung der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maasses. Frobenius. Crelle LXXIX, 185.
36. Tétraèdre dont les six arètes sont tangentes à une même sphère. Dostor. N. ann. math. XXXII, 563.
37. Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind. Reye. Crelle LXXIX, 159.
38 Étude d'un système de rayons. Painvin. Journ. mathém. XXXIX, 57.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 163, 164. Quadratur 191. Sphärik 200, 203.

Differentialgleichungen.

39. Sur la première méthode donnée par Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Darboux. Compt. rend. LXXIX, 1488.
40. Integration der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 143.
41. Sur quelques équations différentielles linéaires. Hermite. Crelle LXXIX, 324.
42. Cas particulier d'intégration de l'équation $f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0$. Harkema. N. ann. math. XXXIII, 545.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 6. Mechanik 135, 138. Oberflächen 155.

E.

Elasticität.

43. Sur les lois du mouvement vibratoire des diapasons. Mercadier. Compt. rend. LXXIX, 1001, 1069.

Elektrodynamik.

44. Théorème de l'électrodynamique, affranchie de toute hypothèse relative à l'action mutuelle de deux éléments de courants. L. Cordier. Compt. rend. LXXIX, 984.
45. Sur un nouveau mémoire de M. Helmholtz. Bertrand. Compt. rend. LXXIX, 337. [Vergl. Bd. XX, Nr. 398.]
46. Sur l'action de deux éléments de courant. Bertrand. Compt. rend. LXXIX, 141.
47. Fortgesetzte Bemerkungen über astatische Magnete. Du Bois-Reymond. Berl. Akad.-Ber. 1874, 767.
48. Zur Theorie der Legung und Untersuchung submariner Telegraphenleitungen. Siemens. Berl. Akad.-Ber. 1874, 795.
49 Ueber ein allgemeines Theorem zur Berechnung der Wirkung magnetisirender Spiralen. v. Waltenhofen. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 417.
50. Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Moutier. N. ann. math. XXXIII, 51, 65.
51. Ueber constante elektrische Strömung. Heine. Berl. Akad.-Ber. 1874, 186.
52. Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten. Heine. Crelle LXXIX, 1.

Ellipse.

53. Construction der einem Kreise eingeschriebenen Ellipse, von welcher der Mittelpunkt und eine Tangente gegeben sind. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXVIII, 377.
54. Sur la conique qui passe par un point donné dans le plan d'une ellipse et par les pieds des quatre normales à l'ellipse menées par ce point. Brisse. N. ann. math. XXXIII, 88.
55. Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur. Doucet. N. ann. math. XXXIII, 334. — Lemoine ibid. 533. [Vergl. Bd. XX, Nr. 98.]
56. Sur deux ellipses de même centre ayant une aire égale. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIII, 201. — Bourget ibid. 293.

Vergl. Normalen 150. Parabel 177.

Ellipsoid.

7. Lieu de l'arête d'un dièdre qui doit rencontrer deux droites fixes pendant que les faces du dièdre restent tangentes à un ellipsoïde donné. Genty. N. ann. math. XXXIII, 109.

Elliptische Transcendenten.

3. Sur la méthode d'intégration de Mr. Tchebichef. Zolotareff. Journ. math. XXXIX, 161.
9. Ueber Curven, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Gattung ist. Kiepert. Crelle LXXIX, 304.
. Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. Brioschi. Compt. rend. LXXIX, 1065.
. Sur quelques applications au courbes du second degré du théorème d'Abel relatif aux fonctions elliptiques. Léauté. Compt. rend. LXXIX, 93, 602.

Exponentialgrösse.

62. Remarques sur la théorie des exponentielles. Laurent. N. ann. math. XXXIII, 5.
63. Ueber einige Grenzwerthe. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 355.
64. $\frac{e}{2m+2} < e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{2m+1}$. Moreau. N. ann. math. XXXIII, 61.
   Vergl. Integration (unbestimmte) 105.

F.

Functionen.

65. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. P. du Bois-Reymond. Crelle LXXIX, 21.
66. Allgemeine Lehrsätze über den Giltigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen. P. du Bois-Reymond. Crelle LXXIX, 38.
67. Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen. P. du Bois-Reymond. Crelle LXXIX, 259.
68. Ueber eine gewisse algebraische Function und deren Anwendung. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 363.
69. $a^{2m+3} < \frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m} < (a+1)^{2m+3}$ pour des valeurs entières et positives de a et de m. Moreau. N. ann math. XXXIII, 155.
70. Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro. Tchebichef. Journ. mathém. XXXIX, 319.
   Vergl. Bernoulli'sche Function. Binomischer Lehrsatz. Elliptische Transcendenten. Exponentialgrössen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Mittelwerthe. Quadratische Formen. Reihen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Geodäsie.

71. Ueber den sphäroidischen Schlussfehler geometrischer Nivellementspolygone. Zachariae. Astr. Nachr. LXXXII, 73. — Oudemans ibid. LXXXIII, 21. [Vergl. Bd. XX, Nr. 412.]
72. Ueber den Einfluss localer Lothablenkungen auf das Nivellement. Baeyer Astr. Nachr. LXXXIV, 1.
73. Ueber die Ablenkung des Loths in der Höhe und den dadurch herbeigeführten Fehler geometrischer Nivellements. Haupt. Astr. Nachr. LXXXIV, 49.
74. Ueber gewisse Fehlerquellen, welche die elektrischen Operationen bei telegraphischen Längenbestimmungen beeinflussen können. Seeliger. Astr. Nachr. LXXXII, 221, 305. — Albrecht ebenda 257.

Geometrie (descriptive).

75. Sur l'enseignement des arts graphiques. De la Gournerie. Journ. math. XXXIX, 113.

Geometrie (höhere).

76. Exposition de la méthode des équipollences. Bellavitis. N. ann. math. XXXIII, 58, 138, 189, 220, 257. [Vergl. Bd. XX, Nr. 121.]
77. Théorème sur le quadrilatère démontré par la méthode des équipollences. Niewenglowski. N. ann. math. XXXIII, 537.
78. Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumcurven. Sturm. Crelle LXXIX, 99.
79. Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable. Brisse. Journ. mathém. XXXIX, 221. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 71.]
80. Sur les séries de triangles semblables. Chasles. Compt. rend. LXXIX, 877, 1427. [Vergl. Bd. XX, Nr. 420.]
81. Ueber eine reciproke Verwandtschaft des zweiten Grades. Milinowski. Crelle LXXIX, 140.
   Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 37. Oberflächen 154, 156.

Geschichte der Mathematik.

82. Sur une nouvelle edition à desirer des Veteres Mathematici. Chasles. Compt. rend. LXXIX, 1147.
83. Zur Geschichte des Arbeitbegriffes. Mach. Wien. Akad.-Ber. LXVIII, 479.

84. L'énoncé du principe de la théorie du timbre est dû à Monge. Resal. Compt. rend. LXXIX, 821.
85. J. V. Poncelet et deux de ses ouvrages. De Comberousse. N. ann. math. XXXIII, 174.
86. Otto Hesse. Borchardt. Crelle LXXIX, 345.
87. Todesanzeige von Director J. B. Donati in Florenz. Parlatore. Astr. Nachr. LXXXII, 257.
88. Todesanzeige von Prof. G. Schweizer in Moskau, † 6. Juli 1873. Astr. Nachr. LXXXII, 97.
89. Todesanzeige von Prof. T. Chevallier in Durham, † 4. November 1873. Plummer. Astr. Nachr. LXXXII, 369.
90. Todesanzeige von Director Hansen in Gotha, † 28. März 1874. Peters. Astr. Nachr. LXXXIII, 225.

Gleichungen.

91. Reflexions sur l'évenement scientifique d'une formule publiée par Wronski en 1812, et démontrée par M. Cayley en 1873. A. Transon. N. ann. math. XXXIII, 161. [Vergl. Bd. XX, Nr. 142.]
92. Sur la somme des puissances positives des racines d'une équation. Niewenglowski. N. ann. math. XXXIII, 537.
93. Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir, par approximations successives, les racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles. Laguerre. Compt. rend. LXXIX, 522, 996.
94. Séparations des racines des équations à une inconnue. Maleyx. N. ann. math. XXXIII, 385. [Vergl. Bd. XVIII, Nr. 247.]
95. Beweis eines Satzes über das Vorkommen complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. Kolbe. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 188.
96. Du cas où l'on peut résoudre l'équation du second degré par approximations successives. De Saint-Germain. N. ann. math. XXXIII, 401.
97. Résolution de l'équation du troisième degré à l'aide d'un système articulé. Saint-Loup. Compt. rend. LXXIX, 1323.
98. Sur l'équation $\frac{9.\sin x}{5+4.\cos x}=x$. Brocard. N. ann. math. XXXIII, 238.
99. Ueber die Jacobi'sche Auflösung eines Systems von Normalgleichungen mit drei Unbekannten. Seeliger. Astr. Nachr. LXXXII, 249.
100. Sur la méthode d'élimination de Bezout. Painvin. N. ann. math. XXXIII, 278, 447.

H.

Hydrodynamik.

101. Sur le mouvement sous-horizontal des liquides. Decharme. Compt. rend. LXXIX, 462.

Hyperbel.

102. Construction de l'hyperbole équilatère connaissant le centre, une tangente et un point. Moreau. N. ann. math. XXXIII, 206.
103. Lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par un point donné et à toucher en deux points un cercle donné. Heurtault. N. ann. math. XXXIII, 93.

Hyperboloid.

104. Propriété de l'hyperboloïde à une nappe. Gambey. N. ann. math. XXXIII, 39. — Moret-Blanc ibid. 292.

I.

Imaginäres.

Vergl. Gleichungen 95. Integration (unbestimmte) 105. Zahlentheorie 211.

Integration (unbestimmte).

105. Sur quelques intégrales d'Euler trouvées au moyen de la décomposition d'exponentielles imaginaires. Liouville. Journ. mathém. XXXIX, 189. — Besge ibid. 192.
106. Ueber den Werth einiger Integrale. Stern. Crelle LXXIX, 263.
107. Sur l'intégrale $\int (\cos x)^{2m+1}\, dx$. Realis. N. ann. math. XXXIII, 83.

K.

Kegelschnitte.

108. Sur la détermination des foyers dans les lignes du second degré et dans les surfaces de révolution. Lemonnier. N. ann. math. XXXIII, 318.

109. Lieu des foyers des coniques tangentes en un point donné à une droite donnée et ayant une extrémité de l'axe focal en un point donné. Rousset. N. ann. math. XXXIII, 297.
110. Si trois coniques ont deux à deux un foyer commun, leurs cordes communes concourent trois à trois. Koehler. N. ann. math. XXXIII, 487.
111. Propriétés d'une conique et de deux tangentes fixes. Marquet. N. ann. math. XXXIII, 347.
112. Trouver le lieu d'un point tel que le triangle formé par les tangentes issues de ce point à une conique et par la corde de contact ait une aire constante. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIII, 244.
113. Coniques qui ont leur sommets sur quatre droites données. Koehler. N. ann. math. XXXIII, 438.
114. Sur les coniques bitangentes à une autre conique. Lefébure de Fourcy. N. ann. math. XXXIII, 513.
115. Ueber die Construction der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 295; LXVIII, 505.
116. Intersection de deux coniques ayant un axe réel commun. Lefébure de Fourcy. N. ann. math. XXXIII, 49, 105.

Vergl. Ellipse. Elliptische Transcendenten 61. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

117. Sur les valeurs limites des intégrales. Tchebichef. Journ. mathém. XXXIX, 157.

Kreis.

118. Sur le calcul de π par la méthode des isopérimètres. André. N. ann. math. XXXIII, 128.
119. Enveloppe d'un cercle passant par un point fixe et vu sous un angle constant d'un autre point fixe. Givelet. N. ann. math. XXXIII, 301.
120. Lieu des centres des cercles inscrits à des triangles inscrits eux-mêmes dans le même cercle et ayant tous deux côtés parallèles. Henrique y Diaz. N. ann. math. XXXIII, 31.
121. Enveloppe de l'axe radical de deux cercles dont un fixe et l'autre tangent à un cercle fixe lui-même. Lez. N. ann. math XXXIII, 349.
122. Propriétés de deux cercles passant par un point et restant tangents à une même droite donnée. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIII, 156. — Gérono ibid. 158.
123. Lieu géométrique provenant de deux circonférences qui se coupent et d'une sécante tirée par l'un des points communs. Beaujeux. N. ann. math. XXXIII, 33.
124. Du triangle formé en joignant les points de contact des trois cercles exinscrits à un triangle donné avec les côtés prolongés. Gambey. N. ann. math. XXXIII, 43. — Launoy ibid 480.

Kreistheilung.

125. Construction du polygone de 17 cotés. Schroeter. N. ann. math. XXXIII, 456.

Krümmung.

126. Détermination des relations analytiques qui existent entre les éléments de courbure des deux nappes de la développée d'une surface. Mannheim. Compt. rend. LXXIX, 1328.
127. Der mittlere Krümmungsradius und die mittlere Krümmung in einem bestimmten Punkte einer Fläche. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 361.
128. Sur les rayons de courbure des courbes planes. Laisant. N. ann. math. XXXIII, 367.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 6, 13.

Kugelfunctionen.

129. Ueber die Functionen X_n^m. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXVIII, 357.

Vergl. Bestimmte Integrale 27. Reihen 194.

M.

Maxima und Minima.

130. D'un maximum dans la théorie du choc trouvé par Huyghens. Picart. N ann. math. XXXIII, 212.

131. Sur le produit maximum ou minimum de deux cordes de cercle qui se coupent sous un angle donné. Brillouin. N. ann. math. XXXIII, 25.
132. Dans un paraboloïde hyperbolique la génératrice de chaque système qui passe par le sommet est celle sur laquelle les génératrices de l'autre système interceptent les segments les plus petits. Jamet. N. ann. math. XXXIII, 205.

Mechanik.

133. Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps pesant posé sur un appui courbe. C. Jordan. Compt. rend. LXXIX, 1197, 1400.
134. Sur la stabilité de l'équilibre. Laurent. N. ann. math. XXXIII, 130.
135. Sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique. E. Mathieu. Journ. mathém. XXXIX, 265.
136. Sur un nouveau principe de mécanique relatif aux mouvements stationnaires. Clausius. Journ. mathém. XXXIX, 193.
137. Note relative au viriel de M. Clausius. F. Lucas. Compt. rend. LXXIX, 103.
138. Sur une transformation des équations de la mécanique céleste. Allégret. Compt. rend. LXXIX, 656.
139. Betrachtung der allgemeinen Bewegungsform starrer Körper vom Gesichtspunkte einer Gyralbewegung. Finger. Wien. Akad.-Ber. LXVIII, 317.
140. Mouvement de rotation compliquée d'un anneau. Hioux. N. ann. math. XXXIII, 507.
141. Sur un point matériel assujetti à demeurer sur une sphère donnée et attiré proportionellement à la distance par des centres fixes. Gambey. N. ann. math. XXXIII, 46. — Launoy ibid. 482.
142. Mouvement d'un point sur une développante de cercle. H. D. N. ann. math. XXXIII, 443.
143. Sur deux lois simples de la résistance vive des solides. Boussinesq. Compt. rend. LXXIX, 1324, 1407.
144. Sur le mouvement d'un mobile dans une atmosphère dont la résistance est proportionelle au cube de la vitesse. Guebhard. N. ann. math. XXXIII, 436.
145. Essai d'une classification des engrenages. Liguine. N. ann. math. XXXIII, 497.
146. Théorie de la transmission de mouvement par câbles. Resal. Compt. rend. LXXIX, 421.
147. Sur les conditions de résistance des chaudières cylindriques. Resal. Compt. rend. LXXIX, 726.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 9. Attraction. Balistik Elasticität. Elektrodynamik. Geschichte der Mathematik 83, 84. Hydrodynamik. Maxima und Minima 130. Optik. Pendel. Reihen 193.

Mittelwerthe.

148. Ueber die Berechnung der Coefficienten einer periodischen Function aus gegebenen Mittelwerthen der Function. Krüger. Astr. Nachr. LXXXII, 333.

Vergl. Exponentialgrössen 64. Functionen 69.

N.

Normalen.

149. Courbes planes pour lesquels la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante. Harkema. N. ann math. XXXIII, 483.
150. Lieu du point de rencontre de certaines normales d'une ellipse. Poujade. N. ann. math. XXXIII, 247. — Brisse ibid. 249.
151. Sur les pieds des normales menées d'un point donné à la courbe $y^m = m a x^p$. Lemelle. N. ann. math. XXXIII, 392.
152. Sur le lieu des normales à une surface du second ordre parallèles à un même plan. Bourguet. N. ann. math. XXXIII, 447.
153. Trouver une surface par ses normales. Pellet. N. ann. math. XXXIII, 440.

Vergl. Ellipse 54.

O.

Oberflächen.

4. Sur certains groupes de surfaces, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques. Fouret. Compt. rend. LXXIX, 467, 689. [Vergl. Bd. XX, Nr. 416.]

155. Réponse aux observations de M. Combescure. Aoust. Compt. rend. LXXIX, 32. [Vergl. Bd. XX, Nr. 338.]
156. Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface. Poincaré. N. ann. math. XXXIII, 449.
157. Sur les surfaces osculatrices. Spottiswoode. Compt. rend. LXXIX, 24, 105.
158. Sur les surfaces orthogonales. Catalan. Compt. rend. LXXIX, 28.
159. Sur la loxodromie d'une surface de révolution quelconque. Laisant. N. ann. math. XXXIII, 573.
160. Bestimmung von Tangenten an die Selbstschattengrenze von Rotationsflächen. Staudigl. Wien. Akad.-Ber. LXVIII, 228.
161. Sur les surfaces isothermes paraboloïdales. Lamé. Journ. mathém. XXXIX, 307.
162. Sur la surface $zy^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$. Brocard. N. ann. math. XXXIII, 424.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 37, 38. Krümmung 126, 127. Normalen 153.

Oberflächen zweiter Ordnung.

163. Axes, plans cycliques etc. dans les surfaces du second ordre. Painvin. N. ann. math. XXXIII, 113.
164. Foyers et directrices des surfaces du second ordre. Crosnier. N. ann. math. XXXIII, 266.
165. Sections circulaires des surfaces du second ordre. Crosnier. N. ann. math. XXXIII, 12.
166. Sur les surfaces du second ordre tangentes à une surface donnée du second ordre en deux points pareillement donnés. Brisse. N. ann. math. XXXIII, 18. — Genouille ibid. 21.
167. Propriété d'un faisceau de surfaces du second degré ayant même intersection. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIII, 431.

Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Normalen 152. Paraboloid. Potential. Sphärik.

Optik.

168. Die Grenzbedingungen der Spiegelung und Brechung für den Hauptschnitt bewegter Mittel. Ketteler. Berl. Akad.-Ber. 1874, 32.
169. Ueber den Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung des Lichtes. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 8.
170. Ueber die Mitbewegung des Lichtes in bewegten Mitteln. Puschl. Wien. Akad.-Ber. LXVIII, 446.
171. Sur quelques constructions géométriques applicables aux miroirs et aux lentilles. Lissajous. Compt. rend. LXXIX, 1049.
172. Zur Theorie der anomalen Dispersion. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1874, 667.
173. Ueber das Intensitätsverhältniss und den Gangunterschied der bei der Beugung auftretenden senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisirten Strahlen. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 205.
174. Ueber die Stefan'schen Nebenringe am Newton'schen Farbenglas und einige verwandte Interferenzerscheinungen. Mach. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 371.
175. Zur Theorie der Thalbot'schen Streifen. Dvořák. Wien. Akad.-Ber. LXVII, 89.

P.

Parabel.

176. Sur trois paraboles passant par les sommets d'un triangle. Fouret. N. ann. math. XXXIII, 496. [Vergl. Bd. XX, Nr. 275.]
177. Sur les ellipses bitangentes à une parabole fixe. Launoy. N. ann. math. XXXIII, 425.

Paraboloid.

178. Lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques passant par deux droites non dans un même plan. Dewulf. N. ann. math. XXXIII, 444.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 7. Maxima und Minima 132.

Pendel.

179. Ein von Kaiser herrührender Beweis für das Princip des Foucault'schen Pendelversuches. Oudemans. Astr. Nachr. LXXXIII, 19.

Planimetrie.

180. Sur la décomposition de polygones en triangles. Lionnet. N. ann. math. XXXIII, 331.

181. Sur les bissectrices des angles d'un triangle. André. N. ann. math. XXXIII, 10.
Vergl. Zahlentheorie 222.

Potential.

182. Zur Theorie der Potentialflächen unter besonderer Rücksicht auf Körper, die von Flächen der zweiten Ordnung begrenzt sind. Stahl. Crelle LXXIX, 265.

Q.

Quadratische Formen.

183. Sur la théorie algébrique des formes quadratiques. Darboux. Journ. math. XXXIX, 347.

184. Sur les formes bilinéaires C. Jordan. Journ. mathém. XXXIX, 35.

185. Sur la reduction et la transformation des systèmes quadratiques. C. Jordan. Journ. mathém. XXXIX, 397.

186. Ueber Schaaren von quadratischen Formen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1874, 59, 149, 206, 397.

187. Sur la réduction des formes quadratiques ternaires. Hermite. Crelle LXXIX, 17. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 383.]

Quadratur.

188. Sur les quadratures approximatives. Tchebichef. Journ. mathém. XXXIX, 19.

189. Méthode pour construire avec autant d'approximation qu'on voudra un triangle équivalent à un secteur donné. Collignon. N. ann. math XXXIII, 389.

190. Sur l'aire d'une courbe décrite au moyen du roulement d'une conique sur une droite. Bourguet. N. ann. math. XXXIII, 538. [Vergl. Bd. XX, Nr. 292.]

191. Expression en déterminant de la surface d'un quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets consécutifs. Dostor. N. ann. math. XXXIII, 559.
Vergl. Ellipse 56. Kegelschnitte 112.

R.

Rectification.

192. Longueur d'un arc de hélice. Pellissier. N. ann. math. XXXIII, 294.
Vergl. Kreis 118.

Reihen.

193. Loi des séries de Wronski; sa phoronomie. A. Transon. N. ann. math. XXXIII, 305.

194. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Darboux. Journ. mathém. XXXIX, 1.

195 Développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes entières et positives d'une autre fonction. Picart. N. ann. math. XXXIII, 69.

196. Exemple d'une série changeant de valeur par un nouveau groupement des termes. Catalan. N. ann. math. XXXIII, 60.

197. Développement en série de *arcsinx* au moyen de la formule de Maclaurin. Chevilliet. N. ann. math. XXXIII, 209.

198. Ueber die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen. Mertens. Crelle LXXIX, 182.

199. Identité entre deux séries finies. Laisant. N. ann. math. XXXIII, 395.
Vergl. Binomischer Lehrsatz. Taylor'sche Reihe. Zahlentheorie 212.

S.

Sphärik.

200. Propriété d'une courbe sphérique quelconque. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIII, 338.

201. Sur le quadrilatère sphérique. De Rufz de Lavison. N. ann. math. XXXIII, 343.

202. Sur les hexagones sphériques. Brocard. N. ann. math. XXXIII, 337.

203. Rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre en valeur des arêtes. Dostor. N. ann. math. XXXIII, 523.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 10, 11. Mechanik 141.

Substitutionen.

204. Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée. C. Jordan. Crelle LXXIX, 248.
205. Sur deux points de la theorie des substitutions. C. Jordan. Compt. rend. LXXIX, 1149.

T.

Taylor'sche Reihe.

206. Nouvelle démonstration du théorème de Taylor. Koenig. N. ann. math. XXXIII, 270.
207. Série de Taylor. Picart. N. ann. math. XXXIII, 15, 353.

Trigonometrie.

208. Conséquence géométrique de l'équation $1.2.3 = 1+2+3$. Brocard. N. ann. math. XXXIII, 63.

Vergl. Maxima und Minima 181.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

209. New demonstration of the reduction of hyperelliptic integrals to the normal form. Malet. Crelle LXXIX, 176.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

210. Ueber die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe solcher Unbekannten, zwischen welchen Bedingungsgleichungen bestehen. Seidel. Astr. Nachr. LXXXIV, 193.

Z.

Zahlentheorie.

211. Ueber diejenigen Primzahlen λ, für welche die Classenzahl der aus λ^{ten} Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen durch λ theilbar ist. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1874, 239.
212. Zur Theorie der Euler'schen Zahlen. Stern. Crelle LXXIX, 67.
213. Caractères de divisibilité. Lubin. N. ann. math. XXXIII, 528.
214. Lois nouvelles des puissances des nombres. De Coninck. N. ann. math. XXXIII, 568.
215. Propriétés nouvelles des fractions décimales périodiques. De Coninck. N. ann. math. XXXIII, 569.
216. Trouver le plus petit nombre possible qui satisfasse à 9 conditions arithmologiques. Brisse. N. ann. math. XXXIII, 34.
217. Sur une formule d'arithmétique. André. N. ann. math. XXXIII, 185.
218. Sur quelques fonctions numériques. Bougaïeff. N. ann. math. XXXIII, 381.
219. Propositions relatives à la théorie des nombres. Catalan. N. ann. math. XXXIII, 518.
220. Le carré d'une somme de 3 carrés est somme de 3 carrés. Le Besgue. N. ann. math. XXXIII, 111. — Chabanel ibid. 112.
221. Sur les résidus cubiques. Pepin. Compt. rend. LXXIX, 1403.
222. Triangles dont les côtés sont en nombres entiers. Moreau. N. ann. math. XXXIII, 296.
223. Sur un problème d'analyse indéterminée relatif au tétraèdre. Chabanel. N. ann. math. XXXIII, 289.
224. Problème arithmétique ayant rapport au trièdre trirectangle. Chabanel. N. ann. math. XXXIII, 340.

Vergl. Kreistheilung. Quadratische Formen.

Historisch-literarische Abtheilung.

Mathematisch-historische Miscellen.

Von Dr. Siegmund Günther in München.

I. Die geometrischen Progressionen bei den Arabern.

Ueber die elementare Reihenlehre der Araber sind wir im Ganzen wenig unterrichtet. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen mochten sie aus des Archimedes Abhandlung über die Spirale kennen gelernt haben; dass sie auch die Cubensumme zu bilden und sogar die bezüglichen Aufgaben mannigfach zu variiren verstanden, wissen wir aus Wöpcke's ausführlichen Monographien[1]. Aber speciell über ihre Kenntniss der geometrischen Reihen sind wir wenig aufgeklärt. Dass ihnen dies Capitel nicht unbekannt geblieben sein kann, war ja von Anfang an zweifellos, denn sowohl in der indischen wie in der griechischen Mathematik, aus deren Vereinigung ja die arabische Wissenschaft hervorging, hatte dasselbe einen Platz gefunden. Bereits in den kinematischen Paradoxen der Eleaten* spielte die geometrische Progression eine Rolle, Archimedes hat sich im Arenarius auf dieselbe berufen und mehrere interessante Sätze[3] angegeben, bei Bhascara Acharya endlich wird dieselbe als etwas längst Bekanntes mitbehandelt[4]. Von den Arabern aber kannte man bislang anscheinend keinen directen Beleg für ihre Beschäftigung mit diesem Gegenstande, und da uns nun ganz neuerlich von philologischer Seite ein solcher geboten wird, so erschien es angezeigt, das mathematische Publikum auf diese interessante Notiz aufmerksam zu machen; ganz abgesehen davon, dass die Zeitschrift, welcher wir das Folgende grossentheils entnehmen, in unseren Fachkreisen nur sehr wenig gelesen werden dürfte, empfahl es sich auch, die für den Mathematiker wichtigen Punkte herauszuheben und in ihrer geschichtlichen Bedeutung zu charakterisiren.

* Wir verweisen anlässlich dieses interessanten Durchgangspunktes menschlicher Erkenntniss auf eine ziemlich unbekannte (selbst bei Poggendorff unerwähnt gebliebene) Specialschrift[2] eines verdienten deutschen Gelehrten.

Als einer der geistreichsten arabischen Mathematiker muss der dem elften Jahrhundert unserer Zeitrechnung angehörige Abu'l-Rîhân-Mohammed-ben-Ahmed Al Bîrûnî — gewöhnlich kurzweg Albiruni genannt — angesehen werden. Sein bedeutendstes Werk ist eine ausführliche Beschreibung einer ausgedehnten wissenschaftlichen Reise, welche er zur Zeit der grossen mosleminischen Invasion in Indien machte; dieses Reisewerk beschäftigt sich zwar der Stellung des Autors zufolge vorzüglich mit den astronomischen und mathematischen Kenntnissen des Nachbarvolkes, bewährt aber auch sonst allenthalben eine freisinnige Rücksichtnahme auf alle politischen und socialen Verhältnisse des merkwürdigen Landes. Fürst Boncompagni hat in einer eingehenden Analyse jenes Reiseberichtes die dem mathematischen Historiker besonders wichtigen Partien desselben verarbeitet[5], und hiermit müssen wir einstweilen zufrieden sein, da eine von den orientalistischen Choragen Frankreichs in Aussicht genommene Gesammtausgabe, welche zum grossen Theile an Franz Wöpcke übertragen war, durch den frühen Tod dieses Letzteren in's Stocken gerathen ist[6]. So sind wir leider im Unklaren darüber, ob sich Albiruni zu denjenigen Betrachtungen, über welche nunmehr Bericht erstattet werden soll, ebenfalls auf dieser Indienfahrt die Anregung geholt habe; bedenkt man aber, dass diese Betrachtungen zunächst an das gewöhnliche Schachbrett anknüpfen, und dass dies ganz unzweifelhaft eine indische Erfindung ist*, so wird man unserer Vermuthung wenigstens einige Wahrscheinlichkeit nicht absprechen können, dass wir es hier mit ursprünglich indischen, wenn auch der Form nach arabisch umgemodelten Geistesproducten zu thun haben.

Es hat vor Kurzem Sachau[7] darauf hingewiesen, dass Albiruni in seinem chronologischen Werke — *Alâthâr Albâkiya* — die Zahl zu berechnen gelehrt habe, welche in dem Erfindungsmythus des Schachspiels die Summe der auf alle 64 Felder vertheilten Weizenkörner ausdrücke. Allerdings hätten schon Gildemeister[8] und Barbier de Meynard[9] diese Zahl angemerkt, allein diese letztere Angabe sei keineswegs einwurfsfrei. Sachau liefert demnach zunächst den gereinigten Text der betreffenden Stelle, welche die gesuchte Zahl gleich

$$x = \Big(\big((16^2)^2\big)^2\Big)^2 - 1 = 16^{16} - 1$$

setzt**. Dass diese Zahl in der That die richtige ist, leuchtet ein, denn man hat nach der Summenformel der geometrischen Progressionen

---

* Des Schachs, wenn auch gerade nicht dieses Problems, thut der Bericht in der That Erwähnung.

** Höchst merkwürdig ist wohl auch der von Sachau hervorgehobene Umstand, dass Albiruni, „um Fehler im Schreiben zu vermeiden", seine Zahlen in dreifacher Weise schreibt, nämlich einmal direct im indischen Positionssystem,

$$x=\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{4\cdot 16}-1=(2^4)^{16}-1,$$

wie behauptet. Wie aber wurde, da den Arabern die hier angewandte Regel nicht geläufig gewesen zu sein scheint, dieser Werth von x gefunden?

Hierzu dienen zwei Theoreme, die allgemein so zu formuliren wären:

I. Es sei y die Ordnungszahl irgend eines Feldes; dann wird behauptet, bei der bekannten Belegung kämen auf das Feld von der Ordnungszahl $(2y-1)$ gerade $\overset{(y)2}{y_1}$ Körner, wenn $y_1^{(y)}$ die Anzahl der auf das Feld y gelegten Körner darstellt.

Dem ist in der That so, denn der Regel zufolge enthält das y^{te} Feld $y_1^{(y)}=2^{y-1}$ Körner, also das $(2y-1)^{\text{te}}$ 2^{2y-2}; es ist aber

$$2^{2y-2}=(2^{y-1})^2=\overset{(y)2}{y_1}.$$

So kommen auf das fünfte Feld 16 Körner, auf das neunte also $16^2=256$.

II. Die Zahl der auf einem Felde befindlichen Kerner ist

$$y_1^{(y)}=y_1^{(1)}+y_1^{(2)}+y_1^{(3)}+\ldots+y_1^{(y-1)}+1;$$

denn es ist

$$1+2+4+\ldots+2^{y-2}=\sum_{i=1}^{i=y-2}y_1^{(i)}=2^{y-1}-1+1=y_1^{(y)},$$

wie aus dem ersten Satze hervorgeht.

Mit Zugrundelegung beider Lemmen kann dann die Zahl x offenbar so ermittelt werden: Nach Satz I enthält nun Feld $5-2^4=16$, Feld $17-2^{16}=(16^2)^2$, Feld $33-2^{32}=16^8=((16^2)^2)^2$ Körner, und da ein supponirtes 65. Feld vom 33. ebenso weit absteht, wie dieses selbst vom ersten, so wäre

$$y_1^{(65)}=(y_1^{(33)})^2=\Big(((16^2)^2)^2\Big)^2.$$

Nunmehr tritt Satz II in Kraft; es ist

$$y_1^{(65)}=y_1^{(1)}+y_1^{(2)}+\ldots+y_1^{(64)}+1$$

oder, da die rechte Seite den Werth $(x+1)$ hat,

$$x=\Big(((16^2)^2)^2\Big)^2-1.$$

Dies ist der oben angegebene Werth.

Gelegentlich thut dann Albiruni noch einiger weiteren Eigenschaften der geometrischen Reihen Erwähnung, welche uns die algebraische

---

dann im Sexagesimalsystem und schliesslich mit arabischen, zur Zahlbezeichnung dienenden Buchstaben. So ist unser obiges x gleich

$$18'446,744'073,709'551,615$$

$$=30.30.27.9.5.3.50.40.31.0.15\equiv 15.60^0+31.60^2+40.60^3+50.60^4+3.60^5+5.60^6+9.60^7+27.60^8+30.60^9+30.60^{10}$$

= اح د د و ز م د ع ح ط ه ه ا و ا ه.

Die mittlere Schreibart erinnert offenbar lebhaft an das babylonische Verfahren.

Zeichensprache in ein einziges Theorem zusammenzuziehen gestattet. Dasselbe lautet:

Ist in der geometrischen Progression

$$a, af, af^2, \ldots af^m$$

m eine gerade Zahl, so ist das Product aus Anfangs- und Endglied gleich dem Quadrate des Mittelgliedes, im entgegengesetzten Falle gleich dem Producte der beiden Mittelglieder.

Dem entsprechen für $m = 2n$, resp. $m = 2n - 1$ die beiden Relationen

$$a \,.\, af^{2n} = (af^n)^2, \quad a \,.\, af^{2n-1} = af^{n-1} \,.\, af^n.$$

Recapituliren wir diese Mittheilungen Sachau's, so drängt sich uns die Gewissheit auf, dass den Arabern zu Albiruni's Zeit die einfache Summenformel, wie sie in der Lilavati vorgetragen wird, noch nicht bekannt oder doch wenigstens in Fleisch und Blut übergegangen gewesen sein kann. Im Gegentheil, hier nehmen wir eine offenkundige Einwirkung griechischer Ueberlieferungen wahr, wie sie uns in gleicher Stärke bei den Arabern nur selten entgegentritt. Man vergleiche, um die Richtigkeit dieser Bemerkungen zu übersehen, mit Albiruni's Kunstgriffen das generelle Theorem, welches Nesselmann[10] aus dem Detail der archimedischen Sandrechnung gezogen und folgendermassen formulirt hat: „Wenn mehrere Zahlen von der Einheit an in geometrischer Pregression stehen, so wird jedes Product von irgend zwei Gliedern dieser Progression derselben Progression angehören, indem es so weit von dem grösseren Factor entfernt ist, als der kleinere Factor von der Einheit; und der Abstand des Productes von der Einheit wird um 1 kleiner sein, als die Summe der Abstände der beiden Factoren von der Einheit.“ Dass diesem Satze die Vorschriften des Albiruni sich ohne Weiteres als einfache Corollare einfügen, erhellt unverzüglich, und wir sehen uns so vor einer geschichtlichen Thatsache, welcher eine weit über die sachliche Vorlage hinausgehende Tragweite zukommt.

1) *Wöpcke, Passages rélatifs à des sommations de cubes extraits de manuscrits arabes inédits,* Zwei Abhandl. *Rome 1863, 1864.*

2) Gerling, Ueber Zeno des Eleaten Paradoxen über die Bewegung, Marburg 1846.

3) Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, S. 122 flgg.

4) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874; S. 192.

5) *Boncompagni, Intorno all' opera d'Albiruni sull' India, Bullettino Tomo II;* S. 153 flgg.

6) *Ibid.* S. 202.

7) Sachau, Algebraisches über das Schach bei Bîrunî, Zeitschr. d. morgenländ. Gesellschaft 29. Band, S. 148 flgg.

8) *Gildemeister, Scriptorum Arabum de rebus indicis loci et opuscula, Bonnae 1838;* S. 142.

9) *Barbier de Meynard, Maçoudi, les prairies d'or, Paris 1861, Tome I,* S. 160.
10) Nesselmann, S. 124.

II. Die magischen Quadrate bei Gauss.

In einem kürzlich der Oeffentlichkeit übergebenen Werke[1] haben wir die Entwickelungsgeschichte der sogenannten Zauberquadrate zu schildern versucht. Da aber eine ganz vollständige Durcharbeitung des massenhaft vorhandenen Materials von Anfang an ein Ding der Unmöglichkeit schien, so empfahl sich für das betreffende Capitel der bescheidenere Titel: „Historische Studien über die magischen Quadrate"; wirklich hat sich uns seitdem bereits eine und die andere Lücke fühlbar gemacht. Vor Allem aber scheint ein gewisses uns entgangenes Factum wichtig genug, in gesonderter Darstellung hier eine nachträgliche Stelle zu finden*.

Unter'm 12. März 1842 sendet Schumacher an Gauss nachstehendes von seinem Assistenten Clausen ausgearbeitetes Diagramm:

$$\begin{array}{cccc} A4 & B1 & C2 & D3 \\ C1 & D4 & A3 & B2 \\ D2 & C3 & B4 & A1 \\ B3 & A2 & D1 & C4 \end{array}$$

und bemerkt[2] dazu: „Es ist eine Art magisches Quadrat. Man schreibt auf n Zettel A und bei A die natürlichen Zahlen von 1 bis n, ebenso auf n Zettel B und die natürlichen Zahlen von 1 bis n und so fort, bis man n Buchstaben hat. Aus diesen nn Zetteln soll ein Quadrat gelegt werden, mit der Bedingung, dass sowohl in jeder horizontalen, als verticalen Reihe alle Buchstaben und alle Zahlen vorkommen. Für $n=2$ ist dies unmöglich, für $n=3$ leicht, und ich glaubte früher von Ihnen verstanden zu haben, dass es auch für $n=4$ unmöglich sei, muss mich aber geirrt haben, da Clausen mir beifolgende Auflösung brachte. Darf ich fragen, wenn sonst die Untersuchung Ihnen keine Mühe macht, für welche Werthe von n (das nur eine ganze Zahl sein kann) es unmöglich ist?"**

Mit dem gewöhnlich ihn charakterisirenden Scharfblick erkennt Gauss sofort[4], dass Clausen seine Bedingungen zu enge gestellt habe. Nicht blos die Colonnen und Zeilen, sondern auch die Diagonalen müss-

* Wir verdanken die Hinweisung auf jene Thatsache einer brieflichen Mittheilung von Herrn Prof. Stern in Göttingen.

** Da von ungeradzelligen Quadraten dieser Art später in der Correspondenz nicht mehr die Rede ist, so stellen wir das Thatsächliche darüber noch kurz mit folgenden Worten fest. Sobald man von der Forderung absieht, dass auch die Diagonalen in Betracht gezogen werden, so kann man jedes gerad- oder ungeradzellige magische Quadrat mit Doppelelementen so herstellen, dass man die Buch-ten mit hereingezogen werden; dann sei allerdings Clausen's Figur nicht mehr richtig, allein sie liesse sich leicht verbessern. Habe man aber einmal Ein solches Diagramm, so seien aus diesem Urschema ohne Weiteres 575 andere ableitbar, und zudem liefere ein willkürliches Ersetzen der Buchstaben A, B, C, D durch 0.4, 1.4, 2.4, 3.4 ein magisches Quadrat im vulgären Sinne. So bekommt man nach Gauss für $A=0$, $B=4$, $C=8$, $D=12$ das folgende Duplicat:

A4	B1	C2	D3		4	5	10	15
C3	D2	A1	B4		11	14	1	8
D1	C4	B3	A2		13	12	7	2
B2	A3	D4	C1		6	3	16	9.

Gauss erinnert auch noch an Mollweide's Behandlung des Gegenstandes, bricht dann aber ab[5]: „Mir fehlt es an Zeit, darüber jetzt Nachforschungen zu machen." Man sieht aus den wenigen hier mitgetheilten Worten, wie richtig und umfassend Gauss sofort einen ihm sonst fernliegenden Gegenstand erfasst hat. Nur Eines nimmt uns etwas Wunder, dass nämlich der strenge Mathematiker seinem Freunde Schumacher ein Versehen nachsieht, was sonst durchaus seine Art nicht ist. Wenn Jener nämlich (s. o.) meint, für $n=3$ sei die Construction des Quadrates leicht, so hat er doch offenbar den beschränkten Begriff Clausen's im Auge, während in dem streng richtigen Gauss'schen Sinne ein neunzelliges Quadrat mit Doppelelementen einfach unmöglich ist. Es erscheint uns überhaupt, soweit eine nur oberflächliche Untersuchung der Frage uns zu einem Urtheil berechtigt, noch keineswegs gewiss, ob solche (Gauss'sche) Quadrate allgemeinster Natur von $(2m+1)^2$ Zellen überhaupt hergestellt werden können.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei der sachlichen Seite des Gegenstandes, so stellt sich uns klar heraus, dass Gauss zur Bildung der magischen Quadrate eines Kunstgriffes sich bedient, welcher an sich nicht gerade neu ist, vielmehr schon von De la Hire[6], Sauveur[7] und besonders von Euler angewandt war. Allein die Ersteren legten blos auf den Zweck einen Werth, das schematische Quadrat mit Doppelelementen, welches für Gauss im Vordergrunde steht, diente ihnen lediglich als Mittel, und da das von ihnen angestrebte Ziel auch erreicht werden

---

staben sowohl als die Zahlen in Form einer doppelt-orthosymmetrischen Determinante[8] von entgegengesetztem Sinne anschreibt, z. B.

A1	B2	C3	D4	E5	F6
F2	A3	B4	C5	D6	E1
E3	F4	A5	B6	C1	D2
D4	E5	F6	A1	B2	C3
C5	D6	E1	F2	A3	B4
B6	C1	D2	E3	F4	A5

A1	B2	C3	D4	E5
B5	C1	D2	E3	A4
C4	D5	E1	A2	B3
D3	E4	A5	B1	C2
E2	A3	B4	C5	D1.

konnte, wenn in den Diagonalen das nämliche Element mehrmals auftrat, so kümmerten sie sich nicht um jene verschärfte Forderung. In gewissem Sinne war auch bei Euler von dieser letzteren keine Rede, doch werden wir zu den Leistungen dieses Mannes uns erst durch weitere Verfolgung des Gauss-Schumacher'schen Briefwechsels hinführen lassen.

Zunächst antwortet Schumacher auf die ihm von Gauss ertheilte Belehrung mit folgenden Worten[8]: „Vielen Dank für Ihre Belehrungen über die Quadrate mit doppelten Elementen. Eine Frau v. Rosenkranz in Kopenhagen beschäftigte sich damit, und ich meine, dass Sie 1826 bei meiner Durchreise durch Göttingen mir Fälle genannt hätten, bei denen das Problem unmöglich sei, namentlich meinte ich dies für $n=4$, aber ich kann mich sehr gut irren. Ist $n=2$ denn der einzige unmögliche Fall?" Hierauf scheint Gauss nicht weiter eingegangen zu sein: auch später, als sein Correspondent wieder auf die Sache zurückkommt, sieht man sich vergeblich nach einer Erwiederung um.

Wir spielen hier auf einen Passus in Schumacher's Brief vom 10. August 1842 an, welcher so lautet[9]: „Clausen ist noch hier und wird erst in 14 Tagen reisen. Er hat unterdessen über die magischen Quadrate mit doppelten Charakteren gearbeitet, deren Sie sich wohl aus unserer Correspondenz vor etwa einem halben Jahre erinnern (z. B. aus 9 kleinen, mit $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$, $b3$, $c1$, $c2$, $c3$ bezeichneten Quadraten ein Quadrat zusammenzusetzen, in dem jede Horizontal- oder Verticalreihe alle Buchstaben und alle Zahlen, aber keinen Charakter mehr wie einmal enthält), und kann beweisen, dass dies für 6 (6 Buchstaben und 6 Zahlen) unmöglich ist, ebenso wie für 2. Er bringt für 6 alle möglichen Fälle auf 17 Grundformen, deren Discussion die Unmöglichkeit ergiebt. Sie haben mir früher auch eine Zahl genannt, bei der es nicht möglich war; dies wird auch 6, und nicht 4, wie ich irrthümlich glaubte, gewesen sein. Ich meine, es war 1817, bei meiner Durchreise nach München. Clausen vermuthet, dass es für jede Zahl von der Form $4n+2$ unmöglich sei, kann es aber noch nicht beweisen, und glaubt auch nicht, dass ihm überhaupt der Beweis gelingen wird, da nach seiner Meinung die Auflösung dieser Aufgabe mit der Theorie der Combinationen und deren Anwendung auf die analytische Auflösung der algebraischen Gleichungen sehr nahe zusammenhängt. Der Beweis der vermutheten Unmöglichkeit für 10, so geführt wie er ihn für 6 geführt hat, würde, wie er sagt, vielleicht für menschliche Kräfte unausführbar sein."

Als Clausen sich in diesem Sinne seinem Chef gegenüber äusserte, hatte er offenbar von der oben angezogenen Abhandlung Leonhard Euler's[10] keine Kenntniss. Denn der Zweck jener Arbeit war der Formulirung des Autors zufolge dieser: „*Cette question rouloit sur une assemblée de 36 Officiers de six différens grades, qu'il s'agissoit de ranger* *dans un quarré, de manière que sur chaque ligne tant horizontale que verticale il se trouve six officiers tant de différens caractères que de Régimens différens.*“ Vergleicht man mit dieser Forderung diejenige Clausen's, so drängt sich uns sofort eine höchst eigenthümliche Wahrnehmung auf, diejenige nämlich, dass beide Geometer eine Bedingung stillschweigend unterdrückt haben. Wenn nicht auch verlangt wird, dass in beiden Diagonalreihen durchweg auch verschiedene Charaktere angetroffen werden sollen, dann ist ja die Aufgabe ganz unmittelbar vermittelst des Arrangements lösbar, welches wir in der Randnote angegeben haben; man sieht, wie Recht Gauss hatte, die Aufstellung Clausen's als eine zu enge zu bezeichnen. Nimmt man aber an, dass Clausen, wie vor ihm Euler, das Hereinziehen der Diagonalen für etwas Selbstverständliches hielt, dann dürfte allerdings die Bemerkung des Letzteren, das Problem scheine ihm — ohne dass er recht wisse, warum — keine Lösung zuzulassen, sehr berechtigt sein, und es wäre sehr zu wünschen, dass Clausen's anscheinend erschöpfender Beweis der Oeffentlichkeit übergeben würde. Vermuthlich hat derselbe auch darin das Richtige getroffen, dass er einen nahen Zusammenhang zwischen seiner Aufgabe und der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen zu diagnosticiren vermeint; denn die Betrachtungen, welche Euler an seinen gelegentlichen Einfall anknüpft und über welche uns in unserer Monographie[11] aus Gründen der Raumersparniss nur sehr summarisch zu referiren möglich war, scheinen mit dem Thema der sogenannten Substitutionenlehre in directer Beziehung zu stehen.

1) Günther, Vermischte Untersuchungen über die Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876; S. 188 flgg.
2) Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. F. A. Peters, 4. Band, Altona 1862; S. 61.
3) Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875; S. 93.
4) Briefwechsel, S. 63.
5) *Ibid.* S. 64.
6) Günther, Verm. Unters.; S. 241 flgg.
7) *Ibid.* S. 243 flgg.
8) Briefwechsel, S. 65.
9) *Ibid.* S. 80 flgg.
10) *Euler, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques, Verhandelingen door het Genootschap de Vlissingen, Negende Deel,* S. 85 flgg.
11) Günther, Verm. Unters., S. 253 flgg.

Recensionen.

Geschichte der mathematischen Wissenschaften, von Dr. HEINRICH SUTER. 1. Theil: Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts; 2. Theil: Vom Anfange des XVII. bis Ende des XVIII. Jahrhunderts. Zürich 1873, 1875. Mit 4 lithographirten Tafeln. VI, 169 S.; VI, 380 S.

Der 1. Band vorliegenden Werkes ist bereits vor drei Jahren erschienen und ist in literarischen Blättern mehrfach besprochen worden, so von Hankel im 5. Bande des *Bullettino Boncompagni* (S. 297 flgg.), von Curtze im Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik für 1872 (S. 24 flgg.), von Stern im 73er Jahrgange der Göttinger Anzeigen (S. 1976 flgg.). Alle diese Beurtheilungen sachkundiger Männer stimmen in dem Urtheile überein, dass dieser erste Theil völlig verfehlt sei und in keiner Weise den an eine „Geschichte der Mathematik" zu stellenden Anforderungen entspreche; wir selbst würden dieses ersten Abschnittes bei unserer Besprechung gar nicht gedacht haben, wenn nicht eine lächerlich lobhudelnde Recension des Werkes in den „Blättern für literarische Unterhaltung" uns gewissermassen dazu nöthigte, die obenerwähnten Urtheile als durchaus berechtigt anzuerkennen. Als der Verfasser an die Abfassung seines Werkes ging, hatte er offenbar von den immensen Schwierigkeiten einer solchen Leistung noch keine Ahnung; wir geben zu, dass er ein ganz kundiger Mathematiker schon damals war, aber jedenfalls fehlten ihm noch alle Vorbedingungen, um die ältere Wissenschaft in ihrer Eigenart richtig zu verstehen, sonst hätte ihm z. B. nicht die komische Verwechselung der *sectio aurea* mit der harmonischen Theilung (S. 153) passiren können. Wir zweifeln keinen Augenblick, dass Herr Suter allgemach selbst zu der von uns hier ausgesprochenen Ueberzeugung durchgedrungen ist und dass ihm als wahrheitsliebendem Manne jenes incompetente Urtheil einer belletristischen Zeitschrift unangenehm war, wie er sich denn auch durch dasselbe glücklicherweise nicht abhalten liess, mit Ernst an die Besserung seines Buches zu gehen.

Denn das dürfen wir unverhohlen gleich am Beginn unserer eigentlichen Besprechung constatiren: Der 2. Theil des Suter'schen Geschichtswerkes ist eine ganz unvergleichlich bessere Leistung als jener erste, mit dem Schleier der Vergessenheit zu verhüllende. Dort nämlich war von wirklichen Quellenstudien noch nicht das Geringste zu verspüren, hier hat der Verfasser offenbar schon einen recht respectablen Anfang mit solchen gemacht. Wenn die Geschichte der Wissenschaft ihren alleinigen Zweck darin hätte, von den Schöpfungen einzelner hervorragender Männer umfassende Kunde zu geben, dann dürfte Suter's Zweck als völlig erreicht angesehen werden; denn die Werke von Cartesius, Newton, Leibnitz, Jacob und Johann Bernoulli, Euler, Fagnano und Lagrange sind von ihm offenbar eingehend studirt worden, und die zum Theil umfänglichen Excerpte, welche daraus mitgetheilt werden, behaupten ihren natürlichen Werth. Freilich wird sich auf der andern Seite nicht leugnen lassen, dass über dem Bestreben, die wichtigsten und einschneidendsten Reformen recht vollkommen vorzuführen, gar mancher andere, für die Gesammtentwickelung der Mathematik wahrlich nicht belanglose Gegenstand zu kurz gekommen ist, um so mehr, als der Verfasser das fleissige Quellenstudium, welches er den Elaboraten der Koryphäen gewidmet, auf die Arbeiten untergeordneter oder doch von ihm für subalterner erachteter Persönlichkeiten auszudehnen nicht für gut fand und so theilweise nicht umhin konnte, die irrigen Anschauungen älterer Historiker zu reproduciren. — Wir werden nunmehr den Inhalt des 2. Bandes in kurzem Umriss skizziren und die hier kurz charakterisirten Bemerkungen, wie sie sich *pro* und *contra* bei der Lecture des Buches uns aufdrängten, näher zu begründen suchen.

Der Verfasser beginnt mit der Darstellung der Erfindungsgeschichte der Decimalbrüche und Logarithmen, bespricht Stevin, Napier und Briggs, und geht dann zur Geometrie über, wo er den *methodus indivisibilium* Cavallieri's, die Schwerpunktsregeln Guldin's und die kinematische Tangentenmethode Roberval's berührt. Es folgen Fermat, Desargues und Pascal, Mydorge und Gregor a. S. Vincentio, so dass man denn in freilich sehr raschen Sprüngen von der Schwelle des XVI. Jahrhunderts bis in dessen späte Mitte sich geführt sieht. Der 2. Abschnitt geht, wie schon bemerkt, auf die Erfindung der Coordinatengeometrie durch Descartes recht ausführlich ein; die Charakterzeichnung dieses merkwürdigen Mannes und seiner originellen, oft irrigen Anschauungen ist recht treffend. Sowohl bei seiner Einleitung, als auch besonders hier hat sich Herr Suter mit offenbarer Vorliebe angeschlossen an Chasles' berühmten „*Aperçu historique*", und so kommt es denn auch, dass die von Letzterem als Nachfolger des Cartesius in den Vordergrund gestellten französischen und holländischen Geometer in seiner Darstellung die Italiener etwas zurückdrängen. Der 3. Abschnitt ist der angewandten Mathematik gewidmet; Tycho, Kepler, auf dessen *Mysterium cosmographicum*" doch ein relativ zu grosses Gewicht gelegt ist, Galilei, Stevin, der Marchese del Monte, Mersenne, Huyghens und zum Schluss Snellius als Vertreter der wissenschaftlichen Optik finden hier ihre Stelle. Mit dem 4. Abschnitte beginnt die Erfindungsgeschichte der Infinitesimalrechnung — ohne Frage der beste Theil des ganzen Buches, weil hier, wie wir schon oben andeuteten, am meisten Quellen- und Sachkenntniss zu Tage tritt. Nachdem Barrow und Wallis kurz besprochen sind, wendet sich der Verfasser zu Isaak Newton selbst. Für den grossen Briten besitzt der Verfasser eine entschiedene Vorliebe und so widmet er ihm nicht weniger als 28 Seiten (über 6 Procent des ganzen Werkes). Bei der hohen, in Deutschland stellenweise nicht ganz gewürdigten Bedeutung Newton's kann man sich mit diesem Beginnen des Verfassers recht wohl einverstanden erklären, um so mehr, da einige recht charakteristische Stellen aus seinen Werken in directer Uebertragung dem Leser vor Augen gestellt werden; der Fluxionencalcul hat hier eine übersichtlichere Darstellung gefunden, als in irgend einer andern uns sonst bekannt gewordenen Arbeit. Ziemlich das gleiche Urtheil dürfen wir wohl auch über die von Leibnitz selbst handelnden Seiten aussprechen; den Verdiensten der beiden Nebenbuhler an sich ist sonach Gerechtigkeit widerfahren. Was dagegen die ebenfalls sehr weitläufige Schilderung des berüchtigten Prioritätsstreites anlangt, so können wir derselben gleiches Lob nicht widerfahren lassen. Eine solche Schilderung müsste nämlich entweder direct aus den Quellen chöpfen und den gelegentlichen Aeusserungen eines Oldenburg, Keill, Nieuwentijt, Fatio etc. sorgsamst nachspüren — dass dabei viel Neues herauskommen würde, können wir angesichts der sofort zu besprechenden neueren Untersuchungen kaum glauben —, oder sie müsste ein concises Resumé über den Gesammtstand der diese Fragen behandelnden modernen Literatur geben. Das hat nun Herr Suter auch im Sinne gehabt, allein es entgingen ihm gerade die wichtigsten Abhandlungen, so Cantor's Aufsatz in Sybel's Hist. Zeitschrift und Giesel's inhaltsreiches Schulprogramm (von Delitzsch). Er scheint nur Gerhardt, Weissenborn und Sloman zu kennen, nicht aber zu wissen, mit wie einstimmigem Misstrauen die deutsche Kritik sämmtlichen Publikationen dieses Letzteren entgegengetreten ist.

Das 5. Capitel behandelt zuerst die Leistungen derjenigen englischen Mathematiker, welche in des Meisters Fusstapfen traten, um dann rasch zu den Brüdern Bernoulli zu gelangen. Den berühmten Schweizern wendet sich eine erklärliche nationale Vorliebe des Autors zu, die sich in einer sorgsamen Charakterisirung der wichtigen, durch sie eingeleiteten Neuerungen manifestirt. Man darf sagen, dass der ganze Abschnitt ihretwegen da ist, denn diejenigen Gelehrten, welche dabei gelegentlich Erwähnung finden mussten, wie Cotes, de Moivre, de l'Hôpital, bilden doch mehr die Staffage des Gesammtbildes. Indess soll diese

Bemerkung durchaus nicht als Vorwurf gelten. Der 6. Abschnitt handelt von der Mechanik; dass sich der Verfasser, wie aus seinen eigenen Andeutungen hervorgeht, hierbei mehrfach an Dühring gehalten hat, gereicht dem Werke entschieden nicht zum Nachtheil. Gefreut hat uns die Erwähnung und Würdigung des geistreichen Borelli*. Der optische Anhang dieses Theiles musste denn doch so kurz ausfallen, dass seine Berechtigung überhaupt zweifelhaft erscheint.

Mit der 7. Abtheilung tritt der Verfasser in die eigentliche Glanzperiode der mathematischen Renaissance-Zeit und damit auch in die gelungenste Partie seines Werkes ein. Die Differenz- und recurrenten Reihen, die elementare Functionslehre überhaupt werden klar in ihrer allmäligen Entwickelung dargelegt, die Darstellung des Euler-d'Alembert'schen Zwistes betreffs der Logarithmen negativer Grössen ist sehr vollständig gegeben. Das Gleiche gilt von der Geschichte der endlichen Differenzenrechnung, der Principien der Infinitesimalrechnung, von den Theoremen Fagnano's, von der Vorgeschichte der elliptischen Functionen** (incl. die Landen'sche Transformation) und von den Gamma-Grössen. Auch die Fortschritte in der Lehre von den Differentialgleichungen stellen sich uns recht übersichtlich dar; bei den partiellen Differentialgleichungen wird auch ihrer physikalischen Anwendung und der durch sie in die Analysis eingegangenen discontinuirlichen Curven gedacht. Fügen wir noch bei, dass auch die Anfangsgeschichte der Variationsrechnung mit Beziehung auf die Monographien von Gräfe und Todhunter eine ausführliche und allenthalben durch Beispiele gestützte Darstellung erfahren hat, so können wir unser Referat über dieses (räumlich weitaus prädominirende) Capitel mit einem sehr günstigen Gesammturtheil abschliessen. — Gegen diesen Paragraphen bleibt freilich der von der Geometrie des XVIII. Jahrhunderts handelnde Nachfolger gar sehr im Rückstande. Die Lehre von den algebraischen Gleichungen ist im Allgemeinen entsprechend dargestellt, während die Zahlentheorie lückenhafter und auch, wie nachher zu zeigen, nicht fehlerlos gearbeitet ist. Recht nett und mit Quellenkenntniss ist dagegen der historische Abriss der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgeführt, und da auch der kurze Schlussabschnitt über theoretische Mechanik nichts Wesentliches vermissen lässt, so kann die Lecture dos zweiten Theiles mit einem im Ganzen befriedigenden Totaleindruck endigen.

---

* Wir möchten bei dieser Gelegenheit die Historiker auf den schönen Aufsatz des Freiherrn v. Zach über Borelli im 3. Bande der „Zeitschr. f. Astronomie u. verw. Wissensch." (S. 379 flgg.) aufmerksam machen, der wohl nur sehr wenig bekannt ist.

** Bei dieser Gelegenheit hätte allerdings einer der ausgezeichnetsten Vorläufer Legendre's, der Schotte Maclaurin, nicht unerwähnt bleiben sollen; vergl. die schöne Schrift von Felix Müller: Studien über Maclaurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale, Berlin 1875.

Eine Reihe von Versehen und irrthümlichen Auffassungen, die wir jetzt namhaft machen wollen, bringt allerdings da und dort eine Störung hervor. — S. 1 ist davon die Rede, dass Kepler die abgekürzte Multiplication gekannt haben soll. Liess sich denn das nicht durch einen Blick ins Original verificiren? Das Gleiche gilt von S. 43: Galilei soll in seinen letzten Jahren auf den Gedanken dieser Verwendung des Pendels (zu Uhren) gefallen sein. — S. 2 ist die unglückselige Verwechselung der Neper'schen mit den natürlichen Logarithmen wieder auf's Tapet gebracht. — S. 11 hätte doch von Desargues' origineller und für die damalige Zeit grossartiger Formulirung des Parallelenaxioms die Rede sein müssen. — S. 10 ist der Fermat'sche Lehrsatz unrichtig dargestellt, S. 339 dagegen correct. — S. 14 ist Torricelli auf's Entschiedenste gegen seine französischen Zeitgenossen zurückgesetzt, wie u. A. aus Jacoli's Monographie im 8. Bande des *Bullettino Boncompagni* resultirt. — S. 18 ist Chasles' Ausspruch von der Coordinatengeometrie als „*proles sine matre creata*" wiedergegeben; weiss der Verf. Nichts von den „*latitudines*" des Oresme und von den durch Baltzer hervorgehobenen Verdiensten Fermat's? — S. 37 ist Ubaldi's Todesjahr unbestimmt gelassen, während man doch das Jahr 1607 als solches kennt (Poggendorff's Handwörterbuch, 2. Theil, Spalte 193). — Die Biographie Newton's auf S. 54 ist unrichtig abgefasst, und auch die „öftere Geisteszerrüttung", die S. 55 erwähnt wird, war wohl nur eine Phantasie Biot's. Bei der Skizzirung der Newton'schen Leistungen vermisst man höchst ungern das bekannte „Parallelogramm". — S 168 ist davon die Rede, dass nach Leibnitz's und der Bernoulli's Ableben „keine gewichtigen Autoritäten" mehr gegen Newton's Weltsystem Opposition machten; wozu zählt der Verf. Cassini und Euler? — S. 339 ist von Waring's „*Meditationes algebraicae*" die Rede, warum nicht auch von dem interessanten Theorem dieses Mathematikers? — S. 340 ist das Reciprocitätsgesetz auf Legendre zurückgeführt; wir wollen diese Thatsache dem Verf. nicht zum Vorwurf anrechnen, da sie nun einmal so in allen Lehrbüchern steht, allein die geschichtliche Wahrheit verlangt, wie das von Kronecker ganz unzweifelhaft dargethan worden ist, die Anerkennung Leonhard Euler's als des eigentlichen Erfinders dieses Fundamentalsatzes der neueren Zahlenlehre. — Als störenden Schreib- oder Druckfehler registriren wir S. 367: „Bullfinger" statt „Bilfinger"; der Mangel eines Registers wird sich beim Gebrauch sehr fühlbar machen.

Styl und Darstellungsweise haben sich im zweiten Bande entschieden gegenüber dem ersten gehoben. Einzelne Sonderbarkeiten wären aber jedenfalls besser weggeblieben; so hat (S. 150) Huyghens die Pendeluhren gewiss nicht „entdeckt", denn sonst müssten sie vorher irgendwie schon dagewesen sein, und wie irgendwelche literarische Thätigkeit einen „bemühenden" Eindruck machen soll (S. 94), ist auch nicht abzusehen.

Im Allgemeinen aber muss zugestanden werden, dass sich das Buch leicht und fliessend lesen lässt.

Ein Werk, wie es Suter beabsichtigt, ist für unsere Studirenden, nachdem Arneth's Grundriss ganz vergriffen, ein ganz dringendes Bedürfniss; das geht so weit, dass der Referent in Darboux-Hoüel's „Bulletin" angesichts der Sachlage sich sogar über den damals allein erschienenen 1. Band des neuen Buches freuen zu müssen glaubte. Der Ansicht sind wir nun nicht, weil gar kein Unterricht denn doch immer besser sein möchte als ein schlechter; beim 2. Theile aber müssen wir zugestehen, dass er zwar keine „Geschichte der Mathematik" im höheren Sinne, wohl aber ein recht brauchbares Lehrbuch des historischen Entwickelungsganges einiger der wichtigsten mathematischen Disciplinen darstellt. Alles in Allem wünschen wir dem Werke eine zweite Ausgabe (resp. eine dritte); es wird dann dem Verf. möglich sein, durch umfassendere Berücksichtigung der nichtanalytischen Fächer und durchgreifende Revision der Data den 2. Band zu einer ganz entsprechenden Leistung zu erheben, beim 1. Bande dagegen durch eine totale Umarbeitung die schlimme Scharte der beiden ersten Auflagen auszuwetzen.

München. Dr. S. Günther.

Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Volumen I. Insunt librorum II, III, IV, V reliquiae. Berolini apud Weidmannos 1875. *XXIV*, 471.

Pappus von Alexandrien, so nahm man bis vor wenigen Jahren allgemein an, lebte als Zeitgenosse seines Landsmannes Theon am Ende des 4. Jahrhunderts. Auch heute noch dürfte unter Mathematikern kaum bekannt sein, dass eine davon verschiedene Annahme Vertheidigung gefunden hat, und Referent selbst wurde erst durch eine briefliche Mittheilung von Herrn Hultsch auf eine Notiz von Usener (Neues Rheinisches Museum, Jahrg. 1873, Bd. XXVIII, S. 403) aufmerksam gemacht, der zufolge Pappus schon am Ende des 3. Jahrhunderts gelebt haben soll. Es lohnt sich wohl, die beiden Angaben und die für dieselben geltend gemachten Gründe einer Prüfung zu unterziehen. Der Mann und was wir an seinen Werken besitzen, ist bedeutend genug, um der Frage Wichtigkeit beizulegen, ob man ihn um ein ganzes Jahrhundert in der Geschichte der Mathematik hinaufzurücken habe, ob nicht.

Die verbreitetere Meinung stützt sich auf Suidas, den Lexikographen aus dem 10. Jahrhundert, welcher in seinem aus ähnlichen älteren Werken zusammengeschriebenen Nachschlagebuche, einer Art von Conversationslexikon der damaligen Zeit, an zwei verschiedenen Stellen fast gleichlautend sich äussert. Unter Theon heisst es, er sei Zeitgenosse des Pappus, der, wie er, in Alexandrien zu Hause gewesen sei, und Beide hätten unter der Regierung des älteren Theodosius gelebt. Unter Pappus heisst es, er habe unter der Regierung des älteren Theodosius gelebt, zur Zeit, als auch der Philosoph Theon in seiner Blüthe stand, welcher über den Canon des Ptolemaeus schrieb. Die Werke des Pappus seien eine Erdbeschreibung, ein Commentar zu den vier Büchern der grossen Zusammenstellung des Ptolemaeus, ferner über die libyschen Flüsse und über Traumdeutung. Diese Angaben erscheinen um so unzweideutiger, als die Lebenszeit des Theon von Alexandrien auch auf anderer Grundlage gesichert jedenfalls das Jahr 372 als Jahr schriftstellerischer Thätigkeit in sich schliesst.

Die entgegenstehende Meinung stützt sich gleichfalls auf einen Gewährsmann aus dem 10. Jahrhundert. In der Leydener Bibliothek findet sich eine als Nr. 78 signirte, in den Jahren 913—920 angefertigte Handschrift der theonischen Handtafeln, welche am Rande der Regentenliste verschiedene literargeschichtliche Glossen aus der Zeit der ersten Niederschrift besitzt. So steht neben der Regierung des Diokletian die Bemerkung: „ἐπὶ τούτου ὁ Πάπος ἔγραψεν“. Nun regierte Diokletian 284 bis 305, folglich wäre Pappus, wenn er wirklich unter diesem Kaiser seine Schriften verfasste, nach formell gleichfalls unzweideutiger Aussage in dieselbe Periode hinaufzurücken.

Wir bekennen, dass uns von vornherein die so vorgeschlagene Veränderung in der Lebenszeit des Pappus wenig zusagte. Im Allgemeinen hat Suidas sich guter Quellen bedient, und hier steht ihm irgend ein ungenannter Schreibkünstler gegenüber, dessen Glaubwürdigkeit wir nur dann abzuwägen im Stande wären, wenn uns seine sämmtlichen Randbemerkungen zur Prüfung vorlägen. Es kommt hinzu, dass in jener Glosse der Name des Pappus selbst fälschlich nur mit einem π geschrieben ist. Es kommt hinzu, dass im Ganzen das Jahrhundert, welches mit 350 etwa beginnt, einer commentirenden Thätigkeit eher den Ursprung zu geben vermochte, als das Jahrhundert, welches um eben diese Zeit abschliesst. Erläuterungen zu schreiben passt vollständig für das Jahrhundert der Völkerwanderung und des endgiltigen Sieges des Christenthums über die bestehende Religion. Wenn der mächtig sich heranwälzende Strom der Barbaren den weltlichen Besitz bedroht, wenn die alten Götter aus ihren Tempeln verdrängt werden, da erwacht im Rückstosse die Neigung, das von den Vätern Ererbte nur um so heiliger zu achten, zu bewahren.

Das war, wie gesagt, unser erstes Gefühl. Bei näherer Ueberlegung traten indess auch manche Gründe hervor, welche für die neue, beziehungsweise die erneuerte Ansicht sprachen. Herr Usener selbst, welcher seine Mittheilung unter die Rubrik „Vergessenes“ fasste, hat nämlich nicht unterlassen, anzugeben, dass die gleiche Bemerkung bereits in einem 1735 veröffentlichten Buche vorkomme*. Von zwei einander entgegenstehenden Berichten über eine Jahreszahl muss nothwendig mindestens eine falsch sein. Ein Irrthum des Suidas lässt sich nun mit Usener so erklären, dass bei dessen Gewährsmann die beiden Schriftsteller Pappus und Theon von Alexandrien ihrer Heimath, ihrer verwandten literarischen Thätigkeit wegen unmittelbar hintereinander aufgeführt wurden, woraus Suidas auf eine gar nicht angegebene, noch überhaupt stattfindende Gleichzeitigkeit schloss. Für einen Irrthum des Glossators der Leydener Handschrift dagegen ist vorläufig kein Erklärungsgrund vorhanden. Dessen Schreibfehler *Πάπος* könnte hinwiederum seine Entschuldigung darin finden, dass in der Mitte des Namens die Zeile abbricht und derselbe deshalb in *Πά* und *πος* abgetheilt erscheint, wobei ein *π* abhanden gekommen sein mag, für welches in der ersten Zeile kein Platz mehr war. Am bestechendsten endlich wirkte auf uns der Umstand, dass es für uns auch früher immer eine auffallende Erscheinung gebildet hatte, dass zwei Gelehrte wie Pappus und Theon, die beide an demselben Sitze mathematischer Wissenschaft in Alexandrien schulbildende Thätigkeit entfalteten, ein Jeder für sich einen Commentar zu einem und demselben Werke, nämlich zu dem Almagest, geschrieben haben sollen, während ihre Lebenszeit die gleiche war. Das liesse sich höchstens dann denken, wenn Pappus und Theon Gegner, mindestens Nebenbuhler waren, deren Einer den Andern zu bekämpfen sich bestrebte; aber von einem solchen Gegensatze ist nirgends die Rede. Diese Schwierigkeit ist hinweggeräumt, sobald wir Pappus um ein Jahrhundert früher als Theon ansetzen.

Wir möchten daher allerdings noch nicht unbedingt als Vertreter der Meinung uns angesehen wissen, nach welcher Pappus in der That unter Diokletian lebte; aber wir neigen doch soweit zu ihr hin, dass wir mit Spannung der Begründung entgegensehen, welche Herr Hultsch seinerzeit in dem 3. Bande seiner Pappusausgabe ihr verleihen wird, da wir wohl keine unerlaubte Indiscretion begehen, wenn wir, auf unsern Briefwechsel mit ihm gestützt, ihn als dieser Ansicht gewonnen bezeichnen.

Eine gewisse Frist werden wir Herrn Hultsch freilich gewähren müssen, bis jener 3. Band in unsere Hände gelangen kann, wenn auch hoffentlich keine so lange, als die Zeitigung des 1. Bandes erforderte, zu welchem die Vorarbeiten bis zum Jahre 1864 zurückreichen. Gut Ding will Weile haben, und ein gutes Ding hat Herr Hultsch wahrlich vollbracht. Wir nehmen keinen Anstand, schon heute seine Pappusausgabe als einen so hervorragenden Gewinn für die Wissenschaft zu bezeichnen, wie ihr derselbe nur sehr selten zu Theil zu werden pflegt.

* *Van der Hagen, Observationes in Theonis fastos Graecos priores,* Amsterdam 1735 nach Usener's Citat.

Nicht einmal die Veröffentlichung des Urtextes der geometrischen Schriften des Heron durch denselben Herausgeber, so wichtig sie für die Geschichte der Mathematik war, so lohnend ihr Studium insbesondere für den Referenten sich erwiesen hat, möchten wir in gleiche Linie stellen. Dort war es nur ein mehr oder weniger reiner Text, welcher dem Leser geboten wurde, aber er reichte zum Verständniss kaum aus, wenn man nicht eingehende Studien auch anderer griechischer und nachgriechischer Schriften damit verband. Man musste neben der Mühe des Uebersetzens der nicht selten ungleich grösseren Mühe des Vergleichens mit anderen Werken sich unterziehen, wollte man aus jenen Schriften den Nutzen schöpfen, welchen sie gewahren konnten. In der Pappusausgabe hat Herr Hultsch seinen Nachfolgern die Aneignung des darin enthaltenen Stoffes in ganz anderem Maasse erleichtert. Er hat erstmalig den Text aus der ältesten und, man kann fast sagen, einzigen Handschrift des Pappus entnommen; er hat eine lateinische Uebertragung beigegeben, in welcher weit mehr als eine wortgetreue Uebersetzung sich kundgiebt, indem Lücken mehrfach ausgefüllt, Verweisungen auf andere Schriften durch Angabe der gemeinten Stellen ergänzt sind; er hat endlich noch an nicht wenigen Orten kleine, aber wichtige Anmerkungen unten beigefügt, über andere Punkte, welche in Kürze nicht zu ermitteln waren, ausgiebigere Auseinandersetzungen für einen Anhang sich versparend, der einen Bestandtheil des 3. Bandes bilden soll; genug der Leistungen, um unserem schon gefällten Urtheile eine feste Grundlage zu bieten, um auch zum Danke gegen die Berliner Akademie und das preussische Staatsministerium zu verpflichten, welche die Veröffentlichung dieses Werkes unterstützend und ermöglichend, sicherlich keinen Fehlgriff thaten.

Jene älteste Handschrift, von der wir sprachen, ist der dem 12. Jahrhundert angehörende Vaticancodex Nr. CCXVIII. Durch uneigennützige Mittheilungen von Seiten der Herren Theodor Mommsen, Kurt Wachsmuth, Adolph Kiessling hatte Herr Hultsch die Kenntniss von dem Vorhandensein der Handschrift in ziemlich umfassender Weise erhalten. Im Sommer 1865 verschaffte er sich aus ihm zur Benutzung zugeschickten Pariser und Leydener Handschriften einen vorläufigen Urtext, mit welchem versehen er 1866 nach Rom reiste, dort die Vergleichung mit dem Vaticanus vorzunehmen. Er führte diese Vergleichung auch wirklich bis zum Schlusse des 5. Buches fort. Für die späteren Bücher übernahmen andere Gelehrte, denen ein längerer Aufenthalt in Rom verstattet war, die Herren August Wilmanns, Hugo Hinck, August Mau, Ludwig Mendelssohn die an und für sich nicht sehr dankbare, noch angenehme Mühe der Collationirung. Aus allen diesen vereinigten Bestrebungen ging eine ungemein wichtige Entdeckung hervor: Der im 12. Jahrhundert geschriebene Vaticanus liegt unmittelbar oder mittelbar sämmtlichen übrigen heute bekannten Pappushandschriften zu Grunde. Nirgends findet sich ausser infolge von späten Conjecturen und Ergänzungsversuchen auch der kleinste Satz, welcher nicht im Vaticanus gleichfalls vorhanden wäre. Das liesse sich noch erklären, indem man eine ältere gemeinsame Urschrift annähme, aber jeder Zweifel über die Abstammung verstummt gegenüber der Erscheinung, dass in sonstigen Handschriften des Pappus neu hinzutretende Lücken sich regelmässig auf solche Stellen des Vaticanus beziehen, welche nur allmälig zur Unleserlichkeit gelangten theils durch Nasswerden des untern Randes der Blätter, theils dadurch, dass ebendort die Schriftzüge wohl von Beginn an einen einigermassen verschwommenen, beziehungsweise verwischten Anblick bieten mochten, wie es am Ende einer Seite nicht selten vorkommt. Diese Thatsachen sind geprüft und erwiesen an Handschriften von Paris und Leyden, von Oxford, Mailand, Wolfenbüttel, Urbino, Neapel, Wien. Sie alle stammen ohne Ausnahme vom Vaticanus ab. Den gleichen Ursprung besass der ehemalige Strassburger Codex, dessen Verlust bei dem durch die Beschiessung Strassburgs im Sommer 1870 erzeugten Bibliotheksbrande somit leichter zu verschmerzen ist. Den gleichen Ursprung darf man für denjenigen Text behaupten, nach welchem Commandinus in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts seine lateinische Uebersetzung anfertigte und welcher die nächste Verwandtschaft zu dem Parisiensis Nr. 2440 offenbart, ohne jedoch durchgehend mit diesem identificirt werden zu können.

Die Folgerungen, welche aus der Entdeckung des Vaticanus und der Beziehungen aller übrigen bekannten Handschriften zu ihm sich ergeben, sind doppelter Natur. Erstlich fällt damit jede Bestätigung irgend einer Behauptung, ja nur irgend einer Lesart, welche aus dem gleichen Vorkommen in scheinbar voneinander unabhängigen Handschriften hergenommen werden sollte; denn thatsächlich sind diese Handschriften nicht unabhängig, wenn sie als Copien desselben Originals entstanden. Zweitens aber steht soviel fest, dass die Form, in welcher uns nunmehr die Sammlung des Pappus geboten wird, der Hauptsache nach schon vor dem 12. Jahrhundert vorhanden war, da der Vaticanus selbst eine ältere Urschrift mit Nothwendigkeit voraussetzt, welche in wichtigen Punkten mit ihm übereinstimmte, und dazu rechnen wir vor allen Dingen den Namen dieses uns einzig überkommenen Werkes des Pappus und die Eintheilung desselben in Bücher, der Bücher in Sätze. Der Name lautete unzweifelhaft: Die Sammlung (ἡ συναγωγή) des Pappus von Alexandrien. Wir wissen das freilich aus keinem Berichte irgend eines alten Schriftstellers, denn merkwürdigerweise ist gerade von diesem Werke noch keine Spur in Citaten aufgefunden worden, dagegen stimmen nicht blos die Ueberschriften der einzelnen Bücher überein, auch im fortlaufenden Texte kommt im 3. Buche (Pappus-Hultsch S. 30. Z. 22) derselbe

Name vor. Die Zahl der Bücher belief sich in der Urschrift zum Vaticanus bereits auf acht. Davon kennen wir das 1. Buch gar nicht, vom 2. nur die zweite Hälfte, aber dass das 3. Buch diese Rangnummer in der ebengenannten Urschrift führte, geht aus der schon benutzten Textesstelle hervor, deren Wortlaut (ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ τῆς συναγωγῆς βιβλίῳ) „in diesem 3. Buche der Sammlung" nicht misszuverstehen ist. Für die übrigen Bücher sind die Ueberschriften und die einen Parallelismus der Form darbietenden Einleitungen Bürgschaft. Dass Ueberschrift und Einleitung zum 4. Buche verloren gegangen sind, haben wir bereits bei anderer Gelegenheit (vergl. S. 41 dieses Bandes) als in hohem Grade wahrscheinlich bezeichnet. Im Vaticanus würde sonst unmittelbar auf das 3. Buch das 5. Buch folgen, während innerhalb des 3. Buches eine neue Numerirung der Sätze von 1 an begönne, nachdem bereits ein 58. Satz da war und an diesen eine anderweitige Darstellung des 10. Satzes des 3. Buches, offenbare Einschaltung eines Abschreibers, sich anschloss

Wir wollen nun in Kürze den Inhalt der Sammlung des Pappus, soweit sie in dem uns vorliegenden 1. Bande veröffentlicht ist, darstellen. Mögen dadurch auch solche Leser, welche antike Schriften grundsätzlich nicht in ihr Studium einzubegreifen pflegen, Anregung finden, zu Gunsten dieses Werkes von ihrer — wir können nicht gerade sagen, löblichen — Gewohnheit abzuweichen. Dass vom 1. Buche keine Spur, vom 2. nur die zweite Hälfte vorhanden ist, wurde oben erwähnt. Man hat darauf hin, dass das erhaltene Bruchstück des 2. Buches auf Rechenkunst Bezug hat, einen ähnlichen Inhalt auch für das 1. Buch in Anspruch nehmen wollen, und wir selbst haben früher diese Ansicht vertreten. Einen eigentlichen Widerspruch wollen wir auch heute nicht erheben. Es ist möglich, dass der Inhalt des 1. Buches dieser Vermuthung entsprach, aber zu fest darf man nicht darauf bauen, da in dem ganzen Werke ein begrifflicher Zusammenhang nicht wohl zu entdecken ist, Pappus vielmehr bald dieses, bald jenes ältere Werk erläuternd bespricht und somit vor der Untersuchung über eine Multiplicationsmethode des Apollonius sich sehr wohl mit einem beliebigen andern mathematischen Gegenstande beschäftigt haben kann. Vermeiden wir also nach Möglichkeit an sich ziemlich zwecklose Vermuthungen und beschränken wir uns auf den uns überkommenen Theil des 2. Buches. Freilich werden wir dabei, auf die Gefahr hin, eines unmittelbaren Widerspruchs gegen unser eigenes Vorhaben beschuldigt zu werden, mit einer Hypothese beginnen. Die Multiplicationsmethode des Apollonius nämlich konnte sehr wohl einen Theil des Werkes jenes Gelehrten gebildet haben, in welchem nach Eutokius eine genauere Kreisberechnung als die des Archimedes vorgetragen wurde, des Werkes, dessen Titel man früher Okytoboos las, während nach seit 1854 vorhandenen, wenn auch nicht allgemein bekannten Untersuchungen der richtige Name Okytokion lautete*. Der Name „Mittel zur Schnellgeburt" passt in der That auf einen sogenannten Rechenknecht, als dessen Fragment wieder eine Multiplicationsmethode gelten kann, welche alle Zahlen auf ihre Pythmenes zurückführt, d. h. auf das, was bei unserer Schreibweise die Ziffern sind, die von ihrer Rangordnung losgetrennt in Rechnung treten und nun erst in zweiter Linie eine neue Rangordnung erhalten. Zwei Dinge sind es, auf die wir hinweisen möchten. Einmal sind die Specialfälle der Rangmultiplicationen (also Zehner mal Zehner, Zehner mal Hunderter, Hunderter mal Hunderter u. s. w.) sorgfältig unterschieden und einzeln hervorgehoben. Aehnliches, wenn auch nicht Gleiches, bieten uns die bei Boetius und seinen Nachfolgern auseinandergesetzten Multiplicationsregeln. Zweitens spielen in diesem ganzen Abschnitte des Pappus die Buchstaben des Alphabetes eine doppelte Zahlenrolle. Bald treten sie mit dem besondern Zahlenwerthe auf, welchen griechische Uebung ihnen beizulegen pflegte, $\alpha = 1$, $\gamma = 3$, $\iota = 10$ u. s. w., bald erscheinen sie als allgemeine Zahlbezeichnungen ohne Rücksicht auf jenen täglichen Gebrauchswerth, vielmehr so, wie man es erst aus dem späten Mittelalter bei Nemorarius und bei dem Verfasser des *Algorithmus demonstratus* kennt, welche man als die ersten Vorläufer des Vieta in der Buchstabenrechnung zu rühmen liebt. Wir finden bei Pappus und bei Diophant entschiedene Spuren des gleichen Gedankens, bei dem Erstgenannten in noch entwickelterem Zustande als bei dem Letzteren, einigermassen räthselhaft, wenn Pappus schon zu Ende des 3. Jahrhunderts, also vor dem grossen griechischen Algebraiker lebte.

Im 3. Buche sind vier verschiedene Abhandlungen vereinigt. Die erste beschäftigt sich mit der Aufgabe, zwischen zwei gegebene Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten, also mit der Aufgabe, deren specieller Fall als delisches Problem oder als Problem der Würfelverdoppelung bekannt ist. Pappus hat uns hier Methoden des Eratosthenes, des Nikomedes, des Heron aufbewahrt, welche dadurch an Werth nicht einbüssen, dass sie auch in anderen Berichten vornehmlich des Eutokius vorkommen. Gerade diese Controle ist von Wichtigkeit und belehrt uns, dass die Gedanken der einzelnen Geometer in den verschiedenen Berichten gut wiedergegeben sein müssen, mögen auch besonders für die Methode des Eratosthenes geringe Abweichungen stattfinden. Pappus knüpft noch eine ihm eigene Methode zur Lösung derselben Aufgabe an und verlässt dann den Gegenstand. — In der zweiten Abhandlung lehrt Pappus zunächst die drei verschiedenen Mittel, welche zwischen zwei Linien bestehen, das arithmetische, das

* Vergl. z. B. Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert, Erlangen 1869, S. 73, wo die Originalabhandlungen genannt sind.

geometrische und das harmonische Mittel (von welchen übrigens auch in den einleitenden Capiteln der ersten Abhandlung des 3. Buches schon die Rede war) an einer und derselben Figur zur Erscheinung zu bringen. Aber dieses geometrische Problem dient ihm nur zum Anknüpfungspunkte für eine ganze Lehre von den Medietäten, in der Ausdehnung, in welcher griechische Schriftsteller dieser Formen sich bedienten. Die Auseinandersetzung des Pappus steht nach unserem Geschmacke weit über der des Nikomachus. Namentlich zeugt die gemeinsame Definition der drei hauptsächlichen Medietäten von einem erhöhten wissenschaftlichen Standpunkte; ist es doch heute noch von Interesse, dass eine Linie b arithmetisches, geometrisches oder harmonisches Mittel zwischen zwei Linien a und c sei, je nachdem die Differenzen $a-b$ und $b-c$ das Verhältniss von $a:a$ oder von $a:b$ oder von $a:c$ besitzen. Auch eine Tabelle muss hier erwähnt werden, welche Zahlenbeispiele für sämmtliche zehn den Griechen bekannte Formen stetiger Proportionen zwischen drei Zahlen zusammenstellt. — Die dritte Abhandlung beschäftigt sich wieder mit einer andern Untersuchung. Der Satz I, 21 der Euklidischen Elemente ist allgemein bekannt, dass, wenn innerhalb eines Dreiecks ein Punkt gewählt und mit den Endpunkten der Grundlinie geradlinig verbunden wird, die Summe dieser Geraden kleiner ausfällt, als die Summe der sie umfassenden Dreiecksseiten. Ganz anders, wenn die inneren Geraden nicht nach den Eckpunkten, sondern nach zwischen denselben liegenden Punkten der Dreiecksgrundlinie gezogen werden. Alsdann kann die Summe der inneren Geraden unter Umständen ebenso gross sein, sie kann auch mehr betragen, als die der umfassenden Seiten, und zwar in mannigfachen Abstufungen. Diese verschiedenen Fälle behandelt nun Pappus ausführlich, wobei der drittletzte Satz nicht unerwähnt bleiben soll. Es ist der 38. (*pag.* 126 *lin.* 19 *ed. Hultsch*), nach welchem zwei Parallelogramme gefunden werden können, deren Seiten ein gegebenes Verhältniss besitzen, während die Flächenräume in einem andern, gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehen. Dass dieser Satz jener unbestimmten Aufgabe vergleichbar ist, welche Referent bei Heron von Alexandrien und bei Maximus Planudes nachgewiesen hat (vergl. Die römischen Agrimensoren, S. 66), dürfte mehr als nur Zufall sein, dürfte zum Mindesten zum Belege dafür dienen, dass es den Griechen nicht fremd war, sich mit derartigen Aufgaben zu beschäftigen. — Die vierte Abhandlung geht zur Einbeschreibung der fünf regelmässigen Polyeder in die Kugel über, bei welcher die Sphärik des Theodosius von Tripolis mehrfach benutzt, aber auch ergänzt wird.

Das 4. Buch zerfällt gleichfalls in mehrere Abtheilungen, wennschon die Sonderung derselben nicht so auffällig ist, wie im 3. und im nachfolgenden 5. Buche. Es beginnt mit der Lehre von den Kreistransversalen, an welche sich die Aufgabe knüpft, den drei einander äusserlich berührende Kreise umschliessenden Kreis zu construiren. Noch andere Berührungsaufgaben von mehr als zwei Kreisen vollenden das, was wir die erste Abhandlung des 4. Buches nennen möchten. Auf sie folgen eine Anzahl von Sätzen aus der Lehre von der Archimedischen Spirale, sowie von der Nikomedischen Konchoide und darauf eine ziemlich ausgedehnte Abhandlung über die Quadratrix des Dinostratus, in welche verschiedene andere Untersuchungen sich ziemlich naturgemäss einfügen. Die Verwendung der Quadratrix zu dem Zwecke, von welchem sie den Namen führt, zu welchem sie folglich auch erfunden sein dürfte, lässt es wünschenswerth erscheinen, sie auf mehr als eine Art entstehen zu sehen, und so ergiebt sich die Betrachtung der Beziehungen zwischen Spirale und Quadratrix, muthmasslich der ersten projectivischen Beziehungen, welche in der Geschichte der Geometrie zu erwähnen sind. Diese Betrachtung führt weiter zu einer Linie doppelter Krümmung, nämlich zur Spirale auf der Kugeloberfläche, und damit zu jener berühmten Complanation eines Theiles der Kugeloberfläche, dem einzigen Abschnitte des 4. Buches, der schon Montucla's Aufmerksamkeit erregte und nachher mit Zurückgreifen auf die bei Pappus vorhergeschickten Sätze in Chasles' Geschichte der Geometrie mit verdientem Lobe ausführlicher besprochen worden ist. Dieselben Capitel hat auch Herr Gerhardt in seinem Programm über Pappus in recht gelungener Weise ins Deutsche übersetzt. Die Quadratrix liefert nicht nur die Quadratur des Kreises oder, genauer gesagt, die Rectification des Kreisumfanges, sie findet auch Verwendung bei Behandlung der Aufgabe von der Dreitheilung des Winkels. Es ist häufig bemerkt worden, dass diese Aufgabe mit der der Würfelverdoppelung und der Kreisausmessung die höhere Geometrie des griechischen Alterthums hervorrief. Ihre ersten Spuren sind vielleicht ebenso frühzeitig vorhanden gewesen, wie die der Kreisausmessung. Wenn letztere bereits im 17. Jahrhundert bei den Egyptern geübt wurde, so haben muthmasslich um dieselbe Zeit die Babylonier eine Dreitheilungsaufgabe eines Winkels sich vorgelegt, von welcher ein Bruchstück im britischen Museum in London entdeckt worden ist. Zu der sogenannten Trisectionsaufgabe wendet sich auch Pappus. Er löst sie mittels Kegelschnitten. Er zeigt die Verallgemeinerung der Theilung des Kreises in beliebigem Verhältnisse der Bögen mit Hilfe der Quadratrix, aber auch wieder der Spirale, und nun benutzt er die Quadratrix zur Auflösung dreier wichtiger Probleme: ein regelmässiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl in einen Kreis zu beschreiben; zu einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu construiren, welcher ein bestimmtes Längenverhältniss zur Sehne besitze; zu einander incommensurable Winkel zu zeichnen.

Es folgt das 5. Buch mit seinem merkwürdigen Gegenstande. Welcher moderne Leser möchte sich nicht überrascht fühlen, hier in griechischem Texte Untersuchungen über das isoperimetrische Problem vorgetragen zu finden, welche an Eleganz, an Strenge, an Leichtverständlichkeit der angewandten Methoden das Erstaunlichste leisten? In einer ersten Abtheilung ist bewiesen, dass von allen ebenen Figuren mit gleichem Umfange der Kreis den grössten Flächeninhalt besitze; nunmehr zum Raume übergehend, lehrt Pappus in der zweiten Abhandlung die sogenannten Archimedischen Körper kennen und zeigt, dass bei gleicher Oberfläche Kegel sowohl als Cylinder kleineren Rauminhalts als Kugeln sind; endlich führt er in der dritten Abtheilung den Beweis, dass von den fünf regelmässigen Körpern, welche ihrer Verwendung im Timäus wegen die platonischen Körper heissen, bei gleicher Oberfläche stets der mehreckige den grösseren Inhalt einschliesse. Wenn wir nicht anstehen, Pappus als Verfasser dieses 5. Buches in gleichem Maasse wie aller übrigen anzuerkennen, so haben diese Worte einen zweifachen Sinn. Pappus, meinen wir, war der Schriftsteller, dem wir dieses 5. Buch verdanken; aber freilich können wir nicht mit Bestimmtheit Auskunft darüber geben, bis zu welchem Grade ihm das Lob des Erfinders, bis zu welchem das des Sammlers und Erklärers zukommt. Die erste Abtheilung wenigstens scheint der Hauptsache nach dem Zenodorus entnommen zu sein, wofür ein doppeltes Zeugniss vorliegt. Theon von Alexandrien (*ed. Halma*, Bd. I S. 33) theilt in seinem Commentar zum I. Buche des Almagestes fast genau dieselben Sätze über isoperimetrische Figuren oft bis zum Wortlaute mit Pappus übereinstimmend, wie er ausdrücklich erklärt, nach Zenodorus mit; und in diesem Auszuge bei Theon findet sich der Name des hohlwinkligen Vierecks κοιλογώνιον, welcher nach Proklus (*ed. Friedlein* S. 165) von Zenodorus herstammt. Nokk hat in einem sehr interessanten Freiburger Lycealprogramm von 1860 auf diese Uebereinstimmungen hingewiesen. Wer im Uebrigen Zenodorus war, wann er, der bei Pappus und Theon Benutzte, der selbst Archimedische Schriften Anführende, innerhalb dieser weit voneinander liegenden Grenzjahre 200 vor und 300 nach Christus lebte, das schwebt völlig im Unklaren, nachdem es sich durch den jetzt bekannten correcten Text des Proklus herausgestellt hat, dass Zenodorus und Zenodotus zwei verschiedene Persönlichkeiten, Angaben in Betreff des Letztern also für den Erstern nicht verwerthbar sind. Ob eine mit Hindurchgang durch eine arabische Uebersetzung angefertigte, spätestens im 14. Jahrhundert entstandene Bearbeitung der Lehre von den isoperimetrischen Figuren, welche Herr Curtze nach brieflichen Mittheilungen in einer Handschrift entdeckt hat, weitere Auskunft gewähren, vielleicht sogar die Frage nach der Lebenszeit des Pappus zur Entscheidung bringen kann, darüber haben wir nicht das Recht vorgreifende Vermuthungen auszusprechen. Die zweite Abtheilung des fünften Buches muss wohl, soweit sie die Archimedischen Körper betrifft, auf den Erfinder derselben sich zurückführen lassen, doch ist dieses auch Alles, was wir behaupten können. Wo und bei welcher Gelegenheit Archimed die von regelmässigen Vielecken zweierlei Art begrenzten Körper beschrieb, darüber weiss man nicht das Geringste. Das 5. Buch des Pappus ganz allein nennt uns überhaupt diesen Gegenstand, der bis auf die Neuzeit ziemlich wenig beachtet worden ist. In dem zweiten Theile der Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch (Berlin 1807) findet sich, soviel wir wissen, das erste etwas ausführlichere Verweilen bei diesen Körpern, deren Netze abgebildet sind*.

Mit dem 5. Buche schliesst der heute unserem Referate sich unterbreitende 1. Band der neuen Ausgabe. Unwillkürlich sind wir bei dessen Anzeige etwas von dem Ziele abgekommen, auf welches wir eigentlich unsere Richtung zu nehmen beabsichtigten. Wir sind nicht eingegangen auf die Anmerkungen, durch welche Herr Hultsch seine Ausgabe bereichert hat; wir haben dagegen nicht unterlassen, auf Einzelnes aufmerksam zu machen, wovon der Herausgeber sicherlich in seinem 3. Bande noch handeln wird. Für letztere Ueberschreitungen dürfte eine Nachbewilligung uns nicht leicht versagt werden. Um so mehr bedarf die erstgenannte Lücke unseres Berichtes einer Entschuldigung. Sie beruht darauf, dass wir die Unmöglichkeit erkannten, solche kurze Anmerkungen zu besprechen, ohne in ausführlichster Weise bei dem Texte uns aufzuhalten, zu welchem sie jedesmal gehören, ohne unsere Besprechung dadurch weit über die Grenzen hinauswachsen zu sehen, die wir ihr doch stecken müssen. Mögen darum unsere Leser sich mit der Versicherung genügen lassen, dass aus jenen Anmerkungen der erheblichste Nutzen bei dem Studium des Werkes zu ziehen ist, dass sie würdig sich zeigen der Uebersetzung, würdig der ganzen Ausgabe, auf deren weitere Bände zuverlässig nicht blos der Unterzeichnete mit freudiger Erwartung gespannt ist.

Cantor.

Einleitung in die theoretische Mechanik, von Dr. F. Narr. Leipzig, B. G. Teubner.

Das Herrn Dr. v. Jolly gewidmete Werkchen stellt sich die Aufgabe: „Leser, welche mit den Elementen der höhern Analysis vertraut sind, auf einem möglichst einfachen, aber streng wissenschaftlichen Wege in die Mechanik einzuführen und auf ein gründliches Studium derselben, der theoretischen Physik überhaupt, vorzubereiten." Auf einem Raume von 350 Seiten gr. 8^0 werden der Reihe nach folgende Theile der Mechanik behandelt.

S. 1—9: Einleitung; die Phoronomie als Theil der Mechanik und die mathematischen Hilfsmittel zur Behandlung phoronomischer Probleme.

* Vergl. § 125 (S. 149—151) und Fig. 48—57 des im Texte genannten Buches.

— S. 10—71: Allgemeine Charakteristik der Bewegung eines Punktes im Raume. Die verschiedenen möglichen Bahnen eines sich bewegenden Punktes werden besprochen und die dabei auftretenden charakterisirenden Elemente genauer hervorgehoben und ermittelt. Die Begriffe von Zeit und Geschwindigkeit treten auf, wodurch die weitere Eintheilung der Bewegung eines Punktes in gleichförmige und ungleichförmige sich von selbst darbietet. Mehrfach betont oder berücksichtigt wird die Zerfällung einer Bewegung in ihre einfacheren Bestandtheile, namentlich durch Projection auf gerade Linien. — S. 72—109 behandelt die „Aequivalenz der Bewegungen", d. h. Zusammensetzung und Zerlegung von Bewegung und Geschwindigkeit nach der Lehre vom Parallelogramm. — Auf Seite 110—140 wird besprochen „der veränderliche Charakter der Bewegung eines Punktes". Es tritt hier der Begriff Beschleunigung auf und es werden mit ihm ganz analoge Betrachtungen vorgenommen wie im vorigen Abschnitte mit dem Begriffe Geschwindigkeit. — Im vierten Abschnitte endlich, überschrieben „Die Grundlinien der Dynamik", von S. 141—163 tritt noch der Begriff von Kraft und Masse auf und es werden natürlich hier auch die Maasse, nach denen Kraft und Masse in Rechnung zu bringen sind und die bekannten Zerlegungen und Zusammensetzungen der Kräfte auf Grund der Resultate des vorausgehenden Abschnittes genauer besprochen.

Der ganze übrige Theil des Werkes enthält nun noch von S. 164 bis 350 die Mechanik des materiellen Punktes, und zwar von S. 166 bis 283 die Statik und Kinetik des freien materiellen Punktes, von Seite 283—341 Statik und Kinetik des materiellen Punktes, der gezwungen ist, auf einer gegebenen Linie oder Fläche zu bleiben. Endlich wird noch der Raum von S. 341—350 der Betrachtung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten gewidmet.

Die in diesem letzten oder vierten Abschnitte allein vorkommenden Beispiele und Anwendungen der theoretischen Resultate enthalten die Bewegung eines materiellen Punktes infolge einer constanten Kraft, wenn die Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der wirksamen Kraft stattfindet. Die Bewegung wird berechnet entweder ohne oder auch mit Rücksicht auf den Widerstand des Mediums, dieser Widerstand entweder proportional der ersten oder auch der zweiten Potenz der Geschwindigkeit des materiellen Punktes angenommen. Weiter wird betrachtet die Bewegung eines materiellen Punktes vom Ruhezustande aus infolge einer wirkenden Centralkraft. Von krummlinigen Bewegungen wird behandelt die Wurfbewegung im leeren Raume und im widerstehenden Medium, wobei im letzteren Falle der Widerstand wiederum wie oben abhängig von der Geschwindigkeit angenommen wird. Als Beispiele für die Bewegung auf vorgeschriebener Bahn sind behandelt die Bewegung auf der schiefen Ebene, dem Kreise, die Pendelbewegung im leeren Raume und im widerstehenden Medium. Den Schluss bilden die etwas ausführlicher behandelten tautochronen Bewegungen.

Hinsichtlich der Durchführung dieser Beispiele ist zu sagen, dass mehr Rücksicht genommen ist auf directe und strenge Ableitung der Resultate, als auf sogenannte Eleganz.

Wie schon die vorstehende Inhaltsangabe ohne Weiteres zeigt, beruht die Besonderheit des vorliegenden Werkes nicht in der Vorführung von neuen Resultaten, sondern in der Anordnung des ganzen verarbeiteten Stoffes. Das Werk soll eine Einleitung in das Studium der Mechanik bilden, muss also als Versuch bezeichnet werden, von dem nur die Zukunft wissen kann, ob er glücklich gemacht ist.

Lobenswerth erscheint dem Referenten die stete Berücksichtigung der geschichtlichen Entwickelung der vorgetragenen theoretischen Resultate; übrigens giebt es aber doch so Manches, an dem er Anstoss genommen hat. Es war zuerst eine selbst für Anfänger, „die mit den Anfängen der höhern Analysis vertraut sind", zu breite Diction, die noch dazu, wie namentlich im dritten Abschnitte auffällig wird, durch einen häufig recht langen Periodenbau schwer geniessbar wird. Die räumlich weit voneinander getrennt behandelten Begriffe von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft mussten auf Wiederholungen führen. Im ersten Abschnitte hätte Referent mehr Beispiele gewünscht, die ja immer für das erste Studium so wirksam und instructiv sind.

Um zu Einzelheiten überzugehen, so fiel Referenten gleich der Anfang des ganzen Werkes auf, wo die Mechanik definirt wird als „die Wissenschaft von den Bewegungen der Naturkörper". Dem gegenüber sagt Kirchhoff in seinem jetzt erscheinenden Werke: „Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben". Auf S. 166 tritt der Schwerpunkt wie ein *Deus ex machina* auf, indem noch dazu behauptet wird, dass die höhere Mathematik auf ihn führe, um die Bewegung eines Körpers zu behandeln. Nun enthalten aber schon sehr elementare Lehrbücher der Mechanik die Theorie des Schwerpunktes ziemlich vollständig. Endlich nennt noch der Verfasser auf S. 238 das halbe Product aus Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit lebendige Kraft. Hier neue Benennungen gegen die althergebrachten einzuführen, kann nur verwirrend wirken.

Th. Kötteritzsch.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 31. März 1876.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathemat.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. 13. Bd., 3. Abth. München, Franz. 10 Mk. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 11. Jahrg., 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Repertorium für Experimentalphysik, physikal. Technik und Instrumentenkunde, herausgegeben von Ph. Carl. 12. Bd. (6 Hefte). 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 19 Mk. 20 Pf.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von J. C. Poggendorff. Ergänzungsbd. 7, Heft 1—4. Leipzig, Barth. à 4 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von Poggendorff. Jahrg. 1876 (12 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Barth. pro compl. 31 Mk.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, für das Jahr 1878; redig. v. W. Förster und F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Annuario marittimo per l'anno 1876. 26. *Annata.* Triest, literar.-artist. Anstalt. 6 Mk.

Reine Mathematik.

Günther, S., Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Weber, H., Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Riemann, B., Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendungen. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

Greve, A., Ein Problem aus der Variationsrechnung. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Diekmann, O., Einleitung in die Lehre von den Determinanten u. ihrer Anwendung. Essen, Bädeker. 1 Mk.

Harmuth, Th., Beiträge zur Theorie der Function $E[x]$. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Günther, S., Das independente Gesetz der Kettenbrüche. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Hermes, O., Elementaraufgaben aus der Algebra. Berlin, Winckelmann & S. 1 Mk. 60 Pf.

Bardey, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung. 5. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Fraum, W., Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung. (Dissert.) Tübingen, Fues. 1 Mk.

Durège, H., Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Uth, K., Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. Cassel, Fischer. 1 Mk.

Hablützel, J., Lehrbuch der synthetischen Geometrie. 2. Bd. Leipzig, Mentzel. 2 Mk. 25 Pf.

Angewandte Mathematik.

Bauernfeind, C. v., Elemente der Vermessungskunde. 5. Aufl. 2 Bde. Stuttgart, Cotta. 15 Mk.

Liebenam, A., Lehrbuch der Markscheidekunst und praktischen Geometrie. Leipzig, Mentzel. 9 Mk.

Kirchhoff, G., Vorlesungen über mathematische Physik. 3. Lief. d. Mechanik. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Clausius, R., Die mechanische Wärmetheorie. 2. Aufl. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

Physik und Meteorologie.

Lommel, E., Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes. Erlangen, Besold. 30 Pf.

Mönnich, P., Untersuchungen über die scheinbare Ortsveränderung eines leuchtenden Punktes, herbeigeführt dch. ein von zwei Parallelebenen begrenztes lichtbrechendes Medium. Rostock, Werther. 1 Mk. 20 Pf.

Himstedt, F., Ueber die Schwingungen eines Magneten unter dem Einflusse einer Kupferkugel. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

Zetzsche, K., Handbuch der elektrischen Telegraphie. 1. Bd. 1. Lief. Berlin, Springer. 4 Mk. 60 Pf.

Scheffler, H., Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Principien der abstracten Wissenschaften. 1. Thl. 1. Lief. Leipzig, Förster. 10 Mk.

Recknagel, G., Compendium der Experimentalphysik nach Jamin's *Petit traité de phys.* 5. Abthlg. Stuttgart, Meyer & Zeller. 2 Mk. 40 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Copernico e le vicende del sistema copernicano in Italia nella seconda metà del secolo XVI e nella prima del XVII con documenti inediti intorno a Giordano Bruno e Galileo Galilei. Discorso letto nella R. Università di Roma in occasione della ricorrenza del IV Centenario di Niccolò Copernico dal Professore Domenico Berti, Deputato al Parlamento. Roma. Tip. G. B. Paravia e C. 1876. — 255 S. in 8°.

Obgleich Italien nicht das Glück zu Theil geworden ist, dem Nicolaus Copernicus Geburtsland zu sein, so war es dennoch das erste Land, welches seine Lehre erweiterte, aufklärte und ins rechte Licht setzte, indem es sie mit neuen Beobachtungen und Beweisgründen bereicherte, stärkte und befestigte, und durfte folglich mit vollem Rechte sich den Bürgern von Thorn und Krakau bei der Feier des IV. Jahrhunderts seines Geburtsfestes zugesellen. Bei dieser Gelegenheit wetteiferten Rom, Bologna* und Padua** in dem Bestreben, das Andenken des Unterrichts, den Copernicus bei uns gab und erhielt, unvergänglich zu erhalten.

In der Rede, deren Titel oben angegeben ist, und die in der Universität zu Rom öffentlich gehalten wurde, nahm sich Berti vor, den äusserst dunkeln Zeitraum von des Copernicus Leben an den italienischen Universitäten aufzuhellen, und über die Schicksale und die Art des Kampfes, den dessen System im XVI. Jahrhundert und in der ersten Hälfte des XVII. in Italien entzündete, zu sprechen.

---

* *Commemorazione di Nicolò Copernico nella R. Università di Bologna. Bologna, 1873.*

** *Il quarto centenario di Nicolò Copernico nell' Università di Padova. Padova, 1873.*

So wenig übereinstimmend die Meinungen über die von Copernicus in seiner ersten Jugend gemachten Studien und die von ihm besuchten Schulen erscheinen, so ist es doch ausser Zweifel, dass er innerhalb des Jahres 1496, nämlich als er das 23. Jahr seines Alters erreicht hatte, mit dem Wunsche, unsere Schulen zu besuchen, unser Land betrat und schon am Anfange des Jahres 1497 in Bologna der Beobachtungen des Himmels sich befleissigte. Und hier ergreift Berti die Gelegenheit, um mit Schärfe und Tiefe über die Zustände unserer damaligen Universitäten, über die Professoren, die an denselben lehrten, über die Methoden, die man anwendete, zu handeln. Dies war in der That der Zeitpunkt, in welchem Italien unter allen europäischen Nationen durch Geistesübung und -Kraft, durch Gelehrsamkeit und wissenschaftliche und literarische Untersuchungen den Vorrang hatte, während man im Uebrigen sagen kann, dass das ganze Jahrhundert hindurch, welches sich zum Ende neigte, es keinen Fremden von irgendwelchem Ruhme gab, der nicht in Italien mathematische Wissenschaften gelehrt hätte, noch dass es in dieser Zeit irgend eine grosse Entdeckung gab, die nicht an unseren hohen Schulen Anfang, Zunahme und schnelle Veröffentlichung gefunden hätte.

Unter den Fremden, die unsere Universitäten im XV. Jahrhundert besuchten, zählte man viele Polen, und im kurzen Zeitraume zwischen 1454 und 1480 lehrten wohl vier Polen Astronomie zu Bologna. Als Copernicus nach Bologna kam, blühte diese hohe Schule durch Anzahl der Studenten, durch Glanz und Fähigkeit der Lehrer, und obgleich er sich in die Facultät der Rechte einschreiben liess, war er dennoch sicherlich von der Liebe zu den astronomischen Lehren und vom Wunsche, sich in den Studien der mathematischen Wissenschaften und der griechischen Sprache zu vervollkommnen, nach Italien getrieben; denn den Behauptungen Gassendi's und Pulkowski's entgegen sagt Berti, dass Copernicus dieser letztern ganz unwissend war.

Unter den Männern, deren Vorlesungen er mit Sicherheit besuchte, ergiebt sich als Lehrer von Copernicus, einer langen ununterbrochenen Sage nach, die sich in und ausserhalb der Universität von Bologna erhält, der Ferrarese Dominicus Maria da Novara. Mit den mündlichen Ueberlieferungen stimmen die Thatsachen überein und Berti beweist seine Aussage mit einer Menge unwiderleglicher Urkunden, so dass, was Gassendi schrieb, nunmehr vollständig gerechtfertigt erscheint, dass nämlich Copernicus vom Ruhme Dominicus Maria's angezogen nach Italien kam, und ihre Zusammenkunft bildet den Zeitpunkt, in welchem Copernicus weit und breit das Feld der Sternkunde zu durchwandeln und die Beobachtungen des Himmels zu Rathe zu halten begann, indem er die Materialien, deren er sich nachher bediente, um darauf sein System zu gründen, sammelte.

Dominicus Maria's Verdienste, vorzüglich jene, welche die Sternkunde anbelangen, in welcher sichere und glänzende Spuren der von ihm gemachten Fortschritte sich erhalten haben, sind von Berti mit grosser Tiefe analysirt und geprüft. Die Bewegung der Erdaxe und die Bestimmung der im Almagest von Ptolomaeus katalogisirten Gestirne, sowie die Andeutung der Schiefe der Ecliptik sind Werke, die die Bedeutsamkeit seiner Lehren bezeugen und die hohe Achtung, in der er mit Recht gehalten wird, rechtfertigen.

Die grosse Liebe, die Copernicus für die mathematischen Wissenschaften hegte, steht uns Bürge, dass er die Schulen, in denen man diese lehrte, besuchte. Er wird also, nach Berti's Meinung, die Lectionen Scipio Ferri's benutzt haben, und durch die bei der Krakauer Universität begonnenen Studien war er nachher im Stande, in die Wissenschaft die Berechnung der Secanten einzuführen und weitläufig die trigonometrische Calculation zu behandeln. Auch in der griechischen Literatur konnte sich nach Berti's Bericht Copernicus in Bologna ausbilden, indem er den von Anton Codro Urceo, einem äusserst wunderlichen und gelehrten Manne, gegebenen Lectionen beiwohnte, und er benutzte das in unseren Schulen erlernte Griechische, ausser zur Uebersetzung der Briefe von Theophilactus, auch, um die astronomischen Fragmente jener Philosophen des Alterthums, die fast alle den Namen von Pythagoras erhalten, zu lesen und anzuführen. Berti glaubt, dass Copernicus zu Bologna, oder vielleicht in Padua, jenes griechische Wörterbuch von Craston, das jetzt mit anderen von ihm besessenen Büchern in der Bibliothek von Upsala aufbewahrt wird, postillirt habe. Berti glaubt, dass am Anfange des Jahres 1499 Copernicus sich wiederum zu Frauenburg habe sehen lassen, um in demselben Jahre nach Bologna zurückzukehren, und dass kurze Zeit nachher, nämlich gegen Ende März oder wenig vor November des Jahres 1500, er sich auf den Weg nach Rom machte.

Berti spricht sich nicht bestimmt über die Gründe aus, welche ihn haben bewegen können, sich nach Rom zu begeben, aber er ist nicht abgeneigt, zu glauben, dass das vom Papste Alexander VI. in jenem Jahre angekündigte Jubiläum und die hohe Ehre, in welcher bei der Universität Rom die mathematischen Studien standen, und der Wunsch, vor seiner Rückreise in das Vaterland die ewige Stadt zu besuchen, ebenso viele Gründe seien, die einen solchen Entschluss haben begünstigen können.

So gewiss die Thatsache ist, dass Copernicus zu Rom unter Beifall zahlreicher Studenten, Künstler und berühmter Männer gelehrt hat, ebenso ungewiss ist es, in welcher Berufsstellung er seinen Unterricht ertheilte. Sehr scharfsinnig untersucht Berti diesen Streitpunkt. In der That schreibt er: Und erstens können wir nicht recht begreifen, wie er, der im März 1500 vielleicht noch nicht in Rom, und im Mai 1501 schon abgereist war, bei angefangenem Schuljahre plötzlich das Amt eines ordentlichen oder ausserordentlichen Lehrers habe übernehmen, und im Jahre 1501 bei noch nicht geendetem Schuljahre niederlegen können. Zweitens ist es schwer zu erklären, wie die römischen Obrigkeiten einem unbekannten oder sehr wenig bekannten jungen Manne den Titel Professor verleihen konnten; und schwerer noch kann man begreifen, wie er ohne weitere Umstände angenommen und sogleich in der römischen Universität einen regelmässigen Cursus von Lectionen begonnen hätte. Andererseits meint Berti noch, Rom hätte ihn nicht ernannt und Copernicus hätte nicht angenommen, ohne davon dem Capitel von Frauenburg und dessen rechtmässigem Präses, dem Bischof, Nachricht zu geben, während davon keine Spur vorhanden ist. Gesetzt aber, er sei zum Professor ernannt worden, wie verliess er dann nach der Ernennung das Lehramt? Solcher Umstände wegen scheint dem Berti, dass Copernicus in der obenerwähnten kurzen Zeit zwar nicht regelmässig Mathematik lehrte, wohl aber über irgend einen der so vielen Gegenstände, die dem weiten Felde der Mathematik angehören, Lectionen gegeben habe. Der Stand der zu seinem Auditorium gehörenden Personen und der Titel Professor, welchen er statt des gewöhnlichen eines Magisters zu führen pflegte, stärken die Vermuthung Berti's, welche auch darin Bestätigung findet, dass man keinerlei Erwähnung eines so ehrenvollen Amtes in dem Beschlusse findet, durch welchen das Frauenburger Domcapitel den 27. Juli 1501, also gleich nach seiner Rückkehr aus Rom, ihm bewilligt, dass er wiederum auf zwei Jahre Studien halber verreise, wozu man ihm dasselbe zuwies, was man den Studenten zu geben pflegte. Es ist in der That nicht wahrscheinlich, dass, sollte Copernicus schon mit dem Titel eines Professors geziert worden sein, die Domherren ihm auf seine neue Studienreise kein Document mitgegeben hätten, welches in irgend einer Weise das von ihm an der Universität zu Rom bekleidete Amt andeutete.

Als Copernicus zum dritten Male nach Italien kam, nahm er seinen Aufenthalt in der einzigen Stadt, die mit dem gelehrten Bologna wetteifern konnte, in Padua.

Ueber des Copernicus Aufenthalt in Padua waltet die grösste Dunkelheit: auf Papadopoli's Aussage behaupteten Viele, dass Copernicus sich bei der Universität von Padua dem Studium der Philosophie und der Medicin widmete, und im Jahre 1499 in beiden Disciplinen den Doctorhut erwarb; aus den Urkunden aber, die man bei der Universität selbst aufbewahrt, erscheint dies als ungenau. Unter den Matrikeln der Polen, die sich in dem Universitätsarchiv befinden, sind die dem Jahre 1492 vorhergehenden nicht mehr vorhanden. Man findet nun zwar die Acten des medicinischen Collegiums in Bänden aufgezeichnet; aber die Doctorwürde, die Copernicus, wie man sagt, im Jahre 1499 erhalten haben sollte, findet weder bei diesem Jahre Erwähnung, noch findet sie sich in den Acten, welche den Zeitraum von 1489—1502 in sich begreifen. Es könnte freilich sein, dass Papadopoli jene Notiz der Doctorwürde aus fliegenden Papieren geschöpft habe, denn es geht aus den Acten des medicinischen Collegiums hervor, dass es Gebrauch war, nicht alle, sondern nur einige in denselben abzuschreiben. Dagegen bemerkt Berti, dass, sollte man auch die erwähnten Blätter zugeben, es dessen ungeachtet unmöglich wäre, dass sie für das Jahr 1499 die Ertheilung der Doctorwürde an Copernicus enthielten, da er sich in besagtem Jahre zu Bologna befand. Ueberdies ist es nicht annehmbar, dass das Domcapitel, dem Copernicus zugehörte, zugäbe, dass er im Jahre 1501, um Medicin zu studiren, nach Italien zurückkehre, nachdem er in genannter Facultät schon die Doctorwürde erhalten hatte. Aus diesen Gründen folgert Berti, dass die Acten der Polen in Padua für das Jahr 1499 die Doctorpromotion von Copernicus nicht enthalten konnten, und dass Papadopoli, was er über dieselben mittheilt, wohl nicht nach eigenem Augenschein, sondern nach Hörensagen wiederholt. Alles dies wird durch den Umstand bestätigt, dass Papadopoli nach mehreren Seiten hin sich als ein sehr unverlässiger und unverständiger Historiker zu erkennen giebt.

Dennoch ist, ungeachtet des allgemeinen Stillschweigens der gleichzeitigen Schriftsteller und der durch Papadopoli erzeugten Verwirrung, ausser Zweifel, dass Copernicus in Padua sich dem Studium der Medicin gewidmet hat. Denn es ist keine Spur, dass er zu diesem Zwecke vor seinem Aufenthalte in Italien oder nach demselben die Universitäten anderer Nationen besucht habe: und andererseits ist es gewiss, dass er sich auf die Medicin verlegt hatte und sie in seinem Vaterlande mit grossem Ruhme übte, und es ist beständige und bewährte Sage, dass er eben in den Schulen von Padua jene Wissenschaft erlernte: nur soll man nicht mit Papadopoli jene Thatsache auf die letzten Jahre des XV. Jahrhunderts, wohl aber auf die ersten des XVI., nach dem Aufenthalt zu Bologna und Rom beziehen. Während der drei Jahre seines Aufenthalts in Padua konnte Copernicus sich auch die Lectionen der Mathematik und der Astronomie zu Nutzen machen, und es ist ausser Zweifel, dass er diesen Umstand benutzte, um sich in dem Studium der griechischen Sprache zu vervollkommnen.

Nachher wendet Berti seine Aufmerksamkeit auf das unsterbliche Werk von Copernicus, dem er über 25 Jahre seines Lebens widmete, ohne den Trost zu haben, es vor der Rückkehr seiner grossen Seele zu Gott durch den Druck veröffentlicht zu sehen. Während aber Berti mit zahlreichen und kräftigen Gründen den Beweis führt, dass dieses Werk sein, ganz sein ist, unternimmt er zugleich, darzustellen, wie

Copernicus auf die Bewegung der Erde durch häufige Gespräche geleitet wurde, in welchen die italienischen Gelehrten mit mehr oder weniger Klarheit der Begriffe jenen Gedanken streiften. Indem Berti von der neuen Wissenschaft, die sich unabhängig von der Autorität des Aristoteles und der heiligen Schrift erhob, redet, erhebt er sich zu einer von der Liebe zur Wahrheit und Gerechtigkeit entflammten glänzenden Sprache: er schildert uns mit den lebhaftesten Farben jenen langen und harten Kampf, in welchem zwei schöne Persönlichkeiten sich gigantisch auszeichnen, und auf verschiedene Weise und mit verschiedenem tragischem Wechsel des Schicksals ihren Namen mit dem Triumph der Copernicanischen Ideen vereinigten: Giordano Bruno und Galileo Galilei!

Während in Deutschland Rhaeticus die Copernicanische Lehre, ohne sie zu erweitern, annahm, Reinhold unschlüssig blieb, Peucer sie als Hypothese bezeichnete, Tycho sie verstiess, Mästlin sie schwach und nur leise bekannte, und Kepler allein den Muth hatte, sie mit unvergleichlicher Kühnheit zu verkünden und öffentlich zu bekennen, ist man wohl ganz anders damit bei den Italienern verfahren.

Bruno, in der Blüthe seines Alters von Italiens Ufern auf jene Englands geschleudert, fordert die Gelehrten Oxfords und Londons auf, sich mit ihm den Copernicanischen Ideen anzuschliessen, ja er erweitert diese, er kleidet sie in dichterische Form und übergiesst sie mit dem glänzendsten und lebhaftesten Lichte. Berti hatte schon im Jahre 1868 über das Leben von Giordano Bruno ein äusserst schätzbares Werk veröffentlicht, in diesem neuen aber werden uns die Züge des unglücklichen Philosophen von Nola durch Hilfe neuer Urkunden mit mehr Lebhaftigkeit geschildert. Die erhabene Gestalt des Gelehrten erscheint uns mit einem neuen Lichte umstrahlt und lässt uns neue Thränen über das Schicksal dieses Unglücklichen vergiessen, der 57 Jahre nach der Ausgabe des Werkes des Copernicus unerschrocken den Scheiterhaufen bestieg, den letzten Blick auf jenen Himmel heftend, auf dessen Alleinbesitz seine unmenschlichen Scharfrichter Anspruch machten, und so die unüberwindliche Standhaftigkeit, Erhabenheit und Festigkeit seiner Begriffe und Ueberzeugungen durch den Augenschein erweisend. Der Asche jenes Scheiterhaufens entnahm die Wissenschaft zwei Begriffe: Erstens, dass im unbestimmten und grenzenlosen Raume unzählbare Welten gleichzeitig bestehen; zweitens, dass unzählbare Welten in einer nicht minder grenzenlosen Zeit sich aufeinander folgen. Diese Ideen erfüllten Kepler's Seele mit Begeisterung und Wunder, und ermunterten ihn in seinen Studien, so sehr, meint Berti, dass man dem Einflusse dieser Begriffe einige der schönsten Blätter des Sternkundigen von Weil zu verdanken hat. Beide, Bruno und Kepler, klatschen mit dichterischen Tönen der Harmonie der Gestirne lauten Beifall zu; während aber

Kepler sich beugt und zu Gott dem Schöpfer betet, identificirt sich Bruno mit demselben, weil der Uranfang des Guten Alles ist, was sein kann, und selbst nicht das Beste wäre, wenn es nicht Alles wäre.

Bruno lebte noch, als schon bei der Universität von Pisa in einem sehr jungen Alter Galileo lehrte, und die erhabene Persönlichkeit dieses grossen Italieners wird von Berti in seiner ganzen Vollständigkeit dargestellt. Die Entdeckungen von Galileo, die von ihm überstandenen Processe, weil er Worte des Heils und der Wahrheit den Worten der Heiligen vorgezogen hatte, seine beständigen Anstrengungen, um die Hindernisse, seine Gedanken und Gesinnungen offenbaren zu können, wegzuschaffen, das feindische Anstürmen der Peripathetiker und der Theologen, die durch des Pisaners Telescop eine von der ihrigen ganz verschiedene Natur erblickten, alles dies wird von Berti erklärt und bewunderungswürdig erläutert. Die wenig übereinstimmenden Meinungen über den Process des Galileo sind bekannt, und wir wissen es Berti Dank, dass er diesen Streitpunkt in neue Prüfung gezogen hat, indem er sehr viele unausgegebene und andere sehr wenig bekannte Documente, die er in der Folge sammelte, zu langen und mühevollen Untersuchungen benutzte.

Nach Berti's Meinung sind drei Hauptpunkte zu berücksichtigen: 1. der Brief von Galileo an Benedict Castelli, mit dem der Process anfängt; 2. die Untersuchung des Buches der Sonnenflecken, mit welcher er fortgesetzt wird; 3. zum Beschluss die Warnung des Inquisitionsgerichts und das Decret der Indexcongregation, mit dem er endigt.

Aus den zum erwähnten Briefe von dem Inquisitionsgerichte gemachten Beobachtungen, die nach dem Texte von Berti angeführt werden, ergiebt sich, dass keineswegs die mehrere Male wiederholte Behauptung bestehen kann, dass Galileo nicht wegen seiner astronomischen Lehren, sondern wegen seiner theologischen Meinungen verurtheilt worden sei; dass Berger, Feller, Monsignor Marini und Andere in einer der Wahrheit untreuen und der Religion schädlichen Weise geschrieben haben, als sie schrieben, dass Galileo der Meinung war, man sollte die Bewegung der Erde als Glaubenslehre anerkennen und durch Stellen der heiligen Schrift die Meinung stützen, dass die Sonne still stehe und die Erde sich bewege; dass, was Pater Olivieri schrieb, kindisch und romanhaft erscheint, nämlich dass das Inquisitionsgericht die Copernicanischen und Galileischen Lehren wegen der unzureichenden Beweise, die man dafür gab, verboten habe.

Von der grössten Wichtigkeit für die Geschichte dieses schweren Streitpunktes ist ein von Berti zuerst veröffentlichter Brief des Galilei an eine Person, deren Namen unbekannt ist. Mit vollem Rechte meint der Verfasser, dass man keine andere gleichzeitige Schrift in Tiefsinnigkeit der Lehre und Richtigkeit der Kritik mit diesem Briefe vergleichen könne. In diesem Briefe schliesst Galileo: „Die für mich ganz leichte, sichere und geschwindeste Art, zu beweisen, dass die Copernicanische Hypothese der heiligen Schrift nicht zuwider ist, wäre mit tausend Proben zu beweisen, dass sie eben wahr ist und dass die entgegengesetzte Ansicht auf keine Weise bestehen kann; denn da die Wahrheit sich nicht widersprechen kann, so ist es alsdann nöthig, dass jene und die heilige Schrift vollkommen übereinstimmen."

Und dass Galileo sehr dem Studium über Copernicus ergeben war und seine Lehre in grösstem Werthe hielt, beweisen augenscheinlich zwei Exemplare des Werkes *De revolutionibus* mit vielen von Galileo gemachten Randglossen. Diese zwei Bände bilden jetzt einen Theil der Galileischen Autographensammlung der Nationalbibliothek von Florenz; der eine ist von der Nürnberger Ausgabe des Jahres 1543, der andere von jener von Basel des Jahres 1566. Die Randglossen des ersteren sind nicht alle von der eigenen Hand des Galileo; vielmehr hat Berti Grund zur Behauptung, nur die erste Randbemerkung den Worten gegenüber „*Nicolaus Schonbergius Nicolao Copernico*" rühre von Galilei her. Die Randglossen des Exemplars der Ausgabe von 1566 sind zahlreicher und alle eigenhändig von Galileo.

Da der Brief an Castelli keinen Anhaltspunkt gab, gegen Galileo zu verfahren, untersuchten die theologischen Consultoren das Buch der Sonnenflecken und berichteten, man müsse die zwei Hauptgrundsätze verwerfen, die man vielmehr, wie folgt, umändern sollte:

Propositio prima.	*Censura.*
Sol est centrum mundi et omnino immobilis motu locali.	*Omnes dixerunt dictam propositionem esse stultam et absurdam in philosophia et formaliter hereticam, quatenus contradicit expresse sententiis Sacrae Scripturae in multis locis, secundum proprietatem verborum et secundum communem expositionem et sensum SS. Patrum et theologorum doctorum.*
Propositio secunda.	*Censura.*
Terro non est centrum mundi nec immobilis, sed secundum se totam movetur etiam motu diurno.	*Omnes dixerunt hanc propositionem recipere candem censuram in philosophia et spectando veritatem theologicam ad minus esse in fide erronea.*

Die Versammlung des Inquisitionsgerichts verurtheilte also als thöricht und philosophisch abgeschmackt und durchaus ketzerisch die Lehre, welche die Sonne in den Mittelpunkt unseres Planetensystems setzt, und ebenso thöricht und abgeschmackt in Philosophie, und was den Glauben anbelangt, mindestens irrig jene, die nicht die Erde als Centrum der Welt annimmt und ihr den täglichen Umlauf um sich selbst herum beilegt. Und da in diesen Beschlüssen weder das Buch der Sonnenflecken, noch jenes von Copernicus erwähnt wird, so folgert richtig Berti, dass das Inquisitionsgericht die neue Lehre an und für sich selbst verwarf und verurtheilte, abgesehen von jeder Beziehung zu den oben angeführten Büchern. Deshalb meint der Verfasser, dass, obgleich Viele und Galileo selbst geglaubt haben, dass es in dem Rechte der Gelehrten stände, sie *ex suppositione* beizubehalten, dennoch die durchaus bestimmten Ausdrücke, in welchen jene Beschlüsse verfasst sind, eine solche Erklärung zweifelhaft machen. Jedoch, wie auch deren Sinn sein möge, gewiss ist es, dass durch die in der Folge dem Galileo auf Befehl des Papstes vom Cardinal Bellarmino auferlegte Verpflichtung ihm auch das Recht, sich derselben als Hypothese bedienen zu können, genommen worden ist.

Die Persönlichkeit des Bellarmino wird lebhaft von Berti geschildert. Dieser Cardinal war zweifellos der gelehrteste und ansehnlichste Mann, der im Gerichte der Inquisition sass: in und ausser dem Vatican äusserst mächtig, hatte er einen grossen Antheil an der Verurtheilung des Bruno, verfasste und sprach die Warnung gegen Galileo aus, corrigirte das Buch von Copernicus, — kurz, er war der Vertreter der religiösen Autorität in allen ihren Verhältnissen zu dem Weltlichen, und während eines Zeitraumes von mehr als 20 Jahren war er die Personificirung des Widerstandes gegen die Wissenschaft, oder der Anstrengungen, um die Wissenschaft zu einer Sclavin der Theologie zu machen.

Berti unternimmt nicht, uns den berühmten Cardinal mit der fehlerhaften Methode abgetrennter Anführungen zu beschreiben, wie es einer gewissen Classe Kritiker zu thun gefällt, die geneigt sind, durch jedwedes Mittel vielmehr ihre Aufgabe, als jene der Wahrheit zu beweisen, wohl aber mit der Kraft und der Wirksamkeit eines wohlgeordneten Ganzen von Vernunftschlüssen und Thatsachen. Berti studirt den Bellarmino in seinen Büchern, welche jener dialectischen Gaben ermangeln, die dem Geiste Kraft geben und ihn in das Innerste des Gegenstandes zu dringen befähigen. So macht es uns Berti begreiflich, dass Bellarmino, gewohnt, in der Ueberlieferung das höchste Kennzeichen der Wahrheit anzuerkennen, und instinctmässig Allem zuwider, was von jener sich entfernte, und der nur den erhabensten Geistern eigenen Forschungskraft verlustig, zu philosophischen und streng wissenschaftlichen Untersuchungen untauglich war. Vollends dem Galileo gegenübergestellt und zu dessen Ankläger und Richter gemacht, tritt er in das wahre Licht, wird er kaum des Mitleids würdig.

Ein jetzt durch Berti zum ersten Male veröffentlichter Brief an Pater Anton Foscarini offenbart die Verwirrung, die in Bellarmino's

Sinne über die Lehren, die er beurtheilen sollte, herrschte, indem sich aus demselben mit der grössten Klarheit darthut, dass Galileo verlangte, dass man die Copernicanische Lehre als Glaubensartikel anerkenne, dass dagegen Bellarmino die entgegengesetzte Lehre der Unbeweglichkeit der Erde zu einer solchen Würde erhob.

So ist es, wie die beiden Grundsätze: Trennung der Wissenschaft von der Religion und Abhängigkeit der ersten von der zweiten zusammenstossen, der eine in der Person des Mathematikers von Pisa, der andere in jener des Cardinals von Montepulciano.

Auf den ebenerwähnten Brief und auf die von Theologen ihm entgegengesetzten Einwendungen antwortete Galileo mit drei noch ungedruckten, aber von Berti gesehenen Briefen, in welchen, da er ohne Rückhalt seine Gedanken darstellt, noch mehr der Abstand zwischen beiden Grundsätzen hervortritt, und hier bezeichnet er mit sicherer Hand die Grenzen, innerhalb welcher er sich zu halten gedenkt. Seine Gewohnheit der Beobachtung, seine grosse Liebe zur Wahrheit, die Achtung, die er für Thatsachen hegt, die Kritik, mit welcher er sie durchforscht, zwingen ihn bei Streitfragen, der Wahrheit, und nur der Wahrheit allein zu dienen.

Und hier machen wir einen Zwischensatz und nehmen von einem Versprechen Act. Berti macht sich in diesem Buche zu einer zweiten Auflage seiner Lebensbeschreibung von Giordano Bruno anheischig und lässt auch zugleich unverzüglich eine vollständige Ausgabe der Originalacten des Processes von Galileo, in deren Besitz er seit langer Zeit ist, hoffen. Es war zuerst seine Absicht, sie als Anhang zu einer Arbeit über das Leben von Galileo und die wissenschaftliche Philosophie im XVI. Jahrhundert zu veröffentlichen; aus Furcht aber, dass die ersehnte Veröffentlichung eine zu grosse Verspätung erleiden könnte, verspricht er, in einem Separatbande die Acten der zwei Processe von Galileo, wie er sie aus dem 1102. Bande, den man in dem geheimen Archiv des Vaticans aufbewahrt, abgeschrieben hat, herauszugeben.

Der zweite Process gegen Galileo entstand aus der Herausgabe der Gespräche über die zwei grössten Weltsysteme. Nach dem, was Berti für richtig hält, irren sich sehr jene Schriftsteller, welche, diesen zweiten Process mit dem ersten verwechselnd, glauben, dass man in diesem zweiten neuerdings den Werth der Copernicanischen Lehre untersucht habe, ohne zu bedenken, dass man diese schon als eine abgethane Sache halten sollte, und ebenso sollte man für ausgemacht halten, dass Galileo, ohne sich stark der Ketzerei verdächtig zu machen, darüber auf keine Weise reden durfte, noch konnte. Thatsächlich, wie Berti beweist, verlangte man nicht von Galileo in diesem zweiten Processe neue Beweise, noch strengte er sich an, irgend einen Grund vorzubringen, um einer als ketzerisch und abgeschmackt verurtheilten Lehre zu nützen;

er beschränkte sich also nur, zu sagen, dass er in seinen Gesprächen nicht der Meinung war, deren Wahrheit zu bestimmen, wohl aber die Gründe, die dafür und dagegen ständen, darzustellen, und dass er sie mit der Erlaubniss der rechtmässigen Obrigkeit dem Drucke habe übergeben lassen. Die Folgen dieses Processes sind wohl bekannt. Am 22. Juni schwur Galileo Galilei vor seinen Richtern kniend die Copernicanische Lehre ab. Die Gespräche der grössten Systeme wurden auf den Index gesetzt.

Die Verurtheilung des Galilei setzte dem Kampfe kein Ende. Im Jahre 1693, also 40 Jahre und mehr nach dem Tode von Galileo, schrieb Baldigiani aus Rom an Viviani: „Ganz Rom steht in Harnisch gegen die Mathematiker und die Physico-Mathematiker“, und in demselben Jahre schrieb ebenfalls aus Rom Alexander Aldobrandini: „Es handelt sich darum, 40 der besten Schriftsteller zu verbieten, die über die neuen Wissenschaften handeln, und unter diesen auch unsern armen Galileo.“ Wittenberger Theologen zeigten sich nicht minder feindselig gegen die Unabhängigkeit der Wissenschaft, als Römische. Luther und Melanchthon sind, was dies anbelangt, nicht nachgiebiger als Bellarmino. Sowohl die Reformatoren, als die Römischen Theologen kamen in dem Grundsatze überein, dass die Wissenschaft von der heiligen Schrift ihre Regelung und Richtung anzunehmen habe.

Die Entdeckung der neuen Welt und die Reformation, schreibt Berti, von denen die Neuzeit benannt wird, bewirkten in der menschlichen Gesellschaft keine so grosse Veränderung, wie die Bücher von Copernicus und Galileo und die Erfindung des Fernrohres. Diese zwei Männer sind in der Geschichte der Wissenschaft untrennbar. Sie haben verschiedene Schicksale des Lebens; aber die Bescheidenheit, die Liebe zur Wahrheit und die Standhaftigkeit, sie zu suchen, haben sie gleich. Beide verfahren so behutsam in ihren Behauptungen, dass sie kaum eine Hypothese vorauszusetzen wagen. Beide erweitern die Forschungskraft des Geistes durch seltene Begriffe und Lehren und durch neue, oder vorher nicht bemerkte tiefe Untersuchungen. In beiden findet sich Erhabenheit und Weite des Geistes, Ehrfurcht vor der Natur, fast ausserordentliche Originalität und Liebe für die Wissenschaft. Beide vernachlässigen oder achten so wenig den Ruhm, dass Copernicus sein Buch bei sich behält, und stirbt, ehe es gedruckt wird; und Galileo in seiner ländlichen Einsamkeit betrachtet und schreibt fast ohne eine Hoffnung, dass seine Werke von den Menschen gelesen werden können.

Copernicus wandte über 30 Jahre an, um sein Buch zu vollenden, mehr als 30 Jahre lang bemühte sich Galileo, um es zu vertheidigen, zu erweitern, zu erklären. Galileo war es, der die wissenschaftliche Augenscheinlichkeit der Copernicanischen Lehre förderud, sie mit vielen Thatsachen bekräftigte; er erleichterte ferner die Verständlichkeit durch den vortrefflichen Entwurf einer durch allgemeine, auf alle Gestirne ausgedehnte Gesetze gebildeten ebenso allgemeinen Physik. Deswegen behauptet Berti mit Recht, dass die reformirende Thätigkeit des Copernicus auf die Sternkunde beschränkt ist, während jene von Galileo über alle physischen Wissenschaften sich erstreckt.

Wir wissen nicht, ob es uns gelungen ist, ein hinreichend treues Bild dieser Arbeit von Berti zu geben; wir würden uns aber glücklich schätzen, wenn es uns gelungen wäre, dem deutschen Leser einen geringen Theil jener lebhaften Bewunderung einzuflössen, die wir diesem unserm Schriftsteller zollen, welcher zu den Bänden der Geschichte der Kämpfe des menschlichen Geistes um die Erlangung seiner Unabhängigkeit und Freiheit ein neues, sehr glänzendes Capitel hinzugefügt hat. Die aufrichtigen Freunde der Wahrheit haben allen Grund, Hrn. Berti dankbar zu sein, dass er in der Behandlung einer Aufgabe, die so sehr zu hohlen Declamationen und hochtönenden Phrasen Anlass giebt, sich lediglich mit dem Gegenstande zu identificiren wusste, sich daran genug sein liess, der Erklärer jener Geistesriesen zu sein, von denen man sich so ungern trennt, wenn man an das Ende des gelehrten Buches gekommen ist.

Dr. A. Favaro,
Professor an der königl. Universität zu Padua.

Galileo Galilei und die Römische Curie, nach den authentischen Quellen von Karl von Gebler. Stuttgart, Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung. 1876.

Wir haben bereits in der Allg. Zeitung (Nr. 93 Beilage und Nr. 94 des Jahrg. 1876) eine eingehende Besprechung dieses 27 Druckbogen starken Buches veröffentlicht und dabei unsere Uebereinstimmung mit den Ansichten des Verfassers kundgegeben. Wir können uns fast darauf beschränken, hier einfach auf unser citirtes ausführliches Referat zu verweisen, da es in dem Werke selbst sich wesentlich um Dinge handelt, welche seit 1864 den Lesern unserer Zeitschrift in grosser Häufigkeit und mit steter Rücksichtnahme auf das jüngst eröffnete Material zu Gesicht gekommen sind (Bd. IX S. 172—197 und Literaturzeitung zu Bd. IX, X, XIII, XVI, XVII); Herr v. Gebler — um es kurz zu sagen — steht auf derselben Seite, wie Wohlwill und Gherardi; er ist davon überzeugt, dass der Process des Jahres 1633 mit schlechten Hilfsmitteln begonnen und durchgeführt wurde, dass das sogenannte Protokoll von 1616, d. h. jenes unterschriftlose Actenstück vom 26. Februar 1616, nach welchem Galilei durch den Inquisitionscommissar Bruder Michel

Angelo Segnitius de Lauda das Verbot empfangen habe, die Lehre von der Bewegung der Sonne in irgend einer Weise zu lehren, ein Falsum ist, muthmasslich zu dem Zwecke verfertigt, um gegen Galilei eine Handhabe zu besitzen, um gegen ihn einschreiten zu können. Auch wir sind heute noch der gleichen Meinung und können weder die Versuche, welche Friedlein seiner Zeit anstellte, um das Protokoll zu retten, für geglückt ansehen, noch die eben dahin gerichteten Bestrebungen von Prof. Reusch in der Historischen Zeitschrift (Jahrg. 1875) und in dem Theologischen Literaturblatte (Jahrg. 1870 und 1873). Wenn neuerdings, wie aus der unmittelbar vorhergehenden Anzeige aus der treu berichtenden Feder von Herrn Favaro hervorgeht, Prof. Berti in Rom in seinem von uns bisher nicht zu Gesicht erhaltenen Werke gleichfalls die formelle Richtigkeit des Verfahrens gegen Galilei in jedem Punkte behauptet, wenn er sich dabei auf seine genaue Kenntniss sämmtlicher Acten beruft, deren Veröffentlichung er in Bälde zusagt, so müssen wir einfach unser Urtheil bis zu jener Veröffentlichung aufsparen.

Nur die Bemerkung können wir schon heute nicht unterdrücken, dass es immerhin kühn von Herrn Berti ist, die gewissenhaftesten Forscher des Irrthums zu zeihen und den Beweis des Irrthums der Zukunft vorzubehalten. Das lässt man sich gefallen in einem kleinen Aufsatze, welcher als Vorläufer einem Buche vorausgeschickt wird; bei einem selbst 255 Seiten starken Bande stellen wir wenigstens andere Anforderungen. Herr v. Gebler scheint gleich uns jenem künftigen Beweise gegenüber sich etwas skeptisch zu verhalten, denn in einer Anmerkung sagt er, dass das Berti'sche Werk ihm erst zugekommen sei, als die Drucklegung seiner eigenen Schrift nahezu vollendet war, und setzt hinzu: „Hingegen muss ich aber gestehen, dass jenes Werk, welckes den Galilei'schen Process nur sehr flüchtig berührt, meine Auffassung desselben in keiner Weise zu modificiren vermochte.“ Eine andere italienische Schrift: „*Urbano VIII e Galileo Galilei. Memorie storiche del sacerdote Sante Pieralisi, Bibliotecario della Barberiniana*“, *Roma* (Mailand, Brigola) 1875, etwa 24½ Druckbogen, scheint Herrn v. Gebler ganz unbekannt geblieben zu sein. Auch wir lernten ihren Titel und einen Theil ihres Inhalts erst durch die Recension von Prof. Reusch im Theologischen Literaturblatt vom 9. April 1876 kennen, welche deren Verfasser die Freundlichkeit hatte, uns zuzusenden. Pieralisi's Buch enthält offenbar Neues und Wichtiges, unter Anderem einen Brief des Inquisitionscommissars an den mit dem Papste in Castel Gandolfo verweilenden Cardinal Barberini vom 28. April 1633, in welchem über eine geheime Besprechung mit Galilei vom 27. April berichtet wird, von welcher man bisher keine Ahnung hatte. Der Versuch, die bekannten fehlenden drei Unterschriften unter dem Urtheile über Galilei als bedeutungslos zu schildern, dürfte dagegen verfehlt sein. Wenn beispielsweise gesagt wird, Cardinal

Barberini habe als Nepote selten an den Sitzungen theilgenommen, wie es Brauch gewesen sei, so möchten wir fragen, ob „grössere Freiheit in der Behandlung der Geschäfte‘ vorhanden war, wenn der Neffe des Papstes sich fernhielt, der Bruder aber anwesend war? Cardinal Antonio Barberini hat nämlich an den Verhandlungen theilgenommen, hat wenigstens das Urtheil unterschrieben. Aus dem Gebler-schen Buche müssen wir noch einen Gegenstand hervorheben. Der Verfasser hat durch eine genaue Vergleichung sich überzeugt, dass ein anonymer Aufsatz in den Historisch-politischen Blättern für das katholische Deutschland (München 1841), als dessen Urheber von clericaler Seite (Marino Marini, Beckmann u. s. w.) stets Prof. Clemens in Bonn genannt wurde, sich vollständig mit einer 1872 in Bologna erschienenen nachgelassenen Schrift des Dominicanergenerals Olivieri deckt, desselben, der in der Galilei-Literatur bereits durch das Gespräch bekannt ist, welches Biot 1825 mit ihm führte und welches im *Journal des savants* für 1858 abgedruckt ist. Dadurch entsteht die Frage, wie diese Identität zu erklären sei? Die nächstliegende Muthmassung musste dahin gehen, eine erst 1872 veröffentlichte, im Nachlasse eines Verstorbenen aufgefundene Abhandlung werde wohl eine Uebersetzung der deutschen, in ihrer Mache vortrefflichen, wenn auch auf wesentlich falschen Voraussetzungen beruhenden Arbeit sein, welche nur von den Ordnern jenes Nachlasses nicht richtig erkannt wurde. Dieser Auffassung stand das Datum des am 27. September 1845 erfolgten Todes von Olivieri keineswegs entgegen, und für sie sprach die unleugbare geistige Begabung von Clemens, dem Verfasser des in seinem Inhalte nahe verwandten schönen Buches „Giordano Bruno und Nicolaus von Cusa“ (Bonn 1847). Es hält schwer, sich zur Ueberzeugung zu bequemen, dass dieser Mann zu dem Handlangerdienste eines blossen Uebersetzers sich hergab und gestattete, dass man später, 1850, während er noch lebte, in einer officiellen Schrift ihn als Verfasser nannte, ohne dagegen Einsprache zu erheben. Auch dass der Herausgeber Bruder Tommaso Bonora vom Predigerorden angiebt, Olivieri habe jene Abhandlung 1840 geschrieben (mithin ein Jahr vor Erscheinen des deutschen Aufsatzes), würde keine zwingende Gewalt für uns haben, so zweifelsüchtig sind wir unbewiesenen Behauptungen von gewissen Seiten gegenüber geworden, seit wir vor vielen Jahren die Darstellung des Galileischen Processes durch Marino Marini studirt haben. Beweisend sind dagegen zwei Umstände. Erstens eine noch vorhandene Widmung der oftgenannten italienischen Abhandlung an Papst Gregor XVI., in welcher Olivieri sich geradezu als Verfasser nennt; zweitens ein französischer Auszug, der im Märzhefte 1841 der Pariser Zeitschrift *L'université catholique* unter dem Titel „*Galilée et l'Inquisition romaine*“ anonym erschien und der nach einer Aussage des Redacteurs im Novemberheft 1855 von Olivieri herrührt. Somit ist es unzweifelhaft erwiesen, dass Olivieri in der That jene Abhandlung verfasste, dass Clemens nur eine Uebersetzung für die Zeitschrift von Görres anfertigte. Herr v. Gebler hat gleichfalls diese Reihenfolge erkannt und zuerst darauf hingewiesen. Die Bemerkungen, welche wir beifügten, mögen zeigen, dass es immerhin nicht ganz überflüssig war, eine Begründung dieser Annahme auszusprechen.

CANTOR.

Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. Leipzig, 1876, bei B. G. Teubner. VII, 352 S. mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lithogr. Tafeln.

Der Titel giebt schon Rechenschaft darüber, was wir von dem gegenwärtigen Buche des ungemein productiven, auf historisch-mathematischem Gebiete wohlbewanderten Schriftstellers zu erwarten haben. Es ist kein zusammenhängendes Werk, welches er uns bietet; es ist vielmehr nur eine Sammlung von sieben Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und theilweise auch der Physik, gewissermassen ein Band einer historisch-mathematischen Zeitschrift, an welcher Herr Günther als alleiniger Mitarbeiter sich betheiligt hätte. Wir müssen demgemäss auch von einem Urtheile über das Buch für's Erste absehen und statt dessen Urtheile über die einzelnen Aufsätze aussprechen, welche der Verfasser in seiner Inhaltsübersicht nur sehr uneigentlich Capitel nennt.

Er beginnt mit der geschichtlichen Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyedern in der Neuzeit. Referent ist gewiss der Letzte, welcher einen Tadel darüber aussprechen möchte und dürfte, wenn ein Schriftsteller von dem ausdrücklich genannten Thema nach einer oder der andern Richtung hin sich entfernt, aber erwähnen wollen wir, dass hier in der That ziemlich Vieles mitgetheilt wird, was genau genommen nicht unter jenen Titel unterzubringen ist. So behandelt er die ganze Frage nach den durch gerad- und krummlinig sich schneidende Linienverbindungen hervorgebrachten Flächenräumen, und Girard's Eintheilung der Vielecke in Arten muss sich ebenso, wie der Euler'sche Satz über die Polyeder in den weit angelegten Plan einfügen. Von besonderem Interesse dürften für viele Leser die zu wenig gekannten Arbeiten des Göttinger Mathematikers Meister sein, der, in vielen Dingen seinem Jahrhundert vorauseilend, sogar schon im Besitz von Gedanken war, welche denen unserer Zeit über Curvenverzweigungen nicht unähnlich sind. Dass auch Poinsot's berühmte Abhandlung in dem Berichte des Herrn Günther nicht zu kurz kommt, versteht sich von selbst. Die grosse Vollständigkeit, welche Herr Günther angestrebt und, soweit wir sehen, auch erreicht hat, möge uns als Entschuldigung dienen, wenn wir noch eine kleine, an sich nicht gerade wichtige Ergänzung beifügen. Aus den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften ist bekannt, dass Graf Leopold Hugo verschiedene antike Polyeder in Alterthumsmuseen, z. B. im ägyptischen Museum des Louvre, aufgefunden hat, eine Entdeckung, welche möglicherweise Bedeutung gewinnen kann, wenn es gelingen sollte, das Alter jener Spielzeuge zu bestimmen und dadurch Gewissheit über ein vielleicht sehr frühes Datum zu erhalten, zu welchem die regelmässigen Körper bekannt waren. Graf Hugo, welcher einem gewissen Zahlenmysticismus huldigt, machte nun in einem wenig verbreiteten Schriftchen „*La Valhalla des sciences pures et appliquées*“ (Paris 1875) auf folgendes, gewiss nur zufälliges Zusammentreffen aufmerksam: Apollo und die neun Musen sind an Zahl den neun Ziffern von 1 bis 9 und der Null gleich; dieselbe Zahl liefern die Kugel, die fünf platonischen regelmässigen Körper und die vier Sternpolyeder; endlich sind unter den Zahlen von 1 bis 9 neben fünf Primzahlen vier zusammengesetzte Zahlen vorhanden, welche den Sternpolyedern verglichen werden!

Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung bildet den zweiten Aufsatz. Dass dafür ein zur Darstellung auf 43 Druckseiten ausreichendes Material sich gefunden haben sollte, erschien uns beim ersten Anblick wunderbar. Um so begreiflicher wird aber dieser Reichthum, wenn man sich daran gewöhnt, mit Herrn Günther auch die Lehre von den Decimal- und Sexagesimalbrüchen hierher zu ziehen, ein Verfahren, welches ungewohnt sein mag, dem man aber die Berechtigung gewiss nicht versagen kann. Weit zweifelhafter ist es uns, ob die ägyptisch-griechischen Stammbrüche wirklich hierher gehören, da der Fall, dass die Nenner der in einer Rechnung auftretenden Stammbrüche lauter Ergebnisse fortgesetzter Multiplication sind, die Brüche also $\frac{1}{a}, \frac{1}{ab}, \frac{1}{abc}, \ldots$ heissen, zwar für die Praxis der bequemste ist, aber keineswegs allein oder auch nur als häufigster vorkommt. Wir sind es übrigens dem Verfasser schuldig, zu bemerken, dass er keineswegs eine solche Behauptung aufstellt, vielmehr zugiebt, dass jene antiken Stammbrüche einen aufsteigenden Kettenbruch oder eine Summe von solchen darbieten. Soll auch aus diesem Aufsatze eine besondere Stelle der Aufmerksamkeit der Leser empfohlen werden, so sei es die Darstellung von Lagrange's und Lambert's hier einschlagenden Arbeiten, welche seither fast der Vergessenheit anheimgefallen waren, und der Nachweis der Erfindung des sogenannten abgekürzten Multiplicationsverfahrens bei Decimalbrüchen durch Jobst Bürgi.

Das Newton'sche Parallelogramm und die Kramer-Puiseux'sche Regel folgt nunmehr. Aus einer Gleichung $f(x,y)=0$, deren Functionalzeichen f eine rationale algebraische Function bedeutet, eine neue Gleichung $y = \Sigma a_n x^n$ abzuleiten, in welcher n irgend rationale Werthe besitzt, deren Aufeinanderfolge einem Gesetze genüge, das ist die allgemeinste Aufgabe der Theorie der Gleichungen. Newton hat bereits in seiner *Methodus fluxionum* ein empirisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung dieser Aufgabe kennen gelehrt. Kaum war das Newton'sche Parallelogramm 1736 durch den Druck bekannt gegeben, als verschiedene Schriftsteller zur Erläuterung seiner Methode schritten. Den ersten gründlichen Beweis derselben gab 1750 Cramer in seiner *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, demselben Werke, welches auch für die Lehre von der Elimination Epoche bildet; ausführlicher noch war die 1794 veröffentlichte Darstellung von Kästner. Aber jeder Satz aus der Theorie der Gleichungen hat auch eine geometrische Bedeutung, und wenngleich erst seit dem zweiten Drittel unseres Jahrhunderts etwa mit immer deutlicherem Bewusstsein auf diesen Dualismus eingegangen wurde, so war muthmasslich bereits bei Newton eine anticipirende Anwendung dieser Methode vorhanden. Ihr entspricht die Abhandlung Puiseux': „*Recherches sur les fonctions algébriques*“ in dem *Journal des mathématiques* für 1850, und dieser Abhandlung zu Ehren hat Herr Günther die Ueberschrift seines Aufsatzes gebildet. Wer einen Einblick in das allmälige Werden der modernsten Untersuchungsgebiete sich verschaffen will, wird gerade diesen Aufsatz zum Gegenstande fruchtbringenden Studiums machen; allerdings wird der Leser aber die Geneigtheit zu einem wirklichen Studium mitbringen müssen, denn leicht ist dieser Aufsatz nicht geschrieben.

Historische Studien über die magischen Quadrate. Auf etwas über fünf Druckbogen sich erstreckend, bildet diese Abhandlung für unsern Geschmack den hervorragendsten Theil des uns vorliegenden Bandes. Der Verfasser war hier in der Lage, wirklich neues Material zu verarbeiten, und zwar nach zwei Richtungen. Er hatte es zu thun mit bisher nur handschriftlich Vorhandenem, aber auch mit bereits Gedrucktem und bisher Unverstandenem. In beiden Fällen ist er seiner Aufgabe gleich gerecht geworden. Die nunmehr durch ihn veröffentlichte Schrift des byzantinischen Gelehrten Moschopulos, wahrscheinlich aus dem Anfange des XV. Jahrhunderts, die jetzt verständlich gemachten Methoden des Michael Stifel aus der Mitte des XVI. Jahrhunderts sind Leistungen Günther's, in welchen er keine Vorgänger besitzt und welche er mit dem namentlich von Mollweide bereits verarbeiteten Material, aber auch mit den ziemlich zahlreichen, später als 1823 entstandenen Forschungen glücklich zu verschmelzen wusste. Wir wollen bezüglich des Moschopulos nur Eins hervorheben, was Herr Günther in einer kurzen Randnote ausspricht, was aber, wie uns scheint, der weitesten Beachtung werth ist: dass nämlich hier zuerst der Ausdruck einer „cyklischen Aneinanderreihung“ auftritt, wo von einem geometrischen Kreise keine Rede ist. Herr Günther verweist ferner gleichfalls für den Text des Moschopulos auf Nesselmann, Algebra der Griechen, S. 125, um die griechische Sitte mit Beispielen zu belegen, welche bei dem Bestimmen des Stellenwerthes der Glieder einer Reihe Anfang- und Endglied zählt. Zur Ergänzung bemerken wir, dass das Gleiche in den beiden französischen Ausdrücken *huit jours, quinze jours* der Fall ist, während die deutsche Sprache mit auffallendem Wechsel des Gedankens in griechischer Weise von 8 Tagen, dann aber nicht-griechisch von 14, statt von 15 Tagen redet.

Der V. Aufsatz: Skizzen aus der Logarithmotechnie des XVII. und XVIII. Jahrhunderts, behandelt aphoristisch drei voneinander durchaus verschiedene Gegenstände: Erstlich wird wiederholten Irrthümern gegenüber der Nachweis geführt, dass Neper's Logarithmen durchaus nicht mit den natürlichen Logarithmen verwechselt werden dürfen; zweitens wird der Verdienste von Johann Bernoulli III. um die Berechnung der Proportionaltheile gedacht; drittens wird der Gedanke der sogenannten Gauss'schen Additions- und Subtractionslogarithmen bis zum Anfang des XVIII. Jahrhunderts zurückverfolgt, wo er, wie es scheint, ziemlich gleichzeitig im Besitze des Basler Gelehrten Hermann und eines Stadtarztes von Glatz Muschel von Moschau gewesen zu sein scheint.

In dem nun folgenden, gleichfalls kürzeren Aufsatze: Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter, kommt es auf Neumondsberechnungen an, welche in der jüdischen Chronologie eine wichtige Rolle spielen. Mag auch die eigentlich gestellte Frage noch nicht abschliessend beantwortet werden können, so hat Herr Günther sich doch jedenfalls das Verdienst erworben, hier auf eine noch nicht bearbeitete Richtung historisch-mathematischer Forschung hingewiesen zu haben, bei welcher auch nebenbei mancherlei Fund zu machen ist, wie wir z. B. mit dem Verfasser übereinstimmend den mittelalterlich jüdischen Näherungswerth $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ für höchst interessant halten.

Endlich begegnen wir in der Quellenmässigen Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf Huyghens einer neuen Bearbeitung eines von demselben Verfasser vor einigen Jahren in den Sitzungsberichten der Erlanger physikalisch-medicinischen Societät veröffentlichten Aufsatzes. Frühere Forschungen von van Swinden und Alberi, welche damals dem Verfasser noch nicht bekannt waren und von denen die erstgenannten in der That auch nur dem Namen nach kaum irgend einem Historiker, mit Ausnahme Poggendorff's, gegenwärtig gewesen sein mögen, sind nunmehr nach Verdienst berücksichtigt und haben die Untersuchung zu einem abgerundeten Schlusse führen lassen.

Dies sind die Abhandlungen, welche uns vereinigt geboten werden. In allen zeigt sich Herr Günther als der fleissige Geschichtsschreiber von colossaler Belesenheit, als welchen ihn auch die Leser seiner anderen Schriften in dieser Zeitschrift, wie anderwärts wiederholt kennen gelernt haben. Wir sind überzeugt, dass dieses unser Urtheil von allen Kennern des Faches bestätigt werden wird, und können mit gutem Gewissen Jeden, der für historisch-mathematische Studien im Allgemeinen oder für die in den genannten Abhandlungen behandelten Gegenstände sich interessirt, auf diesen Band als Quelle reicher Belehrung verweisen.

Cantor.

Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. Vorlesungen von Dr. Hermann Hankel. Leipzig 1875.

Aus den nachgelassenen Schriften des Prof. Dr. Hermann Hankel sind von Dr. Axel Harnack „Die Elemente der projectivischen Geometrie. Vorlesungen von Dr. Hermann Hankel“ herausgegeben worden. Sie enthalten in einer anregend geschriebenen Einleitung eine historische Uebersicht des Entwickelungsganges der neueren Geometrie, deren Hauptvorzug im Gegensatz zur Geometrie der Alten dahin charakterisirt wird, dass sie den Zusammenhang geometrischer Gestalten in allem Wechsel und aller Veränderlichkeit ihrer figürlich vorstellbaren Lage zu erkennen sucht. — Die Elemente zerfallen in sieben Abschnitte. In den beiden ersten Paragraphen wird die Theorie des Doppelverhältnisses und dessen projectivische Eigenschaft mittelst Rechnung entwickelt. Indem der Werth des Doppelverhältnisses gleich -1 gesetzt wird, ergiebt sich das harmonische Doppelverhältniss und der natürliche Uebergang zum folgenden Paragraphen, welcher die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits enthält. Zunächst wird für den Hauptsatz, dass jede Diagonale von den beiden anderen harmonisch getheilt wird, der Beweis gegeben, den Steiner in seinem Werkchen „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises“ mitgetheilt hat und der unmittelbar aus den projectivischen Eigenschaften des Doppelverhältnisses sich ergiebt; dann ein anderer, der auf der Methode der Projection beruht, angeführt. Im weitern Verlaufe werden die aus diesem Satze sich ergebenden Constructionen, die mit blosser Hilfe des Lineals ausgeführt werden können, besprochen und zum Schlusse wird die Bemerkung gemacht, dass man mittelst des Lineals allein Massverhältnisse nur dann construiren kann, wenn irgend ein metrisches Verhältniss gegeben ist. Hier hätte vielleicht näher auf die citirte Steiner'sche Schrift eingegangen und gezeigt werden können, dass mit alleiniger Benutzung des Lineals und eines festen Kreises alle geometrischen Aufgaben zweiten Grades gelöst werden können, zumal die in ihr befolgte Methode, wie es von Kortum geschehen ist dadurch, dass er einen festen Kegelschnitt zu Hilfe nahm, zur Auflösung aller Aufgaben dritten und vierten Grades ausgedehnt werden kann. Im folgenden Paragraphen wird zuerst der Satz abgeleitet, dass, wenn eine Strecke AB in beliebig vielen Punkten $C\ldots$ getheilt wird und man das Verhältniss $AC:BC$ ein Theilverhältniss nennt, ein Product von Theilverhältnissen projectivisch ist, wenn die Endpunkte der getheilten Strecke im Zähler ebenso oft, wie im Nenner vorkommen. Vermittelst desselben und ausserdem durch die Methode der Projection werden die Sätze des Menelaos und des Ceva abgeleitet; für den letztern wird noch der von Ceva selbst herrührende, auf statischen Principien beruhende, Beweis mitgetheilt. Neben Folgerungen über die Eigenschaften des vollständigen Vierecks, die gleichzeitig mit Hilfe der harmonischen Eigenschaften desselben bewiesen werden, werden aus den obigen Sätzen auch die abgeleitet, dass in einem Dreiecke die Winkelhalbirenden, die Höhen, die Mittellinien sich je in einem Punkte schneiden. Weiterhin wird der Lehrsatz des Menelaos vom Dreieck auf ein beliebiges ebenes Polygon und nebst seiner Umkehrung auf ein windschiefes Viereck ausgedehnt, wobei der schöne Satz gewonnen wird: Wird ein windschiefes Viereck von einer Ebene geschnitten, so sind die sechs Durchschnittspunkte die Ecken eines vollständigen ebenen Vierseits.

Der zweite Abschnitt führt den Titel: „Das Princip der Dualität", entwickelt zunächst in elementarer Weise, wie man sie in dem citirten Schriftchen von Steiner findet, die polaren Beziehungen am Kreise, stellt dann die Definition dualer Figuren auf und zeigt im folgenden Paragraphen erst die Möglichkeit dieser Definition, so dass wohl besser die §§ 2 und 3 in ihrer Reihenfolge zu vertauschen wären; denn aus dem ersten Paragraphen ergiebt sich durch die polare Reciprocität der Begriff dualer Figuren. Für zwei duale Figuren wird der Satz entwickelt, dass alle projectivisch metrischen Relationen der einen bei der andern sich in solche verwandeln, welche statt Entfernungen zweier Punkte die Sinus der Winkel zwischen entsprechenden Geraden enthalten, und umgekehrt. Nachdem noch die Anwendung der polaren Reciprocität auf nicht projectivisch metrische Beziehungen zur Umformung einiger Sätze aus der Elementargeometrie, so z. B. des Pythagoräischen Lehrsatzes und des Satzes von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises, gezeigt ist, geht die Darstellung im dritten Abschnitte zu den projectivischen Beziehungen von Punktreihen und Strahlenbüscheln. Nachdem die geometrische und insbesondere die projectivische Verwandtschaft zweier Geraden definirt und mittelst des Doppelverhältnisses gezeigt ist, dass dieselbe durch drei Paare homologer Elemente bestimmt ist, wird die Aufgabe gelöst, aus drei Paaren homologer Elemente projectivischer Gebilde zu irgend einem Elemente des einen Gebildes das homologe des andern zu construiren. Darauf wir in § 3 durch die Methode der Projection, sowie durch unmittelbare Lagenbeziehungen der Satz des Desargues, dass die drei Durchschnitte entsprechender Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken sich auf drei von einem Punkte ausgehenden Geraden befinden, auf einer Geraden liegen, und seine Umkehrung, die zugleich seine duale Transformation ist, bewiesen. Später, im 7. Abschnitte, ist noch der Staudt'sche Beweis dieses Satzes mitgetheilt. Als Folgerungen aus ihm wird ein Theil der Sätze abgeleitet, die man in Steiner's „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" S. 81 flgg. findet. In den folgenden §§ 4 und 5 werden die metrischen Beziehungen projectivischer Gebilde entwickelt, verschiedene Constructionen der Doppelpunkte aufeinanderliegender projectivischer Gebilde mitgetheilt und in ausführlicher Weise die Bedingungen für die Realität dieser Doppelpunkte abgeleitet und in der folgenden Weise ausgesprochen. Sind J und J' die Fluchtpunkte, die den unendlich fernen Punkten entsprechenden Punkte, und sind A und A' zwei beliebige homologe Punkte, so sind die Doppelpunkte reell,

1. wenn $AJ.A'J' < 0$,
2. „ $AJ.A'J' > 0$ und gleichzeitig
   a) $AA'.J'A' < 0$ oder
   b) $AA'.J'A > 0$ und $(A'J + A'J')^2 > 4AA'.J'A'$.

Für zwei projectivische Punktreihen mit imaginären Doppelpunkten wird dann der in der Theorie der Kegelschnitte (S. 173) benutzte Satz bewiesen, dass es stets zwei symmetrisch liegende Punkte giebt, von denen aus die Entfernungen zweier homologen Punkte immer unter einem constanten Winkel erscheinen.

In diesem Paragraphen erhält man durch die angewandte Methode einen Einblick, in welcher unmittelbaren Verbindung die analytische und die neuere Geometrie miteinander stehen, „so dass es nicht selten einer nur geringen Modification der Ausdrucksweise bedarf, um das Raisonnement der einen Wissenschaft in die andere zu übertragen".

Die Construction der Doppelpunkte wird darauf dazu angewandt, die Aufgabe zu lösen: Ein n-Eck zu construiren, welches einem gegebenen n-Seit $a_1 \dots a_n$ ein- und einem gegebenen n-Eck $S_1 \dots S_n$ umgeschrieben ist.

Lässt man das n-Seit $a_1 \dots a_n$ mit dem n-Eck $S_1 \dots S_n$ zusammenfallen, so erhält man die Aufgabe: Ein n-Eck zu construiren, welches einem gegebenen n-Eck zugleich ein- und umgeschrieben ist. Es wird gezeigt, dass dieselbe für $n = 3$ unmöglich ist. Dass für $n = 4$ die Doppelpunkte, welche die Aufgabe lösen, imaginär werden, wird nicht bewiesen, sondern nur angeführt, dass Möbius (Crelle, Bd. 3) dies durch Rechnung gezeigt hat und neuerdings dieser Fall in Grunert's Archiv für 1870, S. 1, behandelt worden ist. Jedoch hatte schon Pfaff in seiner neueren Geometrie, Bd. II S. 48, gezeigt, dass diese Doppelpunkte imaginär werden, und ausserdem die interessante Bemerkung hinzugefügt, dass die obige Aufgabe für $n = 5$ unendlich viele Auflösungen hat.

Das Ende des Abschnittes behandelt die Theorie der Involution.

Im vierten Abschnitte werden, wie das Vorwort, S. IV, bemerkt, um an einzelnen Problemen, in denen sich die Forschungen der Alten mit den späteren Ergebnissen berühren, den Vergleich der neuen Methoden mit den früheren erkennen zu lassen, die Aufgaben des Apollonius, *de sectione rationis*, *de sectione spatii*, *de sectione determinata* auf die einfachsten Principien der neueren Geometrie zurückgeführt. Am Schlusse wird die allgemeinere Aufgabe behandelt, welche jene drei als specielle Fälle enthält

Von den projectivischen Eigenschaften wird im fünften Abschnitte eine weitere Anwendung auf die Theorie der Lichtbrechung in einem Linsensysteme gemacht.

Der sechste Abschnitt behandelt die Kegelschnitte als Erzeugnisse projectivischer Gebilde. Ausgehend von dem Satze, dass der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlen projectivischer Strahlenbüschel von jeder Geraden in zwei reellen oder imaginären Punkten getroffen wird, gelangt er zum Begriffe der Curve zweiter Ordnung, für welche dann der Satz, dass eine Curve zweiter Ordnung aus zwei beliebigen ihrer Punkte durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt wird, mittelst des Doppelverhältnisses abgeleitet wird. Nachdem der Kegel zweiter Ordnung als die Fläche definirt ist, auf welcher sich die homologen Ebenen projectivischer Ebenenbüschel schneiden, wird für den Satz, dass jede Curve zweiter Ordnung als Schnitt eines Kreiskegels angesehen werden kann, der von Chasles abgeänderte Poncelet'sche Beweis gegeben. Derselbe beruht auf der Annahme, dass es in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung stets eine Gerade giebt, welche die Curve nicht in reellen Punkten schneidet. „Von der Zulässigkeit dieser Annahme," heisst es in einer Anmerkung, „überzeugt man sich sofort, indem man in irgend einem Curvenpunkte S die Tangente der Curve construirt. Bewegt man alsdann diese Gerade parallel zu sich selber nach der einen oder andern Seite hin, so lässt sich, am einfachsten durch Bestimmung der Fluchtpunkte, nachweisen, dass bei der Bewegung nach der einen Seite die Bedingung der Realität für die Doppelpunkte erfüllt bleibt; im Punkte S selber fallen nämlich die Doppelpunkte zusammen. Dagegen wird nun bei einer Verschiebung der Geraden in der entgegengesetzten Richtung die Bedingung der Realität zuerst nicht erfüllt." Für „ein Werk, welches dem Studium der projectivischen Geometrie als Einleitung in die Elemente dienen soll", wäre ein klarerer Beweis wünschenswerth, der sich sofort geben lässt, nachdem die Curven zweiter Ordnung, was an und für sich nothwendig ist, als geschlossene Curven erkannt sind. Dass sie in der That aus einem Zuge bestehen müssen, folgt unmittelbar aus ihrer Erzeugung durch zwei projectivische Strahlenbüschel. Denn sowie ein Strahl des einen Büschels von einer Lage anfangend stetig das ganze Büschel durchläuft, bis er in die erste Lage zurückkehrt, muss auch der Punkt, den er mit der Curve zweiter Ordnung gemein hat, continuirlich diese Curve durchlaufen. Denkt man sich nun in zwei Punkten Tangenten gezogen, so theilen diese die Ebene in vier Theile; in einem von ihnen liegt die Curve, so dass also jede Gerade, welche durch diesen nicht hindurchgeht, die Curve nicht in reellen Punkten schneiden kann. — Am Kegel werden dann die verschiedenen Arten der Kegelschnitte abgeleitet und auch sofort die Kriterien festgestellt, welche dieser Arten zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugen. Aus dieser Erzeugung wird eine lineare Construction der Kegelschnitte hergeleitet und gezeigt, dass jeder Kegelschnitt durch fünf seiner Punkte bestimmt ist. Unmittelbar ergiebt sich dann durch die Construction eines sechsten Punktes aus fünf gegebenen der Satz vom Pascal'schen Sechseck, dessen von Steiner und Kirkmann gegebene Erweiterungen gleichfalls entwickelt werden. Als einfache Folgerungen ergeben sich die Eigenschaften der einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünf-, Vier- und Dreiecke. Mittelst des erhaltenen Satzes vom eingeschriebenen Viereck wird dann gezeigt, dass eine bewegliche Tangente eines Kegelschnittes auf zwei festen Tangenten zwei projectivische Punktreihen beschreibt, und die Umkehrung hiervon dadurch bewiesen, dass gezeigt wird, wie ein Kegelschnitt, der die Träger l und l_1 zweier projectivischen Punktreihen in den dem Schnittpunkte entsprechenden Punkten und ausserdem irgend eine Verbindungslinie homologer Punkte berührt und also eindeutig bestimmt ist, durch seine Tangenten auf den Trägern l und l_1 dieselben projectivischen Punktreihen bestimmt. Nachdem der Begriff der Curve zweiter Classe somit entwickelt ist, wird die Identität derselben mit der Curve zweiter Ordnung noch dadurch nachgewiesen, dass mittelst der Poncelet'schen Methode gezeigt wird, wie auch eine Curve zweiter Classe als Schnitt eines Kreiskegels angesehen werden kann. Weiterhin wird diese Identität noch auf einem andern Wege bewiesen. Dazu werden zunächst die Eigenschaften der Curve zweiter Classe auf dem Wege untersucht, der demjenigen dual gegenübersteht, auf welchem die Eigenschaften der Curven zweiter Ordnung erkannt wurden. Auf demselben gelangt man zu dem Satze: Bei jedem einer Curve zweiter Classe umschriebenen Dreiecke schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken und der Berührungspunkte der Gegenseiten in einem Punkte. Dieser Satz war auch für Curven zweiter Ordnung abgeleitet und somit sind Curven zweiter Classe und zweiter Ordnung identisch. Dann werden auch die Kriterien festgestellt, durch die man aus der gegenseitigen Lage der erzeugenden Punktreihen die verschiedenen Arten der Kegelschnitte unterscheiden kann. Nachdem die Theorie der Polaren in der gewöhnlichen Art abgeleitet ist, werden aus den polaren Beziehungen die Eigenschaften der Durchmesser und des Mittelpunktes entwickelt. In die weitere Theorie der Kegelschnitte, die hier abgebrochen wird, gewährt noch der Begriff des Kegelschnittbüschels und dessen involutorische Eigenschaft einen Fernblick.

Im letzten Abschnitte wird die Staudt'sche Begründung der projectivischen Beziehungen mitgetheilt, der Begriff der Verwandtschaft von Figuren gegeben und für zwei einstimmige, collinear verwandte Systeme der Satz bewiesen, dass jedes von ihnen durch eine blosse Drehung um einen bestimmten Punkt, Identitätspunkt, in seiner Ebene zum Zusammenfallen mit dem andern gebracht werden kann. Hiervon wird eine Anwendung auf die Construction der Normalen solcher Curven gemacht, welche durch eine mechanische stetige Bewegung eines starren Systems erzeugt werden können, z. B. der Ellipse, der Konchoide des Nikomedes und der Cissoide des Diokles. Zum Schlusse wird noch die Verwandtschaft der Collineation besprochen und der Hauptsatz derselben bewiesen, dass zwei ebene Systeme collinear aufeinander bezogen sind, wenn man ein Viereck des einen als entsprechend einem Viereck des andern ansieht.

Dies ist die ziemlich ausführliche Inhaltsangabe der Elemente. — Der grösste Theil der Sätze, die in ihnen entwickelt werden, ist, wie der Verfasser in § 1 des siebenten Abschnittes sagt, von der Art, dass sie sich auf die Durchschnitte von Geraden in einem Punkte beziehen oder von der Lage verschiedener Punkte auf einer Geraden und von projectivischen Beziehungen von Geraden und Strahlenbüscheln zu einander handeln. Alles dieses aber sind Sätze, welche die Anwendung irgend eines Massverhältnisses nicht nöthig machen. Mit diesen letzten Worten ist aber die neuere Geometrie als eine Geometrie der Lage, wie sie eigentlich sehr unpassend genannt wird, charakterisirt. Der natürlichste Weg aber, die Lagenverhältnisse räumlicher Gebilde zu ergründen, ist die directe Anschauung. Diesen Weg hat v. Staudt eingeschlagen und dadurch „die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft gemacht, welche des Messens nicht bedarf". Die Staudt'sche Methode hat dadurch „den Vorzug grösserer systematischer Einheit, grösserer Sauberkeit und Eleganz". Rechnet man hierzu noch, dass diese Methode (vergl. Reye, Geometrie der Lage) sich ganz besonders dazu eignet, „das Gesetz der Dualität, welches die neuere Geometrie beherrscht, in seiner vollen Reinheit und in seinem ganzen Umfange zur Geltung zu bringen, ein Vortheil, dessen sich kein anderer Lehrgang, der das Mass zu Hilfe nimmt, rühmen kann, weil in der Geometrie des Masses jenes Gesetz nicht allgemein giltig ist", dass sie ferner ganz ungemein die Vorstellungskraft des Lernenden übt, was bei einem für Studirende bestimmten Lehrbuche entscheidend ins Gewicht fällt, so muss man nach den Gründen suchen, welche den Verfasser der Elemente bewegen konnten, nicht dieser Methode zu folgen, sondern sein Werk auf die Theorie des Doppelverhältnisses zu begründen. Ein Grund ist wohl der, dass er, wie das Vorwort sagt, dem Leser die umfassenden Gedanken der grossen Geometer nahe bringen und einen klaren Ueberblick über die verschiedenen, von ihnen benutzten Methoden gewähren will. Doch dürfte dieser für die Anlage eines Lehrbuches nicht massgebend sein. Als einen zweiten Grund giebt er selbst auf S. XXX der Einleitung „eine gewisse Einseitigkeit, die sich selbst rächt" in der Staudt'schen Methode an, eine Behauptung, die ebenso unerwiesen, wie in der That unerweisbar ist. Denn man kann mittelst dieser Methode nicht nur den Inhalt der Elemente natürlich und elegant entwickeln, sondern kommt auch mit ihrer Hilfe zu den klarsten Anschauungen der räumlichen Gebilde und durch sie allein zu dem Bewusstsein von dem stolzen, in sich vollendeten Bau der Geometrie der Lage und zu der Erkenntniss, dass sie in ihrer jetzigen Form als Ideal einer Wissenschaft angesehen werden kann.

Wenn daher auch bedauert werden muss, dass der in den Elementen gewählte Lehrgang sich an die Staudt'sche Methode nicht anschliesst, so ist auf der andern Seite die correcte, anziehende und durchaus klare Darstellung hervorzuheben, welche sie ebenso geeignet macht, den Leser in das Studium der neueren Geometrie einzuführen, als ihn mit den verschiedenen Methoden bekannt zu machen, welche die Geometer zu ihrem Ausbau angewendet haben.

Milinowski.

Modelle von Flächen zweiter Ordnung, construirt nach Angabe von Prof. Dr. A. Brill. Neue Ausgabe. Darmstadt, Verlag von L. Brill. 1876. 11 Mk.

Bei der neuen Ausgabe dieses, bereits im XX. Jahrg., S. 171, besprochenen Unterrichtsmittels ist der vom Referenten ausgedrückte Wunsch erfüllt, nämlich ein Modell des hyperbolischen Paraboloids hinzugefügt und damit die Reihe der Modelle für Flächen zweiter Ordnung zu einer vollständigen geworden. Das letzte Modell, welches auch für sich allein zum Preise von 2 Mk. bezogen werden kann, besteht aus zwei Reihen geschickt zusammengefügter, geradlinig begrenzter Cartons, welche den geradlinigen Schnitten der Fläche entsprechen. Vielleicht gelingt es dem Constructionstalente des Herrn Prof. Brill auch noch, das einfache Hyperboloid ebenfalls aus dessen geradlinigen Schnitten zusammenzusetzen und somit alle Flächen des zweiten Grades mittelst ihrer einfachsten Schnitte darzustellen.

Gleichzeitig offerirt die Verlagshandlung drei, zum Aufstecken der Modelle dienende Stative, von denen das letzte jedoch überflüssig sein dürfte. Die schon früher ausgesprochene warme Empfehlung dieser netten Modelle möge hier wiederholt sein.

SCHLÖMILCH.

Berichtigung einiger Stellen in dem ersten Theile der von Herrn Dr. Lindemann herausgegebenen Vorlesungen über Geometrie von Clebsch.

Die Herausgabe der Vorlesungen von Clebsch ist gewiss von allen Mathematikern freudig begrüsst worden, und man ist dem Herausgeber grossen Dank schuldig, dass er sich der Mühe der Bearbeitung derselben unterzogen hat. Die grossen Vorzüge, welche diese Bearbeitung in vieler Beziehung besitzt, machen dieses Buch zu einer der werthvollsten Publicationen der Neuzeit, welche bestimmt ist, die Kenntniss der neueren algebraisch-geometrischen Untersuchungen auch in weiteren Kreisen zu verbreiten. Allein in dieser Beziehung ist es doch sehr zu bedauern, dass der Herausgeber sich nicht mehr auf den Standpunkt solcher Leser gestellt hat, welche die in dem Buche behandelten Materien erst aus diesem Buche kennen lernen wollen. Zu den in der Sache selbst liegenden Schwierigkeiten sind dadurch neue auf der Darstellung beruhende Schwierigkeiten in nicht unbeträchtlichem Maasse hinzugekommen, und es ist zu fürchten, dass der Nutzen, den das Buch zu stiften bestimmt ist, infolge dessen erheblich beeinträchtigt werden wird. Die Darstellung gleicht mitunter einer aus übereinandergethürmten Felsblöcken bestehenden Bergspitze. Gelingt es, Block für Block erklimmend, die Spitze zu erreichen, so kann man dann von oben den prakticablern Pfad bemerken, der aber von unten aus verborgen war.

Damit hängt zusammen, dass im Einzelnen manche Unrichtigkeiten sich vorfinden, welche zu grossen Schwierigkeiten Anlass geben, so lange man nicht erkannt hat, dass wirklich etwas Unrichtiges vorliegt. Indem ich mir erlaube, auf einige solcher Stellen, die mir beim Studium des Buches aufgefallen sind, aufmerksam zu machen, verfolge ich die Absicht, damit anderen Lesern Mühe zu ersparen.

Auf S. 340 wird bei dem Beweise des Nöther'schen Satzes, welcher die Bedingungen aufstellt, unter denen eine Curve $f=0$, welche durch die Schnittpunkte zweier Curven $\varphi=0$ und $\psi=0$ hindurchgeht, von denen die erste in einem Schnittpunkte einen q-fachen, die zweite einen r-fachen Punkt besitzt, in der Form $f=A\varphi+B\psi=0$ dargestellt werden kann, eine Zahl P aufgestellt, welche angiebt, wieviele Coefficienten bei f in den Gliedern bis zur k^{ten} Dimension inclusive enthalten sind, und eine zweite Zahl Q für die Anzahl der Coefficienten, die in den nämlichen Gliedern bei den Functionen A und B vorkommen. Es wird dann k so bestimmt, dass in allen Gliedern, die von höherer Dimension sind als der k^{ten}, die Coefficienten von f sich durch die Coefficienten von A und B ausdrücken lassen, ohne dass Bedingungsgleichungen zwischen diesen Coefficienten von f stattzufinden brauchen. Als Bedingung dafür ergiebt sich $k \overline{\overline{>}} q+r-2$. Nun heisst es weiter: „Sobald k dieser Bedingung genügt, sind die Coefficienten $(k+1)^{\text{ter}}$ Dimension in f voneinander unabhängig; wir haben also

$$k' = k+1 = q+r-1$$

für k in P und Q einzusetzen.“ Für die letztere Behauptung ist ein weiterer Grund nicht angegeben; es ist ein solcher auch nicht ersichtlich, vielmehr liegt es viel näher, da für $k=q+r-2$ der gewünschte Fall schon eintritt, diese Zahl und nicht $q+r-1$ in P und Q zu substituiren, was auch damit übereinstimmt, dass in dem S. 341 ausgesprochenen Satze die Bedingungsgleichungen sich nur auf die Coefficienten der Glieder von f bis exclusive zur $(r+q-1)^{\text{ten}}$ Dimension beziehen. Setzt man aber in P und Q den Werth $q+r-2$ für k ein, so erhält man für die Anzahl $P-Q$ der Bedingungsgleichungen denselben Ausdruck $rq - \frac{1}{2}q(q+1)$, der auch S. 341 angegeben ist.

S. 356 ist in den Formeln Z. 2 und 4 ein $+$-Zeichen statt des $-$-Zeichen zu setzen.

S. 358 Z. 5 ist statt $(abc)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-2} c_y^{n-2} a_x^3$ zu lesen

$$(abc)^2 a_y^{n-5} b_y^{n-2} c_y^{n-2} a_x^3.$$

Achtet man nicht auf die Dimension, in der das Symbol a vorkommen muss, so kann dieser Druckfehler zu Schwierigkeiten Anlass geben, besonders da über das Verschwinden dieses Ausdruckes nur eine gar sehr kurze Andeutung gegeben ist.

S. 363. Die Z. 3 v. u. aufgestellte Gleichung kann auf die im Texte angegebene Art nicht erhalten werden. Man erhält sie aber, wenn man als verschwindende Glieder nicht $-d\mu\, \Sigma \varphi_{ik} x_k$, sondern vielmehr $-v_x\, d\mu\, \Sigma \varphi_{ik} x_k$ hinzufügt, und ferner an Stelle der Substitution $p_k = \varrho\, dx_k - x_k\, d\mu$ die folgende $p_k = \varrho\, v_y\, dx_k - x_k\, d\mu$ einführt.

S. 373. Es werden zwei Curvengleichungen abgeleitet:

a) $$(a\alpha\beta)^2 a_y^{n-2} = 0,$$

b) $$(ab\alpha)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = 0,$$

und diese folgendermassen interpretirt:

1. Der Ort eines Punktes, dessen conische Polare unendlich viele Polardreiecke besitzt, die einem gegebenen Kegelschnitte eingeschrieben sind, ist eine Curve der Ordnung $(n-2)$; und

2. der Ort eines Punktes, dessen conische Polare in ein einem gegebenen Kegelschnitte zugehöriges Polardreieck (und somit in unendlich viele) eingeschrieben ist, ist eine Curve der Ordnung $2(n-2)$.

Es ist aber der geometrische Ort 1) nicht die Curve a) von der Ordnung $n-2$, sondern vielmehr die Curve b) von der Ordnung $2(n-2)$; der geometrische Ort 2) hingegen nun nicht etwa die Curve a), sondern die nämliche, wie die vorhergehende.

S. 433. Bei dem Beweise des Restsatzes wird gesagt: „Es lassen sich immer zwei adjungirte Curven $\beta=0$, $\gamma=0$ finden, in der Art, dass" u. s. w. Hier ist wohl $\beta=0$ eine adjungirte Curve, nicht aber $\gamma=0$. Diese muss in dem i-fachen Punkte von f nicht wie die Curve $\beta=0$ einen $(i-1)$-fachen, sondern einen $(i-2)$-fachen Punkt haben. Es ist aber für den Beweis des Satzes auch gar nicht erforderlich, dass $\gamma=0$ eine adjungirte Curve sei.

S. 436 Z. 11 v. u. muss statt $n-2+p \geq 2(n-2)$ gelesen werden $n-2+p \leqq 2(n-2)$.

Die angeführten Stellen, welche auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen, beziehen sich, wie man sieht, nur auf Details in der Ausführung, sie lassen die Vorzüge des Buches durchaus ungeschmälert. Vielleicht aber nimmt der Herausgeber hieraus Veranlassung, sein Werk einer nochmaligen Revision zu unterziehen. Wenn er dies thun wollte und die ihm etwa nöthig scheinenden Abänderungen oder Zusätze in geeigneter Weise veröffentlichen möchte, so würde er damit seinen Lesern einen nicht hoch genug zu schätzenden Dienst erweisen.

Prag, 18. März 1876. H. Durège.

Bibliographie

vom 1. April bis 31. Mai 1876.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematischen Classe der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1875. Berlin, Dümmler. 4 Mk. 70 Pf.

Abhandlungen der physikalischen Classe der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1875. Ebendas. 26 Mk. 20 Pf.

Monatsbericht der königl preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1876, Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1875. 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Bulletin de l'Académie imp. des sciences de St. Petersbourg. T. XXI, Nr. 1 et 2. Leipzig, Voss. pro compl. 9 Mk.

Tageblatt der 47. Naturforscher-Versammlung in Breslau 1874. Breslau, Morgenstern. 8 Mk.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. 10. Bd. (4 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begründet von Grunert, fortgesetzt von Hoppe. 59. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben von W. Jordan. 5. Bd. 1. Heft Stuttgart, Wittwer. pro compl. 9 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben v. Ohrtmann, Müller und Wangerin. 6. Bd. Jahrg. 1874. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 80 Pf.

Fortschritte der Physik im Jahre 1871. 27. Jahrg., redig. v. Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Monatliche Berichte über die Resultate der meteorologischen Beobachtungen an den königl. sächsischen Stationen, herausgegeben von C. Bruhns. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theiles des königl. preussischen Normalkalenders für 1877, herausgegeben von Förster. Berlin, statist. Bureau. 6 Mk. 75 Pf.

Reine Mathematik.

Günther, S., Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Erlangen, Besold. 2 Mk. 80 Pf.

Thomae, J., Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. Halle, Nebert. 3 Mk.

Du Bois-Reymond, P., Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. München, Franz. 4 Mk. 80 Pf.

Winckler, A., Ueber angenäherte Bestimmungen. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Weyr, E., Ueber die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Moroff, A., Die ersten Sätze der ebenen Geometrie. Grundbegriffe, Winkel, Dreieck, Viereck. Hof, Büching. 80 Pf.

Nagel, v., Lehrbuch der Stereometrie. 4. Aufl. Ulm, Nübling. 1 Mk. 50 Pf.

Niemtschik, R., Ueber die Construction der Umhüllungsflächen variabler Kugeln. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Brill, A., Cartonmodelle von Flächen zweiter Ordnung. Nr. 6: das hyperbolische Paraboloid. Darmstadt, Brill. 2 Mk.

Rosenberger, F., Die Buchstabenrechnung. Jena, Dufft. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

Nagel, A., Die Vermessungen im Königreich Sachsen. Eine Denkschrift. Dresden, Huhle. 6 Mk.

Haupt, P., Mathematische Theorie der Flugbahnen gezogener Geschütze. Berlin, Voss. 2 Mk.

Bessel, F. W., Abhandlungen, herausgegeben v. P. Engelmann. 2. Bd. Leipzig, Engelmann. 18 Mk.

Sadebeck, A., Angewandte Krystallographie. (Ausbildung d. Kryst., Zwillingsbildung, Krystallotektonik.) Nebst einem Anhang über Zonenlehre. Berlin, Müller & S. 12 Mk.

——, Ueber die Theilbarkeit der Krystalle. Ebendas. 60 Pf.

Spörer, G., Beobachtungen von Sonnenflecken. 2. Abth. Leipzig, Engelmann. 13 Mk. 50 Pf.

Boeddikker, O., Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen, mit Anwendungen der Elektrodynamik. Stuttgart, Spemann. 5 Mk. 50 Pf.

Rühlmann, R., Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. 3. Lief. Braunschweig, Vieweg. 5 Mk. 80 Pf.

Puschl, C., Neue Sätze der mechanischen Wärmetheorie. 1. Abth. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Physik und Meteorologie.

LOMMEL, E., Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes. 4. Mitthlg. Erlangen, Besold. 30 Pf.

GÜNTNER, C., Ueber die Benutzung der Sonnenwärme zu Heizeffecten mittelst des neuen Planspiegel-Reflectors. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

PFAUNDLER, L., Ueber Differential-Luftthermometer. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

JELINEK, C., Psychrometertafeln für das hundertheilige Thermometer. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

CHRISTIANI, A., Beiträge zur Elektricitätslehre. Ueber irreciproke Leitungen elektrischer Ströme. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

ROLLETT, A., Bemerkungen über das Rheochord als Nebenschliessung. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

RECKNAGEL, G., Compendium der Experimentalphysik, nach Jamin's *petit traité de phys.* 6. Abth. (Schluss): Optik. Stuttgart, Meyer & Zeller. 3 Mk., pro compl. 15 Mk.

MÜLLER POUILLET's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 8. Aufl., bearbeitet von L. PFAUNDLER. I. Bd., 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1875.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

225. Weitere Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys XX, 1, 252. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 1.]
226. Bemerkung über die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung. Frahm. Mathem Annal. VII, 512.
227. Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Beez. Zeitschr. Math. Phys. XX, 253.

Analytische Geometrie der Ebene.

228. On the envelope of a straight line. Genese. Quart. Journ. math. XIII, 260.
229. On the scalene transformation of a plane curve. Cayley. Quart. Journ. math. XIII, 321.
230. Ueber eine Gattung transcendenter Curven, welche geschlossen sind. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XX, 457.
231. On the mechanical description of a cartesian. Cayley. Quart. Journ. math. XIII, 328.

Vergl. Biangularcoordinaten. Doppeltangenten. Gleichungen 301. Kegelschnitte. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

232. Ueber Gerade im Raume. Maly. Grun. Archiv LVII, 441.
233. Ueber die centralen und elliptischen Coordinaten. Van Geer. Zeitschr. Math. Phys. XX, 304.
234. Flächeninhalt von Parallelschnitten durch Regelflächen. Bewegung eines Schwerpunktes eines freien Systems von materiellen Punkten in einer Ebene. Rauminhalt des Prismatoids. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XX, 376.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 253. Kegelschnitte 312, 315. Normalen. Oberflächen. Paraboloid. Sphärik.

B.

Baryoentrischer Calcül.

235. Ueber die Symmetriepunkte der Dreiecke. Hoppe. Grun. Archiv LVII, 422.

Bestimmte Integrale.

236. Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. VII, 605.
237. Ueber partielle Integration. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XX, 475.
238. On zonal harmonics. P. Frost. Quart. Journ. math. XIII, 184.
239. A new formula in definite integrals. Glaisher. Phil. Mag. XLVIII, 53, 400. O'Kinealy ibid. 295.

240. On the integrals $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$ and $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx$. Glaisher. Quart. Journ. math. XIII, 343. [Vergl. Bd. XX, Nr. 42.]
Vergl. Fourier'sche Reihe. Functionen 269.

Biangularcoordinaten.

241. On biangular coordinates. Ford. Quart. Journ. math. XIII, 75. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 156.]
242. On the conic referred to biangular coordinates. Jeffery. Quart. Journ. math. XIII, 130.

C.

Combinatorik.

243. Beweis eines Fundamentalsatzes von den magischen Quadraten. Günther. Grun. Archiv LVII, 285.
244. On the problem of the eight queens. Glaisher. Phil. Mag. XLVIII, 457. [Vergl. Bd. XX, Nr. 370.]
Vergl. Zahlentheorie 403.

Cubatur.

245. Ueber die regulären und Poinsot'schen Körper und ihre Inhaltsbestimmung vermittelst Determinanten. Loewe. Grun. Archiv LVII, 392.
246. Volumes des solides engendrés par la révolution des polygones réguliers autour d'un de leurs côtés. Dostor. Grun. Archiv LVII, 334.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 234. Tetraeder.

Cubische Formen.

247. Ueber das simultane System zweier binären cubischen Formen. Gundelfinger. Mathem. Annal. VII, 452.

D.

Determinanten.

248. Ueber symmetrische Determinanten und Anwendung auf eine Aufgabe der analytischen Geometrie. Seeliger. Zeitschr. Math. Phys. XX, 467.
Vergl. Functionen 270. Gleichungen 302, 303.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

249. Ueber Harmonikalen im Dreieck. Hain. Grun. Archiv LVII, 316.
250. Verschiedene Sätze über das Dreieck. Hain. Grun. Archiv LVII, 322.
251. Nouvelle expression de la surface du triangle, avec application au calcul en déterminant de cette surface en valeur des trois côtés du triangle. Dostor. Grun. Archiv LVII, 204.
252. Ueber berührende Kreise. Zahradnik. Grun. Archiv LVII, 327.
253. Distances du point à la droite et du point au plan. Dostor. Grun. Archiv LVII, 225.
254. Le trièdre et le tétraèdre avec application des déterminants. Dostor. Grun. Archiv LVII, 113.
Vergl. Cubatur 245. Kegelschnitte 315. Krümmung 325.

Differentialgleichungen.

255. Ueber die Integration der vollständigen Differentialgleichung $Z.dz + Y.dy + X.dx = 0$. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XX, 78.
256. On particular integrals. Cockle. Quart. Journ. math. XIII, 239.
257. Ueber die Integration des vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen von linearer Form. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XX, 83.
258. Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XX, 271.

Doppeltangenten.

259. Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung. Dersch. Math. Annal. VII, 497.
Vergl. Oberflächen 361.

E.

Elektrodynamik.

260. On the action of two elements of a current. Bertrand. Phil. Mag. XLVIII, 314. [Vergl. Nr. 46.]
261. On constant electric currents. Heine. Phil. Mag. XLVIII, 79.

262. Ueber die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln. Bobylew. Mathem. Annal. VII, 396.
263. On the general theory of duplex telegraphy. Schwendler. Phil. Mag. XLVIII, 117.
Vergl. Potential 380.

Elliptische Transcendenten.

264. Note on a transformation in elliptic functions. Malet. Quart. Journ. math. XIII, 278.
265. A geometrical illustration of the cubic transformation in elliptic functions. Cayley. Quart. Journ. math. XIII, 211.

F.

Fourier'sche Reihe.

266. Fourier's theorem. O'Kinealy. Phil. Mag. XLVIII, 95.

Functionen.

267. Beweis eines Satzes aus der Theorie der formalen Operationen. Dickstein. Grun. Archiv LVII, 420.
268. On a algebraical operation. Cayley. Quart. Journ. math. XIII, 369.
269. Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. VII, 241.
270. Ueber den grössten gemeinsamen Factor. Gordan. Mathem. Ann. VII, 433.
Vergl. Bestimmte Integrale. Elliptische Transcendenten. Imaginäres. Kettenbrüche. Mittelgrössen. Substitutionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Geodäsie.

271. Die Küstenentwickelung. Günther. Grun. Archiv LVII, 277.

Geometrie (descriptive).

272. On a problem of projection. Cayley. Quart. Journ. math. XIII, 19. [Vergl. Bd. IX, Nr. 296.]
273. Perspectivische Bilder des Kreises und directe Bestimmung ihrer Durchmesser Peschka. Grun. Archiv LVII, 63.

Geometrie (höhere).

274. Die Grundlagen der Geometrie. J. C. Becker. Zeitschr. Math. Phys. XX, 445.
275. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre. Grassmann. Mathem. Ann. VII, 538.
276. Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Brill & Noether. Mathem. Annal. VII, 269.
277. Ueber die Correspondenzformel. Brill. Mathem. Annal. VII, 607.
278. Die harmonischen Mittelpunkte für ein Punktsystem von vier Punkten in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Pol. Milinowski. Zeitschr. Math Phys. XX, 17.
279. Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittels symmetrischer Elementarsysteme zweiten Grades. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 784.
280. Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Zeuthen Mathem. Annal. VII, 410.
281. Ueber Raumcurven siebenter Ordnung. Ed. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 399.
282. Ueber das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und den linearen Strahlencomplex. Silldorf. Zeitschr. Math. Phys. XX, 118.
283. Sur les surfaces du troisième ordre. Zeuthen. Mathem. Annal. VII, 428.
284 Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Ad. Weiler. Mathem. Annal. VII, 145.
285. Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie. F. Klein. Mathem. Annal. VII, 531. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 276.]
286. Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. v. Escherich Wien. Akad.-Ber. LXIX, 497.
Vergl. Barycentrischer Calcül. Kreis 321.

Geschichte der Mathematik.

287. Babylonische Mathematik. Cantor. Zeitschr Math. Phys. XX, hist. Abth. 157.
288. Ueber Hippias von Elis und die Quadratrix. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 30.
289. Rationale rechtwinklige Dreiecke bei den Arabern. Curtze. Grun. Archiv LVII, 216. [Vergl. Bd. XX, Nr. 552.]
290. Pseudo-Trithemius und Cam. Leonardi. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 25. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 75.]
291. Zur Geschichte der deutschen Mathematik im XV. Jahrhundert. Günther. Zeitschr. Math Phys. XX, hist. Abth. 1, 113. — Curtze ibid. 57.
292. Reliquiae Copernicanae. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XX, 221. [Vergl. Bd. XX, Nr. 435]
293. Hat Copernicus die Einleitung in sein Werk *De Revolutionibus* selbst gestrichen oder nicht? Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 60.
294. Ueber Simon Jacob von Coburg. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 66.
295. Ueber einen wahrscheinlich 1713 gefälschten Brief des Archimedes. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 89.
296. Rudolf Friedrich Alfred Clebsch; Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde. Math. Annal. VII, 1.
297. Nekrolog von Otto Hesse, † 4. Aug. 1874. Noether. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 77.
298. Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel. v. Zahn. Math. Annal. VII, 583.
299. Nekrolog von Gottfried Friedlein, † 31. Mai 1875. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 109.
300. The mathematical and philosophical state of the physical sciences. Lovering. Phil. Mag. XLVIII, 493.

Gleichungen.

301. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Siebel. Grun. Archiv LVII, 73, 350. [Vergl. Bd. XX, Nr. 445.]
302. A general formula for the equation whose roots are the products in pairs of the roots of any algebraic equation. Malet. Quart. Journ. math. XIII, 30.
303. Auflösung eines besondern Systems linearer Gleichungen. Günther. Grun. Archiv LVII, 240.
304. Ueber die numerische Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XX, 71.

Vergl. Kettenbrüche 319.

H.

Homogene Functionen.

Vergl. Cubische Formen.

Hydrodynamik.

305. On the motion of fluids. Cockle. Quart. Journ. math. XIII, 88. [Vergl. Bd. XX, Nr. 146.]
306. On the motion of a mass of water about a moving cylinder. Ferrers. Quart. Journ. math. XIII, 115.
307. On the motion of an infinite mass of water about a moving ellipsoid. Ferrers. Quart. Journ. math. XIII, 330.

I.

Imaginäres.

308. Bemerkung zu einem Satze aus Riemann's Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Lippich. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 91.

Invarianten.

309. Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne. Gram. Math. Annal. VII, 230.

Vergl. Geometrie (höhere) 275, 276.

K.

Kegelschnitte.

310. Der Transformationsfactor. Greiner. Grun. Archiv LVII, 337.
311 The general equation of a conic expressed in terms of the radius vector and perpendicular on the tangent. Warren. Quart. Journ. math. XIII, 16.

312. Directe Lösung der Aufgabe: einen durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt auf einen Umdrehungskegel zu legen. Ersetzen der Brennpunkte durch Kreise. Ort der Spitze jenes Umdrehungskegels. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XX, 317.
313 Ueber die Construction der Linien zweiter Ordnung, welche zwei, drei oder vier Linien derselben Ordnung berühren. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 845.
314. Die orthoptische Linie eines Kegelschnittes. Greiner. Grun. Archiv LVII, 343
315. Equation générale des deux tangentes menées d'un même point à une conique et équation du cône circonscrit à une surface du second degré. Dostor. Grun. Archiv LVII, 191.
316. Zur Theorie des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks in den Kegelschnitten. v. Wasserschleben. Grun. Archiv LVII, 302.
317. On directrices and foci in trilinear coordinates. Eurenius. Quart. Journ. math. XIII, 198.
318. Zur Theorie des Kegelschnittbüschels. Gundelfinger. Zeitschr. Math. Phys. XX, 153.

Vergl. Biangularcoordinaten 242. Parabel. Sphärik 388.

Kettenbrüche.

319. Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche. Günther. Mathem. Annal. VII, 262.
320. Numerical values of certain continued fractions. Glaisher. Quart. Journ. math. XIII, 255.

Kreis.

321. Zur Geometrie des Kreises und der Kugel. Affolter. Grun. Arch. LVII, 1.
322. Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks. Schroeter. Mathem. Annal. VII, 517.
323 Ueber Kreise im Dreieck. Hain. Grun. Archiv LVII, 218.
324. Geometrical proof that nine-point circle of triangle touches the inscribed and exscribed circles. Taylor. Quart. Journ. math. XIII, 197.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 252. Geometrie (descriptive) 273. Geschichte der Mathematik 287. Rectification.

Krümmung.

325. Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmass der Flächen. Escherich. Grun. Archiv LVII, 385.
326. Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Beez. Mathem. Annal. VII, 387.
327. Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Beez. Zeitschr. Math. Phys. XX, 423.

L.

Logarithmen.

328. Grenzen für die Basis der natürlichen Logarithmen. Ligowski. Grun. Archiv LVII, 220.

M.

Magnetismus.

329. Zur Theorie der magnetischen Kräfte. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 165.
330. The hydrodynamical theory of the action of a galvanic coil on an external small magnet. Challis. Phil. Mag. XLVIII, 180, 350, 430.
331. Zur Erklärung der periodischen Aenderungen des Erdmagnetismus. Odstrčil. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 860.

Mechanik.

332. A statical theorem. Rayleigh. Phil. Mag. XLVIII, 452.
333. Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XX, 381. [Vergl. Bd. XX, Nr. 464.]
334. On different forms of the virial. Clausius. Phil. Mag. XLVIII, 1.
335. Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. Lindemann. Mathem. Annal. VII, 56.

336. On the kinematics of a rigid body. Everett. Quart. Journ. math. XIII, 33.
337. On the motion of a rigid body about a fixed point. Quart. Journ. math. XIII, 158.
338. On the geometrical representation of some familiar cases of reaction in rigid dynamics. Townsend. Quart. Journ. math. XIII, 284.
339. On a mechanical principle resulting from Hamilton's theory of motion. J. J. Müller. Phil. Mag. XLVIII, 274.
340 Note on a point in dynamics. Ellis. Quart. Journ. math. XIII, 375.
341. On tautochronous and brachystochronous curves for parallel and concurrent forces. Townsend. Quart Journ. math. XIII, 1. [Vergl Bd. XX, Nr. 219.]
342. On the free equilibrium of a uniform cord compared with the free motion of a material particle under the action of a central force. Townsend. Quart. Journ. math. XIII, 217.
343. On the integration of the accurate differential equations which apply to the motion in two dimensions of an elastic solid. Moon. Quart. Journ. XIII, 149.
344. Zusammenhang der von Reye gegebenen Formel für barometrische Höhenmessung mit der gewöhnlichen. Sohncke. Zeitschr. Math. Phys. XX, 478.
Vergl. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Variationsrechnung. Wärmelehre.

Mittelgrösse.

345. Ueber eine Stelle aus den von Gauss nachgelassenen Schriften über das arithmetisch-geometrische Mittel. v. Mangoldt. Zeitschr. Math. Phys. XX, 362.

Molecularphysik.

346. Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung einer Materie und eines Kraftprincips. Simony. Zeitschr. Math. Phys. XX, 177.
347. Ueber die Dichtigkeitsverhältnisse des intermolecularen Aethers. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XX, 54.

N.

Nautik.

348. On the perturbation of the compass produced by the rolling of the ship. W. Thomson. Phil. Mag. XLVIII, 363.

Normalen.

349. Ueber Normalen an algebraische Flächen. Sturm. Mathem. Annal. VII, 567. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 285.]

O.

Oberflächen.

350. Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen. F. Klein. Math. Annal. VII, 558.
351. Untersuchung über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's. Lippich. Mathem. Annal. VII, 212.
352. Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen. F. Klein. Mathem. Annal. VII, 549.
353. Zur *analysis situs* Riemann'scher Flächen. Durège. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 115.
354. Beispiel einer einseitigen Fläche. Hoppe. Grun. Archiv LVII, 328.
355. Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme. Enneper. Math. Annal. VII, 456.
356. Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems. Hoppe. Grun. Archiv LVII, 89, 255, 366. [Vergl. Bd. XX, Nr. 494.]
357. Ueber die Plücker'sche Complexfläche. F. Klein. Mathem. Annal. VII, 208.
358. On the conic torus. Cayley. Quart. Journ. math. XIII, 127.
359. Die Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXIX, 215.
360. Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung. Frahm Mathem. Annal VII, 635.
361. On bitangents to the surface of centres of a quadric. Purser. Quart. Journ. math. XIII, 338.
362. Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen. Eckardt. Math. Annal. VII, 591.

363. Ueber eine allgemeine Classe von Flächen und die Flächen dritter Ordnung insbesondere Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XX, 163.
364. On the quartic surface reciprokal to the surface of centres of a central conicoid. S. Roberts. Quart. Journ. math. XIII, 188.
Vergl. Determinanten. Geometrie (höhere) 283, 286. Imaginäres. Krümmung. Normalen. Optik 367.

Optik.

365. Elementare Behandlung einiger optischer Probleme. Lommel. Zeitschr. Math. Phys. XX, 212
366. Ueber die Fermat'sche Form des Brechungsgesetzes. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XX, 311.
367. Ray-surfaces of Refraction. Childe. Quart. Journ. math. XIII, 299.
368. Ueber die Dispersion der Farben in Gasen. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XX, 92.
369. Ueber Normalreihen der relativen Dispersionen im sichtbaren Spectrum als Kriterium der Zuverlässigkeit von Messungen optischer Constanten. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XX, 326.
370. On the lateral ray-velocities in a biaxis crystal. Walton. Quart. Journ. math. XIII, 66.
371. On the vibration-cone and section-cone of equi-bifurcation in a biaxis crystal. Walton. Quart. Journ. math. XIII, 268
372. On the rings and brushes of crystals. Niven. Quart. Journ. math. XIII, 172.

P.

Parabel.

373. Die gemischte Poloconik zweier Geraden bezüglich der Differentialcurve der Parabel. Hochheim. Grun. Archiv LVII, 234.

Paraboloid.

374. On some properties of the paraboloids. Allman. Quart. Journ. math. XIII, 102.

Planimetrie.

375. Ueber das Diagonalenfünfeck eines Kreisfünfecks. Hain. Grun. Archiv LVII, 218.
376. Ueber Paralleltransversalen im Dreieck. Hain. Grun. Archiv LVII, 438.
377. Ueber den Punkt der gleichen Paralleltransversalen. Hain. Grun. Archiv LVII, 441.
378. Beweis eines Satzes vom Dreieck. Hain. Grun. Archiv LVII, 448. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 376.]
Vergl. Geschichte der Mathematik 287, 291.

Potential.

379. Ueber das logarithmische Potential. Koetteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XX, 341.
380. Electric images. P. Frost. Quart. Journ. math. XIII, 185.

Q.

Quadratur.

381. On Amsler's Planimeter. Purvis. Phil. Mag. XLVIII, 11.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 234. Determinanten in geometrischer Anwendung 251. Sphärik 387.

R.

Rectification.

382. Zur Kreismessung. Dickstein. Grun. Archiv LVII, 111. [Vergl. Bd. XX, Nr. 520.]
Vergl. Geschichte der Mathematik 287.

Reihen.

383. Sommation élémentaire des carrés et des cubes des n premiers nombres entiers. Dostor. Grun. Archiv LVII, 222.

384. Beweis einiger Sätze über Potenzreihen. Stolz. Zeitschr. Math. Phys. XX, 369.
385. Ueber die hypergeometrische Reihe. Meissel. Grun. Archiv LVII, 446.
Vergl. Fourier'sche Reihe.

S.

Schwerpunkt.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 234.

Sphärik.

386. Ueber die Anzahl congruenter Kugeln, welche sich auf eine Kugel von gleichem Radius auflegen lassen. Günther. Grun. Archiv LVII, 209. [Vergl. Bd. XX, Nr. 526.]
387. Der Legendre'sche Satz in der sphärischen Trigonometrie. Mertens. Ztschr. Math. Phys. XX, 248.
388. On spherical conics described within and without a quadrangle. Jeffery. Quart. Journ. math. XIII, 350.

Stereometrie.

Vergl. Cubatur. Sphärik. Tetraeder.

Substitutionen.

389. Quadratische Transformationen des elliptischen Differentiales

$$\frac{\Sigma \pm c_1\, x_2\, d x_3}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}}$$

unter der Voraussetzung $f(xxx) = 0$. Gundelfinger. Mathem. Annal. VII, 449.

T.

Tetraeder.

390. Beweis einer Inhaltsformel des Tetraeders. Oelschlaeger. Grun. Archiv LVII, 107. — Stammer ibid. 107. — Hoppe ibid. 108. [Vergl. Bd. XX, Nr. 533.]
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 254.

Thetafunctionen.

391. Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben. Göring. Mathem. Annal. VII, 311.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

392. Ein Beweis des Additionstheorems für die hyperelliptischen Integrale. Schumann. Mathem. Annal. VII, 623.
393. Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Classen der Transformationen der ultraelliptischen Functionen für beliebige Transformationsgrade. Dorn. Mathem. Annal. VII, 481.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 230.

V.

Variationsrechnung.

394. On the vibrations of approximately simple systems. Rayleigh. Phil. Mag. XLVIII, 258. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 339.]

W.

Wärmelehre.

395. Ueber die Beziehung der mittleren Bewegungsintensität der Atome eines beliebigen festen Complexes zu dessen absoluter Temperatur. Simony. Zeitschr. Math. Phys. XX, 172.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

396. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. Mees. Zeitschr. Math. Phys. XX, 145.
397. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl wahrer Beobachtungsfehler. Helmert. Zeitschr. Math. Phys. XX, 300.

Z.

Zahlentheorie.

398. Arithmetische Kleinigkeiten. Bachmann. Zeitschr. Math. Phys. XX, 158.
399. Zahlentheoretische Spielerei. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XX, hist. Abth. 134.
400. Zur Theorie unrein periodischer Decimalbrüche. Broda. Grun. Archiv LVII, 297.
401. Ueber die Zahlen, deren Quersumme gleich ihrer μ^{ten} Wurzel ist. Mischer. Zeitschr. Math Phys. XX, 251.
402. Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilfremden Coefficienten. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XX, 97, 314.
403. Ueber die Ausdrücke $\Sigma f_n(m)$ und die Umgestaltungen der Formel für die Lösungsanzahlen; Anwendung der Formel in der Combinationslehre. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XX, 112.

Vergl. Combinatorik 243. Geschichte der Mathematik 289. Mittelgrössen.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Chorographie des Joachim Rheticus.

Aus dem Autographon des Verfassers mit einer Einleitung herausgegeben von

Prof. Dr. F. Hipler
in Braunsberg.

(Hierzu Taf. VII, Fig. 1—3.)

Einleitung.

1. Die Kunde von dem neuen Sonnensystem des ermländischen Domherrn Nicolaus Copernicus war durch dessen Freunde und Verehrer schon lange zu den Gelehrten in Deutschland, Polen, Italien und Belgien gedrungen, bevor darüber auch nur das Mindeste durch die Presse war bekannt gemacht worden. Albert Widmanstadt, Celio Calcagnini, Bernhard Wapowski, Gemma Frisius — um nur Einige zu nennen — waren seit dem Jahre 1524, wenn nicht noch früher, mit dessen Principien bekannt; am 1. November 1536 bereits erbat sich der Cardinal Nicolaus Schonberg von Rom aus eine Abschrift des Werkes über die Sternläufe von dem Verfasser selbst, Näheres aber über sein System blieb der gelehrten Welt immer noch verborgen. Da machte sich im Frühling des Jahres 1539 ein junger Wittenberger Professor der Mathematik nach Frauenburg auf, um an Ort und Stelle von dem greisen Meister der Astronomie in die Geheimnisse seiner Wissenschaft eingeführt zu werden. Länger als zwei Jahre verweilte er bei Copernicus, der ihn auf's Freundlichste aufnahm, ihm die Handschrift seines Hauptwerkes zum Studium und später auch zur Publication mittheilte und ihn in der Abfassung einiger kleiner Schriften astronomischen und mathematischen Inhalts unterstützte, die zum Theil sofort gedruckt wurden, wie die sogenannte *narratio prima* (*de libris revolutionum Nicolai Copernici*), zum Theil verloren gegangen und bis jetzt nicht aufgefunden sind, wie das *Opusculum quo a sacrarum scripturarum dissidentia*

aptissime vindicatur telluris motus und die *vita Nicolai Copernici*, zum Theil aber nur handschriftlich verbreitet wurden und daher noch der Veröffentlichung harren, wie die Chorographie, welche im August 1541 unter Copernicus' Augen in Frauenburg vollendet wurde und uns in der Originalhandschrift des Verfassers in einem Sammelbande der Königsberger Universitätsbibliothek noch erhalten ist. Bereits in meinem *Spicilegium Copernicanum* (Leipzig 1873, S. 346) habe ich von dieser durch ihren Ursprung, wie durch ihren Inhalt interessanten Schrift des Georg Joachim Rheticus Nachricht gegeben und deren Publication in Aussicht gestellt. Indem ich jetzt dieses Versprechen erfülle, an das ich bei der regen Theilnahme für Alles, was sich direct und indirect an den Namen und das Werk des grossen Copernicus anlehnt, wiederholt gemahnt worden bin, glaube ich über den Verfasser, über die Entstehungsart und über das Manuscript unserer Chorographie einige Bemerkungen vorausschicken zu sollen.

2. Georg Joachim von Lauchen wurde am 16. Februar 1514 zu Feldkirch im alten Rhätierlande geboren, weshalb er in seinem spätern Leben nach der Sitte seiner Zeit gewöhnlich Rheticus genannt wurde. Frühzeitig schon zeigte er eine ausgeprägte Neigung für die mathematischen Studien, denen er sich zunächst in seiner Heimath, dann in Zürich bei Oswald Myconius und darauf in Wittenberg unter der Leitung seines Landsmannes Johann Volmar widmete. Zu Ostern 1532 wurde er von dem Rector Dr. Melchior Fend als „Georgius Joachimus de porris Feldkirch“ in die Wittenberger Matrikel inscribirt und scheint schon damals mit den hervorragendsten Gelehrten der Universität näher bekannt geworden zu sein, die sich auch später immer für den talentvollen Mathematiker lebhaft interessirten. Von Wittenberg wanderte der junge Joachim, dem eine gewisse Wanderlust sein ganzes Leben hindurch eigen blieb, nach Nürnberg, um sich dort unter dem weitberühmten Johannes Schoner († 1547) in seiner Wissenschaft gründlicher auszubilden, und von da weiter nach Tübingen, wo die Schüler und Nachfolger des ausgezeichneten Johannes Stofflerinus († 1531) lehrten. Hier traf den 22jährigen Studenten ein Ruf nach Wittenberg, wo er an Stelle seines kürzlich verstorbenen Lehrers Volmar die Doction der Arithmetik übernehmen sollte. Noch im Jahre 1536 habilitirte er sich in Wittenberg mit einer Rede über Wesen und Aufgabe der Arithmetik (*In Arithmeticen praefatio. Vitebergae* 1536), welche auch eine gute Schulung in den klassischen Sprachen verräth. Seine gründliche Beschäftigung mit der Geographie und Astronomie liess ihn bald die Mängel des Ptolemäischen Systems erkennen, und durch seine Nürnberger Freunde auf den preussischen Astronomen am frischen Haffe hingewiesen, verliess er Anfangs 1539, eben zum ordentlichen Professor der Arithmetik und Geometrie

ernannt, seine Universität und reiste über Nürnberg und Posen nach Frauenburg, wo er im Mai 1539 eintraf. Sein neuer Lehrer, der greise ermländische Domherr, begnügte sich nicht damit, den jungen Professor in die Tiefen seines Systems einzuführen, sondern er suchte ihn sofort auch mit Land und Leuten in Preussen näher bekannt zu machen und nahm ihn u. A. noch im Sommer desselben Jahres auf einer Reise zu seinem Freunde Tidemann Giese, damals Bischof von Culm, nach Löbau und von da weiter nach Danzig mit, wo Copernicus zahlreiche angesehene Verwandte und Bekannte hatte, darunter besonders den gelehrten Staatsmann Johann von Werden. (Vergl. *Spic. Cop.*, S. 221.) Ein vorläufiger Bericht über das Copernicanische System und eine im jugendlichen Enthusiasmus entworfene Beschreibung von Preussen (*Borussiae encomicum*) wurde von Rheticus noch im Herbste 1539 vollendet, im nächsten Jahre in Danzig bei Franz Rhode gedruckt und bereits am 23. April 1540 von Tidemann Giese mit einer warmen Empfehlung des Autors an Herzog Albrecht von Preussen gesendet (*Spic. Cop.*, S. 209 u. 351). Albrecht wird in seiner gewöhnlichen wohlwollenden Art das Büchlein freundlich aufgenommen, vielleicht auch mit einem Ehrengeschenke oder einer Einladung des Verfassers geantwortet haben. Jedenfalls konnte Rheticus im August 1541 dem Herzog für eine (zweite) ihm gewordene „Verehrung" danken und in dem Begleitschreiben zur Widmung seiner Chorographie sich auf eine mündliche Unterredung mit demselben berufen. Vielleicht, dass er seinen Meister begleitete, als dieser im Frühling 1541 nach Königsberg reiste, um einem Beamten des Herzogs, Georg von Kunheim, ärztlichen Beistand zu leisten (*Spic. Cop.*, S. 205 u. 346). Thatsächlich entwickelte sich seitdem zwischen dem Herzog und Rheticus ein Briefwechsel, den wir bis zur Abreise des Letztern aus Preussen, d. h. bis zu Ende des Jahres 1541, verfolgen können. Wir theilen diese Briefe, welche zunächst mit unserer Chorographie beginnen, im Uebrigen aber sich sämmtlich auf mathematische und physikalische Fragen beziehen, nachstehend nach den Originalen oder Copiebüchern des Königsberger Staatsarchivs mit, wie sie uns durch die Güte des Herrn Staatsarchivars Philippi zugingen. Sie sind neben der Chorographie die einzigen deutsch geschriebenen Stücke, die uns von Rheticus erhalten sind, und es ist von Interesse, die sämmtlichen deutschen Reliquien des hervorragendsten Schülers von Copernicus in ihrem ziemlich ausgeprägten vorarlbergischen Dialecte hier zusammenzufinden, während sich für die Veröffentlichung seiner lateinischen Inedita aus Krakauer und Mailändischen Handschriften wohl eine andere Gelegenheit bieten dürfte.

3. Unter dem 28. August 1541 schreibt Rheticus an Herzog Albrecht:

Durchlewchtiger hochgeborner furst vnd herr, E f g seyndt meine geflissne vnd schuldige dienst in vnderthenikait allezeit zuuoran berait.

Genediger herr, der furstlibichen (!) vererung, so E f D[t] mir als ainem vnuerdienten genediklichen gethon, bedanke Ich mich auff das höchst vnderthänigklichen, mit erbiettung solliches vmb E f g in alle wege, nach meinem geringen vermogen, zw verdienen. Domit Jch aber Ehr (!) aus Preussen mich begebe, gegen E f g, nach meinem besten vermögen mich als ain Dankbarer erzaigte, habe Ich in diser kurzen zeit chorographiam in das tewsch (!) zwsamengebracht, Darin nebest andren nutzlichen dingen angezaigt wurdt, wie die Schiffer compaſſ zw reformieren seyen, welche ainer gutten emendation wol von nöten haben, wie E f g als ain liebhaber der hohen kunsten selber gemerkt vnd gegen mir. gemeldt haben.

Vnd dieweil die Regulae neben den exemplis dester lustiger sindt, habe Ich mit hulffe, etlicher gutter herren vnd frunde, so weit mir als ainem fromden moglich gewesen ist, ain chorographicam tabulam auff Preussen vnd etliche vmbliegende lender E f g zw Ehren verordnet vnd reissen lassen,* die Ich hiemit E f g auch vbersende. Wue etwas mangels darinnen befunden wurde den welle E f g meynem vnfleys nicht zwmessen, sunder es genediglichen daruor achten, das mir daran nischt (!) gemanglet, dan gnugsame wissenschafft, wie die landt gelegen allenthalben, vnd doch derhalben nicht gewust hab solliches werk gantz zw vnderlassen vorzwnemen. Dan es meines bedenkens, aines gutten anfachers bedarf, der andren die der lande kundiger seindt als Ich, vrsach gebe sich ferner daruber zw muhen. Bit E f g wolle disse geringe anzaigung meines Dienstlichen vnd dankbaren willens genediklichen annemen, verhoffe es werde sich mit Gottes hilff zwtragen, das Ich mich nachmals in hochrem gegen E f g dankbar erzaigen möge.

Es hat auch E f g auff mein furbit, meinen Jungen im studio zu verlegen genediklichen auffgenomen, welches Ich mich gegen E f g, als mir selber beschehen hochlich zw bedanken vnd beschulden hab. Dieweil aber der Jung ain Danzker kindt ist, vndt ain Ersamer wolweiser radt daselb vernomen Des knaben geschiklikait, wil er in in den studys gemainer stat zw gut verlegen. Nachdem aber Ich mich solliches nicht versehen hette, habe Ich E f g vergebens bemuyt. Bitt Derhalben vndertheniklichen, E f g welle, was Ich aus gutter mainung gethon hab, mir genedigklichen zw gutt halten, vnd der abtrettung des knaben halben, kaine vngnedige missfallung gegen mir tragen. Vnd thw hiemit E f g

* Zu diesen guten Herren und Freunden, die Rheticus zur Fertigung der *tabula chorographica* von Preussen behilflich gewesen, ist offenbar an erster Stelle Copernicus zu zählen, der schon im Jahre 1529 an einer „*Mappa terrarum Prussiae*“ arbeitete. Vergl. *Spic. Cop.*, S. 281.

mich sampt meinen studys vnderthaenigklichen befelchen. Welche Gott der Almechtig allezeit genediklichen bewar. Gegeben zur frowenburg am XXVIII Augusti dess MDXLj Jars.

E f g

Dienstwilliger vnd | gehorsamer | Diener
Georgius Joachimus | Rheticus.*

4. Bereits am folgenden Tage sandte Rheticus dem vorstehenden Briefe und der deutschen Chorographie ein anderes Schreiben an den Herzog mit einem Instrumentlein zur Berechnung der Länge der Tage nach. Es lautet:

Durchlewchtiger hochgeborner furst vnd herr, E f g seyn mein geflisne vnd schuldige Dienst in vnderthenikait vnd stetigem fleis allezeit zuuoran beraidt. Genediger herr, nachdem E f g sich bememuhet (!), von etliche(n) der Mathematic verstendigen, zw erkundigen der tag lenge, vnd yren gnaden verzaichnen lassen wan vnd welche ör sich der tag anhube, durch das jar aus, welches doch, als E f g observirt hat, zu zeitten wohl vmb etlich stunden nicht zwtreffen. Darumb das sey E f g begeren nicht ingenomen vnd *pro vero die* den Mathematicum supputirt haben. So habe Ich ain Instrumentlin darzw E f g verordnet, darinnen nach beygelegten canonibus E f g was dieselb begeret, es seye vom vero oder Mathematico etwas nehers, wie ich verhoff yr f. g. begeren gewert wurt sein.

Bit E f g welle disse geringe anzaigung meines dienstlichen vnd dankbaren willens auch genediklichen annemen.

Das mir auch E f g wil genedeklichen furschrifft geben an Chwr f. D[t] Saxoniae vnd die loblichen Vniuersitet Witenberg, domit mir vergonnet mochte werden, das opus *D. praeceptoris mei* in den truk zu geben, wie Ich an Ewer f. g. durch D. Hieronymum Schurstab E. f. g. diener, habe anlangen lassen, bedanke Ich mich gegen E. f. g. vnderthaniklichen, in erbietung solliches vmb E. f. g. in aller vnderthanikait nach meinem hochsten fleis alle zeit zwbeschulden, vnd thw hiemit mich E. f. g. dienstich vnd vnderthäniglichen befelchen, welche Gott der almechtig allezeit genediklichen bewaren welle. Geben zwr frawenburg am XXIX Augusti des M.DXLj Jars.

E f g

dienstwilliger vnd vnderthaeniger
diener Georgius Joachimus Rheticus.**

---

* Original im herzoglichen Archiv zu Königsberg. Die Ausfertigung, wie es scheint, eigenhändig. Adresse und Secret auf einer Enveloppe. Das Secret zeigt einen Schild und die Initialen G. J. Der Schild ist quergetheilt und hat im obern Felde einen halben Adler, im untern drei links gewendete Schrägbalken, worauf drei senkrecht schwebende Kreuze oder kreuzähnliche Figuren.

** Original im Archiv zu Königsberg, Schrank 3, Fach 36, Nr. 102. — Ein unvollständiger Abdruck in *Spic. Cop.*, S. 347.

5. Drei Tage später — am 1. September 1541 — liess Hieronymus Schürstab, der Secretär des Herzogs, in dessen Auftrage ein darauf bezügliches Schreiben an die Universität Wittenberg und ein ähnliches an den Churfürsten von Sachsen abgehen. Das letztere lautet:

An den Churfursten zu Sachsen.
den 1. Septembris 1541.

Vnser freundlich dienst vnd was wir allzeitt mher liebs vnd guts vermoegen zuuorn. Hochgeborner Furst, freundlicher lieber Oheim vnd schwager, Nachdem sich der achtbar vnd wolgelerte vnser besonder lieber Magister Georgius Joachimus Rheticus, der Mathematicen zu Wittenbergk professor, ein zeitlang alhie In diesen landen preussen, ehrlich vnd wol gehalten, Auch seiner kunst der Astronomey ꝛ dermassen vermittelst gottlicher gnaden vnd hilff nachgesetzt, dorab wir verhoffen, ehr nit allein E. L. sonder auch der gantzen vniuersitet nicht zu geringer zier rhum vnd preiss, dessgleichen Jn sondern nutz vnd frommen sein soll, Weil wir dan von Jme berichtet wie ehr vor der zeitt die lectur zw Wittenbergk Jn der Astronomey welche Jme bissher zum besten alsslang aufgehalten erlangt, wnd gleichwol daruber noch nicht bestettigt. vnd confirmirth worden, wir auch vber das vernomen das ehr ein buch seiner kunst, welchs ehr alhie Jn diesen landen mit grossem vleiss, muhe vnd arbeitt zusamen gepracht vnd verfertiget offentlich Jn druck draussen landes ausgehen zulassen bedacht, Als haben wir Jnen Seintemal wir seiner person vmb seiner kunst willen mit hohen gnaden gewogen, an E. L. genediglichen zuuorschreiben nit vnterlassen moegen, Jst demnach an E. L. vnser freundlich bitt dieselben wollen Jnen Jn anmerkung seiner kunst, geschicklickeit vnd tugent, nicht allein zw obberurter lectur, die ehr bissher zw Wittenbergk gehabt confirmiren vnd bestettigen, Sondern auch Jme gnediglichen gestatten vnd vergonnen, das ehr sich zw volfurung solches seines vorhabenden werckes an die orth da ehr sein buch trucken zulassen entschlossen ein zeitlang ohne abbruch seiner besoldung der lectur begeben moege,* Jme auch sonsten von vnsert wegen allen

* Rheticus scheint also wohl schon damals beschlossen zu haben, nicht sein eigenes, wie hier irrthümlich angenommen wird, sondern „das opus *D. praeceptoris*“, wie er am 29. August selbst schreibt, in Nürnberg bei Petreius drucken zu lassen, der durch die Widmung einer Schrift des Antonius de Montulmo an Rheticus bereits im Jahre 1540 nicht undeutlich um den Verlag des Copernicanischen Werkes für sich gebeten hatte. Für die Geschichte der ersten Ausgabe der Revolutionen und Rheticus' Betheiligung dabei ist von grosser Wichtigkeit folgende Stelle in einem Briefe des T. Forstherus zu Nürnberg an D. Jos. Schradi, Pfarrer zu Reutlingen, datirt „*in die Petri et Pauli* (29. Juni) *1542: Prussia novum ac prodigiosum nobis Astronomum genuit, cuius doctrina jam hic excuditur, opus futurum circiter centum arcuum papyri, quo terram moveri et coelum stare contendit ac probat. Sunt mihi visi duo arcus Typis excusi ante*

gnedigen furderlichen willen, doran wir gar nicht zweiffelen ertzeigen vnd beweisen, Das wollen wir hinwieder mit allem freuntlichen schwegerlichen willen beschulden, vnd beuelen E. L. hiemit gotlichem schutz vnd schirm. Datis

In *simili forma* an die
wniuersitet zw wittenberg.

Commissio Principis propria.
Jeronimus Schurstab.*

6. Eine Antwort auf die beiden Briefe vom 28. und 29. August und ein vorläufiges Ehrengeschenk für das „Instrumentlein" und die Chorographie erhielt Rheticus erst am 20. September durch den herzoglichen Secretär Balthasar Gans. Wir ersehen daraus den regen Antheil, den der Herzog an Rheticus' Studien und besonders an seinen praktischen Arbeiten nahm, indem er, mitten unter politischen Geschäften und auf einer längern Reise begriffen, dennoch die übersendeten Schreiben und Gegenstände prüft und zu gebrauchen sucht. Das Antwortschreiben selbst lautet:

An Magistrum Georgium Joachimum Reticum.
den 20. Septembris Anno 1541.

Vnsern grus zuuorn, Achtbar vnd hochgelerter lieber besonder, Wir haben in kurz nacheinander von euch zwey schreiben, die wir lengist zuerwidern vor vnnotig achten, das eine den 28ten das ander am 29ten Augusti nechstverschienes Monats bekommen, vnd daraus euern angetzeigten Willen, so Jr gegen vns traget durch zuschickung des Jnstrumentleins sampt mitgetheiltem schriftlichen bericht desselben Mappen vormerkt, Fuegen euch dorauff genediglichen zuuornemen, wiewohl wir dasselb gern durchgelesen, das wir doch solchs, weil wir Jn zurichtung sein zur Littischen grenitzen, Nichtsminder das vns in dieser eil der aufprechung allerley hendel furgefallen, zum grundt nicht thun haben konnen, Wir wollen aber vermittelst gotlicher hilff auff dem wege so baldt wir raum erlangen, solchs vortzunemen, vndt wenn vns alsdann Jrgendt ein bericht darjnnen mangelt euch dieweil wir wissen woe Jr anzutreffen, darumb antzusuchen nicht vnderlassen, Nachdem vns den euerer person wiederumb gnedige danckbarkeit zubeweisen gepurt, weren wir dasselb auch zuuolpringen gnediglichen gewogen gewesen, So hat sichs doch dissmals Jn bedacht das vns euere priff gantz nahe vor vnserm auffbruch zukommen, auch Jr wie wir bericht Jn kurz verreisen wordet, nicht schicken wollen, Aber gleichwol thun wir vns allenthalben der

---

mensem, eius operis corrector est Magis(ter) quidam Wittenbergensis". Vgl. Förstemann, Neue Mittheilungen aus dem Gebiete hist.-antiquar. Forschungen, 1836, II, 1, S. 93.

* Copirt im Registranten des Königsberger Archivs, Bd. 226 s. d.

obengedachten oberschikkung Jn gnaden bedanken, obersenden euch Jtzunder Jn solcher Eile Jn ertzeigung vnserer danckbarkeit einen portugaleser, wollen aber hernachmals vnd mitter zeitt, dermassen gegen euer person befunden werden, damit Jr vnser gnedige danckbarkeitt vnd willen wirglichen zuspuren, Vnd fugen euch dobey zuuornemen, ob Jr vns schon einen bericht des Instrumentleins den wir mit vleis obersehen, zugefertigt, haben wir vns dannocht nichts doraus richten konnen, zudem ist vnsers bedunckens der meister der goltschmit nicht vast subtil domit vmbgangen, hoffende von tagk zu tagk besser dorjn zurichten, vnd wiewol wir der kunst wenig erfaren, so lesen vnd horen wir sie doch gern, Begern derhalben gnediglichen, woe Jr hinfurter bisweilen durch verleihung gotlicher gnaden, auch euerm hohen verstandt vnd vleiss etwas von dergleichen kunst ausgehen lasset, Jr vns dasselb gutwillig mitteilen, Nichtsminder dem Erwirdigen, Achtbaren vnd hochgelerten, vnserm besondern geliebten ehrn Doctori Martino Luthero, Philippo Melanchthoni, Pomerano, auch sonst allen andern gelerten personen, bekanten vnd vnbekanten, wenn euch der liebe Gott gegen Wittenbergk, welches wir euch hertzlich wunschen, vorhilfft, vnsern gnedigen grus vnd willen antzeigen, Das seint wir vmb euch Jn allen gnaden abtzunemen vnd zuerkennen geneigt. Datis Konigspergk ꝛc.

Commissio principis
ex relatione Secretary
Baltzer Gans.*

7. Weitere Spuren eines Briefwechsels zwischen Albrecht und Rheticus haben wir nicht auffinden können. Der letztere verliess, wie bereits erwähnt, bald darauf Preussen, ging 1542 von Wittenberg nach Nürnberg, wurde noch in demselben Jahre Professor in Leipzig, zog darauf im Jahre 1551 nach Prag, war 1557 in Krakau und scheint dort bis zu seinem Tode verblieben zu sein, der ihn am 4. December 1574 zu Kaschau in Ungarn überraschte, sechs Jahre nach Albrecht's Tode.** Das von Tiedemann Giese an den Herzog gesendete Exemplar der „*narratio prima*", das „Instrumentlein" und — was besonders zu bedauern ist — die „*tabula chorographica* auf Preussen" sind aus Königsberg verschwunden. Nur die „Chorographia" selbst hat sich noch erhalten, und zwar, wie aus einer Vergleichung der Handschrift mit den eben mitgetheilten zwei Originalbriefen von Rheticus hervorgeht, im Autographon des Verfassers selbst. Sie befindet sich in einem wahrscheinlich noch zu Lebzeiten des Herzogs zierlich in Leder gebundenen Sammel-

* Copirt im Registranten des Königsberger Archivs, B. 141 S. 126—128.

** Vergl. *Spic. Cop.* S. 285. Näheres über Rheticus' Leben und Schriften bei einer andern Gelegenheit.

bande (in Folio), welcher gegenwärtig der Königsberger Universitätsbibliothek angehört, unter den Manuscripten sub Nr. 390 (früher C. B. 78) aufgestellt und von dem Buchbinder äusserlich als „REMISCH. HISTOR.“ bezeichnet ist. Es enthält nämlich dieser Band an erster Stelle: „Joannis Boccatii die gantz Römisch histori ... verteutscht durch Christophorum Brunonem von Hyrtzweil. Gedruckt zu Augsburg bei Hainrich Steiner. MDXXXXII.“ Darauf folgt eine zweite Druckschrift („Wahrhafftiger vnnd Gründtlicher Bericht der habenden Gerechtigkait Kayser Karls des fünfften zu dem Herzogthumb Gellern u. s. w. 1541. *s. l.*“), dann eine Handschrift (46 beschriebene und 2 unbeschriebene Blätter), beginnend mit den Worten: *„Prima Limitatio Quattuor diocesium in Terra Prussia per legatum Sedis Apostolicae“*, darauf an vierter Stelle unsere Chorographie und endlich noch ein drittes Manuscript (10 beschriebene Blätter), anfangend mit den Worten: „König Heinrich zu Sachsen“.

Das Manuscript der Chorographie ist auf starkem, festem Papier geschrieben, welches, nach dem Wasserzeichen (einer Hand unten mit Aermeln, oben mit einer dreiblättrigen Rose) zu schliessen, niederrheinischen oder niederländischen Ursprunges zu sein scheint. Es besteht aus 5 Lagen, bezeichnet mit den Custoden *A* — *E*, die erste von 8, die folgenden 4 von je 6 Blättern. Das erste Blatt ist durch den Titel in Anspruch genommen, das letzte ganz leer; oben, unten und an der rechten Seite des Textes findet sich ein durchschnittlich 3 Finger breiter Rand, so dass durchschnittlich nur 18—20 Zeilen auf jeder Seite stehen. Die Schrift ist im Ganzen ziemlich deutlich und fast durchgehends in deutschen Buchstaben geschrieben, die bekanntlich im 16. Jahrhundert den lateinischen noch sehr ähnlich sind; nur hier und da — offenbar ohne Princip — finden sich auch deutlich die lateinischen Schriftzeichen. Unser Abdruck verzichtet darauf, diese Verschiedenheiten nachzubilden, giebt aber im Uebrigen die Handschrift einschliesslich der Interpunction und Orthographie bis ins Einzelnste getreu wieder.

| Chorographia | tewsch. | Durch Georgiū Joachimū Rheticū | f. 1 a.
| Mathematicū, vnd der | Vniuersitet Vitenberg Pro- | fessorem zwsamengebracht | vnd an den tag geben. | MDXLj.

| Dem durchlewchtigen, hochgebornen fursten vnd herren, | f. 2 a.
herren Albrechten marggrauen zw Brandenburg, In Preussen, zw Stetin Pomren, der Cassuben vnd Wenden herzogen, Burggrawen zw Nurenberg, vnd fursten zw Rugen meinem gnedigen herren.

Durchlewchtiger hochgeborner furst, E F G seien mein geflisne dienst, alle zeit zuvoran berait. Gnediger her, wie durch sunderliche schikung Gottes alle andre lobliche kunst zw vnsren

zeitten herfur komen, vnd Gott der herre, neben seinem Wort,
| f. 2b. auch durch sein geschopf vnd Creatur | wil erkant werden, wie
dan die alten rechten philosophi bekennet haben, Das die natur
der schonste Spiegel Gottlicher maiestet seye, darinnen Gottes
macht vnd gegenwertikait gewaltig vnd sichtlich erkennet wert.
Also befinde Jch warlich, das er die hohen kunst welche man
Mathematicas nennet nicht will lenger dahinden bleiben lassen.
Die Geometry thut sich gewaltig heruor. Dan Euclides ist in
seiner aignen sprach an tag kumen, so finden sich auch herbey
Menelaus, Theodosius, Apollonius vnd der hochberumbt Archi-
medes, von welchen man kurtz vor vnsren zeitten nischt gewisses
hat zw sagen gewust.

| f. 3a. | An der Astronomei hat es auch kainen fel, dan es ist nun
vorhanden *Ptolemaeus graece*. So werden wir auch durch das lob-
lich opus des achbaren vnd hochgelarten herren Doctoris Nicolai
Copernicj, meines herren Praeceptoris, ain gewisse rechenschafft
haben, der Zeit vnd des Jares, auch wie die Son, der Mond, vnd
alles gestirn yren lauff haben, vnd in was mos vnd ordnung sey
geschaffen seyen, an welchem, wie wissentlich bis anher grosser
mangel vnd fel gewesen ist. Die andren als Arithmetic Music etc.
sindt auch zimlich Jm schwank. Aber die Geographej bleibt noch
| f. 3b. ligen, vnd ist wänig hoffnung | das die selbig folkumlich moge er-
newret vnd reformirt werden. Dan der alten scripta, als Ptolemaej
weiwol sey verhanden seint, komen sey vns doch waenig in dem
zw nutz. Zwm tail darumb, das mit dem fal der Romischen Mon-
archej, vnd hernach aller reich verendrung, auch Tyranney der
Turken, gemaines der Christenhait erbfindes, vil furnemste sthet
verwust seint, als man jetz nicht waist wo Athen in Graecia ge-
standen ist, welche doch das höpt Graeciae war, vnd aus welcher
Xerxes der fast gantz Asiam inhielt gedemutiget wardt. So wer-
den dargegen andre stett auffgebawen vnd die alten namen deren
so noch gebliben seind verlieren sich auch, als man in Germania
| f. 4a. waenig gewisses waiss | von denen so Ptolemaeus beschriben hat.
Zwm andren das auch etlich lender von sich selber abnemen,
zw geringrung kumen, vnd gleichsam veralten. Dagegen vil len-
der so zw Ptolemaei zeitten ytel wildnussen vnd wusten gewesen
sind, vnd daruon man wänig zw sagen gewist, seind jezen gutte
vnd wol erbawte lender, vnd mit Religion vnd loblicher Policej
verfasset, wie man in Septentrione findet. Endlich haben die
gewaltige segelationes vnss auch gantz wie man sagen wil, zw
ainer andren vnd newen welt, gebracht, do man vor gedacht hat,
wie es alles mit wasser beflossen vnd nur ain mer, das man Ocea-
num nennet, waere.

| Wan nun frid vnd rw in allen landen wie zw den zeitten | f. 4b. Diuj Augusti waere, vnd die hochen Potentaten, wie die alten gethon haben, darzw thetten, das man ain gewisse verzaichnung der lender vnd aller welt haben kunnte, so mochte wol ain hoffnung sein, das die Geographej auch zw vnsren zeitten gebessret wurde. Dieweil aber auss dem nichtes wurt, wie auch der hailigen schrifft Propheceyen zewgen, so mag man sich beflaissen, das man deren lendren so man gehaben mag gewisse verzaichnung zw hauffen brenge, welches ich gantz nöttig achte. Den domit Jch die trefflichen auch ander gemaine vtilitates der Geographei fallen lasse, welche E f g, auss hohem furstlichem | verstandt, vnd alss | f. 5a. ain besundrer liebhaber disser hohen kunsten selber zw bewägen waiss, waere warlich gut das man etwas bey der lustigen vnd nutzlichen Kunst thete, von wegen der hochloblichen Kunst welche zw vnsren zeitten Astrologia genant wurt. Dan wo man ainer stat longitudinem vnd latitudinem nicht waist, ist es auch vnmeglich darauff Eclipses, Item der Sonnen, des mons, planeten vnd alles gestirns motus vnd zw dem selbigen ort Ir habitudines zw rechnen, auss welchem dan gedachte kunst, von wurkung der natur vnd kunfftigem *Eruditas coniecturas* zw nemen leret. Welches ia nutzlich vnd nicht ain kleine Gottes gab ist, wie alle rechte vernunfft vnd tegliche erfarung weist vnd mitbringkt. | Nach dem | f. 5b. aber die Potentaten gemainer Christenhait zw vnsren zeitten mit hochen wichtigen hendlen beladen sindt, die Religion betreffendt, frid vnd einikait zw erhalten, *Ciuilia bella* zw verhwtten, vnd dem Turken widerstandt zw thwn, ist kain ander mittel verhanden, disser lender daruber man gewisse verzaichnung nach rechter art der Geographej haben mag, dan das sich in allen lendren hin vnd wider, lewt, die der kunst sich befleissen, mit hilff der hochloblichen fursten vnd herren, *Chorographicas tabulas*, so man lands tafflen nennen mocht mit fleiss colligierten vnd an tag geben, damit sich | etwa ain rechter grundlicher Mathematicus daruber be- | f. 6a. geben mochte, vnd in des Ptolemaei Fustapffen tretten, vnd die Geographei wie es sich erfordert, wie vmer muglich ernewere. Aus welchem bedenken, das sich gemainem nutz zw gut dester mehr, so den kunsten genaigt sindt herbey funden, habe Jch auss bit filler gutter frundt, vnd auch E f g hoffmalers, Crispinio Harand,* wiland des weitberimpten Albrechten Durers discipulo, alle art vnd weiss nach rechter Art der Mathematic zwsamen gebracht, vnd in das tewsch verfast, wie die *Chorographicae tabulae*,

* Ueber Krispin Herranth vergl. meine Schrift: Die Portraits des N. Copernicus. Leipzig 1875. S. 6 flgg.

oder lands tafflen gemacht mogen werden. Vnd damit es menk-
| f. 6b. lichem zw mehrem nutz | vnd fordrung raichen mochte, habe Jch auch von rechtem gebrauch des Magneten vnd schipper compas grundtlich zw machen hinzwgesatzt, Jn welchem wie kundpar bis anher mangel gnug befunden wurt.

Dis mein klain vnd erst werk, so Jch in tewscher zungen lass aussgen, habe Jch vornemlich E f g zw zeschreiben vnd zw dedicieren bedacht. Dan dieweil Jch E f g von dissen kunsten, vnd was die Mathematic betrifft, nebendt andren geschefften reipub:, wie wir von Julio Caesare vnd Carolo Magno lesen, hab horen loblich wol vnd grundlich reden, dardurch E f g genaigter vnd genediger wille zw dissen kunsten vnd Jren Cultoribus zw spuren
| f. 7a. ist, bin | Jch der Hoffnung E f g werde dis, wiewol klain dienstlich erzaigung meines dankbaren willens, der furstliche vererung, so mir E f g gantz genediklich bewissen hat, von mir in gnaden auffnemen. Vnd hoffe das nachdem E f g disses buchlin zw ainem Patrono haben wurdt, so wurde es mehr gebraucht vnd angenemer sein. Vnd thw mich hiemit E f g dienstlich vnd vnderthenig-lichen beuelchen, welche Gott der allmechtig alle zeit genediglich bewar. Datum zwr frowenburg im Augusto des MDXLj Jars.

E F G

dienstwilliger vnd
geflissner diener
Georgius Jo(achimus)
Rheticus Ma(thema)ticus.*

| f. 7b. | Was do seye Geographia vnd Chorographia, vnd durch wie uilerlai art man *Chorographicas tabulas* machen konde. cap: j.

Ess wurt in der physic vnd Astronomej erwisen, wie das gantz erdrich sam ain runde kugel seye, glich wie wir teglich vor augen sehen, das Son vnd Mon auch alsso in die runde von Gott geschaffen sind. Dieweil nun die alten philosophj sich alss hohe verstendige lewtt vmb Gott, seine werk vnd Creaturen bekumret haben, vnd die so weit in muglich zw erkundigen beflissen, haben etlich der Elementen, vnd was von den selbigen hie ist aigenschafft vnd tugent gesucht, dannen her dan die Medicin
| f. 8a. geflossen ist. Etlich, dieweil menschliche | vernunfft nict vnuersucht lest, haben sich mit hilpf der Geometrej bemwt, vnd entlich dahin bracht, dass sey ain gewisse rechenschafft hetten des Loffes der Sonnen vnd Mons darauss man zuvor die finsternusse vnd

* Das Eingeklammerte ist am Rande durch den Buchbinder fortgeschnitten.

andre mehr himlische zaichen, so sich von wegen deren motibus zwtragen, mochte wissen. Nach dem aber solliche Jre rechenschafft, von wegen der rundikait des erdrichs, welches allenthalben glichsam in der mitten befunden wurt, nicht konde zwtragen: Alss die in Asia oder auffgang der Sonnen sehen spetter ain finsternuss dan die in nidergang alss in Hispania. — Vnd so do nordwerds ligen, sehen vil gestirn nicht, so Sud werds zw sichten kumen, gleichwie *in septentrione* die sommertag auch lenger sind alss dort. | Derhalben haben die Mathematici auch darnach | f. 8b.
trachten mussen, wie sey das erdrich mit dem Hymel verainigten, vnd ains dem andren zwsagte. Diss halte Jch vor den rechten vrsprung der Geographej. Dan disse kunst bildet oder malet fur sich das gantz erdrich glich wie ain kugel, setzt darinnen ain land vnd konigreich nach dem andren, wie man durch erfarung vmer hat mogen darzw kumen, nach dem ain ytlich gegen dem andren nord- ost- west- oder sud werdt liget. Jedoch bleibt sey nicht bey dissem schlech alain, wie Strabo, Pomponius mela, vnd der geleichen thund, sunder drit ain waenig neher zwr sach, vnd findet letschlich ain waiss vnd | art, derdurch man ainer | f. 9a.
ytlichen stat, order ort stelle gewiss habe wo sey in der kugel lige, (wie daruon etwas hernach gemeldet wurt). Dardurch bald abzwnemen ist, wie man von dissen oder Jenen landen die finsternussen, gestirn vnd himlische zaichen sehe. Es ist wol abzwnemen wie die Geographej erstlich gering ding sey gewesen, demnach die Astronomej vnd Mathematic ye vnd ye bey waenigen befunden wart, vnd sey grosse erfarnuss wil haben, auch nicht in aines oder andren menschen leben sthet. Aber dis wurt nebent den perigrinationibus so die kofflewt vnd sollicher kunst liebhaber gethon haben wie Ptolemaeus Marinum anzewht meins bedunkens sehr darzw geholffen | haben, das sich die konig vnd potentaten | f. 9b.
darzw beflissen seind dass sey die lender erkundigen liessen, wie man das selbig in den historijs offtmals vnd sunderlich Alexandrj magnj findet, vnd innen dieselbigen nach aller gelegenhait liessen furmalen, gleichsam ain rechte der land so sey gewissenschafft haben mogten contrefetur. Disse der lender vnd aines ytlichen in sunderhait contrafeturen haben die alten Chorographiam genennet, wie bald im anfang der Geographej beim Ptolemaeo zw sehen ist. Auss welchen auch hewt bej tage die Geographej wurt zw mehrem tail so weit muglich mussen gebessert werden. Die Mathematic aber wurt ain waenig bey den alten gemainer gewesen sein alss zw vnsren zeitten, darumb | findent wir nicht bej inen | f. 10a.
wie die *Chorographicae tabulae* zw machen seyen. Albrecht Durer leret in seinen buchern, wie man ain landschafft die ainer in das

gesicht bringen kan abconterfaitten solle. Wie sich etlich an der
landschafft vmb wien bewissen haben. Das selbig vnd dergelei-
chen, so auch zwr Chorographej dienet, wil ich den malren be-
folhen haben.

Dieweil man aber nicht ain gantz lande zwmal in dass Ge-
sicht bringen mag, so will ess etwas weitters erfordren, wie die
Chorographicae tabulae auss rechtem grund auff ain land zw reissen
seye, darinnen die rechte gelegenhait aller stetten, flecken, flies-
sen etc gehalten werde. Vnd seind nemlich fiererley weiss vnd
| f. 10b. art die Chorographicas oder lands tafflen zw machen. | Erst-
lich durch aines ytlichen stat oder ort Longitudinem vnd latitudi-
nem, wie man die *Geographicas tabulas* machet, aber disse weiss
mus man den Mathematicis lassen, die solliches mitlisch der Geo-
metrej, Arithmetic vnd Astronomej volfuren kunden. Die ander
drey weiss oder art, welche wir auff dass kurtzist zw beschreiben
furhaben, kan auch ain ytlicher gemain verstendiger brauchen.
Die erst bedarff nicht mehr als ain itinerarium des landes, das ist
wie vil meilen es von ainer stat zw der andren seye vnd wie weit
ain ort auff das gerichtist von dem andern lige.

Die ander weiss geht zw durch ain Jnstrument oder Compas
so sunderlich darzw verordnet vnd gemacht wurt.

Zwm dritten sindt die *Chorographicae tabulae* auch zw machen
| f. 11a. auff dass | ainfeltigist, durch die strich des Compas sampt dem
Itinerario, vnd durch disse weiss werden die sehe oder Compas
Charten gemacht.

Von der ersten mainung die *Chorographicas tabulas* zw machen. Caput Ij.

Disse erste weiss ain land zw beschreiben ist sehr leicht.
Erstlich muss man auff das land, so man beschreiben wil, ain
gewisse wie vmer muglich verzaichnung haben, wie weit ess den
nechsten weg von ainer stat zw der andren seye. Darnach nimpt
man ain Pergamen oder chartam darauff man dass land mit aller
gelegenhait reissen wille, vnd reisst auff ain seitten ain grade
linien, die man nach gwt gedunken in etlich gleiche tail tailet,
welche im meilen bedewten. Disse tail mussen aber alsso sein,
| f. 11b. | domit man des landes weitte vnd braite auff gedachtem Per-
gamen haben moge, vnd dasellbig nach begeren auffreissen. Weitter
verzaichne Jch mir die vier hoptwinde, vnd nime fur mich ain
stat oder haus daruon Jch anfachen wil als A, disse setze Jch
ongefurlich auff die chartam wo mich gedaucht dass sey in dem
lande lige. Darnach sey ein stat B nach der landstreckung on-
gefurlich auff sudwest zw swd von dem A IX meil wegs gelegen.

Disse IX meilen nime Jch mit dem cirkel auss gedachter *scala miliarium* vnd trag solliche auff die chartam nach der landstrekung so habe Jch wie *A* vnd *B* gegen ainander ligen. Die drit stat *C* musse Jch setzen dass sey gegen der stat *A* vnd *B* recht lige. Das Itinerarium zaigt mir an dass sey | vom *A* lige XV meil on- | f. 12a. gefurlich gegen nordwest, derhalben nim Jch mit dem Cirkel XV meilen vnd setz den ainen fuss in das *A*, mit dem andren reisse Jch ain blind Cirkel drom gegen nordosten. Vnd dieweil *C*. von dem *B* auf XVIIj meilen ligt, so nime Jch XVIIj meilen auch mit dem Cirkel vnd setz den ainen fus in dass *B* mit dem andren reisse Jch ain ander Cirkel drom, dass er das vorig durchschneide, vnd wo das Creutz hinfelt da ligt die stat *C*. Weitter es lige ain stat haus oder flek mit namen *D* von *A* ongeferlich nach der landstrekung auff IX meilen gegen nordnordwest zw nordwest da reisse Jch wie gesagt das erst Cirkel drom, von *B* aber lige sey XV meilen darumb wan ich die mit dem Cirkel nime vnd | setz | f. 12b. den ainen fus in das *B*, mit dem andren reisse Jch das ander Cirkel drom alsso das ess das erst durchschneide vnd verzaichne den puncten *D*. Die stat *E* kan Jch auch hinein verzaichnen, dieweil Jch weiss dass sey von *A* auf IIIj meilen gegen nornord-ost ligt, vnd vom *B* auff XIIIj meilen. Dass hauss *F* findet sein stell auch, dan ess liget vom *A* XI meilen vnd ain halbfiertail auf sudsudost vnd vom *B* IX meilen. Die Stat *G* ist auch gut zwuer-zaichnen dan sey liget von *A* IIj meilen auff sud zw osten on-gefurlich vnd von *B* VIIj meilen. Auff disse weiss vnd art mag man leichtlich alle sthet, heuser, geringe auch furnemiste orter aines ganzen landes auff die Chartam verzaichnen. | Dissem ge- | f. 13a. satzten exempel nach, ist nit von notten, dass man von zwaien stetten alain anzwheben ain gantzes land beschreibe, sunder man mog nemen zwo steht etc. wo man wil im lande, vnd nachdem ess am bequemischten ist die vmligenden sthet nach diser weiss ver-zaichnen, alss wan ich wolt vom *E*, *G*, oder welche zwo ess weren, die andren alle nachainandren setzen, vnd vmerdaren ains an das ander henken, glich wie man Jm ziehen von ainer stat zw der andren kumpt, biss dem land an ain ende. Das Jch aber der strich oder wind des Compas hie herin gebrauch, thun Jch alain darumb das man die Cirkel drom dester kurzer machen dorfte, vnd das kreutz so fil dester gerinklicher finde, sunst waere ess eben genug das man wiste wie sich die drit stat von den zwaien gegen den hobtwind hielte. | (Fig. 1.) | f. 13b.

Ess ist auch hierin zw merken das die zwai Cirkel drom ain andren nicht alwegen durchsnaiden, sunder etwa nur alain zw rur an ainander fallen. Diss geschicht wan die sthet oder orter in ainer geraden linien ligen vnd kainen triangulum mit ain andren machen, so felt die dritt sthat auff den puncten do sich die zwei circkel drom zw hauffs ruren.

| f. 14 a. | Entlich aber nach dem auff die charten die puncten aller sthet, hewser, fleken vnd was man wil vermerkt haben, gezaichnet hat, so sindt die flusser, wasser, tieff, strom, see, tich etc. mit aller irer vrsprung, krumen vnd gantzer gelegenhait leichtlich hinein zw setzen. Dan man malet vnd zewch(t) sey auff die puncten der sthet oder orter do sey seind oder Jren flus hin haben, weit oder nach, wie ess erfordret durch das gantz land hinauss. Dessgleichen die wildnussen weld vnd berg, auch nach vnd (nach) sich wil schiken zw den verzaichneten puncten. Ess wil sich auch erfordren, Ja von nöten sein wan man ain fleissige *Chorographicam tabulam* machen wil, dass die landschafften, furnemiste sthet vnd orter so weit muglich contrafaitirt seyen, vnd besunder die lands kundigung von der sehe. Aber was solliches ist, befelche Jch aines ytlichen fleiss.

| f. 14 b. | Von der andren Art *chorographicas tabulas* zw machen. cap: IIj.

Disse weiss oder art lest sich ansehen, als waere sey schwerer als die vordrige. Aber sey ist gleich so ring, vnd im grund nicht andrist wie die vordrige. Dan wie man nach der vorigen art, auss den seitten aines triangels, das ist von den *distantijs locorum*, wie weit ess von ainem ort ist zw dem andren, die triangulos beschlossen hat, vnd endlich wie sich es erfordret, die dritten stat gesetzet, also hie durch erkundigung der Winkel des triangels, wurdt er beschlossen, vnd alwegen des dritten ortes punct vermerkt.

Das Jnstrument aber dadurch man gedachte angulos findet, | f. 15 a. hat nicht sunderliche grosse arbait auff sich zw machen. | Alain dieweil das holtz von seiner art nicht lest, vnd schweult oder wechst nach des luftes endrung, man versuche es mit Jm glaich wie man welle, so erfordret ess die not dass man gutte *instrumenta mathematica* von Mossing oder ander metal mache. Derhalben mag man hierzw nemen ain schon geschlagen mossing dass fein glat gehoblet vnd in die brait auch lenge ongefurlich ainer ellen seye, Jedoch ye grosser so vil ist ess dester besser vnd gewisser. Disses Blech sol man senken in ain gut wol aussgetruknet nussböme holtz oder anders das sich am wänigsten nach dem wetter endret, vnd alsso darein leymen oder kitten, dass es auff das fleisigest | f. 15 b. iustirt wärde. Nach disser zwrustung ist das erst | das man das centrum oder mittelpuncten des gantzen blattes suche, vnd alss-dan ainen compas, sampt vssgetailtem Cirkel, so gross er werden mag auff dem mosingeblatte, in form vnd gestalt wie herunde verzaichnet ist aufreisse. (Fig. 2.)

| Zwm andren muss man auch wie man auff dem ruken dess | f. 16 a.
Astrolabij pfleget zw machen, ain linial mit absehen darauff legen. So hat man entlich ain sehr gut instrument, welches zw villen dingen nutz ist. Vnd besunderlich wan ess allenthalben gleich dik wurt zwberait vnd recht rund gemacht, das man ess fein henken kan, alss das die linea LN schnurgrad glichsam in ainer bleywag vndersich sthe. Anders aber, was man hierbey dass instrument zw machen, bedenken vnd folgen musse: wan man ess recht in die hand nimpt findt sich wol selber, vnd der gebrauch dess instruments bringt ess auch mit sich. Darumb achte Jch on not hieherinnen vil mehr vmbsthend anzwzaigen.

| Wan man nun auff disse art ain land auf ain chartam reis- | f. 16 b.
sen wolt: Erstlich wie man nach voriger art, hat mussen ain register haben wie vil meilen ain stat von der andren lige, also muss ainer mit dissem Jnstrument dass gantz land durchziehen, vnd Je die furnemisten stet hewser etc des landes damit nemen, wie vnd nach wass strich dargegen alle vmligenden stet oder wass do vor orter seyen. Darnach auss sollicher verzaichnung erst triangulos so darzw von notten schliessen, vnd aller sthet puncten recht verzaichnen. Vnd letschlig wie gesagt die chartam mit den fliessen, stromen, allerhand wasser, auch berg vnd wildnussen etc. ausmalen.

| Jch wil setzen das ain stat A seye, darin steige Jch auff | f. 17 a.
ain hoche alss ainen thurm, dass Jch frey allenthalben frey umb mich sehen kan. Da legte Jch das Jnstrument fur mich auff ainen tisch oder ebnen stain, vnd vnderleg ess, domit ess gleich recht eben in der bleywag lige, vnd LN in der mittaglinien sthe. auch L nord, M west, N sud getracht halte, vnd so weit muglich nicht vmb ain hor felle. Darnach nime Jch in dass gesicht, bei hellem tag alle die sthett, hewser, dorffer, vnd was Jch verzaichnet wil haben. Oder lasse mir in der nacht mit fewr ain zaichen geben welches man dan sehr weit sehen kan, wie die historien wunderlich daruon zewgen. | Dass Linial mit den absehen richte | f. 17 b.
Jch das gegen der vorgenomnen stat mit dem buchstaben T stande, vnd verzaichne alle Winkel der vmliegenden stet LST oder NST, ess sey gegen ost oder west. Disse winkel mag man wol in tewscher Zwngen strichwinkel nennen. Dan wan Jch waiss wie gross der winkel ist LST oder NST gegen ost oder west ainer stat so habe Jch den aigentlichen strich darauff sey ligt. Dan nicht alain die wind der schiffer compas, strich mogen genempt

werden, sunder auch alle die, so zwischen den XXXIj compas winden fallen. Die grosse aber des strichwinkels zaigen die tail oder gradus an von nord vnd sud gegen Ost oder West, auff den
| f. 18a. strik so aigentlich auff diss oder Jene stat geht. | Weitter die vmligenden stett oder furnemiste orter der stat *A* seindt *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Der strikwinkel von *A* auff *B* ist gross 35 tail *NST* gegen west, der strichwinkel von *A* auf das *C* haist *LST* gegen west vnd halt L (50) tail. Der auff dass *D* haist auch alsso vnd ist XXXV tail. Der auff das *E* haist *LST* gegen ost, vnd ist XX tail, die auff *F* vnd *G* haissen *NST* gegen Osten. Der erst ist XX tail, der ander XV. Disse strichwinkel zaichne Jch mir auff in ain Register.

Ich hab in dissem exempel der buchstaben gebraucht, nach gewonhait der Mathematic, domit man recht Jnneme was man durch den strichwinkel versthen solt, sunst im gemainen brauch ist nicht von notten der buchstaben. Alss nach dem Jch hab alle
| f. 18b. strichwinkel | der vmligenden stet dess *A*, so ziehe Jch in aine der vmligenden ess seye welche ess welle, vnd bring die vorigen wider in das gesicht, sampt andren so fillichtet da bey ligen, vnd nim wie sich geburt mit minem Jnstrument in allen die strichwinkel, in mein register zwverzaichnen. Jch sets dass Jch meiner gelegenhait nach in der stat *B* mein ander stet hab nemen wellen, so befinde Jch das der strichwinkel von *A* auff das *B* helt wie vor XXXV tail, aber ist hie glich der gegen strich vnd haist *LST* gegen Ost, den verzaichne Jch vmb kurze willen alsso, der strich vom *B* auff das *A* ligt von Nord auff Ost XXXV tail, vnd alsso fort wie die form des registers ausweist.

Das Register der strichwinkel des vorgenomnen lands.

| f. 19a. | Die strichwinkel der stat, so man in das absehen bringen mag in der *A*.

Vom *A* der strich auff	*B*	— —	Swd auff west	XXXV
	C	— —	Nord auff west	L
	D	ligt von	Nord auff west	XXXV
	E	— —	Nord auff ost	XX
	F	— —	Swd auff ost	XX
	G	— —	Swd auff ost	XV

Die strichwinkel der stet, so man in das absehen bringen mag in der stat *B*

Von dem *B* der strich auff	*A*	— —	von Nord auff Ost	XXXV
	C	— —	von Nord auff west	XIX
	D	ligt	gleich in nord	—
	E	— —	von Nord auff ost	XXIX
	F	— —	von Swd in ost	LXXIIj.I fiertel
	G	— —	von Nord in ost	Lj.IIj fiertel.

Wo man auff die lender solliche strichwinkel verzaichnet hette, waere es ain treffenlicher behilff ainem Mathematico die Geographej zw reformiren, durch hilff der *triangulis sphaericis.* | Darumb waer es loblich vnd nutzlich das man neben den *chorographicis tabulis* solche register der strichwinkel auch ausgehn liesse. | f. 19 b.

Vorgesatztes exempel der strichwinkel muste Jch alsso in das werk bringen. Erstlich nime ich das Pergamen oder die Chartam fur mich, darauff Jch vermain, das gantz land so Jch vorhab zw verzaichnen, vnd erwelle mir, welche seitten nord west swd vnd ost sein sollen. Darnach sich Jch ongefurlich ab wo die stat *A* im land ligen werde, da setze Jch ainen puncten, vnd reiss darumb nach gefallen ainen blinden cirkel krais, den tail Jch wie sichs geburt in die vier hoptwind vnd zewch durch die puncten Nord vnd swd die mittag linien mit ainem blinden strich. | Nach dissem trag Jch auss dem Jnstrument alle strichwinkel, wie Jch sey Jm register verzaichnet find, mit blinden strichen, auff mainen blinden cirkel Craiss so habe Jch sechs strich vmb das *A*, mit Namen *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, *AG*. (Fig. 3.) | f. 20 a.

| Weitter dieweil Jch von der stat *B* auff gedachte stett die strichwinkel habe, vnd waiss das von *A* bis an das Ort *B* IX meil wegs sind so nime Jch auff dem selbigen strich so vil gelicher tail, in sollicher grossen das ich vermain das gantz land auf vorgenomne Chartam zw bringen, vnd setz den puncten der stat *B* nider. Darnach reisse Jch vmb das *B* auch ain blinden cirkel mit austailung der vier hoptwind, wie erst angezaigt, so findt es sich, das die erste stat *A* ligt gegen *B* im strich so von nord gegen osten auff XXXV tail ligt. Darnach zewch Jch den strich von *B* auff das *C* welcher sich strekt von Nord auff west XIX tail, vnd merk wo disse blinde linien hinfelt vnd zeschneidt den blinden strich so von dem *A* auf das *C* sich zewcht, in das Crewtz setz Jch den puncten *C*, | vnd hab alsso ainen triangel geschlossen, vnd die drej stett *ABC* recht gegen ain andren in die chartam gesetzt. Also finde Jch fein nachainandren gedachter stet puncten im krewtz, do die strich auff ain ander fallen, welche sich von dem *A* vnd *B* auff ain ytliche in sunderhait ziehen Vnd wan Jch wil wissen wie vil milen aine von der andren lige, es seyen welche es wellen, so nime Jch mit dem cirkel wie weit die puncten von ain ander ligen, vnd siche wie vil milen auff der *scala miliarium* die selbig weitte belege, so habe Jch wie wit aine von der andren lige die schnur grad strasse, wie in vorgesatzter Figur zw sehen ist. Wan aber etwa ain stat als *H* in dem strich *AB* lege, vnd Jch Jren puncten durch die strichwinkel wolt setzen so muste Jch auss ainer andren stat die zwr seitten auss | f. 20 b. | f. 21 a.

lege dass absehen nemen, vnd alsdan wie angezait, die puncten nidersetzen.

| f. 21 b. | Die dritt art *Chorographicas tabulas* zw machen.
Caput IIIj.

Zw disser art muss man haben aines landes itinerarium, sampt den strichwinklen, vnd geht sehr schlecht zw. Erstlich rustet ainer im zw ain Pergamen mit gemainer verzaichnung der hoptwindt, vnd reisst im zwr seitten auss ain *scalam miliarium*. Darnach setze er nider ain stat nach gutgedunken welche er wil vnd reisst darumb ainen blinden cirkel kraiss, tragt darauff mit blinden strichen alle strichwinkel der vmligenden orter. Entlich geht ehr von der erst nidergesetzten stat als vom centro auff alle strich hinaus zw ytlicher stat mit so vil milen als sey dan von der stat, das sein centrum ist liget, vnd setzt Jre puncten nider, | f. 22 a. vnd fert alsso fort ains an das | andre zw henken biss alle puncten gesetzt werden. Diss ist ain sehr gemaine weiss, sunderlich bein schippren, aussgenomen dass sey sich alain mit den XXXIj strichen des compas behelffen, vnd fragen auch nit weitter, dan nach dem, was sey von der sehe sehen konnen, vnd wes sey sich gedunken lassen Jnen von notten sein zw wissen.

Die Portugaleser kumen aber den dingen ain wänig fleissiger nach. Erstlich so reissen sey ainen blinden cirkel auff das Pergamen alss gross sey in haben mogen, den tailen sey in XVj gleiche tail, vnd halten innen ytlichen deren puncten fur ain compas, so schikt sich fein dass alle strich des compas die ainen windt bedewten parallelen oder glichloffend linien werden, vnd dass man rinklich sey alle, vnd gewiss ziehen kan alsso das in der mitte der XVIj compas sich selber gibt.

| f. 22 b. | Nach dem die chart alsso bezogen ist mit den winden, so reissen sey ainen hoptstrich von nord in swd, das ist ain mittag linien, die do gehe durch die stel do sey die *insulas fortunatas* hin setzen wellen. Disse liniam tailen sey in etlich gleiche tail, welche inen gradus des polj hohen bedewten, vnd ain ytlicher XVIj leucas das sind so vil kleiner tewscher meilen thwe. Vnd fachen an von aequinoctial gegen norden die latitudines zw zellen. Latitudo ist dass stuk oder gradus der mittaglinien aines ytlichen ortes, so zwischen in vnd dem aequinoctial begriffen wurt. Dise ist alweg der *Eleuatio poli* geleich, wie in der Astronomei demonstriret wurt. Darumb wan man das ain hat so hat man dass ander. Disse latitudines der lande haben sey in iren registren gefasset | f. 23 a. | vnd darnach setzen sey auch ain ytlich land vnd furneme orter hoch vnd nider mit hilff des Itinerarij vnd der strichen, wie clar-

lich in iren compas charten zw sehen ist. Dieweil sey aber so gemain sindt, so wil Jch ess auch hie bey der kurze beliben lassen.

Vil schiffer so auss Preussen in England vnd Portugal seglen, brauchen gemainklich nicht alain der latitudinibus nicht, sunder achten sey auch kainer see charten, noch rechtfertigen compas. Den sey beromen sich sey tragen die kunst alle im kopf. So lang es wol gereht, so geht es wol hin, aber sey verlieren laider offt der kunst Jm kopff, dass sey Jr in der nott nicht finden konen, vnd mit lewtt vnd gutt sitzen bleiben. Mich gedenkt es schade gar nicht, wan etlich schon | mehr bescheids von | f. 23 b.
denen dingen wisten. Das weiss Jch wol, das die Portugaleser vnd Hispanier on der *Eleuationib(us) poli*, vnd rechten grund des compas, Jre gewaltige segelationes nicht hetten konden volfuren, auch nicht erhalten mochten.

Wie man die mittag linien auf ainer ligenden ebne finden solle. cap: V.

Im dritten Capitel, do angezaigt wurt wie man die strichwinkel nennen moge, vnd in ain register bringen, sthet dass man des Jnstruments linien *LN* in die mittag linien legen solle, dass *L* Nord, vnd *N* swd halte. Darumb ist von notten anzwzaigen wie die selbig mittaglinien zw finden seye.

| Wan man ainen gewissen compas hette aines Sonnen Zai- | f. 24 a.
gers, darauff man sich verlassen dorffte, so waere die sach schlecht. Dan man setzte den compas auff den tisch oder stain, do man sey wissen wolt, alsso das das Zunglin recht inhielt, darnach zwhe oder riss man ain *liniam parallelam* der mittag linien dess compasses, so waere die sach angericht. Ess sindt aber die Maister die die compass machen vnglich geschickt, darumb ist den compassen nicht wol zetrawen, sunder man muss nach rechter kunst der Astronomej die mittag linien finden alsso. Erstlich siche Jch darnach dass die ligende ebne, sey seye auff ainem stain oder holtz, darauff Jch die mittaglinien suchen wille, recht nach der bley oder wasserwag lige. Darnach senke Jch | ainen stilum, gno- | f. 24 b.
monem oder Stifft, winkel grad in die ligende ebene, vnd reiss etlich cirkel nach gefallen vmb den stifft, alss dass Jr centrum des stifftes centrum seye, do die ligende ebne den stifft zerschneidt. Darnach merke Jch mit fleiss wo der schatten sich auff der gedachten cirkel ainem ende vormittag, vnd in mitten des endes vom schatten verzaichne Jch ainen puncten auf gedachten cirkel. Alsso thue Jch nachmittag auch, wan er eben auff den selbigen cirkel fallet. Disse zwen puncten zwch Jch mit ainer graden linien zwsamen, vnd taile sey in zwai gliche tail darnach so zewch

Jch vom Centro auff den gefundenen mittelpuncten ain linien, so habe Jch auff der vorgenomne ligende ebne die mittaglinien meinem begeren nach.

| f. 25 a. | Ain ander weiss darzw, kump(t) doch mit gedachter vberain. Wan Jch vormittag wan Jch wolt die hohe der Sonnen ob dem Horizont mit ainem Jnstrument nemen, vnd liesse in der weil verzaichnen dess schatten in des mittelpuncten, er fielle hin wo er wolt, Alsso auch nach mittag hette Jch fleissig acht darauff, wan die Son im absteigen wider so hoch stunde alss vor vnd neme den andren puncten. Darnach wie erst gesagt findet sich die mittag linien auch. Die zwen schatten puncten sind auch zw finden wan man ainen gutten zaiger hette der wol gericht wär, vnd recht schluge, so nime Jch den ersten puncten ess sey vmb welche stund ess welle vor mittag, alss indem dass die glock IX schlecht so siche Jch nach dem schatten vnd verzaichne den ersten puncten.

| f. 25 b. | Darnach sich Jch wie vil stund ess noch biss auff den mittag seye, alss so Jch newne nim, drej. Derselben wan es drej nach mittag schlecht, so nime Jch den andren auch. Ess suche ainer die mittaglinien auff disser drej weiss aine welche er welle, die erst ist die schlechtist vnd gewiss, die andre wan das Jnstrument domit der Sonnen hohe genomen wurt gross ist, |noch gewisser. Die dritt nachdem der Zaiger ist.

Dass man aber disser arbait nicht stetiges bedorffe, sunder sich schlecht aines gutten compas gebrauchen konde, ist von notten, das man wisse in dem Magneten den nord kant suchen, vnd aigentlich probiren vnd erfaren wass sein ausschlag von der mittaglinien seye, dass ist was er fur ainen strichwinkel von nord auff ost oder west von natur gebe, wie folgendes capitel anzaigen wurt.

| f. 26 a. | Wie man die Magneten probieren vnd die schippercompas recht machen solle. Cap: Vj.

Man findet bey den alten nichtes von den hochsten vnd nutzlichisten tugenden des Magnetes. Derhalben ware es auch Jnen vnmuglich solliche gewaltige segelationes zwfuren, deren man sich zw vnsren zeitten gebraucht.

Was Jch vom Magneten Jn erfarung hab ist diss. Wan mir ain Magnet zw handen kumpt, so nime Jch ain aimer oder zwber voller Wasser vnd leg den Magneten in ain klain oder gross hulzen schusselin, darnach der Magnet gross ist vnd setz in auff das wasser dass er nicht vndergange, vnd glichwol das holtz nicht

| f. 26 b. zw | vil sey domit er es bezwingen konde. So befinde Jch ain

sehr schon spectakel der natur, dan er wendet sich vnd die schussel vmerdaren so lang herumb biss des stains nord kand in nord sthet vnd swder kand in swd. Da beleibt ehr. stil sthen, man wende Jn wie man welle.

Hie ist zw verhwtten dass in der nebe kain eysen dabey sey der die brob mochte felschen. Hat man noch ainen Magneten, vnd helt den Nord kand gegen den Nord kand, dess der auff dem wasser schwebt, so weist er in von sich, vnd zewcht swd an sich. Dan alain nord vnd swd in zwaien Magneten gesellet vnd halt sich zw hauffen. Wie an dem abzwnemen ist, wan ain runder Magnet in dem strich ost vnd west | das ist an mitten von ain | f. 27 a. andren geschnitten wurd. Jn der halben kugel des nord kand das vndertail im schnidt wurde swd halten, in der andren aber halben kuglen nord, Alsso wunderbarlich ist Gott der herre Jn seinen werken.

Zwm dritten wan man ain nodel auff den Magneten legt, vnd sey der lenge nach auff nord vnd sud ligt, so belibt sey ligen, wo nicht so wurfft sey sich frey herumb vnd legt sich dem strich nach sey werde dan von vnebne des stains auffgehalten. Wan der stain sehr vneben waere so legte Jch die nodel auff ainen ebnen tisch vnd hwbe den stain noch baid lenge darauff, so wurffe sich die nodel auch vmb nach nord vnd swd. vnd auss der regel nord zewch swd an sich, ist durch dass zunglin | des Compas ain | f. 27 b. Magnet eben so wol zw probieren. Diss sind aber alle nur gemaine proben dass man wisse welcher tail im stain in nord stande.

Nach dem Jch nun waiss vnd ken den nordt kant am Magneten, vnd wil sehen ob er gerade mit der mittaglinien inhalte, oder wan er nicht inhalt, wie gross der ausschlag sey: So lasse Jch mir ain blatt von mossing in die fierung die seiten von Vj oder VIj zollen lang machen. Disses kitte Jch auff ain gut vnwanderbar holtz, vnd iustire dass ess allenthalben bey ainem har gleich dick seye, vnd recht in die fierung. Darnach suche Jch dass centrum vnd reisse darauff dass Jnstrument in form vnd gestalt wie Jm dritten Capitel angezaigt ist. Auss dem centro fure Jch | ain scharpfes mossings stefftlein wie in ainem compas. | f. 28 a. Weitter so lasse Jch mir ain zunglin machen alss in ainem compas von an V oder Vj zollen, alsso wan Jch ess auff das stefftlin setze, dass ess die tail oder gradus des vsristen limbi erreiche, vnd domit mich der lufft oder windt am probieren nicht hindre, so lasse Jch mir ainen hulzin ring dreyen aines zollen hoch vngefurlich, vnd mach oben drein ain glas. dissen ring setze Jch auff das gemacht instrument, dass das zunglin seinen freyen gang habe, vnd ehr vom limbo nicht bedeke. Daraus wol abzunemen wie

gross der ring sein solle. Nach sollicher zwrustung wan Jch ainen
| f. 28 b. Magneten probieren | wil, so suche Jch erst die mittaglinien auff das fleisigst nach der lär des vorgesetzten capitels, vnd setz dess instrumentes Linien *LN* wie sich ess geburt darauff. Darnach bestrich Jch mit dem Nord kand das spizig tail des zunglins, oder mit sud kand dass ander tail, vnd setz ess auff das stefftlin wie in ainen Sonnen compas, vnd wardt biss ess sich zw rw stellet, so zaiget ess mir von stund den aussschlag vnd dass spizig tail findt sich in swd. Dan ess verwechslet sich, was mit swd bestrichen wurd helt nord, vnd mit nord swd, glich wie angezaigt alss wan zwen stain an ain andren gestanden waeren.

Man findet die den strich nord vnd swd recht halten. Doc tor Joannes Colimitius Tanstetter,* professor der Mathematic zw
| f. 29 a. wien vnd Rö. kö. Mt | leibartzet hat ainen der ain waenig mehr aussschlug als IIIj tail. Petrus Apiannus Mathematicus der Vniuersitet Jngolstat** hat ainen der schlegt X tail auss. Herren Georgen Hartmannes*** Mathematici Norenbergensis Magnet, weicht bej Xj gradus von nord auff ost. Ich hab alsso ainen zw Danzik probiert † der mehr als XIIj gradus auss dem weg trug. Ain compas strich aber helt Xj vnd j fiertail aines gradus. Welcher nun dissen aussschlag nicht zw suchen waiss, der richtet compas zw die vmb ain strich, Ja zwn zeitten vmb zwen auss dem weg fur vnd fur tragen. wan sey ess nicht flikten mit dem hinden vnd vornen bestreichen. Derhalben wan Jch wolt gewisse schipper compas machen so probiert Jch erstlich auff dass fleissigist den
| f. 29 b. Magneten, domit Jch sey bestrichen wolt, wie | angezaigt, vnd schliffe mir den stain spizig auff sewd kandt, domit Jch eben nord auff den Compas hette. Darnach machte Jch die scheiben mit allen strichen, nach dem gemainen brawch, vnd do der aussschlag

---

* Johannes Georgius Tannstetter von Thannau, geb. 1480 zu Rhain (daher Collimitius) in Bayern, war *Dr. art. et med.*, Professor der Mathematik und Astronomie zu Wien (seit 1509), im J. 1512 Rector der dortigen Universität, dann Leibarzt des Kaisers Max. I.; † 1530 zu Wien. Seine Schriften vergl. bei Jöcher und Poggendorff.

** Peter Bienewitz (Apianus), geb. 1500 in Goltschen bei Leisnick im Meissenschen Gebiete, studirte in Leipzig, ward 1527 Professor in Ingolstadt, 1541 von Kaiser Karl V. geadelt; † 21. April 1552. Vergl. Ch. S. Schwarz, *Schediasma de vita Apiani, 1724*. Desgl. Jöcher u. Poggendorff.

*** Georg Hartmann, geb. 1480, später in Rom, dann Vicar an der Sebalduskirche zu Nürnberg, wo er 1545 starb, gilt als Entdecker der Inclination, des Magnetismus der Lage und der vertheilenden Wirkung des Magneten. Vergl. Dove, Repertorium der Physik, II, 129; Voigt, Briefwechsel des Herzogs Albrecht, S. 277, und *Spic. Cop.* S. 105.

† Vielleicht bei Johann von Werden. Vergl. *Spic. Cop.* S. 221.

von Norden ab maines stains hinfielle do steche Jch die scheiben durch, dass die spitz mit dem ysnen drotten, die man bestricht glaich vnder das löchlin fielen. So wurden die compas gewiss, vnd hielten die strich alwegen recht nach der chorographej. Worzw ess von notten, das man rechte compas habe, ist niemat verborgen, ess findet sich auch offt von selber. Jch wolt aber das ess in allen konigreichen, furstenthumen vnd stetten so an der see ligen, alsso bestelt waere, das niemat kainen compas solte oder müste machen, er wiste dan den rechten grund auch kain schiffer sich andrer gebrauchen. | vnd diss erstlich gemaines nutzes halben, | f. 30a. darnach von wegen der loblichen kunst der Chorographej, das man rechte compas tafflen haben mochte.

Was weitter die krafft vnd tugenden des Magneten betrifft, ist wunder das man zw vnsren zeitten nicht weitter sucht, dieweil man doch sicht, dass alwegen Gott der herre ainem Ding mehr alss nur ain tugend vnd aigenschafft mittailet. Ainer mit namen Petrus Perigrinus de Marecurt* nicht lengst vor vnsren Zeitten hatt sich in dem bemwet, welches schriften Jch bej dem Achbaren vnd hochgelarten herren Achilli Gassaro Lindoensi** der Medicin Doctori vnd Mathematico gesehen hab. | Diser nebend andren | f. 30b. treffenlichen vnd hohen tugenden dess Magneten vermeldet, wie der stain die aigenschafft des himels habe, alsso wan er in die rechte runde gebracht wurt, vnd zwischen seinen polis, das sind nord vnd swd kant, wie sich ess erfordret, noch dem das land hoch ligt, recht auffgehenkt wurt, so solle ehr sich von wegen der aigenschafft, so Jm Gott gegeben hatt selber teglich in XXIIIj stunden herumher geben, wie die Son in tag vnd nacht ainmal das erdricht vmblofft. Ehr zaigt auch ahn wie man allen dingen nachkumen solte Jn zw dissem gebrauch zw bringen. Wo dissem nach die erfarnus solliches wurde bezewgen so konde man warlich kain gewisser noch gewaltigers horo | logium auff erdrich finden | f. 31a. alss die natur gemacht hette. Auch wan ain verstendiger ain Magneten alsso zwgerust hette, vnd in der see verworffen wurde, das ehr in etlich monden weder land noch grund funde, Son noch Mon sehe, so wurde er denochter wissen, wo er in der welt waere, vnd ongefurlich wie weit vom land. Es sindt mir etlich rumredig

* Ueber P. P. de Marecourt vergl. den Aufsatz von P. Timoteo Bertelli im *Bulletino Boncompagni,* 1868, Bd. I S. 1—32, 65—99 und 319—420, besonders die erste Abtheilung S. 1 flgg., welche den Titel führt: *Sopra Pietro Peregrino di Maricourt e la sua epistola de magnete.* Maricourt schrieb im Jahre 1269, also immerhin fast 300 Jahre vor Rheticus.

** Vergl. über Gassarus *Spic. Cop.* S. 209.

schiffer furkumen die von sich dergelichen vil rumbten, aber ess ist nichts, alain ainer der Geographei vnd Mathematic erfaren, kan ess thun, vnd doch nicht er habe dan die Son, oder das gestirn, vnd andren behelff. Derhalben waere ess ain sehr loblich ding,
| f. 31 b. das man den kosten darauff wendet, vnd | liesse erfaren, ob der Magnet so hoch durch Gott von natur vnd aigenschafft begabet waere.

Recensionen.

Zur Analysis der Wirklichkeit. Philosophische Untersuchungen von O. Liebmann (Prof. a. d. Univ. Strassburg). Verlag von Trübner in Strassburg. 1876.

Auf den ersten Blick wird es vielleicht die Leser unserer Zeitschrift überraschen, hier ein Werk angezeigt zu finden, welches, seinem Titel nach, ein philosophisches im engern Sinne des Wortes zu sein scheint. Das scheint aber auch nur so, denn schon eine flüchtige Musterung der Inhaltsangabe zeigt, dass die Untersuchungen des Verfassers sich grossentheils auf demjenigen Gebiete bewegen, das man nach J. Becker's Vorgange als das Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie bezeichnet hat. Unter den etwa 20 Abhandlungen, aus welchen das Werk besteht, begegnen wir z. B. folgenden: Ueber die Phänomenalität des Raumes; über subjective, objective und absolute Zeit; über relative und absolute Bewegung; zur Theorie des Sehens; Causalität und Zeitfolge; über den philosophischen Werth der mathematischen Naturwissenschaft — also Untersuchungen, welche das Gebiet der Mathematik berühren; einige andere Capitel beschäftigen sich mit naturwissenschaftlichen Fragen (das Atom, Platonismus und Darwinismus, Geogonie, Instinct, Menschen- und Thierverstand) und nur wenige Abschnitte (z. B. über Ideal und Wirklichkeit, das ästhetische Ideal, das ethische Ideal) könnten als rein philosophische bezeichnet werden. Bei dem Misscredit, in welchen die Philosophie durch die Extravaganzen Schelling's und Hegel's bei allen Mathematikern gerathen ist, muss Referent besonders hervorheben, dass der Verfasser sich durchweg als ein Mann von gediegenen mathematischen und naturwissenschaftlichen Kenntnissen zeigt, dem überdies eine musterhaft klare und präcise, nicht selten auch recht witzige Ausdrucksweise zu Gebote steht. Es würde in der vorliegenden Zeitschrift zu weit führen, wenn Referent den Gedankengang und die Folgerungen des Verfassers eingehend besprechen wollte; er beschränkt sich daher auf eine allgemeine Bemerkung.

Wenn es auf die Lösung eines physikalischen Problemes ankommt, so besteht der erste und erfolgreichste Schritt darin, die Aufgabe mathematisch zu fassen, d. h. sie auf ein mathematisches Problem, wie z. B. auf eine Differentialgleichung, zurückzuführen; diese Reduction ist aber im Grunde Nichts weiter als eine präcise Fragstellung. Nicht selten ergiebt sich hierbei schon frühzeitig die Entscheidung über die Lösbarkeit oder Unmöglichkeit der Aufgabe, und es wird Niemand den Werth einer solchen Entscheidung in Abrede stellen. Dasselbe Verfahren wendet nun der Verfasser an; seine Untersuchungen gehen in erster Linie darauf aus, die behandelten Probleme auf sehr bestimmt formulirte Fragen zu bringen, wobei ihm jedenfalls die classische, einen Wendepunkt in der Geschichte der Philosophie bezeichnende Frage Kant's: „Wie sind synthetische Urtheile *a priori* möglich?“ als Ideal vorgeschwebt hat. In manchen Fällen deutet der Verfasser die Schritte an, welche zur völligen Lösung des Problemes noch erforderlich sein werden; in anderen Fällen zeigt er die Unlösbarkeit der Aufgabe und behütet uns damit vor unnützen Grübeleien oder Phantastereien.

Referent hat das Werk mit stets wachsendem Interesse gelesen und mit einer Befriedigung aus der Hand gelegt, wie sie ihm nur sehr wenig philosophische Schriften neuerer Zeit gewährt haben; er glaubt daher, Freunden exacter Naturphilosophie das Werk bestens empfehlen zu können.

Schlömilch.

Letztes Wort über die Bibliotheca Historico-naturalis

(aus einem Briefe von M. Curtze in Thorn an M. Cantor).

Sie werden sich noch der Worte erinnern, die Sie mir erwiderten, als ich Ihnen das Referat über die *Bibliotheca Historico-naturalis* übersendete und es in Ihre Hand legte, ob Sie dasselbe zum Abdruck bringen wollten oder nicht: „Warum soll man denn nicht auch einmal grob sein dürfen?“ Nun, das bin ich gewesen und mit Recht, und da hat nun (nicht der Verfasser der *Bibliotheca*) der Verleger wahrscheinlich gedacht, auf einen groben Klotz gehört ein grober Keil, und hat nun im zweiten Hefte des Jahrganges 1875, das soeben ausgegeben ist, gegen meine Beurtheilung seines Verlagswerkes in einer Weise geantwortet, der man den Aerger über die in derselben enthaltenen Wahrheiten zu deutlich ansieht, als dass man die etwas wunderbar gewählten Epitheta sonderlich beachten möchte. Da mir darin aber Sachen untergelegt werden, die ich nicht gesagt habe; sondern von denen der Herr Verleger der *Bibliotheca* wünschen mag, dass ich sie gesagt haben möchte, so erlaube ich mir, im Nachfolgenden eine kleine Besprechung dieser „Zu gefälliger Beachtung“ überschriebenen Erklärung Ihnen hier anzufügen. Ich glaube dieses am einfachsten zu erreichen, wenn ich Ihnen den Artikel hier abschreibe und meine Randbemerkungen nachträglich hinzufüge.

„Zu gefälliger Beachtung!

Auf die ebenso hochtrabend-hämischen,[1] als auf völliger Unkenntniss der buchhändlerisch-bibliographischen Verhältnisse[2]) beruhenden wiederholten Angriffe eines unberufenen Kritikasters aus der *ultima Thule*[3]) bemerken wir hier ein für allemal, dass wir in unseren sämmtlichen wissenschaftlichen Catalogen von der gesammten ausserdeutschen Journalliteratur nur das verzeichnen, was die ausländischen Verleger in den Bibliographien ihrer resp. Länder anzuzeigen selbst für gut finden, also z. B. von den französischen Journalen stets nur die erste Nummer eines neu erscheinenden Blattes[4]). Denn einmal hat es absolut keinen Werth und kein Interesse, jedes unserer Halbjahrshefte mit sich stets wiederholenden Titeln zu füllen[5]); zweitens ist man ohne jede positive Nachricht, ob ein Journal nicht etwa eingegangen ist[6]); und endlich ist, so lange nicht ein gut redigirter, durchaus vollständiger Catalog über alle in der gesammten Weltliteratur erscheinenden wissenschaftlichen Zeitschriften existirt, eine, wenn auch immerhin ziemlich bedeutende Auswahl, d. h. etwa das, was uns z. B. hier am Orte zu Gesichte kömmt, von keinem Interesse[7]).

Was ferner die von uns beliebte möglichst knappe Form der Jahres-Register betrifft, d. h. um wo möglich einen Titel auf den engen Raum einer halben Zeile zu bringen, die Weglassung der Vornamen des Autors und dafür alphabetische Anordnung des Stichwortes in den Titeln gleichnamiger Verfasser, so hat in den 26 Jahren des Bestehens unseres Unternehmens noch Niemand ausser dem gedachten Kritiker irgend welchen Grund zur Klage darin gefunden[8]). Dass wir im Stande sind, Autorennamen auch alphabetisch nach den Vornamen zu ordnen, glauben wir sonst wohl zur Genüge bewiesen zu haben[9]); einstweilen wollen wir, unbekümmert um die fortgesetzten Rügen jenes Herrn, ruhig in unserer bisherigen Weise fortfahren[10]). — Was die gerügten Auslassungen einiger namhaft gemachter Schriften betrifft, so waren dieselben in den vorhergehenden Halbjahrshefte bereits mitgetheilt[11]). Die den Titeln aufgedruckte Jahreszahl ist bekanntlich nicht immer massgebend, meist tragen die im November und December erscheinenden Bücher die Zahl des folgenden Jahres[12]).

Göttingen, im April 1876. **Vandenhoeck & Ruprecht.“**

1) Ob der betreffende Artikel und die in Petzoldt's Neuem Anzeiger erschienenen in hochtrabendem Stile geschrieben sind, mag ich nicht beurtheilen; dass sie nicht in hämischer Weise abgefasst sind, wird jeder Leser mir bezeugen. Sie haben Nichts weiter gethan, als in rein sachlicher Weise Uebelstände der Zeitschrift aufgedeckt, und der beste Beweis, wie richtig ich getroffen, ist der, dass der Jahrgang 1875 einen bei weitem vollständigeren und vortheilhafteren

Eindruck macht, als die vorhergehenden. — 2) Ich habe nicht gewusst, dass die *Bibliotheca hist.-nat.* nur für Buchhändler geschrieben ist; ich glaube, dass Bibliographien, mögen sie Jahres- oder allgemeine sein, die grösstmöglichste Vollständigkeit anstreben müssen, und wenn auf dem Titel eines Buches steht: „Systematisch geordnete Uebersicht der in Deutschland und dem Auslande auf dem Gebiete der gesammten Naturwissenschaften und der Mathematik neu erschienenen Bücher“, so, glaube ich, ist der Herausgeber verpflichtet, wenn sich ihm die Möglichkeit bietet, Vollständigeres zu liefern, als die im Auslande sehr schlecht geleiteten Buchhändlerbibliographien geben, diese Möglichkeit zu ergreifen, nicht aber sie hochmüthig zu ignoriren. — 3) Ob wohl wirklich eine Wahrheit dadurch zur Unwahrheit wird, dass sie nicht aus Leipzig, dem Centralpunkte der deutschen Buchhändler, oder aus irgend einer Universitätsstadt datirt, sondern aus dem kleinen Neste an der russischen Grenze, und ob wohl nur Buchhändler über den Werth einer Bibliographie richtig urtheilen können, bei der der Nichtbuchhändler, wenn er darnach über ein bestimmtes Buch sich informiren will, über Hunderte von Lücken stolpert, die er in der Lage wäre auszufüllen und wozu er dem Herausgeber sogar freiwillig seine Dienste angeboten hat? — 4) Das ist, mit Verlaub, auch nur das, was ich verlangt habe. Aber eben diese ersten Jahresnummern sind nicht aufgeführt. Dass übrigens die *Bibliotheca Historica* und die *Bibliotheca Philologica* diesem Grundsatze nicht huldigen, lehrt ein Einblick in jedes beliebige Heft derselben. Dort findet man sogar die Inhaltsangabe jedes einzelnen Heftes, was auch für die *Bibliotheca Historico-Naturalis* sehr zu empfehlen wäre. — 5) Wo habe ich das verlangt? Das kann man aber sicher verlangen, dass wenigstens von jeder deutschen Zeitschrift der Titel jährlich einmal und richtig aufgenommen wird. Dass dies nicht geschehen, habe ich bewiesen. — 6) Ist einfach nicht wahr. Asher in Berlin, Tweetmeyer in Leipzig, Dürr ebendaselbst geben jährlich ein Verzeichniss der französischen, englischen und amerikanischen Zeitschriften mit Angabe des Abonnementspreises heraus; was diese Handlungen können, das kann eine Göttinger Handlung ebenso gut. — 7) Also es ist von keinem Interesse, eine bedeutende Auswahl von Zeitschriften zu kennen, nur ein durchaus vollständiger Catalog genügt! Nun, weshalb nimmt denn Herr Metzger dann überhaupt irgend welche Zeitschrift in seine *Bibliotheca* auf, da die paar Namen, die er liefert, doch gewiss noch viel weniger Interesse bieten. Ich denke, absolute Vollständigkeit — das ist eine alte abgedroschene Sache — ist überhaupt nicht zu erreichen, nicht einmal auf dem Gebiete einer Nation, und nun verlangt Herr V. & R. sogar absolute Vollständigkeit der Weltliteratur! — 8) Auch das beruht auf absichtlicher Verdrehung und Unwahrheit. Ich habe nur verlangt, und das ist sehr wenig, dass in den sehr geringen Fällen, wo Autoren von demselben Namen confundirt sind, dieses aufgehoben werden möchte. Dass dies möglich ist, ohne die Ausdehnung der Titel auf eine halbe Zeile zu alteriren, lehrt ohne Weiteres der Jahrgang 1872 derselben *Bibliotheca*, wo diese Unterscheidung, jedenfalls nur zum Nutzen des Buches, streng durchgeführt ist, ohne dass dabei auch nur ein einziges Mal die halbe Zeile des Anfangsbuchstabens des Vornamens halber überschritten wäre. Jedenfalls hat aber der Verfasser des Registers zu 1872 ausser dem Referenten diese Unterscheidung für nöthig gefunden, die übrigens in Müldener's *Bibliotheca Historica* ebenfalls streng festgehalten wird. Auf wessen Seite hier die Wahrheit liegt, überlassen wir unbefangenem Urtheil. — 9) Wir auch, geehrte Herren V. & R., das kann jeder einigermassen Gebildete. — 10) Auch das beruht nur zum Theil auf Wahrheit. Bachet, Bagutti, Heis & Eschweiler, Kunze, Papillon, Pochet, Rapisardi, Zavaglia, Cremona, Frommhold, Kutter, Lenormant, Ernouf, Peters, Riolo, Eysseric & Pascal, Saint-Robert von den wenigen von mir genannten Namen sind nicht 1873 aufgeführt, während dies für Klein, Köstlin, Marianini, Poncelet und Postel allerdings der Fall ist, wie ich nachträglich constatire. Wenn aber die Herren V. & R. behaupten, die von mir gerügten Auslassungen, die ich noch dazu nur als den kleinsten Theil der wirklichen hingestellt habe, seien in dem vorhergehenden Hefte bereits mitgetheilt, so sagen sie wissentlich die Unwahrheit, wenn sie sich nicht klüglich hinter das Wörtchen einiger, das sie eingeschoben haben, verstecken wollen. 5 von den als fehlend gerügten Büchern sind aufgeführt, 18 nicht. Ist das nicht eine grobe Täuschung der Leser der *Bibliotheca Historico-Naturalis?* — 12) Diesen Beweis hätte sich Herr V. & R. sparen können. Ich kenne noch ganz andere Vordatirungen. Dühring, Kritische Geschichte der Principien der Mechanik, erschien z. B. im Juni 1872 mit der Jahreszahl 1873, und ist diese Discrepanz des Datums des Titels im Jahrgang 1872 der *Bibliotheca* nicht angegeben, was eigentlich nöthig war.

Sie würden mich ausnehmend verbinden, verehrtester Freund, wenn Sie diesen Brief genau in der Form, in welcher ich Ihnen denselben sende, zum Abdruck bringen wollten.

Ihr ergebenster

Thorn, 5. Juni 1876. MAXIMILIAN CURTZE.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1876.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften zu München. 1876. 1. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrshefte zur Statistik des deutschen Reiches für das Jahr 1876. 4. Jahrg. 1. Heft, 1. u. 2. Abth. Berlin, statist. Bureau. 12 Mk.

Abhandlungen, herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellsch. 10. Bd. 3. u. 4. Heft. Frankfurt a. M., Winter. 20 Mk.

Verhandlungen des naturwissenschaftl. Vereins in Carlsruhe. Carlsruhe, Braun. 5 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica etc., herausgeg. v. A. METZGER. 25. Jahrg. 2. Heft. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, kleines nautisches, für das Jahr 1877. Bremerhafen, v. Vangerow. 60 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von SCHÖNFELD und WINNECKE. 10. Jahrg. 4. Heft und 11. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. à 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, statistisches, f. d. J. 1873. Wien, Gerold's Sohn. 1 Mk. 30 Pf.

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandt. Mathematik. 1. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

LOTTNER, E., Leitfaden für den Unterricht in der ebenen Trigonometrie. Lippstadt, Staats. 80 Pf.

SCHERLING, C., Grundzüge der axonometrischen und schiefen Parallelprojection. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

HESS, E., Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Kassel, Kay. 4 Mk.

FRISCHAUF, J., Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 40 Pf.

STEINER's, J., Vorlesungen über synthet. Geometrie. 2. Thl.: Die Theorie der Kegelschnitte, bearb. v. H. SCHRÖTER. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

BARTHOLOMÄI, F., Geometrie der einclassigen Volksschule. Langensalza, Beyer & Söhne. 1 Mk. 50 Pf.

LÖBE, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. 2. Heft. 2. Aufl. Leipzig, Brandstetter. 80 Pf.

POHLKE, K., Darstellende Geometrie. 1. Th. 4. Aufl. Berlin, Gärtner. 3 Mk.

——, Dasselbe. 2. Thl. Ebendas. 6 Mk.

FRISCHAUF, J., Uebungen zu den Elementen der Geometrie. Graz, Leuschner & Lubensky. 60 Pf.

SCHMIDT, J. P., Die Elemente der Algebra für höhere Lehranstalten. 3. Aufl. Trier, Lintz. 3 Mk.

NAGEL, v., Geometrische Analysis. 2. Aufl. Ulm, Wohler. 4 Mk. 40 Pf.

WÖCKEL's Geometrie der Alten, eine Sammlung von 850 Aufgaben. 11. Aufl. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 80 Pf.

MOČNIK, F. v., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 15. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 3 Mk. 20 Pf.

STUBER, Leitfaden zum Unterricht in der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, Klinkhardt. 1 Mk.

RIEMANN's, B., Gesammelte mathemat. Werke u. wissenschaftl. Nachlass, herausgegeben von H. WEBER. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

HEILERMANN, H., Lehr- und Uebungsbuch f. d. Unterricht d. Mathematik. 2. Thl., 1. Abth.: Ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Coblenz, Hergt. 75 Pf.

GROHMANN, A., Kleine Geometrie. 5. Aufl. Berlin, Oehmigke. 40 Pf.

RAUSCHER, V., Studie über die Beziehungen zwischen Evoluten, Evolventen, Trajectorien u. Umhüllungslinien. Wien, Gerold & Comp. 2 Mk.

KREUSZEL, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. und 2. Theil. Brünn, Karafiat. 8 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Beck, Th., Bemerkungen zu F. Reuleaux' Kinematik. Darmstadt, Brill. 40 Pf.

Bauernfeind, C. v., u. C. Bruhns, Bestimmung des geographischen Längenunterschiedes zw. Leipzig u. München. München, Franz. 2 Mk. 40 Pf.

Müller-Köpen, Die Höhenbestimmungen der königl. preuss. Landesaufnahme i. d. Provinz Preussen. Berlin, polytechn. Buchh. 3 Mk. 50 Pf.

——, Dasselbe i. d. Provinz Schleswig-Holstein. Ebendas. 4 Mk. 20 Pf.

——, Das Nivellement in Mecklenburg, gemessen zur Verbindung der schleswig-holsteinischen u. d. übr. Nivellements. Ebdas. 1 Mk. 25 Pf.

Arbeiten, die astronomisch-geodätischen des k. k. militär-geographischen Instituts in Wien. 4. Bd. Wien, Gerold's Sohn. 10 Mk.

Dietzel, C. F., Leitfaden für den Unterricht im techn. Zeichnen. 1. Heft, 4. Aufl. und 3. Heft, 3. Aufl. Leipzig, Gebhardt. 1 Mk.

Rühlmann, M., Allgemeine Maschinenlehre. 2. Aufl. 2. Bd. 1. Hälfte. Braunschweig, Schwetschke & Sohn. 7 Mk. 60 Pf.

Kreuter, F., Das neue Tacheometer aus dem Reichenbach'schen mathematisch-mechan. Institute in München. Brünn, Winiker. 2 Mk.

Hugel, Th., Die Stereoskopie, gestützt auf orthogonale Coordinaten. Neustadt a. d. H., Gottschick-Witter. 1 Mk. 30 Pf.

Physik und Meteorologie.

Schulze, L. R., Das Buch der physikalischen Erscheinungen. 9. Lief. Leipzig, Frohberg. 1 Mk.

Aubert, H., Grundzüge der physiologischen Optik. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Weyrauch, J. J., Neue Theorie der überhitzten Dämpfe. Berlin, Gärtner. 1 Mk. 20 Pf.

Du Bois-Raymond, E., Ueber die Grenzen des Naturerkennens. Ein Vortrag. 4. Aufl. Leipzig, Veit & Comp. 1 Mk. 40 Pf.

Munk, H., Die elektrischen und Bewegungserscheinungen am Blatte der *Dionaea muscipula*. Leipzig, Veit & Comp. 6 Mk.

Fortschritte, die, auf dem Gebiete der Meteorologie. Nr. 3, 1874—75. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 60 Pf.

Röthig, O., Die Probleme der Brechung und Reflexion des Lichtes. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Wiener, C., Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne. Carlsruhe, Bielefeld. 2 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Adolph Zeising als Mathematiker.

Von
Dr. S. Günther.

Vor nicht langer Zeit verschied zu München ein Gelehrter, der dem grösseren Publikum wohl hauptsächlich als geistreicher Novellist bekannt und — wie es Leuten seiner Geistesrichtung nun einmal zu gehen pflegt — auch in den eigentlichen Fachkreisen nicht zu der ihm gebührenden Anerkennung durchgedrungen war. Wir meinen Adolph Zeising,* den geistreichen Schöpfer der mathematischen Aesthetik, einen Mann, der den zunftmässigen Vertretern der Schönheitslehre wohl allzuviele mathematische, d. h. fremde Elemente in ihre Domäne hineintragen mochte, während er doch auf der andern Seite ebenso wenig darauf rechnen durfte, dem Gros der Mathematiker Interesse für das mit so grosser Liebe von ihm cultivirte Seitengebiet ihrer Wissenschaft einzuflössen. Vielleicht aber erwächst gerade aus diesem Verhältnisse die Berechtigung, den Lesern dieses mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachblattes mit kurzen Zügen ein Bild von den so eigenthümlich gearteten Bestrebungen des Verewigten zu entwerfen, und um so getroster nehmen wir für uns diese Berechtigung in Anspruch, als wir uns bewusst

* Betreffs des äusseren Lebensganges des Verstorbenen sei auf den ausführlichen Nekrolog verwiesen, welchen die „Beilage" der Augsburger allgem. Zeitung brachte. Uns genügt es, zu bemerken, dass Zeising am 24. September 1810 zu Ballenstedt geboren ward und seit einer Reihe von Jahren bis zu seinem (am 27. April d J. erfolgten) Tode als anhaltischer Gymnasialprofessor a. D. in München lebte. Er war Mitglied der „kaiserl. leopoldinisch-karolinischen Akademie der Naturforscher", welche im Sinne ihrer liberalen Statuten dem fleissigen Forscher durch Aufnahme grösserer mit Kosten verbundener Arbeiten in ihre officiellen Publicationen mehrfach entgegenkam.

sind, nicht mit unserem Helden durch Dick und Dünn zu gehen, sondern Absicht und wirklichen Erfolg recht wohl zu sondern.

Schon früh hatte sich bei dem eifrig mit ästhetischen Untersuchungen beschäftigten Gelehrten die Ueberzeugung festgesetzt, es müsse ein bestimmtes, nach Mass und Zahl genau angebbares Kriterium geben, welchem zufolge sich der Schönheitsbegriff direct präcisiren liesse. Diesem seinem Funde widmete er eine erste selbstständige Schrift[1]), welcher noch viele andere mit analogen Tendenzen nachfolgen sollten. Diese fundamentale Idee besteht nun darin, dass die Theilung einer gegebenen Strecke a dann den befriedigendsten Eindruck auf unser Auge und Gemüth mache, wenn dieselbe im Theilungspunkte nach dem sogenannten goldenen Schnitte erfolge, wenn also der grössere und kleinere Abschnitt (Major und Minor) beziehungsweise durch die Zahlen

$$\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \text{ und } \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$$

gegeben seien. Ob nun in der That ein solches Mass vorhanden oder nicht, darüber werden die Meinungen wohl noch für lange auseinandergehen, — uns genügt es, zu constatiren, dass, wofern überhaupt seine Existenz zugestanden wird, Zeising's Postulirung nach übereinstimmendem Urtheil am meisten für sich hat. Wir möchten noch bemerken, dass der Versuch, ästhetische Begriffe direct auf die geometrische Formenlehre anzuwenden, gerade nicht absolut neu genannt werden darf. Seitdem Albrecht Dürer seine bekannten constructiven Regeln für die Herstellung einer möglichst stylgerechten Buchstabenform entworfen[2]), trifft man nicht selten auf verwandte Tendenzen, und noch in neuerer Zeit könnten wir aus Kunze's Geometrie eine Stelle anführen, wo von dem „Rechteck der schönsten Form" die Rede ist[3]). Allein derartige Gedanken und Bestrebungen stehen eben vereinzelt und zusammenhangslos da, und Zeising war es vorbehalten, sie zu einem Ganzen zusammenzufassen und einheitlich zu gestalten.

In der That wusste er den oben skizzirten einfachen Grundgedanken sofort gewaltig zu verallgemeinern, indem er die weitere, nunmehr sehr umfassende Forderung aufstellte: Jeder irgendwie in zwei Theile zerspaltene Gegenstand unterliege nur dann dem ästhetischen Princip, wenn das Ganze zum grössern Theile, wie dieser selbst zum kleinern sich verhalte. Und nun stellte er sich die Aufgabe, allenthalben auf dem ungeheuren Gebiete der Formen die Richtigkeit seines Grundgesetzes am speciellen Falle nachzuweisen, eine Riesenaufgabe, welcher er in der That bis zu einem unglaublichen Grade gerecht geworden ist. Um den Umfang des Problems zu veranschaulichen, ist es vielleicht angezeigt, die Worte hier wiederzugeben, mit welchen der Autor selbst ein späteres Werkchen einleitete: „Da die Frage, um die es sich hier handelt, die gesammte Anthropologie, namentlich die Anatomie, Physiologie und

Ethnographie, ferner die Zoologie, Botanik und Mineralogie, die Geographie und Astronomie, die Mathematik, Physik und Chemie, kurz alle Gebiete der Naturwissenschaft, und nicht minder die gesammte Aesthetik, namentlich die Theorie und Praxis der Baukunst, Bildhauerkunst und Malerei, der Musik, Poesie und Mimik berührt, so liegt es in der Natur der Sache, dass es dem Einzelnen schlechthin unmöglich ist, den Gegenstand nach allen Seiten und Richtungen hin erschöpfend zu behandeln . . . .“ Indem hier vom Autor selbst das Wesen und der vielseitige Charakter der zu erledigenden Fragen charakterisirt ist, könnten wir selbst unsere Schilderung an seine Schematisirung anzulehnen uns versucht fühlen, d. h. wir müssten für jede der oben aufgezählten Disciplinen nachzuweisen suchen, wo und wie sich das Zeising'sche Gesetz in ihr offenbare. Es leuchtet jedoch ein, dass uns ein derartiges Verfahren weit über die uns gezogenen Grenzen hin ausführen müsste, und so schlagen wir denn lieber einen andern Weg ein: wir führen dem Leser kurz die hauptsächlichsten Schriften des Verfassers vor und analysiren ihren Inhalt, soweit er für unsern Zweck herangezogen werden kann.

Vorher aber halten wir es für eine Pflicht, eine Verwahrung dagegen einzulegen, als ob wir uns von vornherein mit sämmtlichen Ergebnissen Zeising'scher Forschung identificirten. Wir halten allerdings dafür, dass die Grundidee gesund, der Fundamentalsatz richtig und das Recht, für denselben allüberall Substrate aufzusuchen, principiell unbestreitbar sei, aber wir meinen nichtsdestoweniger, dass der Erfinder mit sehr begreiflichem Idealismus von diesem seinem Rechte häufig einen allzu unumschränkten Gebrauch gemacht habe. Ist es doch bisher noch immer so gegangen, dass der eifrig nach einem bestimmten Factum Suchende dasselbe schliesslich auch da auffand, wo der Unbefangene Nichts zu sehen vermochte, und es ist doch nur allzuschwer, einer vorgefassten Idee ungeachtet ausschliesslich die Kritik walten zu lassen. Es wäre nicht schwierig, Analoga für ein solches Vorkommniss namhaft zu machen. Als Piazzi Smith sich von der Ueberzeugung hatte durchdringen lassen, dass in der Cheops-Pyramide eine Verkörperung des geometrisch-astronomischen Wissens der alten Aegypter vor uns stehe fand er allenthalben die unglaublichsten Belege für seine Ansicht; als Franz Lihařzik in dem magischen Quadrate das Bildungsschema für den menschlichen Körperbau erkannt zu haben glaubte, fügten sich anscheinend ganz ungezwungen alle Massverhältnisse seinen Berechnungen* — und wieviele

* Lihařzik, über dessen Bemühungen wir bei einer andern Gelegenheit referirten[4]), befolgte bei seinen anthropometrischen Untersuchungen offenbar eine ganz ähnliche Tendenz wie Zeising. Fleiss und Mühe haben beide Gelehrte in reichstem und gleichem Masse angewandt; der unparteiische Richter aber wird, was auch sonst sein Urtheil über das — möglicherweise utopische — Endziel sein

Beispiele könnte die Geschichte in dieser Hinsicht noch aufführen. Und diesen fast allen erfinderisch angelegten Köpfen anhaftenden Fehler vermochte auch Zeising nicht gänzlich zu vermeiden; allein dafür ist ja auch noch kein abschliessendes Ziel erreicht, der ruhig und gemessen dem oft allzuhastigen Schritte des Pfadfinders nachgehenden Forschung wird es mit der Zeit schon gelingen, die Spreu vom Weizen zu trennen und das methodische Fundament, wenn auch nur für einen Theil der Resultate des Erfinders, zu bestätigen.

Indem wir nun von dem obengenannten Erstlingswerke einen kurzen Ueberblick zu geben versuchen, folgen wir der Eintheilung des Verfassers. Als erste Aufgabe betrachtet er es, an den Normalmaassen der menschlichen Figur das stete Auftreten der Theilung nach dem äussern und mittlern Verhältnisse darzulegen und so der bereits von Dürer[5]) ins Leben gerufenen anatomischen Proportionslehre einen festen Untergrund zu verleihen. Als charakteristisches Beispiel sei die Thatsache angeführt, dass einem mit herabhängenden Händen (in militärischer Stellung) dastehenden Menschen durch das Handende die Körperlänge nach der *sectio aurea* getheilt werden soll. Auf die zahllosen Einzelheiten, welche der mit den Untersuchungen eines Camper, Carus, Quetelet des Genauesten vertraute Verfasser von überall her zur Bestätigung seiner These zu holen weiss, kann hier natürlich nicht näher eingegangen werden, vielmehr sei auf das Hauptwerk und zwei an dasselbe sich anschliessende Monographieen verwiesen, deren eine[6]) besonders die Wachsthumsverhältnisse, die andere[7]) die Stammverschiedenheiten erörtert. Bemerkt sei nur noch, dass gewisse Specialitäten, wie z. B. der Versuch, die symbolischen Zahnformeln der zoologischen Lehrbücher zu einer wirklich diesen Namen verdienenden mathematischen Formel umzugestalten, einen vertrauenerweckenden Eindruck machen, wogegen wieder andere Lehrsätze den Zweifel wachrufen müssen, so z. B. der folgende: „Die Cubikwurzel aus dem Gewichte des kleinen Gehirns verhält sich zu der Cubikwurzel aus einer Grosshirnhemisphäre wie der Major zum Minor.“ Wichtiger in mathematischer Rücksicht ist das nun folgende Capitel, welches die Beziehungen des goldenen Schnittes zum Baue der Pflanzen abhandelt. Zeising offenbart sich hier als begeisterter Anhänger der von Schimper und Braun inaugurirten mathematischen Richtung in der Botanik. Und in der That, unter welchem der von verschiedenen Seiten aufgestellten Gesichtspunkte man auch die sogenannte Blattstellungslehre betrachten mag, Zeising's Idee findet stets ihren vollberechtigten Platz. Nach den Anschauungen der deut-

---

möge, doch immer dafür eintreten, dass Zeising's geometrisches Verfahren als dem wahren Sachverhalte ungleich adäquater betrachtet werden muss, als die algebraischen Methoden Lihařzik's.

schen Gelehrten nämlich kann man sich die Befestigungspunkte der Blattstiele durch eine um den Stamm herumlaufende Schraubenlinie verbunden denken, und zählt man nun ab, nach wieviel Umläufen (m) und mit Ueberschreitung wievieler Blätter (n) man von einem beliebigen Blatte zum nächsten senkrecht darüber stehenden gelange, so ergiebt sich das im Allgemeinen bei sämmtlichen Pflanzen wiederkehrende Gesetz

$$m : n = p_{r-2} : p_r,$$

unter $\frac{p_{r-1}}{p_r}$ den r^{ten} Näherungswerth des Kettenbruches

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

verstanden; die Zahl r ist bei verschiedenen Pflanzenformen ebenfalls verschieden. — Folgt man im Gegensatze hierzu der von den Gebrüdern Bravais ins Leben gerufenen Theorie, so steht überhaupt streng genommen kein einziges Blatt des Stengels senkrecht über irgend einem andern, vielmehr entspricht der Divergenz zweier Blätter ein constanter Winkel α von $137^{0}\,30'\,28''$, und bringt man sowohl diesen Winkel, als auch den mit 360^{0} zu berechnenden Stengelumfang auf das gemeinschaftliche Mass der Secunde, so gelangt man zu der sehr nahe richtigen Gleichung

$$\frac{1296000}{800972} = \frac{800972}{1296000-800972},$$

und in der That hat der Winkel α die durch den Nenner des zweiten Buches angegebene Anzahl von Secunden. Kurz — wie man auch die Sachlage betrachtet, es stellt sich, um mit Zeising zu reden, „das Verhältniss des goldenen Schnittes als das eigentliche Normalverhältniss der Blattstellung dar“. Freilich dürfen wir uns nicht verhehlen, dass die neuere Botanik, und zwar gerade insofern sie Anspruch auf den Namen „exact“ erhebt, die Blattstellungslehre über Bord geworfen hat, indem sie — allen teleologischen Erwägungen abhold — einen ersichtlichen causalen Zusammenhang jener Gesetze mit den uns bekannten, im Pflanzenkörper wirksamen Kräften nicht aufzudecken vermag. Da wir aber noch keineswegs behaupten können, ein solcher Zusammenhang sei absolut und für immer unauffindbar, und da uns zudem ein hervorragender Vertreter jener modernen Richtung ausdrücklich versichert[8]): „Wir möchten die Blattstellungslehre in unserer Literatur ebenso wenig entbehren, als etwa die heutige Astronomie in ihrer Geschichte die alte Theorie der Epicyklen beseitigt wünschen kann“, so dürfen wir sicher die hohe Bedeutung der ganzen Hypothese und damit auch die willkommene Bestätigung anerkennen, welche Zeising's Lehre in einem der wichtigsten Zweige der organischen Naturwissenschaft gefunden hat.

Kürzer dürfen wir uns bei den folgenden Kategorien fassen, wo Zeising in der Krystallographie, in der musikalischen Akustik, in der Astronomie und Geographie den massgebenden Einfluss seines Gesetzes darthun will. Unzweifelhaft bieten seine Bemerkungen über den Grund der Harmonie viel Richtiges und für den Kenner Anregendes dar, obwohl alle solche ästhetisch-mathematischen Theorieen* seit der Begründung einer physikalischen Harmonielehre durch Helmholtz antiquirt erscheinen. Dagegen will uns die Adaptirung der in den Distanzen und Massen der Planeten zu Tage tretenden Massverhältnisse etwas gekünstelt vorkommen, und ebenso wenig sagen uns die allerdings mit grösster Sachkunde ausgeführten geographischen Constructionen Zeising's zu. Bei allen solchen Versuchen tritt denn doch zu offenkundig das Bestreben hervor,** die thatsächlich vorhandenen Verhältnisse den Voraussetzungen anzupassen, ein Bestreben, dessen Consequenzen schliesslich zu dem vagen Analogieenspiele der sogenannten Naturphilosophie führen muss. Zeising hat allerdings diese Klippe nicht gänzlich umgangen, z. B. da, wo dem „Parallelismus zwischen der Gestalt der Erde und der Menschengestalt“ das Wort geredet wird; allein sein gesunder und durch ernste mathematische Studien geschärfter Takt liess ihn bei dergleichen Extravaganzen nicht lange verweilen. Nur mit wenigen Worten sei auch noch der Versuche gedacht, die *sectio aurea* als das „Normalverhältniss der chemischen Proportionen“ zu fixiren. Dieser Idee widmete der geistreiche Forscher eine Specialschrift[10]), aus deren Vorrede wir oben eine Stelle ausgezogen haben. Ueber den absoluten Werth dieser jedenfalls mit allen Mitteln eines eminenten Wissens in Scene gesetzten Leistung steht uns kein Urtheil zu; der Respirationsprocess, die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, die Aequivalentgewichte und Volumina und vieles Andere wird einer eingehenden Untersuchung unterworfen.

Seinen eigentlichen und wahrsten Triumph jedoch feiert das Zeising'sche Gesetz in der Architektur, denn hier kann sich dasselbe am ehesten in seiner Reinheit offenbaren. Die Masse vollendet schöner Gebäude gestatten die unmittelbarste Vergleichung, und wenn der Grundgedanke richtig ist — hier muss er seine Richtigkeit bewähren. Insbesondere das athenische Parthenon ist es, welches als Fundgrube dient;

* Bekanntlich können in diesem Sinne Leonhard Euler und in neuerer Zeit Drobisch als Vorläufer Zeising's betrachtet werden.

** Eine methodisch ganz übereinstimmende, den Prämissen nach jedoch verschiedene Arbeit ist diejenige Reichenbach's[9]), welche nur freilich die schöne Klarheit Zeising's merklich vermissen lässt. Allein schon daraus, dass zwei auf ganz divergentem Fundamente aufbauende Forscher gleichwohl in der Vertheilung von Land und Wasser, in der Gliederung der Küsten u. s. w. ihr supponirtes Gesetz sich immer reproduciren sehen, folgt die Unwahrscheinlichkeit der Existenz einer solchen aprioristischen Bildungsregel.

aus einer Beschreibung desselben von Röber[11]) entnimmt Zeising einen solchen Reichthum von trefflich stimmenden Beispielen, dass an eine Selbsttäuschung nicht mehr gedacht werden kann. Nicht minder enthält die „Proportionslehre", mit der wir uns bisher fast ausschliesslich beschäftigten, den Nachweis, dass die gothische Ornamentik allenthalben auf dem goldenen Schnitte beruht — eine Thatsache, welche u. A. auch Hankel[12]) anerkennt und verwerthet.

Hatten die bisher erörterten Arbeiten den ausschliesslichen Zweck, das neue Gesetz als solches zu begründen und als in den mannigfachsten Wissenszweigen zu Recht bestehend nachzuweisen, so kam es dem Urheber in seinem grösseren ästhetischen Werke[13]) hauptsächlich darauf an, die Position seiner Erfindung in dem Gesammtcomplex der Schönheitswissenschaften klarzustellen und den Tenor derselben in einer den üblichen philosophischen Gepflogenheiten angepassten Weise umzugestalten. Infolge dessen tritt das rein mathematische Interesse hier selbstverständlich zurück, doch fesseln uns auch hier nicht wenige feinsinnige Andeutungen, und zumal die Art und Weise, wie der Verfasser die dem Auge wohlthuendste Form einer aus Kreisbögen sich zusammensetzenden Wellenlinie ausmittelt, dürfte auch auf allgemeinere Beachtung zu rechnen haben[14]).

Vom rein mathematischen Standpunkte aus am Interessantesten stellt sich jedoch eine Reihe von Aufsätzen dar, welche in der von jeher durch ihre gehaltvollen Essays ausgezeichneten „Deutschen Vierteljahrsschrift" erschienen sind. Zunächst eine ästhetisch-mathematische Arbeit, welche in mancher Beziehung wohl noch mehr befriedigt, als die früheren analogen Untersuchungen des Verfassers, denn hier fällt die Einseitigkeit weg, welche überall nach Manifestationen eines bestimmten Grundgesetzes sich umsah, und es wird die ästhetische Bedeutung der geometrischen Figuren an sich studirt. Von der Voraussetzung ausgehend, dass nur diejenige Form wirklich schön genannt werden dürfe, welche einerseits dem Princip der Freiheit, andererseits aber demjenigen der Gesetzmässigkeit unterworfen sei, unternimmt es Zeising, die von der Elementargeometrie dargebotenen räumlichen Formen auf ihren ästhetischen Gehalt zu prüfen[15]). Man erkennt leicht, dass ein willkürliches Polyeder oder Polygon allzusehr dem zweiten, dagegen Kugel und Kreis allzusehr dem ersten Gesetze widerstreiten — die in ästhetischer Beziehung vollkommensten Figuren müssen sonach in der Mitte liegen, und man erkennt bald, wo der Autor sein eigentliches Ideal erblickt. „Man wird," sagt er[16]), „ohne zuviel zu behaupten, sagen können, dass überhaupt ein Gebilde den zur Schönheit unerlässlichen Eindruck einer irgendwie gesetzmässigen Bildung nur insoweit zu erzeugen vermag, als es in sich durch irgendwelche ihm wesentliche oder charakteristische Eigenschaften das die Kreis- und Kugelform beherrschende Gesetz, nach welchem sich die Vielheit und Verschiedenheit nur als eine Auseinanderlegung und potenzirte Setzung der Einheit und Gleichheit zu erweisen hat, in einer vom ästhetischen Gefühl unmittelbar erfassbaren Weise zur Anschauung bringt. Am Evidentesten genügen dieser Bedingung die regulären Polygone und Polyeder, namentlich die ersteren.“ Im Anschluss an diese Worte wird nun eine sehr eingehende, zwar populäre, aber doch auch die neuesten Forschungen Poinsot's u. A. berücksichtigende Theorie jener regulären Vielecke gegeben, welche nicht zu viele Seiten besitzen; denn mit Recht wird bemerkt, dass bei Vielecken höherer Ordnungszahl die Complication der Linien etc. den angenehmen Eindruck paralysire. Dabei findet sich durchweg eine solche Fülle feinsinniger Bemerkungen über die künstlerische Anwendung der behandelten Figuren, ihr Auftreten in der Natur und Aehnliches* eingestreut, dass auch der Fernerstehende sich angezogen fühlt und über die Eigenthümlichkeiten der hier und da in naturphilosophischem Sinne gefärbten Terminologie leicht hinweggeht — um so mehr, als der Verfasser von der Gründlichkeit seiner mathematischen und speciell geometrischen Kenntnisse die achtungswerthesten Proben ablegt.** Wünschenswerth wäre es freilich gewesen, dass auch die höheren Curven in den Bereich der Betrachtung gezogen worden wären, wo ja gar manche ähnliche Fragen ihrer Lösung harren. So will, um nur Eins hervorzuheben, der berühmte Architekt Blondel[20]) herausgebracht haben, dass eine sich verjüngende Säule dann am Gefälligsten sich darstelle, wenn ihr Profil mit der Muschellinie des Nikomedes übereinstimme.*** — In noch höherem Grade vielleicht tritt die mit trefflicher historischer Durchbildung† gepaarte Sachkunde Zeising's in seinem schönen Aufsatze über das Sternfünfeck[22]) hervor, welcher eigentlich ganz rein mathematisch-geschichtlichen Inhalts ist und dem Verf.

---

* Beachtenswerth erscheint uns u. A. die Bemerkung[17]), dass nach Hoffstatt's Angabe bereits in den Bauhütten des Mittelalters jene Regel bekannt und geübt worden sei, der zufolge die halbe Seite des regelmässigen Dreiecks gleich der Siebenecksseite genommen wird. Es wäre demgemäss unrecht, diese Construction, wie es gewöhnlich geschieht, auf Albrecht Dürer zurückzuführen, eine Annahme, gegen welche wir uns bereits früher einmal[18]) erklärt haben.

** Nur hier und da kommt dem Mathematiker die ästhetische Anschauung ein wenig in die Quere, so z. B. da, wo er sagt[19]): „es giebt überhaupt kein Dreieck, um welches und in welches sich nicht ein Kreis beschreiben liesse, welches also nicht theils seine Eckpunkte, theils die Mittelpunkte seiner Seiten mit der Peripherie eines Kreises gemein hätte“. Hier hatte er offenbar nur ein gleichseitiges Dreieck vor Augen.

*** Auch Galilei thut einmal der „angenehmen“ Gestalt der Cykloide Erwähnung[21]), welche diese Curve zur Verwendung beim Brückenbau geeignet mache.

† Nur darin können wir mit unserer Verwunderung nicht zurückhalten, dass Zeising den ihm so gänzlich geistig verwandten Lucas Pacioli und dessen Werk *„de divina proportione“* total vernachlässigt hat.

dieses bei seinen Untersuchungen über die Entwickelungsgeschichte der Sternpolygone wesentliche Dienste leistete.

Indem wir nach dieser kurzen Ueberschau unsern Artikel schliessen, glauben wir wenigstens dazu mitgeholfen zu haben, dass dem unermüdlichen Bearbeiter eines mathematisch-philosophischen Grenzgebietes ein ehrenvolles Andenken in den Kreisen der eigentlichen Fachwelt gewahrt bleibe.

1) Zeising, Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, Leipzig 1854.
2) Dürer, Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheid, Nürnberg 1525, Ende des dritten Theiles.
3) Kunze, Lehrbuch der Planimetrie, Weimar 1839, S 124.
4) Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876, S. 121.
5) Dürer, Vier Bücher von menschlicher Proportion, Nürnberg 1528.
6) Zeising, Ueber die Metamorphosen in den Verhältnissen der menschlichen Gestalt von der Geburt bis zur Vollendung des Längenwachsthums, Separat aus dem 22. Bande der neuen Publicationen der kaiserl. leopold.-karol. Akademie der Naturforscher.
7) *Id.*, Ueber die Unterschiede in den Verhältnissen der Racentypen, Archiv f. physiologische Heilkunde Jahrg. 1856, 3. Heft.
8) Sachs, Geschichte der Botanik in Deutschland, München 1875, S. 340.
9) Reichenbach, Die Gestaltung der Erdoberfläche, Berlin 1867.
10) Zeising, Das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen, Leipzig 1856.
11) Röber, Die ägyptischen Pyramiden in ihren ursprünglichen Verhältnissen, nebst einer Darstellung der proportionalen Verhältnisse im Parthenon zu Athen, Dresden 1855.
12) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 76.
13) Zeising, Aesthetische Forschungen, Frankfurt a. M. 1855
14) *Ibid.* S. 190.
15) *Id.*, Aesthetische Forschungen im Gebiete der geometrischen Formen, Deutsche Vierteljahrsschrift, 31. Jahrg. IV, S. 219 flgg.
16) *Ibid.* S. 236.
17) *Ibid.* S. 273.
18) Günther, Zur Geschichte der deutschen Mathematik im 15. Jahrhundert, diese Zeitschr. 20. Jahrg., 1. Heft.
19) Zeising, S. 236.
20) *Blondel, Cours d'Architecture, Paris 1875, P. II, Livre I, Cap. 5.*
21) Poppe, Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und Architektur, Nürnberg 1802, S. 121.
22) Zeising, Das Pentagramm. Culturhistorische Studie, Deutsche Vierteljahrsschrift, 31. Jahrg. I, S. 173 flgg.

Recensionen.

Éléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon, par **P. Mansion**, *docteur spécial en sciences mathématiques, professeur à l'université de Gand. Mons, Hector Manceaux. Bruxelles, Henri Manceaux. Gand, A. Hoste.* 1875. 44 Seiten.

Id., Introduction à la theorie des déterminants, à l'usage des établissements d'instruction moyenne. Gand, A. Hoste. Mons, Hector Manceaux. 1876. 24 Seiten.

Die erste Schrift des verdienten Gelehrten, über welche wir hier zu referiren haben, ist speciell für Studirende bestimmt und ihr Entwickelungsgang natürlich der gewöhnliche. Die allgemeine Permutationslehre und der Determinantenbegriff bilden das erste Capitel, im zweiten wird die Zerlegung in Unterdeterminanten und die daran sich anreihende Auswerthung solcher Formen behandelt. Dann folgt die Addition und Multiplication der Determinanten, an die sich hübsche geometrische Anwendungen anreihen; besonders möchten wir auf den instructiven Beweis des wichtigen Satzes (S. 31) aufmerksam machen, dass die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

drei reelle Wurzeln besitze. Das dritte Capitel endlich widmet sich der Elimination im weiteren Sinne des Wortes.

Abgesehen von den durchweg klaren Begriffsbestimmungen und Deductionen der einzelnen Hauptsätze müssen wir auch den „*Exercices*" unser besonderes Lob zu Theil werden lassen, welche jedem Theorem angehängt erscheinen und einen vortrefflichen Uebungsstoff darbieten; solche Aufgaben vermisst man in unseren deutschen Determinantenwerken noch zu sehr. Wissenschaftliche Neuigkeiten sollen principiell nicht gerade gegeben werden; jedoch sind sie nicht ausgeschlossen, wie denn z. B. Nr. 8, „*Théorème de Bézout*" überschrieben, einen passenden Uebergang zu den Determinanten vom dritten und überhaupt höhern Range gewährt. — Von deutschen

Studenten wird Mansion's Werkchen als treffliches Lehrmittel zur ersten Einführung in die Determinantenlehre gebraucht werden können.

In der zweiten Schrift sollen speciell die Bedürfnisse der Mittelschulen berücksichtigt werden, und zwar fasst der Verfasser, wie er uns brieflich mittheilte, seine Aufgabe in ähnlichem Sinne, wie die kürzlich von Lindemann edirten Clebsch'schen Vorlesungen auf, d. h. er beschränkt sich exclusiv auf zwei- und dreireihige Determinanten. Ob eine solche Limitation vom pädagogischen Standpunkte aus völlig gerechtfertigt sei, darüber wird sich streiten lassen; gesteht man aber die Prämisse zu, so wird man Herrn Mansion's Ausführung ungetheilte Anerkennung nicht versagen können. Vor Allem freut es uns, dass er der gefährlichen Klippe, an welcher Dölp und zum Theil auch Diekmann scheiterten, aus dem Wege zu gehen verstand: er hält sich nicht damit auf, durch lange vorbereitende Rechnungen die Formulirung des Determinantenbegriffes in einer schliesslich doch ermüdenden Weise vorzubereiten, er stellt denselben vielmehr gleich als eine Nothwendigkeit hin und zwingt seine Schüler, sich ihm zu accomodiren. Einmal muss dieser schwere Schritt zur Symbolik doch gethan werden, da helfen alle Palliativmittel nichts, und je früher man ihn thut, desto besser.

Das Material dieser zweiten Schrift ist von dem der ersten nicht wesentlich verschieden, nur dass eben blos der zweite und dritte Grad behandelt wird; alle Vorzüge des grössern Werkes übertragen sich auch auf dieses. Nur Einen Punkt hätten wir zu bemerken, denselben, den wir auch in unserer Besprechung des nicht minder originell angelegten Werkes von Schüler (Hoffmann'sche Zeitschr. 6. Jahrg., 4. Heft) hervorzuheben für nöthig fanden. Wenn man aus didaktischen Rücksichten die bewusste Beschränkung für nöthig hält, so sollte man doch am Schlusse des Ganzen — wenn auch nur in einer Anmerkung — darauf hindeuten, dass eine Erweiterung der vorgetragenen Lehren auf n^2 Elemente nothwendig, aber auch leicht sei. Eine solche Verweisung des Lernenden auf später möchten wir in keinem elementaren Abrisse irgendwelcher Disciplin missen.

Am Schlusse dieses Referates dürfen wir es wohl aussprechen, dass uns eine Verpflanzung der Mansion'schen Leitfäden auf deutschen Boden durchaus angezeigt schiene; selbst neben Reidt's und Diekmann's in ihrer Art trefflichen Einleitungen würden dieselben schon ihren Leserkreis finden.

München. Dr. S. Günther.

Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Zum Gebrauch an Gymnasien, Realschulen und anderen höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. JOSEF DIEKMANN, Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Essen. Essen, Druck und Verlag von G. D. Bädecker. 1876. VIII, 88 S.

In einer Reihe von Artikeln* hat der Verfasser dieser Schrift seine Behandlungsweise der Determinantenlehre schon früher den Lehrern der Mathematik vorgelegt. Es lag daher auf den ersten Blick nahe, in dem hier zu besprechenden Werkchen blos einen Separatabzug jener drei Abhandlungen, versehen mit den für ein selbstständiges Buch nothwendigen redactionellen Aenderungen, zu erblicken. Wir fanden uns jedoch angenehm enttäuscht, als wir beim Durchlesen der Schrift auf eine von jener ersten mehrfach abweichende originelle Neubearbeitung trafen,** welche, der grossen Reichhaltigkeit unserer Determinantenliteratur ungeachtet, der allgemeinen Beachtung mit vollem Rechte empfohlen werden muss.

Wir verbreiten uns zunächst über einige Punkte, mit deren Erledigung wir nicht einverstanden sind, um dann später ungestört den mannigfachen Vorzügen des Büchleins gerecht werden zu können. Wir verstehen nicht recht, warum der Verfasser von der Bezeichnung durch doppelte Indices, der wichtigen und in keiner Darstellung genügend gewürdigten Neuerung Jacobi's und Hesse's, anscheinend grundsätzlich Abstand nimmt. Im Verlaufe der Darstellung, wo fast ausschliesslich Determinanten von keinem höhern als dem vierten Grade zur Anwendung kommen, macht sich allerdings jene Unterlassung weit weniger bemerklich, allein schon vom formalen Standpunkte aus erscheint es wichtig, die Schüler gleich von Anfang an in diese später unentbehrliche Bezeichnungsweise einzuführen. Zum Zweiten nehmen wir an der Behandlung Anstoss, welche (S. 7 flgg.) die Unterdeterminanten erfahren. Es wird nämlich

$$\Delta \equiv \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$$
$$= a_{1,1} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1,1}} - a_{1,2} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1,2}} + a_{1,3} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1,3}} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1,n}}$$

gesetzt. Durch diese Formulirung setzt sich der Verfasser in Widerspruch mit der sonst allgemeinen Auffassung dieses Gegenstandes; es ist

* 1., 2., 3. Heft des 6. Jahrgangs der „Zeitschr. f. math. u. naturwissensch. Unterricht".

** Die elementare Vorbereitung des Determinantencalculs ist hier weggelassen. Wir erkennen den hohen Fleiss an, mit welchem jene Einleitung bearbeitet war, allein die Aufgabe, auf diese Weise die charakteristischen Schwierigkeiten — die doch grossentheils nur in der Tradition bestehen — wegzuschaffen, scheint uns überhaupt nicht lösbar. Lediglich diesen Umstand hatten wir im Auge, wenn wir oben sagten, dass auch Diekmann's Bemühungen theilweise gescheitert seien.

freilich die ganze Determinantentheorie in letzter Instanz auf conventionelle Bestimmungen zurückzuführen, allein man ist nun einmal dahin übereingekommen, das Vorzeichen als der Unterdeterminante anhaftend zu betrachten und somit das obige Aggregat formell nicht als algebraische, sondern als reine Summe zu behandeln. Bei der Lehre von den höheren Minoren, welche Diekmann seinem Zwecke gemäss nur ganz summarisch behandelt, drängt sich die Nothwendigkeit, gerade so zu schreiben, ganz gebieterisch auf. Schliesslich können wir unsere Verwunderung darüber nicht ganz bergen, dass der Verfasser dem streng elementar gehaltenen theoretischen Theile so schwierige Anwendungen folgen lässt; allein wir glauben hier unser eigenes Urtheil dem gewiegteren des Schulmanns nachstellen zu müssen. Sagt er doch selbst im Vorwort: „Das Werkchen ist ganz und gar auf dem Boden der Schule gewachsen und, wie aus den gelegentlich gegebenen Anmerkungen und Beispielen zu ersehen, ist fast kein Satz darin, der nicht im praktischen Unterricht gereift und geprüft worden ist.“ Wenn dem freilich so ist, können wir dem Autor zu seinen Schülern nur von Herzen gratuliren; für sehr viele Anstalten, zumal Süddeutschlands, werden wohl die Verhältnisse ungleich weniger günstig liegen. Für diese würde uns noch immer eine deutsche Version des vorstehend beschriebenen Mansion'schen Leitfadens das Liebste sein; den Lehrern aber rathen wir um so mehr zu Diekmann, weil sie hier Vorzüge eigener Art finden. Gehen wir nunmehr zu diesen über.

Die ersten beiden Capitel enthalten in einfacher und klarer Darlegung die eigentlichen Elemente der Determinantentheorie, und zwar wird mit Recht ein Hauptgewicht auf die Zerlegung in Partialdeterminanten gelegt. Das dritte Capitel handelt von der Auflösung eines linearen Systems.* Allenthalben fügt der Verfasser eine reiche Auswahl von Beispielen bei, welche zum Theil auch einem höheren Zwecke zu dienen bestimmt sind, insofern sie für schwierigere Partien, deren ausführliche Behandlung der Tendenz des Buches zuwiderlaufen würde, wenigstens eine Exemplification darbieten. So ist S. 11 die Jacobi'sche Zerlegung von $\Sigma \pm a_{1,1}+x, a_{2,2}+x, \dots a_{n,n}+x$, S. 12 der Fundamentalsatz von den symmetralen Determinanten, S. 20 die sogenannte französische Methode zur Eliminirung angedeutet; auch eine sehr übersichtliche Theorie der Kettenbruchdeterminanten findet sich vor. Sehr hübsch ist der als Anhang des dritten Capitels zu betrachtende sechste Paragraph, welcher — und zwar ohne Anwendung des eigentlichen Eliminationsverfahrens — aus zwei Gleichungen $\varphi(x,y)=\psi(x,y)=0$ die Unbekannten

* Eine nicht zu billigende typographische Eigenthümlichkeit des Buches ist die Darstellungsweise der Brüche, indem nämlich die Determinantenstriche des Zählers und Nenners je eine ununterbrochene Gerade bilden. Für den Drucker ist es allerdings sehr bequem, aber die Deutlichkeit leidet darunter.

berechnen lehrt. „Das Verfahren besteht darin, die Unbekannten zunächst linear zu berechnen, dadurch erhält man gewisse Zwischenformen, welche man dann direct durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken kann.“ Capitel 4 betrachtet im Sinne Gordan's die Multiplication der Determinanten als Unterfall des Laplace'schen Satzes, lehrt dieselbe dann ausführen, wobei auch die adjungirten Determinanten mit hereingezogen werden, und behandelt dann auch die linearen Substitutionen als Specialität des Multiplicationstheorems. Das folgende Capitel, „Anwendung der Determinanten auf die Theorie der Gleichungen“ überschrieben, ist als die Quintessenz des Ganzen anzusehen; es zerfällt in sechs Paragraphen. § 10 lehrt die dialytische Methode und die Discriminantenbildung, in § 11 wird die schöne, dem Verfasser eigenthümliche Auflösung der quadratischen Gleichungen* mit geometrischen Anwendungen vorgetragen. War es hierbei gleich von Anfang an erforderlich, den Leser mit dem Wesen einer Invariante — der Discriminante $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ — vertraut zu machen, so macht sich beim Aufsteigen zu den cubischen Gleichungen auch die Nothwendigkeit der Einführung des Covariantenbegriffes geltend. Die Lehre von diesen Gebilden wird sehr ausführlich behandelt, und es gelingt zuletzt (S. 60), den schönen und für eine elementare Behandlung bisher wohl allgemein unzugänglich erachteten Satz zu beweisen: „Führt man in eine cubische Gleichung die Wurzeln ihrer quadratischen Covariante $\varDelta = 0$ ein, so zerfällt die cubische Gleichung in die Differenz zweier Cuben.“ Einen höchst interessanten, für Schüler aber unserer festen Ueberzeugung nach transscendenten Excurs bietet § 13, wo die von Clebsch sogenannte „cyklische Projectivität“ im engsten Anschluss an jene Specialform symmetrischer Determinanten besprochen wird, welche wir früher als „doppelt-orthosymmetrisch“ bezeichnet haben. Die beiden Schlussparagraphen dieses Capitels endlich variiren auf das Allseitigste die Gleichungen vierten Grades, so zwar, dass, wie schon aus dem Vorhergehenden zu erwarten, die ganze Materie als Ausfluss der allgemeinen Lehre von den linearen Transformationen sich darstellt. Das sechste Capitel bietet diverse sehr nett behandelte „Anwendungen aus der analytischen Geometrie“, wobei denn auch auf die Bezeichnung $a_{i,k}$ recurrirt wird, und als Anhang folgt eine ebenfalls auf analytische Raumgeometrie sich stützende Bestimmung des Pyramideninhalts, bezüglich deren auch auf die sehr ähnliche Ent-

---

* Dieselbe ist den Lesern der Hoffmann'schen Zeitschrift bereits aus einem frühern Aufsatze des Herrn Diekmann bekannt. Freilich wird mancher, wie es u. A. auch dem Referenten erging, sich im Stillen gewundert haben, jene Abhandlung gerade hier und nicht etwa in den „Mathem. Annalen“ anzutreffen. An didaktischer Durchbildung hat indess diese zweite Bearbeitung ganz entschieden gewonnen, so wenig sie auch von jener ersten abzuweichen scheint.

wickelung **Studnička's** (Ber. d. böhm. Gesellsch., 15. Nov. 1872), verwiesen werden möge.

Das Buch ist, wie aus dieser Schilderung zu entnehmen, kein umfassender Lehrbegriff, aber es ist ein trefflich klarer Handweiser für die Elemente und gewisse wichtige Anwendungen des Determinantencalculs, wie sie sich dem auf dem Gebiete der neueren algebraisch-geometrischen Forschung bereits vortheilhaft bekannt gewordenen Verfasser von selbst darboten. Für eine zu wünschende zweite Ausgabe dürfte sich allerdings eine ausgiebigere Berücksichtigung der mehr formellen Seiten der Theorie — Differenzenproduct, unvollständige Determinanten u. s. w. — empfehlen.

Druck und Ausstattung sind vorzüglich. Von störenden Druckfehlern wären vielleicht folgende zu erwähnen: S. 23 Z. 12 v. u. $+0$ statt -1; *ibid.* Z. 2 v. u. das fehlende a_{n-1}; S. 45 Z. 1 v. u. Involution. Der Name **Heis** ist durchgängig unrichtig geschrieben.

München. Dr. S. Günther.

I primi elementi della teoria dei determinanti e loro applicazioni all' algebra ed alla geometria, proposti agli alcuni degli istituti tecnici dal Professore Domenico Dr. Fontebasso. Treviso, Tipografia di Luigi Zoppelli. 1873. VII, 134 S.

I determinanti con nomerose applicazioni, per Giovanni Garbieri. Parte prima utile agli studiosi di matematica nei primi corsi universitari. Bologna, Tipografia di G. Cenerelli.* 1874. XIV, 267 S.

Zwei italienische Determinantenwerke sind es, auf die wir nachstehend die Aufmerksamkeit deutscher Mathematiker lenken möchten, da dergleichen Arbeiten, sofern sie nicht einen wirklichen Fortschritt der Wissenschaft repräsentiren, im Auslande nur allzuleicht unbekannt zu bleiben pflegen. Beide Bücher ergänzen sich, wie man aus den Titelworten sieht, so ziemlich, denn **Fontebasso** hat die Bedürfnisse der technischen Institute — unseren fortgeschritteneren Gewerbe- und sechsclassigen Realschulen entsprechend — im Auge, **Garbieri** schreibt für angehende Mathematiker. Der Stoff freilich wird sich in den Anfangsabschnitten nicht wesentlich unterscheiden können, wohl aber wird man von der ersten Schrift grössere Ausführlichkeit, von der zweiten eine concisere Schreib- und Darstellungsweise erwarten dürfen, wie es denn auch in der That der Fall ist.

Fontebasso beginnt mit den Elementen der Combinationslehre, betrachtet dann die Inversionen und kommt so auf dem gewöhnlichen

* Eine Fortsetzung jenes Werkes war, wie man uns auf Befragen mittheilte, wenigstens bis December vorigen Jahres noch nicht erschienen.

Wege zum Begriff der Determinante selbst. Zur Bestimmung des Vorzeichens für jedes einzelne Glied der ausgerechneten Determinante bedient er sich eines Verfahrens, welches seiner Angabe nach von Bellavitis herrührt und principiell mit demjenigen identisch ist, welches vom Referenten im 6. Jahrgange der „Zeitschrift f. math. u. naturwissensch. Unterricht" vorgeschlagen wurde: *„quando si scrive ciascun elemento si esamini se la sua riga orizzontale sia superiore ad uno o più degli elementi già scritti (senza badare di quante righe sia superiore) ed in tal caso gli si pongano al di sopra altrettanti punti: scritti gli* n *elementi, al loro prodotto si attribuisca il segno* $+0-$, *secondo che il numero totale di quei punti è pari, o dispari"*. Bei der Determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 z_3$ hat man z. B. das Schema $x_1y_2z_3$: 0 Punkte, positiv; $x_1y_3\dot z_2$: 1 Punkt, negativ; $x_2\dot y_1 z_3$: 1 Punkt, negativ; $x_2y_3\ddot z_1$: 2 Punkte, positiv; $x_3\dot y_1\dot z_2$: 2 Punkte, positiv; $x_3\dot y_2\ddot z_1$: 3 Punkte, negativ. Für willkürliche Determinanten mag diese Fassung der Grundregel ihr Gutes haben, bei durchgehender Anwendung der doppelten Indices aber kann man sich einfacher helfen.

Die folgenden „Articoli" des Buches behandeln successive: Die Vertauschung der Reihen, den Laplace'schen Zerlegungssatz, der hier wohl ein wenig zu früh kommt, die Addition und Multiplication der Determinanten mit einer Zahl, das Differenzenproduct, die Bildung von Determinantenproducten, reciproke (d. i. adjungirte) symmetrische Determinanten. Damit ist das erste Capitel erschöpft; im zweiten folgt die Auflösung simultaner Gleichungen, Elimination und eine sehr reiche Fülle von Anwendungen der vorgetragenen Lehren auf elementare und höhere Geometrie.

Fügen wir hinzu, dass die Darstellung durchweg eine klare und leichtverständliche ist und dass die äussere Ausstattung sich entschieden über das bei vielen anderen italienischen Werken gewohnte Niveau erhebt, so darf unser Bericht als abgeschlossen gelten. Hervorragende Eigenthümlichkeiten finden sich nicht vor.

Garbieri geht im Ganzen ähnlich zu Werke; seine Entwickelungsweise ist allgemeiner, origineller, allein, wie uns bedünken will, bei weitem nicht so übersichtlich wie die seines Vorgängers. Die geometrischen Anwendungen treten auch bei ihm sehr in den Vordergrund; dabei wird aber auch der rein algebraische Theil nicht vernachlässigt und — etwa mit Ausnahme der Kettenbruchdeterminanten — wird man keine irgend wünschenswerthe Lehre ausgelassen finden.

Ein charakteristischer Vorzug des Garbieri'schen Werkes auch deutschen Büchern gegenüber ist die Ausführlichkeit, mit welcher die Eigenschaften der sogenannten Matrix discutirt werden. Nur sehen wir nicht recht ein, weshalb der Verfasser diesen Namen zuerst ausdrücklich (S. 105) dem Schema von $n(n+1)$ Elementen

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{Vmatrix}$$

vindicirt und erst weit später die allgemeinere Form

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,s} \end{Vmatrix} \quad (s > n)$$

einführt. Diese letztere ist doch gewiss nicht schwerer verständlich.

Liegt erst die Determinantentheorie Herrn Garbieri's abgeschlossen vor, so besitzt die mathematische Literatur unseres Nachbarlandes ein Werk, welches an Vollständigkeit und — von der schönen historischen Einkleidung abgesehen — auch an Eleganz fast mit der Baltzer-schen Encyklopädie concurriren kann.

Eine nachahmungswerthe Sitte ist es, dass die italienischen Buchhändler auf der Rückseite ihrer Verlagswerke die Preise namhaft machen. Die beiden hier besprochenen Lehrbücher kosten bezüglich 3 und 8 Lire italienisch.

München. Dr. S. Günther.

Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge von Dr. Alfred Enneper, Professor an der Universität zu Göttingen. Halle a. S., Verlag von Louis Nebert. 1876.

Schon der Titel des vorliegenden Werkes lässt die Absicht des Verfassers erkennen, durch welche die Eigenthümlichkeit der Behandlung des Gegenstandes bedingt ist. Am Faden der geschichtlichen Entwickelung soll die Theorie der elliptischen Functionen dargelegt werden. Der Gedanke einer solchen historisch-theoretischen Darstellung gerade bei einer Theorie wie der der elliptischen Functionen, die in einem verhältnissmässig kurzen Zeitraume unter der Hand einer nicht sehr grossen Zahl hervorragender Männer zu einem gewissen Abschlusse gekommen ist, kann sicher als ein glücklicher bezeichnet werden. Es wird Jedem, der sich mit elliptischen Functionen beschäftigt, willkommen sein, in einem handlichen Bande nicht nur die auf diese Theorie bezüglichen Arbeiten in möglichster Vollständigkeit citirt, sondern auch die wichtigsten derselben dem Inhalte nach analysirt zu finden.

Die nachfolgende Inhaltsangabe wird zeigen, inwieweit der Verfasser diesen Zweck erreicht hat. Zunächst aber ist hervorzuheben, dass die Art der Darstellung durch den erwähnten historischen Zweck wesentlich bedingt ist. Es ist damit nicht vereinbar, dass ein streng methodischer, didaktischer Gang durchweg innegehalten wird, der von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus die Theorie zu einem Ganzen zusammenfasst; ein wiederholtes Aufnehmen desselben Gegenstandes von verschiedenen Seiten her ist dabei unvermeidlich, entsprechend dem geschichtlichen Fortgange. Trotzdem hat die Einführung in eine Theorie auf dem Wege der Geschichte auch für den Lernenden ihre grossen Vorzüge, weil die Wege, die der Entdecker geht, die naturgemässesten zu sein pflegen, wenn sie auch nicht immer die einfachsten und kürzesten sind.

Indem wir nun den Inhalt des vorliegenden Werkes ins Auge fassen, so finden wir im ersten Abschnitte nach einem kurzen historischen Ueberblick und einigen einleitenden Betrachtungen über die Integrale, welche auf die trigonometrischen Functionen führen, zunächst die Reduction des elliptischen Integrals auf die Normalform nach Legendre. Es schliessen sich hieran einige literarische Nachweisungen über die späteren Arbeiten, betreffend die Transformation auf die Normalform, ohne ein näheres Eingehen auf deren Inhalt.

Hierauf werden im zweiten Abschnitte die elliptischen Functionen nach der ersten Jacobi'schen Weise definirt und ihre fundamentalen Eigenschaften, einschliesslich der doppelten Periodicität, hergeleitet. Auf Grund dieser Eigenschaften werden im folgenden Abschnitte die Entwickelungen der elliptischen Functionen in unendliche Producte aufgestellt, mit Benutzung der Werthe, für welche diese Functionen Null und unendlich werden. Es wird dann das Ungenügende dieses Verfahrens, bei welchem mehrere unbewiesene Voraussetzungen gemacht sind, hervorgehoben und der Weg angebahnt, auf dem die Resultate verificirt werden sollen, indem die gefundenen unendlichen Producte zunächst als neue Definition der elliptischen Functionen aufgestellt werden, wobei nur der Bequemlichkeit halber die alten Zeichen beibehalten sind.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich nun mit dieser Verification, indem zunächst die Quotienten der unendlichen Producte verwandelt werden in unendliche Reihen von Partialbrüchen, und dann durch ein zuerst von Heine angewandtes Verfahren von diesen letzteren Ausdrücken nachgewiesen wird, dass sie der elliptischen Differentialgleichung genügen. Es bleibt hier freilich das Bedenken übrig, dass die Identität der unendlichen Producte mit den Partialbruchentwickelungen nicht hinlänglich erwiesen zu sein scheint.

Hierauf werden die Thetafunctionen als Zähler und Nenner der Ausdrücke für die elliptischen Functionen definirt und nach der zweiten von Jacobi in den Fundamenten angewandten Methode in trigonometrische Reihen entwickelt.

Im fünften und sechsten Abschnitte werden die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Thetafunctionen untersucht und auf Grund dieser eine von den früheren unabhängige Begründung der Theorie der elliptischen Functionen gegeben nach der schönen, von Jacobi in seinen Vorlesungen angewandten Methode, mittels der Rosenhain in die Theorie der vierfach periodischen Functionen eingedrungen ist und welche, wie keine andere, geeignet ist, die principiellen Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden. Die sehr gelungene Darstellung dieser Methode führt der Verfasser in der Vorrede auf eine Vorlesung von C. W. Borchardt zurück.

Das Additionstheorem der elliptischen Functionen hat sich auf diesem Wege als eine unmittelbare Folge aus den Formeln für die Thetafunctionen ergeben. Dieses Additionstheorem wird nun im siebenten Abschnitte von Neuem, und zwar vorzugsweise vom geschichtlichen Standpunkte betrachtet. Es ist zunächst die erste Entdeckung desselben durch Euler, hierauf die Methode von Lagrange dargelegt und endlich werden einige spätere darauf bezügliche Arbeiten erwähnt.

Der achte Abschnitt behandelt zunächst die Legendre'sche Reduction der elliptischen Integrale auf drei Gattungen und ihre Normalformen, und geht dann über zu Jacobi's Darstellung der zweiten und dritten Gattung. Es werden hierauf die 16 Hauptformen der Integrale dritter Gattung entwickelt, auf welche Jacobi durch das Problem der Rotation eines starren Körpers geführt wurde, und der Abschnitt schliesst mit einer kurzen Hinweisung auf die von Rosenhain ausgeführte Umkehrung von zwei Summen zweier Integrale dritter Gattung und die daraus entspringenden dreifach periodischen Functionen.

Es folgt dann im neunten Abschnitte eine eingehende Behandlung der Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Die Darstellung beginnt mit den algebraischen Principien der Transformation von Jacobi und geht dann kurz auf die bezüglichen Untersuchungen von Abel ein.

Hieran schliesst sich eine recht gute und klare Darlegung der Methoden, welche von der Transformation der Thetafunctionen aus die Transformationstheorie der elliptischen Functionen in Angriff nehmen, deren Ursprung ebenfalls auf Jacobi zurückzuführen ist, deren weiterem Ausbau in neuerer Zeit eine grössere Zahl hervorragender Mathematiker ihre Kräfte gewidmet haben und die den Ausgangspunkt bilden für eine Reihe tiefer theils algebraischer, theils zahlentheoretischer Forschungen, welche freilich von dem Verfasser nur beiläufig, ohne ein näheres Eingehen erwähnt werden.

Der folgende Paragraph behandelt einen Gegenstand, der sonst in Lehrbüchern nicht berührt zu werden pflegt und der bis jetzt wenigstens für die Entwickelung der Theorie wohl nicht die Bedeutung gehabt hat, welche anfangs davon erwartet wurde, nämlich die Jacobi'schen Differentialgleichungen, welchen Zähler und Nenner der Transformationsformeln genügen.

Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Darstellung der Untersuchungen von Sohncke und Schröter über die Modulargleichungen, worin diese Gleichungen bis zur Transformation der 13. Ordnung aufgestellt sind.

In den angefügten zwölf Noten sind noch einige Gegenstände behandelt, welche im Zusammenhang des Ganzen keine passende Stelle fanden, und welche theils den Zweck haben, einige der angewandten Sätze näher zu begründen, theils einige specielle Untersuchungen von mehr historischem Interesse weiter auszuführen.

Unter den ersteren erwähnen wir die Ableitung der Fourier'schen Reihe nach einer Methode, welche, um ganz befriedigend zu sein, mindestens noch einiger Ergänzungen und Erörterungen bedürfte. Diese Betrachtung wäre überhaupt vielleicht besser ganz weggefallen, da man bekanntlich für den Umfang, in dem diese Reihen in der Theorie der elliptischen Functionen angewandt werden, mit weit einfacheren Hilfsmitteln ausreicht. Von grösserem Interesse sind die Noten historischen Inhalts, in denen man die ersten geometrischen Untersuchungen über Ellipsen- und Hyperbelbogen, denen die Theorie der elliptischen Functionen ihren Ursprung und ihren Namen verdankt, die Untersuchungen von Fagnano, Landen, Mac Laurin, Euler, d'Alembert und Anderen dargelegt findet.

Diese Inhaltsangabe wird genügen, um einen Ueberblick über den Umfang des behandelten Stoffes zu geben; man ersieht aus derselben zugleich die Grenzen, welche sich der Verfasser gesteckt hat. Die ganze Darstellung ruht wesentlich auf Jacobi'schem Boden; mit ziemlicher Ausführlichkeit sind noch die älteren und gleichzeitigen Arbeiten von Legendre und Abel behandelt, mit Ausschluss des Problems der Theilung. Dagegen sind nicht berührt die in neuerer Zeit ausgebildeten und vielfach angewandten Methoden, die mit der Theorie der Functionen complexen Arguments im Zusammenhang stehen und die unzweifelhaft dazu beigetragen haben, den Einblick in das Wesen der neuen Transcendenten zu vertiefen. Es ist in dieser Beziehung auffallend, dass z. B. das Werk von Briot und Bouquet in dem ganzen Buche nirgends erwähnt ist. Ferner sind nur beiläufig erwähnt ohne ein näheres Eingehen die Betrachtungen von Weierstrass, welche gleichfalls von einer neuen Seite die Grundlagen und den Zusammenhang der Theorie beleuchten.

Wir wollen mit dem Verfasser nicht darüber rechten, inwieweit eine Erweiterung der Grenzen seines Unternehmens nach der einen oder der andern Seite hin zweckmässig oder wünschenswerth gewesen wäre, und räumen gern ein, dass eine Beschränkung bei der Auswahl aus dem reich vorliegenden Stoffe nothwendig war, auch dass das Gewählte geeignet ist, ein wohlabgerundetes Bild von dem geschichtlichen Werden einer Theorie zu geben, welche zu den wichtigsten Errungenschaften der mathematischen Forschung unseres Jahrhunderts gehört.

Was die Ausführung im Einzelnen betrifft, so sind dem Referenten, abgesehen von der ziemlich beträchtlichen Zahl von Druckfehlern, welche bei Weitem nicht alle in dem Verzeichnisse aufgeführt sind, eine Reihe kleinerer Ungenauigkeiten aufgestossen, von denen die folgenden hervorgehoben sein mögen.

So findet sich gleich zu Anfang auf S. 9 der Ausspruch: „Nach dem Theorem von Taylor ist, wenn v die positive oder negative Einheit nicht überschreitet, $\varphi(u+v) = \varphi(u) + v\,\varphi'(u) + \frac{v^2}{1.2}\varphi''(u) + \ldots$“, ein um so auffallenderes Versehen, als gerade in dem vorliegenden Falle die Giltigkeit der Taylor'schen Reihe unbegrenzt ist. Wenn ferner der Verfasser auf S. 370 die Ansicht ausspricht, dass die von Hermite und Betti gebrauchte Unterscheidung der Thetafunctionen durch zwei Indices die wenigst geeignete sei, so dürfte diese Meinung wohl bei Solchen auf Widerspruch stossen, welche die Zweckmässigkeit einer derartigen Bezeichnung bei den Thetafunctionen mit mehreren Veränderlichen kennen gelernt haben. Auf S. 282 wird als Bedingung der Convergenz der Thetareihe die angegeben, dass der reelle Theil von q kleiner als 1 sei, während es doch heissen sollte „der absolute Werth“ oder „der analytische Modul“.

Endlich findet sich auf S. 449 der Satz: „Jede Function, welche der Bedingung $f(x + i \log q) = -q^{-1} e^{2xi} f(x)$ genügt, ist von der Form $A\,\vartheta(x) + B\,\vartheta_1(x)$, wo A und B von x unabhängig sind“, während hierzu ausser der Endlichkeit und Stetigkeit noch die Periodicität erforderlich ist.

Wenn auch diese und ähnliche Ungenauigkeiten eine etwas grössere Sorgfalt in der Redaction wünschenswerth erscheinen lassen, so verdient die Ausführlichkeit und Genauigkeit in den Citaten, welche überdies in einem alphabetischen Register zusammengestellt sind, um so mehr Anerkennung. Das Werk wird hierdurch sowohl, als durch seinen stofflichen Inhalt zu einem für Lehrer, wie für Lernende gleich nützlichen und empfehlenswerthen Handbuche.

Königsberg, im Mai 1876. H. Weber.

Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme, von Carl Neumann. Leipzig, Teubner. 1875. 240 S. 8°. Preis 7 Mk. 20 Pf.

Während lange Zeit hindurch die deutsche Literatur auffällig arm an Werken war, welche dazu geeignet schienen, in systematischer Weise in die eigenthümlichen Betrachtungsweisen der mechanischen Wärmetheorie einzuführen und mit ihren Resultaten bekannt zu machen, hat sich dieser Zustand in neuerer Zeit in erfreulichster Weise geändert.

Zu den bedeutendsten Erscheinungen auf diesem Gebiete gehört neben der systematischen Umarbeitung der klassischen Abhandlungen von

Clausius über die mechanische Wärmetheorie ohne Zweifel das vorliegende Werk C. Neumann's. Dasselbe ist, wie der Verfasser in der Vorrede selbst mittheilt, aus Vorträgen entstanden, die vom Verfasser zu wiederholten Malen in Tübingen und in Leipzig gehalten worden sind. Jedermann wird eine derartige Arbeit Neumann's mit einer gewissen Erwartung in die Hand nehmen; auch bei mir war dies der Fall und ich bekenne gern, dass diese Erwartungen nicht nur erfüllt, sondern bei Weitem übertroffen worden sind.

Die Reichhaltigkeit und strenge Systematik des Inhalts, die seltene Klarheit und Schärfe des Ausdruckes weisen dieser Arbeit eine ganz hervorragende Stellung unter den verwandten Erscheinungen an.

Zunächst wird im Vorwort eine eigenthümliche neue Schreibweise eingeführt; das Differential einer Function σ bezeichnet nämlich der Verfasser, wie gewöhnlich, mit $d\sigma$, dagegen wird mit $\bar{d}\sigma$ eine unendlich kleine Grösse überhaupt dargestellt, gleichviel, ob dieselbe mathematisch oder empirisch gegeben ist. Auf diese Weise wird von vornherein manchen Verwechselungen zwischen vollständigen und unvollständigen Differentialen vorgebeugt, durch welche sonst Anfängern nicht selten Schwierigkeiten bereitet werden.

Das erste Capitel behandelt unter dem Titel „Ueber das allgemeine Princip oder Axiom der Energie“ die wichtigsten Definitionen und die Hauptsätze der Mechanik, welche in der mechanischen Wärmetheorie fortwährend Anwendung finden, und erläutert hierauf die Aequivalenz zwischen Wärme und Arbeit und das Princip der Energie für ein empirisch gegebenes materielles System. Ganz ausdrücklich wird betont, dass hier die Giltigkeit dieses Princips nur eine Hypothese ist, während dasselbe für ein Newton'sches System bekanntlich nothwendig richtig ist.

Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der Entwickelung der mechanischen Wärmetheorie für vollkommene Gase. Ziemlich früh wird hier die graphische Darstellungsweise benutzt und vollständig gleichzeitig werden die Begriffe der Curven constanten Druckes, constanten Volumens, constanter Temperatur und die adiabatischen Curven eingeführt. Hierdurch gewinnt die Darstellungsweise ausserordentlich an Eleganz und Durchsichtigkeit. Die Benutzung des Begriffes des Parameters bei der Discussion und Anwendung dieser Curven gestattet eine grosse Schärfe des mathematischen Ausdruckes, welche als ein grosser Fortschritt auf diesem Gebiete bezeichnet werden muss. Das dritte Capitel befasst sich zunächst mit den Eigenschaften der thermischen Curven und hierauf mit den Kreisprocessen der Gase. Hier ist (S. 66) von Neumann eine neue graphische Darstellungsweise der Resultate eines Kreisprocesses eingeführt worden, welche als ein glücklicher Griff angesehen werden kann.

Das vierte Capitel behandelt die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf beliebige Substanzen, deren Zustand durch zwei Argumente p und v, oder v und t etc. vollständig bestimmt ist. Für die Ableitung des zweiten Hauptsatzes beweist N. den Carnot'schen Satz, einmal ausgehend von dem Clausius'schen Axiom, das andere Mal leitet er ihn aus dem Thomson'schen Principe her. Hierauf bestimmt er mit Hilfe eines vollkommenen Gases die universelle Temperaturfunction und zeigt (S. 94), dass die Wärmemenge ∂Q, welche einer Substanz zugeführt werden muss, damit sie aus dem Zustande (t, U) in den Zustand $(t+dt, U+dU)$ übergeht, gleich

$$\partial Q = T . dU$$

ist, wenn T die absolute Temperatur und U den Parameter der adiabatischen Curve bezeichnet. Erst dann wird die Clausius'sche Form des zweiten Hauptsatzes abgeleitet. Alsdann werden die allgemeinen Clausius'schen Formeln und die Kirchhoff'schen Formeln wiedergegeben.

Die Strenge der Betrachtungsweise wird auch hier wieder dadurch documentirt, dass nochmals in einem besondern Paragraphen auf die beiden Voraussetzungen aufmerksam gemacht wird, auf denen die Entwickelung der vorhergehenden Formeln beruht, nämlich darauf, dass man von der Einwirkung der Schwerkraft auf das System absehen kann, und dass die Processe so geleitet werden, dass der Gleichgewichtszustand des Systems nie merklich geändert wird. Ein besonderer Paragraph behandelt einige Anwendungen des Princips der Energie auf tumultuarische Vorgänge.

Der methodische Gewinn, den die hohe Ausbildung der graphischen Darstellungsweise und die Einführung der Parameter der thermischen Curven darbietet, zeigt sich so recht bei Betrachtung der Verdampfungserscheinungen. Die Entwickelungen über die gegenseitige Lage der Grenzcurven des Verdampfungsgebietes einer Substanz einerseits und der übrigen thermischen Curven andererseits gestalten sich überraschend einfach und gewinnen durch die Berücksichtigung der kritischen Temperatur und der bekannten Bemerkung Kirchhoff's über den Knick der Spannungscurve gesättigter Dämpfe beim Gefrierpunkte ungemein an Anschaulichkeit und Schärfe.* Nach der Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Drucke folgt im nächsten Capitel (§ 50) eine graphische Darstellung der sämmtlichen Aggregatzustände des Wassers; dieselbe ist neu und wird jedem Physiker höchst interessant sein, selbst wenn er damit nicht einverstanden sein sollte, dass die labilen Gleichgewichtszustände

---

* Ganz beiläufig wollen wir bemerken, dass in der Tabelle für die specifischen Wärmen gesättigter Dämpfe S. 143 (61), welche dem Verdet'schen Buche entlehnt ist, für Chloroform falsche Zahlen aufgenommen worden sind. Der Rechenfehler Verdet's beruht auf einer Verwechselung der Regnault'schen Interpolationsformeln. Auch im Texte wird (dieselbe Seite Z. 4 v. u.) eine geringfügige Aenderung dadurch nothwendig. Die richtigen Zahlen findet man in meinem Handbuche der mechan. Wärmetheorie (Braunschweig, Vieweg), Bd. I, S. 626.

flüssigen Wassers unter 0^0 nicht mit berücksichtigt worden sind. Auf jeden Fall haben wir es in § 50 mit einem methodischen Fortschritte zu thun, der nicht blos dem Verfasser dieser Zeilen Anregung zu neuen Untersuchungen über die Beschaffenheit der Grenzcurven sein wird.

Auch die Behandlung der Gasgemische im siebenten Capitel und die Untersuchungen über die Dampfspannungen und Wärmeentwickelungen bei Herstellung wässeriger Schwefelsäurelösungen, die Ableitungen der hierher gehörigen Kirchhoff'schen Formeln bieten zum Theil neue, für die Beurtheilung der Vorgänge wichtige Gesichtspunkte. Das achte Capitel beschäftigt sich mit den Kirchhoff'schen Gleichungen für die Wärmeentwickelungen bei Gasabsorptionen und zeichnet sich, ebenso wie das vorhergehende, durch scharfe Sonderung der einzelnen möglichen Fälle aus; uns will es jedoch scheinen, als sei diesem Gebiete, in welchem bekanntlich Theorie und Erfahrung noch nicht übereinstimmen, im Vergleich zu dem Uebrigen ein allzugrosser Raum gewidmet. Ein kurzer Anhang berichtet über die Krönig-Clausius'sche Theorie der molecularen Stösse und einige Einwendungen, welche gegen dieselbe erhoben worden sind.

Die Darstellung ist, wie schon mehrfach erwähnt worden, meisterhaft präcis und die Entwickelungen sind, wie man dies bei Neumann'schen Arbeiten gewöhnt ist, so ausführlich mitgetheilt, dass es dem Anfänger ungemein leicht werden muss, sich an der Hand dieses trefflichen Lehrbuches eine sehr respectable Summe von Kenntnissen in der mechanischen Wärmetheorie zu erwerben. Die zahlreichen Anmerkungen über die beschränkenden Voraussetzungen, unter denen die Formeln gelten, sind sehr geeignet, die Leser an Präcision zu gewöhnen und dieselben auf die Grenzen der Anwendbarkeit der Theorie aufmerksam zu machen.

Sehr, fast zu dürftig, sind die festen und tropfbar flüssigen Substanzen und die dahin gehörigen interessanten experimentellen Bestätigungen der Thomson'schen Formel weggekommen. Ueberhaupt behandelt der Verfasser die mechanische Wärmetheorie mehr wie eine mathematische, als wie eine physikalische Disciplin; wir wollen ihm hiermit keinen Vorwurf machen, obgleich das einschlagende experimentelle Gebiet dadurch fast zu sehr in den Hintergrund gedrängt worden ist.

Dass der Verfasser in diesem einführenden Lehrbuche die Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie in den übrigen Theilen der Physik und in der Technik unberücksichtigt gelassen hat, finden wir ganz in der Ordnung. Sollen wir zum Schlusse, weil dies nun einmal bei derartigen Besprechungen üblich ist, einige Bedenken geltend machen, so würde das Wesentlichste derselben wohl sein müssen, dass der Verfasser eine grosse Anzahl neuer Bezeichnungen eingeführt hat: calorische Curven für adiabatische, Temperaturcurven für Isothermen, Dampfcurven für Curven constanter Dampfmenge, die Buchstaben ε, E, H, η für die einmal allgemein acceptirte Bezeichnung der innern Energie durch U, $\mathfrak{A}$ für das mechanische Aequivalent der Wärme u. s. f. Hierdurch wird dem Anfänger, der sich durch das Neumann'sche Buch in die Disciplin einführen lässt, das Studium der einschlagenden Abhandlungen und umfänglicheren Handbücher sehr erschwert, ohne dass er dadurch einen entsprechenden Gewinn hätte, dass die neuen Namen deckender als die allgemein üblichen wären.

Ferner halten wir die Besprechung der Roche'schen Formel (S. 129) für die Spannungscurve gesättigter Dämpfe und die Erörterungen über die approximativen Gesetze (S. 144) in einem derartigen Buche für vollkommen entbehrlich. Dagegen glauben wir es als einen Mangel ansehen zu sollen, dass die überhitzten Dämpfe nur unter der Voraussetzung untersucht sind, dass dieselben dem Ausdehnungsgesetze vollkommener Gase folgen; die Arbeiten Hirn's und Zeuner's über diese Frage wären einer Beachtung wohl werth gewesen. Jedenfalls sind aber die hier angeführten wenigen Punkte, in denen wir anderer Ansicht als der Verfasser sind, sehr untergeordnet gegen die eminenten Vorzüge des Buches. Auch der Physiker, der diesem Theile seiner Wissenschaft sehr nahe steht, wird das Neumann'sche Buch mit grossem Interesse lesen und durch dasselbe manche dankenswerthe Anregung empfangen; den Studirenden der Mathematik aber muss dasselbe auf das Allerwärmste empfohlen werden. Die deutsche physikalische Literatur ist durch die Neumann'schen Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme um ein sehr werthvolles Werk bereichert worden.

Chemnitz, April 1876. RICHARD RÜHLMANN.

Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid, von Prof. L. MAJER. Programm des königl. Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahres 1874—1875. 32 S. 4°.

Schulprogramme mit wissenschaftlichen Beilagen zu versehen ist eine mühevolle, nicht selten eine undankbare Arbeit. Sie muss meistens vollzogen werden, während der Verfasser mit eigentlichen Schulgeschäften in erhöhtem Grade zu thun hat. Ein vorgeschriebener, meistens recht kleiner Raum darf nicht überschritten werden; schliesslich geht manche schöne Untersuchung durch die fast geheime Art der Veröffentlichung für die Wissenschaft spurlos zu Grunde. Manchmal freilich tragen die Verfasser selbst einen Theil der Schuld, wenn es ihren Abhandlungen an Verbreitung und Anerkennung fehlt. Wir möchten meinen, die Uebersendung eines Exemplars an die Redaction einer Fachzeitschrift lohne immer den Versuch, selbst wenn aus diesem oder jenem Grunde eine eingehendere Besprechung einmal nicht erfolgen sollte. Die Verfasser mathematischer Schulprogramme scheinen unserer Zeitschrift gegenüber diese Ansicht im Allgemeinen nicht zu theilen, und so sind wir z. B. nur durch einen Zufall mit der in der Ueberschrift genannten Untersuchung bekannt geworden, welche wir nicht anstehen, als einen dankenswerthen Beitrag zur Geschichte der Mathematik zu bezeichnen. Seit Friedlein's Ausgabe der Erläuterungen des Proklos zu den euklidischen Elementen können dieselben von Jedem, dem die alte Geometrie ein Interesse einflösst, gelesen werden; zwischen dem Können und dem Thun liegt aber nicht selten ein ziemlicher Zwischenraum. *Graeca sunt, non leguntur* ist vielen Mathematikern aus der Seele gesprochen, und so ist es schon eine verdienstliche Arbeit, durch lesbare deutsche Uebersetzungen Denen zu Hilfe zu kommen, welche vor dem griechischen Urtexte sich scheuen. Herr Majer hat einer solchen Aufgabe sich unterzogen, und wenn wir auch begreifen, dass der ihm zur Verfügung stehende Raum ihn nöthigte, sich auf ein verhältnissmässig kleines Stück des Proklos (S. 178—198 und 362—373 der Friedlein'schen Ausgabe) zu beschränken, so möge er ein Lob seiner Uebersetzung in unserem Bedauern über diese Beschränkung erkennen. Herr Majer hat übrigens sich nicht auf eine blosse Uebersetzung beschränkt und auch nicht überall die Reihenfolge des Originals beibehalten. Seine Abhandlung nimmt vielmehr folgenden Verlauf. Nach einer sechs Seiten füllenden Einleitung über die Persönlichkeit des Proklos, über seine Schriften, über philosophische und mathematische Vorbegriffe folgt die Uebersetzung des Abschnittes über die Forderungen (S. 178—193). Die fünfte und letzte Forderung bildet die Grundlage der Parallelentheorie und bot dem Uebersetzer Gelegenheit, hier einzuschalten, was Proklos (S. 362—373) gelegentlich des XXVIII. und XXIX. Satzes der Elemente zur Kritik dieser Lehre mittheilt, welche seit Ptolemaios, wenn nicht schon früher, einen Zankapfel der Geometer gebildet hat. Nun erst kehrt Herr Majer zu dem unterbrochenen Texte zurück, übersetzt den Abschnitt über die Grundsätze (S. 193—198) und schliesst mit einem $4\frac{1}{2}$ Seiten langen, „Resultate“ überschriebenen Paragraphen. Ueberall hat er auf die philosophische und historische Tragweite der Erörterungen des Proklos hingewiesen, welcher bei aller Ehrfurcht vor Aristoteles und Euklid doch eine gewisse Unabhängigkeit sich bewahrte und ebensowohl zu verbessern, als einfach zu erläutern suchte. Herr Majer selbst hat durch zahlreiche Anmerkungen für das bessere Verständniss seiner Uebersetzung gesorgt. Leider haben sich dabei verschiedene sinnentstellende Druckfehler eingeschlichen. So in Anmerkung 1 zu S. 13, deren zweiter Satz vermuthlich durch Wegfallen eines Wortes geradezu unverständlich geworden ist; so in Anmerkung 3 zu S. 1, wo Heron von Alexandrien an den Anfang des 3. Jahrhunderts v. Chr. versetzt ist, in Anm. 1 zu S. 18, wo von den Asymptoten der Parabel, Hyperbei u. s f. die Rede ist; so in Anm. 1 zu S. 11, wo Ofterdinger a. a. O. erwähnt ist, während wir jenen angeführten Ort selbst (offenbar sind die Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik von Prof. Dr. L. F. Ofterdinger, Ulm 1860, gemeint) weder vorher, noch nachher genannt finden. Die Uebersetzung selbst haben wir bereits oben als eine durchaus lesbare bezeichnet. Wer andere Uebersetzungen griechischer Mathematiker zu vergleichen Gelegenheit hatte, welche oftmals ein Zurückgehen auf den Urtext erfordern, wenn der deutsche Wortlaut verstanden werden soll, wird das Lob zu würdigen wissen, welches in dieser Bezeichnung enthalten ist. Nur Eines möchten wir nicht billigen. Herr Majer hat die griechischen Buchstaben an den Figuren gleichfalls übersetzen zu sollen geglaubt; er hat dabei die Reihenfolge des griechischen Alphabets einerseits, des lateinischen andererseits in Parallele gebracht, also A, B, Γ u. s. w. durch A, B, C u. s. w. wiedergegeben. Dadurch wird nicht nur die Vergleichung einzelner Stellen der Uebersetzung mit dem Original unnöthig erschwert, es entgeht dem Leser auch eine Eigenthümlichkeit der griechischen Geometer. In Fig. 1, 4, 6, 8 und 9 der Majer'schen Uebersetzung kommt I vor, ein Buchstabe, dessen kein griechischer Geometer in einer Figur sich bedient. Hultsch hat diesen Umstand, soviel wir wissen, zuerst betont. In seinem bekannten Aufsatze über den heronischen Lehrsatz sagt er (Zeitschr. Math. Phys. IX, S. 247, letzte Zeile): „Aber dasselbe Iota fehlt auch allenthalben bei Euklid. Nach dem Grunde davon haben wir hier nicht weiter zu fragen; es ist einfach als Thatsache anzuerkennen." Nach einer uns mündlich gemachten Bemerkung von Professor Studemund dürfte der Grund ein ganz ähnlicher gewesen sein wie dafür, dass man in modernen Abhandlungen, welche ihren Gegenstand dem Exponentialcalcul entnehmen, den Buchstaben e, in solchen, welche der Differentialrechnung angehören, den Buchstaben d als constanten Coefficienten zu vermeiden sucht. Man will eben Verwechselungen und Missverständnisse meiden, und solche waren bei Benutzung des I allerdings zu gewärtigen, weil dieser Buchstabe sich in keiner Weise von einem einfachen verticalen Striche unterschied. Uns persönlich leuchtet diese Ansicht ausserordentlich ein.

Cantor.

Hermanni Useneri ad historiam astronomiae symbola. Bonner Programm zur Geburtstagsfeier Kaiser Wilhelm I. am 22. März 1876. 35 S. 4⁰.

Das 11. Jahrhundert ging zu Ende. Michael Psellus, mit dem Ehrennamen des „Ersten der Philosophen" belegt, zeugt für die niedere Stufe, auf welche damals zu Byzanz die Nachfolger altgriechischer Astronomie herabgesunken waren, zeugt für die Unmöglichkeit, aus solcher

Entwürdigung durch eigene Kraft wieder zu Ehren zu gelangen. In der That dauert der Zustand der Versumpfung byzantinischer Astronomie wohl 230 Jahre, von 1092, als dem Datum einer letzten Schrift des Psellus, bis 1322. In diesem letztgenannten Jahre wurde von unbekanntem Uebersetzer eine griechische Bearbeitung eines persischen astronomischen Werkes angefertigt, als dessen Verfasser Σαμψ μπουχαρης genannt ist. Prof. Gildemeister hat in Samps den Namen Shamsaldîn wiedererkannt; allerdings wird ein Shamsaldîn von Bukhara nirgends erwähnt, dagegen schrieb Shamsaldîn von Samarkand vermuthlich im Jahre 1276 ein Büchlein über die Fixsterne in persischer Sprache, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass ein und derselbe Astronom, der bald in Bukhara, bald in Samarkand lebte, mit beiden Bezeichnungen gemeint sein mag. Nun folgten sich ziemlich rasch weitere byzantinische Bearbeitungen persischer Schriften, mittelbare Abflüsse der im griechischen Texte nahezu vergessenen Syntaxis des Ptolomaeus, welche selbst eine der Quellen persischer Gelehrsamkeit bildet. Chioniades von Constantinopel, welcher jedenfalls vor 1346 lebte, Georg Chrysococces im Jahre 1346 selbst, Theodorus Meliteniota (nach Leo Allatius, dem gelehrten Kenner byzantinischer Geschichte im 14. Jahrhundert, unter der Regierung des Johannes Paläologus 1361 lebend), der Mönch Isaak Argyrus vor 1368, das sind die Hauptvertreter persisch-griechischer Astronomie. Und nun erfolgt in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts ein neuer Umschlag. Mit Nicolaus Cabasilas beginnt ein neues Geschlecht von Gelehrten, welche auf Ptolemaios selbst zurückgreifen und so die Wiedergeburt klassischer Wissenschaft in Europa vorbereiten. Was wir hier in wenige Zeilen zusammengedrängt haben, bildet den Inhalt des hochinteressanten Programms, dessen philologischer Verfasser sich auch in unserer Wissenschaft wohlbewandert erweist. Herr Usener hat aus Handschriften verschiedener Bibliotheken umfassende Bruchstücke der obengenannten Byzantiner des 14. Jahrhunderts gesammelt, welche er hier zum ersten Male veröffentlicht, Belegstücke für seine Auffassung, deren innere Wahrheit überdies sich selbst als Stütze dient.

Cantor.

Schwere, Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearb. von Karl Hattendorff. Hannover, Carl Rümpler. 1876.

Das von der Verlagshandlung vorzüglich ausgestattete Werk enthält auf 358 Seiten gr. 8° den in der Ueberschrift genannten Stoff in folgender Anordnung. Der erste Theil bis S. 176 enthält die Lehre von der Schwere als allgemeine Lehrsätze über die Potentialfunction und das

Potential, der zweite Theil die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus.

Wie in der Vorrede erwähnt, ist das Buch aus den Vorlesungen hervorgegangen, die Riemann über Schwere, Elektricität und Magnetismus im Sommersemester 1861 in Göttingen gehalten hat. Der Stoff also ist der Hauptsache nach Riemann's Eigenthum, während die Form und Darstellung das Werk des Herausgebers ist.

Mit Freuden erkennt Referent an, dass sich wenigstens bei ihm die in der Vorrede ausgesprochene Hoffnung, „dass das vorliegende Buch den Freunden Riemann's nicht unwillkommen sein werde", vollständig erfüllt hat. Das vorliegende Werk stellt sich dem entsprechenden über partielle Differentialgleichungen würdig an die Seite und Referent erblickt namentlich auch darin einen historischen Werth, dass es genau den Standpunkt erkennen lässt, auf dem im Jahre 1861 die mathematische Physik über Schwere, Elektricität und Magnetismus sich befand. Insbesondere verdient auch noch die Klarheit hervorgehoben zu werden, mit der die einzelnen Abschnitte behandelt sind, so dass auch die Studirenden der Mathematik das Buch mit Vortheil benützen können.

Der Umfang, in welchem der gebotene Stoff behandelt ist, ist schon genügend durch die Zeit und Gelegenheit bezeichnet, der das Buch seine Entstehung verdankt, und durch den Raum, welchen die beiden Haupttheile einnehmen; Referent glaubt daher von einer nähern Inhaltsangabe absehen zu können. Von dem, was die spätere Zeit zu dem behandelten Stoffe hinzugeliefert hat, ist nur verhältnissmässig wenig erwähnt. Hier hätte Referent gern gesehen, wenn der Herausgeber nicht nur, wie er gethan hat, die Begriffe von Potentialfunction und Potential nach der Anregung von Clausius genauer geschieden, sondern wenn er auch die strengeren Begriffe von Ergal, Energie und Entropie aufgenommen hätte.

In der Literaturangabe möchten wir fragen, ob Clausius: Die Potentialfunction und das Potential, und Beer: Einleitung etc., mit Absicht weggelassen worden sei?

Th. Kötteritzsch.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1876.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathemat.-physikal. Classe. 1875, 3. und 4. Heft. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

——, 1876, 1. und 2. Heft. Ebendas. 2 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Ohrtmann, Müller und Wangerin. 6. Bd. Jahrg. 1874, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 3 Mk. 60 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von Schönfeld und Winnecke. 11. Jahrg. 1876, 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge, 24. Bd., Jahrg. 1874. Wien, Wallishauser. 11 Mk.

Reine Mathematik.

Schendel, Leop., Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem. Jena, Costenoble. 1 Mk. 80 Pf.

Escherich, G. v., Beiträge zur Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzelsysteme und der Resultante simultaner Gleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Seifert, W., Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$(t-a)(t-b)(t-c)\frac{d^2y}{dt^2}+(\alpha+\beta t+\gamma t^2)\frac{dy}{dt}+(\delta+\varepsilon t)\,y=0.$$

(Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Winckler, A., Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mittelst einfacher Quadraturen. Wien, Hölder. 2 Mk.

Hoppe, R., Tafeln zur 30stelligen logarithmischen Rechnung. Leipzig, C. A. Koch's Verlag. 80 Pf.

Frombeck, H., Die Grundgebilde der Liniengeometrie. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

HOPPE, R., Principien der Flächentheorie. Leipzig, C. A. Koch's Verl. 1 Mk. 80 Pf.

SCHILKE, E., Die Newton'sche Erzeugung der Kegelschnitte. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 60 Pf.

MOSHAMMER, C., Zur Geometrie der Schraubenbewegung und einer Regelfläche dritter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

ARENDT, G., *Trigonométrie rectiligne.* Berlin, Herbig. 1 Mk.

SCHENK, Mathematische Uebungsaufgaben, bearb. v. d. Schülern der 8. Cl. am k. k. akad. Gymnasium in Wien. Wien, Hölder. 1 Mk.

GAUSS, C. F., Werke. 2. und 3. Bd. 2. Abdruck. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. à 15 Mk.

Angewandte Mathematik.

Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1873 und 1874, sowie im Jahre 1875. Berlin, Imme. à 9 Mk.

Das rheinische Dreiecksnetz. 1. Heft: Die Bonner Basis. Ebdas. 6 Mk.

Zusammenstellung der Literatur der Gradmessungsarbeiten. Ebendas. 2 Mk. 50 Pf.

SCHREIBER, P., Handbuch der barometrischen Höhenmessung. Weimar, Voigt. 9 Mk.

HAGEN, G., Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers. Berlin, Ernst & Korn. 4 Mk.

MEISSNER, G., Die Hydraulik und die hydraulischen Motoren. 1. Bd.: Die Hydraulik. 1. Heft. Jena, Costenoble. 3 Mk.

SCHIAPARELLI, G., Die Vorläufer des Copernicus im Alterthum. Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk. 80 Pf.

VOSS, A., Ueber die mechanischen Grundsätze und die mathematische Entwickelungsform Newton's in seinem Werke *Philosophiae nat. principia mathem.* (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

STERNECK, A. v., Ueber den Einfluss des Mondes auf die Richtung und Grösse der Schwerkraft der Erde. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

SACHAU, E. und J. HOLETSCHEK, Berechnung der Entfernung des Sonnen-Apogäums von dem Frühlingspunkte bei Albîrûnî. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

HERMES, O., Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. Berlin, Winckelmann & Söhne. 1 Mk.

ARENDTS, C., Grundzüge der mathematischen und physikalischen Geographie. Regensburg, Manz. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

SECCHI, A., Die Einheit der Naturkräfte, übersetzt von L. R. SCHULZE. 4. Lief. Leipzig, Frohberg. 4 Mk.

SACHER, E., Neue physikalische Versuche als Beitrag zur Theorie der Erdbildung. Salzburg, Mayr. 40 Pf.

Obermayer, A. v., Ueber die Abhängigkeit der Coefficienten der innern Reibung der Gase von der Temperatur. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Puluj, J., Ueber die Abhängigkeit der Reibung der Gase von der Temperatur. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Pfaundler, L., Das Princip der ungleichen Moleculzustände, angewendet zur Erklärung der übersättigten Lösungen, der Siedeverzüge etc. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Subic, S., Manometer-Hygrometer. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Reitlinger, E., Ueber einige merkwürdige Erscheinungen in Geissler-schen Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Puschl, C., Neue Sätze der mechanischen Wärmetheorie. II. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Pilling, O., Ueber die Beziehungen der Wärmecapacität der Gase zu den zwischen den Atomen wirkenden Kräften. (Dissert.) Jena, Deistung. 80 Pf.

Sand, J., Die mechanische Wärmetheorie in ihrem Zusammenhange mit den Principien der neueren Physik. Eichstätt, Krüll. 2 Mk. 50 Pf.

Exner, J., Ueber den Einfluss der Temperatur auf das galvanische Leitungsvermögen des Tellur. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Weyprecht, K., Hauptresultate der magnetischen Beobachtungen während der österreich. Polarexpedition. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Rosicky, W., Ueber mechanisch-akustische Wirkungen des elektrischen Funkens. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Jochmann, E., Grundriss der Experimentalphysik. 4. Aufl., herausgeg. von O. Hermes. Berlin, Winckelmann & S. 4 Mk. 50 Pf.